



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Jaimara Silva Dantas de Almeida

**Colapso esférico em modelos com interação
matéria escura-energia escura**

Salvador

2020

Jaimara Silva Dantas de Almeida

**Colapso esférico em modelos com interação matéria
escura-energia escura**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Humberto de Almeida Borges
Coorientador: Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

Salvador

2020

Resumo

Neste trabalho, nós investigamos o processo de virialização e realizamos a contagem numérica das estruturas cósmicas, usando a função de massa Sheth-Tormen no contexto de modelos cosmológicos com interação entre matéria escura e energia escura, definidos pelo parâmetro α do gás de Chaplygin generalizado. Usando o modelo de colapso esférico com perfil top-hat, mostramos as quantidades relacionadas ao colapso, tais como: contraste de densidade crítica, contagem numérica dos aglomerados, raio de virial, densidade de virial, considerando o vácuo homogêneo. Por exemplo, no caso de vácuo homogêneo com $\Omega_{m0} = 0.3$, encontramos um excesso na contagem numérica para aqueles modelos com $\alpha > 0$, e um déficit para aqueles modelos com $\alpha < 0$ para massas $M > 10^{13} M_{\odot} h^{-1}$, quando comparados com o modelo Λ CDM. No caso particular, em que a matéria escura é criada a uma taxa constante ($\alpha = -0.5$), um excesso no número de estruturas com massas $M > 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$ foi encontrado [27], quando comparado com o modelo Λ CDM. Além disso, generalizamos o teorema de virial para modelos com interação e calculamos a densidade de virial para o modelo Λ CDM, mostrando que o halo de matéria escura finaliza com uma densidade de virial $\Delta_v(z=0) = 348.6$. Os cálculos numéricos foram realizados com auxílio de recurso computacional, mais precisamente utilizando um programa construído na linguagem Python.

Abstract

In this work, we investigate the virialization process and perform the number count of cosmic structures, using the Sheth-Tormen mass function in the context of cosmological models with interaction between dark matter and dark energy, defined by the α parameter of the generalized Chaplygin gas. Using the spherical collapse model with top-hat profile, we show the quantities related to the collapse, such as: critical density contrast, cluster number count, virial radius, virial density, considering the homogeneous vacuum. For instance, in the case of homogeneous vacuum with $\Omega_{m0} = 0.3$, we find an excess in the number count for those models with $\alpha > 0$, and a deficit for those models with $\alpha < 0$ for masses $M > 10^{13}M_{\odot}h^{-1}$, when compared with the Λ CDM. In the particular case, in which dark matter is created at a constant rate ($\alpha = -0.5$), an excess in the number of structures with masses $M > 10^{14}M_{\odot}h^{-1}$ was found [27], when compared with the Λ CDM model. In addition, we generalized the virial theorem for interacting models, and calculate the virial density for the Λ CDM model, showing that the halo of dark material ends with a density of virial $\Delta_v(z = 0) = 348.6$. The numerical calculations were performed with the aid of a computational resource, more precisely using a program built in the Python language.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Evolução do contraste de densidade crítico δ_c sem flutuações na densidade de energia do vácuo	27
Figura 2 – À esquerda representação de uma região esférica de volume comóvel V , contendo uma distribuição de objetos, com centro do sistema de coordenadas na origem. À direita representação da mesma região esférica, porém com sistema de coordenadas fora do centro.	30
Figura 3 – Função janela Top hat	33
Figura 4 – Espectro de potência para $\alpha = 0$, com $\Omega_{m0} = 0.3$ que corresponde ao modelo padrão	35
Figura 5 – Região esférica de volume V contendo objetos colapsados	37
Figura 6 – Abundância dos halos de matéria escura, com $\delta\rho_\Lambda = 0$, para $z = 0$. . .	41
Figura 7 – Abundância dos halos de matéria escura, com $\delta\rho_\Lambda = 0$, para $z = 0$. . .	42
Figura 8 – Espectro de potência linear da matéria. Na figura(a) Λ CDM e o $\Lambda(t)$ CDM e na figura(b) Comparação do Λ CDM com alguns valores de α	43
Figura 9 – (a) gráfico de q x z_{max} e (b) q x z_{max} . Usamos $\Omega_{m0} = 0.3$ para o modelo Λ CDM	50
Figura 10 – (a) gráfico de y x q e em (b) y x z_{max} . Usamos $\Omega_{m0} = 0.3$ para o modelo Λ CDM.	50
Figura 11 – Na figura (a) gráfico de z_{max} x z_v e na figura (b) t x z_{max} . Usamos $\Omega_{m0} = 0.3$ para o modelo Λ CDM.	51
Figura 12 – Na figura (a) gráfico de Δ_v x z_{max} e na figura (b) Δ_v x z_v	51

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	O GÁS DE CHAPLYNGIN GENERALIZADO	11
2.1	Gás decomposto	12
2.2	Taxa de transferência de energia entre matéria escura e vácuo	13
3	PERTURBAÇÕES NÃO-LINEARES	17
3.1	O Modelo de Colapso Esférico	17
3.2	Colapso esférico no universo de Einstein-De Sitter	20
3.3	Equações da hidrodinâmica perturbadas	22
3.3.0.1	Equação da continuidade	23
3.3.1	Equação de Euler	24
3.3.2	Equação de Poisson	25
3.4	Evolução das perturbações - $\delta\rho_\Lambda = 0$	25
3.5	Determinação de δ_c	26
4	CONTAGEM NUMÉRICA DE HALOS DE MATÉRIA ESCURA	29
4.1	Descrição estatística do campo de densidades	29
4.1.1	A Correlação de dois pontos	29
4.2	A Função Janela Top hat	32
4.3	O Espectro de Potência	33
4.3.1	O Espectro de potência $P(k) \propto k^n$	34
4.4	A Função de Massa - Teoria de Press-Schechter	36
4.4.1	Função de Sheth-Tormen	38
4.5	Contagem numérica - $\delta\rho_\Lambda = 0$	39
5	TEOREMA DE VIRIAL	45
5.1	Energia Potencial	47
5.2	Modelo Λ CDM	48
5.3	Resultados e Discussões	49
6	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	55

1 Introdução

As observações das supernovas do tipo Ia [1, 3, 2], anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo (CMB), observações das estruturas em larga escala (LSS), entre outras, indicam que o universo possui expansão acelerada. A explicação mais simples é propor a existência de uma componente de energia que possui uma pressão negativa e atue como uma força anti-gravitacional, conhecida como energia escura [4], e que pode ser associada à uma constante cosmológica nas equações de Einstein [5, 7]. As observações tem mostrado que em torno de 70% da energia presente no universo consiste de energia escura, 25% está na forma de matéria escura, 4% na forma de bárions e o restante consiste de radiação cósmica de fundo.

Uma alternativa seria o gás de Chaplyngin [13], que surge como um modelo cosmológico que trata energia escura e matéria escura compondo um fluido que preenche o universo com pressão negativa. Neste trabalho utilizamos o gás de Chaplyngin generalizado [13, 14] decomposto em matéria escura e termo de vácuo, em que modelos com interação ficam definidos pelo parâmetro α . Este modelo será apresentado no capítulo 2 onde encontramos as soluções de base necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

A matéria escura desempenha função crucial na formação das galáxias e aglomerados de galáxias. Segundo a teoria que melhor explica as observações, em largas escalas flutuações na densidade da matéria escura, evoluem devido instabilidades gravitacionais e colapsam em objetos chamados de halos, estabelecendo poços de potenciais gravitacionais. Posteriormente a matéria bariônica é atraída gravitacionalmente e "caem" nesses potenciais formando as galáxias [31].

Todavia para que esse colapso ocorra, e conseqüentemente a formação da estrutura, algumas condições são necessárias e esse é o contexto do capítulo 3, onde iniciamos com o estudo da evolução não linear das perturbações, partindo da definição do contraste de densidade e revisamos o modelo de colapso esférico (perfil top hat), considerando o caso para o universo de Einstein de Sitter. Logo em seguida, no mesmo capítulo, perturbamos as equações da hidrodinâmica e, considerando o modelo de colapso esférico, encontramos a equação que representa a evolução do contraste de densidade em função do redshift, com o intuito de calcular o valor do δ_c , para o modelo cosmológico apresentado no capítulo 2, possibilitando saber se houve colapso esférico em um determinado redshift e assim a formação de estruturas, considerando um caso onde o vácuo é homogêneo.

No capítulo 4 calculamos a densidade numérica de halos de matéria escura, em função da massa do halo, usando a função de massa Sheth-Torman. Para isso, inicialmente discutimos as ferramentas estatísticas necessárias para a realização dos cálculos, partindo da

correlação estatística entre objetos, que permite saber a probabilidade de haver aglomeração, aplicado este conceito às flutuações de densidade. Então definimos o espectro de potência utilizando o estudo da evolução das perturbações no espaço das funções de Fourier. Logo em seguida fizemos uma abordagem teórica sobre a origem do espectro de potência da matéria que é observado hoje, e como forma de estudar a evolução das flutuações de σ_R^2 , fizemos uma abordagem analítica para um espectro que segue uma lei de potência. Ainda no intuito de calcular numericamente a abundância de halos, foi necessário discutir a função de massa, entendendo o formalismo Press-Schechter, para em fim obter e discutir os resultados da contagem numérica.

Já o capítulo 5, traz o estudo dos halos virializados, ajustados em um tamanho chamado de raio de virial, onde é possível generalizar que o teorema de virial válido para qualquer modelo com interação no setor escuro, supondo densidade de energia com perfil top-hat. Também discutimos as relações que determinam o tamanho do raio de virial e a densidade de virial das estruturas no modelo Λ CDM.

2 O gás de Chaplyngin generalizado

Com a descoberta da expansão acelerada do universo, e atribuindo isto à uma argumentação teórica denominada energia escura, iniciou-se uma busca pelo componente físico que representaria essa energia. A inexistência de um candidato natural, tem estimulado muitas especulações e um dos concorrentes, é um tipo de fluido chamado de gás de Chaplyngin [14], que será o modelo cosmológico adotado neste trabalho. Portanto, neste capítulo, estudamos o gás de Chaplyngin generalizado, e encontramos as relações necessárias para o desenvolvimento do trabalho resultando na contagem numérica que será feita no capítulo 4.

O gás de Chaplyngin é um modelo unificado de energia escura e matéria escura constituindo um único fluido exótico com pressão negativa, que preenche o universo [13]. A equação de estado do gás é dada por

$$P_g = -\frac{A}{\rho_g}, \quad (2.1)$$

sendo P_g a pressão do gás, ρ_g é a densidade de energia, e A é uma constante positiva.

Neste trabalho será utilizada a equação de estado para o modelo generalizado do gás de Chaplyngin (GCG)[14].

$$P_g = -\frac{A}{\rho_g^\alpha}, \quad (2.2)$$

onde se introduz α como um parâmetro livre. Se $\alpha = 1$, é recuperada a equação simples do gás de Chaplyngin. O modelo padrão da cosmologia (Λ CDM), a ser tratado ao longo deste trabalho, se relaciona ao gás de Chaplyngin generalizado quando se estabelece o caso particular em que $\alpha = 0$, resultando em uma equação de estado com pressão negativa $P_g = -A$.

Sabe-se que a equação de continuidade do gás [15] é dada por

$$\dot{\rho}_g + 3H(\rho_g + P_g) = 0, \quad (2.3)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e $a(t)$ o fator de escala do universo. O ponto sobre as quantidades representa derivada com relação ao tempo cosmológico. Inserindo a equação de estado para o GCG (2.2), a equação de continuidade torna-se:

$$\frac{d\rho}{\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}} = -3\frac{da}{a}. \quad (2.4)$$

Integrando ambos os membros da equação acima, obtem-se a expressão para a densidade de energia do gás

$$\rho(a) = \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (2.5)$$

com o expoente positivo. Para valores muito pequenos de a o segundo termo da expressão acima torna-se muito maior que o primeiro, de modo que

$$\rho(a) \propto a^{-3}. \quad (2.6)$$

Esse resultado conduz ao período do universo dominado por matéria sem pressão [15]. Agora, considerando valores muito grandes de a , ou seja em tempos atuais, o primeiro termo da expressão torna-se muito maior que o segundo, logo

$$\rho(a) \simeq A^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (2.7)$$

que refere-se, portanto, ao período dominado por uma constante cosmológica responsável pela atual aceleração da expansão do universo.

A expressão para o parâmetro de Hubble no modelo do gás de Chaplygin generalizado pode ser obtido pela equação de Friedmann [16]

$$3H^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_g. \quad (2.8)$$

Normalizando o fator de escala para o tempo presente como a unidade, isto é, $a_0 = 1$, encontramos a relação

$$B = \rho_{g0}^{1+\alpha} - A. \quad (2.9)$$

onde ρ_{g0} é a densidade de energia medida hoje.

2.1 Gás decomposto

Nesta seção vamos decompor o gás em duas componentes escuras, uma será identificada como matéria sem pressão $P_m = 0$ e a segunda como energia escura com pressão negativa $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$, tal que $P_g = P_\Lambda$. Desta forma (2.2) fica

$$\rho_\Lambda = \frac{A}{\rho_g^\alpha}. \quad (2.10)$$

Aqui vamos adotar, por enquanto, que $8\pi G = c = 1$. Introduzindo esta equação na (2.12), segue [21]

$$\rho_\Lambda = \frac{A}{(3H^2)^\alpha}, \quad (2.11)$$

e considerando tempos atuais, a constante A fica escrita como

$$A = 3^\alpha H_0^{2\alpha} \rho_{\Lambda 0}. \quad (2.12)$$

Porém, por definição

$$\Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{\rho_{\Lambda 0}}{3H_0^2}, \quad (2.13)$$

e considerando que o universo é espacialmente plano

$$\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = 1, \quad (2.14)$$

então a constante A fica determinada por

$$A = 3^{\alpha+1} H_0^{2(\alpha+1)} (1 - \Omega_{m0}). \quad (2.15)$$

Utilizando as constantes A e B encontradas, e $\rho_0 = 3H_0^2$, a equação (2.5) torna-se

$$\rho_g = 3H_0^2 \left[1 - \Omega_{m0} + \frac{\Omega_{m0}}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (2.16)$$

Usando-a na equação de Friedmann (2.8) encontramos a taxa de expansão do universo dada pelo parâmetro de Hubble

$$H(a) = H_0 \left[1 - \Omega_{m0} + \frac{\Omega_{m0}}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}. \quad (2.17)$$

Esta expressão encontrada para o parâmetro de Hubble em função do fator de escala, para o Gás de Chaplyngin generalizado, pode também ser escrita em função do redshift,

$$H(z) = H_0 \left[1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0} (1+z)^{3+3\alpha} \right]^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}, \quad (2.18)$$

onde usamos $z = 1/a - 1$.

2.2 Taxa de transferência de energia entre matéria escura e vácuo

Na classe de modelos com interação que analisaremos neste trabalho onde a energia escura é considerada como energia de vácuo dinâmico, pode ocorrer produção de matéria escura a partir de decaimento da densidade de energia do vácuo ou aniquilação da matéria escura, com a densidade de energia total do universo se conservando. Nesse processo, é possível calcular a taxa de transferência de energia entre as componentes, que é matematicamente a variação temporal da densidade energia do vácuo.

Considere o gás de Chaplyngin generalizado decomposto em matéria e energia do vácuo, então a densidade total do gás é dada por

$$\rho_g = \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (2.19)$$

com

$$P_g = P_\Lambda. \quad (2.20)$$

Substituindo essas relações na equação de continuidade (2.3), obtém-se:

$$\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\Lambda + 3H\rho_m = 0. \quad (2.21)$$

Se ρ_Λ é constante, então a equação torna-se: $\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0$, que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$a^{-3} \frac{\partial(\rho_m a^3)}{\partial t} = 0. \quad (2.22)$$

Considere agora um certo volume V em uma região do universo tal que a densidade de energia é dada por $\rho_m = \frac{Nm}{V}$, onde N é o número de partículas dentro da região especificada e m a massa de cada partícula. Como o volume é proporcional ao cubo do fator de escala, então $\frac{Nm}{V} \propto \frac{Nm}{a^3}$. Desta forma $\rho_m a^3 \propto mN$ e então,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 0. \quad (2.23)$$

Isso significa que para o caso que ρ_Λ é constante, o número de partículas de matéria escura se conserva.

Contudo, não sendo ρ_Λ constante

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q. \quad (2.24)$$

Simplificando a equação de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, o resultado será

$$a^{-3} m \frac{\partial N}{\partial t} \propto -\dot{\rho}_\Lambda. \quad (2.25)$$

O número de partículas de matéria escura não se conserva quando ρ_Λ não é constante (vácuo dinâmico). O gás de Chaplyngin, então, se reduz à um modelo com interação entre matéria escura e o vácuo, onde há criação de matéria escura a partir do decaimento do vácuo ou aniquilação de matéria escura. Por definição $Q \equiv -\dot{\rho}_\Lambda$ será a taxa de transferência de energia nessa interação.

Para avaliar se há criação ou aniquilação de matéria escura, é necessário encontrar uma expressão para Q em termos de ρ_m , ρ_Λ e do parâmetro α . O sinal de α definirá o sentido da transferência.

É possível obter uma expressão para a densidade de energia do vácuo ρ_Λ , tomando a equação (2.11), e introduzindo a expressão para a constante A (2.15):

$$\rho_\Lambda(z) = 3H_0^2(1 - \Omega_{m0}) \left(\frac{H_0}{H} \right)^{2\alpha}. \quad (2.26)$$

Derivamos a equação acima em relação ao tempo para se obter a expressão para a taxa de transferência de energia

$$Q = -6\alpha H_0^2(1 - \Omega_{m0}) H_0^{2\alpha} H^{-(2\alpha+1)} \dot{H}.$$

Sabendo que

$$\dot{\rho}_g = -3H\rho_m \quad (2.27)$$

e diferenciando a equação de Friedmann (2.8) com relação ao tempo

$$6H\dot{H} = \dot{\rho}_g,$$

encontramos que

$$\dot{H} = -\frac{\rho_m}{2}. \quad (2.28)$$

Portanto a expressão para a taxa de transferência é:

$$Q = -\alpha \frac{\rho_\Lambda \rho_m}{H}. \quad (2.29)$$

Vemos que para valores de α negativos, implicará em $Q > 0$, logo há criação de matéria escura a partir da energia escura. Já para um valor de α positivo, $Q < 0$, ocorre aniquilação de matéria escura e aumento da energia do vácuo.

Tomando a equação de Fridmann (2.8) dada por

$$\rho_m = 3H^2 - \rho_\Lambda$$

e usando (2.26) ficamos com a densidade de energia para a matéria

$$\rho_m(z) = 3H^2 - 3H_0^2(1 - \Omega_{m0}) \left(\frac{H}{H_0} \right)^{-2\alpha}. \quad (2.30)$$

Usando a expressão para o parâmetro de Hubble (2.17) na expressão acima, encontramos a densidade de energia comóvel para a matéria

$$\rho_{mc} = 3H_0^2 \Omega_{m0} \beta(z), \quad (2.31)$$

onde definimos

$$\rho_{mc} \equiv \frac{\rho_m(z)}{(1+z)^3}, \quad (2.32)$$

e

$$\beta(z) = (1+z)^{3\alpha} [1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0}(1+z)^{3(1+\alpha)}]^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \quad (2.33)$$

Será muito útil escrever ρ_{mc} em unidades de massas solares (M_\odot) por mega parsec (Mpc), quando se quer estudar estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias, que é o caso deste trabalho.

Por definição, $\rho_{m0} = \rho_c \Omega_{m0}$, em que ρ_c é a densidade crítica do universo. Como Ω_{m0} é adimensional, então ρ_{m0} terá a dimensão de ρ_c , ou seja, $[\rho_{m0}] = 3[H_0]^2/8\pi[G]$.

O parâmetro de Hubble nos dias atuais é : $H_0 = 100 kms^{-1} h Mpc^{-1}$. Mas $1 Mpc = 3,08568 \cdot 10^{19} km$, o que implica no valor $H_0 = 3,24 \cdot 10^{-18} h/s$.

A lei de força de Newton para atração gravitacional é: $F_g = GMm/r^2$, onde $G = 6,67408 \cdot 10^{-11} kg^{-1}m^3s^{-2}$.

Agora $1(km)^3 = 10^9 m^3$ e como foi visto logo acima $1km = \frac{1Mpc}{3,08568 \cdot 10^{19}}$, que elevando ao cubo, se obtém $1(km)^3 = \frac{1Mpc^3}{(3,08568 \cdot 10^{19})^3}$, então $1m^3 \simeq 3,4 \cdot 10^{-68} Mpc^3$.

Além disso $1M_{\odot} = 1,98892 \cdot 10^{30} kg$, e em fim, a dimensão de G expressa em Mpc e M_{\odot} será

$$[G] \simeq 4,513 \cdot 10^{-48} Mpc^3 M_{\odot}^{-1} s^{-1}.$$

Daí encontramos que

$$[\rho_{m0}] = \frac{3[H_0]^2}{8\pi[G]} \Rightarrow [\rho_{m0}] \simeq 2,78 \cdot 10^{11} h^2 \frac{M_{\odot}}{Mpc^3}$$

Portanto, a densidade comóvel da matéria pode ser expressa como

$$\rho_{mc} = 2,78 \cdot 10^{11} h^2 \Omega_{m0} \beta(z) \frac{M_{\odot}}{Mpc^3}. \quad (2.34)$$

Com a densidade de energia comóvel da matéria, é possível encontrar o raio comóvel R_c , de uma distribuição esférica de matéria

$$\rho_{mc} = \frac{3M}{4\pi R_c^3}. \quad (2.35)$$

Inserindo (2.34) na expressão acima, obtemos

$$R_c = \left[\frac{8,6 \cdot 10^{-13}}{\Omega_{m0} \beta(z)} \frac{M}{h^2 M_{\odot}} \right]^{1/3} Mpc. \quad (2.36)$$

Esta é a expressão para o raio comóvel que será utilizado mais adiante para o cálculo da abundância numérica de halos de matéria escura.

3 Perturbações Não-Lineares

A cosmologia moderna, apoiado pelas observações da radiação cósmica de fundo, assume que o Universo é homogêneo (mesma densidade em todo lugar) e isotrópico (o mesmo em todas as direções) em grandes escalas (em escalas maiores que 100Mpc). Porém em pequenas escalas vemos claramente que existem irregularidades e que as sementes das estruturas tem origem no modelo inflacionário [17]. Acredita-se que as flutuações de densidade responsáveis pelas estruturas observadas hoje, como as galáxias e os aglomerados de galáxias, evoluíram a partir dessas sementes [26].

Para descrever quantitativamente o crescimento das flutuações na densidade da matéria, a cosmologia utiliza a teoria de perturbação linear [16, 28], onde pequenas perturbações na métrica do espaço-tempo (FLRW) e no tensor de momento-energia são realizadas. Desta forma, pode se obter equações para analisar o crescimento das perturbações.

No estudo do crescimento das perturbações, o contraste de densidade ou simplesmente flutuação de densidade é definido como:

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (3.1)$$

em que $\bar{\rho}(t)$ é a densidade média do universo num dado tempo t e $\rho(\vec{r}, t)$ o campo de densidade localizado no espaço pelo vetor \vec{r} . O contraste caracteriza a variação relativa da densidade de matéria em torno da densidade média.

No entanto, existe um limite de validade da teoria de perturbação linear, que é para valores de $\delta \leq 1$. Ao ocorrer expansão de uma flutuação de densidade, em determinada escala, de tal forma que o limite de aproximadamente 1 seja atingido, o regime de crescimento das perturbações de densidade passa a ser não linear e é nesta fase que uma região passa a se contrair gravitacionalmente formando estruturas tais como galáxias e aglomerados de galáxias [18].

No caso dessas grandes estruturas, a magnitude de densidade é superior à densidade média do Universo, e portanto, que se encontram no regime altamente não linear, onde $\delta \gg 1$. E esta situação que será abordada neste capítulo.

3.1 O Modelo de Colapso Esférico

O modelo de colapso esférico é a versão mais simples da teoria das perturbações não lineares. Basicamente, descreve a evolução não linear de uma perturbação com simetria

esférica e densidade uniforme (perfil top hat), até o momento do colapso gravitacional e formação da estrutura. Durante o crescimento da perturbação, a expansão é mais lenta que a expansão média do Universo, o que acarreta em um aumento progressivo do contraste de densidade $\delta(\vec{r}, t)$ ao longo do tempo. Em um dado momento um raio máximo é atingido e logo em seguida, se inicia um processo de colapso.[18]

Considere uma região esfericamente simétrica de raio r , massa M com uma sobre-densidade de matéria num espaço homogêneo e isotrópico em expansão. A evolução dessa região esférica, considerando que sobre uma massa de prova agem apenas forças gravitacionais, é descrita pela 2ª lei de Newton

$$m_i \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm_g M}{r^2}, \quad (3.2)$$

De acordo com o princípio de equivalência $m_i = m_g$, e integrando ambos os membros da equação acima com relação a r obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = -C, \quad (3.3)$$

onde C é uma constante de integração. O 1º termo da equação está associado à energia cinética enquanto que o 2º termo com a energia potencial gravitacional.

Para $C = 0$, a solução da equação é particularmente simples e nos diz que a esfera expandirá indefinidamente com

$$r \propto t^{2/3}. \quad (3.4)$$

No caso de $C < 0$, uma partícula de massa m_g na casca esférica fugiria sempre do campo gravitacional (Energia cinética maior que energia potencial gravitacional), produzindo os vazios. Não estamos aqui interessados em analisar tal situação.

No caso de $C > 0$, uma partícula de massa m_g na casca esférica seria atraída para o centro pelo campo gravitacional (Energia cinética maior que energia potencial gravitacional), o que faria a casca esférica entrar em colapso. O caso que nos interessa é aquele em que ocorre o colapso, tal que

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2GM/r - C}} = \int dt. \quad (3.5)$$

Rearrumamos o lado esquerdo da equação, de modo que a integral fica

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \frac{r^{1/2}}{\sqrt{2GM/C - r}} dr. \quad (3.6)$$

Em seguida realizamos a substituição $z = \sqrt{r} \Rightarrow z^2 = r$, e, $dr = 2zdz$, tal que

$$\mathcal{I} = \frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{z^2}{\sqrt{2GM/C - z^2}} dz.$$

Aqui pode-se usar uma substituição trigonométrica que resulta em

$$z = \sqrt{\frac{2GM}{C}} \sin \varphi,$$

com

$$dz = \sqrt{\frac{2GM}{C}} \cos \varphi,$$

e

$$z^2 = \frac{2GM}{C} \sin^2 \varphi. \quad (3.7)$$

Então

$$\mathcal{I} = \frac{4G\bar{M}}{C\sqrt{C}} \int \sin^2 \varphi d\varphi. \quad (3.8)$$

Usamos agora a relação

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad (3.9)$$

e chamando $\theta = 2\varphi$ encontramos que

$$\mathcal{I} = \frac{GM}{C\sqrt{C}} \left[\int d\theta - \int \cos \theta d\theta \right]. \quad (3.10)$$

Daí a solução da integral (3.5) fica

$$t = B(\theta - \sin \theta), \quad (3.11)$$

onde definimos $B = GM/C^{3/2}$.

Para encontrar uma relação para r , basta voltar à relação (3.7), já que $r = z^2$, e usar a relação trigonométrica (3.9) e a relação

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2},$$

para encontrar

$$r = A(1 - \cos \theta), \quad (3.12)$$

onde definimos $A = GM/C$. Assim, a solução de colapso esférico fica dada pelas equações paramétricas (3.11) e (3.12).

Quando $\cos \theta = -1$ o que implica em $\theta = \pi$, a esfera atinge o raio máximo $r_{max} = 2A$ num tempo $t_{max} = \pi B$. Quando $\cos \theta = 1$ isto implica que $\theta = 2\pi$ e, nesse caso, a esfera atinge o raio $r = 0$ num tempo $t = 2t_{max}$.

Assim, concluímos que a esfera irá começar com um raio r pequeno e expandir até atingir o valor $\theta = \pi$. Neste ponto, uma expansão máxima é alcançada atingindo um ponto de inversão (turn around) num tempo $t_{max} = \pi B$. Em seguida a esfera colapsa em $r = 0$ num tempo 2 vezes o tempo de inversão quando $\theta = 2\pi$.

3.2 Colapso esférico no universo de Einstein-De Sitter

Nesta seção vamos estimar a densidade energia de uma estrutura no regime não linear e comparar, no mesmo momento, tal densidade com aquela predita pela teoria linear. Para ocorrer o colapso esférico, a perturbação deve atingir um valor crítico para o contraste de densidade a ser estimado pela teoria linear das perturbações. Se o contraste de densidade em um certo instante de tempo for igual ou maior que o valor crítico tal região irá colapsar. [18] Um contexto simples para encontrar analiticamente uma relação que permita calcular o valor do constrate de densidade crítico, é considerar o universo de Einstein-de Sitter, onde não há energia escura ($\Omega_m = 1$). Esse é uma boa aproximação para o universo em largas escalas, ou seja, no passado bem depois da era dominada por radiação e antes que a energia escura torne-se importante.

Sabemos que na fase dominada pela matéria, como é o caso do universo de Einstein de Sitter, a densidade de energia

$$\rho_m = Da^{-3}, \quad (3.13)$$

em que D é uma constante. Usando este resultado na equação de Friedmann (2.8), fazendo $c = 1$ e realizando a integração, encontramos que o fator de escala se relaciona com o tempo de acordo com a expressão

$$a = (6\pi GD)^{1/3} t^{2/3}. \quad (3.14)$$

Como $H = \dot{a}/a$, então é direto obter o parâmetro de Hubble

$$H = \frac{2}{3t}. \quad (3.15)$$

Usando (3.14) em (3.13) encontramos que

$$\bar{\rho}_m = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (3.16)$$

Por outro lado, dentro da região esférica de raio r e massa M , a sobre-densidade de energia será

$$\rho_m = \frac{3M}{4\pi r^3}. \quad (3.17)$$

O contraste de densidade (3.1) pode ser escrito como

$$\delta_m = \frac{9}{2} GM \frac{t^2}{r^3} - 1, \quad (3.18)$$

onde usamos as expressões (3.17) e (3.16). Substituindo as equações paramétricas (3.11) e (3.12) do colapso esférico na expressão acima, obtemos o contraste de densidade não linear para a matéria

$$\delta_{NL} + 1 = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3}. \quad (3.19)$$

Para $\cos \theta = 1$ encontramos uma singularidade $\delta_{NL} \rightarrow \infty$. Isto significa que a região esférica colapsou em um ponto com $r = 0$ e densidade infinita, uma vez que a matéria dentro da região não possui pressão para suportar a queda gravitacional. É possível encontrar uma aproximação linear para a equação (3.19), que chamaremos de δ_L , em que o resultado forneça o valor do contraste que está relacionado ao δ_{NL} . Este resultado será o contraste de densidade crítico, ou, simplesmente, o valor de δ_c para ocorrer o colapso esférico no universo de Einstein-De Sitter.

Afim obter o δ_L , expandimos em série de Taylor as funções $\sin \theta$ e $\cos \theta$ que aparecem em (3.19), pois estamos olhando para a fase linear onde $\theta \ll 1$.

1. Para $\sin \theta$:

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1},$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots,$$

Logo:

$$\theta - \sin \theta = \theta - \theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

Eliminando termos superiores à segunda ordem, por serem muito pequenos, obtemos

$$\theta - \sin \theta \simeq \frac{\theta^3}{6} \left(1 - \frac{\theta^2}{20}\right). \quad (3.20)$$

2. Para $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n},$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots,$$

Logo:

$$1 - \cos \theta = 1 - 1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

Eliminando termos superiores à segunda ordem, por serem muito pequenos chegamos a

$$1 - \cos \theta \simeq \frac{\theta^2}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{12}\right). \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na equação não linear para o contraste de densidade (3.19), obtém-se que

$$\delta_L(\theta \ll 1) \simeq \frac{3\theta^2}{20}. \quad (3.22)$$

Inserindo a (3.21), considerando o primeiro termo, na equação paramétrica (3.11) então $\theta = \left(\frac{6t}{B}\right)^{1/3}$, então podemos escrever a expressão acima como

$$\delta_L(\theta \ll 1) \simeq \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3} \simeq \frac{3}{20} (6(\theta - \sin \theta))^{2/3}. \quad (3.23)$$

O tamanho máximo da esfera é atingido com $\theta = \pi$ num tempo t_{max} , neste caso pela 3.23 o contraste de densidade assume o valor $\delta_L \approx 1.06$ e o não linear $\delta_{NL} + 1 \approx 5.55$. Para $\theta = 2\pi$ a esfera colapsa em uma singularidade num tempo $2t_{max}$ quando $\delta_c \approx 1.686$. Este é o valor do δ_c necessário para a esfera colapsar no universo de Einstein de-Siiter e independe do tempo. Note que o colapso ocorre num tempo igual a duas vezes o tempo da expansão máxima (turn-around), o motivo é devido à simetria na inversão temporal da equação de movimento. Para outros modelos cosmológicos, como veremos mais adiante, os valores de δ_c dependem em geral do redshift.

3.3 Equações da hidrodinâmica perturbadas

Nesta seção pretendemos calcular o valor do δ_c para o modelo cosmológico apresentado no capítulo 2 (ver [27]). Para isso, considere um fluido perfeito de densidade ρ e pressão p , que se move com velocidade \vec{u} sobre a influência de um potencial gravitacional ϕ . As equações que descrevem o movimento deste fluido são dadas, repectivamente, pelas equações da continuidade, de Euler e de Poisson

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho \vec{u}) + p \vec{\nabla}_r \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r) \vec{u} = -\vec{\nabla}_r \phi - \frac{\vec{\nabla}_r p}{\rho + p}, \quad (3.25)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho + 3p}{2}. \quad (3.26)$$

Podemos introduzir agora perturbações na densidade de matéria, na velocidade, no campo gravitacional e na pressão do fluido

$$\rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\vec{r}, t), \quad (3.27)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = H\vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (3.28)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(\vec{r}, t), \quad (3.29)$$

$$p(\vec{r}, t) = \bar{p}(t) + \delta p(\vec{r}, t), \quad (3.30)$$

Aqui $\bar{\rho}$, \bar{p} e $\bar{\phi}$ são as soluções do background cosmológico e $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ a distância física desde a origem, sendo \vec{x} uma distância comóvel e \vec{v} a velocidade peculiar do fluido.

3.3.0.1 Equação da continuidade

Começamos introduzindo as perturbações na equação de continuidade. No modelo de colapso esférico com perfil top hat, assume-se uma distribuição uniforme de matéria, então $\delta\rho$ não varia espacialmente na casca esférica de matéria, fazendo com que $\vec{u}\vec{\nabla}_r \cdot \delta\rho = 0$. Além disso sabemos que $\vec{\nabla}_r \cdot \vec{r} = 3$ e usando a equação de continuidade para o background

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p}), \quad (3.31)$$

encontramos que (3.24) fica escrita na forma

$$\delta\dot{\rho} + 3H(\delta\rho + \delta p) + (\bar{\rho} + \bar{p})\nabla_r \cdot \vec{v} + (\delta\rho + \delta p)\vec{\nabla}_r \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.32)$$

Identificamos no fluido a matéria sem pressão e um termo de vácuo usando a decomposição

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_\Lambda, \quad (3.33)$$

$$\delta\rho = \delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda, \quad (3.34)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_\Lambda, \quad (3.35)$$

$$\delta p_\Lambda = -\delta\rho_\Lambda, \quad (3.36)$$

de modo que a equação de continuidade fica

$$\delta\dot{\rho}_m + 3H\delta\rho_m + \bar{\rho}_m\vec{\nabla}_r \cdot \vec{v} + \delta\rho_m\vec{\nabla}_r \cdot \vec{v} = -\delta\dot{\rho}_\Lambda. \quad (3.37)$$

Para escrever o operador $\vec{\nabla}_r$ em termos da coordenada comóvel \vec{x} , considere uma função qualquer que dependa das variáveis \vec{x} e \vec{r} , então:

$$\frac{dF}{dr_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial r_i}.$$

Mas,

$$\vec{x} = \frac{\vec{r}}{a} \Rightarrow x_i = \frac{r_i}{a} \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial r_i} = \frac{1}{a},$$

portanto

$$\frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ou

$$\vec{\nabla}_r = \frac{\vec{\nabla}_x}{a}. \quad (3.38)$$

Para manter um perfil esfericamente simétrico, todas as partículas contidas na distribuição homogênea de massa fluem com um campo de velocidades da forma

$$\vec{v} = \frac{\theta\vec{x}}{3}. \quad (3.39)$$

Aplicando o divergente na expressão acima, resulta que

$$\vec{\nabla}_r \cdot v = \frac{\theta}{a}, \quad (3.40)$$

que inserido na equação da continuidade, temos

$$\left(\frac{\partial \delta \rho_m}{\partial t}\right)_x + 3H \delta \rho_m + \bar{\rho}_m \frac{\theta}{a} + \delta \rho_m \frac{\theta}{a} = -\dot{\delta \rho}_\Lambda. \quad (3.41)$$

Para verificar que

$$\left(\frac{\partial \delta \rho_m}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial \delta \rho_m}{\partial t}\right)_x, \quad (3.42)$$

considere uma função que dependa de t e $\vec{r} = a\vec{x}$,

$$\left[\frac{\partial F(r_i, t)}{\partial t}\right]_x = \left[\frac{\partial F}{\partial t}\right]_r + \left[\frac{\partial F}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt}\right]_t.$$

Como

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{da}{dt} x_i,$$

então a transformação da derivada temporal é

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a}(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x), \quad (3.43)$$

que aplicada ao campo de densidade, torna-se

$$\left(\frac{\partial \delta \rho_m}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial \delta \rho_m}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a}(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x) \delta \rho_m.$$

Como $\delta \rho_m$ não varia espacialmente, por estarmos adotando um perfil top-hat, mostramos que (3.42) é válida.

Usando a equação da continuidade (2.24) e a definição do contraste de densidade (3.1) para a matéria, encontramos a forma final para a equação da continuidade perturbada

$$\dot{\delta}_m + \frac{\theta}{a}(1 + \delta_m) = -\frac{Q}{\bar{\rho}_m} \delta_m - \frac{\dot{\delta \rho}_\Lambda}{\bar{\rho}_m}. \quad (3.44)$$

As contribuições devido a interação entre as componentes escuras e a perturbação no termo de vácuo aparecem como termos fontes à esquerda da equação, ausentes no modelo Λ CDM.

3.3.1 Equação de Euler

Agora, inserindo as perturbações na equação de Euler (3.25) e lembrando que a densidade do fluido não varia espacialmente, de modo que o gradiente de pressão é zero, ficamos com

$$\dot{\vec{v}} + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r)H\vec{r} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r)\vec{v} = -\vec{\nabla}_r \delta \phi \quad (3.45)$$

Aplicando o divergente na equação acima e passando para coordenadas comóveis, ficamos com

$$\dot{\theta} + H\theta + \frac{\theta^2}{3a} = -\frac{\vec{\nabla}_x^2 \delta \phi}{a}. \quad (3.46)$$

3.3.2 Equação de Poisson

Para finalizar o conjunto de equações, utilizamos as perturbações na equação de Poisson (3.26) :

$$\vec{\nabla}_r^2 \bar{\phi} + \vec{\nabla}_r^2 \delta\phi = \frac{\bar{\rho} + \delta\rho + 3\bar{p} + 3\delta p}{2},$$

tal que

$$\vec{\nabla}_r^2 \bar{\phi} = \frac{\bar{\rho} + 3\bar{p}}{2}.$$

Então

$$\vec{\nabla}_r^2 \delta\phi = \frac{\delta\rho + 3\delta p}{2}.$$

Para o fluido matéria-vácuo encontramos

$$\vec{\nabla}_x^2 \delta\phi = \frac{a^2}{2}(\delta\rho_m - 2\delta\rho_\Lambda). \quad (3.47)$$

A partir de (3.44), (3.46) e (3.47), será possível encontrar equações diferenciais de segunda ordem para o contraste de densidade da matéria, que adequadamente resolvidas nos permitirá calcular o valor do contraste de densidade crítico δ_c .

3.4 Evolução das perturbações - $\delta\rho_\Lambda = 0$

Vamos supor que não temos flutuações na densidade de energia do vácuo o que significa dizer que a criação ou aniquilação de partículas de matéria escura se dá de maneira uniforme no espaço. Neste caso, as equações (3.44), (3.46) e (3.47) se reduzem ao par

$$\dot{\delta}_m + (1 + \delta_m)\frac{\theta}{a} = -\frac{Q}{\bar{\rho}_m}\delta_m, \quad (3.48)$$

$$\dot{\theta} + H\theta + \frac{\theta^2}{3a} = -\frac{a\bar{\rho}_m}{2}\delta_m. \quad (3.49)$$

Derivando a primeira equação com relação ao tempo e eliminando θ e $\dot{\theta}$ pelas equações acima, fica fácil obter uma equação diferencial para o contraste de densidade não linear

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_m + \left(2H + \frac{Q}{\bar{\rho}_m}\right)\dot{\delta}_m + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\bar{\rho}_m}\right) + 2H\frac{Q}{\bar{\rho}_m} - \frac{\bar{\rho}_m}{2}(1 + \delta_m)\right]\delta_m = \\ \frac{1}{3(1 + \delta_m)}\left[4\dot{\delta}_m^2 + 5\frac{Q}{\bar{\rho}_m}\delta_m\dot{\delta}_m + \left(\frac{Q}{\bar{\rho}_m}\right)^2\delta_m^2\right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Mudando o operador de d/dt para d/dz , onde $z = 1/a - 1$, obtemos que

$$\dot{\delta}_m = -(1 + z)H\delta'_m, \quad (3.51)$$

onde a linha sobre a quantidade representa derivada com relação ao redshift z . Para a derivada segunda encontramos que

$$\ddot{\delta}_m = (1 + z)^2 H^2 \delta''_m - (1 + z)(\dot{H} - H^2)\delta'_m. \quad (3.52)$$

Portanto, nossa equação diferencial não linear fica

$$\begin{aligned}
& (1+z)^2 H^2 \delta_m'' - (1+z) \left(\dot{H} + H^2 + H \frac{Q}{\bar{\rho}_m} \right) \delta_m' + \\
& \quad + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\bar{\rho}_m} \right) + 2H \frac{Q}{\bar{\rho}_m} - \frac{1}{2} \bar{\rho}_m (1 + \delta_m) \right] \delta_m = \\
& = \frac{1}{3(1 + \delta_m)} \left[4H^2 (1+z)^2 \delta_m'^2 - 5H(1+z) \frac{Q}{\bar{\rho}_m} \delta_m \delta_m' + \left(\frac{Q}{\bar{\rho}_m} \right)^2 \delta_m^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.53}$$

A equação linear é obtida fazendo $\delta \ll 1$ na equação acima, tal que

$$\begin{aligned}
& (1+z)^2 H^2 \delta_m'' - (1+z) \left(\dot{H} + H^2 + H \frac{Q}{\bar{\rho}_m} \right) \delta_m' + \\
& \quad + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\bar{\rho}_m} \right) + 2H \frac{Q}{\bar{\rho}_m} - \frac{\bar{\rho}_m}{2} \right] \delta_m = 0
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Os termos H , Q e $\bar{\rho}_m$ que surgem nas equações diferenciais acima dependem do modelo cosmológico a ser analisado. Neste trabalho serão utilizadas as soluções de base (2.18), (2.26), (2.29) e (2.30) do gás de chaplygin generalizado decomposto em matéria e vácuo, que já foi discutido no capítulo anterior.

3.5 Determinação de δ_c

Para resolver as equações diferenciais obtidas anteriormente e obter valores para δ_c , é necessário lembrar que no modelo de colapso esférico, o valor de δ em um determinado instante t de colapso, diverge, ou seja $\delta \rightarrow \infty$, pois se trata da equação que representa o crescimento não linear do contraste. Numericamente, foi considerado no programa computacional que a divergência ocorreria quando $\delta \geq 10^{12}$.

Também foram inseridas condições iniciais no programa computacional que resolvessem a equação de modo que encontrasse os valores de δ que viessem a divergir. Como a esfera é inicialmente muito pequena, essas condições foram definidas no intervalo para δ_i de 10^{-7} a 10^{-5} , que convergiram bem ao esperado.

Esse cálculo foi realizado considerando uma faixa de valores para o redshift, desde tempos antigos, de redshifts da ordem de 10^7 até valores da ordem de 10^{-5} , que é um número bem próximo de zero, representando tempos atuais.

Para cada valor inicial δ_i , o programa encontra o redshifts z_i em que a solução da equação não linear torna-se $\delta \geq 10^{12}$. Esses valores de z_i são utilizados para resolver a equação linear para cada modelo, construindo assim, uma tabela com os valores de δ_c para o colapso esférico de acordo com o redshift.

A figura 1 mostra a evolução do δ_c para alguns valores do parâmetro α . No programa as equações foram alocadas de maneira tal que o parâmetro α esteja livre para escolha,

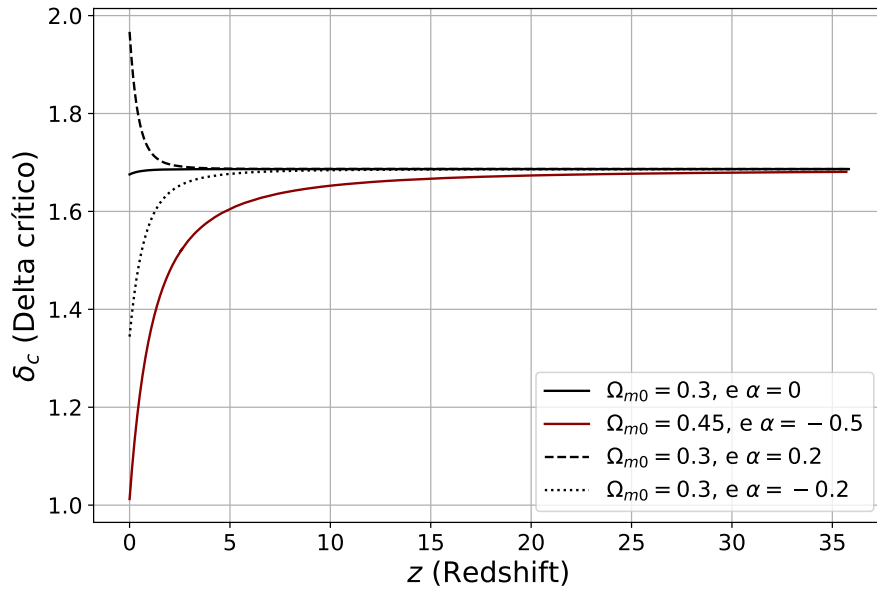


Figura 1 – Evolução do contraste de densidade crítico δ_c sem flutuações na densidade de energia do vácuo

então, aqui escolhemos $\alpha = 0$, $\alpha = 0.2$, $\alpha = -0.2$ onde utilizamos $\Omega_{m0} = 0.3$. Também escolhemos o caso com $\alpha = -0.5$ fixando-se $\Omega_{m0} = 0.45$]. Note que todos os casos tendem ao valor de $\delta_c = 1,686$ em altos z como era de se esperar. O modelo cosmológico Λ CDM ($\alpha = 0$) permanece em $\delta_c = 1,686$ na maior parte do tempo, mudando ligeiramente próximo de $z = 0$. Para $\alpha > 0$ vemos um aumento na amplitude de δ_c e para $\alpha < 0$ uma redução, cujo momento do desvio do valor de Einstein-de Sitter depende da magnitude do parâmetro α .

4 Contagem numérica de Halos de Matéria Escura

As flutuações de densidade da matéria escura, evoluem de acordo com instabilidades gravitacionais dando origem aos halos onde a matéria bariônica é atraída formando as galáxias no Universo. O objetivo aqui é obter a abundância dos halos em função da sua massa e do redshift, através de uma função de massa. Supondo que em um halo se forma uma galáxia, será equivalente a obter o número de galáxias [34, 30].

Para isso, primeiramente será preciso definir as ferramentas estatísticas que serão utilizadas: correlação de dois pontos, dispersão, espectro de potência, função janela e função transferência. Em seguida definir a função de massa e utilizar um programa de cálculo numérico para obter resultados.

4.1 Descrição estatística do campo de densidades

Como já foi discutido, pode-se estudar a formação das estruturas que são observadas hoje no céu, considerando que são originadas perturbações de densidade que evoluíram a partir das flutuações primordiais. Seguindo o modelo inflacionário do universo, essas perturbações são consideradas gaussianas e, portanto, a probabilidade de um dado ponto selecionado aleatoriamente no campo de densidade assumir um valor δ é dada por uma distribuição de probabilidade gaussiana [15, 25].

Por suposição, $\delta(\vec{x}, t)$ é um campo aleatório, homogêneo, isotrópico e sua função densidade de probabilidade é dada por uma função do tipo:

$$p(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta, \quad (4.1)$$

ou seja, é um campo aleatório gaussiano.

Como o campo de perturbação é gaussiano, por definição, $\langle \delta(\vec{x}, t) \rangle = 0$ e, portanto, não é interessante utilizar o valor médio para descrever a estatística do processo. Um processo gaussiano pode ser bem descrito utilizando a função de correlação de dois pontos.

4.1.1 A Correlação de dois pontos

A função de correlação é uma ferramenta da estatística que permite medir um excesso de aglomeração (uma grande probabilidade de encontrarmos um par de galáxias separadas, em relação a uma distribuição aleatória). Considere uma distribuição de objetos

em uma região esférica de volume comóvel V , com o centro de coordenadas coincidindo com o centro da esfera (figura 3), em que essa distribuição é uma função contínua de densidade $\rho(X)$, sendo possível definir a função de correlação espacial de dois pontos da seguinte forma (ver [29, 30, 16])

$$\xi(\vec{X}) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}') \rangle, \quad (4.2)$$

onde, \vec{X} é a distância entre os dois elementos de volume que contém os objetos correlacionados. O símbolo $\langle \dots \rangle$ representa uma média.

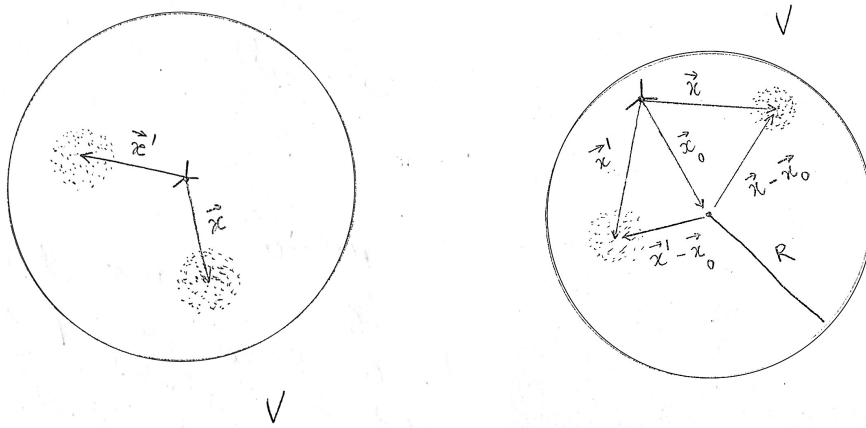


Figura 2 – À esquerda representação de uma região esférica de volume comóvel V , contendo uma distribuição de objetos, com centro do sistema de coordenadas na origem. À direita representação da mesma região esférica, porém com sistema de coordenadas fora do centro.

Uma maneira conveniente de estudar variáveis de perturbação é decompor as flutuações em modos de Fourier, porque no regime linear eles evoluem independentemente. A forma convencional da transformada de Fourier para o contraste do campo de densidades é [15]:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k, \quad (4.3)$$

e a inversa,

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int \delta_{\vec{x}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x. \quad (4.4)$$

A função $\delta(\vec{x})$ é subdividida em infinitas ondas, cada uma com número de onda comóvel \vec{k} e comprimento de onda comóvel $\lambda = 2\pi/k$. (ver[15]) A forma discreta da transformada de Fourier é dada por

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (4.5)$$

Cada componente de Fourier é um número complexo que pode ser escrito na forma $\delta_{\vec{k}} = |\delta_{\vec{k}}| e^{i\varphi_{\vec{k}}}$.

$$\langle \delta(\vec{x})\delta^*(\vec{x}') \rangle = \left\langle \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \right\rangle. \quad (4.6)$$

Considerando uma situação mais geral em que a origem do sistema de coordenadas esteja fora do centro da região esférica (figura 2), então a função de correlação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\langle \delta(\vec{x})\delta^*(\vec{x}') \rangle = \left\langle \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{x}'-\vec{x}_0)} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}_0} \right\rangle. \quad (4.7)$$

Utilizando as propriedades do delta de Kronecker

$$\delta_{\vec{k}\vec{k}'}^D = \langle e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}_0} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } \vec{k} = \vec{k}', \\ 0, & \text{if } \vec{k} \neq \vec{k}'. \end{cases} \quad (4.8)$$

Isso significa que modos com diferentes comprimentos de onda são não correlacionados, já que o campo é estatisticamente homogêneo e isotrópico. A média é realizada sobre todas as possíveis direções.

Definindo,

$$\vec{X} \equiv \vec{x} - \vec{x}_0, \quad (4.9)$$

$$\vec{Y} \equiv \vec{x}' - \vec{x}_0, \quad (4.10)$$

e sabendo que $\delta(\vec{x})$ é um campo real, fazendo com que

$$\langle \delta(\vec{x})\delta^*(\vec{x}') \rangle = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}') \rangle, \quad (4.11)$$

então

$$\langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}') \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}^D \left\langle \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{Y}} \right\rangle \quad (4.12)$$

Fazendo $\vec{k} = \vec{k}'$,

$$\langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}') \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{Y}} \rangle, \quad (4.13)$$

e tomando a média sobre todo o volume V obtemos

$$\langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}') \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}}}{V} d^3X \int \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{Y}}}{V} d^3Y. \quad (4.14)$$

Por definição,

$$P(k) = V_u \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle, \quad (4.15)$$

é o espectro de potência, com V_u sendo o volume de uma célula unitária. Então, o espectro de potência tem a dimensão de um volume [16].

A variância ou dispersão de uma variável aleatória é dada pelo quadrado do valor médio, então de maneira geral pode-se definir

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}') \rangle. \quad (4.16)$$

No limite em que $V_u \rightarrow \infty$

$$\lim_{V_u \rightarrow \infty} \frac{1}{V_u} \sum_k P(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3k, \quad (4.17)$$

e a dispersão torna-se

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3k \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}}}{V} d^3X \int \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{Y}}}{V} d^3Y. \quad (4.18)$$

As duas integrais que contém o termo exponencial resultam em um tipo de função janela, como será discutido a seguir.

4.2 A Função Janela Top hat

A função Janela é um tipo de filtro que se aplica para delimitar o espaço observado no campo de densidades. Na cosmologia existem algumas funções janela que são utilizadas, mas aqui o que interessa é o perfil top hat, mantendo um perfil esfericamente simétrico [16].

Pode-se encontrar a função janela top hat, expandindo o termo $e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}}$ da equação (4.18) em harmônicos esféricos

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} = \sum_{l,m} j_l(kX) i^l (2l+1) P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (4.19)$$

onde $j_l(kX)$ são funções de Bessel e $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ os polinômios de Legendre.

Considerando uma simetria rotacional $l = 0$ e $m = 0$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} = j_0(kX) P_0^0(\cos\theta), \quad (4.20)$$

mas

$$j_0(kX) = \frac{\sin(kX)}{kX}, \quad (4.21)$$

e

$$P_0^0(\cos\theta) = 1. \quad (4.22)$$

Então

$$\frac{1}{V} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} d^3X = \frac{1}{V} \int \frac{\sin(kX)}{kX} d^3X. \quad (4.23)$$

Resolvendo em coordenadas esféricas

$$\frac{1}{V} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} d^3X = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R X^2 \frac{\sin(kX)}{kX} dX \quad (4.24)$$

Integrando por partes obtemos

$$\frac{1}{V} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} d^3X = \frac{4\pi}{V} \left[\frac{1}{k^3} (\sin(kR) - kR \cos(kR)) \right], \quad (4.25)$$

com $V = 4\pi R^3/3$, então

$$\frac{1}{V} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{X}} d^3X = \frac{3(\sin(kR) - kR \cos(kR))}{(kR)^3}. \quad (4.26)$$

De forma análoga, para $m = 0$ e $l = 0$, a integral em Y resulta em

$$\frac{1}{V} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{Y}} d^3Y = \frac{3(\sin(kR) - kR \cos(kR))}{(kR)^3}. \quad (4.27)$$

Por definição,

$$W(kR) \equiv \frac{3(\sin(kR) - kR \cos(kR))}{(kR)^3}, \quad (4.28)$$

é a função janela top hat, que está representada na figura 3.

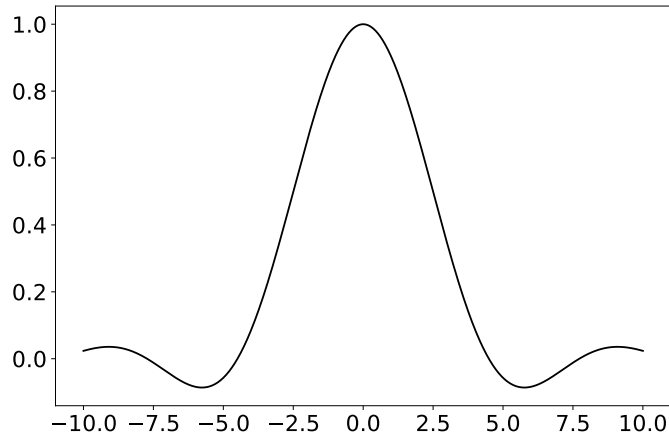


Figura 3 – Função janela Top hat

Introduzindo na equação (4.18), a dispersão fica sendo dada em termos do espectro de potência e da função janela da seguinte forma:

$$\sigma_R^2 = \langle \delta^2(k, R) \rangle = \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) W^2(kR). \quad (4.29)$$

4.3 O Espectro de Potência

Uma ferramenta muito utilizada para descrever a distribuição de matéria no universo, é o espectro de potência da matéria, que é construído a partir das flutuações de densidade. Como já foi apresentado anteriormente, no espaço das funções de Fourier essas flutuações podem ser representadas como a superposição de ondas planas, onde $\delta_{\vec{k}}$ são os modos de Fourier, em que \vec{k} é o número de onda, e o espectro de potência é definido como $P(k) = V_u \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle$ [16]. Para saber a origem do espectro que é observado hoje,

é necessário entender como se comportam os comprimentos de onda das flutuações no Universo primordial, dados pela relação $\lambda_f = (\frac{2\pi}{k})a$, onde k é o número de onda comóvel e a é o fator de escala.

De acordo com a teoria, o universo passou por uma fase dominada por radiação, seguida por uma fase de dominância da matéria, e hoje sendo a época onde a energia escura domina. No início o universo sofreu uma expansão acelerada (inflação), e nesse período comprimentos de onda físicos deixaram o raio de Hubble devido a condições iniciais relacionadas às flutuações quânticas ainda dentro do horizonte. Neste cenário ocorreu o congelamento das flutuações da métrica $\Phi(k, t_i)$ (potencial gravitacional primordial), que caracteriza o chamado espectro de potência inicial. O espectro primordial de Φ gerado durante a inflação é $\langle \Phi^2 \rangle \propto \frac{H^2}{k^3}$, onde o parâmetro de Hubble é dado no instante de saída do horizonte, e o espectro de potência inicial para a densidade de matéria que corresponde a esse potencial invariante de escala é dado por $P(k) \propto k$ [20]. Após a inflação o comprimento de onda físico entra novamente no horizonte, então as perturbações passam a evoluir novamente e seu crescimento depende se a reentrada ocorreu na era dominada por radiação ou na era dominada matéria. Portanto a forma do espectro de potência dependerá principalmente do momento de equilíbrio entre radiação e matéria [20]. A escala k que separa os modos na transição radiação-matéria é: $k_{eq} = a_{eq}H_{eq}$ que é dado por $k_{eq} = H_0\Omega_{m0}(2/\Omega_{\gamma 0})^{0.5}Mpc^{-1}$, que aplicando os dados observacionais resulta em $k_{eq} = 0.0625\Omega_{m0}h^2Mpc^{-1}$ [16]. Na curva que representa o espectro linear da matéria (figura 5), o momento de inversão é a região que corresponde aos modos que entram no horizonte na época de transição radiação-matéria (igualdade) [31].

Como o espectro primordial gerado na inflação se modifica após a travessia dos modos no horizonte, dependendo da época de entrada, é introduzida uma função transferência. Neste trabalho foi utilizada a função transferência BBKS [32, 16, 27], que é dada resolvendo as equações de Boltzmann-Einstein [22],

$$T(x) = \frac{\ln[1 + 0.171x]}{0.171x} [1 + 0.284x + (1.18x)^2 + (0.399x)^3 + (0.490x)^4]^{-0.25}. \quad (4.30)$$

onde por definição:

$$x = \frac{k}{k_{eq}} \quad (4.31)$$

e,

$$k_{eq} = 0.0625\Omega_{m0}^{\frac{1}{1+\alpha}} h^2 Mpc^{-1}. \quad (4.32)$$

onde, para $\alpha = 0$, temos o k_{eq} encontrado mais acima que corresponde ao modelo padrão.

4.3.1 O Espectro de potência $P(k) \propto k^n$

Supondo o espectro de potência que segue uma lei de potência do tipo $P(k) = A_s k^n$, pode-se obter analiticamente a evolução das flutuações de σ_R^2 com a escala R , onde A_s é

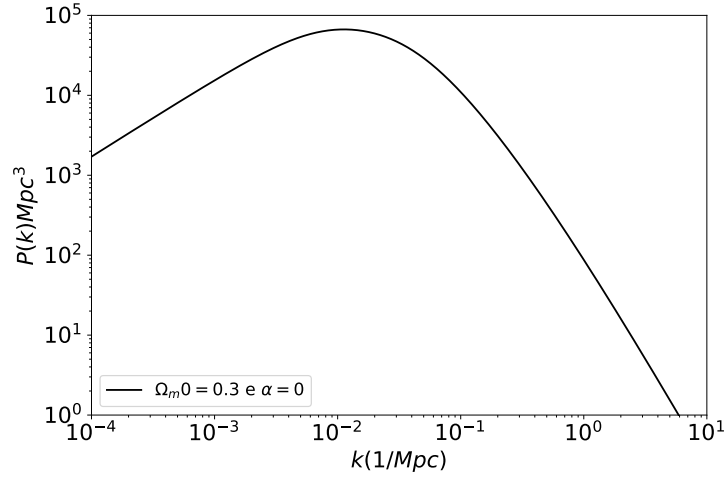


Figura 4 – Espectro de potência para $\alpha = 0$, com $\Omega_{m0} = 0.3$ que corresponde ao modelo padrão

uma constante. Em coordenadas esféricas

$$\sigma_R^2 = \frac{A_s}{2\pi^2} \int_0^\infty d^3k^{n+2} |W(kR)|^2 dk. \quad (4.33)$$

Separando a integral em duas partes, pode-se analisar o comportamento de σ_R considerando grandes e pequenas escalas

$$\sigma_R^2 \simeq \frac{A_s}{2\pi^2} \int_0^{1/R} k^{n+2} W^2 dk + \frac{A_s}{2\pi^2} \int_{1/R}^\infty k^{n+2} W^2 dk. \quad (4.34)$$

Sabendo que para $kR \leq 1$, $W(kR \leq 1) \approx 1$, a primeira integral resulta em

$$\frac{A_s}{2\pi^2(n+3)} k^{n+3} \Big|_0^{1/R} = \frac{A}{2\pi^2(n+3)} \left(\frac{1}{R}\right)^{n+3}, \quad (4.35)$$

onde há uma restrição $n \neq -3$ no denominador. Assim temos que ter também que $n > -3$ para não ocorrer uma divergência na dispersão quando consideramos $k \rightarrow 0$, que é o limite de grandes escalas de comprimento.

Avaliando a função janela, é possível ver também que $|W(kR)|$ descrece muito rápido para $kR \gg 1$, o que resulta em $|W(kR)| = \left(\frac{1}{kR}\right)^2$ para $kR \gg 1$.

A segunda integral da equação (4.34) pode ser então dividida em duas partes

$$\int_{1/R}^\infty k^{n+2} W^2 dk = \int_{1/R}^{kR \gg 1/R} k^{n+2} W^2 dk + \int_{kR \gg 1/R}^\infty k^{n+2} \left(\frac{1}{kR}\right)^4 dk. \quad (4.36)$$

Então, resolvendo a segunda integral acima à direita obtém-se

$$\frac{1}{R^4} \frac{k^{n-1}}{n-1} \Big|_{kR}^\infty. \quad (4.37)$$

Aqui conclui-se que existe a restrição $n \neq -1$, além de $n - 1 > 0$ para que não ocorra divergência quando tomamos k grande.

Resumindo, para não ocorrer divergência na amplitude das perturbações para grandes valores de k (pequenas escalas de comprimento) deve-se usar a restrição $n < 1$ e para pequenos valores de k (grandes comprimentos) $n > -3$. De maneira que a integral (4.34) resulta em

$$\sigma_R^2 \approx \frac{A_s}{2\pi^2} \frac{R^{-(n+3)}}{n+3} + \frac{A_s}{2\pi^2} \frac{R^{-4} k_R^{n-1}}{n-1} + \frac{A_s}{2\pi^2} \int_{1/R}^{k_R} k^{n+2} |W|^2, \quad (4.38)$$

onde $-3 < n < 1$ com a primeira parcela dominante sobre as outras duas.

A constante de normalização A_s é encontrada considerando-se flutuações de densidade dentro de uma esfera de raio $R = 8Mpch^{-1}$, tal que

$$\sigma_8^2 = \frac{A_s}{2\pi^2(n+3)} \left(\frac{1}{R_8} \right)^{n+3}. \quad (4.39)$$

A quantidade σ_8 , é dada por σ_{8g}/b , onde b é um bias. Se $b=1$ então não há bias, o que indica que a distribuição de matéria escura e de galáxias é similar (como é considerado neste trabalho). Se $b>1$ indica que as galáxias se aglomeram mais que os halos de matéria escura.

Substituindo então A_s em σ_R ficamos com

$$\sigma_R \approx \sigma_8 \left(\frac{R_8}{R} \right)^{\frac{n+3}{2}}. \quad (4.40)$$

com $n > -3$

A relação entre o raio R da esfera e a massa M contida dentro da região é

$$R = \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/3} M^{1/3}, \quad (4.41)$$

com

$$\frac{R_8}{R} = \left(\frac{M_8}{M} \right)^{1/3}. \quad (4.42)$$

onde M_8 é a massa contida em uma região esférica de raio 8Mpc. Definindo $\omega \equiv (n+3)/6$, encontramos a dispersão na forma

$$\sigma_R \propto M^{-\omega} \propto \delta. \quad (4.43)$$

Este simples resultado indica que as regiões mais massivas são menos densas, e vice-versa. Isto significa que as estruturas menores e menos massivas atingem, em algum momento, o valor da densidade crítica δ_c necessária para ocorrer o colapso e, portanto, se formam antes que as estruturas maiores e mais massivas.

4.4 A Função de Massa - Teoria de Press-Schechter

Supondo que uma flutuação de matéria seja densa o suficiente para colapsar e formar um halo de matéria escura. Então como encontrar a densidade numérica de halos

(número de halos colapsados por volume) em um dado instante do universo? O formalismo de Press e Schechter permite determinar a densidade numérica dos halos, partindo do postulado de que a probabilidade de colapso pode ser calculada examinando a amplitude das flutuações de massa nessa escala. [33, 38]

Considere uma região de volume V , onde cada volume V_m , representa locais onde se formaram halos de matéria escura (figura 5). A densidade comóvel média de matéria avaliada dentro da região V_m é

$$\rho_{mc} = \frac{M}{V_m}. \quad (4.44)$$

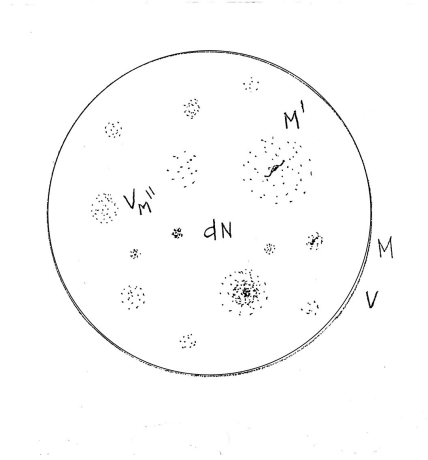


Figura 5 – Região esférica de volume V contendo objetos colapsados

Para uma dada escala R , a fração dos objetos que colapsaram é dada por

$$dNV_m = dpV, \quad (4.45)$$

onde à esquerda temos o número de objetos dN com volume V_m que estão distribuídos com uma fração dp do volume V .

A densidade do número de halos contidos nesse volume V é definida como

$$dn \equiv \frac{dN}{V}, \quad (4.46)$$

de modo que a expressão (4.45) fica

$$dn \equiv \frac{\rho_{mc}}{M} dp, \quad (4.47)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\rho_{mc}}{M} \frac{\partial p}{\partial \sigma_R} \frac{\partial \sigma_R}{\partial M}. \quad (4.48)$$

Considerando por hipótese que o campo de densidade é gaussiano com

$$\langle \delta \rangle = 0, \quad \sigma_R^2 = \langle \delta \rangle^2, \quad (4.49)$$

a função distribuição será dada por

$$p(\sigma_R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \int_{\delta_c}^{\infty} e^{-\delta^2/2\sigma_R^2} d\delta. \quad (4.50)$$

Fazendo a substituição $x = \delta/\sigma_R\sqrt{2}$, em que $\sqrt{2}\sigma_R dx = d\delta$, a integral torna-se

$$p(\sigma_R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \int_{x_c}^{\infty} e^{-x^2} \sqrt{2}\sigma_R dx. \quad (4.51)$$

Como o termo

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_R} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma_R}, \quad (4.52)$$

logo encontramos

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\sigma_R^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.53)$$

onde,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (4.54)$$

Então a abundância de halos de matéria escura será dada por:

$$\frac{dn}{dM} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_{mc}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma_R^2} e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_R^2}} \frac{d\sigma_R}{dM}. \quad (4.55)$$

Somente regiões inicialmente com densidades $\delta \geq \delta_c$ podem colapsar formando os halos de matéria escura. Entretanto, como a dispersão $\sigma \propto \delta$ decresce com aumento de tamanho da região esférica, aqueles halos já contabilizados devem fazer parte de halos maiores e menos densos. Press e Schechter argumentaram que o material menos denso seriam eventualmente atraídos gravitacionalmente e agrupados pelos halos colapsados dobrando suas massas sem mudar a forma da função de massa. Foi então introduzido um fator 2 na equação acima, logo a função de massa fica

$$\frac{dn}{dM} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_{mc}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma_R^2} e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_R^2}} \frac{d\sigma_R}{dM}. \quad (4.56)$$

4.4.1 Função de Sheth-Tormen

O formalismo Press-Schechter, permite fazer previsões sobre a evolução da função de massa de objetos colapsados, supondo que esses objetos colapsam esféricamente e que as flutuações de densidade eram gaussianas. Todavia existe uma discrepância entre teoria e a simulação, que pode ser reduzida de maneira relevante se for feita a suposição de que o colapso seja elipsoidal, em vez de um colapso esférico [36].

Para obter melhor aproximação em relação às simulações, neste trabalho será usada a função de Sheth e Tormen para o colapso elipsoidal [37] e halo massa

$$f(\sigma) = A \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \left[1 + \left(\frac{\sigma^2}{q\delta_c^2} \right)^p \right] \frac{\delta_c}{\sigma} \exp \left[-\frac{\delta_c^2 q}{2\sigma^2} \right]. \quad (4.57)$$

A constante A é obtida pela normalização

$$A = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \left[1 + \left(\frac{\sigma^2}{q\delta_c^2} \right)^p \right]^{\frac{\delta_c}{\sigma}} \exp\left[-\frac{\delta_c^2 q}{2\sigma^2}\right] d\sigma}, \quad (4.58)$$

com a função de massa dada por

$$\frac{dn}{dM} = -\frac{\rho_{mc}}{M} \frac{d \ln \sigma}{dM} f(\sigma). \quad (4.59)$$

As constantes q and p são determinadas por um ajuste com os resultados das simulações de N-corpos. Nós iremos usar os valores encontrados por Sheth and Tormen, a saber $q=0.707$ and $p=0.3$. O caso Press-Schechter é recuperado para $q=1$ and $p=0$.

4.5 Contagem numérica - $\delta\rho_\Lambda = 0$

Para o cálculo numérico da abundância de halos foram utilizadas as seguintes relações (como em [27]): O raio comóvel da esfera:

$$R(z, M) = \left[\frac{3M}{4\pi\rho_m^c(z)} \right]^{1/3} = \left[\frac{3}{4\pi \cdot 2.78 \cdot 10^{11} \cdot \Omega_{m0}\beta(z)} \frac{M}{M_\odot h^2} \right]^{1/3} \approx \left[\frac{8.6 \cdot 10^{-13} Mh}{\Omega_{m0}\beta(z) M_\odot} \right]^{1/3} \frac{Mpc}{h}. \quad (4.60)$$

Função janela top-hat:

$$W(kR) = \frac{3[\sin(kR) - (kR)\cos(kR)]}{(kR)^3}. \quad (4.61)$$

Definindo

$$x = k/k_{eq}, \quad (4.62)$$

onde

$$k_{eq} = 0.0625\Omega_{m0}^{\frac{1}{1+\alpha}} h^2 Mpc^{-1}, \quad (4.63)$$

A função transferência BBKS:

$$T(x) = \frac{\ln[1 + 0.171x]}{0.171x} [1 + 0.284x + (1.18x)^2 + (0.399x)^3 + (0.490x)^4]^{-0.25}. \quad (4.64)$$

O espectro de potência linear:

$$P(k, z) = A_0 k^{n_s} [T(x)]^2 \left[\frac{\delta(z)}{\delta(0)} \right]^2, \quad (4.65)$$

e a dispersão :

$$\sigma^2 = \frac{A_0}{2\pi^2} \int_0^\infty k^{n_s+2} [T(x)]^2 \left[\frac{\delta(z)}{\delta(0)} \right]^2 [W(kR)]^2 dk. \quad (4.66)$$

onde A_0 é obtido fazendo

$$A_0 = \frac{2\pi^2 \sigma_8^2(0)}{\int_0^\infty k^{n_s+2} [T(x)]^2 [W(8k)]^2 dk}. \quad (4.67)$$

Usando a função de massa com formalismo Sheth-tormen, foi possível plotar o gráfico $\log_{10}[(dn/dM) \cdot M \cdot h^3 \cdot (\ln 10)]$ versus $\log_{10}(Mh/(M_{\odot}))$ como no artigo [27]. Aqui foi utilizado que

$$\frac{dn}{dM} = \frac{dn}{d\log_{10}M} \cdot \frac{d\log_{10}M}{dM} = \frac{dn}{d\log_{10}M} \cdot \frac{1}{M \ln 10}, \quad (4.68)$$

ou

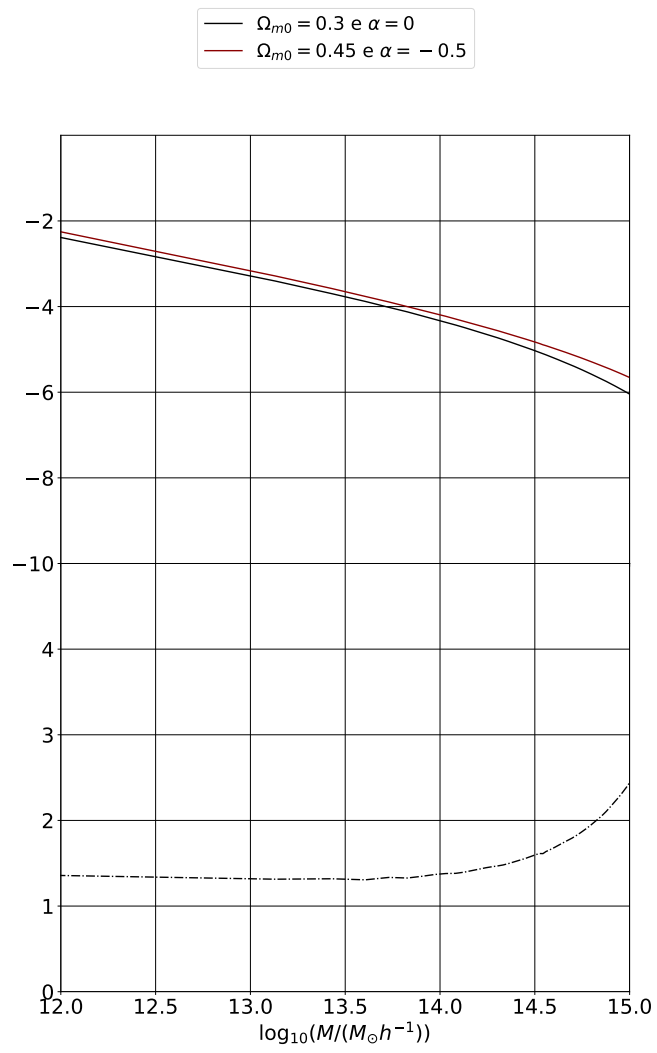
$$\log_{10} \left[M \cdot (\ln 10) \cdot \frac{dn}{dM} \cdot \frac{h^3}{Mpc^3} \right] = \log_{10} \left[\frac{dn}{d\log_{10}M} \cdot \frac{h^3}{Mpc^3} \right], \quad (4.69)$$

Valores $\sigma_8(0) = 0.83$, $p = 0.3$, $q = 0.707$, $n_s = 0.971$, $h = 0.67$.

Construímos as curvas da figura 6, para o modelo Λ CDM, e para o modelo com vácuo dinâmico que equivale a $\alpha = -0.5$, utilizando o parâmetro de densidade $\Omega_{m0} = 0.45$. É possível verificar que ambos os modelos apresentam aproximadamente a mesma densidade numérica, considerando as massas até valores próximos de $10^{14}M_{\odot}$ e a diferença entre as curvas aumenta para massas superiores a $10^{14}M_{\odot}$. Nesta faixa de valores a curva para $\alpha = -0.5$ mostra um excesso de contagem quando comparado ao Λ CDM, devido à interação onde há criação homogênea de matéria escura às custas do decaimento do vácuo.

Estes resultados, coincidem com os resultados obtidos no artigo [27], onde também foram feitas as curvas para o mesmo modelo com interação. No entanto, neste trabalho foi possível ampliar a análise para outros valores de α onde testamos os valores $\alpha = 0.2$ e $\alpha = -0.2$, fixando o parâmetro $\Omega_{m0} = 0.3$. A figura 7, que contém os resultados, mostra que a contagem numérica é aproximadamente a mesma considerando as massas até $10^{13.5}M_{\odot}$. Vemos um ligeiro excesso para $\alpha = 0.2$ e um déficit para $\alpha = -0.2$ na faixa de grandes massas.

A partir da relação para o espectro de potência linear (4.65), utilizando o mesmo programa, foi possível obter as curvas da figura 8, comparando o modelo padrão com o modelo de interação, e com outros valores de α . Nota-se na figura 10.(a) que há perda de potência no espectro quando comparado com o modelo padrão, que pode ser causado por conta da produção homogênea de matéria, reduzindo a potência (ver [20]). Na figura 10.(b) para o valor de α positivo há um aumento de potência, o que pode ocorrer devido à aniquilação de matéria escura (α positivo), intensificando a potência observada.

Figura 6 – Abundância dos halos de matéria escura, com $\delta\rho_\Lambda = 0$, para $z = 0$

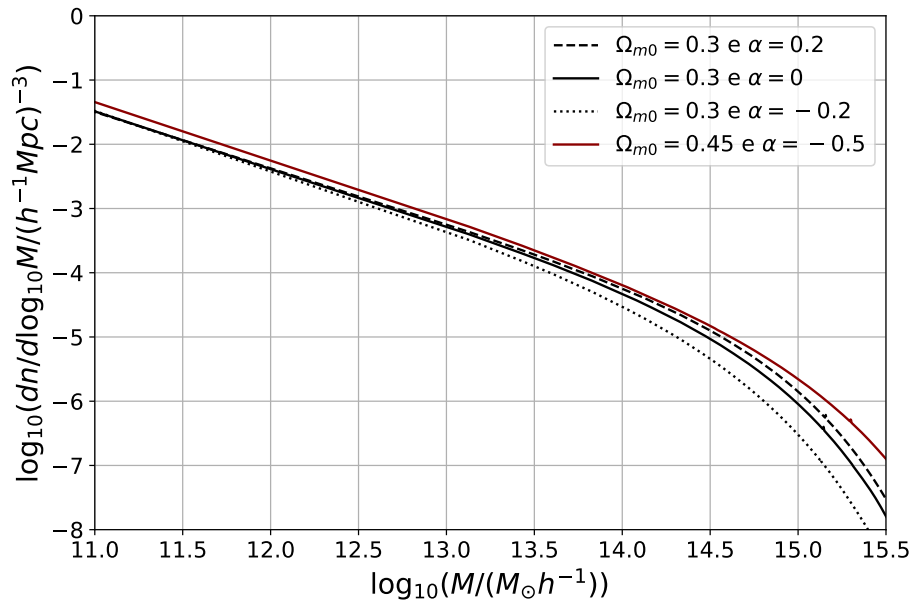
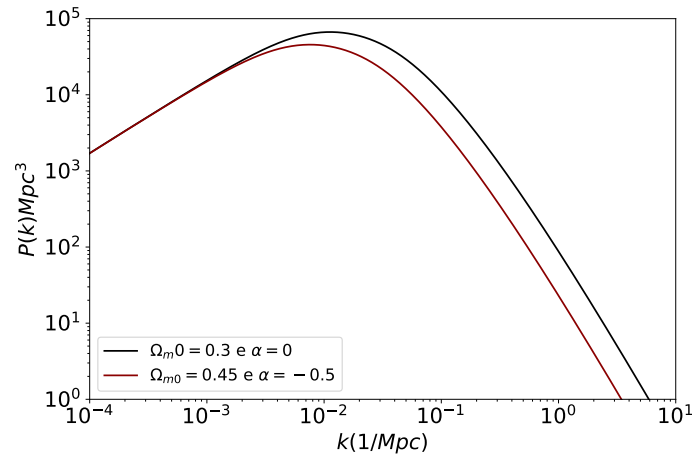
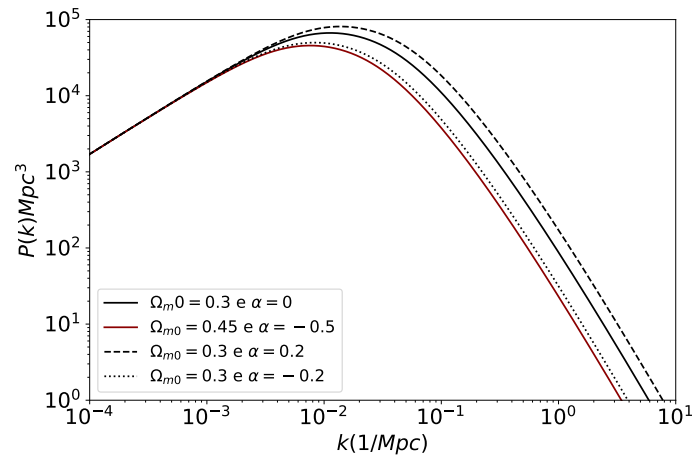


Figura 7 – Abundância dos halos de matéria escura, com $\delta\rho_{\Lambda} = 0$, para $z = 0$.



(a)



(b)

Figura 8 – Espectro de potência linear da matéria. Na figura(a) Λ CDM e o $\Lambda(t)$ CDM e na figura(b) Comparação do Λ CDM com alguns valores de α

5 Teorema de virial

Para ocorrer colapso gravitacional, primeiramente uma flutuação de densidade evolui se expandindo até atingir um raio máximo. Nesse instante, a energia cinética da matéria possui valor igual a zero, então, por atração gravitacional a matéria passa a se aglomerar. No colapso o contraste de densidade tende a um valor infinito, matematicamente, mas fisicamente não ocorre singularidade, mas sim a formação de um halo de matéria escura, e são nesses halos que a matéria bariônica forma galáxias. Isso ocorre porque enquanto por atração a matéria está se aglomerando, há um aumento de pressão para as partículas provocando aumento na energia cinética que se opõe à atração gravitacional, causando um período de oscilação até que a estrutura se estabilize em um tamanho, definido pelo raio de virial. [40]

Afim de generalizar o teorema de virial para modelos cosmológicos em que existe interação entre matéria escura e vácuo, considere as equações de continuidade e de Euler com perfil top-hat,

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho_m \vec{u}) = -\frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial t}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r) \vec{u} = -\vec{\nabla}_r \phi. \quad (5.2)$$

Multiplicando a primeira por \vec{u} e a segunda por ρ_m , e somando-as obtemos

$$\frac{\partial(\rho_m \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}_r(\rho_m \vec{u}^2) = -\vec{u} \frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial t} - \rho_m \vec{\nabla}_r \phi. \quad (5.3)$$

Agora multiplicamos a equação acima pela coordenada comóvel \vec{x} e a integramos no volume comóvel d^3x para encontrar

$$\int \vec{x} \cdot \frac{\partial(\rho_m \vec{u})}{\partial t} d^3x = - \int \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_r(\rho_m \vec{u}^2) d^3x - \int (\vec{x} \cdot \vec{u}) \frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial t} d^3x - \int \rho_m (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_r \phi) d^3x. \quad (5.4)$$

Deve-se notar que a derivada temporal é realizada sobre a coordenada física, e que faremos a mudança $\vec{\nabla}_r \rightarrow \vec{\nabla}_x/a$. A segunda integral a direita é a contribuição do vácuo dinâmico que poderá aglomerar ou ser homogênea. Para os modelos cosmológicos sem interação, e claro para o modelo Λ CDM, tal termo deverá ser igual a zero.

A primeira integral à direita pode ser escrita como

$$\int \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x(\rho_m \vec{u}^2) d^3x = \int \vec{\nabla}_x \cdot (\vec{x} \rho_m \vec{u}^2) d^3x - \int (\vec{\nabla}_x \cdot \vec{x}) \rho_m \vec{u}^2 d^3x = \oint_S (\rho_m \vec{u}^2) \vec{x} \cdot d\vec{S} - \int (\vec{\nabla}_x \cdot \vec{x}) \rho_m \vec{u}^2 d^3x, \quad (5.5)$$

onde utilizamos o teorema da divergência na segunda igualdade. A integral sobre a superfície fechada representa o fluxo de partículas sobre a superfície S , e assumimos que

tal fluxo seja nulo. Isto significa dizer que somente a massa interna à superfície S contribui para a energia do sistema. Portanto, a integral acima fica

$$-\int \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_r(\rho_m \vec{u}^2) d^3x = \int \rho_m \vec{u}^2 d^3x. \quad (5.6)$$

Definimos a energia cinética E_c e a energia potencial W_m da matéria, respectivamente como

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho_m \vec{u}^2 d^3x, \quad (5.7)$$

$$W_m = - \int \rho_m (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \phi) d^3x, \quad (5.8)$$

de modo que a equação (5.4) fica escrita como

$$\int \vec{x} \cdot \frac{\partial(\rho_m \vec{u})}{\partial t} d^3x + \int (\vec{x} \cdot \vec{u}) \frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial t} d^3x = \frac{2E_c}{a} + \frac{W_m}{a}. \quad (5.9)$$

Vamos definir também o momento de inércia da matéria e do vácuo como

$$I_m = \int \rho_m x^2 d^3x, \quad (5.10)$$

$$I_\Lambda = \int \rho_\Lambda x^2 d^3x, \quad (5.11)$$

de modo que a derivada temporal do momento de inércia da matéria é

$$\frac{\partial I_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \rho_m x^2 d^3x \right) = \int \frac{\partial \rho_m}{\partial t} x^2 d^3x. \quad (5.12)$$

Usando a equação da continuidade (5.1) encontramos que

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{a} \int \vec{\nabla}_x \cdot (\rho_m \vec{u}) x^2 d^3x, \quad (5.13)$$

onde $I = I_M + I_V$ é o momento de inércia do sistema. A integral à direita de (5.13) torna-se

$$\int \vec{\nabla}_x \cdot (\rho_m \vec{u}) x^2 d^3x = \oint_S (\rho_m x^2) \vec{u} \cdot d\vec{S} - 2 \int \vec{x} \cdot (\rho_m \vec{u}) d^3x = -2 \int \vec{x} \cdot (\rho_m \vec{u}) d^3x, \quad (5.14)$$

de modo que a taxa de mudança do momento de inércia do sistema com o tempo é

$$\frac{a}{2} \frac{\partial I}{\partial t} = \int \vec{x} \cdot (\rho_m \vec{u}) d^3x, \quad (5.15)$$

e a sua derivada é

$$\frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + H \frac{\partial I}{\partial t} \right) = \int \vec{x} \cdot \frac{\partial(\rho_m \vec{u})}{\partial t} d^3x. \quad (5.16)$$

Agora considere a derivada temporal total da quantidade $\rho_\Lambda \vec{u}$, ou seja,

$$\frac{d(\rho_\Lambda \vec{u})}{dt} = \vec{u} \frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial t} + \rho_\Lambda \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad (5.17)$$

onde a equação Euler (5.2) pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{a}\vec{\nabla}\phi. \quad (5.18)$$

Multiplicando a equação (5.17) por \vec{x} e integrando no volume d^3x obtemos

$$\int (\vec{x} \cdot \vec{u}) \frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial t} d^3x = \frac{d}{dt} \int \rho_\Lambda (\vec{u} \cdot \vec{x}) d^3x + \frac{1}{a} \int \rho_\Lambda (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \phi) d^3x. \quad (5.19)$$

Vamos definir

$$W_\Lambda = - \int \rho_\Lambda (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \phi) d^3x. \quad (5.20)$$

Logo, usando (5.20), (5.19) e (5.13) na equação (5.9) encontramos

$$\frac{a}{2} \left(\frac{d^2 I}{dt^2} + H \frac{dI}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left[\int \vec{x} \cdot (\rho_\Lambda \vec{u}) d^3x \right] = \frac{1}{a} (2E_c + W_m + W_\Lambda). \quad (5.21)$$

O próximo passo será usar $\rho_\Lambda = \rho - \rho_m$ na segunda parcela à esquerda da equação acima

$$\frac{a}{2} \left(\frac{d^2 I}{dt^2} + H \frac{dI}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left[\int \vec{x} \cdot (\rho \vec{u}) d^3x \right] - \frac{d}{dt} \left[\int \vec{x} \cdot (\rho_m \vec{u}) d^3x \right] = \frac{1}{a} (2E_c + W_m + W_\Lambda). \quad (5.22)$$

A terceira parcela do lado esquerdo cancela a primeira parcela quando usamos (5.16). Finalmente, usando a equação da continuidade (5.1) e as equações (5.13)-(5.16) na equação (5.22), encontramos

$$\frac{a^2}{2} \left(\frac{d^2 I}{dt^2} + H \frac{dI}{dt} \right) = (2E_c + W_m + W_\Lambda). \quad (5.23)$$

Quando o momento de inércia do sistema é constante, dizemos que o sistema atingiu o equilíbrio resultando em uma estrutura gravitacionalmente estável com um certo tamanho e densidade. Neste caso a energia potencial converte-se em energia cinética na virialização, levando ao teorema de virial

$$E_{c,v} = -\frac{1}{2}(W_{m,v} + W_{\Lambda,v}). \quad (5.24)$$

Portanto, mostramos que o teorema de virial dada pela equação (5.24) é válida para qualquer modelo com interação no setor escuro, supondo densidade de energia com perfil top-hat.

5.1 Energia Potencial

Integrando a equação de Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho_m - 2\rho_\Lambda)$ no volume da esfera, encontramos

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{4\pi G}{3}(\rho_m - 2\rho_\Lambda)\vec{r}. \quad (5.25)$$

Definimos a energia potencial matéria-matéria, matéria-vácuo e vácuo-vácuo respectivamente como

$$U_{mm} = -\frac{16\pi^2 G}{3} \int_0^R \rho_m^2 r^4 dr = -\frac{16\pi^2 G}{3} \rho_m^2 R^5, \quad (5.26)$$

$$U_{\Lambda,m} = -\frac{16\pi^2 G}{3} \int_0^R \rho_m \rho_\Lambda r^4 dr = -\frac{16\pi^2 G}{3} \rho_m \rho_\Lambda R^5, \quad (5.27)$$

$$U_{\Lambda\Lambda} = -\frac{16\pi^2 G}{3} \int_0^R \rho_\Lambda^2 r^4 dr = -\frac{16\pi^2 G}{3} \rho_\Lambda^2 R^5, \quad (5.28)$$

Usando (5.25) nas expressões (5.20) e (5.8) obtemos

$$W_m = U_{mm} - 2U_{\Lambda m}, \quad (5.29)$$

$$W_\Lambda = U_{\Lambda m} - 2U_{\Lambda\Lambda}. \quad (5.30)$$

5.2 Modelo Λ CDM

Para o modelo com constante cosmológica a contribuição $W_{\Lambda,v}$ deve ser desconsiderada em (5.24), de modo que o teorema de virial fica dado por

$$E_{c,v} = -\frac{U_{mm,v}}{2} + U_{\Lambda m,v}. \quad (5.31)$$

Na presença de uma constante cosmológica a energia se conserva nos momentos em que a esfera atinge raio máximo R_{max} e a virialização com raio R_v [40],

$$(U_{mm} + U_{\Lambda m})_{max} = (E_c + U_{mm} + U_{\Lambda m})_v. \quad (5.32)$$

Combinando (5.31) e (5.32) e usando (5.26) e (5.27) encontramos

$$\rho_{m,max}^2 \left(1 + \frac{\rho_{\Lambda,max}}{\rho_{m,max}}\right) R_{max}^5 = \rho_{m,v}^2 \left(\frac{1}{2} + 2\frac{\rho_{\Lambda,v}}{\rho_{m,v}}\right) R_v^5. \quad (5.33)$$

Dentro da esfera a densidade de matéria é dada por

$$\rho_m(R) = \rho_{m0} R^{-3}. \quad (5.34)$$

que segue a mesma escala da densidade de matéria do background $\bar{\rho}_m(a) \propto a^{-3}$.

Definimos a razão entre a constante cosmológica e a densidade de matéria dentro da esfera no momento de tamanho máximo como

$$q = \left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_m}\right)_{max} = \left(\frac{1 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}\right) \frac{(1 + z_{max})^3}{\xi(z_{max})}, \quad (5.35)$$

onde

$$\xi(z_{max}) = \delta_{max} + 1 = \frac{\rho_m(R_{max})}{\bar{\rho}_m(z_{max})}. \quad (5.36)$$

Vamos também definir

$$y = \frac{R_v}{R_{max}}, \quad (5.37)$$

e tomar $\rho_{\Lambda,v}$ como sendo o mesmo que $\rho_{\Lambda,max}$, já que a densidade de energia da constante cosmológica é uma constante.

Desta forma, a equação (5.33) fica escrita como [39],

$$(1 + q)y - 2qy^3 = \frac{1}{2}. \quad (5.38)$$

O valor para o universo de Einstein de Sitter é obtido quando $q = 0$, ou seja, o raio da esfera na virialização será metade do raio máximo.

Para encontrar y como função de q dentro do modelo Λ CDM, encontraremos $\xi(z_{max})$ e z_{max} seguindo o seguinte procedimento [41], [42]: a quantidade $(\delta_m + 1)/a^3$ dada pela expressão

$$\frac{\delta_m + 1}{a^3} = \frac{3}{4\pi} \frac{M}{\rho_{m0} R^3(z)}, \quad (5.39)$$

terá valor mínimo quando a esfera atingir seu tamanho máximo em um determinado redshift z_{max} , onde δ_m é solução da equação não linear (3.54). Portanto, usando as condições iniciais do colapso esférico (condições iniciais já implementadas para a obtenção de δ_c e dn/dM) resolvemos (3.54) para $\alpha = 0$, encontramos o momento z_{max} que minimiza a função $(\delta + 1)/a^3$ e de posse destes valores, encontramos $\xi(z_{max}) = \delta_{max} + 1$.

Dentro do modelo Λ CDM, o tempo cósmico como função do redshift fica dado por

$$t(z) = \frac{1}{3H_0(1 - \Omega_{m0})^{1/2}} \cosh^{-1} \left[\frac{2(1 - \Omega_{m0})}{\Omega_{m0}(1 + z)^3} + 1 \right]. \quad (5.40)$$

A relação entre os redshift de inversão z_{max} e o redshift de virialização z_v pode ser obtido admitindo que o tempo necessário para o esfera virializar é duas vezes o tempo de inversão, isto é, $t_v \approx 2t_{max}$. Sendo assim encontramos

$$\cosh^{-1} \left[\frac{2(1 - \Omega_{m0})}{\Omega_{m0}(1 + z_v)^3} + 1 \right] \approx \cosh^{-1} \left[\frac{2(1 - \Omega_{m0})}{\Omega_{m0}(1 + z_{max})^3} + 1 \right]. \quad (5.41)$$

A densidade de virial é a razão entre a densidade de matéria dentro da esfera/halo e a densidade de matéria do background no tempo de virialização,

$$\Delta_v = \frac{\rho_m(z_v)}{\bar{\rho}_m(z_v)}, \quad (5.42)$$

quantidade que permite conectar teoria com observação. Portanto, não é difícil chegar na expressão

$$\Delta_v = \left(\frac{1 + z_{max}}{1 + z_v} \right)^3 \frac{\xi}{y^3}. \quad (5.43)$$

5.3 Resultados e Discussões

Nesta seção mostraremos as previsões para o tamanho final e a densidade virial de uma estrutura gravitacionalmente estável dentro do modelo Λ CDM.

Apresentamos na figura 9 os gráficos de q versus z_{max} e q versus z_v para o modelo Λ CDM. Como podemos ver em altos redshifts a função q tende a zero, o que leva ao Universo de Einstein-De Sitter.

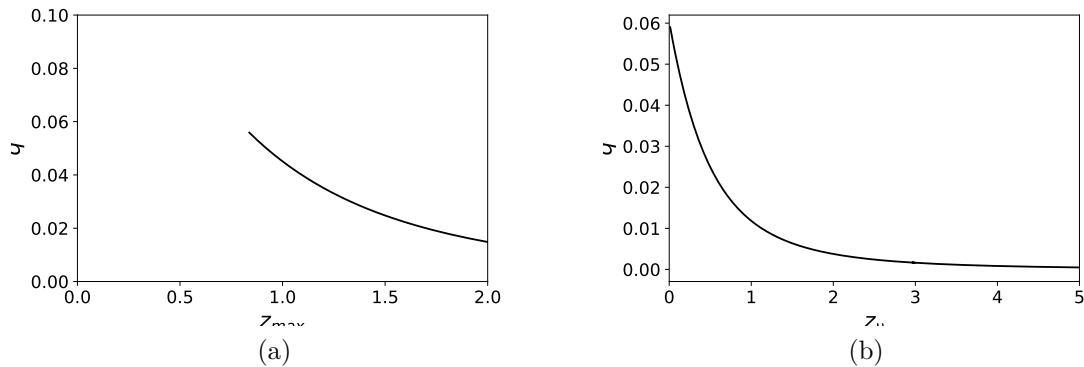


Figura 9 – (a) gráfico de q x z_{max} e (b) q x z_{max} . Usamos $\Omega_{m0} = 0.3$ para o modelo Λ CDM

Na figura 10 apresentamos as curvas para y versus q (figura 11.(a)), e como vemos quando $q = 0$ o valor de y é $1/2$, como deveria ser. Este resultado corresponde ao universo de Eintein-De Sitter. De fato, as curvas da figura 10.(b) mostram que para altos valores de z , o valor da razão representada por y tende a $1/2$. Podemos ver que a razão do tamanho final para o tamanho máximo da estrutura virializada é menor que $1/2$.

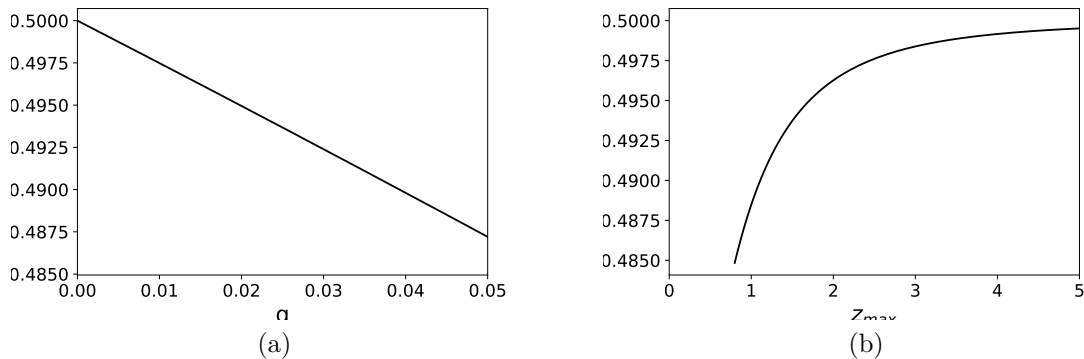


Figura 10 – (a) gráfico de y x q e em (b) y x z_{max} . Usamos e $\Omega_{m0} = 0.3$ para o modelo Λ CDM.

Na figura 11 apresentamos a curvas para a relação z_v e z_{max} , bem como a idade para cada universo em bilhões de anos versus z .

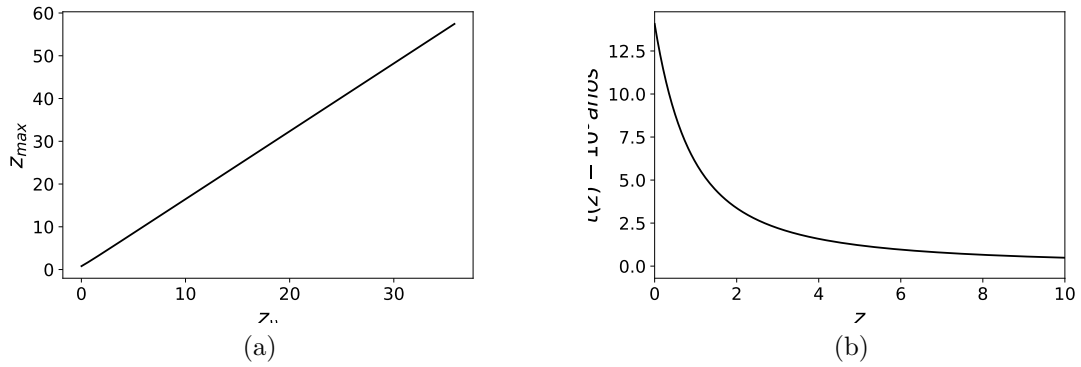


Figura 11 – Na figura (a) gráfico de z_{max} x z_v e na figura (b) t x z_{max} . Usamos $\Omega_{m0} = 0.3$ para o modelo Λ CDM.

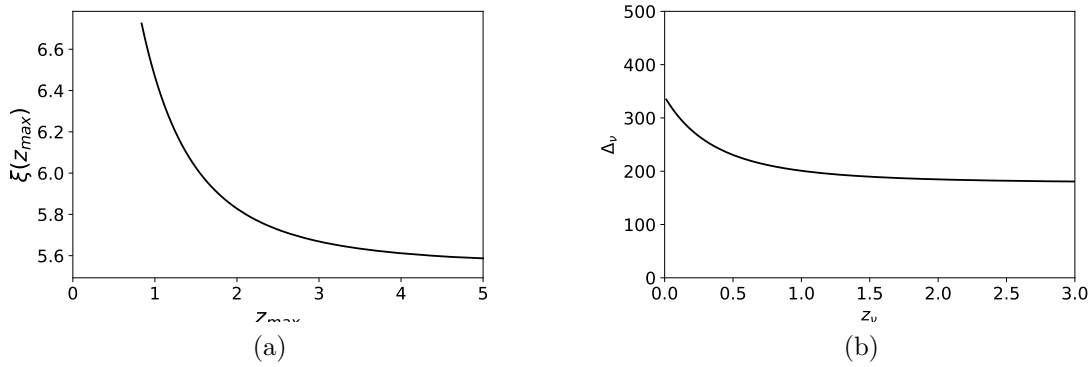


Figura 12 – Na figura (a) gráfico de Δ_v x z_{max} e na figura (b) Δ_v x z_v .

Na figura 12 (a) apresentamos o contraste de densidade no ponto de expansão máxima como função do redshift z_{max} . Vemos que para grandes valores de z tal resultado tende para o valor $\xi_{max} = 5.55$, como esperado para o universo de Einstein de Sitter. O valor de Δ_v diminui com o redshift de formação z_v atingindo o valor de 178, o mesmo para Einstein de Sitter, com a densidade final hoje sendo $\Delta_v(0) = 348.6$ [23].

6 Conclusão

Neste trabalho calculamos a densidade numérica de galáxias usando uma função de massa Press-Schechter modificada, e isso foi possível utilizando um recurso computacional, implementando as equações necessárias para tal, e que foram mostradas ao longo dos capítulos.

Após estabelecer as bases matemáticas necessárias para o desenvolvimento, que integra o contexto das perturbações não lineares e uma abordagem estatística, inserimos o modelo cosmológico (que permitiu abordagem do modelo padrão e de modelos com interação no setor escuro parametrizado pelo gás de Chaplygin generalizado) e nos concentramos em obter os resultados, abordando uma situação em que consideramos a densidade de energia escura distribuída de maneira homogênea como foi feito em [27].

Obtivemos resultados que coincidem com os obtidos em [27] para $\Lambda \propto H$ ou $\alpha = -0.5$ considerando $\Omega_{m0} = 0.45$, onde se encontra um excesso na contagem numérica na faixa de grandes massas quando comparadas com o mesmo obtido para o modelo Λ CDM.

Além disso, o código para o cálculo numérico deixa o parâmetro α livre nas equações, o que permitiu estender a análise para incluir outros valores para α . Encontramos que $\alpha > 0$ prevê um excesso na abundância de halos enquanto que para $\alpha < 0$ encontramos um déficit, em comparação com o Λ CDM, para massas $M > 10^{13} M_{\odot} h^{-1}$. Nestes adotamos $\Omega_{m0} = 0.3$.

Portanto, foi possível estender a análise realizada em [27] para α qualquer (sem perturbação na energia escura) de maneira consistente com o modelo de colapso esférico.

No capítulo 4, generalizamos o teorema de virial para modelos com interação e usando conservação da energia, fomos capazes de mostrar que o halo de matéria escura se forma com uma densidade final $\Delta_v(0) = 348.6$, dados consistentes dentro do modelo Λ CDM.

Referências

- [1] P. Astier et al., *Astron. Astrophys.* 447, 31 (2006).
- [2] A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* 607, 665 (2004).
- [3] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [4] M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D* 69, 103501 (2004).
- [5] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* 75, 559 (2003).
- [6] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* 380, 235 (2003).
- [7] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* 61, 1 (1989).
- [8] M. Ozer, O. Taha, *Phys. Lett. B* 171, 363 (1986). *Nucl. Phys. B* 287, 776 (1987).
- [9] O. Bertolami, *Nuovo Cimento* 93, 36 (1986); K. Freese et al, *Nucl. Phys. B* 287, 797 (1987).
- [10] I. Shapiro, J. Solá, H. Stefancic, *JCAP* 0501, 012 (2005).
- [11] J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, *Phys. Rev. D* 72, 063516 (2005).
- [12] J. C. Fabris, I. Shapiro, J. Sola, *JCAP* 0702, 016 (2007).
- [13] A. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *An alternative to quintessence*,(2015).
- [14] M. C. Bento, and O. Bertolami, and A. A. Sen, *Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification*,(2002) .
- [15] B. Ryden and B. Partridge, *Introduction to cosmology*, *Physics Today* (2004).
- [16] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark energy: theory and observations*, Cambridge University Press (2010).
- [17] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*. *Phys. Rev. D* 23, 347–356 (1981).
- [18] H. Mo and F. Van den Bosch and S. White, *Galaxy formation and evolution*, Cambridge University Press (2010).
- [19] H. A. Borges, S. Carneiro, *Friedmann cosmology with decaying vacuum density*, *Gen. Rel. Grav.* 27 (2005) 1385-1394

-
- [20] Borges, H.A.. Perturbações em um Modelo Cosmológico com Interação no Setor Escuro . Tese (doutorado) – Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia. Salvador. 2010.
- [21] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, W. Zimdahl, Phys. Lett. B727 (2003) 37-42.
- [22] Olivari, L.C.. Influência da Transferência de Momento-Energia na Interação entre Matéria e Energia Escura. Dissertação(mestrado) - Instituto de Física da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2014
- [23] S. Basilakos and M. Plionis and J. Solà, Spherical collapse model in time varying vacuum cosmologies,Physical Review D (2010).
- [24] Ding-feng Zeng and Yi-hong Gao, Spherical Collapse Model And Dark Energy(II),(2010)
- [25] A. Linde, Inflation and quantum cosmology, Academic Press, Inc (1990).
- [26] D. H. Lyth and A. R. Liddle, The primordial density perturbation,Cambridge University Press (2009).
- [27] N. Chandrachani Devi, H. A. Borges, S. Carneiro, and J. S. Alcaniz, Number Counts and Dynamical Vacuum Cosmologies, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (2015): 37-41.
- [28] V. Mukhanov, Physical foundations of cosmology, Cambridge University Press (2005).
- [29] P. J. E. Peebles, The large-scale structure of the universe, Princeton university press(1980).
- [30] Cavalcante, J.P.. Estudo da Aglomeração de Galáxias Usando o Modelo de Halos. Dissertação(mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.
- [31] Martins, J.S. . O Modelo de Halos e o Espectro de Potência da Matéria Escura Morna. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual Paulista. São Paulo. 2015.
- [32] Bardeen, J. M.; Bond, J. R.; Kaiser, N.; Szalay, A. S., The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields, Astrophys. J. 304, 15 (1986)
- [33] Chris Dessert,The Extended Press-Schechter Formalism (2013), Online; accessed 16 february 2020.
- [34] A. Cooray and R. Sheth, Halo models of large scale structure, Physics Reports (2002): 1 - 129.
- [35] R.C. Batista and V. Marra, Clustering dark energy and halo abundances, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (2017): 048 - 048.

-
- [36] R.K. Sheth and G. Tormen, Large-scale bias and the peak background split, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1999): 119 - 126.
- [37] R.K.Sheth and H. J. Mo and G. Tormen, Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2001): 1 - 12 .
- [38] D. S. Reed, R. Bower, C. S. Frenk, A. Jenkins and T. Theuns, The halo mass function from the dark ages through the present day, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2007): 2 - 15.
- [39] Irit Maor, and Ofer Lahav, On virialization with dark energy, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (2005): 003 - 003.
- [40] Peng Wang, Virialization in Dark Energy Cosmology, *The Astrophysical Journal* (2006): 18-21.
- [41] L. Campanelli, et al, Galaxy cluster number count data constraints on cosmological parameters, *The European Physical Journal C*(2012).
- [42] F. Pace, et al, Spherical collapse model in dark energy cosmologies, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (2010).