

Universidade Federal da Bahia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**EQUAÇÃO DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU: REPRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES AO  
OSCILADOR HARMÔNICO BIDIMENSIONAL NUM CAMPO MAGNÉTICO  
TRANSVERSO E AO POTENCIAL DE MORSE**

Olavo de Britto Abla

*Salvador, setembro de 2020*

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EQUAÇÃO DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU: REPRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES AO  
OSCILADOR HARMÔNICO BIDIMENSIONAL NUM CAMPO MAGNÉTICO  
TRANSVERSO E AO POTENCIAL DE MORSE

Olavo de Britto Abla

Dissertação de Mestrado apresentada à Banca examinadora do PPGFIS-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador:** Luciano Melo Abreu  
**Coorientador:** Esdras Santana dos Santos  
**Coorientador:** Ignacio Sebastián Gomez

*Salvador, setembro de 2020*

EQUAÇÃO DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU: REPRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES AO  
OSCILADOR HARMÔNICO BIDIMENSIONAL NUM CAMPO MAGNÉTICO TRANSVERSO  
E AO POTENCIAL DE MORSE

OLAVO DE BRITTO ABLA

Dissertação de Mestrado apresentada à Banca  
Examinadora do PPGFIS-UFBA como requisito  
parcial para obtenção do título de Mestre em  
Física, aprovada em 02 de setembro de 2020.

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Luciano Melo Abreu (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Ernesto Pinheiro Borges  
UFBA

---

Prof. Dr. Humberto Belich Junior  
UFES

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.

Dedico aos meus pais Maria Regina Abla e  
Marco Antônio Abla (in memoriam).

## Agradecimentos

Ao Professor Luciano Melo Abreu pela orientação e solicitude.

Ao Professor Esdras Santana dos Santos pela amizade, pelos conselhos, pela preocupação e confiança. Muito obrigado pela atenção e dedicação com a minha formação.

A Ignacio Gomez pelas valiosas sugestões e revisão criteriosa que enalteceraam esta dissertação.

À Isabela Morais pelos anos de companheirismo, pelo incentivo e ajuda durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Muito obrigado por tudo.

À Professora Maria das Graças Reis Martins pela amizade, incentivo e preocupação com a minha formação.

Aos amigos do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, em especial Gleidson Santos, Nelson Dumienne, Marcos Paulo, Ademir Santos, Leonardo Rojas e Alfredo Blanco.

À minha família, em especial Maria Regina Abla, Danton de Britto Abla, Marco Antônio de Britto Abla, Antônia Britto e Marli Britto.

À Ângela Scippa, Maria dos Santos (in memoriam) e Benedito Morais.

Aos amigos Eduardo Saback e João Pesente.

Ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## Resumo

Esse trabalho apresenta um estudo da Duffin-Kemmer-Petiau, com aplicações aos osciladores relativísticos deformados, e aos osciladores bidimensionais imersos num campo magnético. Como ponto de partida, inspirado na estatística de Tsallis, utilizamos o acoplamento não mínimo com o momento linear deformado e investigamos a termodinâmica dos osciladores de Dirac e DKP escalar deformados, mapeando-os num potencial do tipo Morse, reproduzindo estados vibracionais em sistemas unidimensionais e tridimensionais. Em seguida, revisitamos o oscilador de DKP bidimensional na presença de um campo magnético externo e analisamos os resultados para os setores escalar e vetorial da teoria DKP, identificando um deslocamento nas frequências de oscilação para as componentes do campo vetorial. Estudamos a termodinâmica deste sistema, bem como a ocorrência de transição de fase entre estados acoplados e de partículas livres. Implementamos o espaço não comutativo através do produto Moyal nesse sistema, e corroboramos os resultados do limite não relativístico utilizando a covariância Galileana. Por fim, utilizamos o formalismo de Umezawa com o propósito de construir equações lineares para campos Galileanos, além de obtermos o vetor de Pauli-Lubanski a partir dos operadores de projeção do campo DKP Galileano.

## Abstract

This work presents a study of the Duffin-Kemmer-Petiau theory, with applications to deformed relativistic oscillators and two-dimensional oscillators immersed in a magnetic field. First, inspired in the Tsallis statistics, we use the non-minimal coupling with a deformed linear momentum operator and investigate the thermodynamics of Dirac and scalar DKP deformed oscillators, mapping them into a relativistic Morse-like potential, recovering S-wave states in one-dimensional and three-dimensional systems. Then we revisit the two-dimensional DKP oscillator in an external magnetic field and investigate the result in the scalar and vector sectors, which in the last one we identified a splitting in the frequencies. We study the thermodynamics of this system, as well the occurrence of phase transition in a coupled-free particle systems. We implement in this system the Moyal product, and corroborated the non-relativistic regime with Galilean covariance. Finally, we use the Umezawa formalism to construct linear equations for Galilean fields, and discussing the Pauli-Lubanski vector with the projective operators of the Galilean DKP field.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau</b>	<b>3</b>
2.1	As Representações das Matrizes DKP . . . . .	7
2.1.1	Representações para o Setor Escalar . . . . .	8
2.1.2	Representações para o Setor Vetorial . . . . .	9
2.2	Os Operadores de Projeção . . . . .	13
2.2.1	Projetores para o Setor Escalar . . . . .	14
2.2.2	Projetores para o Setor Vetorial . . . . .	14
2.2.3	O operador de spin . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Osciladores Relativísticos Deformados</b>	<b>16</b>
3.1	O Momentum Linear Generalizado . . . . .	16
3.1.1	Os Osciladores de DKP Escalar e de Dirac . . . . .	17
3.2	O Oscilador Deformado em $(1 + 1)$ Dimensões . . . . .	18
3.3	O Oscilador Deformado em $(3 + 1)$ Dimensões: A Equação Diferencial Radial Generalizada . . . . .	21
3.4	A Termodinâmica dos Estados Vibracionais: A Anomalia Schottky . . . . .	23
<b>4</b>	<b>O Oscilador DKP em um Campo Magnético Transverso</b>	<b>27</b>
4.1	O formalismo . . . . .	28
4.1.1	O Oscilador DKP Escalar Bidimensional . . . . .	28
4.1.2	O Oscilador DKP Vetorial Bidimensional . . . . .	28
4.2	O Oscilador DKP na Presença de um Campo Magnético . . . . .	30
4.2.1	O Oscilador DKP Escalar na Presença de um Campo Magnético . . . . .	30
4.2.2	O Oscilador DKP Vetorial na Presença de um Campo Magnético . . . . .	31
4.2.3	Casos Especiais . . . . .	33
4.3	Análise dos Resultados . . . . .	34
4.4	A Termodinâmica do Setor Vetorial . . . . .	36
4.5	O Oscilador DKP no Espaço Não Comutativo . . . . .	39
4.5.1	O Oscilador DKP Escalar Não Comutativo . . . . .	40
4.5.2	O Oscilador DKP Vetorial Não Comutativo . . . . .	40
<b>5</b>	<b>O Campo DKP Galileano</b>	<b>42</b>
5.1	O Grupo de Galilei e o Campo de Schrödinger . . . . .	42
5.2	A Equação Linear Galileana . . . . .	44
5.3	Os Operadores de Projeção e o Vetor de Pauli-Lubanski . . . . .	48
5.3.1	O Vetor de Pauli-Lubanski . . . . .	49
5.4	O Oscilador DKP Galileano Bidimensional . . . . .	50
5.4.1	O Oscilador DKP Galileano Escalar num Campo Transverso . . . . .	50
5.4.2	O Oscilador DKP Galileano Vetorial num Campo Transverso . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>54</b>

Apêndices	55
A Notações e Convenções	55
B O Oscilador DKP Tridimensional	57
C A Aproximação de Pekeris	58
D O Método Nikiforov-Uvarov	59
E O Vetor de Pauli-Lubanski	60
Referências Bibliográficas	61

# Capítulo 1

## Introdução

As grandes revoluções da física no final do século XIX e início do século XX estão relacionadas ao surgimento da teoria da relatividade especial e da mecânica quântica, que viabilizaram o estudo de fenômenos cujo tratamento não era possível com a mecânica clássica, como a radiação do corpo negro e o efeito fotoelétrico. Porém a discussão de fenômenos quânticos, como os estados de multi-partícula, entremeados pelos procedimentos de criação e aniquilação destas, não tinham o embasamento teórico necessário à época para serem tratados pela mecânica quântica usual, o que provocou o surgimento da mecânica quântica relativística [1].

Com o propósito de compatibilizar os princípios da mecânica quântica com a teoria da relatividade especial, foi proposta a equação de onda relativística de Klein-Fock-Gordon [2] que satisfaz a relação de dispersão  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $E$  a energia,  $p$  o momentum linear e  $m$  a massa da partícula. A equação de Klein-Fock-Gordon foi obtida a partir da quantização canônica desta relação, o que leva a equações de onda relativísticas com derivadas de segunda ordem no espaço e no tempo. Tais equações são invariantes por transformações de Lorentz e suas soluções correspondem fisicamente a funções de onda de partículas escalares, a exemplo dos píons. Buscando resolver as inconsistências associadas à definição da densidade de probabilidade via equação de Klein-Fock-Gordon, P. Dirac propôs em 1928 uma equação de onda relativística em primeira ordem nas derivadas espaço-temporais, a equação de Dirac [3], que descreve o comportamento de partículas de spin  $1/2$ , a exemplo dos elétrons. Os ganhos imediatos obtidos com esta formulação estão associados à predição das antipartículas, como o pósitron, e à obtenção do spin como uma propriedade natural da partícula, deduzida diretamente da equação e não via postulado. Assim, usando esta equação, Dirac propôs a descrição do elétron no átomo de hidrogênio com excelente aproximação para a constante de estrutura fina [3]. O estabelecimento matemático deste problema requer a introdução dos chamados operadores de criação e aniquilação, e tais operadores são uma generalização formal do estado de uma partícula representado pela função de onda relativística. Estes são formalmente referidos como funções de onda quantizadas, e cuja transição é conhecida pelo procedimento de segunda quantização. A conclusão proposta por Dirac para os estados de energia negativa é, de maneira sucinta, que estados não preenchidos são partículas cuja carga é oposta à carga do elétron, denominadas pósitrons, de modo que a carga elétrica total assim se conserva.

Diante do sucesso da equação de Dirac, iniciou-se a busca por equações de onda lineares que descrevessem partículas com outros valores de spin, principalmente baseando-se nas equações do fóton [4] e do bóson vetorial massivo [5]. Neste contexto é proposta a equação linear de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [6]- [8], que descreve de forma unificada partículas e campos de spin zero (escalares) e de spin unitário (vetoriais). Sua versão para campos não massivos foi proposta mais tarde por Harish-Chandra [9]. Um retrospecto histórico completo pode ser apreciado no trabalho de Krajcik e Nieto [10]. Apesar da similaridade com a equação de Dirac, o formalismo DKP é um pouco mais intrincado, o que pode ser percebido por : a) a dependência entre suas componentes [11,12]; b) a não trivialidade do tratamento de campos não massivos, requerendo mais do que simplesmente tornar o termo de massa nulo [9]; c) a equivalência entre as equações de DKP e as equações de Klein-Fock-Gordon e Proca [13] que, embora seja consistente com interações do tipo não minimal [14] e funcione bem para campos livres [15] e para campos com interações eletromagnéticas

via acoplamento mínimo [16], ainda não está completamente mitigada e d) a possibilidade de utilização de representações específicas da teoria [17] ou, sem prejuízo, dos seus operadores de projeção que selecionam seus setores escalar e vetorial [18]. Diversas aplicações da teoria DKP foram realizadas, a exemplo de teorias de Yang-Mills [19], na cromodinâmica quântica [36], no espalhamento de mésons [20] e em núcleos atômicos do tipo  $K^+$  [21], estudos na matriz S [22], na quebra de simetria de Lorentz [23] no formalismo Galileano pentadimensional [24]- [31], em condensados de Bose-Einstein [30, 32] dentre outros [33]- [38], sendo o oscilador DKP [33] uma delas.

O estudo do oscilador DKP data do início dos anos 1990 [33] e foi proposto inspirado no oscilador de Dirac [39]. Este oscilador harmônico quântico relativístico, diferente do oscilador de Dirac [40]- [44], não angariou tanta importância principalmente em estudos experimentais. No final da década passada, alguns estudos sobre osciladores DKP bidimensionais na presença de um campo magnético transversal [45]- [48] foram elaborados, utilizando particularizações das componentes do setor vetorial da equação de onda de tal modo a resolver analiticamente o problema, porém negligenciando termos que surgem neste setor como o acoplamento spin-órbita [33]. Surgem então novas questões acerca das propriedades deste sistema, como por exemplo quais efeitos o campo magnético transversal acarreta no setor vetorial do sistema oscilante quando se usa outras particularizações da função de onda DKP que não afetam seu caráter vetorial? Como implementá-las no formalismo da covariância Galileana?

Os estudos de campos não relativísticos utilizando as transformações de Galilei como grupo de simetria foram iniciados nos trabalhos de Lévy Leblond [49, 50], onde, assim como em teorias relativísticas, buscou-se uma forma covariante para descrever o campo escalar de Schrödinger, o de férmions, bem como o chamado eletromagnetismo Galileano [51]. A covariância Galileana foi proposta formalmente nos trabalhos de Y. Takahashi [52]- [53] e de Omote, Kamefuchi, Takahashi e Ohnuki [54], com o objetivo de buscar, usando as transformações estendidas de Galilei como grupo de simetria, uma forma covariante para descrever campos não relativísticos, a exemplo do campo escalar, do campo fermiônico de Pauli-Dirac e do eletromagnetismo Galileano [51]. O estudo do campo de Duffin-Kemmer-Petiau Galileano foi inicialmente proposto para o setor escalar [24], após demonstradas suas representações inspiradas na teoria relativística usual. A partir disto, desenvolve-se o ferramental matemático necessário para a sua formulação, como o estudo do setor vetorial [25], dos projetores [27], da quantização canônica do setor escalar da teoria [28] e de suas representações em dimensões arbitrárias [31], assim como sua aplicação em osciladores bosônicos [25], em espaços não-comutativos [29], em condensados de Bose-Einstein [30] e geração de massa topológica em duas dimensões [31].

Inspirados no desenvolvimento da estatística de Tsallis [55]- [57], e conseqüentemente do  $q$ -cálculo [56], investigamos os efeitos de  $q$ -deformações [58]- [61] nos acoplamentos do tipo não-mínimo na teoria DKP. Neste sentido, usando as representações em  $(1 + 1)$  e  $(3 + 1)$  dimensões, estudamos os osciladores relativísticos de DKP escalar e de Dirac. Os resultados obtidos estão em concordância com a literatura para os estados vibracionais de três moléculas diatômicas. A seguir realizamos o tratamento termodinâmico de um ensemble canônico para cada grupo de moléculas, no limite não relativístico, e para um gás de elétrons no caso relativístico. Em outra direção, revisitamos o oscilador DKP bidimensional sob a influência de um campo magnético transversal [45]- [48] e estudamos seus efeitos no setor vetorial da teoria. Os resultados apontam para um deslocamento das frequências de oscilação das componentes do campo vetorial. Em seguida, analisamos a termodinâmica do setor vetorial deste sistema e os efeitos que ocorrem por conta da divisão da frequência de oscilação. Explorando a teoria DKP Galileana e seguindo o formalismo de Umezawa [13], propomos uma equação linear geral Galileana covariante para campos não relativísticos. Ainda no contexto Galileano, definimos o vetor de Pauli-Lubanski da teoria e construímos o seu operador de spin e tratamos o oscilador DKP Galileano num campo magnético transversal.

Os capítulos deste trabalho se organizam da seguinte forma. No capítulo dois faremos um breve revisão da teoria DKP, enfatizando suas representações e principais propriedades dos seus setores escalar e vetorial. Usando o momento linear  $q$ -deformado, estudamos no capítulo três os osciladores DKP em  $1 + 1$  dimensões e o de Dirac em  $3 + 1$  e analisamos seus efeitos termodinâmicos. No capítulo quatro apresentamos o estudo do oscilador DKP bidimensional, comutativo e não comutativo, com uma interação magnética transversal e analisamos sua termodinâmica. As álgebras e equações lineares para campos não relativísticos de spins 0,  $1/2$  e 1 bem como o operador de spin, via contração do vetor de Pauli-Lubanski, são obtidos no capítulo cinco. Como aplicação, é tratado o oscilador DKP Galileano num campo transversal. As considerações finais sobre os resultados obtidos e as perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas no capítulo seis.

## Capítulo 2

# A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau

A equação de movimento, chamada de equação de Klein-Fock-Gordon, para um campo relativístico  $\psi$  de massa  $m$  é escrita da forma [1]:

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0. \quad (2.1)$$

onde  $\partial_\mu$  é a notação covariante de Lorentz para derivada espaço-temporal quadridimensional, e  $g^{\mu\nu}$  é a métrica deste espaço-tempo (ver Apêndice A). Esta equação pode ser linearizada usando-se a abordagem proposta por Umezawa em [13] e que será explicada em detalhes no Capítulo 5 quando aplicada aos campos não relativísticos Galilei covariantes. Aqui apresentaremos apenas uma síntese dos resultados obtidos em [13].

A versão linearizada da equação de Klein-Fock-Gordon é escrita da forma:

$$\Lambda(\partial)\varphi = 0, \quad (2.2)$$

onde  $\Lambda(\partial) = (\Lambda_{ij})$  é um operador matricial e  $\varphi = (\varphi_j)$  é um campo de  $n$  componentes, com  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ . A forma do operador  $\Lambda$  é

$$\Lambda(\partial) = (i\hbar\beta^\mu\partial_\mu - mcI). \quad (2.3)$$

onde  $\beta^\mu$  são as matrizes que substituirão uma das derivadas  $\partial^\mu$  presente (2.1) e  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Vale salientar que, uma vez conhecidas as matrizes  $\beta^\mu$  e aplicadas à (2.2), obtém-se a equação (2.1) após a combinação das equações extraídas de (2.2). Todavia, cada componente de  $\varphi$  deve obedecer a (2.1). Considerando que todos os campos relativísticos devem satisfazer a relação de dispersão e, conseqüentemente, à equação de Klein-Fock-Gordon, impõe-se a necessidade de um operador  $D(\partial) = (D(\partial)_{ij})$  tal que ao atuar em (2.2) resulte em (2.1). Este operador é proposto por Umezawa como uma série infinita de derivadas expressa por

$$D(\partial) = \alpha + \alpha^\mu\partial_\mu + \alpha^{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} + \alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3} + \dots \quad (2.4)$$

onde os coeficientes  $\alpha, \alpha^\mu, \alpha^{\mu_1\mu_2}, \dots$  são tensores a serem determinados pelo uso da condição

$$D(\partial)\Lambda(\partial) = \left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)I. \quad (2.5)$$

A série expressa pelo operador  $D$  deve possuir um corte para que a igualdade acima seja satisfeita. O critério obtido por Umezawa para determinar este corte na série  $D$  foi o spin da partícula descrita pela Eq. (2.2). Assim, trataremos abaixo os casos discutidos por Umezawa nos quais as partículas descritas por (2.2) possuem spin  $s = 1/2$  e  $s = 1$ .

Vamos então escolher o caso particular em que  $s = 1/2$ . Neste caso, a série  $D$  se reduz a  $D = \alpha + \alpha^\nu\partial_\nu$  e a igualdade acima é reescrita da forma

$$(\alpha + \alpha^\nu\partial_\nu)\left(i\hbar\beta^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}I\right) = \left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)I, \quad (2.6)$$

de modo que

$$i\hbar\alpha\beta^\mu = mc\alpha^\mu I \quad (2.7)$$

$$i(\alpha^\nu\beta^\mu + \alpha^\mu\beta^\nu) = 2g^{\mu\nu} \quad (2.8)$$

$$\hbar\alpha I = -mcI. \quad (2.9)$$

Estas condições conduzem à forma como as matrizes  $\beta^\mu$  se combinam quando a equação (2.2) descreve partículas de spin 1/2, ou seja, a chamada álgebra de Clifford destas matrizes, a saber

$$\beta^\nu\beta^\mu + \beta^\mu\beta^\nu = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Neste contexto, a equação (2.2) expressa a conhecida equação de Dirac que descreve partículas de spin 1/2:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0, \quad (2.11)$$

onde  $\psi$  é o spinor ou campo de Dirac e  $\beta^\mu = \gamma^\mu$ . Assim, para um espaço-tempo com 3 + 1 dimensões,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , as matrizes  $\gamma^\mu$  podem ser representadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.12)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $0$  a matriz nula  $2 \times 2$  e  $\sigma^j$  as matrizes de Pauli definidas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} \cdot & -i \\ i & \cdot \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

com o símbolo “ $\cdot$ ” dentro das matrizes definido de agora em diante como 0, por uma questão de simplificação. Como pode ser deduzido, em 3+1 dimensões do espaço-tempo, o campo de Dirac,  $\psi$ , é um *espinor* de quatro componentes independentes.

Consideremos agora o caso em que (2.2) descreva partículas de spin  $s = 1$ . Assim, seguindo o mesmo critério proposto por Umezawa temos que o operador  $D$  se reduz a  $D = \alpha + \alpha^\mu\partial_\mu + \alpha^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma$  e a igualdade (2.5) é reescrita da forma

$$(\alpha + \alpha^\mu\partial_\mu + \alpha^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma) \left( i\beta^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}I \right) = \left( \partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) I. \quad (2.14)$$

Assim, comparando os dois lados da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \hbar\alpha &= -mcI \\ \alpha^\mu &= -i\beta^\mu \\ \alpha^{\mu\nu} &= \frac{\hbar}{mc} \left[ \frac{1}{2}(\beta^\nu\beta^\mu + \beta^\mu\beta^\nu) - g^{\mu\nu} \right] \\ 0 &= \sum_P \left[ \frac{1}{2}(\beta^\mu\beta^\rho\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\rho\beta^\mu) - g^{\mu\rho}\beta^\nu \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde a última equação, ao tomarmos todas as permutações possíveis das variáveis  $\mu, \rho$  e  $\nu$ , nos leva à regra de combinação das matrizes  $\beta^\mu$  para o caso de spin  $s = 1$ , ou seja

$$\beta^\mu\beta^\rho\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\rho\beta^\mu = g^{\mu\rho}\beta^\nu + g^{\nu\rho}\beta^\mu. \quad (2.16)$$

Neste sentido, a combinação das matrizes  $\beta^\mu$  acima se constitui na álgebra das matrizes presentes na equação (2.2), que por sua vez expressa a conhecida equação de Duffin-Kemmer-Petiau para partículas vetoriais massivas e de spin 1, isto é

$$(i\hbar\beta^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0. \quad (2.17)$$

Vale salientar que a álgebra e a equação de DKP, mostradas acima, descrevem também partículas de spin zero, as partículas escalares massivas, de onde se conclui que a formulação DKP apresenta dois setores, o escalar (spin zero) e o vetorial (spin 1), cada um com sua representação específica para as matrizes  $\beta^\mu$  e para o campo  $\Psi$ . Neste sentido, para o caso em que o espaço-tempo possui 3 + 1 dimensões, o setor escalar é descrito por matrizes  $\beta^\mu$  com dimensões  $5 \times 5$ , dadas por:

$$\begin{aligned} \beta^0 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & \beta^1 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ \beta^2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & \beta^3 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

e por um campo  $\Psi$  com 5 componentes

$$\Psi_{3+1} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

As matrizes  $\beta^\mu$  e o campo  $\Psi$  mostrados acima, quando aplicados à equação DKP (2.17) resultam nas equações

$$\begin{aligned} \psi_\mu &= i\partial_\mu \psi, \\ \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi &= i\partial_\mu \psi^\mu, \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo  $\psi$  um campo escalar de massa  $m$  e  $\psi_\mu$  as componentes subsidiárias de  $\Psi$ . Substituindo  $\psi_\mu$  na última equação acima, temos

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0, \quad (2.21)$$

que representa a equação de Klein-Fock-Gordon (2.1). O setor vetorial, em 3 + 1 dimensões, é descrito por

matrizes  $10 \times 10$ , dadas por

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

e um campo  $\Psi$  com 10 componentes dado por

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iG_{10} \\ iG_{20} \\ iG_{30} \\ iG_{23} \\ iG_{31} \\ iG_{12} \\ \frac{mc}{\hbar} A_1 \\ \frac{mc}{\hbar} A_2 \\ \frac{mc}{\hbar} A_3 \\ \frac{mc}{\hbar} A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathbf{E} \\ i\mathbf{B} \\ i\frac{mc}{\hbar}\mathbf{A} \\ -\frac{mc}{\hbar}\phi \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

onde  $E_i = G_{i0}$  e  $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}G_{jk}$ ,  $A_\mu = (A_0, \mathbf{A}) = (-\phi, \mathbf{A})$ , com  $G_{\mu\nu} = -G_{\nu\mu}$ . Assim, aplicando as matrizes  $\beta^\mu$  e o campo  $\Psi$ , acima descritos, na equação DKP (2.17), obtém-se

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial^\mu G_{\mu\nu} = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A_\nu. \quad (2.23)$$

Se aplicarmos o operador  $\partial^\nu$  na última equação e usarmos a antissimetria do tensor  $G_{\mu\nu}$ , obtemos a condição para o campo vetorial massivo  $A_\mu$ , isto é  $\partial^\mu A_\mu = 0$ , o que implica que este campo possui apenas três componentes independentes. Usando esta condição e combinando as duas equações acima, teremos:

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) A_\nu = 0, \quad (2.24)$$

ou seja, a equação de Klein-Fock-Gordon para o campo vetorial massivo  $A_\nu$ .

O formalismo DKP acima mostrado foi construído para campos massivos. O tratamento para o caso não-massivo pode ser feito de uma maneira similar, porém não se deve simplesmente zerar a massa na equação DKP (2.17). A abordagem a ser seguida neste caso foi proposta por Harish-Chandra em [9]. Assim, considerando as equações (2.20) para o setor escalar, no espaço-tempo 3 + 1 dimensional da teoria DKP e fazendo  $m = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \psi_\mu &= i\partial_\mu \psi, \\ 0 &= i\partial_\mu \psi^\mu, \end{aligned} \quad (2.25)$$



de modo que a equação DKP pode ser escrita da seguinte forma

$$\left( \frac{i\hbar}{c} \beta^\mu \partial_\mu - \gamma \right) \Psi = 0, \quad (2.26)$$

onde as matrizes  $\beta^\mu$  são as mesmas utilizadas para o setor escalar massivo da teoria, enquanto  $\gamma$  é uma matriz diagonal  $5 \times 5$  expressa por

$$\gamma = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 0) \quad (2.27)$$

e que obedece a álgebra

$$\beta^\mu \gamma + \gamma \beta^\mu = \beta^\mu, \quad \gamma^2 = \gamma. \quad (2.28)$$

Para o setor vetorial não massivo também em  $3 + 1$  dimensões, partimos das equações (2.23) e tomamos  $m = 0$ , o que implica em

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.29)$$

onde as matrizes  $\beta^\mu$  são as mesmas utilizadas para o setor vetorial massivo da teoria, enquanto  $\gamma$  é uma matriz diagonal  $10 \times 10$  expressa por

$$\gamma = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \quad (2.30)$$

e que obedece a álgebra (2.28). O campo DKP vetorial não massivo, ou campo de Maxwell [13], é expresso por

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iG_{10} \\ iG_{20} \\ iG_{30} \\ iG_{23} \\ iG_{31} \\ iG_{12} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathbf{E} \\ i\mathbf{B} \\ i\mathbf{A} \\ -\phi \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

onde pode ser notado que não se anulou a massa nas componentes do campo.

## 2.1 As Representações das Matrizes DKP

As dimensões das representações DKP do espaço-tempo de Minkowski foram calculadas por Kemmer em [11] e são mostradas na tabela abaixo, onde  $d$  é a dimensão do espaço-tempo de Minkowski,  $N_e$  é o número de elementos linearmente independentes da álgebra DKP e os pares de representações apresentadas entre parênteses na ordem das matrizes são conhecidas como representações gêmeas. Estas duas representações ocorrem sempre nas dimensões ímpares e diferem uma da outra pelo sinal de uma das matrizes. A relação das dimensões das matrizes com o número de elementos independentes da álgebra, estabelecida pelo teorema da irredutibilidade na teoria de grupos [12], afirma que o número  $N_e$  é igual a soma dos quadrados das dimensões das representações irredutíveis da teoria. Assim, por exemplo, da tabela acima pode-se perceber claramente que para  $d = 2$ , o valor de  $N_e$  é 10, o que implica em representações com dimensões 1 e 3, isto é  $(10 = 1^2 + 3^2)$ , ao passo que para  $d = 3$ , o valor de  $N_e$  é 35, resultando em representações com dimensões 1, 4 e duas gêmeas de dimensões 3, isto é  $(35 = 1^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2)$ . Este último, será explicado com maiores detalhes adiante, visto que ao deduzirmos a representação em  $2 + 1$  dimensões, escolheremos que esta seja uma representação redutível de ordem 6, que é uma combinação das duas gêmeas  $(3 \times 3)$  e, satisfaz a condição de Proca (2.23).

d	ordem						$N_e$
0						1	1
1					1	(1,1)	3
2				1		3	10
3				1		(3,3)	35
4			1		5	10	126
5			1		6	15	(10,10)
6		1		7		21	35
7	1		8		28		56
						(35,35)	6435

Tabela 2.1: Valores para dimensão do espaço-tempo de Minkowski, ordem das matrizes, com as representações gêmeas entre parêntesis, e  $N_e$  o número de elementos linearmente independentes da álgebra.

Uma outra forma de obter as representações DKP para dimensões arbitrárias do espaço-tempo foi proposta em [17] para a teoria relativística e que servirá de inspiração para o estudo da teoria DKP sob a ótica da covariância Galileana [31]. Assim, para se obter representações num espaço-tempo  $n+1$  dimensional, deve-se partir das equações conhecidas dos setores escalar (2.20) e vetorial (2.23) tomando-se os índices de Lorentz  $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  e métrica  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, \dots, -1)$ . Abaixo, descrevemos as representações obtidas para os setores escalar e vetorial da teoria.

### 2.1.1 Representações para o Setor Escalar

Seguindo a abordagem proposta em [17] e tomando o espaço-tempo  $(n+1)$ -dimensional, conclui-se que as equações (2.20) para o setor escalar da teoria DKP massiva resulta em  $n+2$  equações diferenciais de primeira ordem, a saber

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= i\partial_0\psi, \\
\psi_1 &= i\partial_1\psi, \\
\psi_2 &= i\partial_2\psi, \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\psi_n &= i\partial_n\psi, \\
\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi &= i\partial_\mu\psi^\mu.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Desta forma reescrevendo o campo DKP com  $n+1$  componentes, definidas por

$$\Psi_{n+1} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Podemos reescrever a equação do campo DKP (2.17) em  $n+1$  dimensões espaço-temporais usando a

representação  $(n+2) \times (n+2)$

$$\begin{aligned}
\beta^0 &= e_{(1)(n+2)} + e_{(n+2)(1)} \\
\beta^1 &= e_{(2)(n+2)} - e_{(n+2)(2)} \\
\beta^2 &= e_{(3)(n+2)} - e_{(n+2)(3)} \\
\beta^3 &= e_{(4)(n+2)} - e_{(n+2)(4)} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\beta^{(n)} &= e_{(n+1)(n+2)} - e_{(n+2)(n+1)}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

onde  $(e_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}$ . Usando esta abordagem, segue imediatamente que a representação para as matrizes  $\beta^\mu$  e o campo DKP em 1 + 1 dimensões são expressos por

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad \Psi_{1+1} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

enquanto para o espaço-tempo com 2 + 1 dimensões, têm-se

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \beta^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \Psi_{2+1} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

O caso do setor escalar DKP não massivo em  $n+1$  dimensões segue a mesma abordagem mostrada anteriormente, sendo que a matriz  $\gamma$  é agora expressa por

$$\gamma = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{n+1}, 0), \tag{2.37}$$

ou seja, uma matriz diagonal  $(n+2) \times (n+2)$ .

### 2.1.2 Representações para o Setor Vetorial

Seguindo ainda a abordagem proposta em [17] temos que a representação para o setor vetorial da equação DKP (2.17) em 1 + 1 dimensões é obtida das equações (2.23) e expressa pelas matrizes  $3 \times 3$ :

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \cdot & -1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} iE \\ \frac{mc}{\hbar} A_1 \\ -\frac{mc}{\hbar} \psi \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Todavia, estas matrizes podem ser reescritas em termos daquelas obtidas em (2.35), para o setor escalar em 1 + 1 dimensões, através da matriz de similaridade  $M$  abaixo

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Ou seja, se chamarmos de  $\beta_s$  e  $\Psi_s$  as matrizes e o campo em (2.35) e  $\beta_V$  e  $\Psi_V$  as matrizes e o campo em (2.38) temos  $M\beta_V M^{-1} = \beta_s$  e  $\Psi_s = M\Psi_V$ . Portanto, como foi apontado em [38], as representações dos setores escalar e vetorial da teoria DKP em 1 + 1 dimensões são equivalentes, de modo que, a menos de uma troca entre as componentes, o campo vetorial em 1 + 1 dimensões comporta-se como um campo escalar. Ou ainda, uma partícula vetorial sob esta perspectiva é um escalar.

De acordo com a Tabela 2.1, o setor vetorial da teoria DKP em  $2 + 1$  dimensões apresenta duas representações  $3 \times 3$  chamadas de gêmeas. Elas podem ser obtidas a partir das representações já obtidas para a dimensão par imediatamente inferior, que no caso em discussão é  $1 + 1$ . Neste contexto, uma dessas representações gêmeas é dada por

$$\beta_{(1)}^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta_{(1)}^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad -\beta_{(1)}^2 = \begin{pmatrix} \cdot & i & \cdot \\ i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Como pode se perceber, a representação acima é composta por matrizes  $3 \times 3$ , obtidas em (2.35) para o setor escalar em  $1 + 1$  dimensões, onde  $\beta_{(1)}^0 = \beta_s^0$  e  $\beta_{(1)}^1 = \beta_s^1$ , sendo  $\beta_{(1)}^2$  uma nova matriz. A representação gêmea de  $\beta_{(1)}^\mu$ , que chamaremos de  $\beta_{(2)}^\mu$ , é composta pelo conjunto das matrizes  $\beta_{(1)}^0$ ,  $\beta_{(1)}^1$  e  $-\beta_{(1)}^2$ , ou seja

$$\beta_{(2)}^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta_{(2)}^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta_{(2)}^2 = \begin{pmatrix} \cdot & i & \cdot \\ i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Portanto, os dois conjuntos de matrizes  $(\beta_{(1)}^0, \beta_{(1)}^1, \beta_{(1)}^2)$  e  $(\beta_{(2)}^0, \beta_{(2)}^1, -\beta_{(2)}^2)$  satisfazem a álgebra DKP (2.16) e são as duas representações gêmeas do setor vetorial da teoria DKP em  $2 + 1$  dimensões. Pela representação (2.39) podemos escrever a equação

$$i\hbar\beta_{(1)}^\mu\partial_\mu \begin{pmatrix} -E_2 \\ B \\ iE_1 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} -\frac{mc}{\hbar}A_1 \\ \frac{mc}{\hbar}\phi \\ -i\frac{mc}{\hbar}A_2 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

que resultam, explicitamente, nas equações

$$\nabla_\perp B = \partial_t \mathbf{E} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \mathbf{A}, \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi. \quad (2.43)$$

onde  $\nabla_\perp = (\partial_2, -\partial_1)$ . Usando a representação gêmea (2.40) podemos escrever:

$$i\hbar\beta_{(2)}^\mu\partial_\mu \begin{pmatrix} -\frac{mc}{\hbar}A_1 \\ \frac{mc}{\hbar}\phi \\ i\frac{mc}{\hbar}A_2 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} E_2 \\ -B \\ iE_1 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

que também resultam, explicitamente, em

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad (2.45)$$

$$B = -\nabla_\perp \mathbf{A}. \quad (2.46)$$

As equações (2.42)-(2.43) e (2.45)-(2.46) são as conhecidas equações do campo de Proca em  $2 + 1$  dimensões. É interessante notar que, se adotarmos a troca  $\mathbf{E} \leftrightarrow \frac{mc}{\hbar} \mathbf{A}_\perp$  e  $B \leftrightarrow -\frac{mc}{\hbar} \phi$ , o conjunto de equações (2.42)-(2.43) e (2.45)-(2.46) não se altera. Para escrevermos as equações (2.41) e (2.44) na forma de uma única equação DKP vamos aplicar à (2.44) uma transformação de similaridade tal que

$$i\hbar\tilde{\beta}_{(2)}^\mu\partial_\mu \begin{pmatrix} -\frac{mc}{\hbar}A_1 \\ \frac{mc}{\hbar}\phi \\ -i\frac{mc}{\hbar}A_2 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} E_2 \\ -B \\ -iE_1 \end{pmatrix} = -mc \begin{pmatrix} -E_2 \\ B \\ iE_1 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

onde  $M = M^{-1}$  é a matriz de similaridade, dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}$$

e  $\tilde{\beta}_{(2)}^\mu = M\beta_{(2)}^\mu M^{-1}$ , com  $\tilde{\beta}_{(2)}^\mu = (-\beta_{(2)}^0, -\beta_{(2)}^1, \beta_{(2)}^2) = (-\beta_{(1)}^0, -\beta_{(1)}^1, -\beta_{(1)}^2)$ , ou seja  $\tilde{\beta}_{(2)}^\mu = -\beta_{(1)}^\mu$ . Usando agora as equações (2.41) e (2.47), podemos escrever

$$\left[ i\hbar \begin{pmatrix} \beta_{(1)}^\mu & \cdot \\ \cdot & -\beta_{(1)}^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu - mc \begin{pmatrix} \cdot & 1_{3 \times 3} \\ -1_{3 \times 3} & \cdot \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -E_2 \\ B \\ iE_1 \\ -\frac{mc}{\hbar} A_1 \\ \frac{mc}{\hbar} \phi \\ -i\frac{mc}{\hbar} A_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.48)$$

Multiplicando a equação acima, pela esquerda, por

$$\begin{pmatrix} \cdot & 1_{3 \times 3} \\ -1_{3 \times 3} & \cdot \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

temos

$$\left[ i\hbar \begin{pmatrix} \cdot & \beta_{(1)}^\mu \\ \beta_{(1)}^\mu & \cdot \end{pmatrix} \partial_\mu - mc \begin{pmatrix} 1_{3 \times 3} & \cdot \\ \cdot & 1_{3 \times 3} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -E_2 \\ B \\ iE_1 \\ -\frac{mc}{\hbar} A_1 \\ \frac{mc}{\hbar} \phi \\ -i\frac{mc}{\hbar} A_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.50)$$

Consideremos agora a matriz de similaridade  $S$  dada por:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & \cdot \\ \cdot & S_2 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} S_1^{-1} & \cdot \\ \cdot & S_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ -i & \cdot & \cdot \\ \cdot & i & \cdot \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & i & \cdot \\ \cdot & \cdot & -i \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ -S_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad -S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & i & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Aplicando agora a transformação de similaridade, através da matriz  $S$ , na equação (2.50), obtemos

$$(i\hbar\beta^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0 \quad (2.53)$$

onde

$$\Psi = \begin{pmatrix} iE_1 \\ iB \\ iE_2 \\ \frac{mc}{\hbar} A_1 \\ \frac{mc}{\hbar} A_2 \\ -\frac{mc}{\hbar} \phi \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

e

$$\beta^\mu = \begin{pmatrix} \cdot & S_1\beta_{(1)}^\mu S_2^{-1} \\ S_2\beta_{(1)}^\mu S_1^{-1} & \cdot \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

resultando na representação DKP  $6 \times 6$ , claramente redutível, que chamaremos de representação combinada, dada por

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Esta representação mostra-se útil no tratamento de sistemas bosônicos e suas interações em  $2 + 1$  dimensões, a exemplo da geração de massa topológica devido a interação do campo DKP via acoplamento de Chern-Simons [17].

Ainda seguindo de perto a abordagem proposta em [17], temos que em  $n + 1$  dimensões o tensor  $G_{\mu\nu}$  antissimétrico, expresso por (2.23), possui  $\frac{n(n+1)}{2}$  componentes independentes, uma vez que  $A_\mu$  possui  $n + 1$  componentes. Desta forma obtemos de (2.23) um conjunto de  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  equações, expressas por

$$\begin{aligned} i\partial_a \left( \frac{mc}{\hbar} A_0 \right) - i\partial_0 \left( \frac{mc}{\hbar} A_a \right) - \frac{mc}{\hbar} (iG_{a0}) &= 0, \\ i\partial_a \left( \frac{mc}{\hbar} A_b \right) - i\partial_b \left( \frac{mc}{\hbar} A_a \right) - \frac{mc}{\hbar} (iG_{ab}) &= 0, \\ -i\partial_0 (iG_{b0}) - i\partial_a (iG_{ab}) - \frac{mc}{\hbar} \left( \frac{mc}{\hbar} A_b \right) &= 0, \\ -i\partial_a (iG_{a0}) - \frac{mc}{\hbar} \left( \frac{mc}{\hbar} A_0 \right) &= 0. \end{aligned}$$

onde  $a, b = 1, 2, 3, \dots, n$ . Destas equações podemos escrever a equação DKP no espaço-tempo com  $n + 1$  dimensões via uma representação  $\frac{1}{2}(n + 2)(n + 1) \times \frac{1}{2}(n + 2)(n + 1)$  para as matrizes  $\beta^\mu$ , a saber:

$$\beta^0 = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{\cdot}^n & \overbrace{\cdot}^{\frac{1}{2}n(n-1)} & \overbrace{-\mathbf{1}_{n \times n}}^n & \overbrace{\cdot}^1 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline -\mathbf{1}_{n \times n} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right), \quad (2.57)$$

e

$$\beta^a = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{\cdot}^n & \overbrace{\cdot}^{\frac{1}{2}n(n-1)} & \overbrace{\cdot}^n & \overbrace{V_a^T}^1 \\ \hline \cdot & \cdot & M_a & \cdot \\ \hline \cdot & -(M_a)^T & \cdot & \cdot \\ \hline -V_a & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right), \quad (2.58)$$

enquanto o campo DKP é expresso por

$$\Psi_{(n+1)} = \begin{pmatrix} iG_{10} \\ iG_{20} \\ iG_{30} \\ \vdots \\ iG_{n0} \\ iG_{a_{(n-1)}a_n} \\ \frac{mc}{\hbar}A_1 \\ \frac{mc}{\hbar}A_2 \\ \frac{mc}{\hbar}A_3 \\ \vdots \\ \frac{mc}{\hbar}A_n \\ \frac{mc}{\hbar}A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iE_1 \\ iE_2 \\ iE_3 \\ \vdots \\ iE_n \\ i \frac{1}{(n-2)!} \epsilon_{a_1 a_2 a_3 \dots a_{(n-2)} a_{(n-1)} a_n} B_{a_1 a_2 a_3 \dots a_{(n-2)}} \\ \frac{mc}{\hbar}A_1 \\ \frac{mc}{\hbar}A_2 \\ \frac{mc}{\hbar}A_3 \\ \vdots \\ \frac{mc}{\hbar}A_n \\ \frac{mc}{\hbar}A_0 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

onde  $E_a = G_{a0}$  e  $B_{a_1 a_2 a_3 \dots a_{(n-2)}}$  é definido por

$$B_{a_1 a_2 a_3 \dots a_{(n-2)}} = \epsilon_{a_1 a_2 a_3 \dots a_{(n-2)} a_{(n-1)} a_n} \partial_{a_{(n-1)}} A_{a_n}, \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.60)$$

onde  $V_a = (V_a)_b = \delta_{ab}$  e a matriz  $M_a = (M_a)_{bc}$ , que aparece em  $\beta^a$ , é tal que o índice  $b = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}n(n-1)$  corresponde ao campo do tipo magnético cujas componentes são  $B_j$ , enquanto os índices  $a, c = 1, 2, 3, \dots, n$  correspondem a um campo do tipo elétrico com componentes  $E_j$ . Assim, cada  $M_a$  é uma matriz  $\frac{1}{2}n(n-1) \times n$ . Podemos expressar a matriz  $(M_a)_{bc}$  usando a notação

$$(M_a)_{bc} = \epsilon_{\underbrace{b_1 b_2 \dots b_{n-2}}_b ac}, \quad n > 1, \quad (2.61)$$

onde o multiíndice  $b$  compreende os  $n-2$  índices  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-2} = 1, 2, 3, \dots, n$  ordenados numa sequência crescente de permutações  $(b_1 b_2 \dots b_{n-2})$  tal que  $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-2}$ . Em resumo, para construirmos a matriz  $(M_a)_{bc}$  deve-se: a) saber o número de dimensões espaciais  $n$ ; b) saber o valor  $a$  da matriz  $\beta^a$ ; c) construir a tabela com todas as  $\frac{1}{2}n(n-1)$  permutações possíveis e em sequência crescente, e d) combinar cada sequência específica  $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$  com os possíveis valores de  $a$  e  $c$  no tensor Levi-Civita em (2.61). Seguindo esta rotina de passos, obteve-se em [17] a representação  $15 \times 15$  para o setor vetorial da teoria DKP em  $4+1$  dimensões, a saber:

$$\begin{aligned} \beta^0 &= -e_{1,11} - e_{2,12} - e_{3,13} - e_{4,14} - e_{10,1} - e_{11,2} - e_{12,3} - e_{14,4}, \\ \beta^1 &= e_{1,15} + e_{8,14} - e_{9,13} + e_{10,12} - e_{12,10} + e_{13,9} - e_{14,8} - e_{15,1}, \\ \beta^2 &= e_{2,15} - e_{6,14} + e_{7,13} - e_{10,11} + e_{11,10} - e_{13,7} + e_{14,6} - e_{15,2}, \\ \beta^3 &= e_{3,15} + e_{5,14} - e_{7,12} + e_{9,11} - e_{11,9} + e_{12,7} - e_{14,5} - e_{15,3}, \\ \beta^4 &= e_{4,15} - e_{5,13} + e_{6,12} - e_{8,11} + e_{11,8} - e_{12,6} + e_{13,5} - e_{15,4}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde, novamente, usou-se a notação  $(e_{ij})_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn}$ .

## 2.2 Os Operadores de Projção

Como foi explorado na Seção anterior, a teoria DKP apresenta dois setores, e existe uma técnica desenvolvida desde o final dos anos 1950 [13] que consiste em selecionar com os operadores apropriados as componentes físicas do campo. Estes são os operadores de projeção, que serão apresentados aqui de forma breve. Todavia, como discutido em [16], e para entendermos mais claramente o sentido físico das projeções, consideremos a transformação de Lorentz, dada pela matriz  $L^\mu{}_\nu$ , tal que um vetor  $x^\mu$  se transforme por  $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$  enquanto o campo  $\Psi$  se transforma por

$$\begin{aligned} \Psi' &= U(L)\Psi; \\ U\beta^\mu U^{-1} &= L^\mu{}_\nu \beta^\nu. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Tomando transformações infinitesimais, tais que  $L^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + w^{\mu\nu}$ , temos para uma aproximação em primeira ordem nos parâmetros infinitesimais  $w^{\mu\nu}$

$$U = 1 + \frac{1}{2}w_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad (2.64)$$

onde  $S^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu]$  é o operador associado ao spin do campo.

### 2.2.1 Projetores para o Setor Escalar

Para o setor escalar, os operadores de projeção são dados por

$$\begin{aligned} P &= -(\beta^0)^2(\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2, \\ P^\mu &= P\beta^\mu. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Destas definições, pode-se demonstrar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} P^2 &= P, \\ P^\mu\beta^\nu &= Pg^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Aplicando-se os operadores  $P$  e  $P^\mu$  à equação DKP (2.17) e usando as propriedades acima, temos:

$$\begin{aligned} (i\hbar P^\mu \partial_\mu - mcP)\Psi &= 0, \\ (i\hbar \partial^\mu P - imcP^\mu)\Psi &= 0. \end{aligned}$$

Combinando agora estas duas equações, segue

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) (P\Psi) = 0. \quad (2.67)$$

Todavia, pelas propriedades dos projetores  $P$  e  $P^\mu$ , percebe-se que  $PS^{\mu\nu} = 0$  e  $PU\Psi = P\Psi$ . Assim, podemos concluir que, sob transformações de Lorentz, a quantidade  $P\Psi$  pode ser interpretada como um campo escalar de massa  $m$  que satisfaz a equação de Klein-Fock-Gordon acima, o que estabelece que a aplicação do operador  $P$  sobre o campo DKP  $\Psi$  seleciona o setor escalar deste campo.

### 2.2.2 Projetores para o Setor Vetorial

Para o setor vetorial, os operadores de projeção são dados por [13, 16, 18]

$$\begin{aligned} R^\mu &= (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2(\beta^\mu\beta^0 - g^{\mu 0}), \\ R^{\mu\nu} &= R^\mu\beta^\nu. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Destas definições, pode-se demonstrar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= -R^{\nu\mu}, \\ R^{\mu\nu}\beta^\alpha &= g^{\nu\alpha}R^\mu - g^{\mu\alpha}R^\nu, \\ R^\mu S^{\nu\alpha} &= g^{\mu\nu}R^\alpha - g^{\mu\alpha}R^\nu, \\ R^{\mu\nu}S^{\alpha\rho} &= g^{\mu\rho}R^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}R^{\nu\rho} + g^{\nu\alpha}R^{\mu\rho} - g^{\nu\rho}R^{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Destas propriedades pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} R^\mu U\Psi &= R^\mu\Psi + w^\mu{}_\nu R^\nu\Psi, \\ R^{\mu\nu}U\Psi &= R^{\mu\nu}\Psi + w^\nu{}_\alpha R^{\mu\alpha}\Psi + w^\mu{}_\alpha R^{\alpha\nu}\Psi. \end{aligned} \quad (2.70)$$



Logo, podemos afirmar que, sob transformações de Lorentz, a quantidade  $R^\mu\Psi$  se transforma como um vetor, enquanto  $R^{\mu\nu}\Psi$  se transforma como um tensor. Se aplicarmos ambos operadores  $R^\mu$  e  $R^{\mu\nu}$  na equação DKP (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} (i\hbar\partial_\nu R^{\mu\nu} - mcR^\mu)\Psi &= 0 \\ [i\hbar(\partial^\mu R^\nu - \partial^\nu R^\mu) + mcR^{\mu\nu}]\Psi &= 0. \end{aligned}$$

A combinação destas duas equações resulta em

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} R^\nu \Psi = 0, \quad (2.71)$$

onde  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu \Psi - \partial^\nu R^\mu \Psi$ . Nota-se que aplicando o operador  $\partial_\nu$  na equação acima obtemos, pela antissimetria de  $F^{\mu\nu}$ , a condição  $\partial_\mu(R^\mu\Psi)$  e a equação em segunda ordem nas derivadas

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)(R^\mu\Psi) = 0. \quad (2.72)$$

para o campo vetorial massivo  $R^\mu\Psi$ , o campo de Proca.

### 2.2.3 O operador de spin

Vamos representar os operadores de spin para a teoria DKP de duas formas distintas, utilizando os projetores. Na primeira delas, consideremos a densidade Hamiltoniana associada à teoria DKP

$$-\beta^0 H \Psi = \left(\beta \cdot \mathbf{p} + \frac{mc}{\hbar}\right). \quad (2.73)$$

Se aplicarmos a Hamiltoniana definida acima para calcular o momentum angular orbital,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , assim como a componente  $j$  da sua derivada temporal  $\dot{\mathbf{L}}_j = i[-\beta^0 H, \mathbf{L}_j]$ , teremos [18]

$$\dot{\mathbf{L}} = -\beta \times \mathbf{p}. \quad (2.74)$$

Ou seja, o momentum angular orbital não é conservado. Sabendo que o operador de Spin é dado por  $S^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu]$ , a derivada temporal deste gera

$$\dot{\mathbf{S}} = \beta \times \mathbf{p}, \quad (2.75)$$

onde podemos concluir que, embora individualmente os momenta angular orbital e de spin não se conservem, o momentum angular total  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  se conserva. Podemos agora utilizar os projetores, e aplicar o operador  $\mathbf{S}^2$  nos dois setores da teoria, a saber

$$\mathbf{S}^2 P \Psi = 0 \quad (2.76)$$

$$\mathbf{S}^2 R^j \Psi = 2R^j \Psi = 1(1+1)R^j \Psi. \quad (2.77)$$

Esses resultados mostram que o operador  $\mathbf{S}^2$  apresenta dois diferentes autovalores de acordo com o setor do campo DKP: zero para o setor escalar e  $1(1+1)$  para o vetorial. Portanto, o operador  $\mathbf{S}$  está relacionado com o spin dos bósons escalares e vetoriais. Outra forma de obtermos os mesmos resultados é através do vetor de Pauli-Lubanski,  $W_\mu$ , definido

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}, \quad (2.78)$$

onde  $M^{\rho\sigma} = x^\rho p^\sigma - x^\sigma p^\rho + i/2[\beta^\rho, \beta^\sigma]$ . Então, considerando uma partícula no referencial de repouso, nós temos o segundo invariante de Casimir da teoria relativística,  $W_\mu W^\mu = -m^2 \mathbf{S}^2$  [1]. Aplicando este resultado aos dois setores do campo DKP, obtemos novamente os autovalores de spin para os dois setores do campo DKP [18]

$$W_\mu W^\mu P \Psi = 0, \quad (2.79)$$

$$W_\mu W^\mu \mathbf{R} \Psi = -2m^2 \mathbf{R} \Psi. \quad (2.80)$$

No Capítulo 5, definiremos o vetor de Pauli-Lubanski para teoria DKP Galileana, onde o análogo não relativístico destes resultados será obtido.

## Capítulo 3

# Osciladores Relativísticos Deformados

Apresentaremos aqui uma extensão da estratégia utilizada em [59], para os casos dos osciladores de DKP escalar e de Dirac em  $(1 + 1)$  e  $(3 + 1)$  dimensões espaço-temporais, de modo a obtermos as correspondentes equações relativísticas com um acoplamento do tipo Morse. Para tanto, utilizamos o operador momentum linear generalizado, onde para o caso unidimensional, obtemos um mapeamento entre os osciladores e o oscilador de Morse. Ilustramos os resultados com aqueles obtidos na literatura para as moléculas de  $H_2$ ,  $LiH$  e  $HCl$  [68, 69]. Para o caso tridimensional, e utilizando a aproximação de Pekeris [63], obtemos os autovalores e autofunções. Para testarmos nossas aproximações, estudamos a termodinâmica dos estados vibracionais (*S-wave states*,  $l = 0$ ) para um ensemble canônico composto das mesmas moléculas utilizadas no caso unidimensional (também tomando o limite não relativístico), e de um gás de elétrons no regime de altas energias. Neste caso, anomalias do tipo Schottky são encontradas nos gráficos de capacidade térmica versus temperatura, como uma consequência do espectro finito de energias do potencial de Morse, sobre o qual o sistema foi mapeado.

### 3.1 O Momentum Linear Generalizado

A partir das investigações sobre o operador de translação generalizado, que fornece um deslocamento espacial não-aditivo, dado pela forma [58]- [61]

$$\mathcal{T}_\gamma(\varepsilon)|x\rangle = |x + \varepsilon + \gamma x\varepsilon\rangle \quad (3.1)$$

sendo  $\varepsilon$  um deslocamento infinitesimal e  $\gamma$  um parâmetro com dimensão do inverso do comprimento, de modo que  $\gamma_q \equiv (1 - q)/\xi$  (de agora em diante nós colocaremos implicitamente a dependência de  $q$  em  $\gamma$ ) com  $\xi$  o tamanho característico do sistema, onde a translação aditiva é recuperada para  $q \rightarrow 1$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ). Estas investigações foram inspiradas pelo desenvolvimento da mecânica estatística não-extensiva de Tsallis [55, 57] e no desenvolvimento do  $q$ -cálculo [56], sendo que na Ref. [59] pela utilização do operador  $\mathcal{T}_\gamma(\varepsilon)$ , os autores obtiveram a generalização do operador momento linear  $p_\gamma|\alpha\rangle = -i\hbar D_\gamma|\alpha\rangle$  na base  $x$ , sendo  $D_\gamma$  a derivada deformada em  $x$

$$D_\gamma = (1 + \gamma x) \frac{d}{dx}. \quad (3.2)$$

Pelo Hamiltoniano<sup>1</sup> do sistema, podemos então dizer que  $H = p_\gamma^2 + V(x)$ , e utilizando a Eq. (3.2) segue que a versão deformada da equação do tipo Schrödinger é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} D_\gamma^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t) \quad (3.3)$$

que corresponde a uma partícula com uma massa efetiva igual a  $m(x) = m/(1 + \gamma x)^2$ . Uma aplicação interessante da equação de Schrödinger deformada foi dada por [59], onde foi possível obter a equação com um potencial do tipo Morse a partir de primeiros princípios. Mais precisamente, considerando a transformação de coordenadas

---

<sup>1</sup>Este Hamiltoniano é hermitiano, visto que possui autovalores reais.

$$\varkappa = \frac{\ln(1 + \gamma x)}{\gamma} \quad (3.4)$$

na Eq. (3.3), ao propormos um potencial do tipo harmônico  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$  e  $\phi(\varkappa, t) = \psi(x(\varkappa), t)$  e sendo a função de onda  $\phi(\varkappa, t) = \psi(x(\varkappa), t)$ , obteremos (utilizando as relações canônicas de comutação  $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ )

$$E\phi(\varkappa, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\varkappa^2} \phi(\varkappa, t) + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} (e^{\gamma\varkappa} - 1)^2 \phi(\varkappa, t), \quad (3.5)$$

que é precisamente a equação de auto-valores do chamado oscilador de Morse quântico [62]. Este é provido de um potencial efetivo do tipo  $V_{\text{eff}}(\varkappa) = D(e^{\gamma\varkappa} - 1)^2$  para as equações de onda  $\phi(\varkappa, t)$  no espaço  $\varkappa$  com o parâmetro de dissociação  $D = \frac{m\omega^2}{2\gamma^2}$ . As auto-funções da equação de Schrödinger com um potencial do tipo Morse são dadas por

$$\Phi_n(z) = A_n z^s e^{-\frac{1}{2}z} L_n^{2s}(z) \quad (3.6)$$

com  $A_n$  a constante de normalização, e os parâmetros  $z = 2m\omega e^{\gamma\varkappa}/(\gamma^2\hbar)$ ,  $s = m\omega/(\gamma^2\hbar) - n - 1/2$  e  $L_n^{2s}(z) = (z^{-2s} e^z/n!) d^n(e^{-z} z^{n+2s})/dz^n$  os polinômios de Laguerre generalizados [59]. O espectro de energia do oscilador de Morse quântico é dado por

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - \frac{\gamma^2\hbar}{2m\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.7)$$

sendo  $n$  restrito ao intervalo  $0 \leq 2n \leq 2m\omega/(\gamma^2\hbar) - 1$ , o que implica um número finito de estados ligados, sendo portanto  $E_n \geq \hbar\omega(n + 1/2)/2$ . A partir da Eq. (3.7) pode-se perceber que os estados de energia do oscilador harmônico usual são recuperados fazendo  $\gamma \rightarrow 0$ , o que de fato mostra uma generalização para estes tipos de sistemas físicos.

### 3.1.1 Os Osciladores de DKP Escalar e de Dirac

Utilizando a Eq. (2.11), com o acoplamento não minimal dado por  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\gamma^0\omega\mathbf{r}$ , teremos [39]

$$\begin{aligned} (E - mc^2)\psi_1 &= c\sigma^j(p_j + im\omega r_j)\psi_2 \\ (E + mc^2)\psi_2 &= c\sigma^i(p_i - im\omega r_i)\psi_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $\omega$  é a frequência do oscilador,  $m$  a massa das partículas fermiônicas,  $\psi^T = (\psi_1 \ \psi_2)$  é a função de onda espinorial, com o limite  $\omega \rightarrow 0$  correspondendo ao caso da partícula livre, e  $\sigma^k$  é a matriz de Pauli, cujas componentes obedecem a álgebra

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma^k. \quad (3.9)$$

Por razões práticas, vamos adotar a notação  $\mathcal{E} = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}$ , com  $E$  sendo a energia da partícula. Pela Eq. (3.8), segue a equação diferencial para  $\psi_1$

$$\mathcal{E}\psi_1 = \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\hbar\omega - 2\left(\frac{\omega}{\hbar}\right) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \psi_1 \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$  é o operador de spin. Este é o chamado oscilador de Dirac [39]. Podemos escrever os níveis de energia  $E_{Nlj}$  em função dos números quânticos, a partir do operador de momento angular total  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

$$E_{Nlj}^2 - m^2c^4 = \hbar\omega[2(N + 1 - j) \mp 1]mc^2, \quad \text{para } l = j \mp \frac{1}{2}$$

que apresenta degenerescência típica de problemas de potencial central para os pares  $(N \pm 1, j \mp 1)$ ,  $(N \pm 2, j \mp 2)$ ,  $\dots$ , lembrando que  $-l \leq N \leq l$ . Ao tomarmos o limite não-relativístico  $E = mc^2 + \epsilon$  com  $\epsilon \ll mc^2$ , ou seja,  $\mathcal{E} = \epsilon_{Nlj} \approx \hbar\omega(N + 1 - j \mp \frac{1}{2})$  para  $N = 0, 1, 2, \dots$  e  $l = j \mp \frac{1}{2}$  obteremos de maneira equivalente os níveis de energia de um oscilador harmônico quântico mais um termo cujo significado físico é um forte acoplamento spin órbita, com o potencial oscilatório que remete ao desenvolvimento do modelo de camada nuclear [42].

Utilizando a representação das matrizes  $\beta^\mu$  em  $(3+1)$  dimensões do setor escalar da teoria DKP (2.18), junto ao campo escalar (2.22), com o acoplamento não mínimo definido por  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega^0\omega\mathbf{r}$ , onde  $\eta^0 = 2\beta^0\beta^0 - \mathbf{1}$ , obtemos

$$[\beta^0 E - c\beta^i (p_i - im\omega\eta^0 r_i) - mc^2] \Psi = 0. \quad (3.11)$$

com  $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi)$ , que leva a um conjunto de cinco equações, a saber

$$\begin{aligned} mc^2\psi_0 &= E\psi \\ mc^2\psi_1 &= c(-p_x + im\omega x)\psi \\ mc^2\psi_2 &= c(-p_y + im\omega y)\psi \\ mc^2\psi_3 &= c(-p_z + im\omega z)\psi \\ mc^2\psi &= E\psi_0 + c[(p_x + im\omega x)\psi_1 + (p_y + im\omega y)\psi_2 + (p_z + im\omega z)\psi_3], \end{aligned}$$

e resolvendo-as para a componente  $\psi$  do campo DKP, teremos

$$\left( \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \right) \psi = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 \right) \psi \quad (3.12)$$

que é a equação do oscilador harmônico quântico relativístico [33]. É interessante notar que esta mesma equação pode ser obtida utilizando os projetores do setor escalar da teoria DKP [18], definidos no capítulo anterior pela Eq. (2.65), obtendo assim a equação do oscilador DKP escalar, dado por (B.2), onde fica nítido que o operador de projeção  $P$  selecionou a componente  $\psi$  do campo  $\Psi$ , ou seja,  $P\Psi = \psi$ .

## 3.2 O Oscilador Deformado em $(1+1)$ Dimensões

Considerando agora a equação de Dirac em  $(1+1)$  dimensões

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0 \quad (3.13)$$

onde  $\gamma^0$  e  $\gamma^1$  são as matrizes de nesta representação, dada por  $(\sigma_3, i\sigma_2)$ , ou seja,

$$\gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

resultando em

$$\begin{aligned} (E - mc^2)\psi_1 &= c(p_\gamma + im\omega x)\psi_2 \\ (E + mc^2)\psi_2 &= c(p_\gamma - im\omega x)\psi_1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

e resolvendo para  $\psi_1$

$$\mathcal{E}\psi_1 = \frac{1}{2m}(p_\gamma + im\omega x)(p_\gamma - im\omega x)\psi_1. \quad (3.16)$$

Substituindo a expressão da derivada deformada, dada pela Eq. (3.2), e utilizando a transformação de coordenadas (3.4), nós obteremos o oscilador de Dirac unidimensional deformado

$$\mathcal{E}\phi(\mathcal{x}) = \frac{1}{2m} \left\{ \left[ -i\hbar \frac{d}{d\mathcal{x}} + im\omega \left( \frac{e^{\gamma\mathcal{x}} - 1}{\gamma} \right) \right] \left[ -i\hbar \frac{d}{d\mathcal{x}} - im\omega \left( \frac{e^{\gamma\mathcal{x}} - 1}{\gamma} \right) \right] \right\} \phi(\mathcal{x}) \quad (3.17)$$

que corresponde à equação de Dirac (2.11) unidimensional com um acoplamento não-mínimo do tipo  $p_\gamma - im\omega(e^{\gamma\mathcal{x}} - 1)/\gamma$ , sendo a função de onda relativística  $\phi(\mathcal{x}) = \psi_1(x(\mathcal{x}))$  no espaço  $\mathcal{x}$ . Além disso, pela redefinição de  $\mathcal{x}$  em  $\tilde{\mathcal{x}} = \mathcal{x} - \mathcal{x}_0$  e  $\phi(\mathcal{x})$  como  $\tilde{\phi}(\tilde{\mathcal{x}}) = \phi(\tilde{\mathcal{x}} + \mathcal{x}_0)$  a Eq. (3.17) pode ser reescrita como

$$\mathcal{E}\tilde{\phi}(\tilde{\mathcal{x}}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\tilde{\mathcal{x}}^2} + \frac{m\tilde{\omega}^2}{2\gamma^2} (e^{\gamma\tilde{\mathcal{x}}} - 1)^2 - \frac{\hbar\tilde{\omega}}{2} \right] \tilde{\phi}(\tilde{\mathcal{x}}) \quad (3.18)$$

onde  $\varkappa_0 = \frac{\ln(\tilde{\omega}/\omega)}{\gamma}$  e  $\tilde{\omega} = \omega \left(1 + \frac{\gamma^2 \hbar}{2m\omega}\right)$  são, respectivamente, o deslocamento da posição de equilíbrio do potencial e a frequência modificada do oscilador, ambos surgindo devido ao acoplamento relativístico. Pela comparação entre as Eqs. (3.5)-(3.7) é obtida a equação do espectro de energia

$$\mathcal{E}_N = \hbar\tilde{\omega} \left(N + \frac{1}{2}\right) \left[1 - \frac{\gamma^2 \hbar}{2m\tilde{\omega}} \left(N + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{\hbar\tilde{\omega}}{2} \quad (3.19)$$

com  $N = 0, 1, 2, \dots$ . É instrutivo obtermos também o limite em que a deformação é nula ( $\gamma \rightarrow 0$ ). Pela Eq. (3.19) para  $\gamma \rightarrow 0$  ( $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$ ) nós recuperamos Eq. (3.20) que correspondem aos níveis de energia de um oscilador relativístico [67] a menos de um termo de deslocamento na energia.

Utilizando métodos algébricos, os níveis de energia  $E_N$  resultam em [67]

$$\mathcal{E}_N = N\hbar\omega \quad , \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

No limite não-relativístico ( $\mathcal{E}_N \approx \epsilon_N$ ) obtemos as energias do oscilador de Morse quântico, cuja fórmula é idêntica à Eq. (3.7) com a frequência modificada  $\tilde{\omega}$ . Fazendo  $E = mc^2 + \epsilon$  com  $\epsilon \ll mc^2$  e portanto  $\epsilon_N \approx N\hbar\omega$  ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ) que corresponde aos níveis de energia do oscilador harmônico quântico.

Para tratarmos o oscilador DKP escalar em  $(1+1)$  dimensões, vamos considerar a representação das matrizes  $\beta^\mu$  dada por (2.35) com o acoplamento deformado  $p_\gamma \rightarrow p_\gamma - im\eta^0 x$ , onde  $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$  e momentum linear deformado é escrito em termos da derivada deformada (3.2). Neste contexto, obtemos

$$[\beta^0 E - c\beta^1 (p_\gamma - im\omega\eta^0 x) - mc^2] \Psi = 0. \quad (3.21)$$

com  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ , que leva a um conjunto de três equações, a saber

$$\begin{aligned} mc^2 \psi_1 &= E\psi_3 \\ mc^2 \psi_2 &= -c(p_\gamma - im\omega x) \psi_3 \\ mc^2 \psi_3 &= E\psi_1 + c(p_x + im\omega x) \psi_2. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema para a componente  $\psi_3$  do campo DKP, temos

$$2m\mathcal{E}\psi_3 = [(p_\gamma + im\omega x)(p_\gamma - im\omega x)] \psi_3, \quad (3.22)$$

cuja expressão é idêntica à Eq. (3.16), que corresponde portanto ao oscilador DKP unidimensional com acoplamento não-mínimo  $p_\gamma - im\omega(e^{\gamma\varkappa} - 1)/\gamma$  e cuja função de onda relativística  $\phi(\varkappa, t) = \psi_3(x(\varkappa), t)$  no espaço  $\varkappa$ , reproduzindo assim as mesmas equações para os níveis de energia (3.19)-(3.20), o que era esperado já que para osciladores unidimensionais estamos lidando com os mesmos tipos de partículas escalares, não havendo manifestação de spin.

Para fins de comparação do nosso modelo com outros presentes na literatura [68], faremos um ajuste na Eq. (3.18), tomando o seu limite não relativístico, e expressando-a pelas componentes  $D_e = \frac{m\tilde{\omega}^2}{2\gamma^2}$ ,  $\alpha = -\gamma\varkappa_0$  e  $\varkappa_0 = -r_e$ . Utilizaremos como exemplos três modelos de moléculas diatômicas, cujo potencial de Morse é justamente energia de dissociação molecular [62], e cujos valores dos parâmetros serão dados para cada tipo de molécula, sendo estas as moléculas de hidrogênio ( $H_2$ ), hidreto de lítio (LiH) e de cloreto de hidrogênio (HCl) [68, 69].

A equação geral fica na forma

$$\lambda\phi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\varkappa^2} + D_e \left[ e^{-2\alpha\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0} + 1\right)} - 2e^{-\alpha\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0} + 1\right)} \right] \right\} \phi, \quad (3.23)$$

cujos valores correspondentes de energia serão  $\lambda_N = \mathcal{E}_N + \frac{\hbar\tilde{\omega}}{2} - D_e$

$$\lambda_N = -\frac{\alpha^2 E_0}{2} \left( \frac{2r_e \sqrt{2mD_e}}{\alpha\hbar} - \frac{1}{2} - N \right)^2. \quad (3.24)$$

Pela substituição dos valores de  $D_e = 4.7446$  eV,  $r_e = 0.7416\text{\AA}$ ,  $m = 0.50391$  amu,  $\alpha = 1.440558$  e  $E_0 = \hbar^2/mr_e^2 = 1.508343932 \times 10^{-2}$  eV na Eq. (3.24) poderemos obter novamente a equação de auto-valores

[68]. Em seguida temos a molécula de hidreto de lítio, pela substituição dos valores de  $D_e = 2.515287$  eV,  $r_e = 1.5956\text{Å}$ ,  $m = 0.8801221$  amu,  $\alpha = 1.7998368$  e  $E_0 = \hbar^2/mr_e^2 = 1.865528199 \times 10^{-3}$  eV. Por fim temos a molécula de cloreto de hidrogênio, pela substituição dos valores de  $D_e = 4.61907$  eV,  $r_e = 1.5956\text{Å}$ ,  $m = 0.9801045$  amu,  $\alpha = 2.38057$  e  $E_0 = \hbar^2/mr_e^2 = 2.625261613 \times 10^{-3}$  eV. Pelas tabelas 3.1-3.3 podemos ver que as energias não relativísticas para os estados vibracionais estão em concordância razoável com a literatura (ver [68] e referências nele contidas), diferindo somente na nona casa decimal.

N	este trabalho	[68]	valor exato [68]
0	4.476013136977448	4.476013136943936	4.476013136943926
1	3.962315359052883	3.962315358958284	3.962315358958260
2	3.479918845289036	3.479918845141218	3.479918845141241
3	3.028823595685905	3.028823595492864	3.028823595492867
4	2.609029610243492	2.609029610013135	2.609029610013140
5	2.220536888961795	2.220536888702045	2.220536888702059
6	1.863345431840814	1.863345431559636	1.863345431559624
7	1.537455238880551	1.537455238585834	1.537455238585836
8	1.242866310081005	1.242866309780691	1.242866309780693
9	0.979578645442175	0.979578645144206	0.979578645144197
10	0.747592244964062	0.747592244676326	0.747592244676347
11	0.546907108646666	0.546907108377146	0.546907108377143
12	0.377523236489987	0.377523236246581	0.377523236246586
13	0.239440628494024	0.239440628284702	0.239440628284674
14	0.132659284658779	0.132659284491403	0.132659284491409

Tabela 3.1: Valores de energia (em eV) do oscilador unidimensional não-relativístico obtidos pela Eq. (3.24) para os estados vibracionais ( $l = 0$  e  $N = 0, 1, \dots, 14$ ) da molécula de hidrogênio ( $\text{H}_2$ ), junto ao quadro comparativo dos resultados obtidos na referência [68] e os valores exatos.

N	este trabalho	[68]	valor exato [69]
0	2.428863215525080	2.428863215520034	2.428863215520037
1	2.260548058109731	2.260548058095126	2.260548058095136
2	2.098276116073702	2.098276116050267	2.098276116050265
3	1.942047389416991	1.942047389385409	1.942047389385426
4	1.791861878139601	1.791861878100625	1.791861878100618
5	1.647719582241530	1.647719582195847	1.647719582195841
6	1.509620501722778	1.509620501671092	1.509620501671094
7	1.377564636583346	1.377564636526370	1.377564636526379
8	1.251551986823233	1.251551986761669	1.251551986761694
9	1.131582552442440	1.131582552377003	1.131582552377041
10	1.017656333440966	1.017656333372503	1.017656333372418
11	0.909773329818811	0.909773329748332	0.909773329747826
12	0.807933541575976	0.807933541501811	0.807933541503265
13	0.712136968712461	0.712136968622215	0.712136968638735
14	0.622383611228265	0.622383611097279	0.622383611154236

Tabela 3.2: Valores de energia (em eV) do oscilador unidimensional não-relativístico obtidos pela Eq. (3.24) para os estados vibracionais da molécula de hidreto de lítio ( $\text{LiH}$ ) [69].

N	este trabalho	[68]	valor exato [69]
0	4.435563943360054	4.435563943352675	4.435563943352696
1	4.079710071775237	3.962315358958284	4.079710071754069
2	3.738733855783852	3.738733855750068	3.738733855750079
3	3.412635295385901	3.412635295340741	3.412635295340728
4	3.101414390581383	3.101414390526035	3.101414390526015
5	2.805071141370297	2.805071141305942	2.805071141305941
6	2.523605547752645	2.523605547680502	2.523605547680504
7	2.257017609728426	2.257017609649704	2.257017609649706
8	2.005307327297640	2.005307327213539	2.005307327213546
9	1.768474700460287	1.768474700372031	1.768474700372025
10	1.546519729216368	1.546519729125149	1.546519729125141
11	1.339442413565881	1.339442413472914	1.339442413472896
12	1.147242753508827	1.147242753415306	1.147242753415289
13	0.969920749045207	0.969920748952278	0.969920748952320
14	0.807476400175020	0.807476400083812	0.807476400083989

Tabela 3.3: Valores de energia (em eV) do oscilador unidimensional não-relativístico obtidos pela Eq. (3.24) para os estados vibracionais da molécula de cloreto de hidrogênio (HCl) [69].

### 3.3 O Oscilador Deformado em $(3 + 1)$ Dimensões: A Equação Diferencial Radial Generalizada

Vamos agora estudar os casos tridimensionais do oscilador de DKP escalar (SDKP) e de Dirac, considerando a influência do spin no sistema. Utilizando as Eqs. (3.8) e (B.2) em coordenadas esféricas [41], podemos obter a equação diferencial radial para os osciladores relativísticos

$$\mathcal{E}\Phi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{m\omega^2}{2} U^2 - \frac{\hbar\omega}{2} \frac{dU}{dr} - [1 + f(j, l)] \frac{\hbar\omega U}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right\} \Phi(r) \quad (3.25)$$

onde  $U = U(r)$  é um acoplamento radial geral, que reduz a equação diferencial radial (3.25), para  $U(r) = r$ , às equações dos osciladores SDKP (B.2) e Dirac (3.8), em coordenadas esféricas, após consideradas as respectivas funções  $f(j, l)$ , que são as funções responsáveis pelas informações de spin e momentum angular total das partículas massivas descritas pelos osciladores, a saber

$$f(j, l) = \begin{cases} 0 & \text{SDKP;} \\ 2[j(j+1) - l(l+1) - 3/4] & \text{Dirac.} \end{cases}$$

Observamos que a presença do termo proporcional a  $U/r$  faz com que a Eq. (3.25) torne-se insolúvel analiticamente. Neste sentido, a estratégia que utilizamos foi recorrer à aproximação de Pekeris [63], cujo trabalho foi justamente propor uma solução para o problema de Morse [62], quando este tratava dos estados denominados rotacionais ( $l \neq 0$ ), e não somente os estados vibracionais discutidos na seção anterior. Para tratarmos o problema, faremos então a expansão em série da exponencial, utilizando aproximação de Pekeris, de modo a agruparmos tanto o termo  $U/r$  quanto o termo centrífugo,  $U/r^2$ . Definindo então  $U$  como um potencial linear deformado (que recupera o potencial harmônico clássico  $U(r) = r - r_e$  quando  $\gamma \rightarrow 0$ , sendo  $r_e$  a distância internuclear média entre as moléculas diatômicas), dado por

$$U(r) = \frac{e^{\gamma(r-r_e)} - 1}{\gamma}, \quad (3.26)$$

podemos obter a equação diferencial radial na seguinte forma (ver Apêndice C)

$$\tilde{\mathcal{E}}\Phi(r) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + U_{eff} \right) \Phi(r), \quad (3.27)$$

onde  $U_{eff}(r) = \frac{m\Omega^2}{2\gamma^2} [e^{\gamma(r-r_{eff})} - 1]^2 + U_0$  é um potencial efetivo do tipo Morse, com distância internuclear efetiva de  $r_{eff}$ ,  $\Omega$  é a frequência modificada (ver Apêndice C) e deslocamento  $U_0$  dados por

$$\begin{aligned}\Omega^2 &\longrightarrow \omega^2 A(\alpha, \delta, j, l) [1 - B(\alpha, \delta, j, l)/(2A(\alpha, \delta, j, l))]^2, \\ r_{eff} &= r_e + \frac{1}{\gamma} \ln \left( 1 - \frac{B}{2A} \right), \\ U_0 &= \frac{m\Omega^2}{2\gamma^2} [C(\alpha, l) - B(\alpha, \delta, j, l)^2/(4A(\alpha, \delta, j, l)^2)],\end{aligned}$$

com  $A, B$  e  $C$  obtidos no Apêndice C e expressos por

$$\begin{aligned}A &= 1 + \delta [2(1 + f(j, l)) + l(l + 1)(3 - \alpha)], \\ B &= -\delta \left[ 1 - 2 \frac{1 + f(j, l)}{\alpha} - 2 \frac{l(l + 1)}{\alpha} \right], \\ C &= \delta [(l + 1) - 1].\end{aligned}\tag{3.28}$$

Assim, a partir da aproximação de Pekeris, os valores de energia para os osciladores de Morse generalizados são dados por

$$\tilde{\mathcal{E}}_N = \hbar\Omega \left( N + \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - \frac{\gamma^2 \hbar}{2m\Omega} \left( N + \frac{1}{2} \right) \right] + U_0.\tag{3.29}$$

Na Fig. 3.1, a precisão da aproximação de Pekeris generalizada (C.1) é comparada com os termos do tipo Coulomb e centrífugos,  $(r/r_e)$  e  $(r/r_e)^2$  respectivamente, para a molécula de  $H_2$ , com  $\alpha = -\gamma r_e = 1.440558$ . Podemos ver que a aproximação de Pekeris se ajusta bem a ambos os termos, considerando o intervalo em que  $r/r_e \in (0.5, 1.5)$ , o que justifica sua utilização para os estados vibracionais  $r \sim r_e$ . As funções  $A(\alpha, \delta, j, l), B(\alpha, \delta, j, l)$  e  $C(\alpha, l)$  expressam a aproximação de Pekeris generalizada (C.1) em

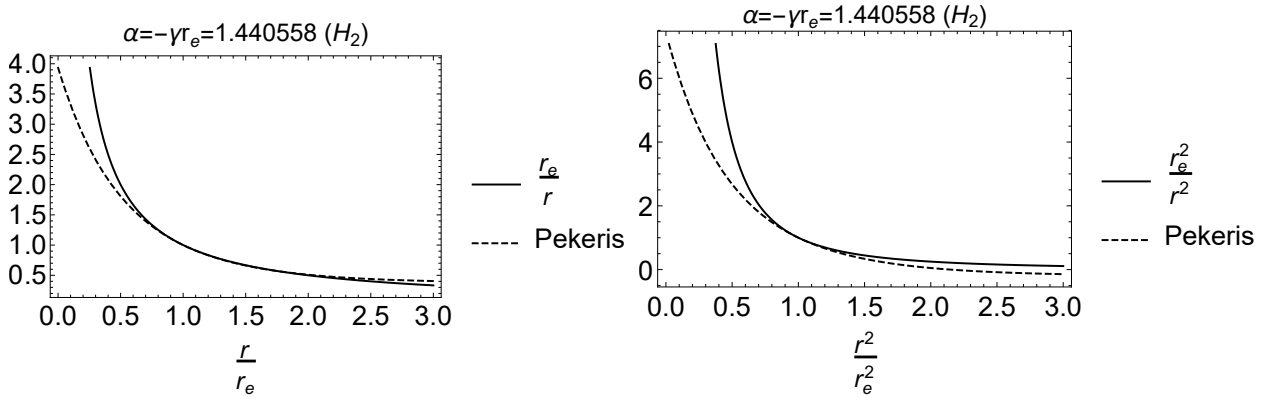


Figura 3.1: Precisão da aproximação de Pekeris generalizada (C.1) para os termos  $r/r_e$  e  $(r/r_e)^2$  para o caso da molécula de  $H_2$  com um acoplamento não minimal do tipo (3.26).

termos dos números quânticos de momentum angular e momentum angular total (pela função  $f(j, l)$ ) com a parametrização  $\alpha = -\gamma r_e > 0$  e  $\delta = \frac{\hbar}{m\omega r_e^2} > 0$ . As diferenças de energia (3.11) no caso correspondente ao limite da deformação nula, dado por (??) ocorrem como consequência da aproximação de Pekeris, de modo a obtermos um potencial efetivo do oscilador. Considerando algumas moléculas diatômicas, podemos ver que  $\delta \ll 1$  representa uma situação comum, mostrado na tabela 3.3, com os valores de  $N_{max}$  para os estados vibracionais permitidos ( $l = 0$ ), correspondente aos estados ligados.

Neste regime, podemos interpretar as contribuições dos efeitos do spin e do momentum angular para os níveis de energia como segue. Quando  $\delta \ll 1$ , todos os termos quadráticos  $\propto \delta^2$  em  $A, B$  e  $C$  podem ser desprezados, de modo que  $\Omega^2$  torna-se a  $\approx \omega^2 \left[ 1 + \delta \left[ 3 + 2(1 + f(j, l)) \frac{1+\alpha}{\alpha} + l(l + 1) \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{\alpha} \right] \right]$ , portanto



Molécula	$\delta$	$N_{\max}$	$D_e$ (eV) [68]
H <sub>2</sub>	0.0276729	18	4.7446
LiH	0.0106979	29	2.515287
HCl	0.00708095	24	4.61907

Tabela 3.4: O parâmetro  $\delta = \sqrt{E_0/(2\alpha^2 D_e)}$  para as moléculas de H<sub>2</sub>, LiH e HCl em função da energia de Hartree  $E_H = \frac{\hbar^2}{mr_e^2}$  e da energia de dissociação  $D_e$ , junto ao número máximo de estados vibracionais permitidos ( $l = 0$ ) na equação radial aproximada (3.27).

carregando toda a diferença a respeito do caso unidimensional (com as contribuições de spin e momentum angular) em termos  $\delta$ . Também, o termo  $U_0$  resulta  $\approx \frac{m\omega^2}{2\gamma^2}\delta[l(l+1) - 1]$ . Na Fig. 3.2 são mostrados os níveis de energia permitidos para os estados vibracionais das moléculas de H<sub>2</sub> e LiH, onde podemos observar os efeitos do spin nos níveis de energias.

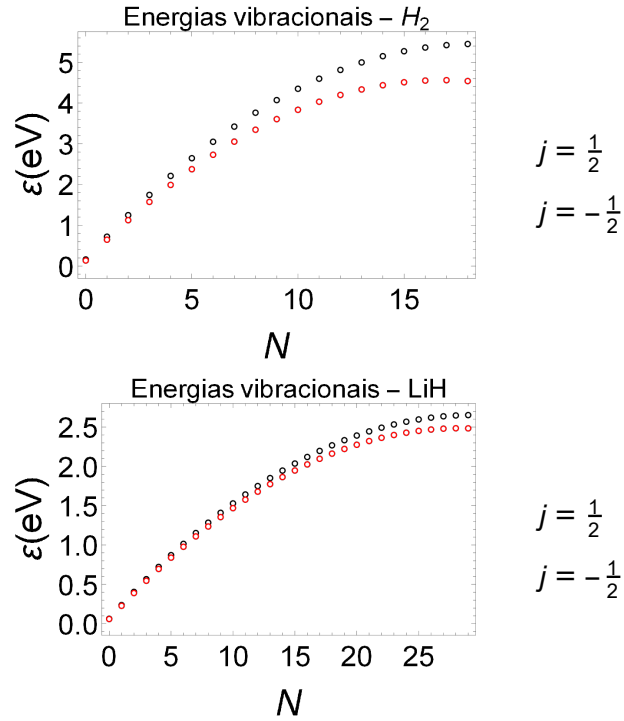


Figura 3.2: Energias (3.30) em eV das moléculas H<sub>2</sub> e LiH dos estados vibracionais permitidos ( $l = 0$ ). Em ambos os casos a projeção de spin  $j = +1/2$  aumenta os níveis de energia e os estados se mantêm não degenerados com a faixa  $0 \leq N \leq 18$  (H<sub>2</sub>) e  $0 \leq N \leq 29$  (LiH).

### 3.4 A Termodinâmica dos Estados Vibracionais: A Anomalia Schottky

Nós exploramos os efeitos da equação diferencial radial aproximada ( $l = 0$ ) (3.27) nas suas propriedades estatísticas, que manifestam as características vibracionais do sistema. Com o intuito de obtermos a função de partição do ensemble canônico, consideraremos que o sistema se encontra em equilíbrio térmico com um reservatório a uma temperatura finita  $T$ . Devemos considerar ainda que somente os estados de energia positiva serão analisados, para que possamos garantir a estabilidade do ensemble [70]. Por razões de simplificação dos cálculos, tornaremos a equação de energia (3.29) adimensional, a saber

$$\tilde{\mathcal{E}}_{N,j=\pm 1/2}/\hbar\omega = \left[ \sqrt{1 + \delta(3 \pm 2(1 + \alpha)/\alpha)} \left( N + \frac{1}{2} \right) - \frac{\alpha^2 \delta}{2} \left( N + \frac{1}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \quad (3.30)$$

onde  $\pm$  caracteriza as projeções de spin  $+1/2$  e  $-1/2$ , respectivamente. Portanto, podemos encontrar duas funções de partição

$$Z^{\text{NR}} = \sum_{j=\pm 1/2} \sum_{N=0}^{N_{\text{max}}} e^{\gamma^{\text{NR}} \tilde{\mathcal{E}}_{N,j=\pm 1/2}/\hbar\omega} \quad (3.31)$$

e

$$Z^{\text{R}} = \sum_{j=\pm 1/2} \sum_{N=0}^{N_{\text{max}}} e^{\gamma^{\text{R}} \sqrt{1+2\gamma} \tilde{\mathcal{E}}_{N,j=\pm 1/2}/\hbar\omega}, \quad (3.32)$$

para os respectivos regimes não relativístico e relativístico. Os parâmetros adimensionais  $\gamma^{\text{NR}} = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$  e  $\gamma^{\text{R}} = \frac{mc^2}{k_B T}$  medem as razões entre a energia vibracional e a massa de repouso em relação às excitações térmicas. Os coeficientes,  $\gamma^{\text{NR}}$  e  $\gamma^{\text{R}}$ , permitem caracterizar todos os regimes a partir dos limites de baixas e altas temperaturas. É assumido também que  $\gamma$  é fixado para cada molécula da tabela 3.3, em termos dos seus parâmetros característicos. Para que nossa análise fique completa, os parâmetros termodinâmicos adimensionais são necessários

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial \ln Z^{\text{NR,R}}}{\partial \gamma^{\text{NR,R}}} \quad (\text{energia interna}) \\ S &= (\gamma^{\text{NR,R}})^2 \frac{\partial F}{\partial \gamma^{\text{NR,R}}} \quad (\text{entropia}) \\ C &= -(\gamma^{\text{NR,R}})^2 \frac{\partial U}{\partial \gamma^{\text{NR,R}}} \quad (\text{capacidade térmica}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

de onde toda a termodinâmica dos estados vibracionais pode ser derivada. Para as moléculas mencionadas acima, o coeficiente  $\gamma = \hbar\omega/mc^2 \ll 1$ , devido ao valor da massa de repouso  $mc^2$  ser muito alto (da ordem de  $\sim 1000$  MeV) quando comparado à pequena energia do fóton  $\hbar\omega$ , que é característica em níveis de espaçamento típicos de transições quânticas. Então, para observarmos efeitos relativísticos e mantermos  $\delta \ll 1$  devemos considerar  $\hbar\omega \sim 124\text{eV}$ , que corresponde ao espectro ultravioleta, junto com  $mc^2 = m_e c^2 = 511\text{keV}$  (massa de repouso do elétron). Sendo  $\delta = E_{\text{H}}/\hbar\omega$  com  $E_{\text{H}}$  a energia de Hartree, nós teremos que  $\gamma = 0.000242661$  e  $\delta = 0.219444$  de tal forma que  $\delta^2 = 0.0481555$  pode ser desprezado em relação a  $\delta$ , e então a aproximação (3.30) se mantém válida. Definimos ainda  $\alpha = -\gamma r_e = 1$ , e portanto o número de estados permitidos com as projeções de spin  $1/2$  e  $-1/2$  resultam em 6 e 3, respectivamente <sup>2</sup>.

Pelos gráficos de capacidade térmica mostrados na Figura 3.3, observamos a ocorrência de anomalias do tipo Schottky [71] presentes em ambos regimes, relativístico e não-relativístico, devido ao número finito de estados permitidos. A interpretação física dos picos apresentados nos gráficos de capacidade térmica versus temperatura se deve ao fato de que o aumento da temperatura favorece ao decréscimo do número estados ocupados pelo sistema. Portanto quando a temperatura cresce, de tal forma que o fator  $k_B T$  se aproxima à diferença dos níveis de energia, um pico na capacidade térmica surge, e deste, pequenas variações na temperatura produzem mudanças na entropia de tal forma que a capacidade térmica passa a diminuir, tendendo a zero no limite  $T \rightarrow \infty$ . Para compararmos os casos escalar e vetorial, o comportamento do anomalia Schottky e suas temperaturas críticas para os sistemas estudados é mostrado na tabela 3.5.

<sup>2</sup>Como no caso da tabela 3.3, o número máximo de estados permitidos é calculado utilizando  $\alpha$  e  $\delta$ , pela fórmula  $N_{\text{max}} = \left\lfloor (\delta\alpha^2)^{-1} \sqrt{1 + \delta(3 \pm 2(1 + \alpha)/\alpha)} - 1/2 \right\rfloor$ , com  $\pm$  sendo as projeções de spin.

Sistema	$C(T_c)$ (Dirac)	$C(T_c)$ (SDKP)	$T_c$ (Dirac)	$T_c$ (SDKP)
H <sub>2</sub>	0.44	$1.8 \times 10^{-11}$	-154.1	-265.2
	1.31	1.29	9804.4	10606.6
LiH	0.44	$7.474 \times 10^{-11}$	-259.2	-271.7
	1.32	1.31	4749.6	4876.6
HCl	0.44	$1.34 \times 10^{-11}$	-255.1	-270
	1.3	1.29	8750.6	8883
$e^-$	0.85	1.11	$6.03 \times 10^5$	$2.11 \times 10^6$

Tabela 3.5: Ocorrência de anomalias do tipo Schottky (em unidades de  $k_B$ ) dos sistemas estudados e suas temperaturas críticas associadas (em Celsius) para os casos escalar e vetorial. A diferença entre eles é apreciável para baixas temperaturas no regime não relativístico (moléculas diatômicas), e para altas temperaturas no regime relativístico (elétrons).

Podemos ver que para as moléculas, os primeiros picos se encontram em baixas temperaturas, dentro da faixa de  $-270 \leq T \leq -150$  graus Celsius, enquanto o segundo pico se encontra em altas temperaturas  $4700 \leq T \leq 10700$  graus Celsius, que corresponde a energias térmicas  $k_B T$  da ordem da energia de dissociação das moléculas  $\sim$  eV. Para temperaturas  $T \geq 10700^\circ C$  as predições do modelo de Morse não são mais válidas, e a capacidade térmica diminui com o aumento da temperatura. No regime não relativístico das moléculas estudadas, os efeitos de spin são predominantes a baixas temperaturas, o que é esperado, tendo em vista que os efeitos magnéticos sofrem mudanças a altas temperaturas. Por outro lado, para o gás de elétrons os efeitos de spin são visíveis mesmo no limite de altas temperaturas  $\sim 10^5 - 10^6$  graus Celsius.

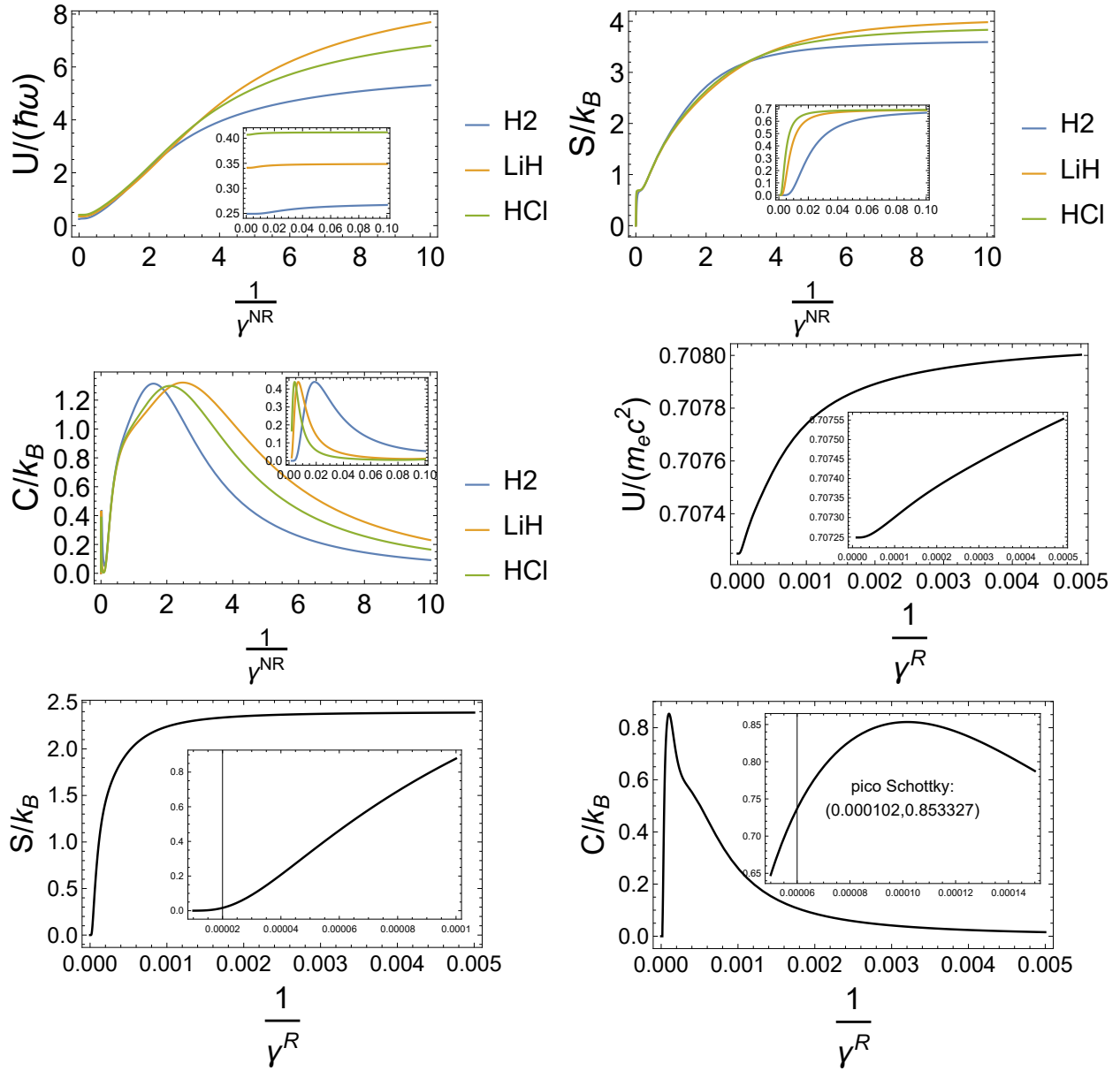


Figura 3.3: Energia interna, entropia e capacidade térmica para os estados vibracionais ( $l = 0$ ) das moléculas de  $H_2$ ,  $LiH$  e  $HCl$  no regime não relativístico, e um gás de elétrons com  $\hbar\omega \sim 124eV$  (espectro ultravioleta) no regime relativístico, na presença do potencial de Morse efetivo (3.27). Os parâmetros da tabela 3.3 junto às energias aproximadas (3.30) (para  $\delta^2 \ll 1$ ) foram utilizados. Dois picos foram observados para a capacidade térmica (o primeiro pode ser observado na faixa estreita entre 0.00 – 0.10), por conta do número finito de níveis de energia (anomalia Schottky). Para o gás de elétrons, utilizamos os parâmetros  $\gamma = 0.000242661 = \hbar\omega/m_e c^2$ ,  $\delta = E_H/\hbar\omega = 0.219444$  e  $\alpha = 1$  junto à energia aproximada (3.30), onde também dois picos foram observados.

## Capítulo 4

# O Oscilador DKP em um Campo Magnético Transverso

Com o advento do oscilador de Dirac [39] no final dos anos 80, houve um grande interesse no estudo destes modelos, em especial na física nuclear, para a descrição das propriedades de partículas sub-atômicas e da composição da matéria e suas interações. Neste sentido, apesar da sua simplicidade, os osciladores relativísticos se apresentam como modelos físicos exatamente solúveis e de grande importância tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista experimental [40]– [44], motivando trabalhos como o oscilador bidimensional submetido a um campo magnético transverso, onde foi possível observar alguns fenômenos físicos interessantes, como o efeito Zeeman e o surgimento de uma frequência do tipo Zitterbewegung [42].

O oscilador DKP foi inspirado no oscilador de Dirac como um modelo físico de partículas bosônicas massivas submetidas a um potencial harmônico linear [33]. No final da década passada, surge uma série de trabalhos [45]– [48] realizados a partir da introdução de um campo magnético externo, onde novas propriedades físicas são observadas, com a prevalência de sistemas em duas dimensões, além da implementação de espaços de fase não triviais, seja pela não comutatividade [45]– [47] ou pela álgebra de Snyder-de Sitter [48]. Porém nas abordagens bidimensionais, observa-se que no tratamento dado aos osciladores usa-se representações associadas ao espaço-tempo em  $3 + 1$  dimensões, o que implica na necessidade de redução do número de componentes do campo DKP, ou seja, de anular algumas delas. Todavia, neste processo, ocorre a particularização excessiva das componentes do campo DKP de maneira a se obter soluções conhecidas, em que o setor escalar e vetorial apresentam soluções muito semelhantes, onde a informação de spin perde relevância, além do fato de não se obter efeitos do campo transverso nas frequências de oscilação do sistema [46, 47]. Em outros trabalhos [45, 48], embora os efeitos de spin fossem obtidos, as soluções para estes casos não foi encontrada, sendo que foi feita a escolha pelo limite não relativístico do sistema.

Neste capítulo, estudaremos o oscilador DKP em  $2 + 1$  dimensões utilizando as representações escalar  $4 \times 4$  e vetorial  $6 \times 6$  das matrizes  $\beta^\mu$ , propostas em [17] e reproduzidas no Capítulo 2, na presença de um campo magnético transverso constante. Alguns dos aspectos deste sistema físico, já conhecidos na literatura, são reproduzidos a exemplo dos resultados obtidos para o setor escalar do oscilador. Todavia, a interação entre o oscilador e o campo magnético transverso apresentou novos resultados, a exemplo da divisão da frequência do oscilador DKP de acordo com a projeção do spin, na direção do momento angular das partículas vetoriais. Como será mostrado, a escolha específica das componentes do campo DKP a serem anuladas no seu setor vetorial contribuiu decisivamente na obtenção deste resultado e seus casos particulares. Com estes resultados, apresentamos também um estudo termodinâmico do setor vetorial, onde observamos uma transição de fase que ocorre em decorrência da interação magnética.

## 4.1 O formalismo

O oscilador DKP bidimensional é dado pelo acoplamento não-mínimo [33]

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\eta^0\mathbf{r} \quad (4.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular do oscilador,  $q$  é a carga elétrica do bóson e  $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - \mathbf{1}$ . A equação DKP acoplada é escrita da seguinte forma

$$\left[ -\beta^0 E + c\vec{\beta} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\eta^0\mathbf{r}) + mc^2 \right] \Psi = 0. \quad (4.2)$$

onde nós utilizamos  $-i\hbar\partial_\mu = -p_\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$  (ver Apêndice A). Vamos agora tratar dos dois setores do oscilador em duas dimensões espaciais.

### 4.1.1 O Oscilador DKP Escalar Bidimensional

Utilizando a representação DKP  $4 \times 4$  mostrada em (2.36) e o campo de quatro componentes  $\Psi^T = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ , obtêm-se, a partir da equação acoplada (4.2), um conjunto de quatro equações expressas por

$$\begin{aligned} mc^2\Psi_0 &= E\Psi_3 \\ mc^2\Psi_1 &= -c(p_x - im\omega x)\Psi_3 \\ mc^2\Psi_2 &= -c(p_y - im\omega y)\Psi_3 \\ mc^2\Psi_3 &= E\Psi_0 + c(p_x + im\omega x)\Psi_1 + c(p_y + im\omega y)\Psi_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Fazendo a combinação destas equações, e resolvendo para a componente do campo  $\Psi_3$ , teremos

$$(E^2 - m^2c^4)\Psi_3 = c^2(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega)\Psi_3. \quad (4.4)$$

Este resultado está de acordo com o obtido em [33], para um oscilador DKP escalar tridimensional. O limite não relativístico desta equação é calculado a partir da aproximação  $E = \epsilon + mc^2$ , com  $\epsilon \ll mc^2$ , obtendo  $(E^2 - m^2c^4)/2mc^2 \cong \epsilon$ , e a equação do oscilador harmônico bidimensional não relativístico

$$\epsilon\Psi_3 = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{r}^2}{2} - \hbar\omega \right) \Psi_3, \quad (4.5)$$

cuja solução é amplamente conhecida na literatura [65]. Vamos agora utilizar as representações para o setor vetorial da teoria DKP em  $2 + 1$  dimensões.

### 4.1.2 O Oscilador DKP Vetorial Bidimensional

Nesta abordagem do oscilador DKP vetorial bidimensional usaremos a representação  $6 \times 6$  mostrada em (2.56) e o campo DKP dado por  $\Psi^T = (\mathbf{a}, b, \mathbf{d}, \Psi_6)$ , onde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  e  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ . Assim, utilizando a equação DKP acoplada obtemos as seis equações abaixo

$$\begin{aligned} mc^2a_1 &= -Ed_1 - c(p_x + im\omega x)\Psi_6 \\ mc^2a_2 &= -Ed_2 - c(p_y + im\omega y)\Psi_6 \\ -mc^2b &= c(p_x - im\omega x)d_2 - c(p_y - im\omega y)d_1 \\ -mc^2d_1 &= Ea_1 + c(p_y + im\omega y)b \\ -mc^2d_2 &= Ea_2 - c(p_x + im\omega x)b \\ -mc^2\Psi_6 &= -c(p_x - im\omega x)a_1 - c(p_y - im\omega y)a_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como pode ser visto, as equações obtidas acima são acopladas. Como iremos investigar, na próxima Seção, o efeito de um campo magnético transversal sobre a frequência do oscilador, vamos desde já desacoplar as equações acima escolhendo  $\Psi_6 = 0$ , de forma a obter a simplificação das equações de movimento, ou seja

$$mc^2 a_1 = -Ed_1 \quad (4.7)$$

$$mc^2 a_2 = -Ed_2 \quad (4.8)$$

$$-mc^2 b = c(p_x - im\omega x) d_2 - c(p_y - im\omega y) d_1 \quad (4.9)$$

$$-mc^2 d_1 = Ea_1 + c(p_y + im\omega y) b \quad (4.10)$$

$$-mc^2 d_2 = Ea_2 - c(p_x + im\omega x) b \quad (4.11)$$

$$0 = -c(p_x - im\omega x) a_1 - c(p_y - im\omega y) a_2. \quad (4.12)$$

Substituindo as equações (4.7)-(4.8) nas (4.9)-(4.12), teremos as equações para as componentes  $b$ ,  $d_1$  e  $d_2$  dadas por

$$(E^2 - m^2 c^4) b = c^2 [(p_x - im\omega x)(p_x + im\omega x) + (p_y - im\omega y)(p_y + im\omega y)] b \quad (4.13)$$

$$(E^2 - m^2 c^4) d_1 = c^2 (p_y + im\omega y) [(p_y - im\omega y) d_1 - (p_x - im\omega x) d_2] \quad (4.14)$$

$$(E^2 - m^2 c^4) d_2 = c^2 (p_x + im\omega x) [(p_x - im\omega x) d_2 - (p_y - im\omega y) d_1] \quad (4.15)$$

$$0 = (p_x - im\omega x) d_1 + (p_y - im\omega y) d_2 \quad (4.16)$$

Assim, após simplificarmos a equação (4.13) para a componente  $b$ , obtemos

$$(E^2 - m^2 c^4) b = c^2 (\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 + 2m\hbar\omega) b. \quad (4.17)$$

A expressão acima mostra que a componente  $b$  comporta-se como a solução do oscilador DKP escalar bidimensional, com  $\omega \rightarrow -\omega$ . Este resultado está de acordo com o esperado fisicamente tendo em vista que a componente  $B$  do campo  $\Psi$  em (2.22), conforme definição em (2.60), representa um campo do tipo magnético que, em duas dimensões, é um escalar. Por outro lado, se aplicarmos o operador  $c^2(p_x + im\omega x)$  à (4.16) e adicionarmos o resultado à (4.14), e do mesmo modo aplicarmos o operador  $c^2(p_y + im\omega y)$  novamente na (4.16) e adicionarmos o resultado à (4.15), teremos

$$(E^2 - m^2 c^4) d_1 = c^2 (\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega) d_1 + ic^2 (2m\omega L_z) d_2, \quad (4.18)$$

e

$$(E^2 - m^2 c^4) d_2 = c^2 (\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega) d_2 - ic^2 (2m\omega L_z) d_1. \quad (4.19)$$

Para desacoplarmos estas duas equações, definindo as componentes do campo,  $d_1$  e  $d_2$ , como sendo

$$d_1 = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \quad (4.20)$$

$$d_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2i}, \quad (4.21)$$

que torna possível reescrever (4.18)-(4.19) da forma

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_1 = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega - 2m \left( \frac{\omega}{\hbar} \right) L_z \right] \varphi_1,$$

e

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_2 = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega + 2m \left( \frac{\omega}{\hbar} \right) L_z \right] \varphi_2.$$

Podemos escrever as duas equações do oscilador para os setores escalar e vetorial da seguinte forma:

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega - 2m \left( \frac{\omega}{\hbar} \right) L_z S_z \right] \varphi, \quad (4.22)$$

onde  $\varphi = (\varphi_1 \ \varphi_2)^T$  e o último termo da equação acima representa o acoplamento spin-órbita em duas dimensões com  $S_z$  uma matriz dada por

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

que está associada à componente  $z$  do spin do campo  $\varphi$ .

## 4.2 O Oscilador DKP na Presença de um Campo Magnético

O oscilador DKP bidimensional sujeito a um campo magnético transverso do tipo  $\mathbf{A} = -\frac{B}{2}(y, -x)$  é dado pelo acoplamento não-mínimo

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} - im\omega\eta^0\mathbf{r} \quad (4.24)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular do oscilador,  $q$  é a carga elétrica do bóson e  $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - \mathbf{1}$ . A equação DKP acoplada é escrita da seguinte forma

$$\left[ -\beta^0 E + c\beta \cdot \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} - im\omega\eta^0\mathbf{r} \right) + mc^2 \right] \Psi = 0. \quad (4.25)$$

Vamos agora tratar os dois setores do oscilador como feito na seção anterior.

### 4.2.1 O Oscilador DKP Escalar na Presença de um Campo Magnético

Utilizando o espinor de quatro componentes  $\Psi^T = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  e definindo  $\tilde{\omega} = \frac{qB}{2mc}$ , a equação acoplada (4.25) gera um conjunto de quatro equações dadas por

$$mc^2\Psi_0 = E\Psi_3; \quad (4.26)$$

$$mc^2\Psi_1 = -c(p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)\Psi_3; \quad (4.27)$$

$$mc^2\Psi_2 = -c(p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)\Psi_3; \quad (4.28)$$

$$mc^2\Psi_3 = E\Psi_0 + c(p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega x)\Psi_1 + c(p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y)\Psi_2. \quad (4.29)$$

Fazendo a combinação destas equações e escrevendo o resultado em função de  $\Psi_3$ , teremos

$$(E^2 - m^2c^4)\Psi_3 = c^2(\mathbf{p}^2 + m^2\omega_0^2\mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega - 2m\tilde{\omega}L_z)\Psi_3 \quad (4.30)$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2}$ ,  $\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2$  e  $L_z = xp_y - yp_x$  é a componente do momento angular na direção  $z$ . Comparando (4.30) com (4.4) pode-se concluir que a interação do campo tranverso com o oscilador DKP resulta na alteração da frequência de oscilação, de  $w$  para  $w_0$ . Somado a esta alteração, ocorre também a contribuição relacionada a projeção do campo magnético  $B$  na direção do momento angular  $L_z$ . Para resolvermos esta equação, é conveniente reescrevê-la em coordenadas polares  $(\mathbf{r}, \theta)$ , de modo que  $L_z = -i\hbar(\partial/\partial\theta)$ , e a função de onda  $\Psi_3 = R(r)\Theta(\theta) = R(r)e^{il\theta}$ , onde  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  é o número quântico associado ao momentum angular, de modo que

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + m^2\omega_0^2\mathbf{r}^2 - \frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{2im\tilde{\omega}}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] R(r)e^{il\theta} = (E^2 - m^2c^4) R(r)e^{il\theta}. \quad (4.31)$$

Simplificando a equação, teremos

$$\left[ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + (v^2 r^2 - l^2) - \frac{m^2\omega_0^2 r^4}{\hbar^2} \right] R(r) = 0 \quad (4.32)$$

com

$$v^2 = \frac{E^2 - m^2c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2ml\tilde{\omega}}{\hbar} + \frac{2m\omega}{\hbar}. \quad (4.33)$$

Fazendo a transformação de coordenadas

$$z = \frac{m\omega_0}{\hbar} r^2, \quad (4.34)$$

sendo que  $R(r) = R$ , obtemos

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} + \frac{1}{z^2} \left( -\frac{z^2}{4} + \frac{v^2 \hbar}{4m\omega_0} z - \frac{l^2}{4} \right) R = 0. \quad (4.35)$$



Aplicando o método Nikiforov-Uvarov, que está detalhado no Anexo B, para a solução da equação diferencial acima, encontramos o espectro de energia para o oscilador DKP escalar em um campo transverso, dado por

$$E_{nl} = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar}{mc^2} [(2n + 1 + |l|)\omega_0 - \omega + |l|\tilde{\omega}]} \quad (4.36)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  é o número quântico associado aos níveis de energia, enquanto  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  é o número quântico associado ao momento angular. Da aplicação do mesmo método, encontramos também a função de onda  $\Psi_3$ , expressa por

$$(\Psi_3)_{nl} = \left(\frac{m\omega_0}{\hbar} r^2\right)^{|l|/2} e^{-iEt} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} r^2} L_n^{|l|} \left(\frac{m\omega_0}{\hbar} r^2\right) \quad (4.37)$$

onde a função de onda total  $\Psi$  pode ser deduzida através das outras componentes de campo (4.26)–(4.28). O limite não relativístico deste resultado é calculado a partir de  $E = \epsilon + mc^2$  com  $\epsilon \ll mc^2$  de modo a obter  $(E^2 - m^2c^4)/2mc^2 \cong \epsilon$ . Estes mesmos resultados serão demonstrados com o formalismo da teoria DKP Galileana no capítulo quatro, corroborando a importância da utilização das novas representações propostas em [17].

## 4.2.2 O Oscilador DKP Vetorial na Presença de um Campo Magnético

Seguindo a mesma abordagem adotada na seção anterior, podemos escolher de maneira conveniente as seis componentes do campo DKP  $\Psi^T = (\mathbf{a}, b, \mathbf{d}, 0)$ , onde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  e  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ . Assim, utilizando a mesma representação (2.56) na equação DKP acoplada (4.2) obtemos as seis equações

$$mc^2 a_1 = -Ed_1; \quad (4.38)$$

$$mc^2 a_2 = -Ed_2; \quad (4.39)$$

$$mc^2 b = c(p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y) d_1 - c(p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x) d_2; \quad (4.40)$$

$$mc^2 d_1 = Ea_1 - c(p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y) b; \quad (4.41)$$

$$mc^2 d_2 = Ea_2 + c(p_x + im\tilde{\omega}y + im\omega x) b; \quad (4.42)$$

$$0 = c(p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega x) a_1 - c(p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y) a_2. \quad (4.43)$$

Substituindo as expressões (4.38)–(4.39) na (4.43), e em seguida substituindo-as nas (4.40)–(4.42), obteremos as equações para as componentes  $b$ ,  $d_1$  e  $d_2$  do campo  $\Psi$ , dadas por

$$(E^2 - m^2c^4) b = c^2 [(p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x) (p_x + im\tilde{\omega}y + im\omega x) + (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y) (p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y)] b; \quad (4.44)$$

$$(E^2 - m^2c^4) d_1 = c^2 (p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y) [(p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y) d_1 - (p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x) d_2]; \quad (4.45)$$

$$(E^2 - m^2c^4) d_2 = c^2 (p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega x) [(p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x) d_2 - (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y) d_1]; \quad (4.46)$$

$$0 = (p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x) d_1 + (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y) d_2. \quad (4.47)$$

Simplificando a (4.44), teremos

$$(E^2 - m^2c^4) b = c^2 (\mathbf{p}^2 + m^2\omega_0^2 \mathbf{r}^2 + 2m\hbar\omega - 2m\tilde{\omega}L_z) b \quad (4.48)$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2}$ . A expressão acima mostra que a componente  $b$  comporta-se como a solução do oscilador DKP escalar em um campo magnético transverso, para  $\omega \rightarrow -\omega$ . O espectro de energia é obtido mediante esta troca em (4.36), enquanto sua função de onda relativística é igual a (4.37). Por outro lado, se aplicarmos o operador  $c^2 (p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega)$  na (4.47) e adicionarmos o resultado à (4.45), e da mesma forma aplicarmos o operador  $c^2 (p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y)$  na (4.47) e adicionarmos o resultado à (4.46) teremos

$$(E^2 - m^2c^4) d_1 = c^2 [\mathbf{p}^2 + m^2(\omega^2 + \tilde{\omega}^2) \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega - 2m\tilde{\omega}L_z] d_1 + ic^2 [2m\hbar\tilde{\omega} + 2m\omega L_z - 2m^2\omega\tilde{\omega} \mathbf{r}^2] d_2; \quad (4.49)$$

e

$$(E^2 - m^2 c^4) d_2 = c^2 [\mathbf{p}^2 + m^2 (\omega^2 + \tilde{\omega}^2) \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega - 2m\tilde{\omega}L_z] d_2 - ic^2 [2m\hbar\tilde{\omega} + 2m\omega L_z - 2m^2\omega\tilde{\omega}\mathbf{r}^2] d_1. \quad (4.50)$$

Portanto, definindo  $d_1$  e  $d_2$  pela Eq. (4.20), segue que as Eqs. (4.49)-(4.50) podem ser escritas da seguinte forma

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_1 = c^2 [\mathbf{p}^2 + m^2 (\omega + \tilde{\omega})^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar(\omega + \tilde{\omega}) - 2m(\omega + \tilde{\omega})L_z] \varphi_1, \quad (4.51)$$

e

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_2 = c^2 [\mathbf{p}^2 + m^2 (\omega - \tilde{\omega})^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar(\omega - \tilde{\omega}) + 2m(\omega - \tilde{\omega})L_z] \varphi_2. \quad (4.52)$$

As equações a cima ainda podem ser escritas de uma forma mais compacta, isto é

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_i = c^2 [\mathbf{p}^2 + m^2 \omega_i^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega_i - 2m\left(\frac{\omega_i}{\hbar}\right) L_z S_z] \varphi_i, \quad (4.53)$$

onde  $i = 1, 2$ , com  $\omega_1 = \omega + \tilde{\omega}$ ,  $\omega_2 = \omega - \tilde{\omega}$ ,  $S_z \varphi_i = \hbar s_i \varphi_i$  e  $s_1 = -s_2 = 1$ . O resultado expresso em (4.53) nos mostra que as componentes  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ , do campo  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$  apresentam frequências próprias de oscilação, a saber  $\omega_1 = \omega + \tilde{\omega}$  para  $\varphi_1$  e  $\omega_2 = \omega - \tilde{\omega}$  para  $\varphi_2$ . Ou seja, a presença do campo transversal promoveu um acréscimo, de  $\tilde{\omega}$ , na frequência do oscilador para a componente  $\varphi_1$  e uma subtração da mesma quantidade para a componente  $\tilde{\omega}$ . Somado a isto, o último termo do lado direito da equação (4.53) comporta-se como um acoplamento do tipo spin-órbita. Seguindo estes resultados, podemos interpretar as funções  $\varphi_i$  como componentes de um vetor  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$  cujas projeções de spin sobre a direção  $z$  são  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. Isto é, a componente  $\varphi_1$ , que apresenta projeção de spin  $+1$ , oscila com frequência  $\omega_1$ , enquanto componente  $\varphi_2$ , que apresenta projeção de spin  $-1$ , oscila com frequência  $\omega_2$ . Portanto, na presença de um campo magnético transversal externo, a função de onda DKP, (4.48) e (4.53), é representada por:

a) uma componente escalar,  $b$  que oscila com frequência  $\omega_0$ ;

b) um vetor  $\varphi = (\varphi_1 \ \varphi_2)^T$ , onde  $\varphi_1$  possui componente  $z$  de spin  $s = +1$  e oscila com frequência  $\omega_1$ , e  $\varphi_2$  que possui componente  $z$  de spin  $s = -1$  e oscila com frequência  $\omega_2$ .

Notamos aqui que as componentes  $a_1$  e  $a_2$  da função de onda DKP  $\Psi$  são expressas também pelas componentes de  $\varphi$ , tendo em vista as equações (4.38) e (4.39).

A solução da equação (4.53) é obtida de forma análoga ao caso apresentado anteriormente. Assim, o espectro de energia obtido é expresso por:

$$E_{nl}^i = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_i}{mc^2} [2n + |l| (1 + s_i) + s_i]}, \quad (4.54)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  e  $E_{nm}^1$  and  $E_{nm}^2$  representam os auto-valores para a energia nos casos associados às frequências angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente. As funções de onda  $\varphi_i$  são expressas por

$$(\varphi_i)_{nl} = \left(\frac{m\omega_i}{\hbar} r^2\right)^{|l|/2} e^{il\theta} e^{-\frac{m\omega_i}{2\hbar} r^2} L_n^{|l|} \left(\frac{m\omega_i}{\hbar} r^2\right). \quad (4.55)$$

O limite não-relativístico de (4.53) é calculado de forma similar ao caso escalar.

Este problema foi abordado em [46, 47], onde utilizou-se as representações para o espaço-tempo com  $3 + 1$  dimensões. Neste contexto, têm-se 10 equações para as 10 componentes da função de onda DKP, o que torna necessário anular as componentes adicionais. A escolha destas componentes nulas permitiu aos autores de [46, 47] construir soluções interessantes onde o oscilador escalar e vetorial nos espaços comutativo e não comutativo possuem soluções em função da densidade de probabilidade comparáveis a gráficos de osciladores amortecidos, sendo que a frequência efetiva destes atua como parâmetro de amortecimento. Todavia, devido as escolhas feitas, não se obteve a divisão de frequência nem o termo do tipo spin-órbita mostrados em (4.53).

No nosso trabalho, a escolha da representação  $6 \times 6$ , em  $2+1$  dimensões, não determina o resultado obtido, mas afasta a necessidade de anular as componentes do campo DKP para realizar a redução dimensional. Assim, ao escolhermos a componente  $\Psi_6 = 0$ , anulamos apenas a componente escalar da função de onda DKP, mantendo seu caráter vetorial e a possibilidade de manifestação de suas propriedades como o spin e a divisão de frequências para suas componentes.

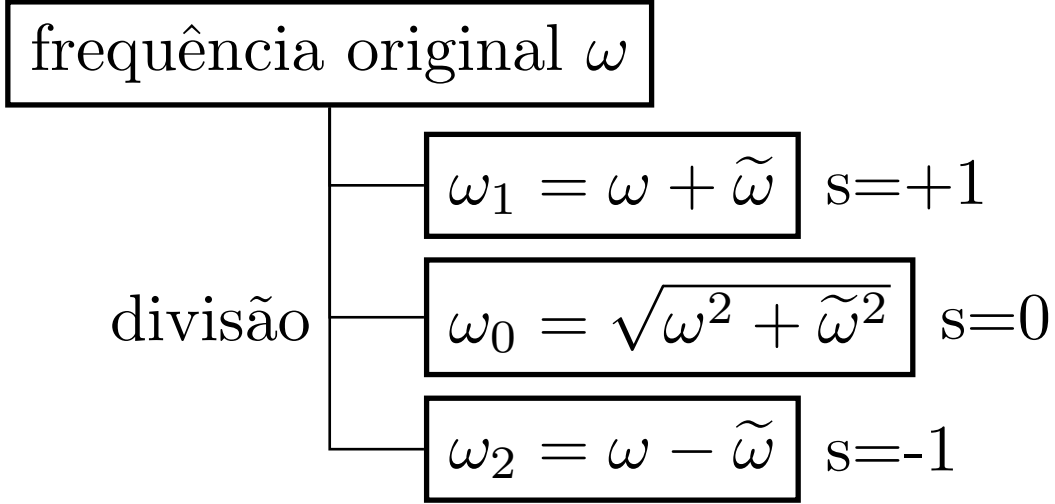


Figura 4.1: Representação esquemática da divisão da frequência do oscilador DKP, conforme a Eq. (4.53), na presença de um campo magnético externo de acordo com a projeção do spin  $S_z$ .

### 4.2.3 Casos Especiais

Vamos estudar os casos especiais associados às seguintes situações:  $d_1 = \pm id_2$ ,  $\omega = \pm \tilde{\omega}$ .

**O caso  $d_1 = id_2$**

Neste caso nós consideramos (4.49)-(4.50) de modo a obtermos  $\varphi_1 = 0$  e

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_2 = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + m^2 \omega_2^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega_2 - 2m \left( \frac{\omega_2}{\hbar} \right) L_z S_z \right] \varphi_2. \quad (4.56)$$

Ou seja, o problema é mapeado em um oscilador DKP vetorial bidimensional (4.22), sem a presença de um campo magnético externo, com apenas a sua componente  $\varphi_2$  oscilando com uma frequência reduzida  $\omega_2 = \omega - \tilde{\omega}$ .

**O caso  $d_1 = -id_2$**

Neste caso nós consideramos (4.49)-(4.50) de modo a obtermos  $\varphi_2 = 0$  e

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_1 = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + m^2 \omega_1^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega_1 - 2m \left( \frac{\omega_1}{\hbar} \right) L_z S_z \right] \varphi_1. \quad (4.57)$$

Ou seja, o problema é novamente mapeado em um oscilador DKP vetorial bidimensional (4.22), sem a presença de um campo magnético externo, com apenas a sua componente  $\varphi_1$  oscilando com uma frequência aumentada em  $\omega_1 = \omega + \tilde{\omega}$ .

Os próximos dois casos serão os mais importantes na discussão dos resultados, principalmente quando investigamos a termodinâmica do setor vetorial, sugerindo a existência de transição de fase.

**O caso  $\omega = \tilde{\omega}$**   
Para este caso, nós fizemos somente  $\omega = \tilde{\omega}$  na Eq. (4.53), obtendo

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_1 = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + 4m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2 - 4m\hbar\omega - 4m \left( \frac{\omega}{\hbar} \right) L_z S_z \right] \varphi_1, \quad (4.58)$$

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_2 = c^2 \mathbf{p}^2 \varphi_2. \quad (4.59)$$

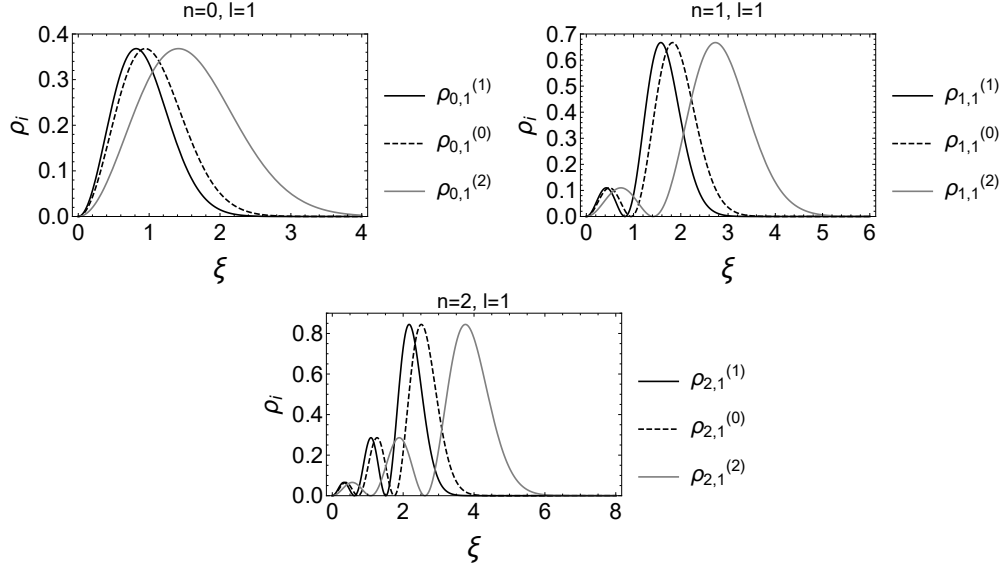


Figura 4.2: Distribuições de probabilidade dos autoestados de (4.62) para (a)  $n = 0$  (primeiro gráfico), (b)  $n = 1$  (segundo gráfico) e (c)  $n = 2$  (terceiro gráfico) com  $\omega = 2\tilde{\omega} = \frac{qB}{2mc} > 0$  e  $\xi = r/a$ . A divisão das frequências em função do spin que implica  $-\omega = 2\tilde{\omega} < 0$  é obtida pela troca de  $s_1$  e  $s_2$  ( $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$ ), o que significa a reversão do campo magnético transversal  $\mathbf{B}$ .

Do mesmo modo, temos uma frequência efetiva do oscilador DKP, como se não houvesse campo magnético externo, porém agora a frequência de oscilação é duplicada  $2\omega$ , para a componente  $\varphi_1$ , enquanto a componente  $\varphi_2$  comporta-se como uma partícula livre. **O caso  $\omega = -\tilde{\omega}$**

Para o último caso, faremos  $\omega = -\tilde{\omega}$  na Eq. (4.53), obtendo

$$(E^2 - m^2c^4) \varphi_2 = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + 4m^2\omega^2 \mathbf{r}^2 - 4m\hbar\omega - 4m \left( \frac{\omega}{\hbar} \right) L_z S_z \right] \varphi_2, \quad (4.60)$$

$$(E^2 - m^2c^4) \varphi_1 = \mathbf{p}^2 \varphi_1, \quad (4.61)$$

ocorrendo agora o inverso do caso anterior: ao invés da oscilação de  $\varphi_2$  cessar, esta tem sua frequência duplicada, enquanto a oscilação de  $\varphi_1$  torna-se nula.

### 4.3 Análise dos Resultados

Vamos analisar os níveis de energia e os autoestados de distribuição de probabilidades. Para tanto, vamos definir  $2|\tilde{\omega}| = \omega$  e  $\frac{m\omega a^2}{\hbar} = 1$  de modo a obtermos  $\omega_1 = \omega \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{sign}(\tilde{\omega}) \right]$ ,  $\omega_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}\omega$ ,  $\omega_2 = \omega \left[ 1 - \frac{1}{2} \text{sign}(\tilde{\omega}) \right]$ . Podemos então obter o parâmetro adimensional  $\alpha_i = \frac{m\omega_i a^2}{\hbar}$ , o que implica em  $\alpha_1 = 1 + \frac{1}{2} \text{sign}(\tilde{\omega})$ ,  $\alpha_0 = \sqrt{5}/2$  e  $\alpha_2 = 1 - \frac{1}{2} \text{sign}(\tilde{\omega})$ , onde  $\text{sign}(\tilde{\omega})$  denota a função sinal de  $\tilde{\omega}$  para todo  $\tilde{\omega} \in \mathbf{R}$ .

As distribuições de probabilidade são obtidas pelo quadrado do módulo das Eqs. (4.37) e (4.55), que podem ser expressas de maneira compacta

$$\rho_{n,l}^{(i)}(\xi) = |\alpha_i \xi^2|^{|l|} e^{-\alpha_i \xi^2} L_n^{2|l|}(\alpha_i \xi^2), \quad (4.62)$$

com  $i = 0, 1, 2$ , cuja variável adimensional  $\xi = r/a$  é escrita em função de  $a$ , que é um comprimento característico cujo significado físico ficará mais claro no decorrer da análise, e a dependência em  $\theta$  que há nas Eqs. (4.37) e (4.55) desaparece devido a simetria esférica existente. Para estudarmos a reciprocidade que ocorre entre a divisão da frequência e os níveis de energia, expressos por (4.36) e (4.54) podemos reformular a relação entre energia e frequência efetiva, gerando

$$\left[ \epsilon_{n,l}^{(i)} \right]^2 = 1 - \frac{2\hbar(|l|\tilde{\omega} - \omega)}{mc^2} \delta_{0i} + \frac{2\hbar\omega_i}{mc^2} [2n + |l|(1 - s_i) + s_i + \delta_{0i}] \quad (4.63)$$

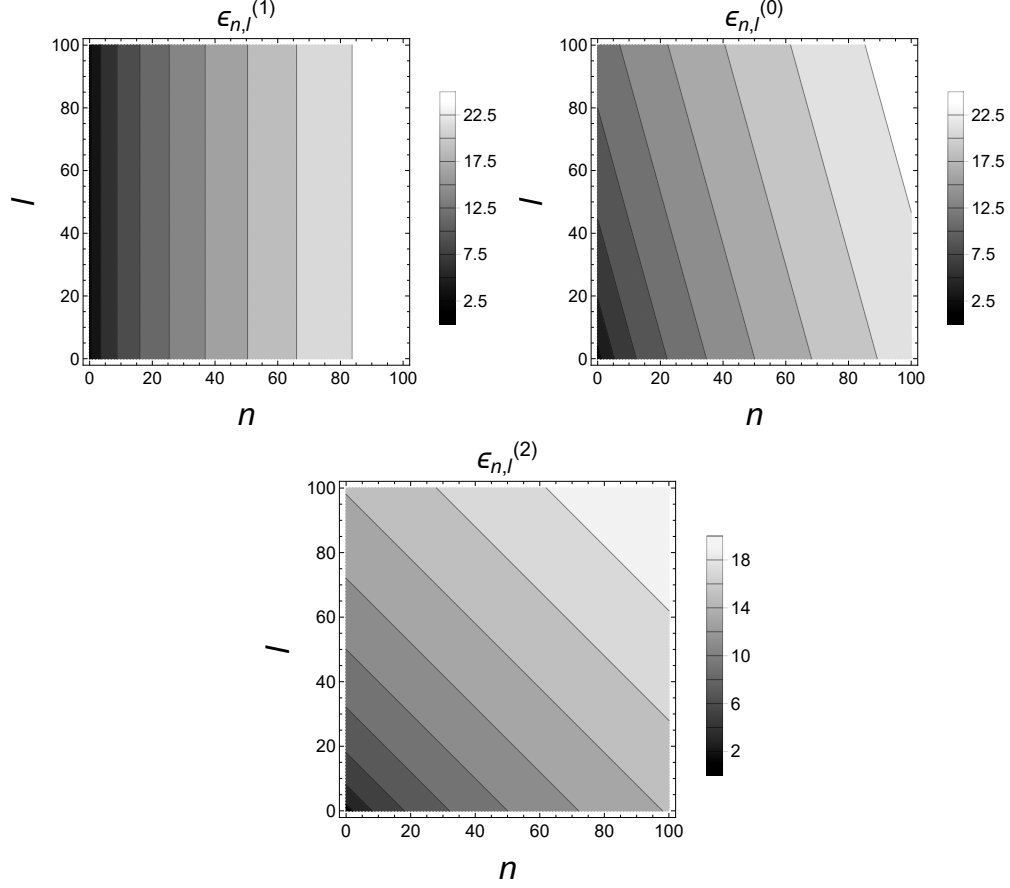


Figura 4.3: Gráficos indicando as curvas de degenerescência  $l = l(n)$ , para  $\epsilon_{n,l}^{(i)} = k_i$ , segundo a Eq. (4.64):  $s_1 = 1$  (primeiro gráfico),  $s_0 = 0$  (segundo gráfico) e  $s_2 = -1$  (terceiro gráfico) para  $\omega = 2\tilde{\omega} = \frac{qB}{2mc} > 0$  com os níveis de energia variando de  $0 \leq n, l \leq 100$ . Devido a simetria da Eq. (4.64) ao longo de  $l = 0$ , ou seja  $\epsilon_{n,l}^{(i)} = \epsilon_{n,-l}^{(i)}$ , somente os valores positivos de  $l$  são explicitados. As linhas indicam a degenerescência, onde ficam explícitos os declives em (4.65), para os valores  $\infty$ ,  $-\frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}$  e  $-1$  para  $s_1 = 1$ ,  $s_0 = 0$ , e  $s_2 = -1$ .

onde  $\epsilon_{n,l}^i$  representam os níveis de energia adimensionalizadas pelo fator  $mc^2$ ,  $\delta_{0i}$  é o delta de Kronecker,  $i = 0, 1, 2$  e  $s_0 = 0, s_1 = -s_2 = 1$  o spin do campo.

Para compatibilizarmos os resultados com  $\frac{m\omega a^2}{\hbar} = 1$  nós definimos  $\frac{\hbar\omega}{mc^2} = 1$ , o que implica em  $|\Omega| = \omega$  e  $\Omega = 2\tilde{\omega} = \frac{qB}{mc}$ , de modo que o comprimento característico  $a$  é então definido como o comprimento de onda de Compton  $a = \frac{\hbar}{mc}$ , que é uma representação natural para a massa na escala quântica. Sendo assim, a Eq. (4.63) torna-se

$$\left[ \epsilon_{n,l}^{(i)} \right]^2 = 1 - [|l|\text{sign}(\tilde{\omega}) - 2]\delta_{0i} + 2\alpha_i [2n + |l|(1 - s_i) + s_i + \delta_{0i}] \quad (4.64)$$

Na Fig. 4.2 nós mostramos as distribuições de probabilidade dadas pela Eq. (4.62) dos autoestados  $\varphi_i$  para  $l = 1$ , com  $i = 0, 1, 2$ , cujas projeções de spin  $s_1 = 1$  e  $s_0 = 0$  estão mais próximas, enquanto a distribuição correspondente ao spin  $s_2 = -1$  exibe um comportamento diferente como consequência da divisão das frequências. Na Fig. 4.3 nós mostramos os níveis de energia dos autoestados  $\varphi_i$  para  $0 \leq n, l \leq 100$  e  $\tilde{\omega} > 0$ . As retas na Fig. 4.3 correspondem aos estados degenerados, onde podemos mostrar que a inclinação destas depende somente spin do campo DKP, e portanto podem ser atreladas ao campo magnético transversal. De fato, fazendo  $\epsilon_{n,l}^{(i)} = k_i$  constante na Eq. (4.63), a curva de degenerescência  $l = l(n)$  na faixa de  $l \geq 0$  tem

a inclinação dada por

$$\begin{aligned} -\frac{2}{1 - \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2}}} &, \quad \text{para } s_0 = 0 \\ -\frac{2}{1 - s_i} &, \quad \text{para } s_1 = -s_2 = 1, \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde  $\omega_{1,2} \neq 0$ . Podemos perceber analisando a Eq. (4.63) que mais algumas características acerca dos níveis de energia podem ser destacadas. Para a componente de projeção de spin  $s_1 = 1$  os estados vibracionais ( $l = 0$ ) e rotacionais ( $l \neq 0$ ) com número quântico  $n$  possuem a mesma energia, de modo que os efeitos do campo magnético são anulados pelos efeitos de spin. Além disso, dado um valor não nulo da componente angular  $l$ , podemos perceber que no limite  $n \gg 1$  todos os termos que não contém  $n$  na Eq. (4.63) podem ser desprezados, conseqüentemente obtendo uma divisão nos níveis de energia  $\approx \pm mc^2 \sqrt{4\alpha_i n}$ , onde podemos concluir que os efeitos de altas energias podem ser desprezados nestas condições.

Também é importante notar que, em virtude desta divisão nos níveis de energia, temos que  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$  se e somente se  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ , e também que para o caso  $\tilde{\omega} < 0$  nós temos as mesmas autofunções e autovalores de energia, mas com as componentes trocadas  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ , o que era esperado devido a simetria do problema, enquanto  $\varphi_0$  permanece invariante.

## 4.4 A Termodinâmica do Setor Vetorial

Ilustraremos os efeitos do fenômeno da divisão da frequência ocasionada pelo campo magnético nas propriedades termodinâmicas do setor vetorial do oscilador DKP. Não abordaremos o setor escalar pois este fenômeno não é observado nestas condições. Para conseguirmos este tratamento, consideremos que o sistema está em equilíbrio térmico com o reservatório à temperatura finita  $T$ , de modo a obtermos a função de partição do ensemble canônico. Além disso, consideraremos somente os estados de energia positiva, pois os estados de energia negativa não admitem um *ground-state*, o que não assegura a estabilidade do ensemble [70].

Portanto, por uma questão de simplicidade, considerando um sistema composto de duas partículas não interagentes, cujas projeções de spin são diferentes, a função de partição resulta em

$$Z = \left[ \sum_{n_1, l_1} e^{(-\epsilon y_{n_1, l_1})} \right] \left[ \sum_{n_2, l_2} e^{(-\epsilon y_{n_2, l_2})} \right] \quad (4.66)$$

com  $\epsilon = \frac{mc^2}{k_B T}$  e

$$y_{n_i, l_i}^2 = 1 + 2\alpha_i [2n_i + |l_i| (1 - s_i) + s_i] \quad , \quad i = 1, 2. \quad (4.67)$$

Definimos aqui  $k_B$  como a constante de Boltzmann, e utilizamos novamente que  $\alpha_i = \frac{\hbar\omega_i}{mc^2}$  com  $\omega_i = \omega + s_i\tilde{\omega}$  para  $i = 1, 2$ . Com o intuito de observar algumas propriedades, simplificaremos os cálculos de modo que  $\frac{\hbar\omega}{mc^2} = 1/2$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{2}(1 + s_i\delta)$  com  $\tilde{\omega} = \delta\omega$ , onde  $\delta$  representa a intensidade do campo magnético. Também consideramos  $\delta \in [0, \infty)$  para evitar expressões negativas do lado direito da Eq. (4.67) e portanto para simplificar a contagem de degenerescências.

Como  $y_{n_1, l_1}^2 = 2(1 + \delta)n_1 + 2 + \delta$  e  $y_{n_2, l_2}^2 = 2(1 - \delta)(n_2 + |l_2|) + \delta$ , podemos calcular as somas da Eq. (4.66) separadamente pelo uso da fórmula geral

$$Z = \sum_k g(y_k) e^{(-\beta y_k)}, \quad (4.68)$$

onde  $g(y_k)$  indica o fator de degenerescência dos níveis de energia  $y_k$ . Para evitarmos um número infinito de degenerescências, nós assumimos que  $n_1, l_1 = 0, \dots, n_1$ , de modo que

$$g(y_{n_1, l_1}) = \sum_{l_1 = -n_1}^{n_1} 1 = 2n_1 + 1, \quad (4.69)$$

o que fisicamente significa que somente estados com  $|l_1| \leq n_1$  contribuem significativamente para os níveis de energia  $y_{n_1, l_1}$ , sendo que o restante dos termos podem ser desprezados. Portanto, teremos

$$\sum_{n_1, l_1} e^{(-\epsilon y_{n_1, l_1})} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n \exp \left[ -\epsilon \sqrt{2(1+\delta)n+2+\delta} \right] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} n \exp \left[ -\epsilon \sqrt{2(1+\delta)n+2+\delta} \right]. \quad (4.70)$$

Para  $y_{n_2, l_2}$  nós temos uma dupla degenerescência dada por todos os pares  $(n_2, l_2)$  de tal modo que  $n_2 + l_2 = k \in \mathbf{N}_0$  com  $n_2, l_2 = 0, \dots, k$ . Isto implica que

$$g(y_{n_2, l_2}) = 2(k+1) \quad (4.71)$$

para  $\beta y_{n_2, l_2} = k$ . Então nós teremos que

$$\sum_{n_2, l_2} \exp(-\epsilon y_{n_2, l_2}) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{[-\epsilon \sqrt{2(1-\delta)n+\delta}]}. \quad (4.72)$$

A soma representada pelas Eqs. (4.70) e (4.72) podem ser calculadas com o auxílio da fórmula de Euler-Maclaurin [48]

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x)dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{2p-1}(0), \quad (4.73)$$

com  $B_{2p}$  sendo os números de Bernoulli e  $f^{2p-1}(0)$  as derivadas de ordem ímpar de  $f(x)$  em  $x=0$ . Agora, a observação crucial neste ponto é que no limite de altas temperaturas, ou seja para  $\epsilon = \frac{mc^2}{k_b T} \ll 1$ , como o primeiro e o terceiro termo da Eq. (4.73) possuem somente potências em termos de  $\epsilon$  e a integral possui potências em termos de  $\epsilon^{-1}$ , é suficiente considerar somente a integral, isto é [48]

$$Z \approx \left\{ \int_0^{\infty} 2xe^{[-\epsilon \sqrt{2(1+\delta)x+2+\delta}]} dx \right\} \left\{ \int_0^{\infty} 2(x+1)e^{[-\epsilon \sqrt{2(1-\delta)x+\delta}]} dx \right\}, \quad \text{para } \epsilon \ll 1. \quad (4.74)$$

Utilizando (4.74),  $a, b, \epsilon \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \exp(-\epsilon \sqrt{ax+b}) dx &= \frac{4e^{-\epsilon \sqrt{b}} (b\epsilon^2 + 3\sqrt{b}\epsilon + 3)}{a^2 \epsilon^4} \\ \int_0^{\infty} (x+1) \exp(-\epsilon \sqrt{ax+b}) dx &= \frac{2e^{-\epsilon \sqrt{b}} [\sqrt{b}\epsilon (a\epsilon^2 + 6) + a\epsilon^2 + 2b\epsilon^2 + 6]}{a^2 \epsilon^4}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

nós obtemos a função de partição do setor vetorial, para  $\epsilon \ll 1$

$$Z(\epsilon, \delta) = 2 \left[ e^{-\epsilon \sqrt{2+\delta}} \left[ \frac{(2+\delta)\epsilon^2 + 3\sqrt{2+\delta}\epsilon + 3}{(1+\delta)^2 \epsilon^4} \right] e^{-\epsilon \sqrt{\delta}} \left[ \frac{[\sqrt{\delta}\epsilon [(1-\delta)\epsilon^2 + 6] + (1+\delta)\epsilon^2 + 6]}{(1-\delta)^2 \epsilon^4} \right] \right] \quad (4.76)$$

cujos resultados são expressos em função dos parâmetros adimensionais  $\delta$  e  $\epsilon$ . Vale a pena notar que  $Z(\epsilon, \delta) \neq Z(\epsilon, -\delta)$  devido ao fato de que o espectro de energia de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  não é invertido quando  $\delta \rightarrow -\delta$ . No limite assintótico de altas temperaturas  $T \rightarrow \infty (\epsilon \rightarrow 0)$  nós temos que

$$Z(\epsilon, \delta) \approx \left[ \frac{6}{(1+\delta)^2 \epsilon^4} \right] \left[ \frac{6}{(1-\delta)^2 \epsilon^4} \right] \quad (4.77)$$

e portanto a função de partição é simétrica em  $\delta$ . Por outro lado, a função de partição (4.76) é real para a faixa  $0 \leq \delta \leq 1$ , e quando  $\delta > 1$  isto resulta que os valores são dados por números complexos, divergindo em todo o intervalo  $(1, \infty)$ . Observando a Eq. (4.76) podemos perceber que as funções de partição individuais de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  possuem a mesma estrutura  $\propto 1/(1+s_i\delta)^2 \epsilon^4$ , expressando que somente a componente  $\varphi_2$  sofre

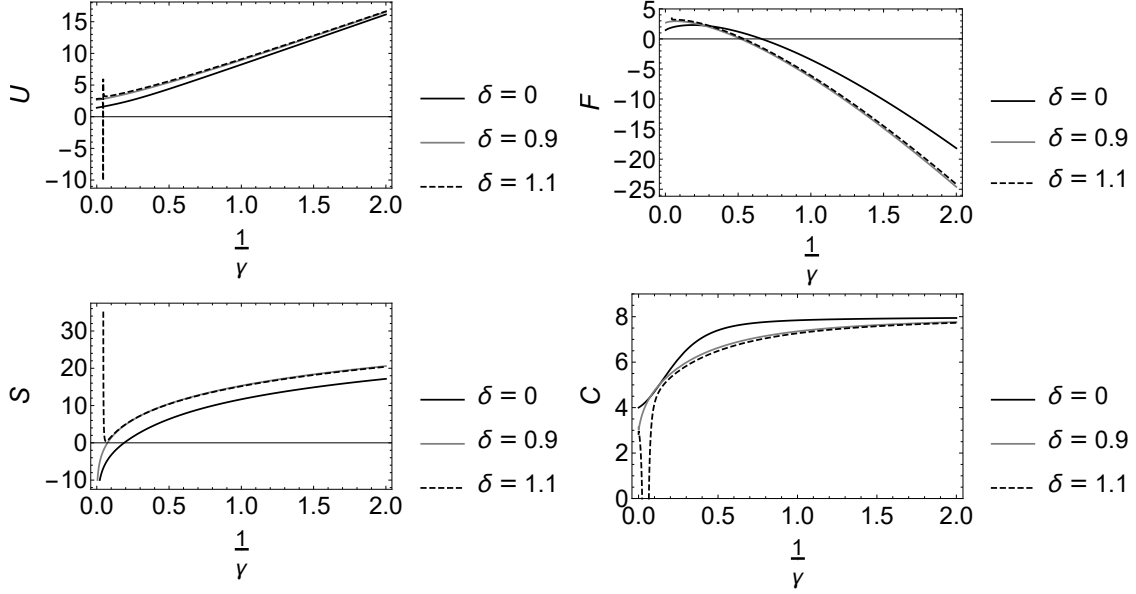


Figura 4.4: Os gráficos mostram a energia interna (primeiro gráfico), energia livre de Helmholtz (segundo), entropia (terceiro) e capacidade térmica (último) do setor vetorial no oscilador DKP bidimensional em um campo magnético transversal  $\mathbf{B} = B\hat{z}$  em função do parâmetro real  $\delta \in [0, \infty)$  com  $\delta = \frac{qB}{mc\omega}$  e  $\omega = \frac{mc^2}{2\hbar}$  a frequência do oscilador. A descontinuidade das curvas tracejadas indicam a transição de fase que ocorre em torno de  $\delta = 1$  pela direita ( $\lim_{\delta \rightarrow 1^+}$ ), devido ao cancelamento da oscilação da segunda componente.

transição de fase quando  $\delta \rightarrow 1$ , o que corresponde ao caso de uma partícula bosônica livre, ou seja,  $\tilde{\omega} = \omega$  com  $\omega_2 \rightarrow 0$ , como foi apontado anteriormente.

A partir das relações [70]

$$\begin{aligned}
 U &= -mc^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon} && \text{(Energia interna);} \\
 F &= -mc^2 \frac{1}{\epsilon} \ln Z && \text{(Energia livre de Helmholtz);} \\
 S &= k_B \epsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \epsilon} && \text{(Entropia);} \\
 C &= -k_B \epsilon^2 \frac{\partial U}{\partial \epsilon} && \text{(Capacidade Térmica),}
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

nós encontramos a termodinâmica do setor vetorial do oscilador DKP. Substituindo (4.76) em (4.78), nós ilustramos na Fig. 4.4 a energia interna, a energia livre de Helmholtz, a entropia e a capacidade térmica.

Podemos ver que os potenciais termodinâmicos convergem rapidamente ao comportamento assintótico quando  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ) devido ao fato de que as excitações térmicas eliminam as particularidades do espectro de energia do setor vetorial, assim como o único termo relevante em suas funções de partição proporcionais a  $T^4$ , resultando assim na função de partição total (4.76) proporcional a  $T^8$ . Portanto, dadas as Eqs. (4.76)–(4.78), suas expressões assintóticas também mostram a propriedade aditiva no setor vetorial, e são



dadas por

$$U \approx 8k_B T = 4k_B T + 4k_B T = U_1 + U_2; \quad (4.79)$$

$$F \approx \left[ \frac{k_B T}{mc^2(1-\delta^2)^{1/4}} \right] = -4k_B T \left\{ \ln \left[ \frac{k_B T}{mc^2(1+\delta)^{1/4}} \right] + \ln \left[ \frac{k_B T}{mc^2(1-\delta)^{1/4}} \right] \right\} = F_1 + F_2; \quad (4.80)$$

$$S \approx 8k_B \left\{ \ln \left[ \frac{k_B T}{mc^2(1-\delta^2)^{1/4}} \right] + 1 \right\} = 4k_B \left\{ \left[ \ln \left( \frac{k_B T}{mc^2(1+\delta)^{1/4}} \right) + 1 \right] + \left[ \ln \left( \frac{k_B T}{mc^2(1-\delta)^{1/4}} \right) + 1 \right] \right\} = S_1 + S_2; \quad (4.81)$$

$$C \approx 8k_B = 4k_B + 4k_B = C_1 + C_2. \quad (4.82)$$

Vamos agora estudar o mesmo sistema, de maneira qualitativa, utilizando a mecânica quântica não comutativa [72], onde ambos setores mostrarão resultados semelhantes aos que encontramos aqui, bem como corroborar o limite não relativístico com o formalismo da covariância Galileana no próximo capítulo com o limite não-relativístico deste sistema [31].

## 4.5 O Oscilador DKP no Espaço Não Comutativo

Nesta Seção, apresentaremos uma breve descrição das propriedades algébricas do espaço não comutativo, e em seguida, usando a mesma abordagem da Seção anterior, desenvolveremos a descrição do oscilador DKP bidimensional na presença de um campo magnético transversal, que também estão presentes nos trabalhos [46, 47].

O espaço não comutativo é caracterizado pelos operadores de posição que satisfazem a equação [48]

$$[\hat{x}^\mu, \hat{y}^\nu] = i\Upsilon^{\nu\mu}, \quad (4.83)$$

onde  $\Upsilon^{\mu\nu}$  é o tensor antissimétrico que desempenha o papel análogo à constante de Planck  $\hbar$  na mecânica quântica comutativa. Para preservar a unitariedade da teoria, escolhemos a componente temporal de  $\Upsilon^{\mu\nu}$ , dada por  $\Upsilon^{0\nu} = 0$ , o que implica que o tempo permanece como um parâmetro físico, e os efeitos não comutativos afetam somente as coordenadas espaciais. No contexto destas deformações, o produto de quaisquer duas funções é equivalente ao produto Moyal definido por

$$(f \star g)(x) = e^{\left[\frac{i}{2}\Upsilon_{ij}\partial_{x_i}\partial_{y_j}\right]} f(x)g(y)|_{x=y} \quad (4.84)$$

onde  $f$  e  $g$  são duas funções arbitrárias, que assumimos infinitamente diferenciáveis.

O oscilador DKP não comutativo é expresso por

$$\left[ c\vec{\beta} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\eta^0\hat{\mathbf{r}}) + mc^2 \right] \star \Psi = \beta^0 E\Psi. \quad (4.85)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y})$  é o operador posição não comutativo, expresso em termos dos operadores comutativos da forma

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i - \frac{1}{2\hbar}\Upsilon_{ij}p_j \quad (4.86)$$

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i \quad (4.87)$$

com os parâmetros do tensor assimétrico escolhidos como

$$\Upsilon_{ij} = \Upsilon\epsilon_{ij}. \quad (4.88)$$

### 4.5.1 O Oscilador DKP Escalar Não Comutativo

Utilizando o espinor de quatro componentes  $\Psi^T = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ , a equação DKP acoplada gera um conjunto de quatro equações, dadas por

$$mc^2\Psi_0 = E\Psi_3 \quad (4.89)$$

$$mc^2\Psi_1 = -c(\xi p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega\hat{x})\Psi_3 \quad (4.90)$$

$$mc^2\Psi_2 = -c(\xi p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega\hat{y})\Psi_3 \quad (4.91)$$

$$mc^2\Psi_3 = E\Psi_0 + c(\xi p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega\hat{x})\Psi_1 + c(\xi p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega\hat{y})\Psi_2 \quad (4.92)$$

onde  $\xi = 1 - (m\tilde{\omega}\Upsilon/2\hbar)$ . Resolvendo esse sistema de equações para a componente  $\Psi_3$  do campo  $\Psi$ , teremos

$$\left(\frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}\right)\Psi_3 = \left[\left(\xi^2 + \frac{m^2\Upsilon^2\eta^2}{4\hbar^2}\right)\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2\mathbf{r}^2}{2} - \hbar\omega\left(\xi + \frac{m\Upsilon\tilde{\omega}}{2\hbar}\right) - \tilde{\omega}L_z\left(\xi - \frac{m\Upsilon\omega^2}{2\hbar\tilde{\omega}}\right)\right]\Psi_3, \quad (4.93)$$

com  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2}$ , onde teremos que para  $\Upsilon \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 1$ , e recuperamos o oscilador comutativo. Fica claro que neste caso, assim como feito para o caso escalar da seção anterior, não há divisão da frequência e a solução é reproduzida exatamente como encontrado no trabalho de Boumali *et al.* [47]. É esperado que tenhamos uma divisão da frequência para o caso vetorial.

### 4.5.2 O Oscilador DKP Vetorial Não Comutativo

Seguindo a mesma abordagem da seção anterior, utilizando  $\Psi$  e a prescrição da mecânica quântica não comutativa, além da representação (2.56) assim como o acoplamento (4.25) em (2.33), obteremos as seis equações

$$\begin{aligned} mc^2a_1 &= -Ed_1 \\ mc^2a_2 &= -Ed_2 \\ mc^2b &= c(\xi p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega\hat{y})d_1 - c(\xi p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega\hat{x})d_2 \\ mc^2d_1 &= Ea_1 - c(\xi p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega\hat{y})b \\ mc^2d_2 &= Ea_2 + c(\xi p_x + im\tilde{\omega}y + im\omega\hat{x})b \\ 0 &= c(\xi p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega\hat{x})a_1 + c(\xi p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega\hat{y})a_2 \end{aligned}$$

Substituindo as primeiras duas equações nas outras, teremos as equações para as componentes  $b$ ,  $d_1$  e  $d_2$  dadas por

$$(E^2 - m^2c^4)b = c^2[(\xi p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega\hat{x})(\xi p_x + im\tilde{\omega}y + im\omega\hat{x}) + (\xi p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega\hat{y})(\xi p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega\hat{y})]b \quad (4.94)$$

$$(E^2 - m^2c^4)d_1 = -c^2(\xi p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega\hat{y})[(\xi p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega\hat{x})d_2 - (\xi p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega\hat{y})d_1] \quad (4.95)$$

$$(E^2 - m^2c^4)d_2 = c^2(\xi p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega\hat{x})[(\xi p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega\hat{x})d_2 - (\xi p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega\hat{y})d_1] \quad (4.96)$$

$$0 = [(\xi p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega\hat{x})d_1 + (\xi p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega\hat{y})d_2] \quad (4.97)$$

Resolvendo a equação (4.94), teremos que exatamente o resultado do oscilador escalar no espaço não comutativo representado pela (4.93), com  $\omega \rightarrow -\omega$ . Se aplicarmos o operador  $c^2(p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega\hat{x})$  em (4.97) e fizermos o mesmo procedimento da seção anterior, teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}\right)d_1 &= \left[\left(\xi^2 + \frac{m^2\omega^2\Upsilon^2}{4\hbar^2}\right)\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\mathbf{r}^2 - \hbar\omega\left(\xi + \frac{m\tilde{\omega}\Upsilon}{2\hbar}\right) - \tilde{\omega}L_z\left(\xi + \frac{m\omega^2\Upsilon}{2\hbar\tilde{\omega}}\right)\right]d_1 \\ &+ i\left[-\omega\frac{\xi\Upsilon}{2\hbar} + \hbar\tilde{\omega}\left(\xi + \frac{m\omega^2\Upsilon}{2\hbar\tilde{\omega}}\right) - \omega L_z\left(\xi + \frac{m\tilde{\omega}\Upsilon}{4\hbar}\right) - m\omega\tilde{\omega}\mathbf{r}^2\right]d_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2}\right) d_1 &= \left[ \left( \xi^2 + \frac{m^2 \omega^2 \Upsilon^2}{4\hbar^2} \right) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m (\omega^2 + \tilde{\omega}^2) \mathbf{r}^2 - \hbar\omega \left( \xi + \frac{m\tilde{\omega}\Upsilon}{2\hbar} \right) - \tilde{\omega} L_z \left( \xi + \frac{m\omega^2\Upsilon}{2\hbar\tilde{\omega}} \right) \right] d_1 \\ &\quad - i \left[ \omega \frac{\xi\Upsilon}{2\hbar} + \hbar\tilde{\omega} \left( \xi + \frac{m\omega^2\Upsilon}{2\hbar\tilde{\omega}} \right) - \omega L_z \left( \xi + \frac{m\tilde{\omega}\Upsilon}{4\hbar} \right) - m\omega\tilde{\omega}\mathbf{r}^2 \right] d_2, \end{aligned}$$

e definindo  $d_1$  e  $d_2$  pela Eq. (4.20), teremos que

$$\left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2}\right) \Phi_i = \left[ \left( 1 - \frac{m\omega\Upsilon}{2\hbar\xi} \right)^2 \frac{\xi^2 \mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 \mathbf{r}^2 - \hbar\omega_i \left( 1 - \frac{m\omega\Upsilon}{2\xi\hbar} \right) - \frac{\omega_i}{\hbar} L_z S_z \left( 1 - \frac{m\omega\Upsilon}{2\xi\hbar} \right) \right] \Phi_i,$$

sendo  $\omega_i = \omega + s_i \tilde{\omega}$ , com  $s_1 = -s_2 = 1$ . Podemos ainda simplificar a expressão, de modo a obtermos

$$\left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2}\right) \Phi_i = \left[ f^2(\Upsilon) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_i^2 \mathbf{r}^2}{2} - \hbar\omega_i f(\Upsilon) - \left(\frac{\omega_i}{\hbar}\right) L_z S_z f(\Upsilon) \right] \Phi_i, \quad (4.98)$$

onde  $f(\Upsilon) = (1 - m\omega\Upsilon/2\hbar\xi)$  é uma função do parâmetro de não comutatividade  $\Upsilon$ , sendo que para  $f(0) = 1$  recuperamos exatamente o oscilador DKP no espaço comutativo sujeito a um campo magnético transversal. Se dividirmos toda a expressão por  $f(\Upsilon)$ , teremos :

$$\left\{ \bar{\mathcal{E}}^2 - \left[ \frac{mc^2}{f(\Upsilon)} \right]^2 \right\} \Phi_i = c^2 \left[ \mathbf{p}^2 + m^2 \Omega_i^2 \mathbf{r}^2 - 2m\hbar\Omega_i - 2m \left( \frac{\Omega_i}{\hbar} \right) L_z S_z \right] \Phi_i, \quad (4.99)$$

onde  $\bar{\mathcal{E}} = E/f(\Upsilon)$  e  $\Omega_i = \omega_i/f(\Upsilon)$  é uma frequência efetiva em função do parâmetro de não comutatividade. Podemos então calcular o espectro de energia

$$\bar{\mathcal{E}}_{nl}^i = \pm mc^2 \sqrt{f^2(\Upsilon) + \frac{2\hbar\Omega_i}{mc^2} [2n + s_i + |l|(1 + s_i)]}, \quad (4.100)$$

e as autofunções, dadas por

$$(\Phi_i)_{nl} = \left( \frac{m\Omega_i}{\hbar} r^2 \right)^{|l|/2} e^{il\theta} e^{-\frac{m\Omega_i}{2\hbar} r^2} L_n^{|l|} \left( \frac{m\Omega_i}{\hbar} r^2 \right) \quad (4.101)$$

Podemos concluir que os efeitos de não comutatividade espacial no oscilador DKP na presença de um campo magnético transversal são a modificação da frequência de oscilação, de modo que para  $f(\Upsilon) > 1$  temos que a frequência de oscilação diminui, enquanto para  $f(\Upsilon) < 1$ , temos que a frequência de oscilação aumenta. Além disso, o tratamento termodinâmico segue de maneira análoga ao feito no espaço comutativo.

# Capítulo 5

## O Campo DKP Galileano

Neste capítulo introduzimos os elementos básicos necessários para a construção da covariância Galileana  $(3 + 2)$ -dimensional, como o grupo de Galilei e sua extensão central, os invariantes associados e a equação de movimento. A seguir, propomos, a partir da formulação geral de Umezawa [13], a equação linear geral, covariante de Galilei, para campos não relativísticos espinoriais. Introduzimos os projetores no formalismo Galileano [27], onde a partir deles utilizamos o vetor de Pauli-Lubanski para encontrarmos o operador de spin. Como aplicação desta formulação, e utilizando as representações da teoria DKP Galileana em dimensões arbitrárias [31], tratamos o oscilador DKP bidimensional com campo magnético transversal, comparando seus resultados com o limite não relativístico daqueles obtidos no Capítulo 3.

### 5.1 O Grupo de Galilei e o Campo de Schrödinger

As transformações entre as coordenadas espaciais e o tempo, medidos em dois referenciais inerciais distintos,  $S$  e  $S'$ , com  $S'$  se movendo com velocidade constante  $\mathbf{v}$  em relação à  $S$ , são expressas por

$$\begin{aligned}x'_i &= R_i^j x_j - v_i t + a_i, \quad i = 1, 2, 3 \\t' &= t + b,\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde  $x'_i$  e  $x_i$ , são as coordenadas espaciais nos referenciais  $S'$  e  $S$ , respectivamente,  $(R_i^j)$  corresponde a matriz de rotação das coordenadas do sistema físico,  $v_i = \frac{dx_i}{dt}$  a velocidade relativa, e  $\mathbf{a} = (a_i)$  corresponde ao vetor das translações espaciais entre  $S$  e  $S'$ . Como pode ser deduzido, as transformações acima dependem de um conjunto de 10 parâmetros, representados por três ângulos de rotação da matriz  $(R_i^j)$ , três componentes de  $\mathbf{v}$ , três translações espaciais de  $\mathbf{a}$  e a translação temporal  $b$ . As transformações (5.1) geram o grupo matemático de Galilei, a 10 parâmetros, que deixam as leis físicas não relativísticas quase invariantes. Esta quase invariância pode ser percebida quando submetemos a Lagrangiana da partícula livre de massa  $m$ ,  $\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$ , às transformações (5.1), resultando em:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + m \frac{dF}{dt}\tag{5.2}$$

onde

$$F = -R_i^j x_j v_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 t + \text{const}.\tag{5.3}$$

Para contornar esta quase invariância define-se a variável extra  $s$ , que se transforma por

$$s' = s - R_i^j x_j v_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 t + s_0\tag{5.4}$$

onde  $s_0$  é uma constante, e uma nova Lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$  dada por

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - m \frac{ds}{dt}\tag{5.5}$$

que é claramente invariante pelas transformações (5.1) e (5.4). Desta expressão, podemos concluir que, sendo a massa um invariante pelas transformações (5.1) e (5.4), a quantidade  $\dot{\mathbf{x}}^2 - 2\dot{s}$  é também um invariante. Logo, pode-se definir o vetor

$$x^\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\mathbf{x}, t, s), \quad (5.6)$$

onde  $t$  está multiplicado, e  $s$  dividido, por uma velocidade unitária, resultando num invariante pelas expressões (5.1) e (5.4), dado por  $\mathbf{x}^2 - 2ts$ . Este invariante pode ser interpretado como um produto escalar entre dois vetores (5.6) num  $\mathcal{G}$ -espaço de 5-dimensões, dado por

$$x_\mu x^\mu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = x^i x_i - x^4 x^5 - x^5 x^4 \quad (5.7)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço, expressa por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

tal que

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \quad (5.9)$$

Desta forma, torna-se necessário reescrever as transformações de Galilei (5.1) e também (5.4) com a notação do  $\mathcal{G}$ -espaço 5-dimensional, ou seja

$$\bar{x}^i = R_j^i x^j + v^i x^4 + a^i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.10)$$

$$\bar{x}^4 = x^4 + a^4, \quad (5.11)$$

$$\bar{x}^5 = x^5 - R_j^i v^i x^j + \frac{1}{2} v^i v_i x^4 + a^5. \quad (5.12)$$

que é chamada de transformação de Galilei estendida, onde o novo grupo de simetria possui agora onze parâmetros, dados pelos dez já presentes em (5.1) e o novo parâmetro  $a^5 = s_0$ . É interessante notar que, como pode ser visto na métrica (5.8), a abordagem covariante destas transformações incorpora o espaço usual tridimensional Euclidiano  $\mathcal{R}$  num espaço de Sitter em cinco dimensões  $\mathcal{G}$ , onde o tempo  $t$  e a nova variável  $x^5$  são duas novas dimensões. As derivadas no  $\mathcal{G}$ -espaço se transformam por

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_i &= \partial_i + v_i \partial_5 \\ \bar{\partial}_4 &= \partial_4 + v^i \partial_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \partial_5 \\ \bar{\partial}_5 &= \partial_5 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Escrevendo as derivadas como um 5-gradiente  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu = (\partial_i, \partial_4, \partial_5) = (\nabla, \partial_t, \partial_s)$ , temos a partir das transformações acima os invariantes de Casimir  $\partial_\mu \partial^\mu = \bar{\partial}_\mu \bar{\partial}^\mu$  e  $\bar{\partial}_5 = \partial_5$ . Existe um outro invariante da teoria, que está relacionado ao spin do campo e é obtido pela contração do vetor de Pauli-Lubanski, e que será discutido no contexto da equação DKP Galileana tendo em vista seu caráter espinorial. Assim, considerando-se que, do teorema de Schur da teoria de grupos, que cada invariante deve ser igual a uma constante, podemos escrever as equações

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu - \frac{k^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = 0, \quad (5.14)$$

e

$$\partial_5 \Phi(x) = -i \frac{m}{\hbar} \Phi(x), \quad (5.15)$$

onde  $\frac{k^2}{\hbar^2}$  e  $-i\frac{m}{\hbar}$  são as constantes relativas aos invariantes  $\partial_\mu\partial^\mu$  e  $\partial_5$ , respectivamente, e  $\Phi(x)$  é uma função no  $\mathcal{G}$ -espaço, dada por.

$$\Phi(x) = e^{-i\frac{m}{\hbar}x^5} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (5.16)$$

A combinação das equações (5.14) e (5.15) resultam na equação de Schrödinger livre

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{k^2}{2m}\right)\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t). \quad (5.17)$$

com  $\psi(\mathbf{x}, t)$  sendo o campo de Schrödinger e  $\frac{k^2}{2m}$  uma constante a ser absorvida na energia. Considerando um 5-vetor  $p^\mu = (\mathbf{p}, m, E)$ , que se transforma por (5.10)-(5.12), e tomando soluções de onda plana para a função  $\Phi = Ae^{ip_\mu x^\mu/\hbar}$ , obtemos das equações (5.14) e (5.15):

$$p_\mu p^\mu + k^2 = 0 \rightarrow E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k^2}{2m} \quad (5.18)$$

que é a relação de dispersão não relativística da energia. Como já notado acima, a constante  $\frac{k^2}{2m}$  não altera a física do sistema tendo em vista que a diferença de energia é a quantidade a ser medida no laboratório.

## 5.2 A Equação Linear Galileana

Seguindo a formulação de Umezawa [13], que foi apresentada de forma resumida no contexto relativístico no Capítulo 2, apresentaremos nesta seção um dos resultados deste trabalho, que é a obtenção de equações de onda, lineares nas derivadas, para campos de spins arbitrários com covariância Galileana manifesta. Com esta formulação obteremos as equações Galileanas de Pauli-Dirac e de Duffin-Kemmer-Petiau e aplicaremos esta última ao caso do oscilador DKP num campo magnético transverso.

A equação de onda, em segunda ordem nas derivadas, para um campo não relativístico livre, é dada pela equação de Schrödinger, agora expressa covariantemente por (5.14), ou seja

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - \frac{k^2}{\hbar^2}\right)u_i(x) = 0 \quad (5.19)$$

onde agora tomamos um campo genérico  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sua versão linearizada é escrita da forma

$$\left(\Gamma^\mu\partial_\mu + \frac{k}{\hbar}M\right)\phi(x) = 0, \quad (5.20)$$

onde o campo  $\phi(x) = (\phi_i)$  possui um número de componentes  $r > n$  e os coeficientes  $\Gamma^\mu$  e  $M$  podem ser interpretados como matrizes de dimensão  $r$ . As propriedades destas matrizes  $\Gamma^\mu$  serão determinadas pela lei de transformação do campo  $\phi(x)$ . Entretanto, para que esta equação reproduza o campo de Schrödinger Galileano dado por (5.14), define-se um operador diferencial matricial  $D(\partial_\mu)$  como uma série infinita de derivadas, expressa por

$$\mathcal{D}(\partial) = \alpha + \alpha^\mu\partial_\mu + \alpha^{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} + \dots \quad (5.21)$$

cujos coeficientes  $\alpha, \alpha^\mu, \dots$  das derivadas são matrizes de dimensão  $r$ . Fazendo com que este operador atue em (5.20) e comparando o resultado com (5.19), obtemos

$$D(\partial)\left(\Gamma^\mu\partial_\mu + \frac{k}{\hbar}M\right) = \left(\partial_\mu\partial^\mu - \frac{k^2}{\hbar^2}\right). \quad (5.22)$$

Nesta expressão, podemos concluir que existirá um termo de ordem  $b$  nas derivadas, tal que

$$\alpha^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} = 0, \text{ se } l > b, \quad (5.23)$$

que definirá o truncamento da série. No entanto, independente do valor de  $b$ , podemos concluir que

$$\alpha M = -\frac{k}{\hbar}, \quad (5.24)$$

o que implica que o determinante da matriz  $M$  é não nulo, ou seja, ela possui uma inversa. Neste sentido, podemos reescrever (5.19) da forma

$$\left( \beta^\mu \partial_\mu + \frac{k}{\hbar} \right) \phi(x) = 0, \quad (5.25)$$

onde  $\beta^\mu = M^{-1}\Gamma^\mu$ . A partir desta expressão, e utilizando as Eqs. (5.21)-(5.22) obtemos as relações de recorrência

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{k}{\hbar} \mathbf{1} \\ \alpha\beta^\mu &= -\frac{k}{\hbar} \alpha^\mu \\ g^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu) + \frac{k}{\hbar} \alpha^{\mu\nu} \\ -3k\alpha^{\mu\nu\rho} &= \alpha^{\mu\rho} \beta^\nu + \alpha^{\rho\nu} \beta^\mu + \alpha^{\mu\nu} \beta^\rho \\ 0 &= \sum_P (\beta^{\mu_1} \alpha^{\mu_2 \mu_3 \dots \mu_l} - k \alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_l}), \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde  $\sum_P$  indica uma soma sobre todas as possíveis  $n$  permutações dos índices  $\mu, \nu, \rho, \dots$ , considerando a simetria de  $\partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma$ . Deste modo, solucionando estas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{k}{\hbar} \mathbf{1} \\ \alpha^\mu &= \beta^\mu \\ \alpha^{\mu\nu} &= \frac{\hbar}{2k} [2g^{\mu\nu} - (\beta^\nu \beta^\mu + \beta^\mu \beta^\nu)] \\ \alpha^{\mu\nu\rho} &= \frac{\hbar^2}{6k^2} [(\beta^\mu \beta^\rho \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\rho \beta^\mu - g^{\mu\rho} \beta^\nu - g^{\nu\rho} \beta^\mu) + (\beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu + \beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho - g^{\rho\nu} \beta^\mu - g^{\mu\nu} \beta^\rho) \\ &\quad + (\beta^\nu \beta^\mu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\mu \beta^\nu - g^{\nu\mu} \beta^\rho - g^{\rho\mu} \beta^\nu)] \\ \alpha^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} &= \left( -\frac{1}{k} \right)^{l-1} \frac{1}{l!} \sum_P \beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \dots \beta^{\mu_{l-2}} (g^{\mu_{l-1} \mu_l} - \beta^{\mu_{l-1} \mu_l}), \quad \text{para } l > 2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Consideremos agora uma transformação Galileana infinitesimal dada por [25]

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu = x^\mu + w_{\mu\nu} x^\nu, \quad (5.28)$$

onde  $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$  são os parâmetros infinitesimais. Consideremos também que o campo  $\phi(x)$  se transforme por

$$\phi'(x') = U(\Lambda) \phi(\Lambda^{-1}x), \quad (5.29)$$

com  $U(\Lambda)$  expresso por

$$U(\Lambda) = e^{\left(\frac{i}{2} w_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right)}, \quad (5.30)$$

onde  $M^{\mu\nu}$  são os geradores das transformações Galileanas, dados por

$$M^{\mu\nu} \equiv i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (5.31)$$

Impondo agora a invariância Galileana à Eq. (5.25), obtemos

$$(\beta^\mu \partial'_\mu - k) \phi'(x') = (U^{-1} \beta^\mu S \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - k) \phi(x) = 0, \quad (5.32)$$

o que nos indica a forma de como as matrizes  $\beta^\mu$  e os geradores  $M^{\mu\nu}$  se transformam, isto é

$$\begin{aligned} S^{-1}\beta^\mu S &= \Lambda_\nu^\mu \beta^\nu \\ S^{-1}M^{\mu\nu} S &= \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu M^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

que resulta nas relações de comutação

$$\begin{aligned} [\beta^\mu, M^{\alpha\sigma}] &= i(g^{\mu\alpha}\beta^\sigma - g^{\mu\sigma}\beta^\alpha), \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}). \end{aligned}$$

Na última expressão, quando tomamos todos os índices  $\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, 2, 3$  e também  $\sigma = i, \mu = j$  e  $\nu = \rho = k$  onde  $i, j, k$  são cíclicos, podemos definir o operador  $O$

$$O_k = -\frac{1}{2}M_{ij}, \quad (5.34)$$

de onde segue que

$$[O_i, O_j] = 2i\epsilon_{ijk}O_k. \quad (5.35)$$

Esta equação é exatamente a relação de comutação para as componentes do momentum angular. As propriedades destas matrizes afirmam que estas possuem autovalores iguais a  $(s, s-1, \dots, 0, -(s-1), -s)$ , onde  $s$  pode ser um número inteiro ou semi-inteiro, e que a sua representação geral pode ser decomposta em representações irredutíveis  $I_{(s)}, I_{(s-1)}, \dots$  de um grupo de rotações tridimensionais, onde cada uma destas representações corresponde aos valores de  $|s|, |s-1|, \dots$  do momentum angular. Entretanto considerando uma representação genérica  $I_l$ , é sabido que a função de onda associada  $\phi(x)$  deve possuir  $2l+1$  componentes independentes correspondentes às várias direções do momentum angular. Concluimos imediatamente então que  $\phi(x)$  descreve o estado de uma partícula de spin  $l$ . E que para o caso da representação geral,  $\phi(x)$  deve descrever estados de partículas com spin  $|s|, |s-1|, \dots$ , associando uma função de onda genérica ao spin correspondente.

Sob as transformações Galileanas, o operador  $D(\partial) = [D_{\alpha\rho}]$  se transforma da mesma maneira que  $\phi_\alpha \phi_\rho$ . Entretanto, como mostrado acima,  $\phi(x)$  descreve campos com spin máximo  $s$ . Utilizando o teorema de Clebsch-Gordan para adição de momentum angular, podemos concluir que a representação cuja base é dada pelo produto direto  $\phi_\alpha \otimes \phi_\rho$  pode ser decomposta em representações irredutíveis  $I_{(2s)}, I_{(2s-1)}, \dots, I_{(0)}$ , lembrando que os campos possuem o mesmo spin  $s$ . Neste contexto, conclui-se

$$\alpha_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} = 0, \quad l > 2s. \quad (5.36)$$

Ou seja, o termo de mais alta ordem  $b$  na série (5.21) é dado por  $b = 2s$ . Portanto, o spin  $s$  do campo define o termo de corte desta série. Assim, álgebra das matrizes  $\beta^\mu$  associada a cada campo pode ser obtida a partir do valor do spin deste campo. Considerando o caso do campo de férmions de spin  $1/2$ , conclui-se das relações de recorrência (5.26), as relações

$$\begin{aligned} \alpha &= k\mathbf{1} \\ \alpha^\mu &= \beta^\mu \\ \alpha^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

o que implica no corte da série para os demais coeficientes  $\alpha^{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} = 0$ . Logo, obtemos a álgebra

$$\beta^\mu \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (5.38)$$

que corresponde a álgebra de Clifford para as matrizes de Pauli-Dirac. Portanto, a equação linear obtida, a equação de Pauli-Dirac não-relativística, é dada por

$$\left( \beta^\mu \partial_\mu + \frac{k}{\hbar} \right) \psi = 0; \quad \mu = 1, 2, \dots, 5 \quad (5.39)$$



onde o campo  $\psi$  é um espinor. Uma representação das  $\beta^\mu$  acima, no contexto da covariância Galileana 5-dimensional, é dada pelas matrizes  $4 \times 4$

$$\beta^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^j \end{pmatrix}, \quad \beta^4 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -\sqrt{2} & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^5 = \begin{pmatrix} \cdot & \sqrt{2} \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

onde  $\sigma^j$  são as matrizes de Pauli, dadas por (2.13). Note que ao aplicarmos, pelo lado esquerdo da (5.39), o operador  $(\beta^\mu \partial_\mu - k)$  e usarmos a álgebra (5.38), obteremos o campo de Schrödinger (5.14).

Considerando agora o campo de bósons vetoriais de spin 1, obtém-se das relações de recorrência (5.27), as relações:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{k}{\hbar} \mathbf{1} \\ \alpha^\mu &= \beta^\mu \\ \alpha^{\mu\nu} &= \frac{\hbar}{2k} [2g^{\mu\nu} - (\beta^\nu \beta^\mu + \beta^\mu \beta^\nu)] \\ \alpha^{\mu\nu\rho} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

que implicam em

$$\beta^\mu \beta^\rho \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\rho \beta^\mu = g^{\mu\rho} \beta^\nu + g^{\nu\rho} \beta^\mu. \quad (5.42)$$

Esta é a álgebra DKP Galileana das matrizes  $\beta^\mu$ , que satisfazem a Eq. (5.39). Tendo em vista que a representação geral para o produto direto de dois campos de spin 1/2 é composta de duas representações irredutíveis  $I_{(0)}$  e  $I_{(1)}$  de spins 0 e 1, respectivamente, pode-se concluir que as matrizes  $\beta^\mu$  associadas ao campo de spin zero satisfazem também a álgebra (5.42). Ou seja, a equação linear DKP Galileana e a álgebra acima descrevem campos não relativísticos massivos de spin 0 ou 1. As representações para as matrizes  $\beta^\mu$  da teoria DKP Galileana, tanto no setor escalar como vetorial, no  $\mathcal{G}$ -espaço com dimensões arbitrárias, são mostradas explicitamente em [31]. A representação obtida para o setor escalar no  $\mathcal{G}$ -espaço 3+2-dimensional é dada pelas matrizes  $6 \times 6$ :

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ \beta^4 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta^5 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

E a representação para o setor vetorial no mesmo  $\mathcal{G}$ -espaço é dada pelas matrizes  $15 \times 15$ :

$$\begin{aligned} \beta^1 &= e_{13,1} + e_{14,4} + e_{12,8} - e_{11,9} - e_{9,11} + e_{8,12} + e_{1,13} + e_{4,14}, \\ \beta^2 &= e_{13,2} + e_{14,5} - e_{12,7} + e_{10,9} + e_{9,10} - e_{7,12} + e_{2,13} + e_{5,14}, \\ \beta^3 &= e_{13,3} + e_{14,6} + e_{11,7} - e_{10,8} - e_{8,10} + e_{7,11} + e_{3,13} + e_{6,14}, \\ \beta^4 &= -e_{10,4} - e_{11,5} - e_{12,6} + e_{1,10} + e_{2,11} + e_{3,12} + e_{15,14} + e_{13,15}, \\ \beta^5 &= -e_{10,1} - e_{11,2} - e_{12,3} + e_{4,10} + e_{5,11} + e_{6,12} - e_{15,13} - e_{14,15}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde novamente usamos a notação  $(e_{ij})_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn}$ .

### 5.3 Os Operadores de Projeção e o Vetor de Pauli-Lubanski

Como foi explorado no capítulo anterior, vamos introduzir os operadores de projeção da teoria DKP Galileana [27], e utilizá-los na contração do vetor de Pauli-Lubanski para então obtermos as projeções de spin da teoria, corroborando os resultados obtidos pela formulação de Umezawa da seção anterior.

Para o setor escalar, os operadores de projeção são dados por

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2} (\beta^4 + \beta^5)^2 (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 \\ P^\mu &= P\beta^\mu. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Destas definições, pode-se demonstrar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} P^2 &= P \\ P^\mu \beta^\nu &= P\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

A consequência da ação destes operadores no campo DKP são as seguintes:  $PU\psi = P\psi$  e  $P^\mu U\psi = P^\mu\psi + w_\nu^\mu P^\nu\psi$ , que mostram que  $P\psi$  se transforma como um escalar, enquanto  $P^\mu U\psi$  se transforma como um vetor. Aplicando estas identidades à Eq. (5.39), teremos

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu - \frac{k^2}{\hbar^2} \right) P\psi = 0, \quad (5.47)$$

com  $P\psi$

$$P\psi = \begin{pmatrix} 0_{5 \times 1} \\ \psi_6 \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Portanto, cada componente de  $P\psi$  pode ser interpretado como um campo escalar que obedece a equação de Schrödinger covariante de Galilei.

Para o setor vetorial, os operadores de projeção são dados por

$$\begin{aligned} R^\mu &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 [\beta^\mu (\beta^4 + \beta^5) - \eta^{\mu 4} - \eta^{\mu 5}] \\ R^{\mu\nu} &= R^\mu \beta^\nu. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Destas definições, pode-se demonstrar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= -R^{\nu\mu} \\ R^{\mu\nu} \beta^\alpha &= \eta^{\nu\alpha} R^\mu - \eta^{\mu\alpha} R^\nu \\ R^\mu S^{\nu\alpha} &= \eta^{\mu\nu} R^\alpha - \eta^{\mu\alpha} R^\nu \\ R^{\mu\nu} S^{\alpha\rho} &= \eta^{\mu\rho} R^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} R^{\nu\rho} + \eta^{\nu\alpha} R^{\mu\rho} - \eta^{\nu\rho} R^{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Destas propriedades pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} R^\mu U\psi &= R^\mu\psi + w^\mu{}_\nu R^\nu\psi \\ R^{\mu\nu} U\psi &= R^{\mu\nu}\psi + w^\nu{}_\alpha R^{\mu\alpha}\psi + w^\mu{}_\alpha R^{\alpha\nu}\psi. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Logo, podemos afirmar que, sob transformações de Galilei, a quantidade  $R^\mu\psi$  se transforma como um vetor, enquanto  $R^{\mu\nu}\psi$  se transforma como um tensor. Se aplicarmos ambos operadores  $R^\mu$  e  $R^{\mu\nu}$  na equação DKP (5.39), obtemos

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} + k^2 R^\nu\psi = 0 \quad (5.52)$$

onde  $G^{\mu\nu} = \partial^\mu R^\nu\psi - \partial^\nu R^\mu\psi$ . Note que aplicando o operador  $\partial_\nu$  na Eq. (5.52) obtemos, pela antissimetria de  $F^{\mu\nu}$ , a condição  $\partial_\mu(R^\mu\psi)$  e a equação em segunda ordem nas derivadas para o campo vetorial massivo. Em outras palavras, de maneira similar ao caso escalar,  $R^\mu\psi$  seleciona o setor vetorial do campo DKP Galileano.

### 5.3.1 O Vetor de Pauli-Lubanski

O vetor de Pauli-Lubanski Galileano,  $W_{5\mu}$ , é definido por [26]

$$W_{5\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{5\mu\nu\rho\sigma} p^\nu M^{\rho\sigma}, \quad (5.53)$$

onde  $M^{\rho\sigma} = x^\rho p^\sigma - x^\sigma p^\rho + i/2 [\beta^\rho, \beta^\sigma]$ .

Contraindo o vetor de Pauli-Lubanski, teremos

$$W_{5\mu} W_5^\mu = W_{5i} W_5^i + W_{54} W_5^4 + W_{55} W_5^5. \quad (5.54)$$

Porém fica claro pela definição do vetor de Pauli-Lubanski (5.53), que  $W_{55} = 0$ . O cálculo de  $W_{45} = 0$  está detalhado no Apêndice D. Desta forma, teremos que

$$W_{5\mu} W_5^\mu = W_{5i} W_5^i. \quad (5.55)$$

Calculando  $W_{5i}$ , teremos que a contração do vetor de Pauli-Lubanski, aplicado ao campo escalar  $P\psi$  leva a (ver Apêndice D)

$$W_{5\mu} W_5^\mu P\psi = 0. \quad (5.56)$$

Para o caso vetorial, teremos que fazer o operador  $W_{5\mu} W_5^\mu$  atuar em  $1/2({}^i R R^i)\psi$ , onde

$$\frac{1}{2}({}^i R R^i)\psi = \begin{pmatrix} 0_{6 \times 1} \\ \mathbf{A} \\ 0_{3 \times 1} \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

e  ${}^i R = (R^i)^T$ , pois este seleciona o vetor  $\mathbf{A}$  completo no campo  $\psi$ . Logo, utilizando as expressões para  $W_{5i}$  (ver Apêndice D), teremos que  $S^{34}({}^i R R^i)\psi = S^{42}({}^i R R^i)\psi = S^{41}({}^i R R^i)\psi = S^{14}({}^i R R^i)\psi = 0$ . Logo, podemos escrever a expressão de  $W_{5i}$  como sendo

$$W_{5i} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} P^4 S^{jk}, \quad (5.58)$$

de modo que

$$W_{5i} W_5^i = \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} (P^4)^2 S^{jk} S^{lm}. \quad (5.59)$$

Sabendo que  $(P^4)^2 = m^2$  e  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jm} \delta_{kl}$ , teremos que

$$W_{5i} W_5^i = \frac{m^2}{4} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) S^{jk} S^{lm} = \frac{m^2}{4} (S^{jk} S^{jk} - S^{jk} S^{kj}) = \frac{m^2}{2} S^{jk} S^{jk}. \quad (5.60)$$

Ou seja,

$$W_{5i} W_5^i = m^2 [(S^{12})^2 + (S^{23})^2 + (S^{31})^2] = -2m^2 \mathbf{1}_{16 \times 16}. \quad (5.61)$$

Teremos então que

$$W_{5i} W_5^i (1/2)({}^i R R^i)\psi = -2m^2 ({}^i R R^i)\psi = -m^2 \mathbf{1}(1+1)\mathbf{A}, \quad (5.62)$$

de onde concluímos que, ao aplicarmos a contração do operador de Pauli-Lubanski no campo vetorial  $({}^i R R^i)\psi$ , obtemos o spin do campo vetorial massivo Galileano.



Assim, substituindo o campo acima e as matrizes (5.63) em (5.65), obtemos as cinco equações

$$\begin{aligned}
ik\psi_1 &= (p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)\psi_5 \\
ik\psi_2 &= (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)\psi_5 \\
ik\psi_3 &= E\psi_5 \\
ik\psi_4 &= m\psi_5 \\
ik\psi_5 &= (p_x + m\tilde{\omega}y + m\omega x)\psi_1 + (p_y - m\tilde{\omega}x + m\omega y)\psi_2 - E\psi_4 - m\psi_3,
\end{aligned} \tag{5.66}$$

onde  $\tilde{\omega} = \frac{qB}{2mc}$ . Podemos resolver esse sistema de equações em função da componente  $\psi_5$ , obtendo

$$\begin{aligned}
(2mE - k^2)\psi_5 &= [(p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)(p_x + m\tilde{\omega}y + m\omega x) \\
&\quad + (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)(p_y - m\tilde{\omega}x + m\omega y)]\psi_5
\end{aligned} \tag{5.67}$$

cuja simplificação nos leva a

$$\left(E - \frac{k^2}{2m}\right)\psi_5 = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega^2\mathbf{r}^2}{2} - \tilde{\omega}L_z - \omega\hbar\right)\psi_5, \tag{5.68}$$

onde  $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2}$ ,  $\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2$  e  $L_z = xp_y - yp_x$ . Observe que esta equação representa o limite não relativístico de (4.30), com a constante adicional na energia  $k^2/2m$ . Portanto, seguindo a mesma abordagem usada no Capítulo 3, obtemos o espectro de energia  $E_{nl}$  e função de onda  $\psi_5$ , expressos por

$$E_{nl} = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{|l|\tilde{\omega}}{2} + \frac{\omega}{2} + \Omega \left( n + \frac{1}{2} + \frac{|l|}{2} \right) \right] \tag{5.69}$$

e

$$(\psi_5)_{nl} = e^{i(E_{nl}t + |l|\theta - \frac{m\Omega}{2\hbar}r^2)} \left( \frac{m\Omega}{\hbar}r^2 \right)^{|l|/2} L_n^{|l|} \left( \frac{m\Omega}{\hbar}r^2 \right). \tag{5.70}$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  são os números quânticos associados aos níveis de energia e  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  são os associados ao momento angular.

## 5.4.2 O Oscilador DKP Galileano Vetorial num Campo Transverso

Utilizando a representação vetorial em  $2 + 2$  dimensões, dada por (5.64), e o campo DKP de dez componentes  $\Psi_{2+2}^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})$  em (5.65), obtemos as dez equações teremos um sistema de dez equações é dado por

$$(p_x + m\tilde{\omega}y)\psi_8 + im\omega x\psi_9 + E\psi_6 = ik\psi_1 \tag{5.71}$$

$$(p_y - m\tilde{\omega}x)\psi_8 + im\omega y\psi_9 + E\psi_7 = ik\psi_2 \tag{5.72}$$

$$(p_x + m\tilde{\omega}y)\psi_9 + im\omega x\psi_8 + m\psi_6 = ik\psi_3 \tag{5.73}$$

$$(p_y - m\tilde{\omega}x)\psi_9 + im\omega y\psi_8 + m\psi_7 = ik\psi_4 \tag{5.74}$$

$$(p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)\psi_6 - (p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)\psi_7 = ik\psi_5 \tag{5.75}$$

$$(p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y)\psi_5 - E\psi_3 - m\psi_1 = ik\psi_6 \tag{5.76}$$

$$-(p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega x)\psi_5 - E\psi_4 - m\psi_2 = ik\psi_7 \tag{5.77}$$

$$(p_x + m\tilde{\omega}y)\psi_1 - im\omega x\psi_3 - im\omega y\psi_4 + (p_y - m\tilde{\omega}x)\psi_2 + E\psi_{10} = ik\psi_8 \tag{5.78}$$

$$(p_x + m\tilde{\omega}y)\psi_3 - im\omega x\psi_1 - im\omega y\psi_2 + (p_y - m\tilde{\omega}x)\psi_4 - m\psi_{10} = ik\psi_9 \tag{5.79}$$

$$E\psi_9 - m\psi_8 = ik\psi_{10}. \tag{5.80}$$

Inspirados nos resultados obtidos no capítulo anterior, porém com o apelo físico de tomarmos somente o limite magnético do campo DKP Galileano (ou seja,  $\phi_e = 0$  [31]), vamos agora anular de forma conveniente

as componentes  $\psi_8$  e  $\psi_9$  e, conseqüentemente, anular  $\psi_{10}$ . Teremos então o conjunto de equações dados por

$$E\psi_6 = ik\psi_1 \quad (5.81)$$

$$E\psi_7 = ik\psi_2 \quad (5.82)$$

$$m\psi_6 = ik\psi_3 \quad (5.83)$$

$$m\psi_7 = ik\psi_4 \quad (5.84)$$

$$ik\psi_5 = (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)\psi_6 - (p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)\psi_7 \quad (5.85)$$

$$ik\psi_6 = (p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y)\psi_5 - E\psi_3 - m\psi_1 \quad (5.86)$$

$$ik\psi_7 = -(p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega x)\psi_5 - E\psi_4 - m\psi_2 \quad (5.87)$$

$$0 = (p_x + m\tilde{\omega}y)\psi_1 - im\omega x\psi_3 - im\omega y\psi_4 + (p_y - m\tilde{\omega}x)\psi_2 \quad (5.88)$$

$$0 = (p_x + m\tilde{\omega}y)\psi_3 - im\omega x\psi_1 - im\omega y\psi_2 + (p_y - m\tilde{\omega}x)\psi_4. \quad (5.89)$$

Da mesma forma que no caso relativístico, o campo elétrico em duas dimensões espaciais é um escalar, e está representado pela componente do campo DKP Galileano  $\psi_5$ . Para o encontrarmos, substituiremos as Eqs. (5.81)-(5.84) nas Eqs. (5.86)-(5.87), e em seguida, estas duas em (5.85), onde obtemos

$$\left(E - \frac{k^2}{2m}\right)\psi_5 = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega^2\mathbf{r}^2}{2} - \tilde{\omega}L_z + \omega\hbar\right)\psi_5, \quad (5.90)$$

que é idêntica a Eq. (5.68), fazendo  $\omega \rightarrow -\omega$ .

Vamos agora obter as equações para as componentes  $\psi_6$  e  $\psi_7$  do campo vetorial Galileano, que representam o potencial vetor bidimensional  $\mathbf{A}$ , quando tomamos o limite magnético do campo, como mencionado anteriormente [31]. Somando as Eqs. (5.88) e (5.89), e substituindo as Eqs. (5.81)-(5.84) no resultado, obtemos a seguinte expressão

$$(p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)\psi_6 + (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)\psi_7 = 0. \quad (5.91)$$

Substituindo agora as equações (5.81)-(5.85) nas equações (5.86) e (5.87), obtemos

$$\begin{aligned} (p_y - m\tilde{\omega}x + im\omega y)[(p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)\psi_6 - (p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)\psi_7] &= (k^2 - 2mE)\psi_6 \\ (p_x + m\tilde{\omega}y + im\omega x)[(p_x + m\tilde{\omega}y - im\omega x)\psi_7 - (p_y - m\tilde{\omega}x - im\omega y)\psi_6] &= (k^2 - 2mE)\psi_7. \end{aligned}$$

Simplificando as expressões acima obtemos

$$\begin{aligned} (2mE - k^2)\psi_6 &= [\mathbf{p}^2 + m^2(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega - 2m\tilde{\omega}L_z]\psi_6 \\ &\quad - i[2m\hbar\tilde{\omega} + 2m\omega L_z - 2m^2\omega\tilde{\omega}\mathbf{r}^2]\psi_7 \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} (2mE - k^2)\psi_7 &= [\mathbf{p}^2 + m^2(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\mathbf{r}^2 - 2m\hbar\omega - 2m\tilde{\omega}L_z]\psi_7 \\ &\quad + i[2m\hbar\tilde{\omega} + 2m\omega L_z - 2m^2\omega\tilde{\omega}\mathbf{r}^2]\psi_6. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Definindo  $\psi_6$  e  $\psi_7$  respectivamente como  $d_1$  e  $d_2$  em (4.20), obtemos

$$\left(E - \frac{k^2}{2m}\right)\varphi_i = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_i^2\mathbf{r}^2}{2} - \hbar\omega_i - \left(\frac{\omega_i}{\hbar}\right)L_z S_z\right]\varphi_i \quad (5.94)$$

onde  $i = 1, 2$ , com  $\omega_1 = \omega + \tilde{\omega}$ ,  $\omega_2 = \omega - \tilde{\omega}$ ,  $S_z\varphi_i = s_i\hbar\varphi_i$  e  $s_1 = -s_2 = 1$ . O último termo do lado direito de (5.94) comporta-se como o termo de spin-órbita. Note que neste caso, temos uma equação de oscilador com um termo de frequência angular generalizada, e somente projeção do momento angular em um dos eixos coordenados, o que é esperado num problema bidimensional. Além disso, ao desligarmos o campo magnético, teremos o oscilador DKP vetorial bidimensional com a presença do termo de spin projetado na direção  $z$ , o que também é esperado para o problema.

A expressão para os auto-valores do espectro de energia tem a forma

$$E_{nl}^i = \hbar\omega_i [2n + 1 + |l| (1 + s_i) + s_i] \quad (5.95)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $E_{nm}^1$  e  $E_{nm}^2$  representam os auto-valores para o espectro de energia associados aos casos de frequência angular  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente. As funções de onda  $\varphi_i$  são expressas por

$$(\varphi_i)_{nls_i} = e^{i(tE_{ni} + |l|\theta - \frac{m\omega_i}{2\hbar}r^2)} \left(\frac{m\omega_i}{\hbar}r^2\right)^{|l|/2} L_n^{|l|} \left(\frac{m\omega_i}{\hbar}r^2\right) \quad (5.96)$$

onde as outras componentes da função de onda podem ser facilmente obtidas. Podemos concluir que o oscilador DKP Galileano nas representações  $(2+2)$ -dimensional escalar e vetorial [31] satisfazem o limite não relativístico do oscilador DKP usual, valendo assim todos os casos particulares estudados no capítulo anterior.

## Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas

Apresentamos nesta dissertação alguns aspectos fundamentais da teoria de Duffin-Kemmer-Petiau, cujas aplicações possuem como motivação o estudo dos osciladores a partir do acoplamento não minimal na mecânica quântica, sob a ótica da formulação relativística e da covariância Galileana.

Obtivemos as equações relativísticas com o potencial do tipo Morse, a partir da generalização do operador de momento linear ocasionada pela deformação do acoplamento não mínimo inspirada na mecânica estatística não-extensiva [55]. Para o caso unidimensional, foi possível reproduzir os mesmos resultados a partir dos osciladores de Dirac e DKP escalar com o formalismo da mecânica quântica não-relativística [59], além de obtermos resultados razoáveis para os níveis de energia dos estados vibracionais ( $l = 0$ ) ao aplicarmos o modelo a três moléculas diatômicas [68]. Para o caso tridimensional, utilizamos a aproximação de Pekeris [63] e obtemos uma equação de onda radial unificada para partículas de spin nulo e spin  $1/2$ , mapeando uma equação do tipo Schrödinger-Morse com spin, correspondente aos estados vibracionais das partículas ( $r \sim r_e$ ), onde fizemos um tratamento termodinâmico para três moléculas diatômicas no limite não relativístico, e o ensemble de um gás de elétrons para o caso relativístico, observando assim a ocorrência da anomalia Schottky, nos regimes de altas e baixas temperaturas.

Além disso, revisitamos o problema do oscilador DKP em  $2 + 1$  dimensões num campo magnético transversal, no espaço usual e não comutativo, a partir de representações escalares  $4 \times 4$  e vetoriais  $6 \times 6$ , o que nos permitiu estudar diversos casos presentes na literatura [45]– [47], assim como calcular os níveis de energia e autofunções de maneira unificada. O espectro de energia e funções de onda relativísticas para o setor escalar do oscilador foram perfeitamente reproduzidos. No setor vetorial, obtivemos um deslocamento na frequência de oscilação, correspondendo às projeções de spin  $s = +1, 0, -1$  na direção  $z$ . Somado a isto, usando a covariância Galileana obtivemos os resultados análogos para o limite não-relativístico do oscilador bidimensional num campo transversal, o que concedeu consistência ao trabalho. Alguns casos especiais foram estudados, onde observamos a ocorrência de efeitos críticos devido a interrupção da oscilação, o que mostrou a existência de uma região de transição de fase caracterizada pelo ensemble canônico do setor vetorial associada aos valores críticos  $\tilde{\omega} = \pm\omega$  do campo magnético.

Por fim, realizamos um tratamento teórico acerca da teoria DKP Galileana, obtendo o formalismo análogo ao feito por Umezawa [13] para o caso relativístico, e construímos o operador de spin para o campo DKP Galileano como a contração do vetor de Pauli-Lubanski, obtendo os autovalores corretos para os setores escalar e vetorial da teoria.

Os resultados deste trabalho originaram a publicação de um artigo científico [74], e abriu a possibilidade de explorar novos temas. Um destes é o aprofundamento da aplicação da mecânica quântica não-comutativa no oscilador DKP na presença de um campo magnético externo [45]– [47], considerando os novos resultados dos efeitos de spin na frequência de oscilação do setor vetorial, cujo estudo termodinâmico pode ser efetuado considerando também o parâmetro não comutativo no setor vetorial. Outra possibilidade é, também seguindo esta linha, estudar a extensão do princípio de incerteza [61] na teoria de Duffin-Kemmer-Petiau.



# Apêndice A

## Notações e Convenções

Considere dois eventos no espaço-tempo  $(x, y, z, t)$  e  $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ . Podemos generalizar a noção de distância entre dois pontos, tratando-a como um intervalo entre dois pontos do espaço-tempo,  $ds$ . Esta generalização precisa ser invariante sob transformações de Lorentz [1]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{A.1})$$

Note que num espaço tridimensional,  $(x, y, z)$ , temos que  $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , que é invariante por rotações e positivo definido. Para generalizarmos este conceito no espaço-tempo 4-dimensional, temos o problema que o intervalo invariante não é mais positivo definido. Portanto, definimos os chamados vetores em quatro dimensões

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \\ x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = -(-ct, x, y, z), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e a partir disto, torna-se regra de que o intervalo invariante no espaço-tempo 4-dimensional é obtido pela soma sobre as componentes chamadas *covariantes* e *contravariantes*

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (\text{A.3})$$

O produto interno entre um vetor contravariante e um vetor covariante é também um invariante (um escalar). Vale salientar aqui que a notação que utilizaremos para o vetor em quatro dimensões será diferente do que a utilizada por um vetor tridimensional, de modo a facilitar a identificação nas equações. O vetor em quatro dimensões terá o índice em letras do alfabeto grego subscrito ou sobrescrito, enquanto os vetores em três dimensões terão o índice subscritos e sobrescritos com letras do alfabeto latino. Veremos adiante também que o produto escalar (ou produto interno, de uma maneira geral) onde a componente vetorial está quadrada, no caso de vetores em quatro dimensões serão letras escritas em texto padrão, enquanto vetores tridimensionais estarão escritos em negrito.

Com a finalidade de simplificar a notação, vamos utilizar a convenção de soma de Einstein: os índices escritos em letras do alfabeto grego que aparecem repetidos nas componentes covariantes e contravariantes serão sempre somados de 0 a 3, enquanto índices escritos em letras do alfabeto latino serão somados de 1 a 3, para os casos de vetores em quatro e três dimensões, respectivamente,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu \rightarrow dx^\mu dx_\mu \\ dr^2 &= \sum_{i=1}^3 dx^i dx_i \rightarrow dx^i dx_i. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A relação entre um vetor contravariante  $x^\mu$  e sua contraparte covariante  $x_\mu$  pode ser dada pela introdução do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{A.5})$$

onde a convenção de soma de Einstein foi utilizada. Note que, pela utilização de (A.1), o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é definido como

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Tomando agora os operadores diferenciais, definimos

$$\begin{aligned} \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \\ \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde um invariante de Lorentz no operador diferencial de segunda ordem é dado por

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{A.8})$$

Disto decorrem os quadri-vetores de momentum-energia

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \\ p_\mu &= \left( \frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

que fornecem a quantidade invariante chamada de relação de dispersão

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2, \quad (\text{A.10})$$

cuja utilização será fundamental na descrição da equação de Klein-Fock-Gordon, a partir do procedimento de quantização canônica.

## Apêndice B

# O Oscilador DKP Tridimensional

Considerando o acoplamento não minimal  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\eta^0\mathbf{r}$  [33] na Eq. 2.33, teremos

$$\begin{aligned} mcP^i\Psi &= -(p^i - im\hbar\omega r^i)P\Psi \\ mcP^0\Psi &= -EP\Psi \\ mcP\Psi &= -(P^\mu p_\mu + im\hbar\omega P^i r_i)\Psi, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde a notação está explicada no Apêndice A. Combinando estas equações, teremos a equação do oscilador DKP escalar [33]

$$(E^2 - m^2c^4) = P\Psi = [c^2(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2) - 3mc^2\hbar\omega] P\Psi \quad (\text{B.2})$$

Para o setor vetorial, teremos

$$\begin{aligned} mcR^\nu\Psi &= R^{\nu\mu}\pi_\mu\Psi \\ mcR^{\nu\alpha}\Psi &= (G^{\nu\alpha})\Psi, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde  $G^{\nu\alpha} = R^\nu\pi^\alpha - R^\alpha\pi^\nu$  e  $\pi_\mu = (p_0, \mathbf{p} - im\omega\eta^0\mathbf{r})$ . Combinando estas equações e utilizando a propriedade  $R^{\nu i}\eta^0 = -2g^{\nu 0}R^{i0} - R^{\nu i}$  [16], nós encontraremos que

$$m^2c^2R^\nu\Psi = [p_\mu G^{\mu\nu} + im\omega\hbar r_i (2g^{\nu 0}G^{i0} + G^{\nu i})] \Psi. \quad (\text{B.4})$$

Fazendo  $\nu = 0$ , teremos

$$m^2c^2R^0\Psi = p_{+i}G^{0i}\Psi, \quad (\text{B.5})$$

onde  $p_{\pm\mu} = (p_0, \mathbf{p} \pm im\omega\eta^0\mathbf{r})$ . Então, utilizando as propriedades  $\eta^0 R^0 = R^0\eta^0 = -R^0$ ,  $R^i\eta^0 = R^i$  [16] e a identidade [18]

$$m^2c^2p_{+\nu}R^\nu\Psi = -\mathbf{p}_+ \cdot [\mathbf{p}_- \times (\mathbf{p}_+ \times \mathbf{r})] \Psi, \quad (\text{B.6})$$

podemos escrever a equação

$$(E^2 - m^2c^4) R^0\Psi = [c^2(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2) + 3mc^2\hbar\omega] R^0\Psi - \frac{E}{m^2}\mathbf{p}_+ \cdot [\mathbf{p}_- \times (\mathbf{p}_+ \times \mathbf{r})]. \quad (\text{B.7})$$

Considerando esta equação para as outras componentes  $i = 1, 2, 3$ , obtemos a equação do oscilador DKP

$$\begin{aligned} (E^2 - m^2c^4) \mathbf{R}\Psi &= \left[ c^2(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2\mathbf{r}^2) - 3mc^2\hbar\omega - 2mc^2\left(\frac{\omega}{\hbar}\right) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \mathbf{R}\Psi \\ &\quad - \frac{1}{m^2}\mathbf{p}_- \cdot [\mathbf{p}_+ \cdot (\mathbf{p}_- \times \mathbf{p}_+ \times \mathbf{R})] \Psi. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Nesta expressão, ao tomarmos o limite não relativístico teremos que o último termo torna-se nulo, e teremos assim um oscilador harmônico quântico com um forte acoplamento spin órbita.

## Apêndice C

# A Aproximação de Pekeris

A aproximação de Pekeris [63] foi desenvolvida com o objetivo de auxiliar a resolução da equação de Schrödinger tridimensional sujeita ao potencial de Morse [62], que é insolúvel analiticamente vide os termos centrífugos associados ao momento angular, também conhecidos como termos rotacionais. Ela consiste basicamente em, quando consideramos os termos até a segunda ordem da aproximação, na expansão das funções radiais dadas por [63,64]

$$\begin{aligned}\frac{r_e}{r} &= \left(1 + \frac{\ln y}{\gamma r_e}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{1}{\gamma r_e}(y-1) + \frac{2 + \gamma r_e}{2(\gamma r_e)^2}(y-1)^2 \\ \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 &= \left(1 + \frac{\ln y}{\gamma r_e}\right)^{-2} \approx 1 - \frac{2}{\gamma r_e}(y-1) + \frac{3 + \gamma r_e}{(\gamma r_e)^2}(y-1)^2\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

onde  $y = e^{\gamma(r-r_e)}$ , sendo que as expansões são no entorno de  $y = 1$  ( $r = r_e$ ). O potencial efetivo da equação radial (3.25) é dado por

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{m\omega^2}{2}U^2 - \frac{\hbar\omega}{2}\frac{dU}{dr} - [1 + f(j, l)]\frac{\hbar\omega U}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}. \quad (\text{C.2})$$

Para tornarmos as variáveis adimensionais, nós definimos que  $-\gamma r_e = \alpha > 0$  e  $\hbar/(m\omega r_e^2) = \delta > 0$ . Portanto, substituindo  $U = \frac{e^{\gamma(r-r_e)} - 1}{\gamma}$  e as expressões  $r_e/r, (r_e/r)^2$  de (C.1) em (C.2) podemos reescrever o potencial efetivo  $U_{\text{eff}}(r)$  da seguinte forma

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{m\Omega^2}{2\gamma^2} \left[ e^{\gamma(r-r_{\text{eff}})} - 1 \right]^2 + U_0$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \omega^2 A \left(1 - \frac{B}{2A}\right)^2 \\ r_{\text{eff}} &= r_e + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{B}{2A}\right) \\ U_0 &= \frac{m\Omega^2}{2\gamma^2} \left(C - \frac{B^2}{4A}\right),\end{aligned}\quad (\text{C.3})$$

cujos parâmetros são dados por

$$\begin{aligned}A &= 1 + \delta [2(1 + f(j, l)) + l(l+1)(3 - \alpha)] \\ B &= -\delta \left[1 - 2\frac{1 + f(j, l)}{\alpha} - 2\frac{l(l+1)}{\alpha}\right] \\ C &= \delta [(l+1) - 1]\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

## Apêndice D

# O Método Nikiforov-Uvarov

O método Nikiforov-Uvarov [65] é baseado na resolução de equações diferenciais de segunda ordem

$$\Psi''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}\Psi'(z) + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}\Psi(z) = 0 \quad (\text{D.1})$$

pela redução desta a uma equação generalizada do tipo hipergeométrica

$$\sigma(z)y''(z) + \tau(z)y'(z) + \lambda y(z) = 0. \quad (\text{D.2})$$

Vamos trabalhar com uma equação geral que pode ser escrita para qualquer potencial da seguinte forma

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{a_1 - a_2 z}{z(1 - a_3 z)} \frac{d}{dz} + \frac{-b_1 z^2 + b_2 z - b_3}{z^2(1 - a_3 z)^2} \right] \Psi(z) = 0. \quad (\text{D.3})$$

De acordo com o método, as autofunções e os autovalores são dados por

$$\psi(z) = z^{a_{12}}(1 - a_3 z)^{-a_{12} - (a_{13}/a_3)} P_k^{a_{10}-1, \frac{a_{11}}{3} - a_{10}-1}(1 - 2a_3 z), \quad (\text{D.4})$$

e

$$a_2 k - (2k + 1)a_5 + (2k + 1)(\sqrt{a_9} + a_3 \sqrt{a_8}) + k(k - 1)a_3 + a_7 + 2a_3 a_8 + 2\sqrt{a_8 a_9} = 0, \quad (\text{D.5})$$

onde  $P_k^{a,b}$  são os polinômios de Jacobi, dados por

$$P_k^{a,b}(s) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1 - s)^{-a} (1 + s)^{-b} \frac{d^k}{ds^k} [(1 - s)^{k+a} (1 + s)^{k+b}]. \quad (\text{D.6})$$

Os parâmetros  $a_n$ , com  $n = 4, 5, \dots, 13$ , em função de  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  serão dados por

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{2}(1 - a_1), & a_5 &= \frac{1}{2}(a_2 - 2a_3), & a_6 &= a_5 + b_1, & a_7 &= 2a_4 a_5 - b_2, & a_8 &= a_4 + b_3, \\ a_9 &= a_3 a_7 + a_3^2 a_8 + a_6, & a_{10} &= a_1 + 2a_4 + 2\sqrt{a_8}, & a_{11} &= a_2 - 2a_5 + 2(\sqrt{a_9} + a_3 \sqrt{a_8}), \\ a_{12} &= a_4 + \sqrt{a_8} & a_{13} &= a_5 - (\sqrt{a_9} + a_3 \sqrt{a_8}). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Para o caso especial em que tomamos o limite  $a_3 \rightarrow 0$ , teremos

$$\begin{aligned} \lim_{a_3 \rightarrow 0} (1 - a_3 z)^{-a_{12} - (a_{13}/a_3)} &= e^{a_{13} z} \\ \lim_{a_3 \rightarrow 0} (1 - a_3 z)^{-a_{12} - (a_{13}/a_3)} P_k^{a_{10}-1, \frac{a_{11}}{3} - a_{10}-1} &= L_k^{a_{10}-1}(a_{11} z), \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

onde  $L_k^{a_{10}-1}(a_{11} z)$  é o polinômio de Laguerre generalizado. As funções de onda serão então escritas como

$$\Psi(z) = z^{a_{12}} e^{a_{13} z} L_k^{a_{10}-1}(a_{11} z). \quad (\text{D.9})$$

## Apêndice E

# O Vetor de Pauli-Lubanski

A componente  $W_{54}$  do vetor de Pauli-Lubanski pode ser calculada da seguinte forma

$$W_{54} = \epsilon_{5\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} = \epsilon_{54123} P^1 M^{23} + \epsilon_{54132} P^1 M^{32} + \epsilon_{54213} P^2 M^{13} + \epsilon_{54231} P^2 M^{31} + \epsilon_{54312} P^3 M^{12} + \epsilon_{54321} P^3 M^{21}, \quad (\text{E.1})$$

onde os índices repetidos foram omitidos, por conta das propriedades do tensor antissimétrico de Levi-Civita, que anulam tais componentes. Utilizando estas mesmas propriedades, vemos que todos os tensores de Levi-Civita acima tomam permutações anticíclicas

$$W_{54} = -[P^1(M^{32} + M^{23})P^2(M^{31} + M^{13}) + P^3(M^{21} + M^{12})] \quad (\text{E.2})$$

Utilizando a definição de  $M^{ij}$ , e o fato de que o operador de spin  $S^{ij}$  também é antissimétrico, teremos

$$W_{54} = -i/2[S^{32} - S^{23} + S^{31} - S^{13} + S^{21} - S^{12}] = 0 \quad (\text{E.3})$$

Calculando  $W_{5i}$  utilizando as propriedades ditas acima, teremos

$$W_{5i} = i/2[\epsilon_{51234} P^2(X^3 P^4 - X^4 P^3) + \epsilon_{51243} P^2(X^4 P^3 - X^3 P^4) + \epsilon_{51324} P^3(X^2 P^4 - X^4 P^2) + \dots + i/2\epsilon_{51\nu\rho\sigma} P^\nu S^{\rho\sigma} + \epsilon_{52\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} + \epsilon_{53\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}]. \quad (\text{E.4})$$

Calculando  $W_{5i}$ , teremos que

$$\begin{aligned} W_{51} &= -(P^2 S^{34} + P^3 S^{42} + P^4 S^{23}) \\ W_{52} &= -(P^1 S^{34} + P^3 S^{41} + P^4 S^{13}) \\ W_{53} &= -(P^2 S^{14} + P^1 S^{42} + P^4 S^{21}), \end{aligned}$$

e como  $S^{\mu\nu} P_\psi = 0$ , concluímos que

$$W_{5\mu} W_5^\mu P_\psi = W_{5i} W_5^i = 0 \quad (\text{E.5})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [2] O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895; V. A. Fock, Z. Phys. **38** (1926) 242 e Z. Phys. **39** (1926) 226; W. Gordon, Z. Phys. **40** (1926) 117.
- [3] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. A **23** (1928) 610.
- [4] L. de Broglie, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **199** (1934) 445.
- [5] A. Proca, J. Phys. Radium **7** (1936) 347-353.
- [6] G. Petiau, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. **8** (1936) 16, No 2.
- [7] R. J. Duffin, Phys. Rev. **54** (1938) 1114.
- [8] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A **173** (1939) 91.
- [9] H. Chandra, Proc. R. Soc. A **186** (1946) 502.
- [10] R. A. Krajcik e M. M. Nieto, Am. J. Phys. **45** (1977) 818.
- [11] N. Kemmer, Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society **39** (1943) 189-196.
- [12] E. M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations* (Blackie and Sons, London, 1953).
- [13] H. Umezawa, *Quantum Field Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1956).
- [14] R. F. Guertin e T. L. Wilson, Phys. Rev. D **15** (1977) 1518.
- [15] T. R. Cardoso e B. M. Pimentel, Revista Brasileira do Ensino de Física **38** (2016) e3319.
- [16] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, e J. S. Valverde, Phys. Lett. A **268** (2000) 165.
- [17] M. Montigny e E. S. Santos, J. Math. Phys. **60** (2019) 082302.
- [18] L. M. Abreu, E. S. Santos e J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **43** (2010) 495402.
- [19] A. Silveira, Phys. Rev. D **22** (1980) 1390.
- [20] B. C. Clark, S. Hama e G. R. Kälbermann, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 592.
- [21] L. Kurth Kerr, B. C. Clark, S. Hama, L. Ray, e G. W. Hoffmann, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 321.
- [22] V. Ya. Fainberg e B. M. Pimentel, Braz. J. Phys. **30** (2000) 275-281.
- [23] H. Belich, E. Passos, M. D. Montigny, e E. S. Santos, Int. J. Mod. Phys. A **33** (2018) 1850165.
- [24] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos, e J. D. M. Vianna, J. Phys. A **33** (2000) L273.

- [25] M. Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos e J. D. M. Vianna, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 8901.
- [26] E. S. Santos, M. Montigny e F. C. Khanna, *Ann. Phys.* **320** (2005) 21-55.
- [27] E. S. Santos e L. M. Abreu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **41** (2008) 075407.
- [28] L. M. Abreu, F. J. S. Ferreira e E. S. Santos, *Braz. J. Phys.* **40** (2010) 235.
- [29] G. R. Melo, M. Montigny e E. S. Santos, *Int. J. Theo. Phys.* **51** (2012) 2524-2539.
- [30] L. M. Abreu, A. L. Gadelha, B. M. Pimentel e E. S. Santos, *Physica A* **419** (2015) 612.
- [31] M. Montigny e E. S. Santos, *Int. J. Mod. Phys. A* **35** (2020) 2050086.
- [32] R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel e J. S. Valverde, *Phys. Lett. A*, **316** (2003) 33-43.
- [33] Y. Nedjadi e R. C. Barret, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) 4301.
- [34] M. C. B. Fernandes e J. D. M. Vianna, *Braz. J. Phys.* **28** (1998) 1678-4448.
- [35] M. Nowakowski, *Phys. Lett. A* **244** (1998) 1223.
- [36] V. Gribov, *Eur. Phys. J. C* **10** (1999) 71.
- [37] M. C. B. Fernandes e J. D. M. Vianna, *Found. Phys.* **29** (1999) 201-219.
- [38] J. T. Lunardi, *J. Math. Phys.* **58** (2017) 123501.
- [39] M. Moshinsky e A. Szczepaniak, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) L817.
- [40] J. Benítez, R. P. M. Romero, H. N. Núñez-Tépez e A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1643.
- [41] H. Akcay, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) 6427-6432.
- [42] B. P. Mandal e S. Verma, *Phys. Lett. A* **374** (2010) 1021.
- [43] E. S. Santos e G. R. Melo, *Int. J. Theo. Phys.* **50** (2011) 332-338.
- [44] J. A. Franco-Villafañe, E. Sadurní, U. Kuhl, F. Mortessagne e T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 170405.
- [45] B. Mirza, R. Narimani e S. Zare, *Commun. Theor. Phys.* **55** (2011) 405-409.
- [46] H. Hassanabadi, Z. Molaee e S. Zarrinkamar, *Eur. Phys. J. C* **72** (2012) 2217.
- [47] A. Boumali, L. Chatouani e H. Hassanabadi, *Can. J. Phys.* **91** (2013) 1-11.
- [48] M. Falek, M. Merad e M. Moumni, *J. Math. Phys.* **60** (2019) 013505.
- [49] J. M. Lévy-Leblond, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 776.
- [50] J. M. Lévy-Leblond, *Commun. math. Phys.* **6** (1967) 286—311.
- [51] M. Le Bellac e J. M. Lévy-Leblond, *Il Nuovo Cimento* **14** (1973) 217.
- [52] Y. Takahashi, *Fortschr. Phys.* **36** (1988) 63-81.
- [53] Y. Takahashi, *Fortschr. Phys.* **36** (1988) 83-96.
- [54] M. Omote, S. Kamefuchi, Y. Takahashi e Y. Ohnuki, *Fortschr. Phys.* **37** (1989) 933-950.
- [55] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52** (1988) 459.
- [56] E. P. Borges, *Physica A* **340** (2004) 95.



- [57] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics* (Springer, New York, 2009).
- [58] R. N. Costa Filho, M. P. Almeida, G. A. Farias e J. S. Andrade Jr., *Phys. Rev. A* **84** (2011) 050102.
- [59] R. N. Costa Filho, G. Alencar, B. S. Skagerstam e J. S. Andrade, *Europhys. Lett.* **101** (2013) 10009.
- [60] B. G. Costa e I. S. Gomez, *Phys. Lett. A* **382** (2018) 2605.
- [61] R. N. Costa Filho, J. P. M. Braga, J. H. S. Lira e J. S. Andrade, *Phys. Lett. B* **755** (2016) 367.
- [62] P. M. Morse, *Phys. Rev.* **34** (1929) 57.
- [63] C. L. Pekeris, *Phys. Rev.* **45** (1934) 98.
- [64] F. J. S. Ferreira e F. V. Prudente, *Phys. Lett. A* **377** (2013) 3027-3032.
- [65] A. F. Nikiforov e V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Elsevier Academic Press, London, 2005).
- [66] D. J. Ben Daniel e C. B. Duke, *Phys. Rev.* **152** (1966) 683.
- [67] A. Boumali, A. Hafdallah e A. Toumi, *Phys. Scr.* **84** (2011) 037001.
- [68] I. Nasser, M. S. Abdelmonem, H. Bahlouli e A. D. Alhaidari, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** (2008) 4245-4257.
- [69] W. C. Qiang e S. H. Dong, *Phys. Lett. A* **363** (2006) 169.
- [70] M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida e R. R. Landim, *Europhys. Lett.* **108** (2014) 10005.
- [71] A. Capolupo, S. M. Giampaolo e F. Illuminati, *Phys. Rev. E* **88** (2013) 042132.
- [72] H. S. Snyder, *Phys. Rev.* **71** (1947) 38.
- [73] K. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 5125-5134.
- [74] I. S. Gomez, E. S. Santos e O. Abia, *Phys. Lett. A* **384** (2020) 126706.