



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com
Interação no Setor Escuro**

Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com
Interação no Setor Escuro**

Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

Orientador: Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Salvador - 2010

Para minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço a Saulo Carneiro, professor, orientador, amigo e, muito em breve, colega, que há sete anos me explicou o que era Cosmologia, e desde então não teve paz. Sua grande dedicação me ensinou o que é ser pesquisador. Agradeço ao grupo de pesquisa em Cosmologia da UFBA, liderado por Saulo, hoje composto por Humberto Borges, Agostinho Montenegro, Welber Miranda, Roberto Menezes, Mariana Lima e por mim. Obrigado pelas discussões e colaborações indispensáveis.

Agradeço ao Observatório Nacional, em especial ao professor Jailson Alcaniz, pela grande colaboração nas pesquisas, com ensinamentos, discussões e sugestões. Agradeço também por, logo após minha defesa de Mestrado, me incentivar a cursar imediatamente o Doutorado.

Agradeço ao Programa de Pós Graduação em Física da UFBA pela oportunidade e pelo acolhimento. Agradeço a atenção e cuidado do Colegiado deste Programa, em especial do professor Frederico Prudente e de Marli Cabral.

Agradeço a minha mãe Maria, minha irmã Camila e meus irmãos, Cassiano e Carlos, por todos estes anos de convívio, lições e amor acima de todas as diferenças. Peço licença a todos para dar destaque a minha irmã, por coincidentemente compartilharmos nossos momentos finais de doutoramento, ou seja, período quando apenas nós dois nos compreendíamos de fato. Agradeço às mensagens e ligações nas noites de sexta-feira.

Agradeço a Beto Mercês, grande amigo nesta caminhada, sempre me apoiando e me incentivando a ir adiante. Agradeço também ao apoio de Rodrigo Alves, Samuel Campos e Graci Samudio.

Agradeço a Claire Maron, amiga desde sempre, que acreditou que eu chegaria até aqui mesmo antes de eu pensar em ir.

Agradeço aos amigos que a UFBA me deu da graduação ao doutorado: Marcela Bastos, Leandro Cerqueira, Manuela Arruda, José Marcelino Neto, Mariana Fernandes, João Cláudio, Mabele de Jesus, Welber Miranda e Jéssica Guerreiro. Pelo apoio, pelas trocas, pela confiança, pelos almoços no PAF, pelas reuniões de estudo e pela cumplicidade. Agradeço ao professores e colegas pelo convívio e aprendizagens.

Agradeço à família construída em torno da UFRB. Às grandes companheiras de casa, Adriana Lopes e Ana Rita Santiago, agradeço pelo lar aconchegante onde por vezes fui filho,

outras irmão ou pai; pelas conversas no sofá e na estrada, pelo chocolate quente. Agradeço também a Simone Fernandes, Glênon Dutra, Susana Pimentel, Floricéa Magalhães, Luiz Paulo Oliveira, Luis Flávio Godinho, Karina Cordeiro e os alunos do curso de Licenciatura em Física do CFP/UFRB pela compreensão e motivação principalmente nos momentos em que ser aluno de Doutorado e professor ao mesmo tempo parecia ser impossível.

Resumo

Dentre diversos modelos cosmológicos propostos para descrever a dinâmica e evolução do universo, as observações parecem favorecer o Λ CDM plano, no qual a energia escura é associada à constante cosmológica, com equação de estado do vácuo. O baixo valor da densidade desta energia observado hoje em relação ao estimado pela teoria quântica de campos motiva o estudo de modelos alternativos que justifiquem esta diferença com uma variação temporal do termo cosmológico. Nesta tese, um modelo com termo cosmológico proporcional ao parâmetro de Hubble é estudado com dados de supernovas do tipo Ia, radiação cósmica de fundo e estruturas em larga escala. A análise do BIC no teste de supernovas Ia, utilizando dados do Union2, do Constitution e do SDSS (MLCS2k2 e SALT-II), nos diz que o Λ CDM plano é fracamente favorecido em relação ao $\Lambda(t)$ estudado. Em análises conjuntas de SNe Ia, CMB, BAO e LSS para estimativa de parâmetros do $\Lambda(t)$, a melhor concordância aparece ao usarmos o SDSS (MLCS2k2), resultando no intervalo $0.416 < \Omega_{m,0} < 0.438$ (2σ) para o parâmetro de densidade de matéria. Este modelo foi estendido para o caso com curvatura, e ao aplicar testes de SNe Ia verifica-se que um universo fechado é levemente favorecido pelos quatro conjuntos de dados utilizados. Dos resultados obtidos verifica-se que o $\Lambda(t)$ não é descartado pelas observações.

Abstract

Among various cosmological models that describe the dynamics and evolution of the universe, observations seem to favor the flat Λ CDM, in which dark energy is associated with the cosmological constant with equation of state of vacuum. The low value of this energy density observed today compared to the estimated by quantum field theory motivates the study of alternative models which justify this difference by a time variation of the cosmological term. In this thesis, a model with cosmological term proportional to the Hubble parameter is constrained by type Ia supernovae, cosmic microwave background and large-scale structures data. The BIC analysis of the supernovae Ia tests using Union2, Constitution and SDSS (with MLCS2k2 and SALT-II light-curve fitters) samples tells us that the flat Λ CDM is weakly favored over the $\Lambda(t)$. The parameters estimation in the $\Lambda(t)$ by a joint analysis of Sne Ia, CMB, BAO, CMB and LSS presents the best concordance when using the SDSS (MLCS2k2) sample, resulting in the range $0.416 < \Omega_{m,0} < 0.438$ (2σ) for the matter density parameter. This model was extended to the case with curvature, and by applying Sne Ia tests it appears that a closed universe is slightly favored by the four samples used. The obtained results reveal that the $\Lambda(t)$ model is not ruled out by observations.

Conteúdo

Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	iv
1 Introdução	1
2 Cosmologia padrão	4
2.1 Redshift	8
2.2 Medidas de distâncias	10
2.3 Modelo padrão	15
2.3.1 Λ CDM plano	20
2.3.2 x -CDM	23
3 Classes de modelos com $\Lambda(t)$	25
3.1 $\Lambda(t)$ plano	27
3.1.1 Época dominada por radiação	29
3.1.2 Época dominada por matéria	30
3.1.3 Igualdade radiação-matéria	32
3.1.4 Parâmetro de Hubble	33
3.2 Soluções exatas na Cosmologia de Brans-Dicke	35
3.2.1 Caso $\dot{q} = 0$	37
3.2.2 Caso $\dot{q} \neq 0$	38
4 Ferramentas de Análise Estatística	41
4.1 Probabilidade	42
4.1.1 Marginalização	43
4.2 Estimando parâmetros	44
4.3 Seleção de modelos	49
5 Supernovas do tipo Ia	51
5.1 Union2 Compilation	56
5.2 Constitution	60
5.3 SDSS Supernova Survey	63
5.4 Seleção de modelos	68

6	Do universo primordial à formação de estruturas	70
6.1	Estágios do universo primordial	73
6.1.1	Redshift de último espalhamento	74
6.1.2	Anisotropias	75
6.2	Posição do primeiro pico	77
6.3	Oscilações acústicas bariônicas	80
6.4	Espectro de potência de matéria	81
7	Análises conjuntas	85
7.1	SNe Ia+BAO+CMB	86
7.2	SNe Ia+BAO+CMB+LSS	89
8	Conclusões	91
	Bibliografia	93

Lista de Tabelas

4.1	Valores de $\Delta\chi_0^2$ para diferentes níveis de confiança e quantidade de parâmetros livres.	47
5.1	Parâmetros livres dos modelos analisados.	55
5.2	Cosmografia resultante dos melhores ajustes com Union2.	56
5.3	Cosmografia resultante dos melhores ajustes com Constitution.	61
5.4	Cosmografia resultante dos melhores ajustes com SDSS(MLCS2k2).	64
5.5	Cosmografia resultante dos melhores ajustes com SDSS(SALT-II).	68
5.6	Aplicação de critério de informação aos ajustes.	68
7.1	Resultados da análise conjunta de SNe Ia (Union2), BAO e CMB.	86
7.2	Resultados da análise conjunta de SNe Ia (Constitution), BAO e CMB.	87
7.3	Resultados da análise conjunta de SNe Ia (SDSS - MLCS2k2), BAO e CMB.	88
7.4	Resultados da análise conjunta de SNe Ia (SDSS - SALT-II), BAO e CMB.	89
7.5	Cosmografia resultante da análise combinada dos quatro tipos de observações.	89

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de evolução temporal do fator de escala para universos com apenas um componente, entendendo inclusive a curvatura como um componente. . .	5
2.2	Regiões de universo acelerado ($q_0 < 0$) e de desacelerado ($q_0 > 0$) para modelo padrão com curvatura qualquer, contendo matéria sem pressão e constante cosmológica.	19
2.3	À esquerda, isócronas no plano $\Omega_{m,0} - h$ para o modelo Λ CDM com $k = 0$. À direita, comportamento do parâmetro de desaceleração na fase de matéria até tempos futuros ($z \rightarrow -1$) para este mesmo modelo.	23
3.1	Soluções numéricas para o modelo $\Lambda(t)$ com curvatura, para alguns pares $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$	27
3.2	À esquerda, isócronas no plano $\Omega_{m,0} - h$ para o modelo $\Lambda(t)$ com $k = 0$. À direita, comportamento do parâmetro de desaceleração na fase de matéria até tempos futuros ($z \rightarrow -1$) para este mesmo modelo.	32
3.3	Verificação da equação (3.52).	34
4.1	Pacote de dados de supernovas do tipo Ia do <i>Union 2 Supernova Compilation</i> e curvas teóricas para o modelo padrão plano, variando aleatoriamente os valores dos parâmetros.	44
4.2	À esquerda, gráfico de $\chi^2 - \chi_{min}^2$ como função dos parâmetros. À direita, likelihood também como função dos parâmetros.	46
4.3	À esquerda, níveis de confiança para os dois parâmetros conjuntamente, relativos a 68.3%, 90%, 95.4%, 99%, 99.73% e 99.9%. À direita, níveis de 1σ , 2σ e 3σ conjuntos para os parâmetros (linhas cheias) e individuais (linhas tracejadas).	47
5.1	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do Union2.	57
5.2	Painel superior: diagrama de Hubble com dados do Union2 e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).	59
5.3	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do Constitution.	60
5.4	Painel superior: diagrama de Hubble com dados do Constitution e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).	62

5.5	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do SDSS (MLCS2k2).	63
5.6	Painel superior: diagrama de Hubble com dados do SDSS (MLCS2k2) e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).	65
5.7	Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do SDSS (SALT-II).	66
5.8	Painel superior: diagrama de Hubble com dados do SDSS (SALT-II) e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).	67
6.1	Resultados da análise da posição do primeiro pico obtidos com os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$	79
6.2	Resultados dos ajustes dos modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ aos D_V 's.	80
6.3	Função densidade de probabilidade do parâmetro $\Omega_{m,0}$ no ajuste do espectro de potência.	82
6.4	Curva com parâmetro de melhor ajuste do $\Lambda(t)$ (azul, cheia) e nos valores limites do intervalo de 2σ de confiança (azul, tracejada), em comparação com o resultado para o modelo padrão com função transferência BBKS (vermelho).	83
7.1	Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (Union2), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.	86
7.2	Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (Constitution), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.	87
7.3	Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (SDSS, MLCS2k2), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.	88
7.4	Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (SDSS, SALT-II), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.	88
7.5	Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia, BAO, CMB e LSS para o $\Lambda(t)$. As elipses em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.	90

Capítulo 1

Introdução

A Física, por definição, é a ciência que estuda a natureza e seus fenômenos, com foco nas propriedades e interações que ocorrem neste curioso cenário. O método científico fez deste estudo uma “ciência”, encarregando os físicos de não apenas proporem modelos teórico-matemáticos para a natureza à sua volta, como também de os testarem experimentalmente, verificando se o modelo descreve com boa aproximação o fenômeno estudado. Pode parecer pretensão humana entender como a natureza funciona, e se for, ela foi intensificada especialmente pela Lei da Gravitação Universal de Newton. Tomemos esta formulação como um divisor de águas.

Anteriormente, havia a natureza abaixo e “acima” do céu. O Cosmos, o Universo, o todo era interpretado como algo intangível, por Platão associado a um mundo das idéias, onde os corpos eram esferas perfeitas que descreviam círculos perfeitos; já Pitágoras relacionava seus movimentos a escalas numéricas harmônicas. A Gravitação Universal é proposta e a partir dela interpretamos que as mesmas leis que são verificadas aqui, na superfície da Terra, são as que regem os movimentos dos planetas e corpos celestes em geral. Procura-se agora por modelos que tenham uma abrangência espacial maior, ultrapassando os limites daquilo tido costumeiramente como “tangível”.

Nesta mudança de paradigma podemos apontar um problema nestes estudos: como fazer experimentos se não temos controle sobre objetos celestes? Não podemos provocar pequenas perturbações no fenômeno para estudar suas variações, nem podemos reproduzi-los em laboratório. Contamos, assim, que a natureza se encarregue da repetição de fenômenos, e que estejamos no momento e no local certo para coletarmos estes dados.

Mas talvez esta pretensão não pareça tão absurda quando saímos da escala do Sistema

Solar e vamos para a escala do Universo como um todo, onde aglomerados e superaglomerados de galáxias são pontos em um gráfico. A Teoria da Relatividade Geral publicada em 1915 por Albert Einstein, como uma generalização da teoria da Gravitação Universal, é uma forte ferramenta para descrever teoricamente um universo com relativa simplicidade, a depender da métrica adotada, sendo a base da Cosmologia Moderna. Mas para atingirmos este ponto, a humanidade teve de abdicar de sua posição central no Sistema Solar, da posição central deste na nossa Galáxia, e da posição privilegiada da via Láctea no Universo. Chegamos, na verdade, à concepção de que o universo não tem um centro, que não há posição privilegiada qualquer, o que está intrinsecamente relacionado com o Princípio Cosmológico, segundo o qual o universo apresenta, em larga escala¹, as propriedades de homogeneidade e isotropia.

Ainda nesta escala admite-se, comumente, que não há razões para a natureza ser descrita por leis totalmente diferentes em galáxias diferentes, e assim, por exemplo, acreditamos que podemos descrever através de um mesmo modelo supernovas que ocorreram em galáxias distantes umas das outras, e em momentos distintos da história do universo. Assim, respeitando as particularidades de distribuição local de matéria e energia, com a Física que conhecemos poderíamos descrever a natureza (o Universo) através de uma teoria universal.

Mas a descrição teórica através de um modelo já não é suficiente. A tecnologia tem avançado numa velocidade difícil de acompanhar, e já podemos começar a interpretar as informações recebidas do Universo através da radiação eletromagnética. Se há um número muito grande de fontes, e se pensarmos em informações emitidas ao longo de bilhões de anos, nos deparamos com uma “infinitude” de dados a serem estudados, na busca por decodificação de informações úteis. Dentre as informações extraídas hoje temos, por exemplo, os fótons da radiação cósmica de fundo em microondas, os “fósseis do Universo”, e a distribuição espacial de galáxias e aglomerados. Para descrever estes fenômenos recorreremos a diversos ramos da física e então alguns parâmetros ganham espaço. Cabe aos dados restringir estes parâmetros para verificarmos se determinado modelo descreve relativamente bem o universo em que vivemos. Devido à grande quantidade de dados, estes ajustes são baseados em tratamentos estatísticos, e por causa de peculiaridades da Cosmologia, novas ferramentas de tratamentos estatísticos de dados vêm sendo desenvolvidas.

É neste contexto de verificação observacional de modelos cosmológicos que o presente trabalho foi desenvolvido. Objetivamos discutir como utilizar dados observados para construir testes de modelos, na determinação de parâmetros e na comparação de modelos. Os testes

¹Por larga escala entende-se distâncias a partir de $200 \text{ Mpc} \approx 6 \times 10^{24} \text{ m}$.

aqui tratados envolvem supernovas, posição do primeiro pico da radiação cósmica de fundo, oscilações acústicas bariônicas e espectro de potência de matéria. Em especial, testamos um modelo alternativo onde há matéria e energia escuras acopladas (acoplamento conhecido como “interação no setor escuro”). Por fim verificamos, em relação ao modelo que melhor ajusta os dados, se os demais modelos são favorecido ou não pelas observações.

Nos próximos capítulos fazemos a apresentação dos modelos estudados neste trabalho (Capítulos 2 e 3). No terceiro capítulo faz pela primeira vez o estudo teórico do modelo com interação no setor escuro com curvatura. No quarto capítulo, temos uma breve revisão dos métodos estatísticos utilizados nas análises. Nos capítulos subsequentes trataremos de fenômenos específicos e da utilização destes na determinação de parâmetros: supernovas do tipo Ia (SNe Ia), radiação cósmica de fundo em microondas (CMB, do inglês *Cosmic Microwave Background*), formação de estruturas em larga escala (LSS, do inglês *Large Scale Structure*) e oscilações acústicas bariônicas (BAO, do inglês *Baryon Acoustic Oscillations*). Poderemos, então, apresentar a análise combinada destes dados no capítulo 7, discutindo, por fim, as conclusões no último capítulo.

O presente trabalho tem como novidade o estudo de sete classes de modelos com quatro diferentes pacotes de dados de supernovas, utilizando critério de seleção entre eles para verificar quais são favorecidos ou não pelas observações, constatando que o modelo com interação do setor escuro ($\Lambda(t)$) não é descartado. Outra novidade é a análise combinada de SNe Ia, CMB, BAO e LSS no modelo $\Lambda(t)$, que apesar de resultar em valores sistematicamente mais altos para o parâmetro de densidade de matéria, apresenta concordância entre os ajustes quando comparado com o pacote de dados SDSS (MLCS2k2).

Capítulo 2

Cosmologia padrão

Chamamos de cosmologia padrão aquela oriunda dos estudos da Relatividade Geral de Einstein, segundo a qual a interação gravitacional passa a ser interpretada como um efeito da curvatura do espaço-tempo [1, 2]. Esta curvatura pode ser entendida como uma perturbação provocada pela presença de matéria (energia). Esta relação está contida nas equações de Einstein, a saber

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde os índices gregos variam entre 0 (coordenada tipo tempo), 1, 2 e 3 (coordenadas tipo espaço). O lado esquerdo desta equação carrega as informações sobre a geometria do espaço-tempo, através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas – que definem o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura R . Já no lado direito, temos o tensor energia-momento, que irá conter informações sobre a constituição do universo, quais elementos o preenchem, com quais densidades de energia e qual é a pressão que os caracterizam. A grandeza G é a constante da gravitação, que na Relatividade Geral permanece *constante*¹.

As observações de dados da radiação cósmica de fundo em microondas (do inglês, CMB) indicam que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, ou seja, o Princípio Cosmológico antes usado como base de modelos teóricos por conferir simplicidade ao formalismo, agora tem argumentos observacionais que justificam seu uso. Seguindo este pensamento, o modelo padrão e os modelos aqui estudados são construídos segundo uma métrica com

¹Destaque feito propositalmente, pois modelos construídos na cosmologia de Brans-Dicke serão abordados no próximo capítulo.

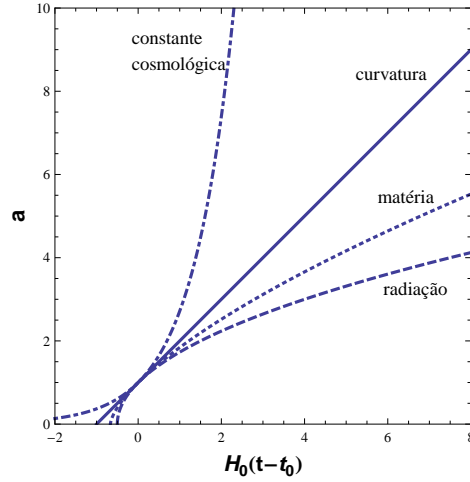


Figura 2.1: Exemplos de evolução temporal do fator de escala para universos com apenas um componente, entendendo inclusive a curvatura como um componente.

máxima simetria espacial – a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi \right], \quad (2.2)$$

onde as coordenadas (ct, r, θ, ϕ) são co-móveis [1, 3, 2]. A função $a(t)$ é o fator de escala, e seu comportamento nos diz a dinâmica do universo: se ele está em expansão, contração ou com configuração estacionária. Este fator será a chave para a estimativa de distâncias físicas, ou grandezas com dimensão de distância. Podemos verificar na Figura 2.1 a diferença no comportamento do fator de escala, a depender da composição do universo.

A constante k pode assumir os valores $+1$, 0 e -1 , correspondendo a universos fechado, plano e aberto, respectivamente. Esta característica do universo está intimamente ligada à densidade de matéria e energia do mesmo. Digamos que o universo seja composto por n componentes – por exemplo, matéria bariônica, neutrinos, fótons, entre outros. Seja ρ_i a densidade de energia do i -ésimo componente, de forma que a densidade total de energia será

$$\rho_T = \sum_{i=1}^n \rho_i. \quad (2.3)$$

Se a densidade de energia total for igual a um determinado valor, chamado de densidade crítica (ρ_{cr}), o universo é espacialmente plano ($k = 0$). Caso seja superior, a curvatura seria positiva ($k = +1$), e caso $\rho_T < \rho_{cr}$, o universo seria espacialmente aberto. Se todos os componentes possuísssem a propriedade de atração gravitacional, a relação entre a geometria do universo e sua dinâmica seria imediata. Caso o universo esteja em expansão, para $\rho_T > \rho_{cr}$,

há matéria suficiente para frear a expansão e provocar o colapso. Se $k = 0$ ou $k = -1$, o universo expandiria eternamente. Este cenário fica mais complicado se acrescentarmos um componente com pressão negativa, o que é feito nos modelos a serem abordados. Como a CMB indica também que o universo é espacialmente plano – ou muito aproximadamente plano – iremos nos debruçar especialmente no caso $k = 0$.

Podemos agora introduzir alguns dos parâmetros mais utilizados na descrição de modelos, exaustivamente citados no capítulo anterior. A partir das derivadas do fator de escala, podemos definir dois parâmetros. O primeiro é o de Hubble, uma medida da taxa de expansão (ou contração) temporal do universo, expressado por

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.4)$$

O parâmetro de Hubble tem, tradicionalmente, a dimensão de $km/s/Mpc$. Na Cosmologia Observacional é comum utilizarmos um parâmetro de Hubble atual adimensional, dado por

$$h = \frac{H_0}{100km/s/Mpc}. \quad (2.5)$$

Por vezes também escreveremos a função do parâmetro de Hubble em termos do H_0 , definindo a função

$$E(t) = \frac{H(t)}{H_0}. \quad (2.6)$$

O segundo parâmetro obtido através de derivadas de $a(t)$ é o de desaceleração,

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (2.7)$$

que será positivo caso o universo esteja em expansão retardada. Esta definição do sinal é consequência de se acreditar anteriormente que o universo está em expansão e sendo freado. Veremos que os dados de supernovas do tipo Ia indicam fortemente que a expansão é hoje acelerada ($q_0 < 0$).

A densidade crítica, citada anteriormente, é dada pela expressão

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.8)$$

com a qual podemos definir outro parâmetro muito utilizado, o de densidade de energia, que

é a densidade de determinado componente em relação à densidade crítica

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}}. \quad (2.9)$$

A aplicação da métrica FLRW (2.2) na equação tempo-tempo de (2.1) nos dá a *equação de Friedmann*, que expressaremos como [2]

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_T(t) + \frac{\rho_{cr} - \rho_0}{a^2(t)} \right]. \quad (2.10)$$

Ela nos diz qual a dinâmica do universo a partir da contribuição de seus componentes. O último termo do segundo membro contém a contribuição da curvatura do espaço nesta dinâmica (ρ_0 é a densidade total de energia hoje). Podemos multiplicar e dividir o segundo membro pela densidade crítica, e assim escrever a equação de Friedmann no formato

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\Omega_T(t) + \frac{1 - \Omega_0}{a^2(t)} \right]. \quad (2.11)$$

Assim, o termo $1 - \Omega_0$ é associado a um “parâmetro de densidade da curvatura” (Ω_k), como sendo a fração de densidade de energia que faltaria para k ser nulo, ou a que excederia em relação ao universo plano. Digamos que é uma maneira prática de trabalhar com a curvatura, associando-a a um parâmetro que poderá ser ajustado. Ganhamos também em simplicidade no formalismo, de sorte que teremos $\Omega_0 + \Omega_k = 1$, e assim:

- $\Omega_k = 0 \Rightarrow \Omega_0 = 1 \Rightarrow k = 0$;
- $\Omega_k > 0 \Rightarrow 0 < \Omega_0 < 1 \Rightarrow k = -1$;
- $\Omega_k < 0 \Rightarrow \Omega_0 > 1 \Rightarrow k = +1$.

Através da conservação do tensor energia-momento podemos obter uma segunda equação fundamental na descrição da evolução do universo: a equação de continuidade. Ela é dada por

$$\dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + p_T) = 0, \quad (2.12)$$

e caso o i -ésimo componente se conserve separadamente (não haja interação), podemos aplicar a continuidade apenas para ele

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0. \quad (2.13)$$

Antes de aplicarmos as equações de Friedmann e da continuidade para descrevermos o universo segundo o modelo padrão, vamos retomar a definição de redshift e de distâncias no âmbito da cosmologia.

2.1 Redshift

Da análise do espectro de uma radiação incidente é possível medir com grande precisão a posição das linhas de absorção e de emissão dos gases em laboratório. Observando-se as radiações de fontes distantes, percebeu-se que estas linhas sofriam um desvio sistemático, algumas para o azul – menores comprimentos – e a maioria para o vermelho – grandes comprimentos. O *desvio para o vermelho*, em inglês *redshift*, presente na maioria das observações em qualquer direção que se aponte o detetor, foi a evidência de que todos os corpos no universo estariam se afastando devido ao aumento de espaço entre eles, onde aqui entendemos por “corpos” galáxias e aglomerados não pertencentes ao Grupo Local, pois na escala do Grupo Local, a atração gravitacional prevalece sobre a expansão².

Na escala cosmológica, ao passo que o espaço aumenta ($a(t)$ como uma função crescente no tempo), o comprimento de onda tende a ser aumentado pelo mesmo fator que o espaço, e assim, o espectro é deslocado para o vermelho. Quando verifica-se um *blueshift*, isso é entendido como movimentos peculiares do objeto, devido a fatores locais, como por exemplo, rotação do aglomerado de galáxias.

A medida do redshift é dada pelo desvio percentual do comprimento de onda λ associado à radiação,

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.14)$$

onde λ_e é o comprimento de onda no momento da emissão, e λ_0 , no instante da observação.

Quanto mais distante uma fonte, mais tempo sua radiação leva para chegar ao observador, e mais tempo o espaço tem para aumentar, provocando um maior redshift do espectro. Percebemos assim que há uma relação entre tempo, fator de escala e redshift, ou seja, maiores redshifts correspondem a radiações emitidas em tempos mais remotos, quando o fator de escala era menor. É interessante notar que a relação entre redshift e fator de escala [1] é obtida independente de modelo, como veremos a seguir.

Tomemos uma galáxia com as coordenadas espaciais (r, θ, ϕ) emitindo um sinal eletro-

²Vale ressaltar que nesta escala o universo não pode ser aproximado para homogêneo e isotrópico, e então não podemos, rigorosamente, aplicar a Princípio Cosmológico e todo o formalismo aqui apresentado.

magnético que é observado na Terra – coordenadas $(0,0,0)$. Já que a luz percorre uma geodésica nula, e o universo é homogêneo e isotrópico (não havendo razão para ocorrer desvios angulares no percurso) obtemos pela (2.2) que³

$$c \frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.15)$$

Adotemos o sinal negativo, já que, na trajetória da radiação, r diminui com o passar do tempo. Se no instante t_e uma “crista de onda” é emitida, e observada na Terra em t_0 , vale a igualdade

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.16)$$

Para a crista de onda consecutiva, saindo da fonte em $t_e + \lambda_e/c$, e chegando no detector em $t_0 + \lambda_0/c$ teremos

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.17)$$

Como no segundo membro de (2.16) e (2.17) temos integração em coordenada comóvel, e considerando que fonte e observador não têm suas coordenadas comóveis alteradas, o primeiro termo das referidas equações são iguais. Levando em conta que no intervalo de tempo entre a emissão de duas cristas de onda o universo não teve tempo suficiente para ter um aumento significativo, de forma que o fator de escala fica praticamente inalterado, podemos encontrar a relação

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (2.18)$$

Usando a (2.14) na última equação, obtemos enfim a relação entre redshift e fator de escala,

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.19)$$

Uma radiação observada atualmente (quando o fator de escala vale a_0) com redshift z , foi emitida quando o fator de escala era a [1, 3]. Discutamos agora sobre a definição de distância em um universo em expansão.

³Para explicitarmos a compatibilidade dimensional, recuperamos a representação da velocidade da luz c .

2.2 Medidas de distâncias

Acostumados com as distâncias do dia-a-dia, a definição desta grandeza parece se tratar de um conceito trivial. Mas quando consideramos a escala do universo, e este estando em expansão, temos que repensar este conceito.

Para tanto, consideremos uma galáxia longe o suficiente para que possamos usar a métrica (2.2), ignorando as pequenas perturbações do espaço-tempo. Tomemos um sistema de referência de forma que estejamos na origem e essa galáxia tenha coordenadas co-móveis (r_1, θ_1, ϕ_1) . Devido à expansão, para definir uma distância exata entre esta galáxia e nós, devemos fixar um instante t .

Podemos definir a *distância própria* $d_p(t)$ como o comprimento da geodésica espacial que liga a galáxia observada à Terra. A rigor, para efetuar este cálculo da distância própria de uma galáxia até nós, teríamos que ter muitas galáxias na nossa linha de visada, e que habitantes destas galáxias calculassem (por exemplo, via reflexão de sinal) as distâncias entre duas vizinhas próximas, todos ao mesmo instante, e a distância total seria dada pelo somatório no limite de infinitas galáxias intermediárias, ou seja,

$$d_p(t) \equiv \int_0^{r_1} \sqrt{g_{rr}} dr = a(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.20)$$

que resulta em

$$d_p(t) = a(t)x, \quad (2.21)$$

onde x é uma função de r_1 , dada por

$$\begin{aligned} x &= \sin^{-1} r_1 \quad (\text{para } k = +1) \\ &= r_1 \quad (\text{para } k = 0) \\ &= \sinh^{-1} r_1 \quad (\text{para } k = -1). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da equação (2.16), verificamos que

$$x = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.23)$$

e a distância própria hoje pode ser expressa por

$$d_p(t) = ca(t) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.24)$$

Retomando a relação entre redshift e fator de escala (2.19), encontramos a relação diferencial

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dt} dt = -\left(\frac{a_0}{a}\right) \left(\frac{da/dt}{a}\right) dt = -(1+z)H dt. \quad (2.25)$$

Logo, aplicando a mudança de t para z na (2.24), temos

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{a_0}{a} dt = -c \int_z^0 (1+z') \frac{dz'}{(1+z')H(z')}, \quad (2.26)$$

onde usamos o fato de que uma radiação emitida no instante da observação não apresenta redshift, e uma radiação emitida em t_e sofre redshift z . Assim, a expressão da distância própria em termos de uma integral em z é dada por

$$d_p(t_0) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.27)$$

Para objetos próximos, ou seja, baixos redshifts, de tal forma que H não tenha mudado significativamente no intervalo de tempo $\Delta t = t_0 - t_e$, $H \approx H_0$, e assim (2.27) resulta em

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} z, \quad (2.28)$$

que é a *lei de Hubble*, de distância proporcional ao redshift, verificada observacionalmente em 1929 por Edwin Hubble [4]. Para distâncias pequenas, podemos aproximar o redshift à expressão clássica do efeito Doppler ($z \approx v/c$), e então o produto cz seria a velocidade de recessão, e reescrevemos a (2.28) como

$$v_0 = H_0 d_p(t_0). \quad (2.29)$$

Hubble encontrou esta relação ao medir redshifts de galáxias e suas distâncias. Como eram galáxias próximas, obteve a proporcionalidade acima, e assim acreditava-se que a expansão do universo se dava a uma taxa constante, e o valor primeiramente medido foi $H_0 \approx 500 \text{ km/s/Mpc}$. Como veremos, este valor é muito alto comparado com o obtido atualmente.

Definida a distância própria, nos deparamos com um fato: esta distância não é fisicamente mensurável. Para medirmos seu valor num instante específico, seria necessário uma fita métrica que viajasse instantaneamente entre os dois pontos cuja distância se quer medir, ou então deveríamos parar a expansão do espaço para que tal medida fosse efetuada. Como

nenhuma das alternativas é viável, torna-se necessária a definição de distâncias mensuráveis⁴.

Em um universo estático e euclidiano, sabemos que a propagação do sinal de uma fonte pontual se dá em frentes esféricas, de tal forma que um detetor situado a uma distância d da fonte medirá um fluxo, ou intensidade, com valor

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.30)$$

onde L é a luminosidade desta fonte, ou seja, a potência por ela irradiada. Como podemos medir o fluxo bolométrico – fluxo completo, integrado sobre todos os comprimentos de onda da luz – das radiações incidentes na Terra, e caso haja uma classe de objetos astronômicos cuja luminosidade é conhecida, torna-se útil definir uma função chamada *distância luminosidade*,

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \quad (2.31)$$

Ela é chamada de distância por sua dimensão e porque seria o valor da distância própria caso o espaço-tempo fosse estático e euclidiano, e para baixos redshifts seu valor tenderá ao da distância própria. Consideremos, por simplicidade, um espaço euclidiano, e verifiquemos o efeito apenas da expansão na determinação desta distância.

Se uma fonte emite fótons num instante t_e , no momento da observação, t_0 , eles estarão espalhados em uma superfície cuja área própria será, no espaço euclidiano,

$$A_p(t_0) = 4\pi d_p(t_0)^2 = 4\pi a_0^2 r^2. \quad (2.32)$$

Quando um fóton é emitido, sua energia é $E_e = hc/\lambda_e$, e o fator de escala é a . Mas, devido ao redshift, em t_0 temos

$$\lambda_0 = \frac{a_0}{a} \lambda_e = (1+z)\lambda_e, \quad (2.33)$$

e a energia cairá para

$$E_0 = \frac{E_e}{1+z}. \quad (2.34)$$

O intervalo de tempo entre a emissão de dois fótons e a recepção dos mesmos também será alterada por causa da expansão. Se o intervalo na emissão era δt_e , a distância própria entre eles era $c\delta t_e$. Na observação, esta distância será $c\delta t_e(1+z)$, e o intervalo de tempo

⁴Para uma discussão sobre os principais indicadores de distâncias utilizados em Astronomia, veja [5].

na detecção será $\delta t_0 = \delta t_e(1+z)$. Como o fluxo é dado pela potência detetada dividida pela área na qual a energia está espalhada, temos

$$f = \frac{E_0/\delta t_0}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{\frac{E_e/(1+z)}{\delta t_e(1+z)}}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}. \quad (2.35)$$

Assim, a distância luminosidade (2.31) é dada por

$$d_L = a_0 r(1+z) = d_p(t_0)(1+z), \quad (2.36)$$

que para baixos redshifts se aproxima do valor da distância própria. Substituindo a (2.27) na (2.36), temos a distância luminosidade em termos do parâmetro de Hubble,

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.37)$$

Generalizando para o caso de universo com curvatura temos

$$\begin{aligned} d_L &= \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (\text{para } k = +1) \\ &= \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (\text{para } k = 0) \\ &= \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{\Omega_k} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (\text{para } k = -1). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Esta grandeza é útil quando temos um objeto astronômico que possui uma luminosidade conhecida, e admitindo que seu comportamento físico não varia de uma região do universo a outra. Este objeto é chamado então de *vela-padrão*. Para conhecer sua luminosidade, basta obter a distância de um corpo daquela classe próximo o suficiente para que possamos utilizar, por exemplo, o método da paralaxe, e medir o seu fluxo luminoso. Um exemplo é a classe de estrelas variáveis conhecidas como cefeidas – estrelas supergigantes altamente luminosas, com pulsação radial, a qual é percebida pela variação do brilho aparente. Henrietta Leavitt descobriu uma forma de calibração das cefeidas: uma relação entre período de pulsação e luminosidade para cefeidas próximas. Se essa relação é a mesma para todas as cefeidas, em qualquer galáxia, em qualquer região do cosmo, então a cefeida pode ser usada como uma vela padrão.

Assim, se observamos uma cefeida mais distante, através do período de pulsação obtém-se L – pela relação acima citada – e, ao medir seu fluxo, a (2.31) dará o valor da distância

luminosidade.

Uma outra propriedade observada em objetos astronômicos é sua dimensão. Se para uma classe de objetos o comprimento próprio é conhecido, então ela pode ser usada como *régua-padrão*. É conveniente que a régua padrão seja um corpo mantido agregado por gravidade ou outros fatores, de tal forma que suas dimensões não aumentem com a expansão do universo.

Se um objeto tem comprimento ℓ , está perpendicular à linha de visão, e suas extremidades submetem uma abertura angular $\delta\theta$, sendo essa abertura pequena, podemos definir uma função *distância diâmetro-angular* como

$$d_A \equiv \frac{\ell}{\delta\theta}, \quad (2.39)$$

que seria a distância própria caso o universo fosse estático e euclidiano. Verifiquemos agora o efeito da expansão na definição desta grandeza. Estando o observador na origem do sistema comóvel, e o objeto observado a uma distância comóvel r do observador, com seus extremos ocupando as posições comóveis (r_1, θ_1, ϕ) e (r_2, θ_2, ϕ) , a distância entre os dois extremos no momento da emissão da luz pode ser obtida de (2.2):

$$ds = ar\delta\theta = \ell. \quad (2.40)$$

Sabendo o redshift da radiação proveniente de nossa régua padrão, temos

$$\ell = \frac{a_0 r \delta\theta}{1+z}, \quad (2.41)$$

o que leva a concluir, pela (2.39), que

$$d_A = \frac{a_0 r}{1+z}. \quad (2.42)$$

Comparando a (2.42) com a (2.36), temos a relação entre as distâncias luminosidade e diâmetro-angular,

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}, \quad (2.43)$$

e, ainda,

$$d_A(1+z) = d_p(t_0) = \frac{d_L}{1+z}. \quad (2.44)$$

Ressaltamos que esta relação é geral, sendo válida em qualquer teoria gravitacional Rie-

manniana. Dessa forma, a distância própria de um objeto é maior que a diâmetro-angular e menor que a distância luminosidade. É curioso perceber que d_A coincide com o valor da distância própria no momento da emissão da radiação

$$d_A = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = \frac{a_0 r}{1+z} = ar = d_p(t_e), \quad (2.45)$$

lembrando que a , sem índice, é o fator de escala do universo no momento da emissão do sinal. Para obter a distância diâmetro-angular em termos do parâmetro de Hubble, basta substituir (2.27) na primeira igualdade de (2.45), e, assim,

$$d_A = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.46)$$

Generalizando, novamente, para o caso de universo com curvatura temos

$$\begin{aligned} d_A &= \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (\text{para } k = +1) \\ &= \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (\text{para } k = 0) \\ &= \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{\Omega_k} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (\text{para } k = -1). \end{aligned} \quad (2.47)$$

A medida da distância diâmetro-angular encontra dificuldades observacionais. Uma régua-padrão deve ser larga o suficiente para que sua abertura angular seja medida com boa precisão. Para grandes distâncias seriam necessários grandes objetos. Galáxias e aglomerados de galáxias são grandes o suficiente, mas suas extremidades são difíceis de se definir de forma que se tenha um valor único e confiável para $\delta\theta$. Além disso, estes corpos não são isolados e rígidos, com comprimento fixo. Galáxias têm dimensões alteradas devido a sua interação com a vizinhança. Por causa dessas dificuldades, tem sido mais comum o uso de velas-padrão e da distância luminosidade.

2.3 Modelo padrão

O modelo atualmente tido como padrão, conhecido como Λ CDM, é aquele para o qual os dados observacionais apontam. Este modelo é construído no cenário da Relatividade Geral, norteado pelos dados observacionais, os quais apontamos agora. Observações diretas e indiretas constataam a existência de matéria bariônica e radiação (na forma de fótons

e neutrinos não massivos). Observações de dinâmica de galáxias e lentes gravitacionais estimam uma densidade bem maior de matéria nestas estruturas do que a densidade bariônica esperada. Como esse grande excedente não interage com fótons, ele é então denominado matéria escura [6, 7, 8, 9]. As estimativas de sua densidade levam a um total de matéria agregante em torno de 30% da matéria-energia total do universo [10, 11].

A análise do espectro de anisotropias da CMB indica que o universo é espacialmente plano, ou muito aproximadamente plano, de forma que o parâmetro de densidade total de matéria e energia deve ser aproximadamente 1. Assim, temos que mais da metade de sua composição é de algo totalmente desconhecido, mais exótico que a matéria escura. Este componente exótico é conhecido como *energia escura*. De acordo com a análise dos dados de supernovas Ia em altos redshifts, o universo encontra-se atualmente em expansão acelerada, o que sugere que ele não é predominantemente composto por matéria – caso o fosse, o caráter atrativo desta última provocaria a desaceleração da expansão.

Logo, por eliminação, associamos a responsabilidade da aceleração a essa energia escura [12, 13, 14]. O modelo Λ CDM – *cold dark matter* – adota a constante cosmológica como energia escura [12, 13, 15], configurando a saída mais simples. A densidade dessa energia é representada por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.48)$$

Adotemos, a partir daqui, $8\pi G = c = \hbar = 1$, e também o fator de escala atual como a unidade ($a_0 = 1$).

No modelo padrão, a energia escura tem a mesma equação de estado do vácuo,

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\Lambda, \quad (2.49)$$

onde a pressão negativa seria a responsável pela aceleração da expansão [16].

No modelo aqui estudado, a energia escura tem a mesma equação de estado (2.49), diferindo do padrão por Λ não ser mais uma constante, obedecendo a uma lei de evolução proposta por Schützhold [17, 18], segundo a qual Λ é proporcional ao parâmetro de Hubble,

$$\Lambda = \sigma H, \quad (2.50)$$

onde σ é uma constante positiva da ordem do cubo da massa do pión. Modelos com Λ variável são estudados tentando solucionar problemas que o modelo padrão deixa em aberto, como

a grande diferença entre o pequeno valor observado atualmente da constante cosmológica e o alto valor obtido pelas teorias quânticas de campo [15, 19]. O cálculo de energia do vácuo quântico resulta num valor 120 ordens de grandeza maior que o observado. Outro problema, conhecido como “problema da coincidência cósmica”, é o questionamento do porquê vivemos justamente no período em que as densidades de energia escura e matéria escura têm valores tão próximos.

Tomando a componente de matéria do fluido cósmico como um fluido perfeito, a sua equação de estado pode ser escrita de forma geral como

$$p_i = (\gamma - 1)\rho_i, \quad (2.51)$$

sendo p e ρ pressão e densidade, respectivamente, da matéria ($i = m$) ou da radiação ($i = r$). A matéria incoerente (poeira) tem pressão nula ($\gamma = 1$), enquanto para radiação $p_r = \rho_r/3$, ou seja, $\gamma = 4/3$.

Como no modelo padrão as componentes se conservam independentemente, pode-se aplicar a (2.12) separadamente para a matéria incoerente e para a radiação. Para a primeira, temos

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (2.52)$$

Pela definição (2.4) e sabendo que $p_m = 0$, chegamos a

$$\frac{d\rho_m}{\rho_m} = -3\frac{da}{a}. \quad (2.53)$$

Integrando-se (2.53), usando $\rho_{m,0}$ e a_0 como a densidade de matéria e o fator de escala atuais, obtemos $\rho_m(a)$:

$$\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}. \quad (2.54)$$

Tomando a densidade em relação à crítica, temos

$$\Omega_m = \Omega_{m,0}a^{-3} = \Omega_{m,0}(1+z)^3. \quad (2.55)$$

Repetindo o mesmo processo para a radiação, teremos

$$\Omega_r = \Omega_{r,0}a^{-4} = \Omega_{r,0}(1+z)^4. \quad (2.56)$$

Partindo da equação de Friedmann no formato (2.11), teremos

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k(1+z)^2]^{1/2}, \quad (2.57)$$

lembrando que $\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k = 1$. A última equação será utilizada em ajustes de supernovas.

O fator de desaceleração definido anteriormente pode ser reescrito como

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (2.58)$$

onde

$$\ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d}{dt}(aH) = a\frac{dH}{dt} + H\dot{a} = a\frac{dH}{dt} + aH^2. \quad (2.59)$$

Como temos o parâmetro de Hubble em função do redshift, aplicamos a regra da cadeia em dH/dt ,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (2.60)$$

e pela (2.19) obtemos

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a^2}\dot{a} = -(1+z)H. \quad (2.61)$$

Aplicando os resultados (2.59), (2.60) e (2.61) na (2.58), encontramos o fator de desaceleração com função do redshift,

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH}{dz}, \quad (2.62)$$

que serve para qualquer modelo. Se tomarmos o $H(z)$ para o Λ CDM com curvatura qualquer encontraremos

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)[3\Omega_{m,0}(1+z)^2 + 2(1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})(1+z)]}{2[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})(1+z)^2]}, \quad (2.63)$$

e para $z = 0$ obtemos o fator de desaceleração hoje em termos dos parâmetros de densidade

$$q_0 = \frac{\Omega_{m,0}}{2} - \Omega_{\Lambda,0}. \quad (2.64)$$

No plano $\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$ (Figura 2.2) temos a linha cheia indicando os pares de parâmetros que resultam em um universo sem aceleração. Para pontos acima desta reta o universo está

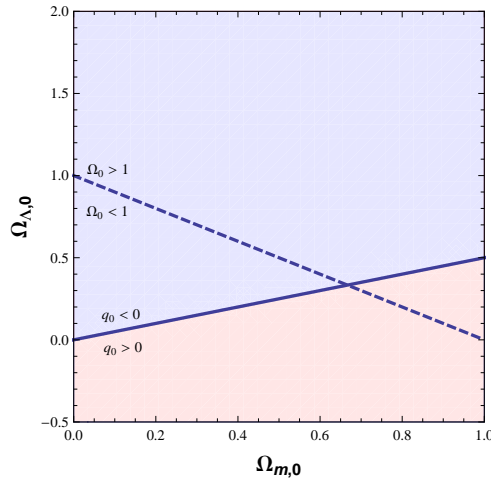


Figura 2.2: Regiões de universo acelerado ($q_0 < 0$) e de desacelerado ($q_0 > 0$) para modelo padrão com curvatura qualquer, contendo matéria sem pressão e constante cosmológica.

atualmente acelerado, e abaixo, desacelerado. Aproveitamos para mostrar a linha tracejada que contém os pontos para os quais o universo é plano ($\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$). Acima desta reta teríamos o universo fechado, e abaixo, aberto.

Como as expressões anteriores são função do redshift, fica complicado encontrar a idade do universo de imediato. Mas podemos utilizar de um artifício que será útil para qualquer modelo, mesmo quando não tenhamos soluções analíticas. Partimos da função do parâmetro de Hubble adimensional escrita como

$$E = \frac{1}{aH_0} \frac{da}{dt}. \quad (2.65)$$

Caso E esteja em função do redshift, sabemos que $z = -1 + 1/a$, e assim integramos a equação diferencial proveniente de (2.65)

$$\int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{aH_0} \frac{1}{E \left(\frac{1}{a} - 1\right)}, \quad (2.66)$$

onde admitimos que $a \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ (início da história do universo), e $a(t_0) = 1$. Assim, o parâmetro de idade será

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \frac{da}{aE \left(\frac{1}{a} - 1\right)}, \quad (2.67)$$

e a idade

$$t_0 = \left(\frac{9.775 \text{ Ganos}}{h} \right) \int_0^1 \frac{da}{aE \left(\frac{1}{a} - 1\right)}. \quad (2.68)$$

Vejamos agora alguns detalhes do caso particular em que $\Omega_k = 0$.

2.3.1 Λ CDM plano

Sendo o universo espacialmente plano, a função do parâmetro de Hubble se reduz a

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}. \quad (2.69)$$

No universo que em toda sua história esteve em expansão, fator de escala muito pequeno remete a tempos muito remotos, e para a muito grande, teremos tempos futuros. Analisando (2.69), o termo de radiação domina para $a \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$), e neste limite ela se torna simplesmente

$$ada \approx H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} dt. \quad (2.70)$$

Escolhendo $a(t=0) = 0$ na integração de (2.70), tem-se

$$a \approx \left(H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} t \right)^{1/2}. \quad (2.71)$$

Com este resultado calcula-se o valor do parâmetro de Hubble,

$$H \approx \frac{1}{2t}, \quad (2.72)$$

e o fator de desaceleração $q \approx 1$.

Verifica-se pela (2.69) que o período dominado por radiação é seguido por uma fase onde a expansão é regida pela matéria sem pressão. Neste caso, tem-se

$$a^{1/2} da \approx H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} dt, \quad (2.73)$$

e assim

$$a \approx \left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} t + C_1 \right)^{2/3}. \quad (2.74)$$

É possível estimar a expressão do fator de escala no momento de igualdade radiação-matéria (t_{rm}). Basta utilizar (2.54) e (2.56), fazendo $\rho_r = \rho_m$. Assim,

$$a_{rm} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}, \quad (2.75)$$

e então o redshift de uma radiação emitida no momento desta igualdade, segundo o modelo

padrão plano será

$$z_{rm} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}}. \quad (2.76)$$

Isolando o tempo em (2.71) e em (2.74), fazendo-os iguais em a_{rm} e usando (2.75), encontra-se a constante aditiva

$$C_1 \approx -\frac{1}{2}a_0^{3/2} \left(\frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \right)^{3/2} \approx 0. \quad (2.77)$$

O período dominado por radiação é muito curto, comparado com o dominado por matéria – o qual precisa ser longo, para permitir a formação de grandes estruturas. Assim, tomemos a equação de Friedmann, sem o termo de radiação, que pode ser expressa como

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \rho_{m,0} a^{-3} + \Lambda. \quad (2.78)$$

Resolvendo a equação diferencial acima obtemos

$$a(t) = \left(\frac{\rho_0}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.79)$$

com a qual, substituída em (2.4), encontramos o parâmetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\sqrt{3\Lambda}}{3} \frac{\sinh(\sqrt{3\Lambda}t)}{\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1}, \quad (2.80)$$

bem como a equação de evolução da densidade de matéria,

$$\rho_m(t) = 2\Lambda \left[\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1 \right]^{-1}. \quad (2.81)$$

Podemos então encontrar o parâmetro de densidade da matéria em função do tempo,

$$\Omega_m(t) = \frac{2}{\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) + 1}, \quad (2.82)$$

e com este resultado é possível escrever

$$\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) = \frac{2}{\Omega_m} - 1, \quad (2.83)$$

colocando a (2.80) em termos do parâmetro de densidade,

$$H = \frac{\sqrt{3\Lambda}}{3} [1 - \Omega_m]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.84)$$

Isolando o tempo em (2.83) temos

$$t = \frac{1}{\sqrt{3\Lambda}} \cosh^{-1} \left[\frac{2}{\Omega_m} - 1 \right], \quad (2.85)$$

e assim, multiplicando (2.84) e (2.85), usando os valores atuais, obtemos o parâmetro de idade atual

$$H_0 t_0 = \frac{1}{3} (1 - \Omega_{m,0})^{-\frac{1}{2}} \cosh^{-1} \left[\frac{2}{\Omega_{m,0}} - 1 \right], \quad (2.86)$$

e a idade do universo, segundo este modelo, será dada pela expressão

$$t_0 = \left(\frac{9.775 \text{Ganos}}{h} \right) \frac{1}{3} (1 - \Omega_{m,0})^{-\frac{1}{2}} \cosh^{-1} \left[\frac{2}{\Omega_{m,0}} - 1 \right]. \quad (2.87)$$

Na Figura 2.3, à esquerda, vemos as isócronas para este modelo específico. Assim, a mesma idade do universo pode ser obtida para diversos pares $(\Omega_{m,0}, h)$. É uma forma interessante de verificar, direto do plano com as curvas de nível de um determinado ajuste, os intervalos na idade do universo resultante deste ajuste.

É possível ainda obter o parâmetro de desaceleração na fase de matéria, a partir de (2.62),

$$q(z) = -1 + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3}{[1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^3]}, \quad (2.88)$$

o que resulta num fator de desaceleração atual, $z = 0$, dado pela expressão

$$q_0 = -1 + \frac{3}{2} \Omega_{m,0}, \quad (2.89)$$

que é equivalente à (2.64), fazendo-se $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$. Na Figura 2.3, à direita, observamos o comportamento de $q(z)$ desta classe de modelos, e sua dependência com o parâmetro de densidade de matéria. Notamos que, para valores intermediários de $\Omega_{m,0}$, na fase de matéria, há um período de desaceleração seguido por outro de aceleração (tempos atuais). Acredita-se que esta fase de desaceleração é importante para que se permita a formação de grandes estruturas como aglomerados e superaglomerados de galáxias. Se acompanharmos a linha vertical em $z = 0$ veremos a dependência do q_0 com $\Omega_{m,0}$.

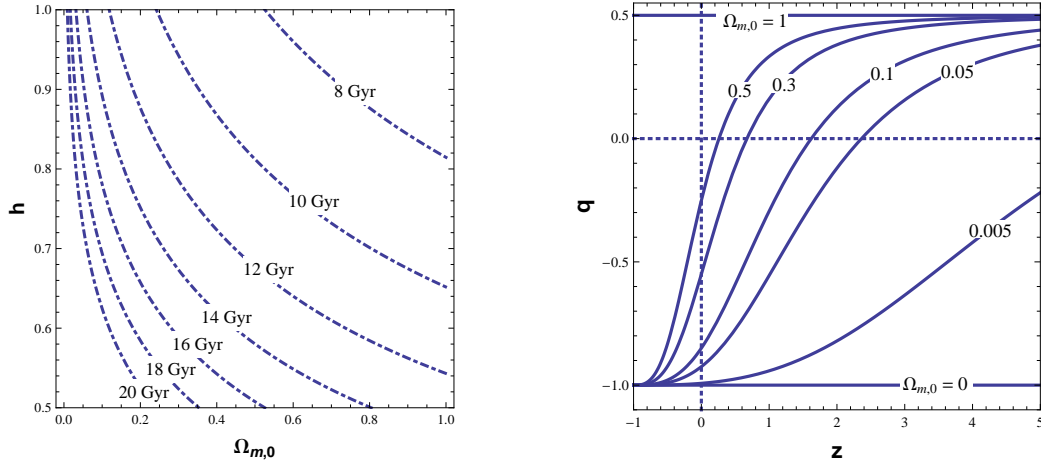


Figura 2.3: À esquerda, isócronas no plano $\Omega_{m,0} - h$ para o modelo Λ CDM com $k = 0$. À direita, comportamento do parâmetro de desaceleração na fase de matéria até tempos futuros ($z \rightarrow -1$) para este mesmo modelo.

2.3.2 x -CDM

Uma pequena variação do modelo padrão discutido na literatura é o x -CDM, no qual se permite que o parâmetro da equação de estado da energia escura seja uma constante diferente de -1 . Assim, temos

$$\omega_x = \frac{p_x}{\rho_x}, \quad (2.90)$$

e usando a (2.13), encontramos

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + \omega_x)\rho_x = 0, \quad (2.91)$$

que, por sua vez, resulta numa lei de evolução dada por

$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3(1+\omega_x)}. \quad (2.92)$$

Notamos, então, que este fluido exótico só terá densidade constante caso o parâmetro ω_x seja -1 . Nesta classe de modelos, a parâmetro de Hubble em função do redshift é

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{x,0}(1+z)^{3(1+\omega_x)}]^{1/2}, \quad (2.93)$$

com $\Omega_{x,0} = 1 - \Omega_{m,0}$.

Podemos encontrar o parâmetro de desaceleração utilizando (2.62) e (2.93). Ele será

dado por

$$q(z) = -1 \frac{3\Omega_{m,0}(1+z)^3 + 3(1+\omega_x)(1-\Omega_{m,0})(1+z)^{2+3\omega_x}}{2[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+\omega_x)}]}, \quad (2.94)$$

que para $z = 0$ se reduz a

$$q_0 = \frac{3\omega_x(1-\Omega_{m,0}) + 1}{2}, \quad (2.95)$$

coincidindo com (2.89) quando $\omega_x = -1$. Para cálculo da idade, podemos utilizar a (2.68).

Apresentamos este modelo como um exemplo de variação do Λ CDM plano, como um modelo que acrescenta um novo parâmetro ω_x . Se os dados indicarem a não necessidade da liberdade deste parâmetro, ou seja, que o melhor ajuste é próximo de $\omega_x = -1$, o modelo simplesmente se reduz ao padrão. O modelo aqui estudado não apresenta parâmetro excedente que pode ser levado a algum limite, voltando para o padrão. Como veremos a seguir, ele apresenta os mesmos parâmetros livres que o padrão, e não existe a possibilidade de se ter um best fit que seja a redução do modelo ao Λ CDM. Este modelo será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Classes de modelos com $\Lambda(t)$

Como possível solução para o problema da ordem de grandeza da energia escura (interpretada como energia de vácuo), o modelo com densidade de vácuo variável, com evolução descrita por

$$\Lambda = \sigma H, \quad (3.1)$$

é o foco principal desta pesquisa. Seu desenvolvimento teórico para o caso plano, que será revisado aqui, é discutido em detalhe em [20, 21]. Vejamos primeiro o caso mais geral, para um universo com radiação, matéria sem pressão, termo cosmológico variável e curvatura. Neste contexto a equação de Friedmann (2.10) é reescrita como

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \frac{\rho_{cr} - \rho_0}{a^2(t)} \right], \quad (3.2)$$

onde $\rho_0 = \rho_{m,0} + \rho_{r,0} + \rho_{\Lambda,0}$. Faremos novamente $8\pi G = 1$. Já a equação da continuidade (2.12) nos dará

$$\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_r + 3H \left(\rho_m + \rho_r + \frac{\rho_r}{3} \right) = -\dot{\rho}_\Lambda, \quad (3.3)$$

e podemos interpretar o segundo membro como um termo de fonte na equação – voltaremos a este ponto em breve. Como $\rho_m + \rho_r = \rho_T - \rho_\Lambda$, temos

$$(\dot{\rho}_T - \dot{\rho}_\Lambda) + 3H \left(\rho_T - \rho_\Lambda + \frac{\rho_r}{3} \right) = -\dot{\rho}_\Lambda. \quad (3.4)$$

Fazemos, então, a mudança

$$\frac{d}{dt} \rightarrow -H(1+z) \frac{d}{dz}, \quad (3.5)$$

e obtemos

$$-(1+z)\frac{d}{dz}(\rho_T - \rho_\Lambda) + 3(\rho_T - \rho_\Lambda) + \rho_r = H(1+z)\frac{d\rho_\Lambda}{dz}. \quad (3.6)$$

A partir de (3.2) encontramos uma expressão para $\rho_T - \rho_\Lambda$, e, aplicando o ansatz $\Lambda = \sigma H$, a (3.6) torna-se

$$-(1+z)\left(6H\frac{dH}{dz} + 2(1+z)(\rho_0 - \rho_{cr})\right) + 3(3H^2 + (1+z)^2(\rho_0 - \rho_{cr}) - \sigma H) + \rho_r = 0. \quad (3.7)$$

Quando discutirmos o caso plano, veremos que na fase de radiação o termo de acoplamento pode ser desprezado. Por isso já admitiremos aqui que a radiação se conserva separadamente, ou seja, $\rho_r = \rho_{r,0}(1+z)^4$. Dividindo (3.7) por $3H_0^2$ encontramos

$$-2(1+z)E\frac{dE}{dz} + 3E^2 + (\Omega_0 - 1)(1+z)^2 - \frac{\sigma E}{H_0} + \Omega_{r,0}(1+z)^4 = 0, \quad (3.8)$$

com Ω_0 sendo o parâmetro de densidade de energia total do universo hoje. Para obter a constante σ , é suficiente tomarmos o parâmetro de densidade da energia escura

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} = \frac{\sigma H}{3H_0^2}, \quad (3.9)$$

e como esta relação é válida para qualquer instante (qualquer z), determinamos a constante em termos dos parâmetros atuais

$$\sigma = 3H_0\Omega_{\Lambda,0}. \quad (3.10)$$

Se estudamos o universo em baixos redshifts, onde o termo de radiação tem pouca contribuição, podemos resolver a equação diferencial aproximada

$$-2(1+z)E\frac{dE}{dz} + 3E^2 + (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1)(1+z)^2 - 3\Omega_{\Lambda,0}E = 0, \quad (3.11)$$

cuja solução numérica será utilizada nos ajustes com supernovas do tipo Ia. Ressaltamos que a vantagem de escrevermos a equação diferencial em termos de E está no fato de sua definição já indicar a condição inicial a ser utilizada ($E(z=0) = 1$). Se fizermos o gráfico de $E(z)$, para alguns valores de $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ (Figura 3.1), poderemos estudar o comportamento desta função.

Podemos estudar o comportamento de $q(z)$ aplicando a solução numérica de (3.11) em

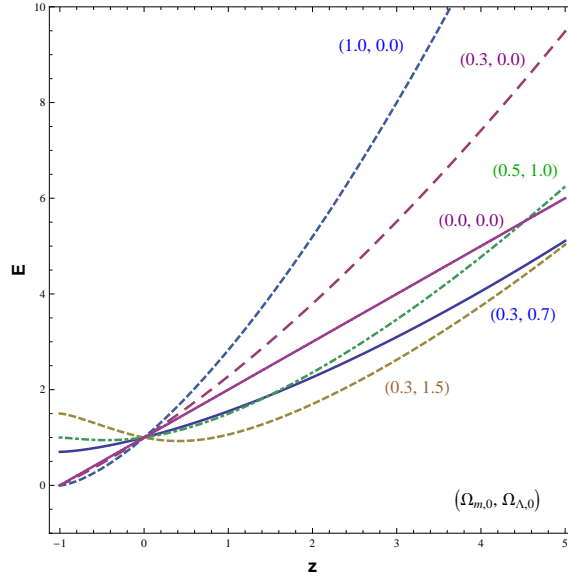


Figura 3.1: Soluções numéricas para o modelo $\Lambda(t)$ com curvatura, para alguns pares $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$.

(2.62). Em particular, para $z = 0$ temos

$$q_0 = -1 + \left. \frac{dE}{dz} \right|_{z=0}. \quad (3.12)$$

Como a (3.11) é válida para $z = 0$, encontramos

$$\left. \frac{dE}{dz} \right|_{z=0} = 1 - \Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{2}, \quad (3.13)$$

o que leva à mesma expressão obtida para o modelo padrão com curvatura qualquer

$$q_0 = -\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{2}, \quad (3.14)$$

remetendo ao mesmo plano apresentado na Figura 2.2. Já para o cálculo da idade, utilizaremos a (2.68).

3.1 $\Lambda(t)$ plano

Apresentemos agora o caso sem curvatura do modelo em questão. Como já dissemos, as observação da CMB indicam muito fortemente que o Ω_k seja aproximadamente zero, o que justifica o estudo detalhado desta situação. Uma vantagem técnica é a obtenção de expressões analíticas que descrevem este modelo.

Considerando que a matéria ou a radiação está dominando em determinado período da evolução do universo (que chamaremos genericamente de componente i -ésima), podemos escrever as equações de Friedmann e da continuidade para este caso:

$$3H^2 = \rho_i + \Lambda, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_i + \Lambda) + 3H(\rho_i + \Lambda + p_i + p_\Lambda) = 0. \quad (3.16)$$

Utilizando (2.51) e o ansatz, teremos

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = -\dot{\Lambda}. \quad (3.17)$$

Como já discutido, em modelo com constante cosmológica ($\dot{\Lambda} = 0$), (3.17) representa a equação de continuidade da i -ésima componente. Com Λ variável, ela pode ser interpretada como uma equação de continuidade com fonte, onde o decaimento da densidade de energia do vácuo acarreta produção de matéria ou um aumento na massa das partículas pré-existentes.

Fazendo uso da equação de estado (2.51), do ansatz e da equação de Friedmann, a última equação toma a forma

$$2\dot{H} + 3\gamma H^2 - \sigma\gamma H = 0. \quad (3.18)$$

Ao resolvê-la, obtemos a evolução temporal do parâmetro de Hubble, a menos de uma constante de integração relacionada com a escolha da origem do tempo,

$$H = \frac{\sigma/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}. \quad (3.19)$$

Ainda da equação de Friedmann encontramos que ρ_i depende do parâmetro de Hubble pela expressão

$$\rho_i = (3H - \sigma)H, \quad (3.20)$$

de onde é possível termos, usando (3.19),

$$\rho_i = \frac{\sigma^2}{12} \sinh^{-2}(\sigma\gamma t/4). \quad (3.21)$$

Novamente com (3.19), agora substituindo-a no ansatz, chegamos à evolução no tempo

da densidade de energia escura,

$$\Lambda = \frac{\sigma^2/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}. \quad (3.22)$$

Integrando a (3.19) em relação ao tempo mais uma vez, temos que a função do fator de escala é

$$a = C_i [\exp(\sigma\gamma t/2) - 1]^{2/3\gamma}, \quad (3.23)$$

com a qual expressamos as densidades de matéria e vácuo como funções do fator de escala,

$$\rho_i = \frac{\sigma^2}{3} \left(\frac{C_i}{a}\right)^{3\gamma/2} \left[1 + \left(\frac{C_i}{a}\right)^{3\gamma/2}\right] \quad (3.24)$$

e

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C_i}{a}\right)^{3\gamma/2}\right], \quad (3.25)$$

onde o índice i na constante é para ressaltar que ela assume valores diferentes para γ 's distintos.

É possível também escrever o parâmetro de desaceleração, através da (3.23), como

$$q = \frac{3\gamma}{2} \exp(-\sigma\gamma t/2) - 1. \quad (3.26)$$

3.1.1 Época dominada por radiação

Na fase dominada por radiação, usando-se $\gamma = 4/3$ em (3.23), encontramos a expressão do fator de escala,

$$a = C_r [\exp(2\sigma t/3) - 1]^{1/2}, \quad (3.27)$$

e também, usando-se (3.24) e (3.25), as densidades de radiação e energia escura,

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 C_r^4}{3a^4} + \frac{\sigma^2 C_r^2}{3a^2}, \quad (3.28)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C_r^2}{3a^2}. \quad (3.29)$$

Em tempos muito remotos ($\sigma t \ll 1$), a (3.27) pode ser aproximada por

$$a \approx \sqrt{2C_r^2 \sigma t/3}. \quad (3.30)$$

Neste limite de $a \rightarrow 0$, as densidades podem ser escritas como

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 C_r^4}{3a^4} = \frac{3}{4t^2}, \quad (3.31)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2 C_r^2}{3a^2} = \frac{\sigma}{2t}. \quad (3.32)$$

Verificamos que o fator de escala (3.30) tem a mesma dependência temporal que o do modelo padrão, (2.71), e a densidade de radiação também evolui com a^{-4} . Ainda do fator de escala (3.30) obtemos $Ht = 1/2$ e $q = 1$, que são os mesmos resultados do Λ CDM apresentados no capítulo anterior.

Comparando (3.31) e (3.32), percebe-se que a radiação diverge mais rapidamente que a energia escura quando $a \rightarrow 0$. Conclui-se então que em tempos remotos da história do universo, segundo este modelo, a expansão é dominada completamente pela radiação. O segundo termo das expressões (3.28) e (3.29) reflete o acoplamento entre as componentes, o decaimento da energia de vácuo produzindo matéria. Mas como o primeiro termo de (3.28) domina neste limite, a produção de matéria não interfere em processos que ocorram nesta época, como, por exemplo, a nucleossíntese¹.

3.1.2 Época dominada por matéria

Tomando-se $\gamma = 1$ em (3.23), encontramos o fator de escala na fase em que a expansão é regida pela matéria,

$$a = C_m [\exp(\sigma t/2) - 1]^{2/3}, \quad (3.33)$$

que, para tempos distantes no passado comparados com o momento atual, podemos aproximar por

$$a = C_m (\sigma t/2)^{2/3}, \quad (3.34)$$

apresentando a mesma dependência temporal que no modelo padrão, como visto em (2.74).

Usando novamente as (3.24) e (3.25), agora com $\gamma = 1$, temos

$$\rho_m = \frac{\sigma^2}{3} \left[\left(\frac{C_m}{a} \right)^3 + \left(\frac{C_m}{a} \right)^{3/2} \right] \quad (3.35)$$

¹Para uma discussão sobre vínculos observacionais provenientes da nucleossíntese primordial sobre modelos com decaimento do vácuo, veja [22].

e

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C_m}{a} \right)^{3/2} \right]. \quad (3.36)$$

O primeiro termo de (3.35) é o usual de poeira, como visto no Λ CDM, enquanto o segundo está relacionado com a produção de matéria devido ao decaimento da densidade do vácuo. Na análise deste modelo será feita a suposição de que a energia escura só decai em matéria escura, e não em bariônica ou radiação. Pode ser mostrado também que a época de matéria é suficientemente longa para possibilitar a formação de grandes estruturas [20].

Como já vimos, $\sigma = 3H_0\Omega_{\Lambda,0}$, e neste caso poderá ser escrito também como

$$\sigma = 3H_0(1 - \Omega_{m,0}). \quad (3.37)$$

Invertendo-se a função (3.19) para obter $t(H)$, usando $\gamma = 1$, encontramos a expressão do parâmetro de idade nesta época,

$$Ht = \frac{2}{3(\Omega_m - 1)} \ln \Omega_m, \quad (3.38)$$

de sorte que a idade do universo hoje será dada por

$$t_0 = \left(\frac{9.775 \text{Ganos}}{h} \right) \frac{2}{3(\Omega_{m,0} - 1)} \ln \Omega_{m,0}. \quad (3.39)$$

As isócronas referentes a este modelo no plano $\Omega_{m,0} - h$ encontram-se na Figura 3.2 (à esquerda).

Podemos obter a função $H(z)$ substituindo (3.33) na definição do redshift,

$$(z + 1)^{3/2} = \frac{e^{\sigma t_0/2} - 1}{e^{\sigma t/2} - 1}. \quad (3.40)$$

Da expressão (3.19) com $\gamma = 1$ encontramos

$$e^{\sigma t/2} = \frac{3H}{3H - \sigma}, \quad (3.41)$$

que, substituída na equação (3.40), com auxílio de (3.37), leva à função procurada,

$$H(z) = H_0 \left[1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(1 + z)^{3/2} \right]. \quad (3.42)$$

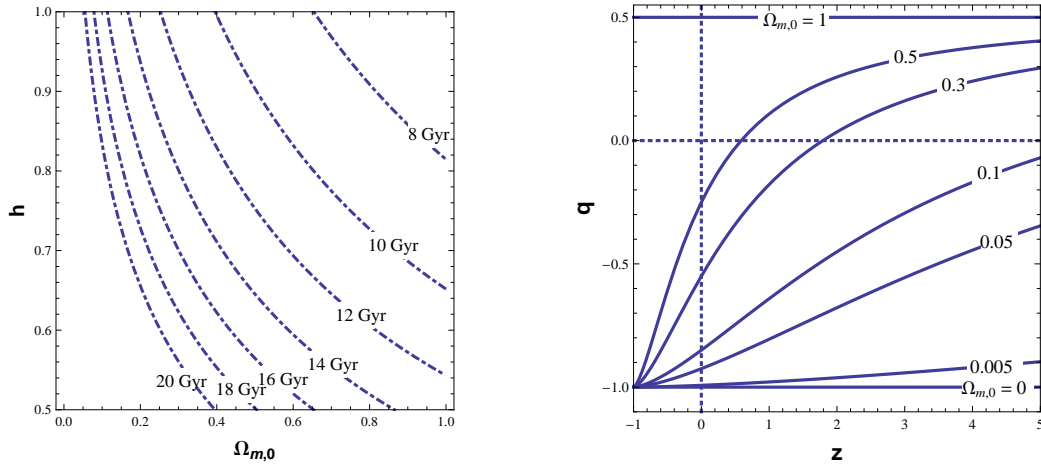


Figura 3.2: À esquerda, isócronas no plano $\Omega_{m,0} - h$ para o modelo $\Lambda(t)$ com $k = 0$. À direita, comportamento do parâmetro de desaceleração na fase de matéria até tempos futuros ($z \rightarrow -1$) para este mesmo modelo.

Substituindo (3.42) em (2.62) encontramos que o fator de desaceleração na fase de matéria para o modelo $\Lambda(t)$ é dado por

$$q(z) = -1 + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}}{[1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}]}. \quad (3.43)$$

Com o resultado anterior, temos que o fator de desaceleração atual é

$$q_0 = -1 + \frac{3}{2} \Omega_{m,0}, \quad (3.44)$$

coincidindo com a expressão para o modelo padrão, (2.89). O comportamento de q com z está ilustrado na Figura 3.2 (à direita).

3.1.3 Igualdade radiação-matéria

Nesta seção encontramos a expressão que nos dá o valor estimado do redshift de transição entre a fase dominada por radiação e a dominada por matéria. Para isto, primeiramente tomamos um redshift muito alto – passado distante – na época dominada por matéria, quando $\rho_m \approx \rho_T$, e assim, com a aproximação $z \gg 1$ em (3.42), tem-se

$$\rho_m \approx 3H_0^2 \Omega_{m,0}^2 z^3. \quad (3.45)$$

Por outro lado, como a radiação conserva-se separadamente neste modelo, teremos, para

$z \gg 1$,

$$\rho_r \approx \rho_{r,0} z^4. \quad (3.46)$$

No momento da igualdade $\rho_m(z_{rm}) = \rho_r(z_{rm})$, e encontra-se

$$z_{rm} = \frac{\Omega_{m,0}^2}{\Omega_{r,0}}. \quad (3.47)$$

Ao compararmos com a expressão do z_{rm} do Λ CDM (2.76), verificamos que para o $\Lambda(t)$ há um $\Omega_{m,0}$ adicional, o que acarreta em, caso o parâmetro de densidade de matéria escura seja 0.3, o redshift de transição radiação-matéria no modelo padrão ser o triplo do modelo $\Lambda(t)$.

3.1.4 Parâmetro de Hubble

Nas seções anteriores foram discutidas as épocas de radiação e de matéria separadamente, assim como a sua transição, mas o parâmetro de Hubble não foi escrito levando em conta a contribuição das três componentes ao mesmo tempo, ou seja, uma expressão de H com validade para qualquer z . Ela será necessária na análise da radiação cósmica de fundo, como será visto no sexto capítulo.

Partimos, então de (3.8), tomando o caso plano, ou seja,

$$-2EE'(1+z) + 3E^2 - 3\Omega_{\Lambda,0}E + \Omega_{r,0}(1+z)^4 = 0. \quad (3.48)$$

É interessante verificar que, para redshifts muito baixos, e sabendo de antemão que $\Omega_{r,0}$ é muito baixo comparado com os outros parâmetros de densidade, o último termo da (3.48) pode ser desprezado. E assim obteríamos

$$E = \Omega_{\Lambda,0} + C_1(1+z)^{3/2}, \quad (3.49)$$

onde C_1 é uma constante que podemos determinar sabendo que $E(0) = 1$ e que, como $\Omega_{r,0}$ é muito pequeno, $\Omega_{T,0} \approx \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$. Logo, encontramos

$$E = 1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}, \quad (3.50)$$

que é exatamente a expressão (3.42) obtida para o parâmetro de Hubble na fase de matéria, mostrando assim que os cálculos são consistentes.

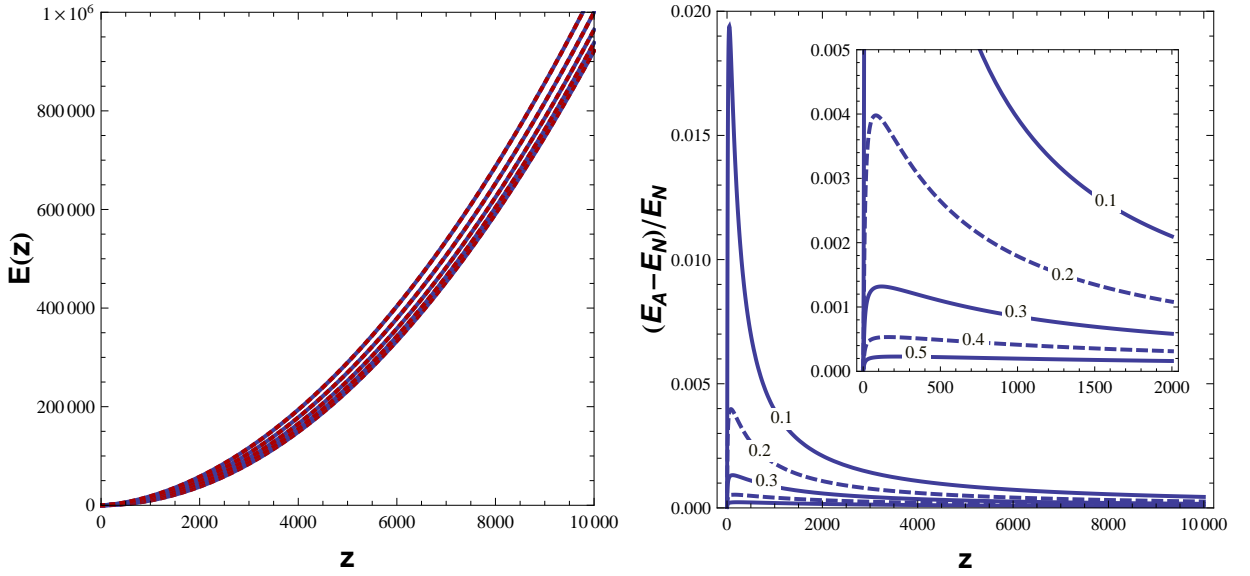


Figura 3.3: Verificação da equação (3.52).

Mas, como queremos uma função $E(z)$ que possa ser usada para qualquer valor de z , temos que resolver a (3.48) com todos os seus termos. Novamente chegamos numa equação que não tem solução analítica. Por questão de simplicidade de análise, procuramos uma função analítica que seja uma boa aproximação da solução numérica. A partir da equação de Friedmman ($3H^2 = \rho_m + \Lambda + \rho_r$), usando o parâmetro de Hubble da fase de matéria (3.42) para determinar $\rho_m + \Lambda$, e lembrando que a radiação conserva-se independentemente, temos

$$3H^2 = 3H_0^2 \left[1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0} (1+z)^{3/2} \right]^2 + \rho_{r,0} (1+z)^4, \quad (3.51)$$

que reduz-se a

$$H = H_0 \sqrt{\left[1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0} (1+z)^{3/2} \right]^2 + \Omega_{r,0} (1+z)^4}. \quad (3.52)$$

É fato que a (3.52) não é solução de (3.48), mas podemos verificar se ela é uma boa aproximação. Na Figura 3.3, à esquerda, temos, para $\Omega_{m,0} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 , a função $E(z)$ como solução numérica de 3.48 em azul, e pontilhado, em vermelho, a proposta de solução aproximada analítica. Nesta escala a superposição é muito boa. Verificamos ainda qual o desvio percentual da solução analítica (E_A) em relação à numérica (E_N), apresentado na Figura 3.3, à direita. Nas faixas de valores de $\Omega_{m,0}$ que trabalharemos, a aproximação analítica descreve bem o $E(z)$ deste modelo.

Quando $z \gg 1$, podemos escrever a (3.52) como

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}^2 z^3 + \Omega_{r,0} z^4}, \quad (3.53)$$

e ainda, na fase da radiação teremos

$$H \approx H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} z^2, \quad (3.54)$$

e na da matéria,

$$H \approx H_0 \Omega_{m,0} z^{3/2}. \quad (3.55)$$

Antes de aplicarmos testes observacionais neste modelo, fazemos uma breve apresentação de algumas soluções da Cosmologia de Brans-Dicke, nas quais testes de supernovas também foram aplicados. Assim poderemos discutir os resultados de diversos modelos, comparando e utilizando os métodos de seleção discutidos no capítulo 2.

3.2 Soluções exatas na Cosmologia de Brans-Dicke

Nesta sessão iremos abordar classes de modelos construídas no cenário da Cosmologia de Brans-Dicke [1, 23], onde a “constante gravitacional” é, na verdade, uma função do tempo.

Continuaremos adotando a mesma equação de estado para a energia escura, e a densidade deste termo será também proporcional ao parâmetro de Hubble. Como lei de variação do G , tomamos a relação de Eddington-Dirac, baseada na coincidência dos grandes números, $G \approx H/m_\pi^3$, onde m_π é a massa do pión [24]. Fazemos, então,

$$G = \frac{H}{8\pi\lambda}, \quad (3.56)$$

onde λ é da ordem de m_π^3 . Relacionamos o campo escalar de Brans-Dicke com a “constante” gravitacional através de

$$\phi = \frac{G_0}{G}, \quad (3.57)$$

considerando G_0 uma constante da ordem da unidade.

Adotamos o ansatz $\Lambda = \beta H^2$, com β sendo uma constante da ordem da unidade². Com este ansatz, quatro classes de universos são encontradas [30]: um caracterizado por parâmetro

²Esta lei de variação para o termo cosmológico está presente na literatura [25, 26, 27, 28, 29].

de desaceleração constante, e três com q variável. Dentre elas, uma apresenta q sempre muito positivo, outra tem q sempre muito negativo, e a terceira é caracterizada inicialmente por expansão desacelerada, seguida de fase acelerada nos tempos mais tardios, com uma futura singularidade do tipo *Big Rip*³. Destes quatro casos, consideramos que apenas o primeiro e o último apresentam alguma motivação para fazermos a verificação observacional.

Os modelos são desenvolvidos em um espaço-tempo de FLRW espacialmente plano, preenchido por matéria sem pressão e energia escura, para a qual temos a equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Neste cenário as equações de Brans-Dicke tomam a forma [1, 23]

$$\frac{d(\dot{\phi}a^3)}{dt} = \frac{8\pi}{3+2\omega}(\rho + 3\rho_\Lambda)a^3, \quad (3.58)$$

$$\dot{\rho} = -3H\rho_m, \quad (3.59)$$

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3\phi} - \frac{\dot{\phi}}{\phi}H + \frac{\omega}{6}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2}. \quad (3.60)$$

Usando a relação de Eddington-Dirac $G = \frac{H}{8\pi\lambda}$ e o ansatz $\Lambda = \beta H^2$, obtemos

$$\rho_\Lambda = \beta\lambda H. \quad (3.61)$$

Aplicando a relação anterior na função $\phi = G_0/G$, nós temos

$$\phi = \frac{8\pi\lambda G_0}{H} \quad (3.62)$$

e

$$\dot{\phi} = 8\pi\lambda G_0(1+q). \quad (3.63)$$

Com estes resultados, (3.58)-(3.60) podem ser reescritos como

$$(3+2\omega)\lambda G_0 [3H(1+q) + \dot{q}] = \rho + 3\beta H\lambda, \quad (3.64)$$

$$\dot{\rho} + 3H\rho - 3\beta\lambda H^2 = 0, \quad (3.65)$$

$$\rho = 3\lambda G_0 H \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right]. \quad (3.66)$$

³*Big Rip*, ou Grande Ruptura, é o caso em que a densidade de energia do universo torna-se infinita em tempo finito.

Se levarmos (3.66) à (3.64) obtemos

$$\frac{\beta}{G_0} = \frac{(3 + 2\omega)[3H(1 + q) + \dot{q}]}{3H} - [2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2]. \quad (3.67)$$

A quantidade β/G_0 é uma constante, e de agora em diante podemos distinguir entre dois casos: $\dot{q} = 0$ e $\dot{q} \neq 0$.

3.2.1 Caso $\dot{q} = 0$

Neste caso, (3.67) se torna

$$\frac{\beta}{G_0} = (3 + 2\omega)(1 + q) - [2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2]. \quad (3.68)$$

Usando (3.65) e (3.66), e considerando a condição $H \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow 0$ ao determinar a constante de integração, podemos facilmente encontrar

$$H = \frac{n}{t}, \quad (3.69)$$

onde

$$n = \frac{G_0[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2]}{3G_0[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2] - \beta}. \quad (3.70)$$

De (3.69) derivamos o fator de escala e o parâmetro de desaceleração, respectivamente,

$$a = At^n, \quad (3.71)$$

$$q = (1 - n)/n. \quad (3.72)$$

Assim, o fator de escala pode ser expressado por

$$a = At^{\frac{1}{1+q}}. \quad (3.73)$$

Com a ajuda de (3.69) e (3.72) escrevemos o parâmetro de idade como

$$Ht = H_0t_0 = \frac{1}{1 + q}. \quad (3.74)$$

Usando (3.70) e (3.72) temos

$$\frac{\beta}{G_0} = \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] (2-q), \quad (3.75)$$

e a densidade de energia escura será, então,

$$\rho_\Lambda = \lambda G_0 H \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] (2-q). \quad (3.76)$$

O parâmetro de densidade de matéria é obtido a partir de $\Omega_m = \rho_m/\rho_c$, onde $\rho_m = \rho - \rho_\Lambda$ e $\rho_c = 3\lambda H$.

$$\Omega_m = \Omega_{m,0} = \frac{\beta}{3} \left(\frac{1+q}{2-q} \right). \quad (3.77)$$

Percebemos, assim, que $\Omega_{m,0}$ só pode ser dado, para este modelo, em termos da constante β (ou G_0 via (3.75)). Como estas constantes são parâmetros indeterminados, será impossível encontrar o valor de $\Omega_{m,0}$.

Das equações (3.73) e (3.74), e usando o redshift em termos do fator de escala, encontramos a lei de evolução $H(z)$,

$$H(z) = H_0 (z+1)^{1+q}. \quad (3.78)$$

Desta maneira fica explícito que iremos ajustar, neste modelo, os parâmetros H_0 e q .

3.2.2 Caso $\dot{q} \neq 0$

Voltando à equação (3.67), agora com $\dot{q} \neq 0$, encontramos

$$\frac{(3+2\omega)dq}{\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{G_0(6\omega+6)^2 + 6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2} \right) - \left(q + \frac{6+7\omega}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{da}{a}. \quad (3.79)$$

Esta equação leva a algumas soluções apresentadas em [30]. O único caso de interesse aqui é quando

$$a = A \left| \frac{\kappa + q + \frac{6+7\omega}{\omega}}{\kappa - q - \frac{6+7\omega}{\omega}} \right|^{\frac{3+2\omega}{\omega\kappa}}, \quad (3.80)$$

onde A é uma constante de integração e

$$\kappa^2 \equiv \frac{G_0(6\omega+6)^2 + 6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2} \quad (3.81)$$

é positivo. Definindo $B = \kappa + (6 + 7\omega)/\omega$, $C = \kappa - (6 + 7\omega)/\omega$ e $D = (3 + 2\omega)/\omega\kappa$, temos

$$a = A \left| \frac{B+q}{C-q} \right|^D. \quad (3.82)$$

Foquemos no caso em que

$$\frac{B+q}{C-q} > 0 \Rightarrow a = A \left(\frac{B+q}{C-q} \right)^D. \quad (3.83)$$

Os parâmetros ω e β/G_0 devem assumir os valores -1 e -3 , respectivamente, e as soluções obtidas são

$$x = \left(\frac{\sqrt{12} + 1 + q}{\sqrt{12} - 1 - q} \right)^{-\frac{1}{\sqrt{12}}}, \quad (3.84)$$

$$q = \frac{(\sqrt{12} - 1)x^{-\sqrt{12}} - \sqrt{12} - 1}{x^{-\sqrt{12}} + 1}, \quad (3.85)$$

$$H = C_1 x^{\sqrt{12}} \left(x^{-\sqrt{12}} + 1 \right)^2, \quad (3.86)$$

$$C_1 t = -\frac{1}{\sqrt{12} (x^{\sqrt{12}} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad (3.87)$$

onde $x = a/A$ e C_1 é uma constante de integração.

As quantidades (3.86) e (3.87) podem ser reescritas como funções do parâmetro de desaceleração com o auxílio de (3.84):

$$H = -\frac{48C_1}{q^2 + 2q - 11}, \quad (3.88)$$

$$C_1 t = \frac{\sqrt{12} - 1 - q}{24}. \quad (3.89)$$

Com estes resultados, o parâmetro de idade é escrito como

$$Ht = \frac{2}{q + \sqrt{12} + 1}. \quad (3.90)$$

Para encontrarmos a função $H(z)$ usamos (3.84) em (2.19), e com as equações (3.88)-

(3.90) encontramos

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\left[(\sqrt{12} - 1 - q_0) (z + 1)^{-\sqrt{12}} + \sqrt{12} + 1 + q_0 \right]^2}{48 (z + 1)^{-\sqrt{12}}}. \quad (3.91)$$

Subtraindo (2.48) de (3.66) e usando (3.88) obtemos

$$\rho_m = -24\lambda G_0 C_1 \left(\frac{q^2 + 8q + 19}{q^2 + 2q - 11} \right), \quad (3.92)$$

enquanto que

$$\frac{\Omega_m}{G_0} = \frac{1}{6} (q^2 + 8q + 19). \quad (3.93)$$

Novamente, Ω_m é determinado como uma razão do G_0 .

Notamos que, neste caso, há uma fase inicial desacelerada que permite a formação de grandes estruturas, seguida de uma acelerada, em concordância com dados observacionais. Encontramos o redshift de transição ao levar (3.84) em (2.19), fazendo $q = 0$. Temos, assim,

$$z_t = \left[\frac{11 - (\sqrt{12} + 1)q_0}{11 + (\sqrt{12} - 1)q_0} \right]^{\frac{1}{\sqrt{12}}} - 1. \quad (3.94)$$

Apresentados os modelos teóricos, vejamos a seguir qual a metodologia adotada na verificação observacional destes modelos.

Capítulo 4

Ferramentas de Análise Estatística

Nas últimas décadas, a aquisição de grandes conjuntos de dados do Universo provocou uma forte transição na Cosmologia: ela deixa de ser uma ciência faminta por dados, para ser uma ciência dirigida pelos dados, sendo necessário o desenvolvimento de ferramentas estatísticas cada vez mais sofisticadas [31]. Vale ressaltar que a Cosmologia está intrinsecamente relacionada com a Estatística, de tal forma que teorias de origem e evolução do Universo não irão prever que uma determinada galáxia irá ser formada em um determinado ponto no espaço-tempo. Qualquer teoria será capaz de prever propriedades estatísticas médias de nosso Universo, e nós só podemos observar uma realização particular deste.

Principalmente após análises do espectro de anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas, diz-se frequentemente que a Cosmologia entrou numa era de precisão. “Precisão” requer um bom conhecimento das incertezas e intervalos de confiança das medidas, o que é uma sentença própria da estatística.

No âmbito da Cosmologia Observacional, temos os dados e desejamos tratá-los de alguma maneira, sendo os problemas da análise de dados geralmente *problemas inversos*, que podemos classificar como:

- Teste de hipótese;
- Estimativa de parâmetros;
- Seleção de modelos.

Em relação ao primeiro tipo, podemos perguntar se as observações de estruturas em larga escala são consistentes com a hipótese de que o Universo é espacialmente plano. Já no segundo tipo, queremos saber, por exemplo, no modelo de Big Bang, qual o valor do

parâmetro de densidade atual, ou qual o valor da constante de Hubble. Como exemplo do último tipo, temos a questão: “os dados cosmológicos favorecem o modelo de Big Bang ou o modelo de universo estacionário?”

É interessante destacar que a rigor, na estimativa de parâmetros, podemos entender que cada conjunto de parâmetros determina um modelo. Assim, ao estimarmos os parâmetros que melhor ajustam uma *classe de modelos*, já estaríamos realizando uma seleção de modelos. O último item estará mais relacionado a diferentes classes de modelos, que não sejam distintos apenas pelos valores de seus parâmetros, mas pelas hipóteses tomadas na construção teórica das mesmas, podendo, inclusive, ter diferentes parâmetros livres, e em quantidades diversas.

Usaremos, no estudo aqui apresentado, a estimativa de parâmetros e a seleção de modelos, sendo que o teste de hipótese só será realizado via um determinado modelo. E já que o tratamento estatístico está em pauta, façamos uma revisão do aparato estatístico utilizado, retomando a própria definição de probabilidade.

4.1 Probabilidade

O mundo está dividido entre *Frequentistas* e *Bayesianos* [31, 32]. Para frequentistas, probabilidade \mathcal{P} está relacionada com frequência de ocorrência

$$\mathcal{P} = \frac{n}{N}, \quad (4.1)$$

onde n é o número de sucessos dentre N tentativas. A definição mais rigorosa seria o número (4.1), quando a quantidade de tentativas independentes tendem a infinito. Os bayesianos interpretam probabilidades como o *grau de confiança em uma hipótese*. Dada uma variável aleatória x , $\mathcal{P}(x)$ será a probabilidade de x assumir um valor específico – esta função define uma distribuição de probabilidades. Caso x tenha espectro contínuo, $\mathcal{P}(x)dx$ é interpretado como a densidade de probabilidade, ou seja, a probabilidade de uma variável aleatória ter um valor entre x e $x + dx$. Frequentistas consideram distribuição de probabilidades de eventos, enquanto bayesianos consideram hipóteses como eventos. Em ambas abordagens, as seguintes regras se aplicam:

1. $\mathcal{P}(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{P}(x) = 1$;¹

¹Para o caso discreto, fazemos um somatório no lugar da integração.

3. Para eventos independentes, $\mathcal{P}(x_1 \cup x_2) \equiv \mathcal{P}(x_1.OU.x_2) = \mathcal{P}(x_1) + \mathcal{P}(x_2)$;
4. Em geral, $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1)\mathcal{P}(x_2|x_1)$.

Neste último item, entendemos que a probabilidade de x_1 e x_2 ocorrerem é a probabilidade de x_1 vezes a probabilidade condicional de x_2 , caso x_1 já tenha ocorrido. Apenas no caso de eventos independentes, $\mathcal{P}(x_2|x_1) = \mathcal{P}(x_2)$ e então $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1)\mathcal{P}(x_2)$. Como a probabilidade de que dois eventos ocorram pode ser escrita como $\mathcal{P}(x_1, x_2)$ ou $\mathcal{P}(x_2, x_1)$, se substituirmos x_1 por D e x_2 por H , obtemos o *teorema de Bayes*:

$$\mathcal{P}(H|D) = \frac{\mathcal{P}(H)\mathcal{P}(D|H)}{\mathcal{P}(D)}, \quad (4.2)$$

onde H refere-se ao modelo (hipótese), e D aos dados. O termo $\mathcal{P}(D|H)$ é conhecido como *likelihood* (verossimilhança), e nos diz a probabilidade dos dados que temos, admitindo que a hipótese H_i é verdadeira, que iremos representar também por $\mathcal{L}(H_i)$. $\mathcal{P}(H)$ é chamado de *prior*, onde acrescentamos informações que temos a priori, e $\mathcal{P}(D)$ nos dá a normalização. Assim, $\mathcal{P}(H|D)$ será a probabilidade posterior, a referente ao modelo, tendo ocorrido os dados D .

A estatística bayesiana é uma poderosa ferramenta, com a qual podemos analisar o modelo tomando diferentes priors, marginalizar sobre parâmetros e obter função de distribuição de probabilidades de hipóteses. Como as análises feitas não utilizam a análise bayesiana em toda sua complexidade, façamos um recorte sobre as técnicas aplicadas.

4.1.1 Marginalização

A marginalização é um conceito originariamente bayesiano. Se tivermos uma distribuição multivariada $\mathcal{P}(x, y)$, como sendo a probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias, poderemos estudar a distribuição de probabilidade de uma variável individual, integrando a distribuição multivariada sobre todos os possíveis valores da outra.

Caso o modelo em estudo seja descrito por três parâmetros, digamos $\theta = \{\Omega_m, w, H_0\}$, obtemos a distribuição de probabilidade individual do parâmetro Ω_m fazendo

$$\mathcal{P}(\Omega_m) = \iint dH_0 dw \mathcal{P}(\Omega_m, w, H_0). \quad (4.3)$$

Um exemplo de expressão analítica, resultado de marginalização em um determinado parâmetro, será apresentado na próxima sessão.

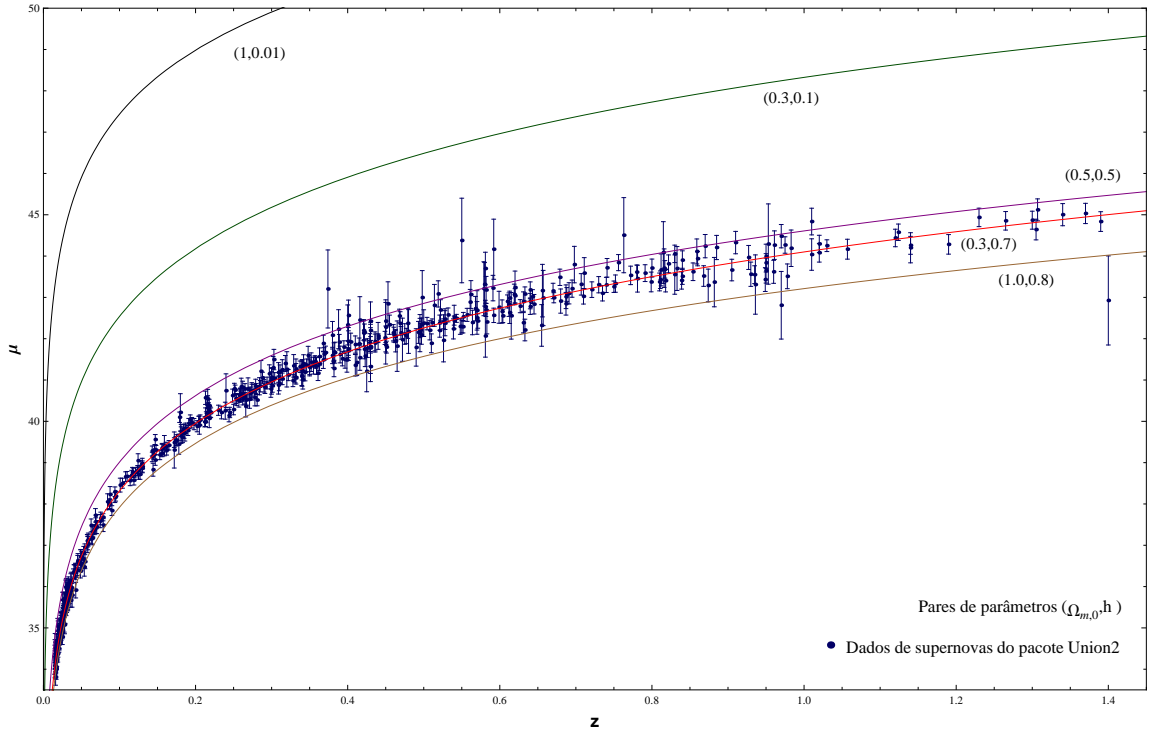


Figura 4.1: Pacote de dados de supernovas do tipo Ia do *Union 2 Supernova Compilation* e curvas teóricas para o modelo padrão plano, variando aleatoriamente os valores dos parâmetros.

4.2 Estimando parâmetros

Tendo em mãos um conjunto de dados observacionais e uma classe de modelos descrita pelos parâmetros θ , queremos ajustar esta classe de modelo aos dados. O modelo é motivado por argumentos físicos e descrito por uma função. Em nossos casos, o modelo cosmológico será descrito pelo parâmetro de Hubble em função do redshift – e dos parâmetros –, $H(z|\theta)$. Havendo alguma propriedade física a que tenhamos acesso observacionalmente (direta ou indiretamente) e que também possa ser prevista através de um modelo, seremos capazes de confrontar estes valores. Um exemplo é o módulo de distância: ele pode ser obtido “indiretamente” pela magnitude aparente de um objeto observado, definindo a quantidade μ_i^{obs} , como também previsto teoricamente, dependente das características do modelo, $\mu^{teo} = \mu(z_i|\theta)$. Seguiremos nesta sessão utilizando este exemplo, com uma classe de modelos (modelo padrão) e um conjunto de dados (Union2) específicos. Maiores detalhes sobre estimadores e dados específicos serão discutidos nos capítulos posteriores.

Agora precisamos definir uma função que quantifique a concordância entre o modelo e os dados, para que maximizando a concordância, obtenhamos os parâmetros que melhor ajustam o modelo. Supondo que nossas observações tenham erros gaussianos não-

correlacionados, o método de ajuste aplicado utiliza a função χ^2 , definida como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[D_i - y(x_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.4)$$

onde a soma é de todos os n dados D_i 's, e y nos fornece a predição do modelo ao fixar valores dos parâmetros representados por $\theta = \{\theta_j\}$. No caso de supernovas do tipo Ia usaremos o módulo de distância, e o χ^2 pode ser escrito como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\mu_i^{obs} - \mu(z_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.5)$$

onde para a i -ésima supernova temos o valor observado (“experimental”) do módulo de distância (μ_i^{obs}), e do desvio para o vermelho do espectro desta supernova (z_i , chamado de *redshift*). Adotando valores para os parâmetros (θ), calculamos o valor teórico do módulo de distância para aquele redshift. A estas medidas estão associados erros: no módulo de distância, no redshift ou ainda erros sistemáticos. O denominador será então $\sigma_i^2 = \sigma_{\mu,i}^2 + \sigma_{z,i}^2 + \sigma_{sist}^2$. Em geral o erro na medida do redshift é desprezado. Fazemos o cálculo desta razão para todos os outros $n - 1$ dados, e efetuamos o somatório. Alterando os valores dos parâmetros livres, vamos dizer que o conjunto de parâmetros que melhor ajustam os dados será aquele que resulta no mínimo χ^2 . A Figura 4.1 ilustra bem o comportamento do modelo com a mudança dos parâmetros, e aponta para a busca daquele par de parâmetros que melhor descreva os dados. Já no gráfico à esquerda da Figura 4.2, explicitamos que o χ^2 é função dos parâmetros.

A likelihood utilizada é definida como

$$\mathcal{P}(D|\theta) = C \exp \left[-\frac{\chi^2(\theta)}{2} \right]. \quad (4.6)$$

A constante C será incorporada à normalização da distribuição, e caso o *prior* seja uniforme, ou seja, caso não tenhamos nenhuma informação adicional sobre o sistema que associe pesos extras à distribuição, a probabilidade posterior será proporcional à *likelihood*. Podemos verificar que, neste caso, o par de parâmetros que minimiza o χ^2 é o mesmo que maximiza a probabilidade – ver Figura 4.2. Logo, os parâmetros do melhor ajuste são aqueles que têm maior probabilidade de serem os verdadeiros, de acordo com os dados coletados.

Mas os valores de melhor ajuste não nos dão toda a informação. É necessário obter barras

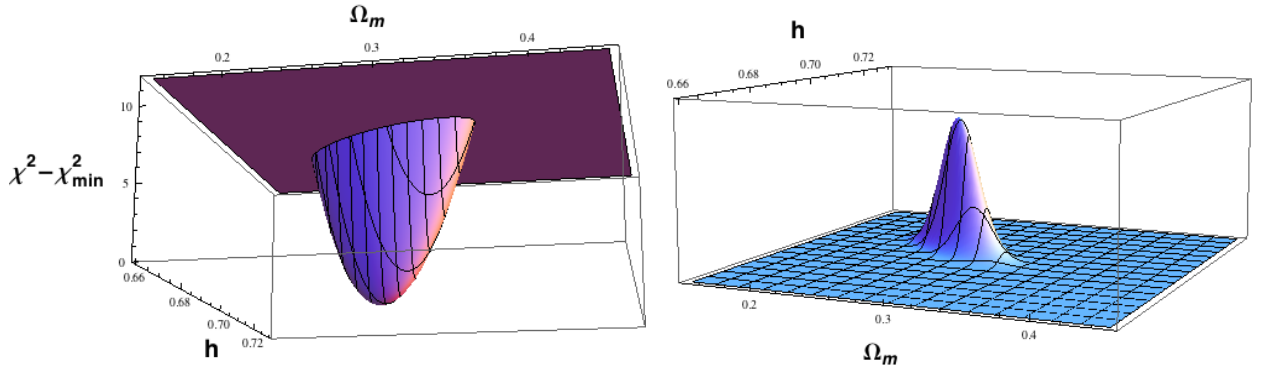


Figura 4.2: À esquerda, gráfico de $\chi^2 - \chi_{min}^2$ como função dos parâmetros. À direita, likelihood também como função dos parâmetros.

de erros dos parâmetros, associados a certos níveis de confiança. Uma escolha natural para obter os intervalos de confiança são os contornos de χ^2 constante [33]. Ou seja, conhecendo o valor do mínimo χ^2 , associamos os pontos, no espaço de parâmetros, dentro de uma região $\chi^2 < \chi_{min}^2 + \Delta\chi_0^2$ à uma probabilidade de que o valor correto esteja nesta região. Por definição, este valor é obtido através da densidade de probabilidade acumulada. Se escrevermos χ^2 como $\chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$, a equação (4.6) será escrita como

$$\mathcal{P}(D|\theta) = C' \exp \left[-\frac{\Delta\chi^2}{2} \right]. \quad (4.7)$$

Queremos encontrar o valor $\Delta\chi_0^2$ para que, dentro da região $\Delta\chi^2 < \Delta\chi_0^2$, tenhamos uma probabilidade associada P , que podemos expressar como

$$P = \int_{\Delta\chi^2 < \Delta\chi_0^2} d^M\theta \mathcal{P}(D|\theta), \quad (4.8)$$

onde M é a quantidade de parâmetros a serem ajustados. Esta integração tem como resultado [32]

$$P = 1 - \gamma(M/2, \Delta\chi_0^2/2), \quad (4.9)$$

correspondendo à probabilidade dentro da região de confiança conjunta M-dimensional. A quantidade $\gamma(M/2, \Delta\chi_0^2/2)$ é uma forma da função gama incompleta, dada por

$$\gamma(\nu/2, x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \int_x^\infty e^{-t} t^{\nu/2-1} dt, \quad (4.10)$$

sendo $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ a definição da função gama [33]. Com a equação (4.9), podemos construir uma tabela com as variações que devemos fazer no χ^2 para obter uma região

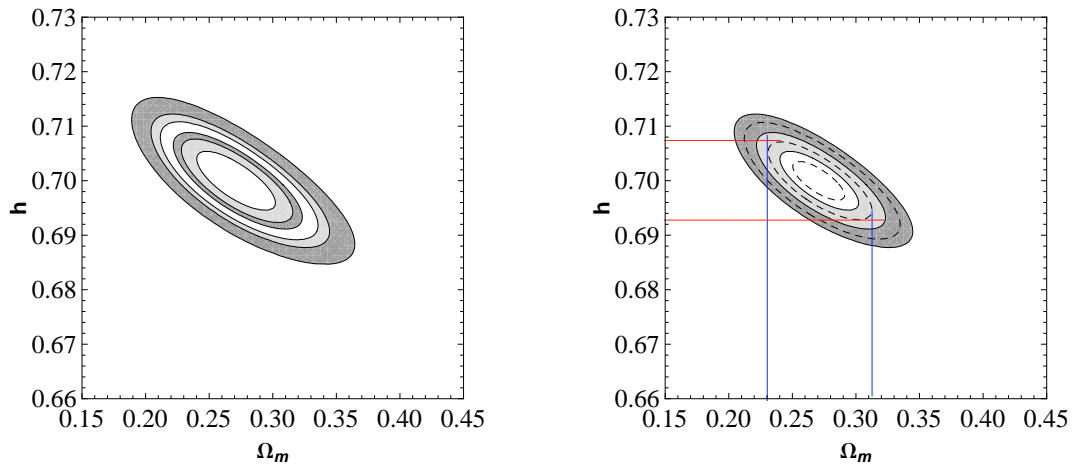


Figura 4.3: À esquerda, níveis de confiança para os dois parâmetros conjuntamente, relativos a 68.3%, 90%, 95.4%, 99%, 99.73% e 99.9%. À direita, níveis de 1σ , 2σ e 3σ conjuntos para os parâmetros (linhas cheias) e individuais (linhas tracejadas).

relacionada com uma probabilidade P , a depender da quantidade de parâmetros livres. Esta construção está apresentada na Tabela 2.1, onde destacamos os níveis referidos comumente na literatura como 1σ , 2σ e 3σ , onde σ refere-se ao desvio padrão da distribuição normal. Não necessariamente as distribuições trabalhadas serão normais, mas o vício de linguagem é mantido.

Sabendo como encontrar as regiões de confiança no espaço M -dimensional, é necessário cautela ao interpretar os gráficos obtidos. Continuando com o exemplo das supernovas do tipo Ia, utilizando o pacote de dados Union2, encontramos os níveis de confiança da análise conjunta dos dois parâmetros livres. Na Figura 4.3, à esquerda, estão as regiões de 68.3%,..., 99.99% (seguindo a Tabela 2.1), onde χ^2 é menor que $\chi_{min}^2 + 2.30, \dots, \chi_{min}^2 + 18.4$. Caso desejemos saber os intervalos de confiança de cada parâmetro individualmente, temos que

Tabela 4.1: Valores de $\Delta\chi_0^2$ para diferentes níveis de confiança e quantidade de parâmetros livres.

P	Número de parâmetros livres				
	1	2	3	4	5
68.3%(1σ)	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89
90%	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24
95.4%(2σ)	4.00	6.17	8.02	9.70	11.3
99%	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1
99.73%(3σ)	9.00	11.8	14.2	16.3	18.2
99.99%	15.1	18.4	21.1	23.5	25.7

encontrar a projeção da região associada a um parâmetro livre no eixo do parâmetro cujo intervalo se deseja obter. O gráfico à direita da Figura 4.3 mostra, para o exemplo em questão, a diferença entre as regiões de 1, 2 e 3 σ para os dois parâmetros conjuntamente (linhas cheias), e os mesmos níveis para obter os intervalos de cada parâmetro (linhas tracejadas). No mesmo gráfico ilustramos como obter os intervalos de confiança para o nível 2 σ .

Há casos onde temos, por exemplo, 3 parâmetros livres e queremos estudar a distribuição de probabilidades de apenas 2, sem nos preocuparmos com o terceiro, reduzindo o tempo computacional. Um caso típico na Cosmologia, é a marginalização sobre o parâmetro de Hubble quando estudamos dados de supernovas, com o argumento de que este parâmetro é muito bem determinado por métodos independentes de modelo, e com a vantagem de haver uma expressão analítica para esta marginalização. Neste caso, define-se uma nova função $\tilde{\chi}^2$, dada por

$$\tilde{\chi}^2 \equiv \chi_*^2 - \frac{C_1}{C_2} \left(C_1 + \frac{2}{5} \ln 10 \right) - 2 \ln h^*, \quad (4.11)$$

onde h^* é um valor fiducial do parâmetro de Hubble adimensional h , e

$$\chi_*^2 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{obs}^i - \mu_*^i)^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.12)$$

$$C_1 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_{obs}^i - \mu_*^i)}{\sigma_i^2}, \quad (4.13)$$

$$C_2 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (4.14)$$

com $\mu_*^i \equiv \mu(z_i|\theta; h = h^*)$. Para este χ^2 modificado temos a likelihood proporcional a $\exp(-\tilde{\chi}^2/2)$. É fácil verificar que a derivada de $\tilde{\chi}^2$ em relação a h^* se anula, de forma que os resultados são independentes da escolha do valor de h^* [34, 35].

Ao encontrar o *best fit* do modelo com seus intervalos de confiança, concluímos a etapa da estimativa de parâmetros. De maneira indireta, pelos parâmetros resultantes, podemos verificar se hipóteses adotadas no desenvolvimento teórico do modelo têm concordância com as observações. De posse destes valores, como podemos comparar duas classes distintas de modelos? Estas classes podem ser construídas segundo diferentes argumentos físicos, diferindo quanto ao conjunto de parâmetros adotados para descrever o universo. Como saber se os dados favorecem mais a uma classe de modelos que a outra? Métodos para comparação de modelos se fazem necessários. Apresentemos algumas técnicas utilizadas.

4.3 Seleção de modelos

Considerando a análise aqui apresentada, notamos que modelos mais complexos (que tenham mais parâmetros livres) vão naturalmente ajustar melhor os dados. Como, então, fazer uma classificação dos modelos sem penalizar aqueles que tenham menos parâmetros, e descontando a flexibilidade de modelos mais complexos? Caso dois modelos ajustem os dados igualmente bem, podemos invocar a famosa “navalha de Occam”, segundo a qual escolheríamos o modelo mais simples. Neste aspecto, a navalha de Occam apontará para a falta de necessidade de determinados parâmetros. Temos um exemplo marcante quando, usando dados da radiação cósmica de fundo, encontramos que o universo é espacialmente plano, ou muito aproximadamente plano – podemos interpretar que o parâmetro associado à curvatura não é necessário, sendo mais provável que os dados tenham sido gerados em um universo espacialmente plano.

Voltando ao problema de categorização de modelos, apresentemos alguns métodos práticos que têm este fim. Uma maneira tida como “regra de ouro” [33] é que um valor típico do χ^2 para um ajuste razoavelmente bom é $\chi^2 \approx \nu$, onde ν é o número de graus de liberdade, definido como o número de dados (N) menos o número de parâmetros livres (M). Assim, temos o chamado χ^2 reduzido

$$\chi_\nu^2 \equiv \frac{\chi_{min}^2}{\nu}, \quad (4.15)$$

o qual indicará que o modelo que melhor ajusta os dados é aquele que tem χ_ν^2 mais próximo de 1.

Na teoria da informação não há modelos verdadeiros – existe a realidade, que pode ser aproximada por modelos, e o melhor modelo será aquele que melhor se aproxima da realidade [36]. A informação perdida quando a verdade (o fenômeno real) é aproximada pelo modelo é medida pela chamada informação Kullback-Leibler (KL), de forma que o melhor ajuste é aquele que minimiza esta quantidade. É impossível computar a informação KL porque ela depende da verdade, que é desconhecida. Akaike encontrou uma aproximação desta, conhecida como critério de informação Akaike (AIC), e expressado por

$$AIC = -2 \ln \mathcal{L}^* + 2M. \quad (4.16)$$

A partir daqui, consideremos \mathcal{L} como apenas a exponencial (ver definição (4.6)). O termo \mathcal{L}^* refere-se à máxima likelihood, e assim, $-2 \ln \mathcal{L}^* = \chi_{min}^2$.

Dentre diversas classes de modelos, aquela que apresentar menor AIC será adotada como referência para categorização das demais. Modelos com $0 \leq \Delta_{AIC} \leq 2$ têm evidência substancial, aqueles com $4 \leq \Delta_{AIC} \leq 7$ têm consideravelmente menos suporte, enquanto que aqueles com $\Delta_{AIC} > 10$ não têm qualquer evidência em relação ao melhor modelo [36].

No cenário bayesiano, o melhor modelo é aquele com maior probabilidade de acordo com os dados (a probabilidade posterior). Devido a dificuldades de cálculo, Schwarz propôs uma quantidade aproximada conhecida como critério de informação bayesiana (BIC), dada por

$$BIC = -2 \ln \mathcal{L}^* + 2M \ln N. \quad (4.17)$$

O melhor modelo é aquele que minimiza o BIC. É conveniente analisar a diferença entre o BIC de outros modelos do modelo com menor valor desta quantidade. Estas diferenças são interpretadas da seguinte maneira: $0 < \Delta_{BIC} \leq 2$ como fraca evidência em favor do melhor modelo; $2 < \Delta_{BIC} \leq 6$ como positiva; $6 < \Delta_{BIC} \leq 10$ como forte evidência; e $\Delta_{BIC} > 10$ como evidência muito forte em favor do melhor modelo [36].

Outra motivação para utilizarmos estes métodos é a possibilidade de comparação entre diversas classes de modelos presentes na literatura, cujas análises já foram feitas, para categorizar o modelo em estudo no cenário mundial de pesquisa em Cosmologia. Apresentadas as técnicas de ajuste e seleção de modelos, passemos para os testes com dados de supernovas do tipo Ia.

Capítulo 5

Supernovas do tipo Ia

O primeiro teste aplicado utiliza dados de supernovas Ia, mais especificamente o redshift e a magnitude. A primeira grandeza já foi definida anteriormente, e vai nos indicar que, quanto maior o deslocamento espectral de linhas de emissão ou absorção, há mais tempo esta radiação tem viajado até chegar a nós, estando a fonte mais distante. A outra grandeza, a magnitude, é uma escala logarítmica de medida do fluxo de radiação em um receptor. No presente trabalho vamos utilizar apenas a chamada magnitude bolométrica, que se refere à integração do fluxo em todo o espectro (todos comprimentos de onda). Definamos magnitude bolométrica *aparente* como,

$$m \equiv -2.5 \log(f) + C, \quad (5.1)$$

onde C é uma constante que define a escala. Tomemos a relação (2.31), onde o d_L é a distância luminosidade expressa por (2.38). Assim,

$$m = -2.5 \log\left(\frac{L}{4\pi d_L^2}\right) + C. \quad (5.2)$$

A magnitude bolométrica *absoluta* será a magnitude quando a fonte estiver a uma distância luminosidade de 10pc. Assim,

$$M = -2.5 \log\left(\frac{L}{4\pi(10\text{pc})^2}\right) + C. \quad (5.3)$$

Chamamos a diferença entre as magnitudes relativa e absoluta de *módulo de distância* (μ). Após efetuar esta operação, encontramos

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{10\text{pc}} \right). \quad (5.4)$$

Como temos interesse no estudo em escalas cosmológicas, e considerando que $10\text{pc} = 10^{-5}\text{Mpc}$, temos

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{1\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (5.5)$$

Por questões de simplicidade, podemos isolar o termo $H_0 d_L / c$ em (2.38), a saber

$$\begin{aligned} \frac{H_0 d_L}{c} &= \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (\text{para } k = +1) \\ &= (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (\text{para } k = 0) \\ &= \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{\Omega_k} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \quad (\text{para } k = -1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Assim, usando $c = 3 \times 10^5 \text{km/s}$ e $H_0 = h(100 \text{km/s/Mpc})$, reescrevemos a (5.5) no formato

$$\mu = 5 \log \left[\frac{H_0 d_L}{c} \right] - 5 \log h + 42.384. \quad (5.7)$$

Para utilizarmos esta relação entre magnitude e distância, precisamos conhecer a magnitude absoluta do objeto, mas para isto, é necessário que encontremos algum objeto muito semelhante, e mais próximo, para que possamos utilizar outros métodos de medida de distância (por exemplo, paralaxe trigonométrica) para calcularmos qual magnitude seria observada se um objeto desta classe estivesse a 10pc de nós. Em outras palavras, para utilizarmos (5.4) ou (5.7), precisamos de uma *vela padrão*, um calibrador das medidas de distância.

Uma vela padrão conhecida é a classe de estrelas variáveis Cefeidas. Henrietta Leavitt, estudando Cefeidas na Pequena e na Grande Nuvens de Magalhães, descobriu que o período de pulsação da cefeida e o fluxo médio em um período obedeciam uma relação – ou seja, havia um padrão. Observando cefeidas mais próximas em nossa galáxia (onde a medida de distância não é afetada pela expansão do universo), foi possível obter a normalização da relação período-luminosidade para cefeidas [3]. Mas esta vela padrão ainda não será utilizada pela Cosmologia, já que o brilho da cefeida fica muito fraco quando a distâncias da ordem de 20Mpc.

Se queremos obter informações de um objeto que está a distâncias cosmológicas, precisamos que este seja uma fonte de intensa radiação, de sorte que seu brilho seja perceptível nas redondezas da Terra. A supernova, fenômeno no qual uma estrela, em seu estágio final, libera grande quantidade de energia, podendo brilhar mais que sua galáxia hospedeira, parece ser o indicador de distância ideal. Primeiro, porque este brilho é temporário e podemos, via método de subtração de imagens, estimar qual o fluxo captado apenas da supernova. Segundo, devido a padronização do seu comportamento.

Nos últimos anos, os cosmologistas têm considerado uma classe específica de supernovas como velas-padrão: as *supernovas do tipo Ia* [37, 38]. Elas acontecem em sistemas binários de estrelas, onde uma delas é uma anã branca (composta principalmente por carbono e oxigênio) que adquire matéria de sua companheira por acreção. A anã branca é uma estrela no estágio em que sua gravidade é contrabalanceada pela pressão de degenerescência dos elétrons. Caso ela adquira uma quantidade de massa com a qual ultrapasse um determinado limite de estabilidade, o *limite de Chandrasekhar*, ela colapsa e a explosão é então acionada. A uniformidade da massa e da composição química da estrela progenitora deste tipo de supernova justifica seu uso como vela-padrão.

O limite de Chandrasekhar é resultado de um modelo para anãs brancas. Ele é muito aceito pois não foi observada qualquer anã branca que tenha massa superior a este limite. Este limite é da ordem de 1.4 massas solares, mas varia de acordo com a composição exata da estrela. Vale ressaltar que segundo este modelo, a massa de Chandrasekhar é proporcional a $G^{-3/2}$, onde G é a constante universal da Gravitação.

As supernovas do tipo Ia não deixam condensado estelar remanescente. Seu espectro é caracterizado por não haver linhas do hidrogênio, e apresentar as do silício. Após algumas correções, verifica-se que as curvas de luz destas supernovas têm comportamento muito parecido. Assim, o pico de luminosidade é utilizado para calibrar a curva e obter a magnitude absoluta.

Enfim, possuímos uma classe de objetos astronômicos que emitem grande quantidade de radiação e, dessa forma, podem dar informações de pontos muito distantes de nós; esses objetos possuem um comportamento padrão e conhecemos sua magnitude absoluta, e, assim, medindo a magnitude aparente, obtemos sua distância luminosidade. Através também da radiação emitida é medido o redshift, que é uma variável independente da magnitude. Com esses dados podemos utilizar o teste do χ^2 apresentado no capítulo 2. Ou seja, minimizaremos

a quantidade

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\mu_i^{obs} - \mu(z_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.8)$$

onde os dados $(z_i, \mu_i^{obs}, \sigma_i^2)$ são disponibilizados por consórcios, após calibração das medidas e correção de efeitos de extinção. O valor de $\mu(z_i|\theta)$ será obtido através de (5.7), e evidenciamos que a dependência com o modelo cosmológico entra na função $E(z)$. Variando os valores dos parâmetros que caracterizam o modelo, encontramos o conjunto de valores que resultam em um mínimo χ^2 , isto é, máxima probabilidade.

Aplicamos o teste aos modelos apresentados nos capítulos 2 e 3, fazendo uso de quatro recentes pacotes de dados: *Union 2 Compilation*, *Constitution*, e *SDSS-II* com filtros *MLCS2k2* e *SALT-II*¹. Essa diferença entre os filtros, ou ajustadores, se dá pelo método utilizado na calibração dos dados para obtenção das medidas de distância.

SALT e SALT-II são ajustadores da curva de luz que exigem duas etapas para calcular distâncias: primeiro, ajustar-se cada curva de luz pela magnitude de pico, o parâmetro de largura de pico e de cor, e depois, use-se estas saídas para calcular o melhor ajuste cosmológico. Normalmente, o módulo de distância é parametrizado por uma dependência linear sobre os parâmetros de forma e cor. SALT e SALT-II não separam cor intrínseca da vermelhidão da galáxia hospedeira. Para ser válido para o cálculo cosmológico, as amostras de alto e baixo redshift devem obedecer à mesma combinação de relações intrínsecas + vermelhidão hospedeira + cor + magnitude.

MLCS2k2 também dá dois passos para encontrar o melhor ajuste cosmológico: ajuste para as distâncias e, em seguida, ajuste para a cosmologia. MLCS2k2 vai mais longe do que o SALT e se adapta para a distância junto com o seu parâmetro de forma parâmetro/luminosidade, o parâmetro de extinção da galáxia hospedeira e o tempo de máximo. MLCS2k2 difere do SALT e SALT-II por tentar calcular explicitamente a vermelhidão da galáxia hospedeira, empregando uma *prior* sobre o índice de cor.

O ponto fraco na segunda etapa com SALT e SALT-II é obter a relação cor-magnitude para variação de cor intrínseca da supernova do tipo Ia e para a poeira da galáxia hospedeira. Uma fraqueza de MLCS2k2 é o caráter incerto do *prior* para o índice de cor, especialmente no alto redshift alta. O uso dos calibradores assume que supernovas do tipo Ia são intrinsecamente iguais em altos e baixos redshift alta e baixa para uma determinada forma e

¹Resultados de testes de supernovas Ia do modelo $\Lambda(t)$ com pacotes de dados mais antigos estão disponíveis em [39, 40].

Tabela 5.1: Parâmetros livres dos modelos analisados.

Modelo	Parâmetros livres
$\Lambda(t)$ plano	$\Omega_{m,0}, h$
Λ CDM plano	$\Omega_{m,0}, h$
$\Lambda(t)_k$	$\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, h^*$
Λ CDM $_k$	$\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}, h^*$
x -CDM	$\Omega_{m,0}, \omega_x, h^*$
BD1	q, h
BD2	q_0, h

cor, na dispersão observada. A veracidade desta hipótese tem sido explorado e parece ter, mas precisa de mais investigação [41]. A depender do uso de supernovas mais próximas ou de redshifts mais altos, os dados utilizados podem estar mais ou menos contaminados pelo modelo utilizado na calibração.

Um resumo dos parâmetros livres de cada classe de modelo está apresentado na Tabela 5.1, onde h^* indica que utilizamos o χ^2 modificado (4.11), ou seja, nestes casos fizemos a marginalização no h , o que nos permitiu estudar a distribuição de probabilidades dos demais parâmetros gastando menor tempo computacional.

Nos casos em que o G é variável, alguns autores discutem as consequências desta variação no mecanismo de explosão da supernova e na sua magnitude absoluta [42, 43]. Aponta-se que, segundo o modelo analítico de curvas de luz, o pico de luminosidade é proporcional à massa de níquel produzido na queima da supernova, que é, em boa aproximação, uma fração fixa da massa de Chandrasekhar. Esta, por sua vez, é proporcional a $G^{-3/2}$, e assim, $L \propto G^{-3/2}$. Em um cenário em que G diminui, supernovas distantes seriam menos brilhantes que o previsto no cenário padrão. Haveria uma correção na magnitude absoluta dada por

$$M = M_0 + \frac{15}{4} \log \frac{G}{G_0}, \quad (5.9)$$

onde M_0 é a magnitude estimada para $\dot{G} = 0$ [42, 43].

Nesta tese consideraremos que o mecanismo de explosão da supernova só depende da métrica local, a qual só depende da distribuição de matéria na galáxia hospedeira. Este raciocínio se baseia no fato de que as galáxias constituírem sistemas auto-gravitantes, cuja estrutura interna não é afetada pela da expansão de Hubble. Dessa forma, suporemos que a configuração do campo escalar de Brans-Dicke, e portanto o valor de G , é semelhante em todos os casos. Portanto, nos ajustes aqui apresentados com os modelos de Brans-Dicke, não utilizaremos a correção acima [44]. Vale ressaltar que testes com esta correção foram feitos,

Tabela 5.2: Cosmografia resultante dos melhores ajustes com Union2.

Modelo	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{\Lambda,0}$	Ω_T	h	ω_x	q_0	$H_0 t_0$
$\Lambda(t)$ plano	0.339	0.661	1.000	0.697	-1	-0.492	1.091
Λ CDM plano	0.270	0.730	1.000	0.700	-1	-0.595	0.993
$\Lambda(t)_k$	0.450	0.840	1.290	h^*	-1	-0.615	1.087
Λ CDM $_k$	0.298	0.775	1.073	h^*	-1	-0.626	0.989
x -CDM	0.288	0.712	1.000	h^*	-1.050	-0.621	0.983
BD1	--	--	1.000	0.693	-1	-0.379	1.610
BD2	--	--	1.000	0.726	-1	-1.524	0.680

resultando em modelos mais desfavorecidos em relação ao Λ CDM do que os apresentados aqui.

A partir daqui vamos associar as classes de modelos a rótulos: Λ CDM e Λ CDM $_k$ são os modelos padrão espacialmente plano e com curvatura qualquer; $\Lambda(t)$ e Λ CDM $_k$, os modelos com interação no setor escuro plano e com curvatura qualquer; x -CDM é uma variação do modelo padrão que permite que o parâmetro de estado assuma valores diferentes de -1 ; BD1 e BD2 são os modelos na cosmologia de Brans-Dicke com $\dot{q} = 0$ e $\dot{q} \neq 0$, respectivamente.

Apresentemos agora os resultados para cada pacote de dados utilizado.

5.1 Union2 Compilation

No início do ano de 2010 foi publicado um conjunto de dados do *Supernova Cosmology Project* intitulado *Union2 Compilation*² [45]. Ele é uma atualização do *Union* [46], com 719 supernovas de 17 conjuntos. Destas, 557 passam pelos “cortes de utilidade”. Todas as supernovas foram ajustadas usando um único filtro da curva de luz, chamado SALT-II, foram analisadas de maneira uniforme e com um melhor manuseio de erros sistemáticos. Segundo a equipe, todas as análises foram feitas de “maneira cega”, ou seja, sem utilizar modelo cosmológico.

Os resultados dos ajustes ao Union2 estão apresentados nas Figuras 5.1 e na Tabela 5.2. Para o Λ CDM encontramos $0.231 < \Omega_{m,0} < 0.313$ e $0.693 < h < 0.707$ (2σ). Já com o $\Lambda(t)$, $0.295 < \Omega_{m,0} < 0.384$ e $0.689 < h < 0.704$ (2σ), com densidade mais alta que o padrão, mas com intersecção a partir das regiões de 2σ de ambos. Os valores de best fit do $\Lambda(t)$ nos levam a um universo um pouco mais antigo que o Λ CDM. Nos casos de universo com

²Os dados podem ser encontrados no endereço www.supernova.lbl.gov/union.

curvatura, encontramos para o ΛCDM_k , em 95.4% de confiança, $0.138 < \Omega_{m,0} < 0.442$ e $0.515 < \Omega_{\Lambda,0} < 1.008$, e para $\Lambda(t)_k$, $0.284 < \Omega_{m,0} < 0.591$ e $0.582 < \Omega_{\Lambda,0} < 1.077$. Nos valores de melhor ajuste, ambos resultam em universos fechados, porém o ΛCDM_k tem parâmetro de densidade total mais próximo de 1, e as curvas de nível indicam uma maior tendência do $\Lambda(t)_k$ para o caso fechado. Ambos favorecem a expansão acelerada do universo.

No modelo x -CDM encontramos $0.090 < \Omega_{m,0} < 0.42$ e $-1.514 < \omega_x < -0.667$ (2σ), ou seja, parâmetro de densidade um pouco mais alto do que no modelo padrão e boa con-

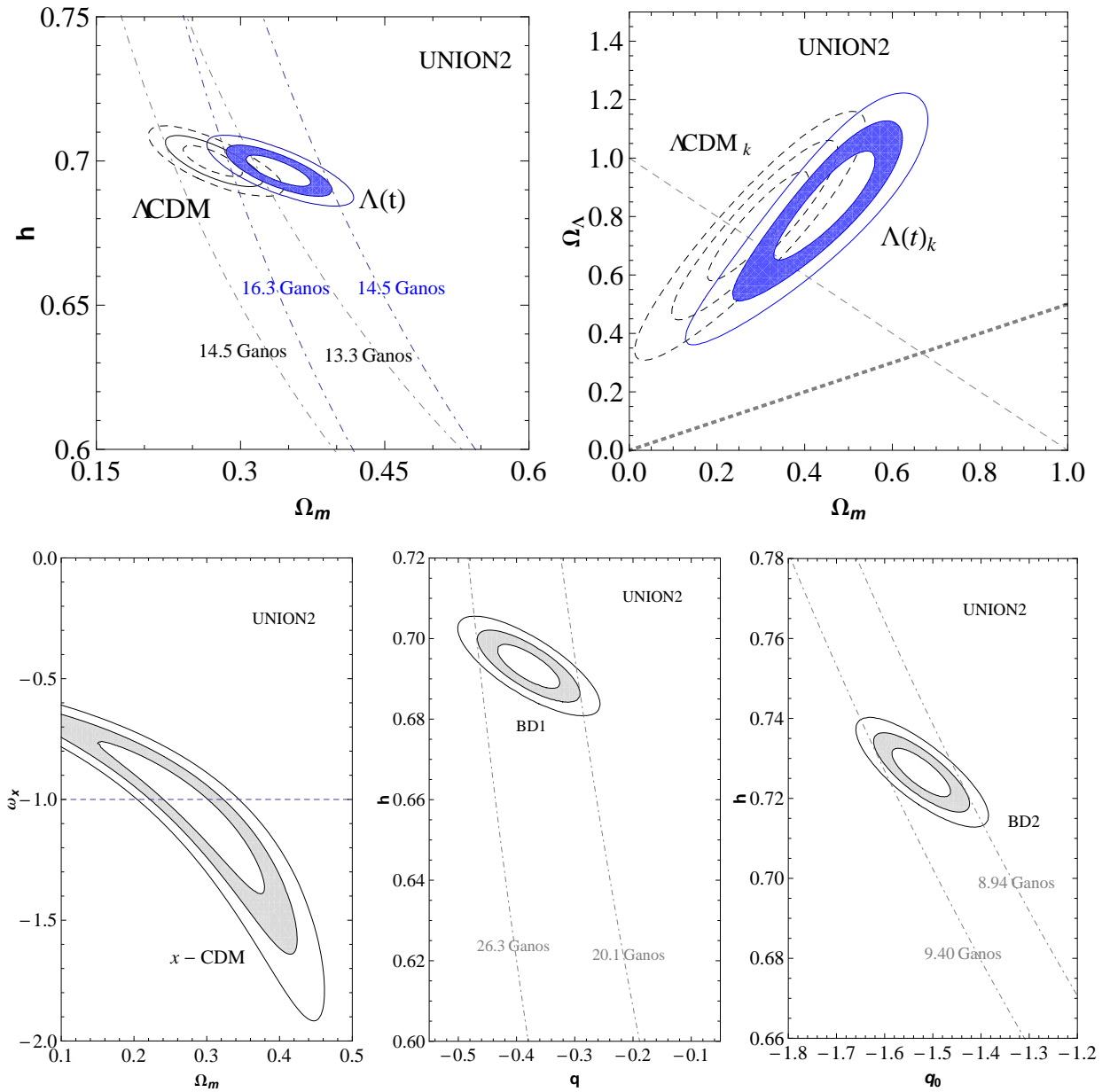


Figura 5.1: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do Union2.

cordância com o valor $\omega_x = -1$. O universo, neste caso, seria ainda mais novo no Λ CDM. Os modelos de Brans-Dicke resultaram em universo ou muito antigo ($\dot{q} = 0$) ou muito novo ($\dot{q} \neq 0$). Os intervalos dos parâmetros de desaceleração com 95.4% de confiança são $-0.450 < q < -0.308$ (BD1) e $-1.604 < q_0 < -1.444$ (BD2).

Apresentamos os ajustes das curvas teóricas aos dados do Union2 na Figura 5.2. À esquerda, mostramos que as maiores diferenças entre as curvas estão em altos redshifts (quadro ampliado). A diferença fica mais clara quando tomamos a distribuição dos dados (em cinza) e dos outros 6 modelos em torno do modelo padrão plano, já que ele é aquele que vem apresentando melhores resultados em diferentes testes. De todas as curvas, a do $\Lambda(t)$ é a que tem menor diferença em relação ao Λ CDM.

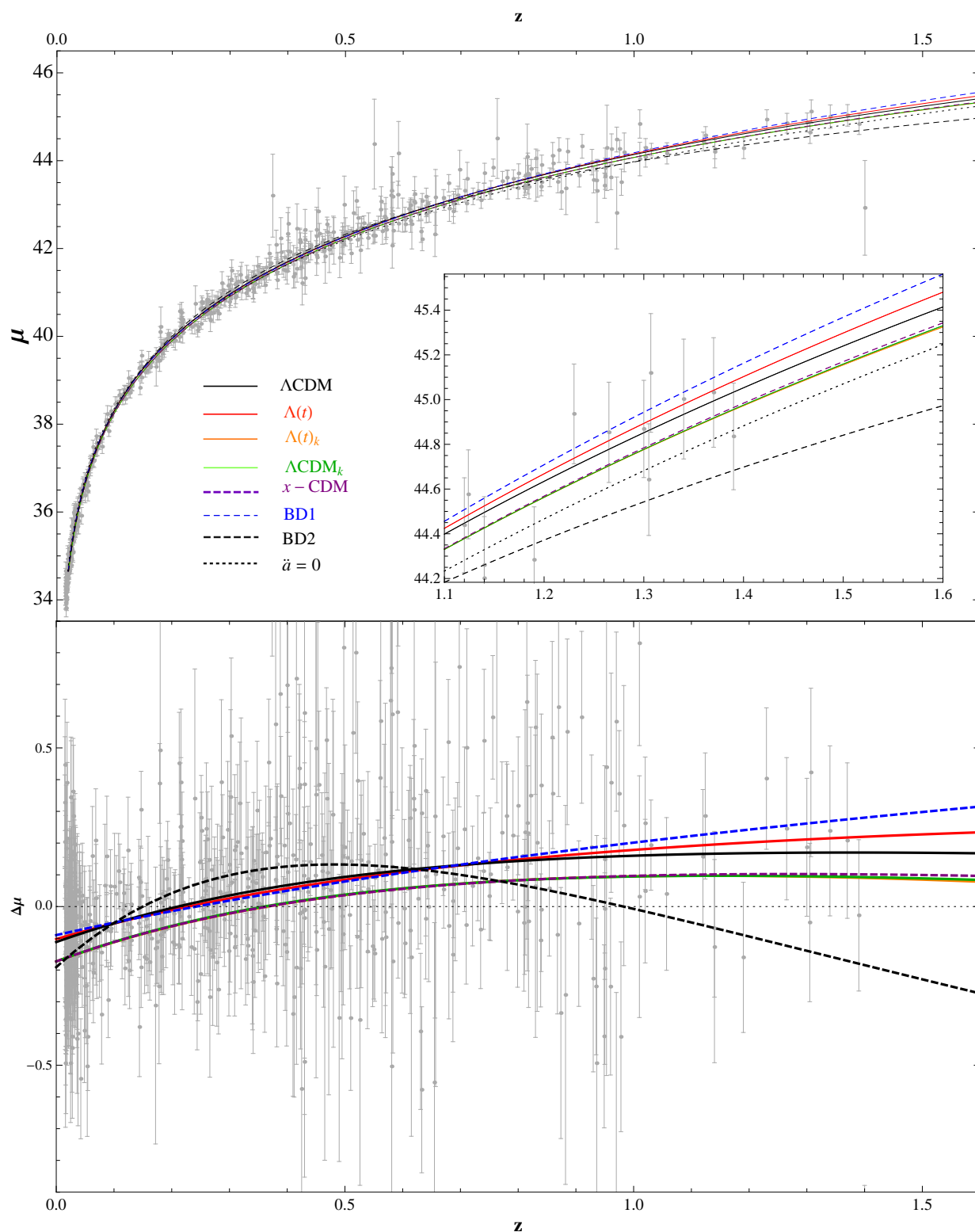


Figura 5.2: Painel superior: diagrama de Hubble com dados do Union2 e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).

5.2 Constitution

O segundo pacote de dados de supernovas utilizado foi o *Constitution*. Ele reúne 90 supernovas do CfA3, pacote do *CfA Supernova Group*³ [47], com 250 do Union e 57 objetos próximos. A relação de dados foi extraída de [41], seguindo a orientação de utilizar a tabela resultante do ajuste das supernovas com o filtro SALT.

³www.cfa.harvard.edu/supernova/

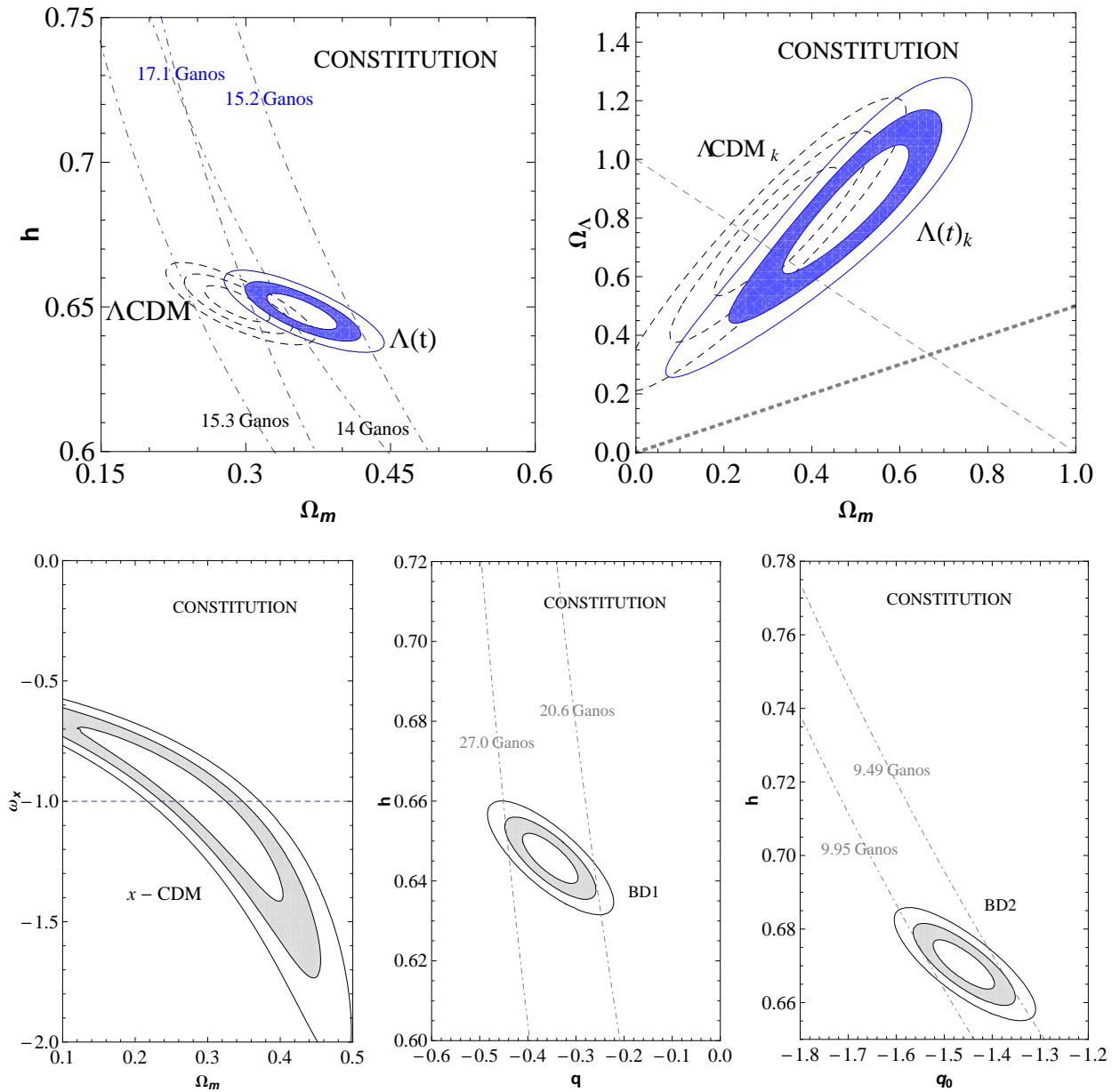


Figura 5.3: Curvas dos níveis 1, 2 e 3 σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do Constitution.

Tabela 5.3: Cosmografia resultante dos melhores ajustes com Constitution.

Modelo	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{\Lambda,0}$	Ω_T	h	ω_x	q_0	$H_0 t_0$
$\Lambda(t)$ plano	0.358	0.642	1.000	0.648	-1	-0.463	1.067
Λ CDM plano	0.290	0.710	1.000	0.651	-1	-0.565	0.973
$\Lambda(t)_k$	0.490	0.844	1.334	h^*	-1	-0.639	1.078
Λ CDM $_k$	0.324	0.764	1.088	h^*	-1	-0.602	0.970
x -CDM	0.294	0.706	1.000	h^*	-1.011	-0.571	0.971
BD1	--	--	1.000	0.646	-1	-0.354	1.548
BD2	--	--	1.000	0.670	-1	-1.460	0.666

Comparando as Tabelas 5.2 e 5.3, verificamos que os parâmetros de densidade de matéria obtidos com este pacote são maiores que os obtidos anteriormente, e os parâmetros de idade são menores. Para o Λ CDM temos $0.247 < \Omega_{m,0} < 0.337$ e $0.643 < h < 0.659$ (2σ), e no $\Lambda(t)$, $0.311 < \Omega_{m,0} < 0.407$ e $0.640 < h < 0.657$ (2σ). Novamente o modelo estudado apresenta densidade de matéria maior que o de referência.

No modelo Λ CDM $_k$ temos $0.130 < \Omega_{m,0} < 0.445$ e $0.499 < \Omega_{\Lambda,0} < 1.036$, e no $\Lambda(t)_k$, $0.275 < \Omega_{m,0} < 0.658$ e $0.658 < \Omega_{\Lambda,0} < 1.110$. Outra vez o universo fechado é mais favorecido, assim como uma expansão acelerada.

Para o x -CDM encontramos $0.039 < \Omega_{m,0} < 0.432$ e $-1.568 < \omega_x < -0.601$, tendo best fit mais próximo da constante cosmológica do que no resultado com o Union2. Para modelos de Brans-Dicke, a mesma característica é encontrada, com BD1 tendo $-0.429 < q_0 < -0.278$ (2σ) e BD2, $-1.544 < q_0 < -1.373$.

Verificamos, na Figura 5.4, que o $\Lambda(t)$ é novamente o que apresenta menor diferença em relação ao modelo padrão. Após apresentar resultados com dois conjuntos de dados, percebemos (ver Figuras 5.1 e 5.3) que os ajustes de supernovas com $\Lambda(t)$ e Λ CDM são mais restritivos que os casos com curvatura e que o x -CDM. Esta característica continuaremos a perceber nos próximos ajustes.

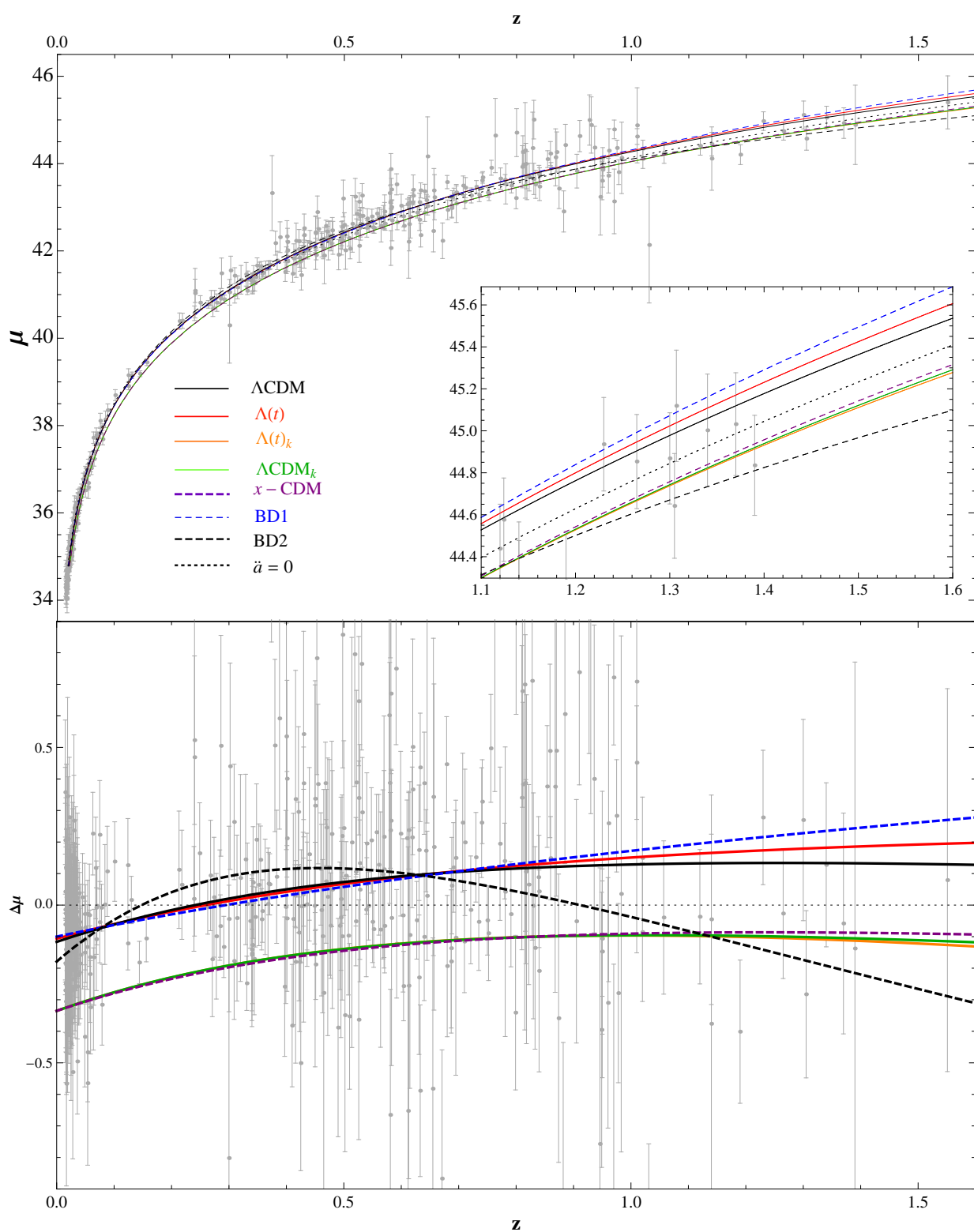


Figura 5.4: Painel superior: diagrama de Hubble com dados do Constitution e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).

5.3 SDSS Supernova Survey

O SDSS Supernova Survey foi um dos três projetos da segunda etapa do programa de mapeamento do universo *Sloan Digital Sky Survey*⁴ (SDSS), uma extensão de três anos do projeto original, que operou entre julho de 2005 e julho de 2008. Os dados aqui utilizados consistem de 103 supernovas do primeiro ano do mapeamento de supernovas do SDSS-II,

⁴www.sdss.org/

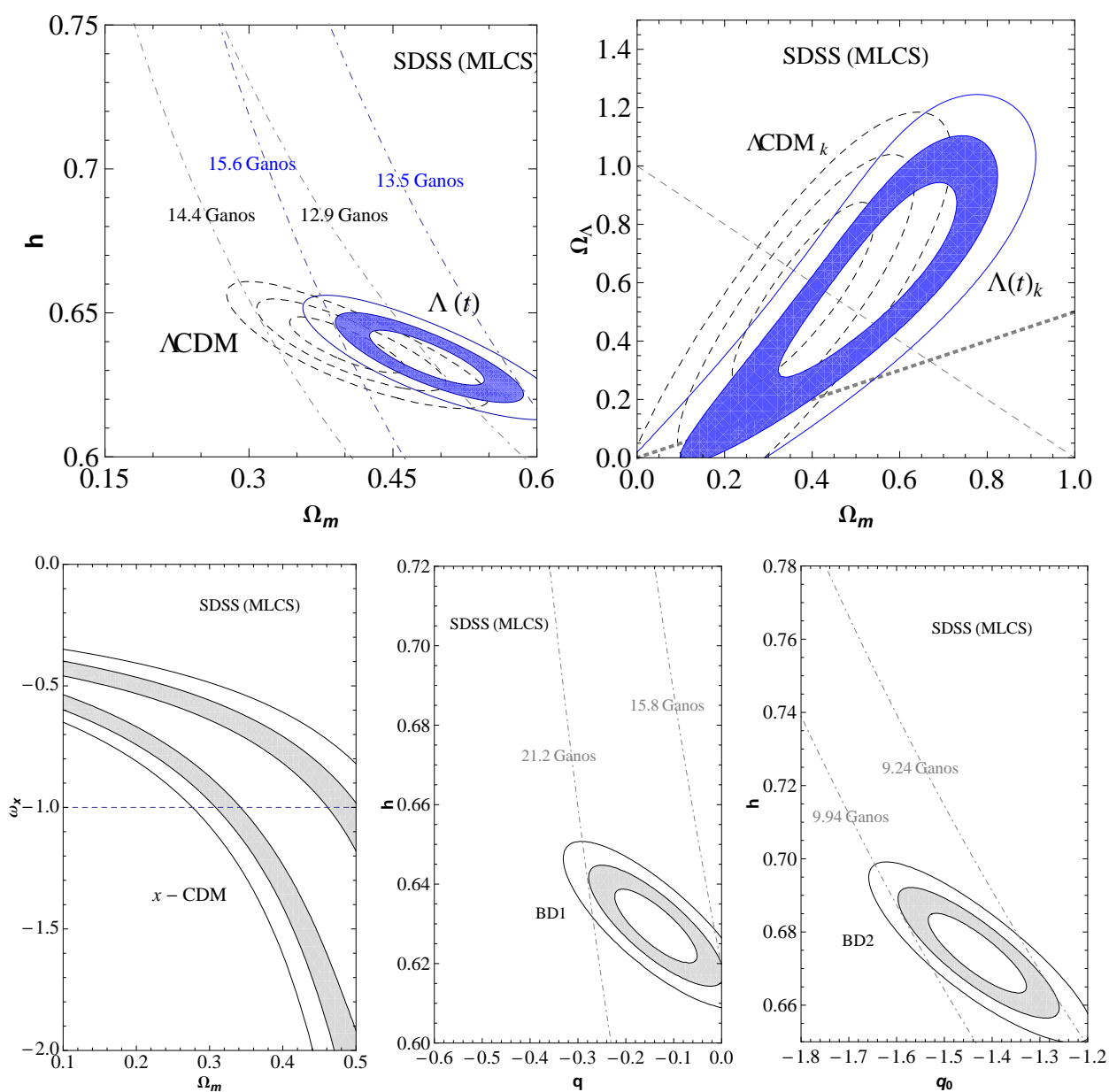


Figura 5.5: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do SDSS (MLCS2k2).

Tabela 5.4: Cosmografia resultante dos melhores ajustes com SDSS(MLCS2k2).

Modelo	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{\Lambda,0}$	Ω_T	h	ω_x	q_0	$H_0 t_0$
$\Lambda(t)$ plano	0.484	0.516	1.000	0.634	-1	-0.274	0.938
Λ CDM plano	0.400	0.600	1.000	0.639	-1	-0.400	0.888
$\Lambda(t)_k$	0.560	0.645	1.205	h^*	-1	-0.365	0.946
Λ CDM $_k$	0.390	0.583	0.973	h^*	-1	-0.388	0.888
x -CDM	0.425	0.575	1.000	h^*	-1.104	-0.452	0.881
BD1	--	--	1.000	0.629	-1	-0.138	1.160
BD2	--	--	1.000	0.674	-1	-1.432	0.660

combinados com dados do *Equation of State: SuperNovae trace Cosmic Expansion* (ESSENCE), do *Supernova Legacy Survey* (SNLS), do *Hubble Space Telescope* (HST) e de supernovas “próximas” [48]. Assim como em [49], utilizamos dois pacotes gerados com estas 288 supernovas a partir de dois métodos de ajustes distintos: o MLCS2k2⁵ e o SALT-II⁶. Para o primeiro, o erro sistemático (σ_{sist}) de 0.16 é adicionado, bem como erros nos redshifts. Já com o SALT-II, apenas precisamos adicionar o erro sistemático global de 0.14 [49].

Podemos verificar nas Tabelas 5.4 e 5.5 que o pacote com MLCS2k2 resulta em parâmetros de idade menores do que os obtidos com o SALT-II, e com acelerações menores, para todas as classes de modelos. Para as cinco primeiras, nas quais o $\Omega_{m,0}$ foi estimado, o MLCS2k2 nos dá valores consideravelmente maiores que o SALT-II, o que pode ser verificado também nas Figuras 5.5 e 5.7.

Sobre os valores dos parâmetros estimados com 95.4% de confiança, para o Λ CDM temos $0.325 < \Omega_{m,0} < 0.483$ e $0.626 < h < 0.652$, enquanto que no $\Lambda(t)$, $0.408 < \Omega_{m,0} < 0.565$ e $0.622 < h < 0.647$.

Encontramos duas particularidades quando analisamos os modelos com curvatura à luz do SDSS com MLCS2k2. Primeiro, o Λ CDM $_k$ tem melhor ajuste para universo aberto ($\Omega_0 = 0.973$), enquanto o $\Lambda(t)_k$ tem o universo fechado favorecido ($\Omega_0 = 1.205$). Segundo, ambos modelos têm pontos ($\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}$) na região de universo desacelerado já em 2σ . Quanto aos intervalos dos parâmetros, temos $0.156 < \Omega_{m,0} < 0.589$ e $0.119 < \Omega_{\Lambda,0} < 0.961$ para 2σ no Λ CDM $_k$, e no $\Lambda(t)_k$, $0.220 < \Omega_{m,0} < 0.778$ e $0.135 < \Omega_{\Lambda,0} < 1.027$.

Já para o x -CDM encontramos $\Omega_{m,0} < 0.587$ e $-2.671 < \omega_x < -0.391$, onde o melhor ajuste se afasta um pouco da constante cosmológica quando comparado com os pacotes anteriores. As faixas de valores do parâmetro de desaceleração no nível 2σ em BD1 é

⁵Ao longo do texto, onde houver MLCS, nos referimos ao MLCS2k2.

⁶Os dados podem ser obtidos em das.sdss.org/va/SNcosmology/sncosm09_fits.tar.gz.

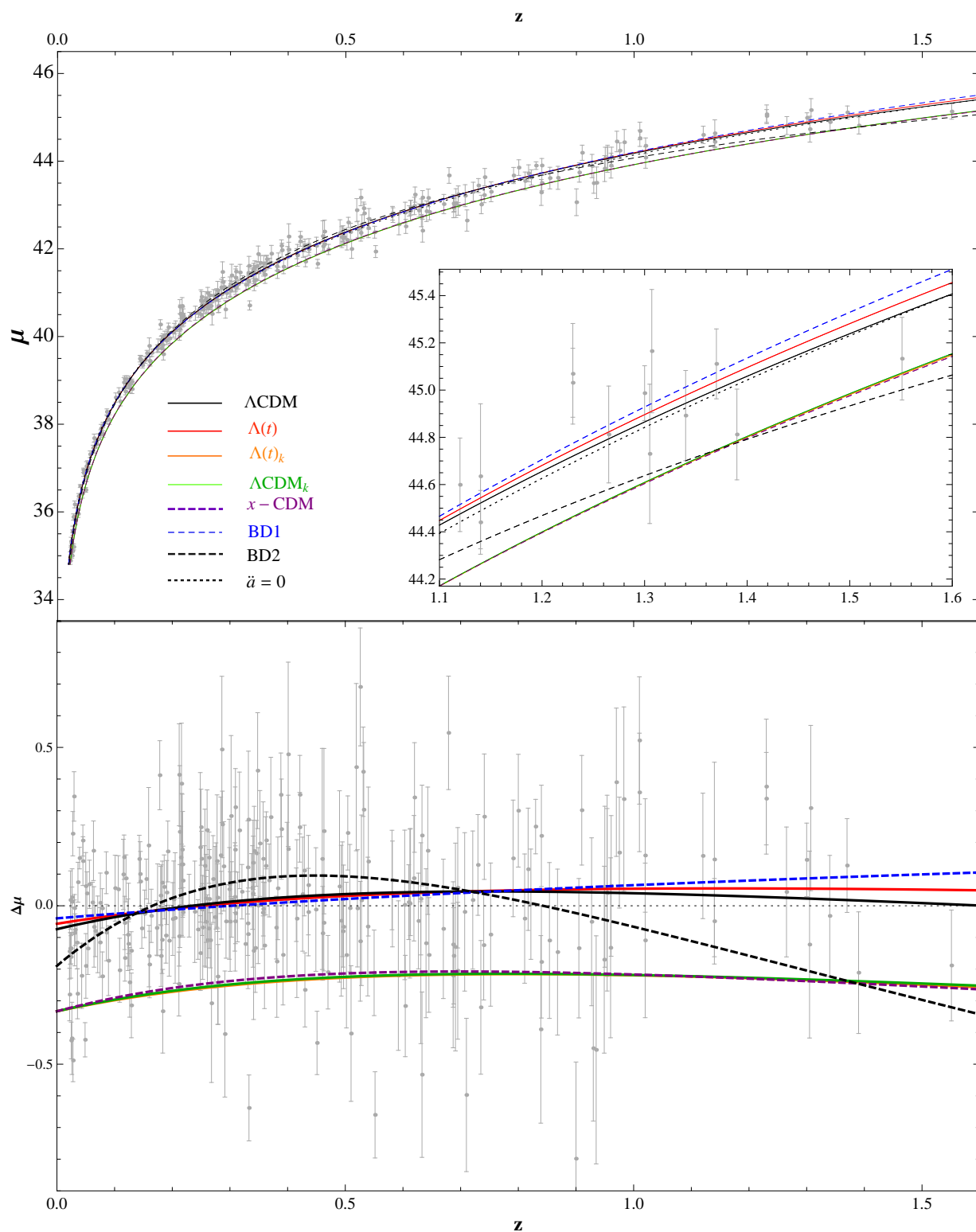


Figura 5.6: Painel superior: diagrama de Hubble com dados do SDSS (MLCS2k2) e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).

$-0.250 < q_0 < -0.023$, enquanto que para BD2, $-1.566 < q_0 < -1.294$.

Ao ajustarmos com o SDSS (SALT-II), estimamos $0.287 < \Omega_{m,0} < 0.422$ e $0.684 < h < 0.709$ (2σ) para o $\Lambda(t)$, e $0.215 < \Omega_{m,0} < 0.339$ e $0.689 < h < 0.715$ (2σ) para o Λ CDM. Nos casos com curvatura, encontramos $0.088 < \Omega_{m,0} < 0.472$ e $0.374 < \Omega_{\Lambda,0} < 1.08$ (Λ CDM $_k$), e $0.218 < \Omega_{m,0} < 0.612$ e $0.429 < \Omega_{\Lambda,0} < 1.167$ ($\Lambda(t)_k$).

Ainda com SALT-II, o x -CDM possui $\Omega_{m,0} < 0.441$ e $-1.914 < \omega_x < -0.536$, se afastando mais um pouco do valor -1 para o parâmetro de estado. Enfim, nos modelos com G variável,

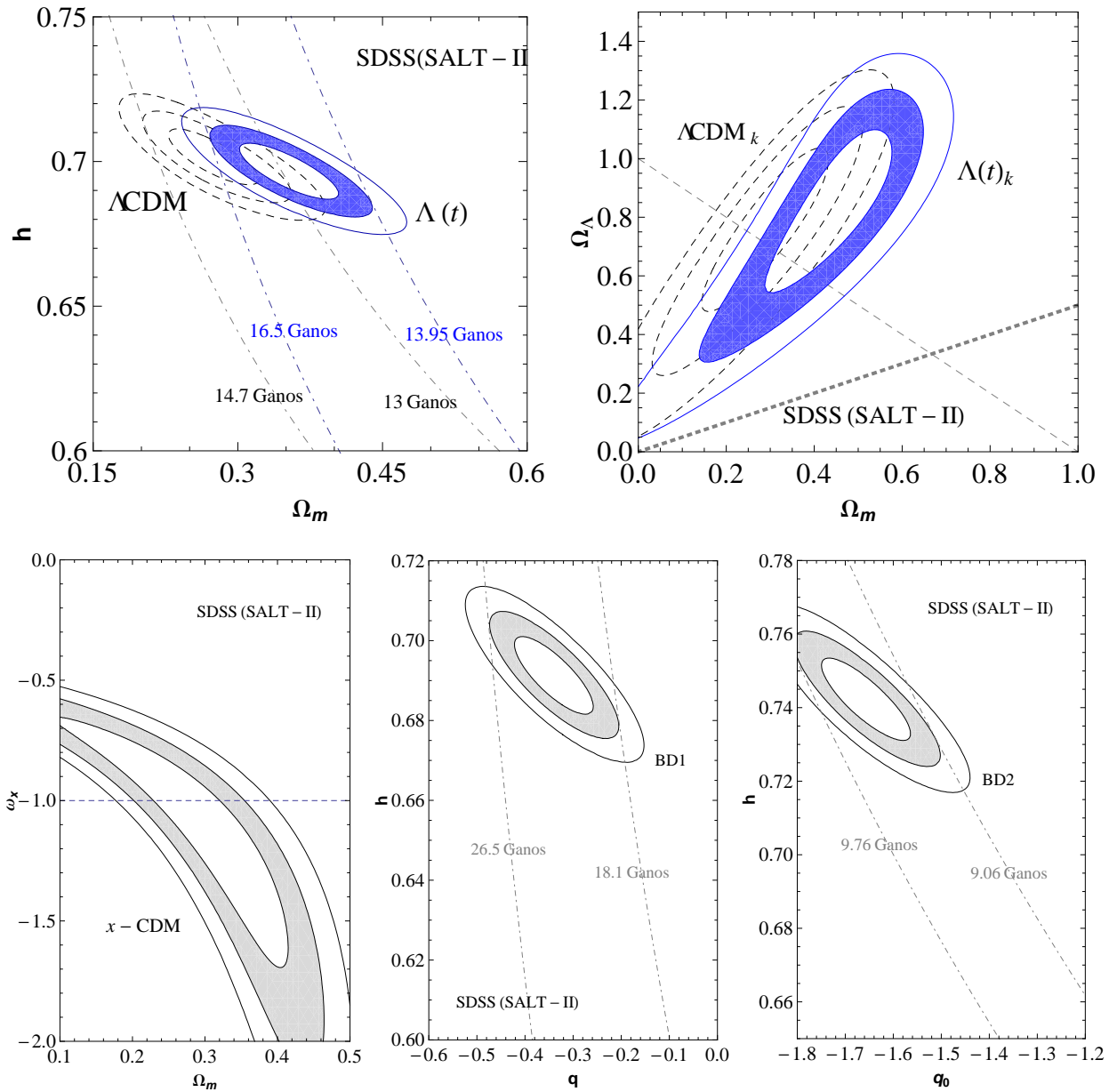


Figura 5.7: Curvas dos níveis 1, 2 e 3σ resultantes dos ajustes das sete classes de modelos aos dados do SDSS (SALT-II).

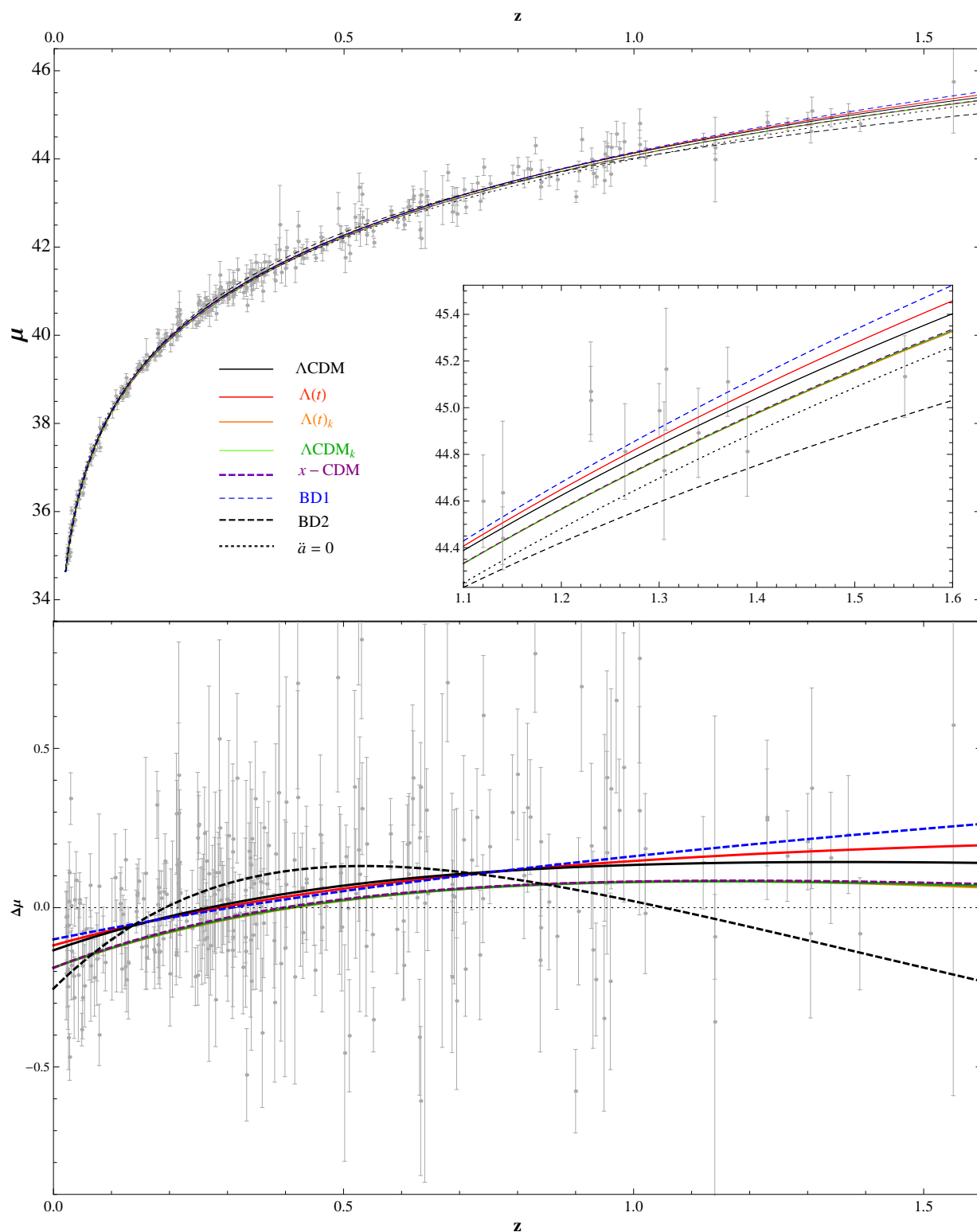


Figura 5.8: Painel superior: diagrama de Hubble com dados do SDSS (SALT-II) e curvas teóricas dos melhores ajustes. Painel inferior: magnitude residual em relação ao melhor ajuste do modelo sem aceleração ($\ddot{a} = 0$).

Tabela 5.5: Cosmografia resultante dos melhores ajustes com SDSS(SALT-II).

Modelo	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{\Lambda,0}$	Ω_T	h	ω_x	q_0	$H_0 t_0$
$\Lambda(t)$ plano	0.352	0.648	1.000	0.697	-1	-0.472	1.074
Λ CDM plano	0.273	0.727	1.000	0.702	-1	-0.591	0.990
$\Lambda(t)_k$	0.450	0.845	1.295	h^*	-1	-0.620	1.088
Λ CDM $_k$	0.299	0.780	1.079	h^*	-1	-0.631	0.991
x -CDM	0.305	0.695	1.000	h^*	-1.111	-0.658	0.975
BD1	--	--	1.000	0.691	-1	-0.340	1.515
BD2	--	--	1.000	0.742	-1	-1.658	0.713

temos $-0.447 < q_0 < -0.231$ (BD1) e $-1.778 < q_0 < -1.533$ (BD2).

Analisando as curvas das Figuras 5.6 e 5.8, verificamos novamente que o $\Lambda(t)$, em seu best fit, é o que menos se afasta da curva do Λ CDM, no seu respectivo melhor ajuste.

5.4 Seleção de modelos

Após estimar os parâmetros de todos os modelos com os quatro pacotes de dados podemos aplicar o critério de informação na seleção de modelos. Como nos casos estudados ficamos sempre com o mesmo número de parâmetros, apesar de haver parâmetros diferentes, aplicar o AIC é equivalente a utilizar o BIC, se o que nos interessa é a diferença Δ_{AIC} ou Δ_{BIC} . Como a escala de categorização dos modelos é mais bem definida no BIC, a utilizaremos aqui.

Na Tabela 5.6 temos a coleção de valores de χ^2 reduzido e de Δ_{BIC} para todos os casos. No cálculo do Δ_{BIC} , o Λ CDM foi o modelo de referência pois sempre obteve o menor χ^2_{min} nos ajustes.

Tabela 5.6: Aplicação de critério de informação aos ajustes.

Modelo	Union2		Constitution		SDSS(MLCS)		SDSS(SALT-II)	
	χ^2_ν	Δ_{BIC}	χ^2_ν	Δ_{BIC}	χ^2_ν	Δ_{BIC}	χ^2_ν	Δ_{BIC}
$\Lambda(t)$ plano	0.981	1.905 ⁽⁴⁾	1.182	1.362 ⁽⁴⁾	0.840	0.474 ⁽¹⁾	0.866	1.013 ⁽⁴⁾
ΛCDM plano	0.978	0.000 ⁽⁰⁾	1.179	0.000 ⁽⁰⁾	0.839	0.000 ⁽⁰⁾	0.862	0.000 ⁽⁰⁾
$\Lambda(t)_k$	0.979	0.512 ⁽¹⁾	1.180	0.459 ⁽¹⁾	0.842	1.042 ⁽⁴⁾	0.865	0.654 ⁽³⁾
Λ CDM $_k$	0.979	0.575 ⁽²⁾	1.181	0.716 ⁽²⁾	0.842	0.888 ⁽³⁾	0.865	0.627 ⁽²⁾
x -CDM	0.979	0.654 ⁽³⁾	1.181	0.857 ⁽³⁾	0.842	0.860 ⁽²⁾	0.865	0.594 ⁽¹⁾
BD1	0.990	6.538 ⁽⁵⁾	1.191	4.827 ⁽⁵⁾	0.846	2.039 ⁽⁵⁾	0.874	3.388 ⁽⁵⁾
BD2	1.092	63.64 ⁽⁶⁾	1.291	44.30 ⁽⁶⁾	0.939	28.59 ⁽⁶⁾	0.965	29.18 ⁽⁶⁾

Quando citamos a chamada “regra de ouro” do χ^2_ν , nos deparamos com uma aparente inconsistência: em relação aos pacotes do SDSS, como dizer que o ajuste do BD2 tem melhor qualidade que os outros, mesmo que o χ^2_ν seja mais próximo de 1? A nosso ver, isso pode refletir o fato de estes pacotes não fornecerem ajustes muito bons em geral, o que fica evidente quando olhamos o χ^2_ν dos demais modelos. Isso mostra que a regra de ouro deve ser sempre tomada com cuidado.

Quando analisamos o Δ_{BIC} , temos que o Union2 e o Constitution resultam em mesmo ordenamento dos modelos (do mais ao menos favorecido pelo modelo que melhor ajusta os dados), o que não ocorre com o SDSS. O mais interessante é que há diferenças a depender do ajustador (MLCS2k2 ou SALT-II) quanto ao ordenamento, ou seja, a tensão entre os dois pacotes não aparecem só nos valores dos parâmetros quando analisamos cada classe de modelo em separado, mas também quando comparamos os modelos. Vale ressaltar que para o MLCS2k2, o modelo $\Lambda(t)$ ocupa a primeira posição.

Exceto para os modelos de Brans-Dicke, os modelos se encontram na faixa de $0 < \Delta_{BIC} \leq 2$, ou seja, há fraca evidência em favor do Λ CDM com todos os conjuntos de dados. Para o BD1, os dados do Constitution e do SDSS indicam evidência positiva em favor do modelo padrão, enquanto que com o Union2 a evidência é forte em favor do Λ CDM. Sobre o BD2, há evidência muito forte para descartarmos este modelo [44].

Apesar de nosso foco neste trabalho ser o estudo do caso $\Lambda(t)$, a análise destes outros seis casos determina o status do $\Lambda(t)$ em comparação com outros que não o padrão. Destacamos que foi a primeira vez que o caso com curvatura do modelo estudado foi desenvolvido e testado com dados observacionais.

Mas, como em geral testes de supernovas não são muito restritivos, vamos considerar restrições impostas pelos dados da radiação cósmica de fundo, das oscilações acústicas bariônicas e do espectro de potência de matéria, para posteriormente realizar uma análise conjunta, que nos dará regiões menores no espaço de parâmetros para os níveis considerados. Esta etapa, a ser apresentada a seguir, foi desenvolvida apenas com o $\Lambda(t)$, e comparada com o Λ CDM.

Capítulo 6

Do universo primordial à formação de estruturas

No capítulo anterior, verificamos que a vela-padrão utilizada em medidas de distâncias cosmológicas indica que o universo está em expansão (os redshifts são maiores que zero), e estes dados favorecem fortemente o aumento da taxa desta expansão. Como os pontos do espaço estão se afastando, é natural adotarmos a hipótese de que estes pontos estavam mais próximos no passado. Voltando no tempo, teríamos então uma densidade de energia cada vez maior, associada a temperaturas mais altas. Chegaríamos em um momento no qual a escala de energia era tão alta que não permitiria a existência da matéria neutra. Teríamos então um universo ionizado, preenchido por um fluido fóton-bárion, por matéria escura e léptons.

Este é o cenário do universo em instantes iniciais após a grande explosão, característico do modelo de Big Bang proposto teoricamente desde 1948 por George Gamow e colaboradores na Universidade de Princeton. Este modelo previa que, se o universo teve um estágio muito denso e quente, a ponto de ser opaco, nos momentos iniciais de sua história evolutiva, deveria haver um “fóssil”, uma primeira imagem do universo relativa ao instante em que ele ficou transparente. Esta radiação, a *radiação cósmica de fundo em microondas* (CMB), estaria permeando todo o espaço e seria aproximadamente uniforme e isotrópica, não podendo ser associada a fontes pontuais.

Em 1964, os americanos Arno Penzias e Robert Wilson detectaram esta radiação na faixa de microondas, e sendo associada por Dicke e colaboradores à previsão teórica da equipe de Gamow, constituindo a maior evidência em favor do modelo de *Hot Big Bang* [3]. No

período desta descoberta, a comunidade científica era mais favorável ao modelo de universo estacionário, mas nele não há como justificar a existência desta radiação. Pela importância da descoberta e de sua consequência para a concepção que temos da dinâmica do universo hoje, Penzias e Wilson foram consagrados com o prêmio Nobel de Física em 1978.

Dados obtidos com o satélite COBE (*COsmic Background Explorer*) [50, 51, 52, 53], lançado em 1989, revelaram que o espectro desta radiação é o que mais próximo se tem na natureza de um corpo negro, com discrepância do espectro do corpo negro ideal da ordem de 10^{-4} . Corrigindo movimentos peculiares internos ao Grupo Local, com destaque aos da Terra, é feito um mapeamento angular da temperatura associada aos fótons recebidos para cada região de observação, construindo uma distribuição de temperatura em função das coordenadas esféricas θ e ϕ , ou seja, $T(\theta, \phi)$. A temperatura média [54] é obtida pela integral

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 2.725K. \quad (6.1)$$

A temperatura baixa reflete o efeito da expansão do universo na trajetória dos fótons da CMB até nós. Podemos encontrar uma relação entre temperatura e fator de escala se utilizarmos a lei de Stefan-Boltzmann para este corpo negro,

$$\varepsilon_\gamma = \alpha T^4, \quad (6.2)$$

onde

$$\alpha = \frac{\pi^2 k^5}{15 \hbar^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-16} Jm^{-3} K^{-4}. \quad (6.3)$$

Como sabemos que a densidade de radiação na expansão cai com a quarta potência do fator de escala, obtemos a simples relação

$$T(t) \propto a(t)^{-1}, \quad (6.4)$$

segundo a qual, com a expansão, os fótons da CMB têm sua temperatura diminuída.

Em torno do valor $2.725K$ são encontradas pequenas flutuações de temperatura. Medidas do DMR (*Differential Microwave Radiometer*), instrumento a bordo do COBE, encontraram flutuações da ordem de 10^{-5} , correspondem a variações de apenas $30\mu K$ (1σ). As medidas tão precisas de dados cosmológicos iriam marcar a entrada da Cosmologia na categoria de ciência de precisão.

O argumento teórico para a existência destas anisotropias no espectro da CMB está

na influência dos poços de potencial da matéria escura no comportamento do fluido fóton-bárion, durante a fase primordial discutida anteriormente. Ao “descer” um poço de potencial, o fóton ganha energia, sendo associado a maior temperatura, enquanto que ao “subir”, perde energia, apresentando redshift. Para pequenas escalas, a queda no poço de potencial aumenta a pressão do fluido, o que acarreta uma subsequente expansão. Ao expandir, a gravidade volta a reger, comprimindo o fluido. Temos assim a geração de ondas de compressão e rarefação, e este fenômeno é conhecido como oscilações acústicas.

Agora, permitamos que o tempo avance um pouco depois deste estágio. Com a expansão, a temperatura do universo diminui, o que irá permitir a combinação dos prótons e elétrons, aumentando a fração de densidade de matéria bariônica neutra em relação à de matéria bariônica total. O instante no qual esta fração atinge o valor de 0.5 chamamos de *recombinação*. A diminuição de matéria ionizada causa o *desacoplamento* dos fótons e bárions, e culminará no momento em que os fótons deste universo primordial sofrem o *último espalhamento*.

Os bárions, antes componentes do plasma ionizado, terão suas oscilações cessadas um pouco depois do desacoplamento, devido à inércia (efeitos de arraste), caracterizando um congelamento da sua configuração¹. Uma teoria perturbativa pode descrever a evolução das flutuações na densidade de matéria desde o z_{drag} até a distribuição da matéria bariônica hoje – aglomerados e superaglomerados de galáxias. Em outras palavras, aponta-se para uma relação entre as anisotropias observadas no espectro da radiação cósmica de fundo e a distribuição de matéria bariônica verificada hoje. Já temos a indicação observacional de marcas (*imprints*) da oscilação acústica na distribuição de galáxias, o que favorece fortemente esta teoria. A estas marcas damos o nome de oscilações acústicas bariônicas (BAO).

Até o momento discutimos de forma mais ampla CMB, BAO e distribuição de matéria no universo, na intenção de apresentar as conexões entre os fenômenos. Vamos agora definir formalmente alguns estágios do universo primordial citados anteriormente, pois há detalhes necessários para a construção de grandezas a serem utilizadas na estimativa de parâmetros de modelos cosmológicos.

¹Este momento está relacionado com o chamado z_{drag} , o redshift da radiação emitida logo após efeitos de arraste.

6.1 Estágios do universo primordial

No início deste capítulo falamos de recombinação, de desacoplamento e de último espalhamento. Vejamos alguns detalhes destas etapas.

A recombinação é definida como o exato momento em que a densidade de prótons em relação à total (prótons e hidrogênio neutro) tem valor $1/2$, e a partir dele prevalecerá a densidade de matéria neutra. De maneira aproximada, a fração de universo ionizado pode ser descrita pela *equação de Saha*,

$$X \equiv \frac{-1 + \sqrt{1 + 4S}}{2S}, \quad (6.5)$$

onde

$$S(T, \eta) = 3.84\eta \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{Q}{kT} \right), \quad (6.6)$$

sendo Q a energia de ionização do hidrogênio, $m_e c^2$ a energia de repouso do elétron, k a constante de Boltzmann e η a fração bárion-fóton [3, 2]. Esta relação é obtida através da equação de Maxwell-Boltzmann para reações em equilíbrio. O caráter aproximado se dá, entre outras razões, por utilizarmos um formalismo de equilíbrio em um período em que a reação que ioniza o hidrogênio e a que combina próton e elétron não estão mais em equilíbrio.

A partir de determinado instante, os fótons e elétrons interagem através de *espalhamento Thomson* [55], não alterando a frequência dos fótons. Podemos definir uma *taxa de espalhamento* como

$$\Gamma = n_e \sigma_e c, \quad (6.7)$$

onde σ_e é a seção de choque ($= 6.65 \times 10^{-29} m^2$), e n_e é a densidade de elétrons livres. Para o universo ser globalmente neutro, $n_e = n_p$, e, quando ele for totalmente ionizado, $n_e = n_b = n_{b,0}(1+z)^3$. Logo,

$$\Gamma(z) = n_{b,0} \sigma_e c (1+z)^3. \quad (6.8)$$

O desacoplamento é definido como o momento a partir do qual a taxa de espalhamento Γ se torna inferior à taxa de expansão H , ou seja, quando o livre caminho médio do fóton se torna maior que a distância de Hubble c/H . Com a liberdade de movimento dos fótons, o universo se torna transparente. Uma vez desacoplada, não há mais razão física para a matéria bariônica ter a mesma temperatura que os fótons da CMB.

Por causa da recombinação, a fração X é reduzida, e para quando só uma porção da

matéria está ionizada, generalizamos a (6.8) para

$$\Gamma(z) = X(z)n_{b,0}\sigma_e c(1+z)^3. \quad (6.9)$$

Encontrar o redshift de desacoplamento do fóton seria simplesmente fazer $\Gamma = H$. Para o modelo padrão é obtido um $z_{des}^* = 1130$, mas a inclusão de efeitos do não-equilíbrio resulta num valor um pouco mais abaixo, aproximadamente 1100.

Como consequência do desacoplamento, podemos definir o instante do último espalhamento do fóton pelo elétron, a partir de quando os fótons que observamos na CMB viajam diretamente até nós. Cada observador está circundado por uma superfície de último espalhamento (*last scattering*). Vejamos como encontramos o redshift do último espalhamento para o modelo $\Lambda(t)$.

6.1.1 Redshift de último espalhamento

Em um intervalo de tempo $t \rightarrow t + dt$, a probabilidade de um fóton sofrer espalhamento será $dP = \Gamma(t)dt$. Quando detetamos um fóton da CMB no instante t_0 , esperamos que o número de espalhamentos sofridos desde um instante t seja

$$\tau(t) = \int_t^{t_0} \Gamma(t')dt', \quad (6.10)$$

onde τ é a *profundidade ótica*. Se t for o instante do último espalhamento, teremos $\tau = 1$. Mudando a variável de integração em (6.10), encontramos

$$\tau(a) = \int_a^1 \frac{\Gamma(a')}{H(a')} \frac{da'}{a'}, \quad (6.11)$$

ou ainda

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{\Gamma(z')}{H(z')} \frac{dz'}{1+z'}. \quad (6.12)$$

Novamente, Γ depende de X e, como não há equilíbrio neste período, a equação de Saha não se aplica. Utilizamos no cálculo de z_{ls} fórmulas de ajuste (*fitting formulae*) encontradas na literatura [56, 57], que se aplicam ao modelo padrão:

$$z_{ls}^* = 1048 \left[1 + 0.00124(\Omega_{b,0}h^2)^{-0.738} \right] \left[1 + g_1(\Omega_{m,0}h^2)^{g_2} \right], \quad (6.13)$$

onde

$$g_1 = 0.0783(\Omega_{b,0}h^2)^{-0.238} [1 + 39.5(\Omega_{b,0}h^2)^{0.763}]^{-1}, \quad (6.14)$$

$$g_2 = 0.56 [1 + 21.1(\Omega_{b,0}h^2)^{1.81}]^{-1}. \quad (6.15)$$

O ajuste dos dados de sete anos do WMAP resultam em melhor ajuste para a chamada *densidade de bárions física* ($\Omega_{b,0}h^2$) no valor de 0.02258, com o modelo padrão [58]. Vamos supor que no modelo $\Lambda(t)$ o vácuo só decai em matéria escura, não alterando os valores associados a bárions no Λ CDM, o que justifica a utilização do mesmo valor de $\Omega_{b,0}$ no caso estudado.

Para encontrar o z_{ls} no modelo que estudamos, analisamos qual deveria ser o valor de z na (6.12) com o parâmetro de Hubble do $\Lambda(t)$ para obtermos o mesmo $\tau(z)$ que é obtido com o do modelo padrão, $H^*(z)$, para diversos pares $(\Omega_{m,0}, h)$. Ou seja,

$$\int_0^{z_{ls}} \frac{\Gamma(z')}{H(z')} \frac{dz'}{1+z'} = \int_0^{z_{ls}^*} \frac{\Gamma(z')}{H^*(z')} \frac{dz'}{1+z'}, \quad (6.16)$$

onde z_{ls}^* é dado pela (6.13). O interessante é que, para pares diferentes de parâmetros, a razão entre o redshift obtido para o Λ CDM – z_{ls}^* – e o obtido para o $\Lambda(t)$ permaneceu praticamente inalterada. Dessa forma, encontramos

$$z_{ls} = 0.986z_{ls}^*. \quad (6.17)$$

Com a observação de fótons da superfície de último espalhamento será possível construir o já citado espectro de anisotropias. Vejamos como definimos as flutuações de temperatura, e de que maneira utilizamos informação deste espectro para testar o modelo estudado.

6.1.2 Anisotropias

As pequenas variações de temperatura no espectro da CMB indicam que o universo não era perfeitamente homogêneo. A abertura angular $\delta\theta$ de uma flutuação na CMB está relacionada ao tamanho físico ℓ na superfície de último espalhamento através da definição de distância diâmetro-angular (2.39). A expressão das flutuações é dada por

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \equiv \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (6.18)$$

e como as flutuações estão distribuídas numa superfície esférica, podemos utilizar uma expansão em harmônicos esféricos e escrevê-la como

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (6.19)$$

onde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são as funções harmônicas esféricas. Duas direções no céu \hat{n} e \hat{n}' , separadas por um ângulo θ , estão relacionadas por $\cos \theta = \hat{n} \cdot \hat{n}'$. É possível definir uma *função de correlação* $C(\theta)$ como

$$C(\theta) \equiv \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos \theta}. \quad (6.20)$$

Aplicando a expansão em harmônicos esféricos em (6.20), obtemos

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \theta), \quad (6.21)$$

onde P_l são os polinômios de Legendre. Assim, a função de correlação pode ser expandida em momentos de multipolos l , e, de maneira geral, um termo C_l é uma medida de flutuação de temperatura numa escala angular

$$\theta = \frac{\pi}{l}. \quad (6.22)$$

Os momentos $l \geq 2$ são os de maior interesse para a Cosmologia, por estarem relacionados com as flutuações presentes no momento do último espalhamento. O monopolo deve ser zero para que em larga escala a temperatura resulte na média, e o termo de dipolo está associado aos movimentos peculiares da Terra, do Sistema Solar e da Via Láctea.

Os dados observacionais da CMB são apresentados num gráfico de flutuação de temperatura versus momento de multipolo l . Verificar se um modelo se ajusta bem a estes dados constitui o teste associado à CMB. A posição do primeiro pico neste gráfico é fortemente dependente da curvatura do espaço. A posição observada deste pico é consistente com $k = 0$, ou seja, $\Omega_T = 1$, o que justifica o enfoque neste caso. O valor de $\Omega_{b,0} h^2$ a que nos referimos acima é resultado de uma análise mais cuidadosa da curva das flutuações de temperatura, e é consistente com o valor obtido nos estudos de nucleossíntese primordial. Este resultado depende basicamente do modelo de universo na fase pré-recombinação, e como o modelo $\Lambda(t)$ não difere do Λ CDM nessa etapa, temos mais uma justificativa para a utilização deste mesmo valor em nossa análise.

6.2 Posição do primeiro pico

No presente trabalho nos limitamos a verificar a posição do primeiro pico, l_1 . Com as informações da CMB, obtidos com o WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) [59, 60], sabe-se que, no modelo padrão, o primeiro pico está em $l_1 = 220.8 \pm 0.7$ (para o nível de confiança de 1σ). Tomaremos este valor como sendo um dado observacional.

Vimos que antes do desacoplamento havia oscilações no fluido fóton-bárion, perturbações transportadas por ondas sonoras, com velocidade c_s , dependente da razão entre os componentes do plasma. Da mecânica dos fluidos, obtemos

$$\frac{c_s}{c} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \quad (6.23)$$

onde c é a velocidade da luz. Considerando que os bárions não contribuem para a pressão, teremos

$$p = \frac{1}{3}\rho_\gamma, \quad (6.24)$$

e, assim,

$$\delta p = \frac{1}{3}\delta\rho_\gamma. \quad (6.25)$$

A densidade total do plasma será

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_b, \quad (6.26)$$

obtendo-se

$$\delta\rho = \delta\rho_\gamma + \delta\rho_b. \quad (6.27)$$

Se os bárions se conservam separadamente, sua densidade cai com a^3 , enquanto a de fótons evolui com a^{-4} , e então encontramos

$$\delta\rho_b = -3(1+z)\rho_b, \quad (6.28)$$

$$\delta\rho_\gamma = -4(1+z)\rho_\gamma. \quad (6.29)$$

Com estes resultados reescrevemos a (6.23) como

$$\frac{c_s}{c} = \left[3 + \frac{9\rho_b}{4\rho_\gamma} \right]^{-1/2}. \quad (6.30)$$

A razão entre as densidades de bárions e de fótons é facilmente obtida, pois já sabemos como

elas evoluem com o redshift,

$$\frac{\rho_b}{\rho_\gamma} = \frac{\Omega_{b,0}(1+z)^3}{\Omega_{\gamma,0}(1+z)^4} \approx \frac{\Omega_{b,0}}{\Omega_{\gamma,0}} z^{-1}. \quad (6.31)$$

A máxima distância que uma onda acústica neste plasma pôde percorrer, desde a formação do plasma – que aproximaremos por $t = 0$ – até o último espalhamento, define o *horizonte acústico*

$$r_s = a_{l_s} \int_0^{t_{l_s}} c_s \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.32)$$

que pode ser escrito em termos do redshift e do parâmetro de Hubble,

$$r_s = \frac{1}{1+z_{l_s}} \int_{z_{l_s}}^{\infty} c_s \frac{dz}{H(z)}. \quad (6.33)$$

A abertura angular que subentende a distância r_s sobre a superfície de último espalhamento pode ser obtida a partir de (2.39),

$$\theta_A = \frac{r_s}{d_A}, \quad (6.34)$$

e, tomando a (2.46), encontramos

$$\theta_A = \left[\int_{z_{l_s}}^{\infty} \frac{c_s}{c} \frac{dz}{H(z)} \right] \left[\int_0^{z_{l_s}} \frac{dz}{H(z)} \right]^{-1}. \quad (6.35)$$

Como as integrais envolvem tanto baixos quanto altos redshifts, usamos (2.69) para o modelo padrão e (3.52) para o aqui estudado. A razão c_s/c é obtida através de (6.30) e (6.31), e não difere entre os dois modelos.

Calculada a abertura angular, define-se a *escala acústica* como

$$l_A \equiv \frac{\pi}{\theta_A}. \quad (6.36)$$

Segundo [61, 62], a posição do primeiro pico é dada por

$$l_1 = l_A(1 - \delta_1), \quad (6.37)$$

onde δ_1 é uma correção determinada apenas pela física pré-recombinação. O seu valor

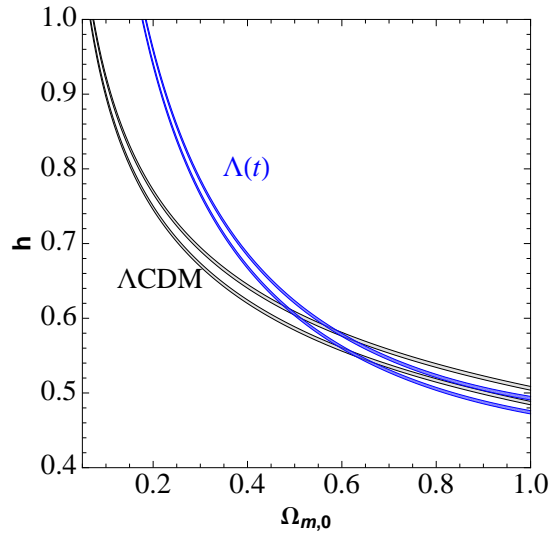


Figura 6.1: Resultados da análise da posição do primeiro pico obtidos com os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$.

aproximado para a cosmologia padrão – que tomaremos também para o $\Lambda(t)$ – é

$$\delta_1 \approx 0.267 \left[\frac{1}{0.3} \frac{\rho_r(z_{ls})}{\rho_m(z_{ls})} \right]^{0.1}. \quad (6.38)$$

A radiação – fótons mais neutrinos – em ambos modelos evolui como

$$\rho_r = 3H_0^2 \Omega_{r,0} z^4. \quad (6.39)$$

Para altos redshifts, no modelo padrão temos

$$\rho_m^* \approx \rho_T = 3H_0^2 \Omega_{m,0} z^3, \quad (6.40)$$

o que resulta em

$$\frac{\rho_r(z_{ls}^*)}{\rho_m^*(z_{ls}^*)} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} z_{ls}^*, \quad (6.41)$$

enquanto que, para o $\Lambda(t)$,

$$\rho_m \approx \rho_T = 3H_0^2 \Omega_{m,0}^2 z^3, \quad (6.42)$$

e

$$\frac{\rho_r(z_{ls})}{\rho_m(z_{ls})} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}^2} z_{ls}. \quad (6.43)$$

Foi possível então, aplicando o χ^2 , encontrar os pares $(\Omega_{m,0}, h)$ que dentro dos níveis de

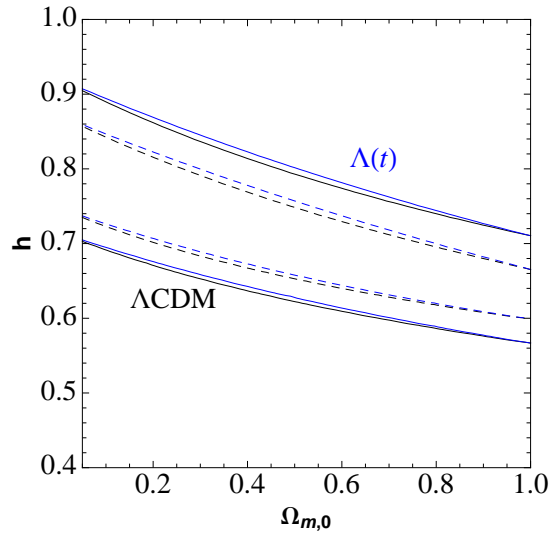


Figura 6.2: Resultados dos ajustes dos modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ aos D_V 's.

confiança 1 e 2σ descrevem bem a condição $l_1 = 220.8 \pm 0.7$. Como usamos apenas um ponto observacional, salientamos que esta análise separada não é rigorosamente estatística. Os valores de z_{ls} foram obtidos a partir de (6.13) ou de (6.17), a depender do modelo cosmológico. O resultado desta análise encontra-se na Figura 6.1.

Posteriormente será apresentada a superposição e a combinação destes resultados com os resultados de supernovas. Antes disso, falemos sobre mais algumas grandezas utilizadas.

6.3 Oscilações acústicas bariônicas

Com as oscilações acústicas bariônicas na distribuição de galáxias algumas grandezas são definidas para utilização na restrição de parâmetros cosmológicos. Uma delas é a conhecida como escala de dilatação, dada por

$$D_V(z) = \left[D_M(z)^2 \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (6.44)$$

onde

$$D_M(z) = (1+z)d_A \quad (6.45)$$

é a distância diâmetro-angular co-móvel, e o outro fator está relacionado com a distância radial [63]. Esta definição leva em conta o *efeito Alcock-Paczynski* [64], segundo o qual a dilatação do fator de escala na linha de visão não é equivalente a uma dilatação transversal.

Dados de galáxias vermelhas luminosas (LRD) do SDSS indicam um máximo na oscilação para $z \approx 0.35$, com $D_V(0.35) = 1.300 \pm 0.088$ Gpc [65].

Em $z = 0.2$, encontra-se outra medida de D_V . O valor direto não foi localizado, mas [66] mediu a razão $r_s(z_{drag})/D_V(z)$ nos redshifts 0.2 e 0.35, encontrando $r_s(z_{drag})/D_V(0.2) = 0.1905 \pm 0.0061$ e $r_s(z_{drag})/D_V(0.35) = 0.1097 \pm 0.0036$. Tomamos a razão entre estes dois valores, e conhecendo o $D_V(0.35)$, pudemos encontrar $D_V(0.2) = 0.748 \pm 0.057$.

Utilizando a (2.46) reescrevemos (6.44) como

$$D_V(z) = \frac{c}{H_o} \frac{(z)^{1/3}}{[E(z)^{1/3}]} \left[\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]^{2/3}, \quad (6.46)$$

com a qual aplicamos o teste do χ^2 usando os dois pontos. Os níveis de confiança encontrados estão apresentados da Figura 6.2. Verificamos que a região é pouco restritiva, não havendo diferenças significativas entre o modelo $\Lambda(t)$ e o padrão.

6.4 Espectro de potência de matéria

O último teste aplicado foi o ajuste do espectro de potência de matéria do modelo $\Lambda(t)$, para que pudéssemos fazer a análise conjunta incluindo o estudo perturbativo deste modelo². O espectro de potência é construído a partir das flutuações de densidade, ou seja, perturbações na densidade em torno do seu valor médio. Diferente das flutuações de temperatura, que estão em uma superfície, as de matéria estão distribuídas no volume, de sorte que representamos esta quantidade como $\delta(\vec{r}, t)$.

A flutuação pode ser representada no espaço de Fourier como superposição de ondas planas, onde passamos a estudar os modos de Fourier $\delta_k(t)$. O espectro de potência é definido como

$$P(k) = \langle \delta_k^2 \rangle. \quad (6.47)$$

Para encontrar o espectro de potência do modelo estudado, resolvemos o sistema de equações diferenciais acopladas obtido para este modelo provocar perturbações nas densidades dos componentes deste universo, com exceção da densidade de energia escura [69]. As

²Estudos detalhados de evolução de perturbações de densidade neste modelo podem ser encontrados em [67, 68]

equações encontradas são

$$\delta_m'' - \left\{ \frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_m} + \frac{g_1[z]}{f_1[z]} \frac{1}{(1+z)^2} \right\} \delta_m' + \left\{ \frac{g_1[z]}{f_1[z]} \frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_m} \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{\Omega''_\Lambda}{\Omega_m} + \frac{\Omega'_m \Omega'_\Lambda}{\Omega_m^2} \right\} \delta_m = \frac{3}{2} \frac{1}{f_1[z](1+z)^4} \{ \Omega_m \delta_m + 2\Omega_r \delta_r \}, \quad (6.48)$$

$$\delta_r' - \frac{4}{3} \left\{ \frac{v}{(1+z)\sqrt{f_1[z]}} + \delta_m' - \frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_m} \right\} = 0, \quad (6.49)$$

$$v' = - \left(\frac{3000k}{2} \right)^2 \frac{\delta_r}{(1+z)\sqrt{f_1[z]}}, \quad (6.50)$$

onde

$$f_1[z] = \dot{a}^2 = \frac{1}{(\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0})(1+z)^2} \left\{ \Omega_{\Lambda,0} + \Lambda_{m,0}(1+z)^{3/2} \right\}^2 + (1+z)^2 \Omega_{r,0}, \quad (6.51)$$

$$g_1[z] = \ddot{a} = - \frac{(1+z)^2}{2} f_1'[z], \quad (6.52)$$

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_{\Lambda,0} \Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}} \left\{ \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} (1+z)^3 + (1+z)^{3/2} \right\} \quad (6.53)$$

e

$$\Omega_\Lambda(z) = \frac{\Omega_{\Lambda,0}^2}{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}} \left\{ 1 + \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} (1+z)^{3/2} \right\}. \quad (6.54)$$

Nestas equações, o índice do δ indica em qual componente é a perturbação, v é a velocidade

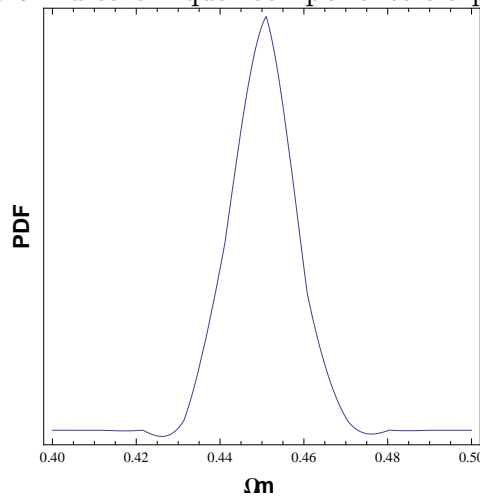


Figura 6.3: Função densidade de probabilidade do parâmetro $\Omega_{m,0}$ no ajuste do espectro de potência.

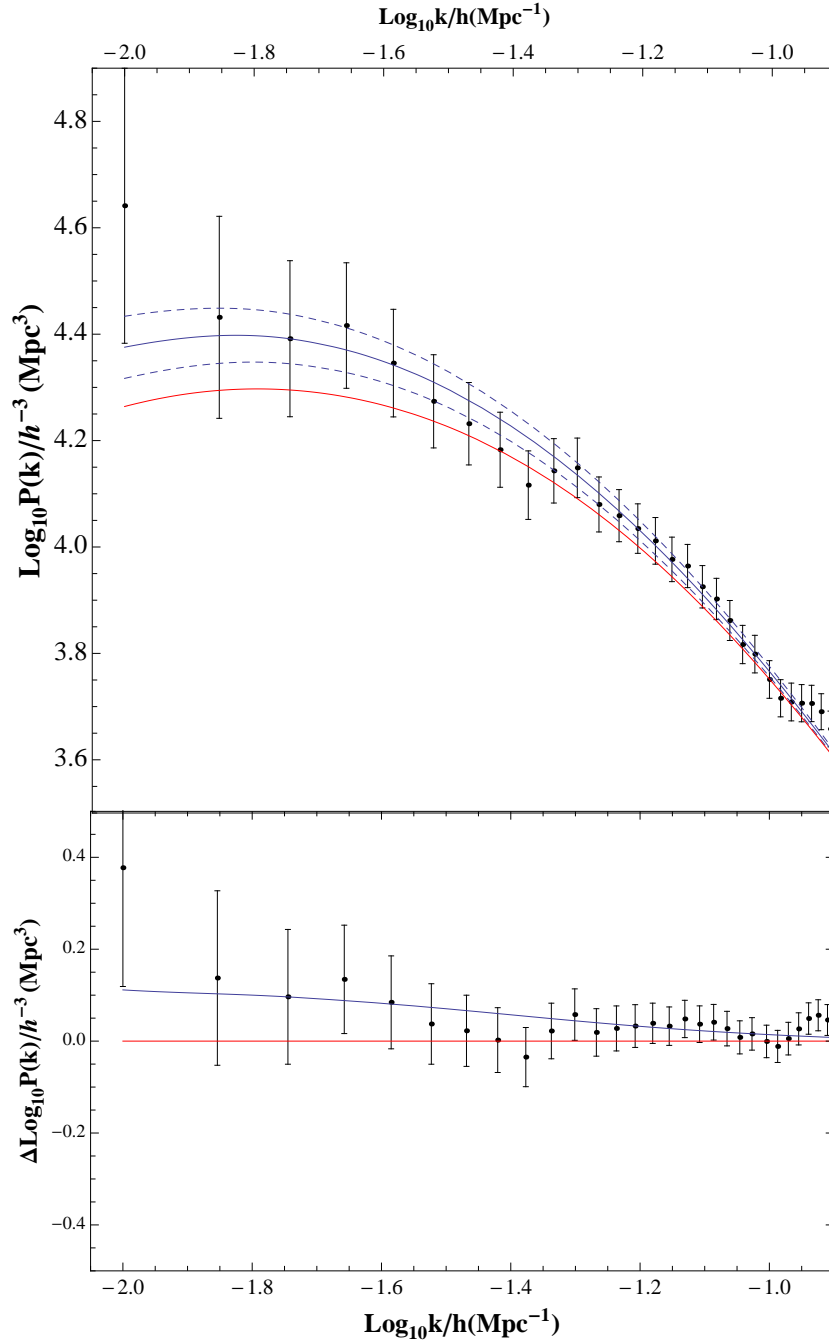


Figura 6.4: Curva com parâmetro de melhor ajuste do $\Lambda(t)$ (azul, cheia) e nos valores limites do intervalo de 2σ de confiança (azul, tracejada), em comparação com o resultado para o modelo padrão com função transferência BBKS (vermelho).

peculiar da radiação, e as derivadas são em relação ao redshift. Utilizamos como condição inicial o espectro invariante de escala ($\delta \propto \sqrt{k}$), fornecido pelo cenário inflacionário primordial.

O espectro é normalizado pelo espectro do modelo padrão obtido com a chamada função de transferência BBKS [70, 71]. Utilizamos dados observacionais do *2dFGRS galaxy survey* [72], obtendo melhor ajuste do $\Omega_{m,0}$ em $0.450^{+0.015}_{-0.014}(2\sigma)$. A função densidade de probabilidade

está apresentada nas Figura 6.3, e o ajuste do modelo $\Lambda(t)$ aos dados observacionais na 6.4. O χ^2_ν deste ajuste tem valor 0.774.

Confrontemos, a seguir, os resultados encontrados até então, e em seguida iremos apresentar os ajustes de análises conjuntas de dados.

Capítulo 7

Análises conjuntas

Até o momento foram aplicados testes com quatro pacotes de dados de supernovas do tipo Ia (SNe Ia), com a posição do primeiro pico do espectro de anisotropias da CMB, com os dois valores de D_V do BAO e com o espectro de potência de matéria em estruturas de larga escala (LSS). Verificaremos agora se estes resultados apresentam concordância. Para tanto, teremos nos gráficos adiante a superposição das curvas de nível para cada conjunto de dados separado, onde sempre preservamos a mesma escala para efeito de comparação.

Além da superposição, refizemos a análise estatística do χ^2 para os modelos $\Lambda(t)$ e Λ CDM, incluindo os dados de diferentes observações. Usamos o novo χ^2 dado por

$$\chi^2 = \sum_j \chi_j^2, \quad (7.1)$$

onde o índice j está relacionado com o ajuste utilizando determinada grandeza, que nos casos abordados podem ser μ para SNe Ia, l_1 para CMB, D_V para BAO ou $P(k)$ para LSS. Salientamos que somar χ^2 de observações distintas é equivalente a multiplicar probabilidades, já que $\mathcal{P} \propto \exp[-\chi^2/2]$. Ou seja, o que estamos fazendo na análise conjunta é estudar a probabilidade do modelo descrever um universo onde os dados de observações independentes tenham sido gerados.

Vejamos a análise conjunta para os amostras utilizadas.

Tabela 7.1: Resultados da análise conjunta de SNe Ia (Union2), BAO e CMB.

Modelo	Cosmografia				Critério de seleção	
	$\Omega_{m,0}$	h	q_0	$H_0 t_0$	χ^2_ν	Δ_{BIC}
$\Lambda(t)$	0.378	0.693	-0.433	1.043	0.984	4.954
Λ CDM	0.271	0.700	-0.594	0.992	0.975	0.000

7.1 SNe Ia+BAO+CMB

Nesta etapa, procuramos os pares de parâmetros $(\Omega_{m,0}, h)$ para os quais a quantidade

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\mu_i^{obs} - \mu(z_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2} + \frac{(l_1 - 220.8)^2}{0.7^2} + \frac{(D_V(0.2) - 0.748)^2}{0.057^2} + \frac{(D_V(0.35) - 1.300)^2}{0.088^2} \quad (7.2)$$

seja mínima. Este cálculo foi feito combinando cada pacote de dados de supernovas Ia com BAO e CMB [73]. Nas Figuras 7.1 a 7.4 constam as regiões com 68.3% e 95.4% de probabilidade no plano $\Omega_{m,0} - h$ para cada combinação feita ajustando o modelo $\Lambda(t)$ e comparando com a estimativa no modelo padrão. Apresentamos, para todos os casos, os resultados das análises conjuntas sobre os resultados individuais de SNe Ia, BAO e CMB. Os valores dos parâmetros estão disponíveis nas Tabelas 7.1 a 7.4.

Percebemos que o modelo Λ CDM apresenta maior concordância, havendo superposição de regiões de 1σ de todos os testes entre si e, conseqüentemente, com a análise conjunta, quando utilizamos o Union2 ou SDSS (SALT-II). Já com o $\Lambda(t)$, esta característica aparece

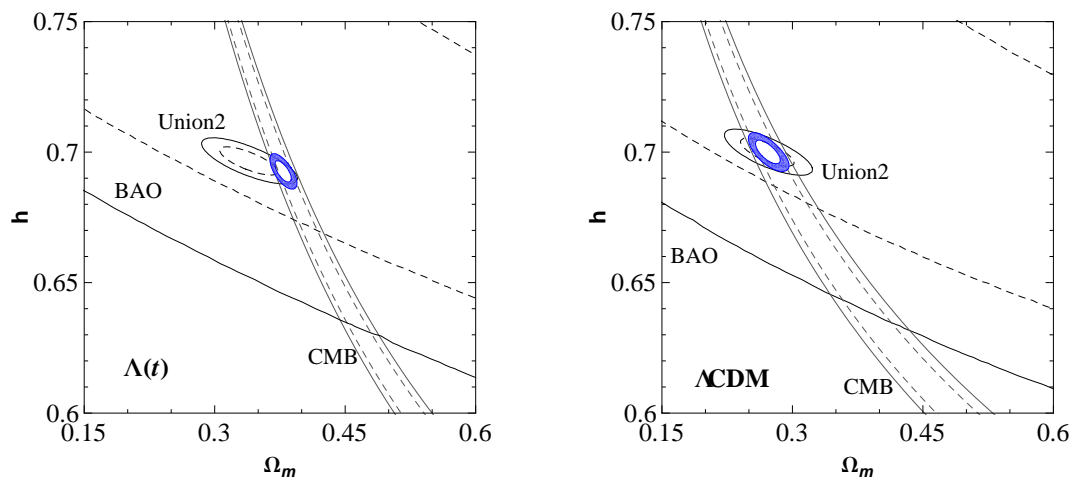


Figura 7.1: Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (Union2), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.

Tabela 7.2: Resultados da análise conjunta de SNe Ia (Constitution), BAO e CMB.

Modelo	Cosmografia				Critério de seleção	
	$\Omega_{m,0}$	h	q_0	$H_0 t_0$	χ^2_ν	Δ_{BIC}
$\Lambda(t)$	0.447	0.639	-0.330	0.971	1.224	4.939
Λ CDM	0.354	0.645	-0.469	0.920	1.212	0.000

quando combinamos BAO e CMB com os dois pacotes do SDSS. Já no Constitution só aparecerá superposição entre as análises individuais na região de 3σ .

A combinação com o Union2 resulta nos intervalos $0.366 < \Omega_{m,0} < 0.391$ e $0.687 < h < 0.698$ para o $\Lambda(t)$, enquanto para o modelo padrão temos $0.253 < \Omega_{m,0} < 0.291$ e $0.694 < h < 0.706$, no nível 2σ . Tanto nesta quanto nas demais análises o modelo com decaimento de vácuo em matéria será melhor ajustado em universos um pouco mais velhos que os obtidos no modelo padrão. Usando o Constitution, encontramos os intervalos $0.430 < \Omega_{m,0} < 0.465$ e $0.633 < h < 0.646$ no $\Lambda(t)$, e $0.329 < \Omega_{m,0} < 0.382$ e $0.638 < h < 0.652$ no Λ CDM. Ambas análises apresentam evidências positivas a favor do modelo padrão (analisando Δ_{BIC}).

Já quando fazemos a combinação com os pacotes do SDSS, encontramos, em ambos casos, que os conjuntos de dados fornecem fraca evidência em favor do Λ CDM. Quanto aos intervalos dos parâmetros temos $0.436 < \Omega_{m,0} < 0.480$ e $0.629 < h < 0.648$ no $\Lambda(t)$, e $0.346 < \Omega_{m,0} < 0.420$ e $0.631 < h < 0.653$ no Λ CDM fazendo uso do SDSS (MLCS2k2). Já com o SALT-II, encontramos $0.364 < \Omega_{m,0} < 0.395$ e $0.684 < h < 0.703$ ($\Lambda(t)$), e $0.246 < \Omega_{m,0} < 0.293$ e $0.693 < h < 0.713$ (Λ CDM).

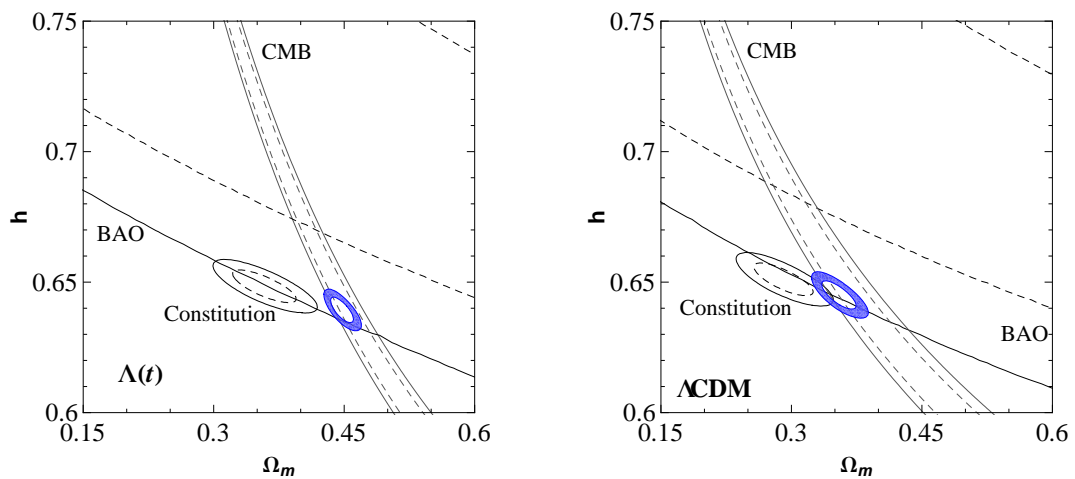


Figura 7.2: Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (Constitution), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.

Tabela 7.3: Resultados da análise conjunta de SNe Ia (SDSS - MLCS2k2), BAO e CMB.

Modelo	Cosmografia				Critério de seleção	
	$\Omega_{m,0}$	h	q_0	$H_0 t_0$	χ^2_ν	Δ_{BIC}
$\Lambda(t)$	0.457	0.638	-0.315	0.961	0.852	0.304
Λ CDM	0.380	0.642	-0.430	0.901	0.851	0.000

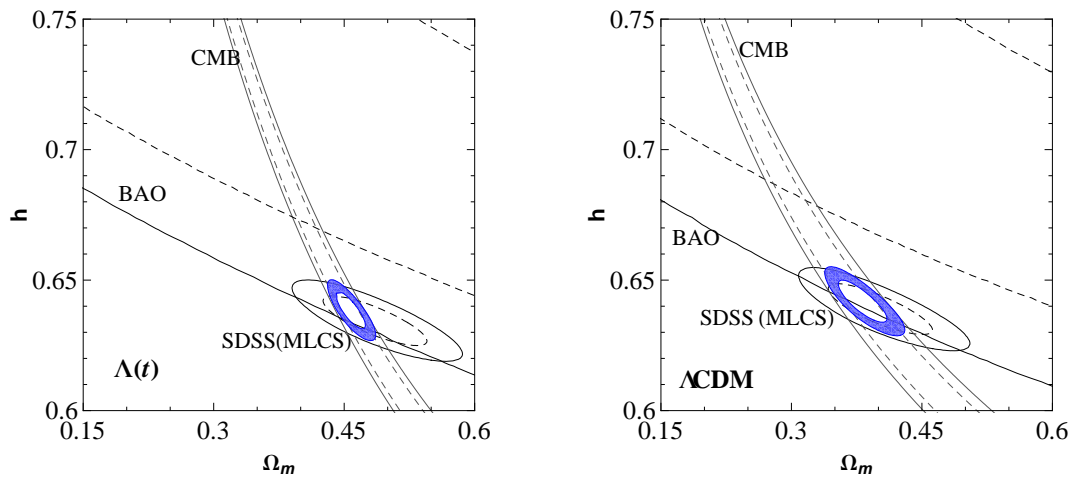


Figura 7.3: Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (SDSS, MLCS2k2), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.

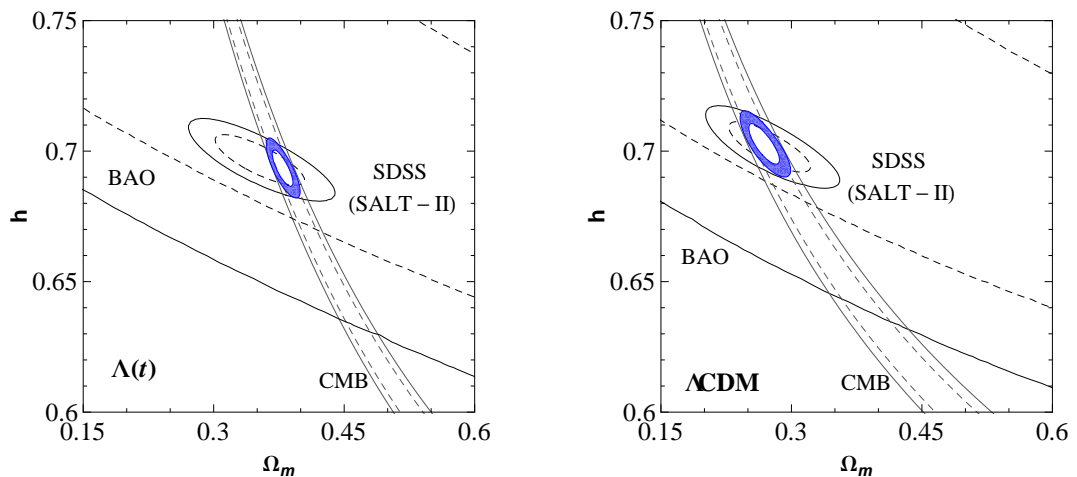


Figura 7.4: Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia (SDSS, SALT-II), BAO e CMB para o $\Lambda(t)$ (à esquerda) e Λ CDM (à direita). As curvas em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.

Tabela 7.4: Resultados da análise conjunta de SNe Ia (SDSS - SALT-II), BAO e CMB.

Modelo	Cosmografia				Critério de seleção	
	$\Omega_{m,0}$	h	q_0	$H_0 t_0$	χ^2_ν	Δ_{BIC}
$\Lambda(t)$	0.379	0.694	-0.432	1.402	0.863	1.456
Λ CDM	0.268	0.703	-0.598	0.995	0.858	0.000

Em todos os casos o modelo estudado é melhor ajustado em valores de parâmetros de densidade de matéria mais altos que nos do padrão. Para completar a apresentação de nossos estudos, combinemos estes pacotes de dados com os do espectro de potência de matéria em estruturas de larga escala.

7.2 SNe Ia+BAO+CMB+LSS

Partindo da equação (7.2), acrescentamos um termo de χ^2 associado ao ajuste do espectro de potência aos dados observacionais. Feitos os cálculos utilizando os quatro conjuntos de dados de supernovas Ia, encontramos curvas de nível em regiões bem restritas no espaço de parâmetros (Figura 7.5). Verificamos na Tabela 7.5 que em todos os casos o parâmetro de densidade de matéria é maior que 0.4, o que é esperado ao observarmos as superposições dos ajustes de CMB, BAO e LSS, que apresentam concordância na região de $\Omega_{m,0} \approx 0.45$.

Quando usamos os dados do Union2, obtivemos $0.410 < \Omega_{m,0} < 0.429$ e $0.677 < h < 0.687$ (2σ). Já no caso do Constitution, $0.438 < \Omega_{m,0} < 0.460$ e $0.634 < h < 0.644$. A combinação com os pacotes do SDSS nos dá, em 95.4%, os intervalos $0.440 < \Omega_{m,0} < 0.464$ e $0.633 < h < 0.647$ para o MLCS2k2, e $0.416 < \Omega_{m,0} < 0.438$ e $0.667 < h < 0.681$ com o SALT-II. Entre os quatro ajustes, a melhor concordância é verificada com o uso do SDSS - MLCS2k2, com regiões de 1σ de confiança em comum.

Tabela 7.5: Cosmografia resultante da análise combinada dos quatro tipos de observações.

Dados	Cosmografia			
	$\Omega_{m,0}$	h	$H_0 t_0$	χ^2_ν
Union2+BAO+CMB+LSS	0.419	0.682	0.998	1.062
Constitution+BAO+CMB+LSS	0.449	0.644	0.969	1.182
SDSS(MLCS2k2)+BAO+CMB+LSS	0.452	0.640	0.966	0.841
SDSS(SALT-II)+BAO+CMB+LSS	0.427	0.674	0.990	0.990

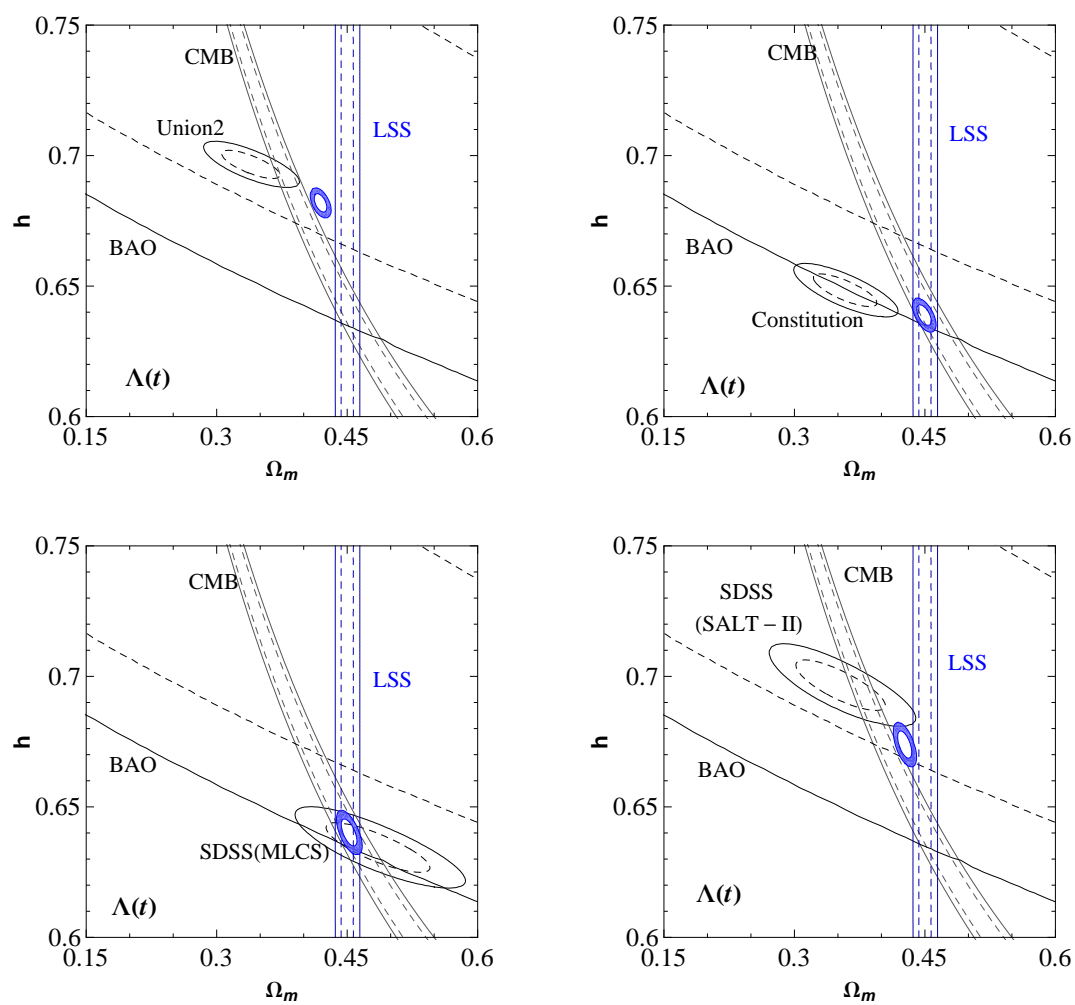


Figura 7.5: Superposição dos ajustes com dados de SNe Ia, BAO, CMB e LSS para o $\Lambda(t)$. As elipses em azul representam o resultado da análise conjunta destes dados.

Capítulo 8

Conclusões

O modelo cosmológico com densidade de energia escura proporcional ao parâmetro de Hubble, principal objeto de verificação observacional desta tese, vem sendo estudado desde 2005. Seu desenvolvimento teórico no nível não perturbativo resulta em um universo que, assim como no modelo padrão, apresenta estágio dominado por radiação, seguido por outro onde a matéria orchestra sua evolução, e por fim um período no qual a energia de vácuo prevalece. As equações de conservação da energia nos indicam um acoplamento entre matéria e energia escura, resultando em produção de matéria. No modelo é proposto que a radiação e os bárions se conservem separadamente, de sorte que a interação se dá apenas no setor escuro. O $\Lambda(t)$ também tem sido analisado em nível perturbativo, e aqui fizemos um recorte utilizando apenas a situação em que se adota um termo de vácuo perfeitamente homogêneo.

Realizamos uma atualização nos testes de supernovas Ia, fazendo uso de conjuntos mais novos. Ao aplicarmos os mesmos testes a classes de modelos presentes na literatura, como Λ CDM com curvatura, x -CDM e as de Brans-Dicke, pudemos classificar estes modelos segundo critério de seleção bayesiano (BIC), constatando que os ajustes de supernovas não descartam o $\Lambda(t)$.

Pela primeira vez estudamos os casos com curvatura deste modelo, sendo eles também verificados observacionalmente à luz dos dados de supernovas Ia. Para todos os ajustes, encontramos que o universo é espacialmente fechado e está atualmente em expansão acelerada. Como a análise de dados do espectro da CMB sugere fortemente que vivemos em um universo espacialmente plano, torna-se interessante uma futura aplicação do teste da CMB a este modelo ($\Lambda(t)_k$).

Os modelos de Brans-Dicke abordados foram submetidos aos primeiros testes, e os dados

já favorecem fortemente o modelo padrão em lugar destes. As idades muito baixas no caso com $\dot{q}_0 \neq 0$ e muito altas para $\dot{q}_0 = 0$ sinalizam que eles não descrevem bem o Universo.

Análises conjuntas de supernovas Ia, posição do primeiro pico do espectro de anisotropias da CMB e de valores de D_V do BAO nos dão informações distintas a depender do pacote de SNe que utilizamos. A única que não apresenta superposição entre as três observações em 2σ com o modelo $\Lambda(t)$ é aquela em que utilizamos o Constitution. Inclusive para o modelo padrão a região comum é bem restrita. Sempre obtemos parâmetros de densidade de matéria superiores com o $\Lambda(t)$, e parâmetros de idade ligeiramente maiores. Isto pode ser entendido como consequência da produção de matéria. Mesmo nos casos com maior diferença entre o modelo estudado e o padrão, a evidência a favor do Λ CDM não é considerada suficiente para descartarmos $\Lambda(t)$.

Já a combinação de todos os testes com um teste no nível perturbativo, o do espectro de potência de matéria (LSS), não nos fornece ajustes ruins se observarmos os valores de χ^2_ν . Apresentam mais de 40% do universo composto por matéria sem pressão, e parâmetro de idade compatível com o estimado por observações independentes. Em algumas expressões do $\Lambda(t)$ evidenciamos o termo extra $\Omega_{m,0}$ quando comparado com o Λ CDM. O quadrado do valor de $\Omega_{m,0}$ para $\Lambda(t)$ ser próximo do valor de $\Omega_{m,0}$ no padrão indica que não há grande diferença entre os redshifts de equilíbrio radiação-matéria em ambos modelos – ver 2.76 e 3.47. Assim, como consideramos que a radiação e os bárions se conservam separadamente, acreditamos que o estudo detalhado do efeito da inclusão do espectro de anisotropias da CMB não deve resultar em diferenças significativas em relação ao modelo mais aceito atualmente.

O teste observacional deste modelo é importante, pois a variação temporal da densidade de energia do vácuo pode resolver o problema da ordem de grandeza desta densidade observada hoje. Ajustes mais refinados se fazem necessários, utilizando mais informações do espectro da CMB, como posições e alturas relativas dos outros picos, e também construindo o espectro de potência de matéria sem a necessidade de normalização. Esperamos que com estes estudos tenhamos mais informações sobre o $\Lambda(t)$, pois até o momento não podemos rejeitar o modelo nem teoricamente, nem observacionalmente.

Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, 1972).
- [2] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, 2003).
- [3] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Benjamin Cummings, 2003).
- [4] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 15 (1929) 168.
- [5] M. Rowan-Robinson, *The Cosmological Distance Ladder: Distance and Time in the Universe* (W. H. Freeman & Company, 1985).
- [6] P. J. E. Peebles, *The Large-scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, 1980).
- [7] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., *Astrophys. J.* 159 (1970) 379.
- [8] V. C. Rubin, D. Burstein, W. K. Ford, Jr. and N. Thonnard, *Astrophys. J.* 289 (1985) 81.
- [9] F. Zwicky, *Morphological Astronomy* (Springer-Verlag, 1957).
- [10] R. Carlberg *et al.*, *Astrophys. J.* 462 (1996) 32.
- [11] R. S. Somerville, G. Lemson, T. S. Kolatt and A. Dekel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 316 (2000) 479.
- [12] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003) 559.
- [13] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* 380 (2003) 235.
- [14] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D*15 (2006) 1753.
- [15] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989) 1.
- [16] M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev. D*69 (2004) 103501.
- [17] R. Schutzhold, *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002) 081302.
- [18] R. Schutzhold, *Int. J. Mod. Phys. A*17 (2002) 4359.
- [19] S. M. Carroll, *Living Rev. Rel.* 4 (2001) 1.

- [20] H. A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* 37 (2005) 1385.
- [21] S. Carneiro, *Int. J. Mod. Phys. D15* (2006) 2241.
- [22] M. Birkel and S. Sarkar, *Astropart. Phys.* 6 (1997) 197.
- [23] C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* 124 (1961) 925.
- [24] G. A. Mena Marugan and S. Carneiro, *Phys. Rev. D65* (2002) 087303.
- [25] J. C. Carvalho, J. A. S. Lima and I. Waga, *Phys. Rev. D46* (1992) 2404.
- [26] J. A. S. Lima and J. C. C. Carvalho, *Gen. Rel. Grav.* 26 (1994) 909.
- [27] R. G. Vishwakarma, *Class. Quant. Grav.* 19 (2002) 4747.
- [28] I. L. Shapiro and J. Sola, *arXiv: astro-ph/040115* (2004).
- [29] R. Aldrovandi, J. P. B. Almeida and J. G. Pereira, *Grav. Cosmol.* 11 (2005) 277.
- [30] A. E. Montenegro, Jr. and S. Carneiro, *Class. Quant. Grav.* 24 (2007) 313.
- [31] L. Verde, *Lect. Notes Phys.* 800 (2010) 147.
- [32] P. Gregory, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica® Support* (Cambridge University Press, 2010).
- [33] W. H. Press *et al.*, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 2007).
- [34] Y. Wang, V. Kostov, K. Freese, J. A. Frieman and P. Gondolo, *JCAP* 0412 (2004) 003.
- [35] Y. Wang and P. M. Garnavich, *Astrophys. J.* 552 (2001) 445.
- [36] M. Szydlowski and A. Kurek, *arXiv: astro-ph/0801.0638* (2008).
- [37] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* 517 (1999) 565.
- [38] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* 116 (1998) 1009.
- [39] S. Carneiro, C. Pigozzo, H. A. Borges and J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D74* (2006) 023532.
- [40] S. Carneiro, M. A. Dantas, C. Pigozzo and J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D77* (2008) 083504.
- [41] M. Hicken *et al.*, *Astrophys. J.* 700 (2009) 1097.
- [42] E. Gaztanaga, E. Garcia-Berro, J. Isern, E. Bravo and I. Dominguez, *Phys. Rev. D65* (2002) 023506.
- [43] E. Garcia-Berro, Y. A. Kubyshev and P. Loren-Aguilar, *Int. J. Mod. Phys. D15* (2006) 1163.
- [44] C. Pigozzo, A. E. Montenegro Jr. and S. Carneiro (em preparação).

- [45] R. Amanullah *et al.*, arXiv: astro-ph/1004.1711 (2010).
- [46] M. Kowalski *et al.*, *Astrophys. J.* 686 (2008) 749.
- [47] M. Hicken *et al.*, *Astrophys. J.* 700 (2009) 331.
- [48] R. Kessler *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 185 (2009) 32.
- [49] J. Sollerman *et al.*, *Astrophys. J.* 703 (2009) 1374.
- [50] S. Dodelson and J. M. Jubas, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 2224.
- [51] J. R. Primack, SLAC Beam Line 22N4 (1992) 1.
- [52] J. C. Mather *et al.*, *Astrophys. J.* 354 (1990) L37.
- [53] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J.* 436 (1994) 423.
- [54] J. C. Mather, D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* 512 (1999) 511.
- [55] G. B. Rybicki and A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (Wiley-VCH, 1985).
- [56] W. Hu and N. Sugiyama, *Astrophys. J.* 471 (1996) 542.
- [57] O. Elgaroy and T. Multamaki, arXiv: astro-ph/0702343 (2007).
- [58] N. Jarosik *et al.*, arXiv: astro-ph/1001.4744 (2010).
- [59] G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 170 (2007) 288.
- [60] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 170 (2007) 377.
- [61] W. Hu, M. Fukugita, M. Zaldarriaga and M. Tegmark, *Astrophys. J.* 549 (2001) 669.
- [62] G. Sethi, S. K. Singh, P. Kumar, D. Jain and A. Dev, *Int. J. Mod. Phys. D15* (2006) 1089.
- [63] D. J. Eisenstein *et al.*, *Astrophys. J.* 633 (2005) 560.
- [64] C. Alcock and B. Paczynski, *Nature* 281 (1979) 358.
- [65] M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev. D74* (2006) 123507.
- [66] W. Percival *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 401 (2010) 2148.
- [67] H. A. Borges, *Perturbações em um modelo cosmológico com interação no setor escuro*, Tese de Doutorado, IF-UFBA, (2010).
- [68] H. A. Borges, S. Carneiro and J. C. Fabris, *Phys. Rev. D78* (2008) 123522.
- [69] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris and C. Pigozzo, *Phys. Rev. D77* (2008) 043513.

- [70] J. Martin, A. Riazuelo and M. Sakellariadou, *Phys. Rev. D* 61 (2000) 083518.
- [71] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser and A. S. Szalay, *Astrophys. J.* 304 (1986) 15.
- [72] S. Cole *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 362 (2005) 505.
- [73] C. Pigozzo, M. A. Dantas, S. Carneiro and J. S. Alcaniz, arXiv: astro-ph/1007.5290 (2010).