



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Vinícius Nonato Alves Lula Rocha

Uma Formulação Algébrica da Mecânica Quântica Relativística e Teoria Quântica de Campos

Salvador

19 de dezembro de 2019

Vinícius Nonato Alves Lula Rocha

Uma Formulação Algébrica da Mecânica Quântica Relativística e Teoria Quântica de Campos

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Universidade Federal da Bahia – UFBA

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Dr. José David Manguiera Vianna

Coorientador: Dr. Marco Cezar Barbosa Fernandes

Salvador

19 de dezembro de 2019

A meus pais

“A arte requer o homem por inteiro”

Resumo

Apresentamos neste trabalho alguns resultados novos para o desenvolvimento da teoria quântica relativística no contexto da formulação algébrica proposta inicialmente por Schönberg e desenvolvida posteriormente por Bohm, Hiley, Fernandes e Vianna e outros autores. Primeiramente, explorando a equação de *DKP* na visão algébrica de Bohm, Hiley, Fernandes e Vianna, mostramos sua compatibilidade com a equação de Klein-Gordon-Fock e a equação de Proca; mostramos também que esse formalismo algébrico estende naturalmente a formulação de Kruglov para o estudo da equação de *DKP* de partículas não massivas incluindo o caso de spin zero. Em seguida ampliamos o desenvolvimento da formulação de Schönberg para a obtenção da álgebra de *DKP* apresentando um método, via classes de equivalência, para extrair a álgebra *ParaDKP* (*PDKP*) da álgebra de Clifford simplética do espaço de fase; em consequência dessa metodologia obtivemos versões simpléticas de equações tipo Klein-Gordon-Fock, tipo Dirac e tipo *DKP*. Desenvolvemos também uma superálgebra onde bósons e férmions são tratados de forma unificada e mostramos como extrair dessa álgebra a superálgebra de Clifford e a superálgebra de *DKP*. Com essa formulação propusemos superequações tipo Klein-Gordon-Fock, tipo Dirac e tipo *DKP*. Finalmente, mostramos como a teoria quântica de campos pode ser incluída nesse formalismo usando as estruturas matemáticas de distribuições e de fibrados algébricos.

Palavras-chaves:Equação de Dirac. Equação de Dirac simplética. Superequação de Dirac. Equação de *DKP*. Equação de *DKP* simplética. Superequação de *DKP*. Álgebra de Clifford. Superálgebra de Clifford. Distribuições. Fibrados vetoriais. Fibrados algébricos. Teoria quântica de campos.

Abstract

We present in this dissertation some new results for the development of the relativistic quantum theory within the algebraic approach proposed by Schönberg and developed latter by Bohm, Hiley, Fernandes and Vianna and other authors. Firstly, by exploring the *DKP* equation in the Bohm, Hiley, Fernandes and Vianna's approach we have shown its equivalence with the Klein-Gordon-Fock equation and the Proca equation; we also have shown that this algebraic formalism extend naturally the Kruglov approach of the non-massive *DKP* equation including the 0-spin case. In the sequence we extend Schönberg's formalism to obtain *DKP* algebra by introducing a method, via equivalence class, to extract the *ParaDKP* algebra (*PDKP* algebra) of the symplectic Clifford algebra of phase space; in consequence of this methodology we have found symplectic versions of Klein-Gordon-Fock like, Dirac like and *DKP* like equations. We also have developed a superalgebra in which bosons and fermions are handled in a unified way and we have shown how to extract from this algebra the Clifford superalgebra and the *DKP* superalgebra. In this approach we proposed Klein-Gordon-Fock like, Dirac like and *DKP* like superequations. Finally we have shown how the quantum field theory could be included in this formalism by using the mathematical structures of algebraic bundles and distributions.

Keywords: Dirac equation. Symplectic Dirac equation. Dirac superequation. *DKP* equation. Symplectic *DKP* equation. *DKP* superequation. Clifford algebra. Clifford superalgebra. Fibre bundles. Algebra bundles. Quantum field theory.

Agradecimentos

Chegar ao fim do doutorado em Física é a realização de um sonho que venho sustentando há muito tempo. Muitas pessoas contribuíram para que eu pudesse fazer as escolhas necessárias para estar aqui. A começar pela minha professora de Geometria do ensino fundamental Rita e das professoras de Matemática e Física do ensino médio Ana Karine e Mariluce. Certamente, foi durante esse período que despertou em mim o desejo de ser cientista e por elas eu tenho muita gratidão. No ensino superior, ainda no curso de Engenharia, o professor Niels Fontes Lima, meu primeiro professor de iniciação científica, foi-me fonte de grande inspiração e acompanhou a minha transição de um aluno de Engenharia Elétrica para um aluno de bacharelado em Física. Como estudante de Física, agradeço ao professor José Garcia Vivas Miranda pelas aulas entusiasmantes de Termodinâmica, por agora no doutorado me ensinar a programar em *C/C++* e, por ter me sugerido procurar a professora Maria das Graças Reis Martins e o professor José David Manguera Vianna à minha primeira manifestação de estudar *física quântica*. A Garcia, expresseo o meu profundo agradecimento! O professor David é um exemplo ao qual irei me inspirar na minha vida profissional como professor e pesquisador em Física. Com ele e com a professora Graça eu aprendi que não se olha nota, histórico e nem coeficiente de rendimento de nenhum aluno para tê-lo como orientando; que em qualquer etapa da carreira acadêmica, não devemos podar ou inibir curiosidade dos alunos. Que, pelo contrário, devemos estimular a buscar por independência, mas que também, se preciso for, devemos sentar e assistir o seminário do estudante pela milésima vez. Aprendi a não ter medo de nenhuma área da Física e que de qualquer dessas áreas podemos encontrar coisas interessantes. Com eles aprendi a dar importância à preparação de meus amigos, e até desconhecidos, para seminários e apresentações; aprendi que um gesto de assistir a apresentação de um colega ou ler um texto preparado por ele, faz uma enorme diferença. Sou grato aos dois por todas as discussões sobre temas da Física, postura em sala de aula e apresentações.

Agradeço ao professor Lourival Manoel da Silva Filho pela co-orientação no mestrado e pelos momentos de risos e alegria. Agradeço ao professor Marco César Barbosa Fernandes por me guiar nos estudos dos trabalhos de Schönberg, e me apresentar ferramentas matemáticas que eu sequer imaginava que existia e, principalmente, pelas discussões na UnB sobre o meu trabalho, sobre ciência e sobre nossa responsabilidade como físicos e professores.

Aos professores da graduação, mestrado e doutorado Ossamu Nakamura, Luciano Melo, Humberto Borges, Aurino Ribeiro (*in memoriam*), Arthur Matos (*in memoriam*), Edimar Nascimento (*in memoriam*) por terem contribuído com o meu crescimento.

Agradeço aos amigos dos tempos de Engenharia Luiz Paulo, Lincoln e João Paulo por terem participado comigo daquele momento no CEFET/BA.

Agradeço os amigos e colegas de graduação em Física Paulo Aladin, Augustinho, Lilian Alves, Mariana Lima, Jamile Araújo, Júnior, Mabele, Ismael, Thalisson, Paulo Moreno, Andrei, Victor Mancir, Renata Gomes, Renatinho, Vitor (Limite), Kelly Abreu, Rafael Bittencourt, Cabelo, Werter, Faguinho, e tantos outros que dividiram comigo parte do caminho até aqui e por fazerem parte da minha história.

Aos colegas e amigos do tempo do mestrado Brenda Brandão, Tamila Marques, Vítor Damião, Pedro Gabriel, Iuri Boaventura, e tantos outros por terem construído uma boa memória em um período tão difícil. Aos veteranos Leandro Cerqueira e João Cláudio pelos conselhos e apoios. Em especial para o velho Paf (Thiago Rodrigues) e Marcelo Viana pelas resenhas e saídas sem base.

Aos colegas e amigos período doutorado Osvaldo Animal, Pedro de Cirqueira Campos, Miralvo Bispo Meneses, Alessandro Barros, Ajax, Rone Lemos, Elenilson, Pia, Leo Cerqueira, Leo Colômbia, Mozo, Alfredo, Gustavo, Maróivo, Patrícia, Jorginho, Pietro, Mena, Luan, Ademir, Marivaldo, Nilton, Mônica, Raimundo, Tércio por dividirem histórias e convívio no Instituto de Física da UFBA.

Agradeço aos amigos de todo o meu período no IF-UFBA Wallas, Eric Pinto e Lafayette, principalmente pelas suas representações estudantis.

Agradeço a Kim Pedro e Anderson Roque pela amizade e companherismo para além do instituto de física, pelas conversas e, principalmente, por serem eles mesmos e dividirem comigo a suas histórias.

Agradeço a Marquinhos por todas as vezes que saímos, tocamos forró e bebemos.

Agradeço meu irmão de coração Sérgio por estar comigo quando eu precisei, por valorizar a amizade, pelos Bonfins e Yemanjás, pelos bares, pelas cervejas e pela inspiração.

Agradeço a Dunga pela companhia na viagem a Brasília de outubro de 2018 que permitiu nascer uma amizade que tanto prezo e respeito e por apresentar a sua esposa Ticiane pela qual também prezo e respeito a amizade.

Agradeço a Vinícius Mendonça, mais conhecido por Wilson, pela amizade sincera, companherismo, desabafos, cervejas, pelas vezes que amanhecemos no Rio Vermelho. Algumas vezes foram saídas desnecessárias? Sim, mas até por elas agradeço. Agradeço pela compreensão nos momentos de conflitos, pelos risos e diversas outras coisas.

Agradeço à Lis Moreno por ter passado na minha vida e deixado memórias alegres, inclusive daquele meu aniversário em que levamos 7×1 , mas não nos deixamos ser abatidos e juntamente com Vinícius Mendonça, Caio e Sahadya participamos do melhor Rio Vermelho que eu já fui.

Agradeço a Flávia Mayumi por ter passado um ano aqui em Salvador dividindo sua alegria e pelos passeios ultra divertidos com sua mãe Rosemary.

Agradeço Winnie pelos abraços de EFNNE a EFNNE desde 2011 e pelo carinho de sempre.

Agradeço a Viviane pelas produções das festas do Instituto.

Agradeço a Danieverton pelas conversas nos EFNNE's de 2013 e 2014, por me receber em sua casa em Campina Grande e ter me apresentado Revson e Bárbara.

Agradeço a Bárbara por cada palavra que ela escutou quando eu precisava falar, agradeço também pela companhia e amizade.

Novamente, agradeço a Júnior, desta vez por ter me passado versões digitais dos trabalhos de Schönberg e Eric Pinto por ter escavado a internet, encontrado e compartilhado a versão digital do trabalho [1], o qual foi crucial para esta tese.

Agradeço a todos os funcionários e ex funcionários do Instituto de Física da UFBA, em especial para Dalvinha, Gilmar, Bruno, Seu Valtrio, Seu Nelson, Simone, Marli, Geraldo, João, Lúcia e Marcos Paulo.

Agradeço a minha segunda família Diego Bomfim, Betinho, Marcelo Pessoa, Fernando Pessoa, Hélio Almeida, Gilson Moura, Soraya Magalhães, Clarissa Viana, Rodrigo Pithon, Natália Magalhães, Mariana Magalhães, Isabela Magalhães, Bruna Avelar por, primeiramente, me receberem em Salvador, e por cultivarem este ciclo de amizade que hoje eu chamo de família. Agradecimentos especiais a Pithon por estar comigo nos momentos difíceis e a Clarissa por também estar comigo nos momentos difíceis e por me tirar de casa quando eu precisei, mas não queria.

Agradeço à Rebecca Vilas Boas pela amizade, pelas saídas e pelos Yemanjás.

À Lhama toda por fazerem vários Campos Grandes em que eu estive presente.

Agradeço às minhas amigas feitas de Brasília Andrielle, Tati, Mônica, Yuri, Cyntia Larisse, Arthur e Priscila por terem me acolhido nessa cidade em pleno 2018 e me incluído em seus ciclos de amizade. Devo destacar que Arthur facilitou muito a minha vida com toda a sua proatividade e Tati por escutar os meus desabafos e sair de Brasília para ver a defesa desta tese.

Agradeço às minhas amigas de Vitória da Conquista Verônica Vilasboas, Keilla, Kueyla&João pelo suporte que me deram quando precisei retornar a essa cidade. À minha prima amada Isadora Oliveira por todo amor e todos os outros primos que ela me deu: Amanda, Lorena e Guilherme; a estes também a minha gratidão. A Talitta por termos essa amizade bonita. Por Carolina Bittencourt e Sabrina pela amizade nos últimos tempos e pelas risadas. Agradeço também a Pato pela amizade e por suas histórias malucas.

Agradeço à Thaís Pina pelo reencontro, sorrisos, cafés e pela nova amizade: Vinícius.

Agradeço à Luciana Sena por ter feito parte de minha história e por ter acompanhado parte desta trajetória.

Agradeço à Andréia Simões pelas dúvidas tiradas, pelas sugestões, pelas conversas e pelas risadas.

Agradeço à Mariana Bezerra pelos encontros em sua casa onde pudemos reunir os amigos, comer, beber e dar risadas e pelo tempo que ela passou ajudando, juntamente com Andréia e Rosana, nas minhas preparações para aulas.

Agradeço a Caio Guimarães, obviamente, pelas cervejas, mas também por toda consultoria matemática durante o período de doutorado.

Agradeço à Ana Paula Duarte por me escutar sempre que eu preciso. À Daniela Piato pelos 20 anos de amizade e pelo Clube do Livro, à Radicleide pelas boas conversas, à Joni Rose Dellos Reyes pelos 15 anos de amizade e pelo carinho.

Agradeço a minha ex vizinha Vanilda pelo convívio, sorrisos e elogios.

Agradeço à Clara Silva por reconhecer a importância de ter um jornal guardado do dia da posse da primeira presidente mulher do Brasil.

Agradeço a Tiago Mota pela amizade e por me abrigar no Rio de Janeiro quando lá estive.

Agradeço à Rosana Andrade por estar comigo em momentos bons e em momentos ruins, por acreditar em mim quando eu já não me dava mais créditos, por ser, em muitas ocasiões, a única pessoa ao meu lado, pelo amor, zelo e carinho. Agradeço também por me abrir as portas do NITRE e me dar a chance de estudar $C/C++$, Sistemas Complexos e Modelagem, além de me dar a chance de conhecer tecnologias como o Mendeley. À ela me faltam palavras para expressar gratidão.

Agradeço à Elaine Cambui, Raíssa Fernandes, Pedro Teodoro, Raphael Rosário, Ângelo e Eslaine, Ana Paula, Tai e as demais pessoas do NITRE as quais dividi momentos.

A Lara Rocha por me ajudar a segurar o surto e poder continuar a estudar no limite de perder a razão.

A Luciana Martins pelas conversas, pela amizade e por ajudar Lara a cumprir essa terrível tarefa.

Agradeço aos meus primos velhos Juan Filipe e Isabella Almeida; aos primos novos Chiara, Maria Eduarda, Juan Pablo e Carol, minha afilhada, por me colocar em contato com o mundo infanto-juvenil e me fazer perceber que temos muito o que aprender com eles.

Agradeço à Tia Ride, Tia Vêu, tia Nete, Tia Neide, Tia Valéria, Tia Eliane, Tia

Norma, Tia Sônia e Tia Mercês e aos meus tios Gilmar, Marcos e Robson pelo apoio e por terem feito parte de minha trajetória.

Agradeço a meu tio e Padrinho Walter Rubens (*in memoriam*) por ter sido fonte de inspiração. Eu sei que ele estaria muito orgulhoso de mim hoje; primeiro por ter desenvolvido uma amizade muito próxima com a filha dele, Isadora Oliveira, e também por estar me vendo conquistar um sonho.

Agradeço aos meus avós maternos Tanquilino (*in memoriam*) e Helena Maria (*in memoriam*) por terem sido figuras de exemplo na minha juventude. E gostaria de dizer a minha avó que por pouco, mas por bem pouco mesmo, ela não me viu tornar um doutor em Física.

Agradeço a meus avós paternos Idálio (*in memoriam*) e Flora (*in memoriam*) por terem feito parte de minha vida e especialmente à Flora por ter me recebido em sua casa depois de anos distante.

Agradeço a minha sobrinha e afilhada Maria Helena por toda doçura que ela trouxe; à minha irmã Priscilla Lula e a meu cunhado Henrique pelo apoio e jantares em sua casa.

Agradeço eternamente aos meus pais Raimundo Nonato Lula Rocha e Vilma Alves Lula que, sem ideia do que é um curso de Física, me apoiaram e criaram caminhos para que eu estudasse e concluísse a graduação, o mestrado e agora o doutorado em Física. Devo tudo a vocês.

Cada um de vocês citados acima e alguns que, por ventura me esqueci, foram importantes para a minha formação como Físico. Sendo assim nada mais que justo que reservar-lhes um espaço para agradecê-los. Aos esquecidos, o meu perdão.

Agradeço a Deus.

Vinícius Nonato Alves Lula Rocha

19 de novembro 2019

Esta Tese foi financiada pela
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	A MECÂNICA QUÂNTICA DE FÉRMIONS E A ÁLGEBRA EXTE- RIOR	8
2.1	Introdução	8
2.2	Fundamentos matemáticos	8
2.2.1	Notação Multi-índice	9
2.2.2	Aspectos gerais da álgebra exterior	11
2.2.3	Contrações na álgebra exterior	13
2.2.4	Operadores de criação e de aniquilação na álgebra exterior	14
2.2.5	Álgebra associada aos férmions	15
2.2.6	O espaço W de vetores contravariantes e covariantes	15
2.2.7	A forma bilinear simétrica e a álgebra de Clifford ortogonal de W	16
2.2.8	A decomposição lagrangiana de W por uma forma bilinear simétrica e a álgebra associada aos férmions	17
2.2.8.1	Elemento geral da álgebra de Clifford de W	19
2.2.9	Os idempotentes e os ideais mínimos da álgebra de Clifford ortogonal de W	19
2.2.9.1	Elemento geral da álgebra de Clifford ortogonal de W escrito em uma nova base	19
2.2.9.2	Os ideais mínimos de $Cl_n(W, \Omega_+)$	21
2.2.10	Elemento geral da álgebra Clifford ortogonal de W como auto representação do grupo linear atuando nos seus ideais mínimos	22
2.2.11	A introdução de uma correlação entre os espaços contravariante e covariante	22
2.2.12	Álgebra induzida pela correlação simétrica	23
2.3	Aplicações da álgebra $Cl_n(W, \Omega_+)$	26
2.3.1	A equação de Dirac na representação $Cl_n(W, \Omega_+)$	26
2.3.2	A Álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau como subálgebra da álgebra de Clifford de W	28
2.3.2.1	Resumo histórico da equação de Duffin-Kemmer-Petiau e a sua álgebra associada	29
2.3.3	Alguns aspectos formais da álgebra de DKP	35
2.3.4	Relação da álgebra de DKP com a álgebra exterior	36
2.3.5	Relação da álgebra de DKP com a álgebra $Cl_n(W_b, \Omega_+)$	37
2.3.6	A equação de DKP na representação $\mathcal{D}_p(V, g)$	41
2.3.7	Equivalência da equação de DKP com as equações de Kein-Gordon-Fock e Proca no formalismo baseado na representação $\mathcal{D}_p(V, g)$	45
2.3.7.1	A equivalência da equação de DKP com a equação de Klein-Gordon-Fock	45

2.3.8	Equivalência da equação de DKP com a equação de Proca	47
2.3.8.1	O estudo da equação de <i>DKP</i> não massiva na representação $\mathcal{D}_p(V, g)$	50
3	A MECÂNICA QUÂNTICA DE BÓSONS E A ÁLGEBRA SIMÉTRICA	53
3.1	Introdução	53
3.2	Aspectos gerais sobre a álgebra simétrica	54
3.2.1	Contrações na álgebra simétrica	57
3.2.2	Operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica	58
3.3	Álgebra associada aos bósons	58
3.3.1	A forma bilinear antissimétrica e a álgebra de Clifford simplética sobre W .	59
3.3.2	A decomposição lagrangiana de W por uma forma bilinear simplética e a álgebra associada aos bósons	60
3.3.2.1	O elemento geral da álgebra de Clifford simplética de W	61
3.3.3	A impossibilidade de formar um elemento idempotente primitivo na álgebra de Clifford simplética sobre W	62
3.3.3.1	Base canônica, ideais mínimos e a auto representação do grupo linear na álgebra de Clifford Simplética	63
3.3.3.2	O espaço de Hilbert dos ideais mínimos da álgebra de Clifford simplética extendida sobre W	65
3.3.4	A representação algébrica da mecânica quântica de bósons	67
3.3.4.1	A álgebra de Clifford simplética sobre W e o anel de polinômios de n variáveis .	69
3.3.5	A introdução de uma métrica e as distribuições na álgebra de Clifford simplética	72
4	A ÁLGEBRA <i>PDKP</i>, A SUPERÁLGEBRA <i>DKP</i> E APLICAÇÕES .	79
4.1	Introdução	79
4.2	A álgebra <i>PDKP</i> e a superálgebra <i>DKP</i>	80
4.3	A superálgebra <i>DKP</i>	81
4.4	A relação entre a álgebra <i>PDKP</i> e a álgebra simétrica	83
4.5	A álgebra <i>PDKP</i> na representação baseada em $\mathbb{C}l_n(W, \Omega_-)$	85
4.6	A equação de Dirac Simplética	92
4.7	A equação de <i>DKP</i> simplética	96
4.8	Os fundamentos da superálgebra <i>DKP</i>	97
4.8.1	A superálgebra <i>DKP</i> : primeiro enfoque	97
4.8.2	A superálgebra <i>DKP</i> : enfoque matemático-formal	102
4.9	A introdução de uma supercorrelação e a superálgebra de Clifford .	106
4.10	A álgebra $\mathcal{S}_{nm}(W, \Omega)$ e os superespinores algébricos	108
4.11	A superequação de Dirac	110
4.12	A superálgebra de <i>DKP</i> e a superequação de <i>DKP</i>	111

5	GENERALIZAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD ORT. E SIMPL. E A TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	115
5.1	Introdução	115
5.2	Os núcleos integrais no contexto de fibrados vetoriais holomórficos	116
5.2.1	Seções do fibrado $E \otimes \bar{E}$ vistas como kernels	118
5.3	As distribuições que emergem dos espaços de Hilbert de seções . .	119
5.4	Sobre a base de $L^2H(E)$ e as seções do fibrado de frames de E . .	125
5.5	Produto tensorial entre elementos do $\mathcal{F}(M)$-módulo e o espaço de Hilbert de funções	126
5.6	A teoria quântica de campos baseada em álgebras geométricas . . .	129
5.6.1	Formulação algébrica da teoria quântica de campos	130
5.6.2	A teoria quântica de campos no contexto algébrico	132
6	RESULTADOS, CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	135
6.1	Resultados	135
6.1.1	A física de férmions, álgebra e equação de <i>DKP</i> ortogonais	135
6.1.2	A física de bósons, a álgebra <i>PDKP</i> e as equações simpléticas	137
6.1.3	A física de férmions e bósons em uma só estrutura matemática e as superequações	138
6.1.4	Generalização das álgebras de Schönberg para uma variedade e a teoria quântica de campos	140
6.2	Conclusões e perspectivas	141
A	CÁLCULO DE $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$	144
A.1	Cálculo de $-(N_1) \dots (N_{n-1})(e_n)(e_{\mu b})\psi_{p+1}$	146
A.1.0.1	• $p = n + 1$	146
A.1.0.2	• $p + 1 < n$	147
A.2	Cálculo de $(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e_{nb})(e_\mu)\psi_p$	149
B	FIBRADOS VETORIAIS	151
B.1	Fibrados Quocientes	155
B.2	Fibrado Vetorial Dual	156
B.3	Fibrados Vetoriais Sobre a Álgebra Tensorial	157
B.3.1	Fibrados Sobre o espaço dos Tensores Covariantes e Contravariantes	158
B.3.2	Fibrado Sobre a Álgebra Tensorial Contravariante	160
B.4	Fibrado de Clifford	162
	REFERÊNCIAS	166

1 Introdução

Antes de expor os trabalhos desenvolvidos aqui, é conveniente apresentar o ambiente matemático onde o nosso trabalho está inserido e que nos inspirou. Esse ambiente foi produzido por Mário Schönberg [2–9] na década de 1950 quando estava interessado em desenvolver a álgebra geométrica capaz de ser a linguagem de intermediação entre os fenômenos microscópicos e a racionalização que os físicos e matemáticos têm sobre eles. Schönberg percebeu que deveria partir de invariantes sob transformações físicas e notou que a ação natural de formas sobre vetores, *i.e.* a relação $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é um invariante afim, ou seja, um invariante sob transformações do grupo linear. Isto fez com que ele propusesse duas álgebras baseadas na anticomutação e comutação entre vetores e covetores, correspondentes às estatísticas fermiônicas e bosônicas. Os geradores dessas álgebras satisfazem as relações de comutação obedecidas pelos operadores de criação e aniquilação associados ao oscilador harmônico. Em uma visão geral, essas álgebras podem ser vistas como as álgebras de Clifford ortogonal e simplética do espaço de fase, onde as formas bilineares correspondentes são formadas a partir dos *momenta* e das coordenadas. Implícito aqui está a transição dos observáveis posição e *momentum* para operadores que não comutam entre si. Essa transição se dá através de entes nas álgebras de Clifford. A característica mais importante dessa formulação é que se pode construir bases canônicas a partir de um idempotente primitivo da álgebra. Desta maneira é possível dividir a álgebra usando ideais mínimos à direita e à esquerda. O ideal mínimo à esquerda é isomórfico à álgebra simétrica e exterior covariante, enquanto o ideal à direita é isomórfico às mesmas álgebras, porém na versão contravariante. Observe que os ideais são estáveis sob a multiplicação de qualquer elemento da álgebra e isso faz com que um elemento geral da álgebra possa ser entendido como um operador que atua nos ideais. É nesse cenário que se pode construir espaços de Hilbert dos ideais mínimos, de forma que seus elementos possam representar partículas físicas. Além disto, nessa perspectiva, operadores e estados quânticos pertencem à mesma estrutura matemática.

Neste contexto, o espaço dos *momenta* é visto como espaço dual ao espaço de configurações e o espaço de fase como a soma direta dos espaços de configurações e dos *momenta*. O idempotente primitivo da álgebra, por sua vez, tem um destaque especial; ele pode ser visto como o estado de vácuo sobre o qual agem os operadores de criação e aniquilação. Na verdade, o idempotente primitivo está mais para o projetor no vácuo $|0\rangle\langle 0|$, no formalismo usual da quântica, do que para o estado de vácuo $|0\rangle$ em si, uma vez que o operador de criação aplicado à esquerda do idempotente age como operador de aniquilação quando aplicado à direita. Isto é interessante, pois o projetor $|n\rangle\langle n|$ no estado $|n\rangle$, na formulação usual, é um objeto matemático introduzido *ad hoc*, já que não é

definida a multiplicação do *ket* à esquerda do *bra*. No entanto, o idempotente primitivo é um objeto natural das álgebras de Schönberg.

Vale a pena destacar que Schönberg notou que a introdução de uma correlação simétrica entre o espaço de configurações e o espaço dos *momenta* permite que se possa dividir a álgebra associada aos férmions em duas álgebras de Clifford ortogonais do espaço de configurações [4,5]. Schönberg também percebeu que, a partir dessas álgebras, poder-se-ia extrair as representações irredutíveis da álgebra de *Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)*; é interessante observar que durante toda a sua metodologia, nenhum objeto externo à álgebra foi utilizado. Por exemplo, os projetores que extraem a álgebra *DKP* da álgebra de Clifford são construídos a partir dos próprios geradores da álgebra de Clifford. Nesse espírito David Bohm [10] e Basil Hiley [11], com o aparato matemático da álgebra de Clifford na visão de Schönberg, definiram a equação de Dirac dentro dessa formulação ao associar os geradores da álgebra com os operadores diferenciais, enquanto o vetor de Dirac é descrito por um elemento do ideal mínimo à direita. Os autores perceberam que essa formulação era análoga à formulação de Kähler [12] para a equação de Dirac em termos de formas diferenciais. Uma vantagem desse desenvolvimento é que é possível encontrar a equação de Dirac no espaço de fase através de uma transformação de Wigner-Moyal. Anos mais tarde, Fernandes e Vianna [13–15] se basearam na metodologia de Bohm e Hiley e propuseram a equação de *DKP* ao associar geradores da álgebra de *DKP* na visão de Schönberg com os operadores diferenciais. Nesse contexto, também foi possível obter a equação de *DKP* não relativística bem como a equação de *DKP* no espaço de fase, para os casos relativístico e não relativístico. Ainda na mesma linha de raciocínio, A. Roque [16] propôs a álgebra e a equação de Pauli-Fierz-Gupta, no espaço de configurações e de fase, a partir da combinação das álgebras de Clifford e de *DKP*, também dentro da visão de Schönberg.

Uma série de trabalhos de Bohm, Hiley e Frescura [11,17–23] durante as décadas de 1970 e 1980 e que tem conexão com a visão algébrica de Schönberg da mecânica quântica merece algumas palavras. Estes autores estavam interessados em buscar alternativas às interpretações da escola de Copenhagem da mecânica quântica e formularam a teoria da ordem implícita e da ordem explícita [17,18]. Segundo essa interpretação, o mundo quântico é intangível, ocorrendo processos na chamada *ordem implícita* onde o espaço-tempo não tem significado e assim a não localidade pode ser vista com naturalidade. Os processos seriam apenas percebidos por nós, observadores, na *ordem explícita*. A impressão que se tem, ao ler os trabalhos sobre esse tema, é que Bohm *et al.* basearam-se nos artigos de Schönberg e buscaram interpretações. A linha de argumentação de Bohm é no sentido de que há fenômenos da física não newtoniana que sugerem não haver uma distinção entre observador e observado. Em outras palavras, o instrumento de medida do laboratório também faz parte do fenômeno a ser observado. Com isto, os autores são levados a conjecturar que a mecânica quântica usual não está escrita em uma linguagem adequada, pois o fato

de as medidas serem representadas por elementos da álgebra de operadores, que atuam em estados no espaço de Hilbert, é interpretado como se observador e observável não fossem da mesma natureza. Nesse contexto, surge que a álgebra seria uma linguagem mais adequada para traduzir a mecânica quântica. De fato, Hiley e Frescura [20] mostraram que a mecânica quântica usual faz parte de uma álgebra. Com esses argumentos Bohm, Hiley e Frescura [11, 17–23] buscam construir uma nova linguagem matemática apropriada para descrever os fenômenos microscópicos que satisfazem as suas prévias interpretações. Pode-se perceber que essa formulação é uma releitura das álgebras de Schönberg. De fato, Hiley em [24] admite que foram os trabalhos de Schönberg que os inspiraram a explorar a formulação algébrica da mecânica quântica.

Em diversos outros trabalhos sobre a teoria quântica, nota-se que os trabalhos de Schönberg têm ou tiveram um papel central [24–35] na formulação de argumentos ou são mesmo uma extensão da teoria apresentada como, por exemplo, em [26] onde os autores observam que a álgebra proposta por eles, para descrever partículas que obedecem a estatística de Gentile [36–41] baseada em grupos de simetria, é um caso especial da álgebra de Schönberg. Isso faz de Schönberg um pioneiro na formulação algébrica da mecânica quântica e, do ponto de vista matemático, na própria maneira de desenvolver as álgebras de Clifford utilizando entidades contra e covariantes.

Esta tese é o desenvolvimento da mecânica quântica relativística e teoria quântica de campos tendo como um dos pontos de partida a formulação algébrica de Schönberg. Aqui, suas álgebras são por nós apresentadas em uma formulação moderna através das álgebras exterior e simétrica, além de as expressarmos numa notação mais amigável, com o uso de conjuntos multi-índices. A esses desenvolvimentos acrescentamos contribuições originais no sentido de estender o formalismo e utilizar as álgebras em novos domínios.

Nesse contexto, nosso trabalho compreende um conjunto de quatro objetos de estudo todos baseados nas álgebras de Schönberg e as extensões dessas álgebras por nós realizadas: *i*) a álgebra associada à física de partículas fermiônicas; *ii*) a álgebra associada à física de partículas bosônicas; *iii*) a superálgebra que une o tratamento matemático para a física de partículas bosônicas e fermiônicas e; *iv*) a formulação dos fundamentos da teoria quântica de campos por meio de uma parametrização das álgebras estudadas em *i*) e *ii*) numa variedade.

No que se refere à álgebra associada à física de partículas fermiônicas, desenvolvemos a álgebra de Schönberg associada aos férmions através da álgebra exterior. Essa visão é baseada no entendimento realizado por Fernandes [1] da álgebra de Schönberg associada aos bósons por meio da álgebra simétrica. Nossa principal contribuição aqui é referente à álgebra e à equação de *DKP*. Como dito acima, Schönberg mostrou que sua álgebra para férmions continha, como subálgebras, auto representações irreduzíveis da álgebra de *DKP* e, neste contexto, Fernandes e Vianna obtiveram as equações de *DKP*. Essa equação, como

se sabe, descreve partículas relativísticas de spin inteiro e foi desenvolvida por Petiau, Duffin e Kemmer [42–46] entre as décadas de 1920 e 1940, como uma versão da equação de tipo Dirac [47, 48] para bósons. Com seu surgimento, uma das questões é a análise da compatibilidade dessa equação com as equações de Klein-Gordon-Fock e Proca, o que tem sido realizado com a formulação usual da equação de *DKP*. No presente trabalho, mostramos, de forma inédita, essa compatibilidade usando formalismo baseado na álgebra de Schönberg a partir da definição de elementos dentro da própria álgebra.

Outro aspecto que analisamos é a equação de *DKP* para partículas de massa nula. Sabe-se que, nesse caso, não é suficiente impor que o termo de massa seja igual a zero na equação; uma forma de contornar esse problema foi desenvolvida por Kruglov [49] ao fazer uma modificação na equação de Proca e escrevê-la na forma de uma equação tipo *DKP*. Nesse processo aparecem entes que projetam o vetor de estado, representado por uma matriz coluna de dimensão 10, num quadrivetor e em um ente formado pelas seis componentes distintas, o tensor eletromagnético. Nós mostramos que os projetores de Kruglov obedecem as mesmas propriedades dos projetores que extraem a álgebra de *DKP* da álgebra de Clifford ortogonal, no formalismo de Schönberg e demonstram, em consequência, que o procedimento desenvolvido por Kruglov aparece naturalmente no formalismo baseado nas álgebras de Schönberg, com o adicional de comportar diversas representações e não somente a representação de spin 1, como é o caso estudado por Kruglov.

Verificamos ainda que as técnicas que antecedem a transformação de Wigner-Moyal da equação de *DKP*, desenvolvidas por Fernandes e Vianna [13] na representação escalar baseada na visão de Schönberg, são válidas apenas para espaços euclidianos e pseudo-euclidianos de dimensão par. Nesse contexto, desenvolvemos as relações gerais válidas para estes espaços. Além disto, generalizamos o formalismo para diversas representações, o que permite estudar os casos vetoriais e pseudoescalares.

Com relação à álgebra associada à partículas bosônicas, partindo do trabalho de Fernandes [1] e baseado no método que Schönberg utilizou para extrair a álgebra de *DKP* da álgebra de Clifford ortogonal do espaço de fase, determinamos uma nova álgebra a partir da álgebra de Clifford simplética do espaço de fase. Na sequência, encontramos infinitas representações da chamada álgebra *para-Duffin-Kemmer-Petiau (PDKP)*. A álgebra *PDKP* foi proposta por Okubo [50] em uma tentativa de descrever a para-estatística em termos da álgebra de Lie. Okubo observou que a álgebra de *DKP* pode ser representada através da álgebra de Lie $so(N + 1)$, onde N é a dimensão do espaço relativo à partículas tipo *DKP*. Na realidade, tendo Okubo demonstrado que a superálgebra ortossimplética $osp(N + 1|M)$ é de uso numa para-estatística em que bósons e férmions não comutam entre si e que $osp(N + 1|M)$ é igual a $so(N + 1)$ para $M = 0$, deveria existir uma álgebra complementar para o caso $osp(1|M)$, sendo esta a *PDKP*. Nesse caso, M é dimensão do espaço relacionado

a partículas tipo *PDKP*. Deve-se destacar que a álgebra *PDKP* foi proposta de forma *ad hoc*. Nosso desenvolvimento explica os fundamentos da álgebra *PDKP* no momento em que conseguimos extrair infinitas representações dessa álgebra a partir da álgebra de Clifford simplética do espaço de fase. Neste cenário, obtivemos de forma original equações análogas às equações de Dirac e *DKP*. A equação de Dirac simplética, como chamamos, nasce da associação dos geradores da álgebra de Clifford simplética do espaço de fase (onde o espaço de configurações e o dos *momenta* estão relacionados por uma forma bilinear simplética, com os operadores diferenciais.) A estrutura algébrica desta equação impõe que os vetores sejam definidos sobre um espaço não anticomutativo, caso contrário, esta equação não implicaria na equação de onda. Da mesma maneira, determinamos o que chamamos de equação de *DKP* simplética associando os geradores da álgebra *PDKP* com os operadores diferenciais, e, mostramos ser necessário ter vetores definidos sobre um espaço não anticomutativo. Mostramos ainda que os operadores de Dirac e *DKP* simpléticos estão relacionados por uma projeção. Para finalizar a discussão dessa parte do trabalho, mostramos que a álgebra *PDKP* pode também ser explicada através da álgebra simétrica. Notamos ainda que a formulação via álgebra de Schönberg oferece vantagens devido ao fato que se transita de covariante para contravariante por meio de propriedades que os projetores da álgebra têm com os seus geradores.

Com nossa explicação da álgebra *PDKP* via as álgebras de Schönberg, um ponto a considerar é a possibilidade de multiplicar os elementos da álgebra *DKP* com a álgebra *PDKP*. Como explicado acima, Okubo mostrou que estas duas álgebras são casos particulares de uma superálgebra e esta pode ser vista como a álgebra ortossimplética $osp(N + 1|M)$. Era assim de se esperar que a álgebra *DKP* e *PDKP*, via a formulação de Schönberg, juntas formariam uma superálgebra *DKP*. Nós mostramos que isto ocorre se assumirmos que bósons e férmions anticomutam entre si, algo que o próprio Okubo tinha proposto [50]. Além disto, por nosso desenvolvimento, é necessário incluir de maneira *ad hoc* entes capazes de projetar bósons e férmions de uma só vez, já que a multiplicação entre os projetores das álgebras *DKP* e *PDKP* se anula.

Outro ponto que discutimos neste contexto algébrico é sobre a possibilidade da existencia de superálgebra maior, onde bósons e férmions seriam tratados conjuntamente. De fato, conseguimos obter uma superálgebra de Clifford, similar à superálgebra de Clifford proposta por [51]. Essa superálgebra de Clifford é uma estrutura que une as álgebras de Clifford ortogonal e simplética. Neste ambiente, propomos a superequação de Dirac sobre uma supervariiedade onde parte de suas coordenadas são riemannianas e parte são não anticomutativas. Mostramos que, a partir dessa superequação, podem ser escritas a equação de Dirac ortogonal para uma partícula de massa m_o e a equação de Dirac simplética para uma partícula de massa m_s . Vimos também que a massa da superpartícula é dada pela soma de m_o com m_s . Finalmente, mostramos que a superálgebra *DKP* é uma projeção da superálgebra de Clifford e propsemos a superequação de *DKP*.

Na última parte do trabalho, apresentamos uma solução matemática para o problema da associação dos parênteses de Poisson com os comutadores na quantização de campos. Aqui a ideia é de parametrizar as álgebras de Schönberg em uma variedade, isto é, para cada ponto de uma variedade, deveria existir uma álgebra isomórfica às álgebras associadas aos bósons e férmions. Além disto, é necessário que possamos multiplicar elementos das álgebras em pontos diferentes da variedade. Mostramos que uma linguagem matemática adequada para implementar essas ideias é a linguagem dos fibrados vetoriais em conjunto com as distribuições. Partimos da parte holomórfica do espaço de Hilbert das seções dos fibrados e construímos $\mathcal{F}(M)$ -módulos, onde $\mathcal{F}(M)$ é um espaço de funções complexas que pode ser expandido por um conjunto completo de funções, inserimos então formas bilineares no espaço de seções de forma a definir álgebras de Clifford ortogonal e simplética considerando $\mathcal{F}(M)$ -módulos. Dessa forma, nos foi possível associar estes elementos aos campos quânticos, que obedecem a relações de comutação e anticomutação. Além disto, como a álgebra de funções dos módulos é o espaço $\mathcal{F}(M)$, surge das aplicações de elementos covariantes nos elementos contravariantes a distribuição de Dirac. Desta maneira, no nosso formalismo, a distribuição de Dirac aparece naturalmente, pois é ela que permite a multiplicação de elementos de fibras em diferentes pontos, ou seja, das álgebras parametrizadas em pontos distintos da variedade. A quantização, por sua vez, que na maneira usual, os campos são elevados à condição de operadores e é imposto a eles relações de comutação e anticomutação, no nosso desenvolvimento passa a ser a aplicação de Clifford.

Esta tese está estruturada da seguinte maneira: no capítulo 2 exploramos a relação da álgebra de Clifford ortogonal desenvolvida por Schönberg com a álgebra exterior e em seguida obtivemos a álgebra de DKP e a equação de DKP dentro do formalismo baseado em Schönberg. Nossa contribuição nesse capítulo está em *i)* demonstrar a equivalência do formalismo baseado em Schönberg para a equação de DKP com as equações de Klein-Gordon-Fock e de Proca; e *ii)* desenvolver o método para a obtenção da equação de DKP não massiva. No capítulo 3 preparamos o ambiente matemático com uma revisão da álgebra de Clifford simplética obtida por Schönberg e sua relação com a álgebra simétrica para servir como base para o entendimento de nossos resultados no próximo capítulo. No capítulo 4 desenvolvemos um método para extrair a álgebra $PDKP$ da álgebra de Clifford simplética estudada no capítulo 3 e propomos equações de Klein-Gordon-Fock, de Dirac e de DKP simpléticas dentro desse formalismo. Ainda nesse capítulo propomos uma superálgebra baseada nos formalismos de Schönberg para a obtenção das suas álgebras. Mostramos que as álgebras estudadas nos capítulos 2 e 3 são casos especiais dessa superálgebra. Nesse contexto, a partir dessa superálgebra, conseguimos extrair as superálgebras de Clifford e de DKP e propomos as superequações de Klein-Gordon-Fock, de Dirac e de DKP . No capítulo 5 generalizamos as álgebras estudadas nos capítulos 2 e 3 para uma variedade e obtivemos uma álgebra para campos cuja multiplicação característica coincide com as

relações de comutação e anticomutação da segunda quantização. No capítulo 6 sintetizamos nossos resultados e apresentamos nossas conclusões e perspectivas. Por fim, no apêndice A mostramos o cálculo de $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$ relativo à expressão (2.287) e no apêndice B fizemos uma breve revisão sobre fibrados, a estrutura matemática usada no capítulo 5.

2 A Mecânica quântica de férmions e a álgebra exterior

2.1 Introdução

Este capítulo introduz alguns aspectos importantes das álgebras idealizadas por Mário Schönberg durante a década de cinquenta do século passado, onde foi mostrado que é possível descrever a mecânica quântica através de objetos de uma geometria afim. Nos seus trabalhos [2, 4–9], ele descreve em detalhes as ligações entre geometria afim, geometria projetiva e métrica, com as álgebras não comutativas da mecânica quântica. Sua formulação foi fundamentada na associação das álgebras com grupos de simetria como a que acontece no caso da álgebra de Clifford. Como resultado, ele obteve uma descrição da teoria quântica onde seus ingredientes básicos admitem representação em uma álgebra de objetos geométricos. Nesse contexto, operadores (observáveis físicas) e operandos (estados) passam a pertencer a uma mesma álgebra cujos entes são associados a objetos geométricos. Isso é possível com a introdução de um idempotente primitivo que torna capaz a construção de ideais mínimos nessas álgebras. Esses ideais mínimos, nessa teoria, são análogos a espaços de Hilbert da mecânica quântica usual. Estados físicos, que são representados por um vetor no espaço de Hilbert na mecânica quântica usual, têm como suas representações espinores nos ideais das álgebras. Por sua vez, os operadores que representam observáveis físicas podem ser descritos, nesse formalismo, por elementos gerais das álgebras que atuam nos ideais via a multiplicação usual da própria álgebra. Pode-se mostrar também que a introdução de uma métrica permite construir a álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau (*DKP*) de uma forma natural [4, 5], de maneira que uma equação de *DKP* pode ser proposta utilizando os entes das álgebras [13, 15]. A motivação para a realização do presente capítulo é detalhar os tópicos acima para promover um melhor entendimento da generalização proposta nessa tese, que é a parametrização dessas álgebras por uma variedade e a viabilização desse formalismo para a construção de uma teoria quântica de campos.

2.2 Fundamentos matemáticos

Nesta seção apresentaremos os fundamentos matemáticos para o entendimento da equação de *DKP* baseada nos trabalhos de Schönberg [2, 4, 5]. Esta seção serve também como um modelo da álgebra apresentada no capítulo 3. Inicialmente, será introduzida a notação de multi-índice, que é muito útil para descrever os objetos das álgebras apresentadas.

A apresentação do conteúdo tem como base as referências [52–54] para a parte álgebra exterior e notação multi-índice e as referências [2, 4, 5, 13–15] para a parte relativa à álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ desenvolvida por Schönberg.

2.2.1 Notação Multi-índice

A notação multi-índice é uma ferramenta poderosa para lidar com elementos de álgebras graduadas como, por exemplo a álgebra tensorial, a álgebra de Grassmann e as álgebras de Clifford. Suponha que essas álgebras são construídas a partir de um espaço vetorial de dimensão n . Portanto, um elemento geral de ordem p dessas álgebras é dado por objetos do tipo

$$T_p = \sum_{i_1, \dots, i_p} C_{i_1, \dots, i_p} \theta^{i_1} \bullet \theta^{i_2} \bullet \dots \bullet \theta^{i_p}, \quad (2.1)$$

onde θ_{i_k} , $1 \leq i_k \leq n$, são os geradores, o símbolo \bullet é a multiplicação da álgebra em questão e C_{i_1, \dots, i_p} é uma constante do corpo da álgebra. Algumas considerações podem ser feitas a depender se a álgebra é simétrica ou antissimétrica. Por exemplo, se a álgebra for antissimétrica, a multiplicação de um gerador θ_k por ele mesmo é igual a zero. Isso significa que, na soma em (2.1), não se deve repetir índices. Já se a álgebra for simétrica, a multiplicação de um gerador por ele mesmo não é nulo e assim a soma acima pode conter índices iguais. Além disso, a constante C_{i_1, \dots, i_p} pode ser tomada como simétrica em relação aos índices se a álgebra for simétrica e antissimétrica, se a álgebra for antissimétrica. Essas considerações levam a redefini-la com o acréscimo de fatores multiplicativos devido à simetria; esses fatores servem para corrigir os termos que se repetem. Agora, com C_{i_1, \dots, i_p} simétrico ou antissimétrico, o elemento (2.1) pode ser escrito como

$$T_p = \sum_{i_1, \dots, i_p} K_p C_{i_1, \dots, i_p} \theta^{i_1} \bullet \theta^{i_2} \bullet \dots \bullet \theta^{i_p}, \quad (2.2)$$

onde K_p é o fator de simetria e é dado por

$$K_p = \frac{1}{p!} \quad (2.3)$$

para tensores antissimétricos e

$$K_p = \frac{\prod_{k=1}^n r_k!}{p!} \quad (2.4)$$

para tensores simétricos, onde r_k é a quantidade de i 's iguais a k .

A notação multi-índice, além de eliminar a necessidade dessas constantes de simetria, permite escrever os elementos da álgebra de uma forma compacta, o que torna as operações entre elementos de álgebras graduadas mais simples. Essa notação agrupa todos os índices em um conjunto que será denotado por uma letra maiúscula com um subíndice que indica o tamanho do conjunto. Nos casos de (2.1) e (2.2), o conjunto multi-índice é dado por

$$I_p = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}. \quad (2.5)$$

A ordenação desse conjunto de índices é importante quando considerada a simetria da álgebra cujos elementos se pretende representar através desta notação. Por isto, é conveniente que se distinga dois tipos de conjuntos multi-índice: *i*) monotonicamente ascendentes e *ii*) estritamente ascendentes. No primeiro caso, os índices são postos em ordem crescente; no entanto se permite que os que haja valores repetidos. Um exemplo de conjunto multi-índice monotonicamente ascendentes de tamanho p é [54]

$$J_p = \{1 \leq j_1, \leq \dots, \leq j_{\ell-1}, \leq j_\ell, \leq j_{\ell+1}, \leq \dots, \leq j_p, \leq n\}. \quad (2.6)$$

Já o conjunto multi-índice estritamente ascendente não permite que haja índices repetidos. Um exemplo de conjunto multi-índice estritamente ascendente de tamanho p é o conjunto [54]

$$K_p = \{1 \leq k_1, < \dots, < k_{\ell-1}, < k_\ell, < k_{\ell+1}, < \dots, < k_p, \leq n\}. \quad (2.7)$$

Para representar o tensor T_p de ordem p , na notação de multi-índice, acrescentam-se as notações

$$C_{I_p} = C_{i_1, \dots, i_p}, \quad (2.8)$$

$$\theta_{\bullet}^{I_p} = \theta^{i_1} \bullet \dots \bullet \theta^{i_p}. \quad (2.9)$$

Desta forma, pode-se reescrever (2.2)

$$T_p = C_{I_p} \theta_{\bullet}^{I_p}, \quad (2.10)$$

onde I_p estar como subíndice de C e supraíndice de θ indica soma entre as possibilidades do multi-índice I_p . Note que, se T_p for um tensor de uma álgebra simétrica então o conjunto I_p será um conjunto multi-índice montonicamente ascendente e, se for um elemento de uma álgebra antissimétrica, deverá ser um conjunto multi-índice estritamente ascendente. Dessa forma, não se precisa mais corrigir os coeficientes simétricos e antissimétricos C_{i_1, \dots, i_p} com o fator de simetria K_p . As parcelas repetidas são evitadas pela condição dos índices estarem na soma ordenados como monotonicamente ascendentes ou estritamente ascendentes.

Para um elemento geral da álgebra, deve-se somar elementos de todas as ordens. Então um elemento geral T da álgebra é a soma de todos elementos gerais de ordem p , portanto

$$T = \sum_{p=0} C_{I_p} \theta_{\bullet}^{I_p}, \quad (2.11)$$

em que $p = 0$ corresponde à parte escalar. Para uma álgebra antissimétrica, a soma em p varia até n pois a multiplicação de dois geradores iguais é nula; assim proíbe a existência de tensores com ordem maior que n , já que em um tensor de ordem $n + k$ haveria um número de k geradores iguais. Para uma álgebra simétrica, o índice p varia até o infinito.

É conveniente introduzir também o delta de Kronecker para multi-índices [54]:

$$\delta_{I_p}^{J_q} = \begin{cases} 1, & \text{se } I_p = J_q, \\ 0, & \text{se } I_p \neq J_q, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde I_p e J_q são conjuntos multi-índices de tamanho p e q , respectivamente. Outra forma de visualizar (2.12) é através da relação

$$\delta_{I_p}^{J_q} = \delta_p^q \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_p}^{j_p} \quad (2.13)$$

em que $\delta_{I_p}^{J_q}$ será igual à unidade se os tamanhos dos conjuntos multi-índice forem iguais e que todos i_k forem iguais a j_k ; caso contrário, $\delta_{I_p}^{J_q}$ será igual a zero.

Para uso posterior, é conveniente definirmos a matriz $\hat{\delta}_{I_p}^{J_p}$ como

$$\hat{\delta}_{I_p}^{J_p} := \begin{bmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \delta_{i_1}^{j_2} & \dots & \delta_{i_1}^{j_p} \\ \delta_{i_2}^{j_1} & \delta_{i_2}^{j_2} & \dots & \delta_{i_2}^{j_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_p}^{j_1} & \delta_{i_p}^{j_2} & \dots & \delta_{i_p}^{j_p} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

e

$$(\delta_{I_p}^{J_q}) := \delta_{pq} \det \hat{\delta}_{I_p}^{J_p}; \quad \{\delta_{I_p}^{J_q}\} := \delta_{pq} \text{Perm} \hat{\delta}_{I_p}^{J_p}; \quad (2.15)$$

onde $\det \hat{A}$ e $\text{Perm} \hat{A}$ são, respectivamente, o determinante e o permanente da matriz \hat{A} ¹.

O esforço para usarmos a notação multi-índice nesta tese trás um avanço significativo nas álgebras propostas por Schönberg, no sentido que as torna mais “amigável” e permite melhor explorá-las do que com a notação empregada pelo próprio Schönberg e outros autores em trabalhos subsequentes que usam essas álgebras. Nas próximas subseções, apresentaremos estas álgebras, que estão relacionadas à mecânica quântica de partículas fermiônicas e bosônicas.

2.2.2 Aspectos gerais da álgebra exterior

Esta seção pretende apresentar alguns aspectos gerais da álgebra exterior que serão relevantes para discussões das próximas seções.

A *álgebra exterior* do espaço vetorial \mathbf{V} de n dimensões, denotada por $Ext(\mathbf{V})$, é constituída pelo par $(\bigwedge(V), \wedge)$, onde $\bigwedge(V)$ é a soma direta de todos os espaços $\bigwedge_k(V)$ formados por todos k -tensores alternados sobre V , isto é, [52–54]

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge_k(V), \quad (2.16)$$

¹ O uso dos parênteses e chaves na notação das definições (2.15) indica que $(\delta_{I_p}^{J_q})$ será utilizada na multiplicação de elementos de uma álgebra em que seus elementos são caracterizados pela notação (\cdot) e $\{\delta_{I_p}^{J_q}\}$ será utilizada na multiplicação de uma álgebra em que seus elementos são caracterizados pela notação $\{\cdot\}$. Essas álgebras serão apresentadas no desenvolvimento desta tese.

e $\wedge : \bigwedge_k \times \bigwedge_\ell \longrightarrow \bigwedge_{k+\ell}$ é o *produto de Wedge*, mais conhecido entre os físicos como *produto exterior*, definido por [53]

$$\mathbf{T}_k \wedge \mathbf{T}_\ell = \frac{1}{k!\ell!} A(\mathbf{T}_k \otimes \mathbf{T}_\ell), \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{T}_q \in \bigwedge_q(\mathbf{V})$ são q -tensores alternados. Para vetores, utilizando a definição acima, o produto exterior fica

$$\boldsymbol{\nu} \wedge \boldsymbol{\nu}' = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}' \otimes \boldsymbol{\nu}] \quad (2.18)$$

onde $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}' \in \mathbf{V}$.

As propriedades mais importantes do produto exterior são a anticomutatividade e a associatividade. Explicitamente, para $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3 \in \mathbf{V}$, tem-se [54]

$$\boldsymbol{\nu}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_2 = -\boldsymbol{\nu}_2 \wedge \boldsymbol{\nu}_1, \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\nu}_1 \wedge (\boldsymbol{\nu}_2 \wedge \boldsymbol{\nu}_3) = (\boldsymbol{\nu}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_2) \wedge \boldsymbol{\nu}_3, \quad (2.20)$$

A relação (2.19) é a que define a álgebra exterior $Ext(\mathbf{V})$. É conveniente escrevê-la da forma

$$\boldsymbol{\nu}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_2 + \boldsymbol{\nu}_2 \wedge \boldsymbol{\nu}_1 = 0 \quad (2.21)$$

para uma eventual comparação com a álgebra de Clifford ortogonal; a álgebra de Clifford ortogonal é a álgebra exterior quando a forma bilinear é identicamente nula. Alternativamente, álgebra exterior também pode ser definida como o quociente da álgebra tensorial $T(\mathbf{V})$ pelo ideal I gerado por elementos do tipo $\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}' + \boldsymbol{\nu}' \otimes \boldsymbol{\nu}$, isto é, [52]

$$Ext(\mathbf{V}) = T(\mathbf{V})/I. \quad (2.22)$$

Para tensores de ordem arbitrária, a relação de anticomutatividade (2.21) implica na relação [52]

$$\mathbf{T}_k \wedge \mathbf{T}_\ell + (-1)^{k\ell} \mathbf{T}_\ell \wedge \mathbf{T}_k = 0. \quad (2.23)$$

Um elemento geral da álgebra exterior, escrito em termos da base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de \mathbf{V} , é dado por [52]

$$\mathbf{T} = \sum_{p=0}^n C^{I_p} \mathbf{e}_{I_p}^\wedge, \quad (2.24)$$

onde I_p é um conjunto multi-índice estritamente ascendente de tamanho p e C^{I_p} são constantes antissimétricas nos elementos de I_p e $\mathbf{e}_{I_p}^\wedge = \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_p$. Para $p = 0$, define-se $\mathbf{e}_{I_0}^\wedge = id$, onde id é o elemento identidade, e $C^{I_0} = C$ é uma constante.

2.2.3 Contrações na álgebra exterior

O espaço dual ao espaço vetorial \mathbf{V} , denotado por \mathbf{V}^{*2} , é formado por todas as aplicações lineares $\mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$, onde \mathbb{K} é o corpo de \mathbf{V} . Os seus elementos são chamados de covetores. Portanto, os elementos $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^*$ aplicados aos elementos $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ resultam em escalares do corpo \mathbb{K} . No entanto, algumas vezes se faz necessário que haja uma operação que reduza em uma unidade a ordem dos elementos em $\bigwedge_k(\mathbf{V})$ transformando-os em elementos de $\bigwedge_{k-1}(\mathbf{V})$. Para este propósito, define-se a *multiplicação interior ou contração* ι_{ν} de um k -covetor β por um vetor ν como [52, 54]

$$\iota_{\nu}(\beta)(\nu_2, \dots, \nu_k) = \beta(\nu, \nu_2, \dots, \nu_k), \quad (2.25)$$

com $\nu_i \in \mathbf{V}$. Para $k = 1$ é definido que $\iota_{\nu}(\beta) = \beta(\nu)$ e para β igual uma constante $\iota_{\nu}(\beta) = 0$. Para β escrito em termos de 1-covetores $\mathbf{u}_i \in \mathbf{V}^*$ a multiplicação interior é dada por [52, 54]

$$\iota_{\nu}(\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \mathbf{u}_i(\nu) (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{u}}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_k), \quad (2.26)$$

onde símbolo $\widehat{}$ acima de \mathbf{u}_i significa que \mathbf{u}_i é omitido do produto externo. A equação (2.26) quando aplicada à $(\nu, \nu_2, \dots, \nu_k)$, pelas propriedades do produto externo, é igual a [52, 54]

$$\iota_{\nu}(\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_k)(\nu, \nu_2, \dots, \nu_k) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1(\nu) & \mathbf{u}_1(\nu_2) & \dots & \mathbf{u}_1(\nu_k) \\ \mathbf{u}_2(\nu) & \mathbf{u}_2(\nu_2) & \dots & \mathbf{u}_2(\nu_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k(\nu) & \mathbf{u}_k(\nu_2) & \dots & \mathbf{u}_k(\nu_k) \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

A operação ι_{ν} pode ser escrita com a notação $\nu[$. Nesta notação, a multiplicação interior é chamada de *contração à esquerda pelo vetor ν* . Então, a (2.25) é também escrita como [52, 54]

$$(\nu[\beta)(\nu_2, \dots, \nu_k) = \beta(\nu, \nu_2, \dots, \nu_k). \quad (2.28)$$

Analogamente, pode-se definir a *contração à direita pelo vetor ν* como [52–54]

$$(\beta]\nu)(\nu_2, \dots, \nu_k) = \beta(\nu_2, \dots, \nu_k, \nu). \quad (2.29)$$

Para $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^*$, define-se [52–54]

$$\mathbf{u}]\nu = \nu[\mathbf{u} = \mathbf{u}(\nu), \quad (2.30)$$

e a contração à esquerda de uma constante pelo vetor ν

$$c]\nu = 0. \quad (2.31)$$

² Nesta tese, os espaços duais serão representados por um asterisco como supraíndice do símbolo que representa o espaço do qual ele é dual.

A operação $\boldsymbol{\nu}[\mathbf{u}]$ pode também ser entendida como mostrado acima, ou seja, uma contração à esquerda de \mathbf{u} pelo vetor $\boldsymbol{\nu}$, ou, alternativamente, uma *contração à direita de $\boldsymbol{\nu}$ pelo covetor \mathbf{u}* . Da mesma forma, a operação $\mathbf{u}[\boldsymbol{\nu}]$ também pode ser entendida como *contração à esquerda de $\boldsymbol{\nu}$ pelo covetor \mathbf{u}* . Estas operações aplicadas a um k -vetor, ao invés de um simples vetor, são definidas como [52]

$$(\mathbf{T}_k[\mathbf{u}])(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{T}_k(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}), \quad (2.32)$$

$$(\mathbf{u}[\mathbf{T}_k])(\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \mathbf{T}_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k). \quad (2.33)$$

As contrações e o próprio produto exterior são importantes para definir os operadores de criação e aniquilação na álgebra exterior, como será visto na próxima subseção.

2.2.4 Operadores de criação e de aniquilação na álgebra exterior

A operação $\boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{T}_k$ do produto exterior de um vetor $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{V}$ por um k -vetor \mathbf{T}_k pode ser entendida como um operador $\boldsymbol{\nu} \wedge : \bigwedge(\mathbf{V}) \longrightarrow \bigwedge(\mathbf{V})$ aplicado a esquerda do multivetor \mathbf{T}_k . Da mesma maneira, $\mathbf{T}_k \wedge \boldsymbol{\nu}$ pode ser entendido como o operador $\wedge \boldsymbol{\nu} : \bigwedge(\mathbf{V}) \longrightarrow \bigwedge(\mathbf{V})$ aplicado à direita de \mathbf{T}_k . Estes operadores são elementos do espaço dos endomorfismos de $\bigwedge(\mathbf{V})$, denotado por $End(\bigwedge(\mathbf{V}))$ e transformam um k -vetor em um $(k+1)$ -vetor. Por este motivo, a nomenclatura de *operadores de criação* lhes cai bem. No entanto, é apropriado utilizar outra notação. Para $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{V}$, define-se o operador de criação [52, 53]

$$a(\boldsymbol{\nu})\mathbf{T}_k = \sqrt{k+1}\boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{T}_k. \quad (2.34)$$

Semelhantemente, define-se a^\dagger como

$$a^\dagger(\boldsymbol{\nu})\mathbf{T}_k = \sqrt{k+1}\mathbf{T}_k \wedge \boldsymbol{\nu}. \quad (2.35)$$

Estes operadores são portanto aplicações $\mathbf{V} \longrightarrow \bigwedge(\mathbf{V})$. Analogamente, a operação de contração por um covetor $\mathbf{u}[\mathbf{T}_k]$, pode ser encarada como um operador $\mathbf{u}[\]$ aplicado a um k -tensor \mathbf{T}_k , reduzindo a sua ordem em uma unidade. Define-se [52, 53]

$$b(\mathbf{u})(\mathbf{T}_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{u}[\mathbf{T}_k], \quad (2.36)$$

$$b^\dagger(\mathbf{u})(\mathbf{T}_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{T}_k[\mathbf{u}]. \quad (2.37)$$

Do ponto de vista algébrico, é interessante observar as relações de anticomutação destes operadores. Estas relações para os operadores de criação são

$$[a(\boldsymbol{\nu}), a(\boldsymbol{\nu}')]_+ = 0, \quad (2.38)$$

$$[a^\dagger(\boldsymbol{\nu}), a^\dagger(\boldsymbol{\nu}')]_+ = 0. \quad (2.39)$$

E para os operadores de aniquilação,

$$[b(\mathbf{u}), b(\mathbf{u}')]_+ = 0, \quad (2.40)$$

$$[b^\dagger(\mathbf{u}), b^\dagger(\mathbf{u}')]_+ = 0. \quad (2.41)$$

Já as relações de anticomutação que envolvem ambos os operadores são

$$[a(\boldsymbol{\nu}), b(\mathbf{u})]_+ = u(\boldsymbol{\nu}) \quad (2.42)$$

$$[a^\dagger(\boldsymbol{\nu}), b^\dagger(\mathbf{u})]_+ = u(\boldsymbol{\nu}) \quad (2.43)$$

As relações de anticomutação dos operadores de criação e aniquilação da álgebra exterior serão importantes na álgebra associada aos férmions, desenvolvida na próxima subseção.

2.2.5 Álgebra associada aos férmions

Mário Schönberg mostrou que é possível propor uma álgebra geométrica de vetores contravariantes e covariantes que reproduzem as relações de comutação e anticomutação da mecânica quântica [2, 4–6]. Sua proposta é baseada na interação entre vetores contravariantes e covariantes de um espaço afim. Esta interação vem das relações de comutação e anticomutação dos vetores e covetores. Tal construção tem como princípio a busca de relações entre os vetores e covetores que são invariantes por transformações de interesse na física. Nesse sentido, Schönberg observou que a aplicação natural de um covetor a um vetor é um invariante sob transformações afins e propôs que as relações de (anti) comutação entre vetores e covetores se igualem à aplicação do covetor ao vetor, enquanto as relações que envolvem somente vetores ou somente covetores se anulassem. Mostra-se [2, 4, 5] que para os geradores da álgebra, estas relações são justamente as relações de comutação e anticomutação dos operadores de criação e aniquilação relativos ao oscilador harmônico quântico. Esta forma intuitiva de se chegar às relações algébricas da mecânica quântica pode ser formalizada como um caso especial da álgebra de Clifford ortogonal de um espaço formado pela soma do espaço afim com o seu dual, cuja forma bilinear é composta por aplicações de covetores a vetores. A depender da simetria da forma bilinear, pode-se chegar à álgebra de Clifford ortogonal ou a chamada álgebra de Clifford simplética [55]. A primeira é a álgebra associada às partículas fermiônicas e a última associada às partículas bosônicas. As próximas subseções são dedicadas a formalizar a álgebra associada aos férmions. A álgebra associada aos bósons será vista na seção 3.3.

2.2.6 O espaço W de vetores contravariantes e covariantes

Denota-se por \mathbf{V} um espaço vetorial de dimensão igual a n e $\mathbf{U} = \mathbf{V}^*$ o seu dual. A aplicação natural de um covetor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a um vetor $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{V}$ será escrita como $\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \rangle$ ou simplesmente $\mathbf{u}(\boldsymbol{\nu})$, de acordo com a conveniência em cada situação.³ Define-se o espaço

³ Nesta tese, os espaços vetoriais serão denotados por uma letra maiúscula em negrito e seus elementos serão representados por letras minúsculas também em negrito. Sempre que houver um asterisco como supraíndice de um espaço vetorial \mathbf{E} , indicará o dual deste espaço. Por razões históricas, é preferível utilizar o símbolo \mathbf{U} para representar o espaço dual a \mathbf{V} . No entanto, sempre que ocorrer outro símbolo senão o asterisco para denotar um espaço dual, será chamada a atenção para o fato.

\mathbf{W} como a soma direta do espaço \mathbf{V} com o seu dual, ou seja

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{U}. \quad (2.44)$$

Os vetores $\omega \in \mathbf{W}$ são escritos como $\omega = \nu \oplus \mathbf{u}$ ou (ν, \mathbf{u}) , com $\nu \in \mathbf{V}$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Note que \mathbf{W} é um espaço vetorial de dimensão $2n$. Por este motivo, em algumas situações é conveniente acrescentar a sua dimensão como subíndice da notação, como em \mathbf{W}_{2n} . Este espaço serve como uma representação do espaço de fase da mecânica clássica, onde \mathbf{V} representa o espaço de configuração e \mathbf{U} o espaço dos *momenta*. Pode-se ainda dotar \mathbf{W} de uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica Ω_{\pm} dada por [2, 4, 5]

$$\Omega_{\pm}(\omega, \omega') = \frac{1}{2} [\langle \mathbf{u}, \nu' \rangle \pm \langle \mathbf{u}', \nu \rangle] \quad (2.45)$$

com $\omega = (\nu, \mathbf{u})$ e $\omega' = (\nu', \mathbf{u}') \in \mathbf{W}$. O sinal positivo ou negativo como subíndice de Ω_{\pm} se refere ao sinal positivo ou negativo do lado direito de (2.45). Dessa forma, Ω_{+} é uma forma bilinear simétrica e Ω_{-} antissimétrica. Note que a estrutura interna das formas bilineares (2.45) é formada por objetos $\langle \mathbf{u}, \nu \rangle$, que são quantidades escalares e são invariantes sobre o grupo de transformações afim $GL(n, \mathbb{K})$. Isto faz de Ω_{\pm} também um invariante afim. Voltemos a atenção para a forma bilinear simétrica Ω_{+} .

2.2.7 A forma bilinear simétrica e a álgebra de Clifford ortogonal de \mathbf{W}

É bem conhecido [52] que um espaço vetorial quadrático ⁴ (\mathbf{E}, g) define uma única álgebra de Clifford associada a ele ⁵. Não é diferente para o caso de $(\mathbf{W}_{2n}, \Omega_{+})$, que define a álgebra de Clifford $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_{+})$. Os passos para se mostrar este fato são os seguintes. Considera-se a imersão de \mathbf{W} na álgebra tensorial de $T(\mathbf{W})$, dada por

$$T(\mathbf{W}) = \bigoplus_{i=0} \mathbf{W}^i, \quad (2.46)$$

onde

$$\mathbf{W}^i = \underbrace{\mathbf{W} \otimes \dots \otimes \mathbf{W}}_{i \text{ vezes}}, \quad (2.47)$$

em que \mathbf{W}^0 corresponde ao corpo \mathbb{K} e \mathbf{W}^1 ao próprio \mathbf{W} . A álgebra de Clifford ortogonal de \mathbf{W} referente à forma bilinear Ω_{+} é definida como o quociente de $T(\mathbf{W})$ pelo ideal $I_{\Omega_{+}}$ gerado por elementos do tipo

$$\omega \otimes \omega' + \omega' \otimes \omega - 2\Omega_{+}(\omega, \omega'), \quad (2.48)$$

⁴ Espaço vetorial quadrático é um par (\mathbf{E}, g) onde \mathbf{E} é um espaço vetorial e g uma forma bilinear simétrica.

⁵ Nesta tese nos referimos a essa álgebra como álgebra de Clifford ortogonal sobre \mathbf{E} ou álgebra de Clifford ortogonal de \mathbf{E} .

isto é,

$$Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+) := T(\mathbf{W})/I_{\Omega_+}. \quad (2.49)$$

Mostra-se que a multiplicação tensorial entre dois elementos ω e ω' em $T(\mathbf{W})/I_{\Omega_+}$ é equivalente a $\omega \wedge \omega' + \Omega_+(\omega, \omega')$, onde \wedge é a multiplicação exterior. Isto quer dizer que o produto no espaço quociente, denotado apenas pela justaposição de seus elementos, é dado por

$$\omega\omega' = \omega \wedge \omega' + \Omega_+(\omega, \omega'). \quad (2.50)$$

Pela anticomutatividade do produto exterior, obtém-se a expressão

$$\omega\omega' + \omega'\omega = 2\Omega_+(\omega, \omega'), \quad (2.51)$$

que é a expressão que define a álgebra de Clifford ortogonal $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Mostra-se também que álgebra de Clifford ortogonal é universal, ou seja, se ς é uma aplicação de $T(\mathbf{W})$ para outro espaço $T(\mathbf{W})/I_{\Omega_+}$, então há apenas uma aplicação $W \rightarrow T(\mathbf{W})/I_{\Omega_+}$, a menos de isomorfismos, dada por $\varphi = \varsigma \circ \iota$ ⁶, onde $\iota : W \rightarrow T(\mathbf{W})$ é a injeção de \mathbf{W} em $T(\mathbf{W})$. Isso pode ser visualizada na Figura 1

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\iota} & T(W) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \varsigma \\ & & T(\mathbf{W})/I_{\Omega_+} =: Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+) \end{array}$$

Figura 1 – $\varphi = \varsigma \circ \iota$

A aplicação φ é chamada de aplicação de Clifford ortogonal e relaciona elementos de \mathbf{W} com elementos em $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Desta maneira, pode-se ser mais geral ao escolher $\omega, \omega' \in \mathbf{W}$ e escrever a forma da expressão (2.51) como:

$$\varphi(\omega)\varphi(\omega') + \varphi(\omega')\varphi(\omega) = 2\Omega_+(\omega, \omega'). \quad (2.52)$$

2.2.8 A decomposição lagrangiana de W por uma forma bilinear simétrica e a álgebra associada aos férmions

Um *subespaço lagrangiano* \mathbf{E}' de \mathbf{E} , relativo à forma bilinear Γ , é um subespaço de \mathbf{E} tal que

$$\Gamma(\mathbf{E}', \mathbf{E}') = 0. \quad (2.53)$$

⁶ Usaremos o símbolo \circ para indicar, de uma forma geral, a composição de aplicações.

Diz-se que \mathbf{E}' é um *subespaço lagrangiano máximo* de \mathbf{E} , $\dim \mathbf{E} = 2m$, quando $\dim \mathbf{E}' = m$. Neste contexto, os subespaços \mathbf{V} e \mathbf{U} , de dimensão n , são subespaços lagrangianos máximos de \mathbf{W}_{2n} relativo à forma Ω_+ , pois tem-se que

$$\Omega_+(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0, \quad (2.54)$$

$$\Omega_+(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0. \quad (2.55)$$

Isto fica fácil de verificar quando se faz a seguinte identificação dos vetores de \mathbf{W} : $\mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{u}$, e substitui na expressão de Ω_+ dada por (2.45). Vê-se também que

$$\Omega_+(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle. \quad (2.56)$$

Mais ainda, se forem escolhidas as bases $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ para \mathbf{V} e \mathbf{U} , respectivamente, então tem-se

$$\Omega_+(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \frac{1}{2} \delta_i^j. \quad (2.57)$$

É conveniente que se defina a aplicação [1]

$$\begin{aligned} (\cdot) : \mathbf{W} &\longrightarrow \text{End}(\bigwedge(\mathbf{W}^*)) \\ (\mathbf{v} \oplus \mathbf{u}) &= (\mathbf{v}) + (\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde

$$(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}), \quad (\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}) \quad (2.59)$$

em que $\text{End}(\bigwedge(\mathbf{W}^*))$ o espaço dos endomorfismos da álgebra exterior de \mathbf{W}^* e a e b são os operadores de criação e aniquilação da álgebra exterior. Assim, verifica-se que $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ é isomórfica a álgebra de operadores de criação e aniquilação da álgebra exterior de \mathbf{W} . Dessa forma, a expressão (2.52) que caracteriza a álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ pode ser substituída pelas expressões

$$[(\boldsymbol{\nu}), (\boldsymbol{\nu}')]_+ = 0, \quad (2.60)$$

$$[(\mathbf{u}), (\mathbf{u}')]_+ = 0, \quad (2.61)$$

$$[(\boldsymbol{\nu}), (\mathbf{u})]_+ = \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \rangle, \quad (2.62)$$

onde $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}' \in \mathbf{V}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$. Ao se escrever os vetores na base como

$$\boldsymbol{\nu} = \nu^i \mathbf{e}_i \quad (2.63)$$

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i \quad (2.64)$$

com ν^i e u_i escalares pertencente ao corpo \mathbb{K} , obtém-se as novas relações

$$[(\mathbf{e}_i), (\mathbf{e}_j)]_+ = 0, \quad (2.65)$$

$$[(\mathbf{e}^i), (\mathbf{e}^j)]_+ = 0, \quad (2.66)$$

$$[(\mathbf{e}_i), (\mathbf{e}^j)]_+ = \delta_i^j. \quad (2.67)$$

Observe que as relações (2.65–2.67) são análogas às relações de anticomutação dos operadores de criação e aniquilação de um sistema partículas fermiônicas. Estas equações, porém, não passaram por qualquer tipo de quantização *ad hoc* e, sim, foram obtidas simplesmente através da introdução de um produto escalar simétrico no espaço de fase clássico.

2.2.8.1 Elemento geral da álgebra de Clifford de W

A álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ é gerada por elementos da forma [2]

$$(\mathbf{e}^1)^{s_1} (\mathbf{e}^2)^{s_2} \dots (\mathbf{e}^n)^{s_n} (\mathbf{e}_n)^{r_1} \dots (\mathbf{e}_2)^{r_2} (\mathbf{e}_1)^{r_1} \quad (2.68)$$

onde s_i e r_j assumem os valores 0 ou 1. É entendido que o elemento identidade da álgebra é o elemento referente a todos $s_i = r_i = 0$. Deste modo, um elemento geral de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ é dado por [2, 4, 5]

$$\Gamma = \sum_{p,q=0}^n C_{J_p}^{K_q}(\mathbf{e}^{J_p})(\mathbf{e}_{K_q}), \quad (2.69)$$

onde J_p e K_q são conjuntos de multi-índices estritamente ascendentes de tamanho p e q , respectivamente.

2.2.9 Os idempotentes e os ideais mínimos da álgebra de Clifford ortogonal de W

O estudo dos ideais mínimos da álgebra $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)$ mostra que elementos destes ideais, chamados de espinores, podem representar partículas de spin 1/2 e que elementos gerais da álgebra podem representar observáveis quânticos que atuam nos espinores. Uma técnica de construção de ideais algébricos [35, 56–60] utiliza os chamados *idempotentes primitivos*. Os *idempotentes* de uma álgebra são elementos θ da álgebra tal que $\theta \bullet \theta = \theta$. Chama-se *idempotentes ortogonais* aqueles idempotentes θ_i e θ_j tal que $\theta_i \bullet \theta_j = \delta_{ij} \theta_i$. Finalmente, os idempotentes primitivos são aqueles idempotentes que não podem ser decompostos em uma soma de idempotentes ortogonais.

2.2.9.1 Elemento geral da álgebra de Clifford ortogonal de W escrito em uma nova base

No caso de $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)$, é conveniente que se utilize de um idempotente primitivo para introduzir uma base canônica que permita a construção dos seus ideais mínimos. Neste sentido, vale a pena destacar os elementos do tipo [2, 4, 5]⁷

$$(N_i) := (\mathbf{e}^i)(\mathbf{e}_i), \quad (2.70)$$

$$(\bar{N}_i) := (\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}^i), \quad (2.71)$$

⁷ Para manter a notação de Schönberg, a notação (N_i) e (\bar{N}_i) não denota a aplicação (\cdot) em N_i ou \bar{N}_i , mas sim os elementos das expressões (2.70–2.71).

em que não há soma implícita nos índices i . Pelas relações (2.70–2.71) e (2.65–2.67), é fácil verificar que os N_i e \bar{N}_i são idempotentes e obedecem às seguintes propriedades [2, 4, 5]:

$$(\mathbf{e}^i)(N_i) = 0, \quad (2.72)$$

$$(N_i)(\mathbf{e}_i) = 0, \quad (2.73)$$

$$(\mathbf{e}_i)(\bar{N}_i) = 0, \quad (2.74)$$

$$(\bar{N}_i)(\mathbf{e}^i) = 0, \quad (2.75)$$

$$[(N_i), (N_j)]_+ = [(\bar{N}_i), (\bar{N}_j)]_+ = 0. \quad (2.76)$$

A partir de (N_i) e (\bar{N}_i) , pode-se construir os idempotentes primitivos, dados por [2, 4, 5]

$$(P) = (\bar{N}_1) \dots (\bar{N}_n), \quad (2.77)$$

$$(\bar{P}) = (N_1) \dots (N_n). \quad (2.78)$$

Segue das definições (2.77–2.78) que (P) e (\bar{P}) obedecem a

$$(\mathbf{e}_i)(P) = 0, \quad (2.79)$$

$$(P)(\mathbf{e}^i) = 0, \quad (2.80)$$

$$(\mathbf{e}^i)(\bar{P}) = 0, \quad (2.81)$$

$$(\bar{P})(\mathbf{e}_i) = 0. \quad (2.82)$$

A base canônica é então formada por elementos do tipo [2, 4, 5]

$$(P_{J_p}^{K_q}) = (\mathbf{e}^{K_q})(P)(\mathbf{e}_{J_p}), \quad (2.83)$$

onde J_p e K_q são conjuntos de multi-índices estritamente ascendentes de tamanho p e q , respectivamente e

$$(\mathbf{e}_{J_p}) = (\mathbf{e}_{j_p})(\mathbf{e}_{j_{p-1}}) \dots (\mathbf{e}_{j_1}), \quad (2.84)$$

$$(\mathbf{e}^{K_q}) = (\mathbf{e}^{k_1})(\mathbf{e}^{k_2}) \dots (\mathbf{e}^{k_q}). \quad (2.85)$$

Pelas regras de anticomutação dos geradores de $\mathcal{Cl}(\mathbf{W}, \Omega_+)$ (2.65–2.67), pode-se verificar que a multiplicação dos elementos da nova base (2.83) é dada por [2, 4, 5]

$$(P_{J_p}^{K_q})(P_{H_s}^{I_r}) = (\delta_{J_p}^{I_r})(P_{H_s}^{K_q}), \quad (2.86)$$

onde $(\delta_{J_p}^{I_r})$ foi definido em (2.15). Nessa nova base, um elemento geral de $\mathcal{Cl}_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ pode ser escrito agora como

$$\Gamma = \sum_{p,q=0}^n A_{J_p}^{K_q} (P_{K_q}^{J_p}), \quad (2.87)$$

onde $A_{J_p}^{K_q}$ são constantes antissimétrica em relação aos índices i 's e j 's separadamente.

2.2.9.2 Os ideais mínimos de $C\ell_n(W, \Omega_+)$

A importância do elemento (P) na construção dos ideais mínimos de $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ vem com a percepção de que este elemento, quando multiplicado à direita ou à esquerda de $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega)$, resulta em um elemento com componentes com apenas vetores ou apenas covetores, como pode ser verificado abaixo:

$$\begin{aligned}
 \Psi = \Gamma(P) &= \sum_{p,q=0}^n A_{K_q}^{J_p} (P_{J_p}^{K_q}) (P) \\
 &= \sum_{p,q=0}^n A_{K_q}^{J_p} (\delta_{J_p}^0) (P_0^{K_q}) \\
 &= \sum_{p,q=0}^n A_{K_q}^{J_p} \delta_{p,0} \det \hat{\delta}_0^0 (P^{K_q}) \\
 &= \sum_{q=0}^n A_{K_q} (P^{K_q}) \tag{2.88}
 \end{aligned}$$

onde 0 em $(P_0^{K_q})$ e $A_{K_q}^0$ são considerados conjuntos vazios, e $\hat{\delta}_0^0$ é definido como a matriz de uma linha e uma coluna cujo único elemento é igual à unidade 1. Da mesma maneira, tem-se

$$\Psi' = (P)\Gamma = \sum_{p=0}^n A^{J_p} (P_{J_p}). \tag{2.89}$$

Os elementos Ψ e Ψ' quando multiplicado à direita e à esquerda, respectivamente, de Γ resulta também em um elemento composto apenas de vetores ou de covetores. Isto é

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \Gamma\Psi = \sum_{p,q=0}^n A_{K_q}^{J_p} (P_{J_p}^{K_q}) \sum_{s=0}^n A_{H_s} (P^{H_s}) \\
 &= \sum_{p,q,s=0}^n A_{K_q}^{J_p} A_{H_s} (P_{J_p}^{K_q}) (P^{H_s}) \\
 &= \sum_{p,q,s=0}^n A_{K_q}^{J_p} A_{H_s} (\delta_{J_p}^{H_s}) (P_0^{K_q}) \\
 &= \sum_{p,q,s=0}^n A_{K_q}^{J_p} A_{H_s} \delta_{s,p} \det \hat{\delta}_{J_p}^{H_p} (P^{K_q}) \\
 &= \sum_{q=0}^n A'_{K_q} (P^{K_q}), \tag{2.90}
 \end{aligned}$$

onde

$$A'_{K_q} = \sum_{p=0}^n A_{K_q}^{J_p} A_{H_p} \det \hat{\delta}_{J_p}^{H_p}. \tag{2.91}$$

Analogamente, para $\Psi'\Gamma$, tem-se

$$\Psi'\Gamma = \sum_{p=0}^n A''^{J_p} (P_{J_p}), \tag{2.92}$$

com

$$A''^{J_p} = \sum_{q=0}^n A^{H_q} A_{K_q}^{J_p} \det \hat{\delta}_{H_q}^{K_q}. \quad (2.93)$$

Observe que a multiplicação de todos os elementos de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ à esquerda (à direita) de (P) leva a álgebra a um ideal à esquerda (à direita). Designa-se $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$ e $(P)Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ por ideais à esquerda e à direita, respectivamente. Como (P) é um idempotente primitivo, então esses ideais são ideais mínimos.

2.2.10 Elemento geral da álgebra Clifford ortogonal de W como auto representação do grupo linear atuando nos seus ideais mínimos

Como $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$ é um ideal à esquerda de $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)$, então todo elemento Γ de $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)$ multiplicado à esquerda de Ψ em $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$, resulta em um novo elemento Ψ' em $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$. Neste contexto, Γ pode ser interpretado como um operador linear que atua nos espinores em $Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$ ⁸ [2, 4, 5]. Formalmente, este elemento pode ser visto como uma aplicação

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}: Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)(P) &\longrightarrow Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)(P) \\ \Psi' = \vec{\Gamma} \Psi &= \Gamma \Psi, \end{aligned}$$

em que a seta indica em qual direção Γ atua em Ψ . Em outras palavras, $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ é uma auto representação do grupo linear $GL(2^{2n}, \mathbb{K})$, onde n é a dimensão do espaço vetorial \mathbf{V} com corpo \mathbb{K} .

Veja que, da mesma forma, Γ também pode ser visto como um operador

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\Gamma}: (P)Cl(\mathbf{W}, \Omega_+) &\longrightarrow (P)Cl(\mathbf{W}, \Omega_+) \\ \Psi' = \overleftarrow{\Gamma} \Psi &= \Psi \Gamma \end{aligned}$$

que atua à direita de $(P)Cl(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Neste contexto, os espinores em $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$ ou $(P)Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ podem ser candidatos a representar estados de partículas físicas que obedecem à estatística de Fermi, ao passo que elementos gerais de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ podem representar observáveis físicos.

2.2.11 A introdução de uma correlação entre os espaços contravariante e covariante

Até agora, os espaços \mathbf{V} e \mathbf{U} são independentes, isto é, elementos do primeiro não correspondem a nenhum elemento do segundo. É possível fazer essa correspondência através da aplicação

$$b: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{U} \quad (2.94)$$

⁸ De forma geral, designaremos os elementos dos ideais mínimos de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ por espinores.

chamada *correlação* [52]. Quando o núcleo de \flat é igual a $\{0\}$, então a correlação é dita *não degenerada* e estabelece um isomorfismo entre \mathbf{V} e seu dual \mathbf{U} . Consequentemente, para cada vetor em \mathbf{V} há um covetor correspondente em \mathbf{U} . Nesta tese, todas as correlações serão consideradas correlações não degeneradas.

Note que a aplicação de \flat em um elemento $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{V}$ é o elemento $\boldsymbol{\nu}_\flat \in \mathbf{U}$ e, portanto, é uma aplicação sobre \mathbf{V} . Deste modo, ela define um funcional bilinear $g : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$g(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}') = \flat(\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu}') = \boldsymbol{\nu}_\flat(\boldsymbol{\nu}'). \quad (2.95)$$

O funcional bilinear g é chamado de *métrica* de \mathbf{V} se

- $g(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) > 0$, $\boldsymbol{\nu} \neq 0$,
- $g(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = 0$, se e somente se $\boldsymbol{\nu} = 0$,
- $g(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}') = g(\boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\nu})$,
- $g(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}'') < g(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}') + g(\boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\nu}'')$,

para $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\nu}'' \in \mathbf{V}$.

2.2.12 Álgebra induzida pela correlação simétrica

A introdução de uma correlação simétrica, e portanto uma métrica, induz uma álgebra isomórfica a $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ através da definição dos operadores [2, 4, 5]

$$\begin{aligned} \gamma^\pm : \mathbf{V} &\longrightarrow \text{End}(\bigwedge(\mathbf{V})) \\ \gamma^\pm &= b \pm a \circ \flat \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde a e b são os operadores de criação e aniquilação na álgebra exterior. Observe que, para $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{V}$, tem-se

$$\begin{aligned} \gamma^\pm(\boldsymbol{\nu}) &= b(\boldsymbol{\nu}) \pm a(\boldsymbol{\nu}_\flat) \\ &= (\boldsymbol{\nu}) \pm (\boldsymbol{\nu}_\flat). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Esses operadores obedecem às seguintes relações de anticomutação

$$[\gamma^+(\boldsymbol{\nu}), \gamma^-(\boldsymbol{\nu}')]_+ = 0, \quad (2.98)$$

$$[\gamma^\pm(\boldsymbol{\nu}), \gamma^\pm(\boldsymbol{\nu}')]_+ = \pm 2g(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}'), \quad (2.99)$$

isto é, os operadores γ^\pm geram duas álgebras de Clifford ortogonais denotadas por $Cl_n(\mathbf{V}, \pm g)$ e são isomórficas a $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$.

Veja que a introdução da correlação \flat entre \mathbf{V} e \mathbf{U} , faz de \mathbf{U} um espaço composto por covetores ν_\flat , correlacionados com vetores $\nu \in \mathbf{V}$. Para evidenciar a presença da correlação, o espaço \mathbf{W}_{2n} será denotado como \mathbf{W}_{2n}^\flat , de forma que⁹

$$\mathbf{W}_{2n}^\flat = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}_\flat \quad (2.100)$$

Um vetor de \mathbf{W}_{2n}^\flat é da forma

$$\omega = \nu_1 \oplus \nu_{2\flat} \quad (2.101)$$

com $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{V}$ e $\nu_{2\flat} = \flat(\nu_2) \in \mathbf{U} \simeq \mathbf{V}_\flat$. A álgebra de Clifford ortogonal agora é caracterizada pela relação

$$\varphi(\omega)\varphi(\omega') + \varphi(\omega')\varphi(\omega) = [g(\nu_2, \nu'_1) + g(\nu'_2, \nu_1)] \quad (2.102)$$

em que $\langle \nu_{2\flat}, \nu_1 \rangle = g(\nu_2, \nu_1)$ e φ é a aplicação de Clifford ortogonal, definida na subseção 2.2.7. Foi visto na seção 2.2.8 que \mathbf{W} , e portanto agora \mathbf{W}_{2n}^\flat , é uma decomposição lagrangiana relativo à forma bilinear Ω_+ . Desta maneira, com o uso da aplicação (\cdot) , definida em (2.58), a relação de Clifford ortogonal (2.102) é reescrita como

$$[(\nu_1), (\nu'_1)]_+ = 0, \quad (2.103)$$

$$[(\nu_{2\flat}), (\nu'_{2\flat})]_+ = 0, \quad (2.104)$$

$$[(\nu_1), (\nu'_{2\flat})]_+ = g(\nu_1, \nu'_2). \quad (2.105)$$

As relações (2.103–2.105) podem ser escritas em termos da base de \mathbf{V} . Neste caso, encontra-se

$$[(e_\mu), (e_\nu)]_+ = 0, \quad (2.106)$$

$$[(e_{\mu\flat}), (e_{\nu\flat})]_+ = 0, \quad (2.107)$$

$$[(e_\mu), (e_{\nu\flat})]_+ = g_{\mu\nu}, \quad (2.108)$$

com $g_{\mu\nu} := g(e_\mu, e_\nu)$.

Observe que os elementos $\gamma^\pm(\nu)$ correspondem ao conjunto $\mathbf{W}_\pm^\flat \subset \mathbf{W}^\flat$ dos vetores $\omega_\pm \in \mathbf{W}^\flat$ cuja parte covariante está correlacionada com sua parte contravariante, isto é,

$$\omega_\pm = \nu \oplus \pm \nu_\flat, \quad (2.109)$$

onde $\nu \in \mathbf{V}$. Usando a aplicação de Clifford ortogonal φ em \mathbf{W}_\pm^\flat , tem-se um conjunto de $\varphi(\omega_\pm)$ que obedecem às relações

$$[\varphi(\omega_+), \varphi(\omega'_-)]_+ = 0, \quad (2.110)$$

$$[\varphi(\omega_\pm), \varphi(\omega'_\pm)]_+ = \pm 2g(\nu, \nu'), \quad (2.111)$$

⁹ A presença do subíndice $2n$ em \mathbf{W}_{2n}^\flat pode ser omitida quando não é necessário fazer menção à dimensão do espaço.

que são exatamente as mesmas relações (2.98) e (2.99). Portanto $\gamma^\pm(\mathbf{V}) = \varphi(\mathbf{W}_\pm^b)$. Isto fica mais evidente quando se utiliza a aplicação (\cdot) em $\omega_\pm = \nu \oplus \pm\nu_b$:

$$\begin{aligned} (\omega_\pm) &= (\nu \oplus \pm\nu_b) \\ &= (\nu) \pm (\nu_b) \\ &= b(\nu) \pm a(\nu_b) \\ &= \gamma^\pm(\nu). \end{aligned} \tag{2.112}$$

É importante investigar a ação de γ^\pm numa base de \mathbf{V} . Para isto, considere $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ bases de \mathbf{V}_b e \mathbf{U}_b , respectivamente. Sabe-se, da teoria dos espaços duais métricos, que $\mathbf{e}_{ib} = g_{ij}\mathbf{e}^j$, onde $g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Portanto, é conveniente definir

$$b_i = b(\mathbf{e}_i), \tag{2.113}$$

$$a^i = a(\mathbf{e}_{ib}). \tag{2.114}$$

de modo que seja possível escrever

$$\gamma_i^\pm = b_i \pm g_{ij}a^j. \tag{2.115}$$

Note que pela definição (2.58) da ação de (\cdot) em \mathbf{W} , tem-se que os elementos γ_i^\pm são dados por

$$\gamma_i^\pm = (\mathbf{e}_i) \pm g_{ij}(\mathbf{e}^j), \tag{2.116}$$

relação esta na forma mais conhecida nos trabalhos de Schönberg [2, 4, 5]. A forma (2.116) de expressar os γ_i^\pm é confusa, pois os livros textos costumam abusar da notação e induzem o leitor a acreditar que o g_{ij} abaixa o índice de \mathbf{e}^i , como em

$$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j \tag{2.117}$$

Observe no entanto, que o lado esquerdo de (2.117) é um vetor, enquanto do lado direito é um covetor. Não se pode igualar estes entes! O que há por trás desta relação é um abuso de notação. A relação correta deveria ser

$$\mathbf{e}_{ib} = g_{ij}\mathbf{e}^j. \tag{2.118}$$

Em vista disso, a equação (2.116) é a mesma que a seguinte equação

$$\gamma_i^\pm = (\mathbf{e}_i) \pm (\mathbf{e}_{ib}), \tag{2.119}$$

o que é óbvio, bastando observar a definição dos γ_i^\pm e da aplicação (\cdot) , em (2.113–2.115) e (2.59). Dito de outra maneira, os γ_i^\pm são a imagem da aplicação de (\cdot) na base de \mathbf{W}_\pm^b , dada por $\omega_{i\pm} = \mathbf{e}_i \oplus \pm\mathbf{e}_{ib}$, isto é,

$$\gamma_i^\pm = (\omega_{i\pm}), \tag{2.120}$$

e são os geradores de $C\ell_n(\mathbf{V}, \pm g)$. Estes objetos obedecem as relações

$$[\gamma_i^+, \gamma_j^-]_+ = 0, \tag{2.121}$$

$$[\gamma_i^\pm, \gamma_j^\pm]_+ = \pm 2g_{ij}. \tag{2.122}$$

2.3 Aplicações da álgebra $C\ell_n(W, \Omega_+)$

Nesta seção vamos apresentar o formalismo para a construção da equação de *DKP* baseada na álgebra $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ [2, 4, 5, 13, 14]. Nesse sentido iremos demonstrar a equivalência da equação de *DKP* com as equações de Klein-Gordon-Fock e de Proca, dentro desse formalismo. Em sequência, mostraremos o desenvolvimento da equação de *DKP* para partículas não massivas nesse contexto algébrico. Entretanto, iniciaremos o estudo revisando as equações de Dirac via a álgebra $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ [11] e a de *DKP* no formalismo usual [42–46].

2.3.1 A equação de Dirac na representação $C\ell_n(W, \Omega_+)$

Este tópico tem como objetivo apresentar a equação de Dirac a partir das ideias algébricas desenvolvidas nesta subseção. Desta forma, vale a pena apresentar a maneira usual de obter a equação de Dirac.

A equação de Dirac, como o próprio nome diz, foi introduzida por Dirac em 1928 nos artigos históricos [47, 48]. Ele buscava uma equação capaz de descrever partículas de spin 1/2. Dirac então propôs a seguinte equação de primeira ordem:

$$[\alpha_\mu \partial^\mu - im] \Psi(x) = 0, \quad (2.123)$$

onde $\{\alpha_\mu\}$ é um conjunto de quatro matrizes 4×4 , Ψ um vetor de 4 componentes e m é uma constante que representa a massa da partícula. Para fazer sentido físico, esta equação deveria implicar na equação de onda

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \Psi(x) = 0. \quad (2.124)$$

Esta condição, impõe que as matrizes α_μ obedeçam as relações

$$[\alpha_\mu, \alpha_\nu]_+ = 2\eta_{\mu\nu}, \quad (2.125)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. Em outras palavras, as matrizes α_μ devem ser representações da álgebra de Clifford ortogonal, indicando que esta álgebra é essencial para a equação. Neste sentido, a importância de trazer em discussão a equação de Dirac é para notar que, no contexto da álgebra $C\ell_n(\mathbf{V}, \pm g)$, a aplicação de γ^+ nos elementos da base de \mathbf{V} leva naturalmente a uma outra representação das matrizes α_μ , quando \mathbf{V} é identificado como o espaço de Minkowski. Neste cenário, a equação de Dirac é obtida quando se combina os geradores $\gamma_\mu = \gamma_\mu^+$ da álgebra $C\ell_4(\mathbf{M}, +\eta)$, onde \mathbf{M} e η são o espaço e a métrica de Minkowski, respectivamente, com o operador diferencial

$$\partial_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (2.126)$$

Dessa forma, a equação de Dirac na representação $Cl_4(\mathbf{M}, \eta)$ é dada por

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - m] \psi = 0. \quad (2.127)$$

Agora, ψ é um elemento do ideal à esquerda de $Cl_4(\mathbf{M}, \Omega_+)(P)$ e pode ser escrito como

$$\psi = A_{J_4}(P^{J_4}). \quad (2.128)$$

Note que γ_μ são elementos de $Cl_4(\mathbf{M}, +\eta)$, enquanto o vetor de estado é um elemento do ideal à esquerda de $Cl_4(\mathbf{M}, \Omega_+)$. No âmbito da própria estrutura da equação de Dirac, é importante fazer algumas observações. O gerador γ_μ pode ser visto como um operador que transforma (\mathbf{e}_μ) em $(\mathbf{e}_{\mu b})$ e vice-versa, pois, a partir da multiplicação da própria álgebra, chega-se a [11]

$$\gamma_\mu(\mathbf{e}_\mu)\gamma_\mu = [(\mathbf{e}_\mu) + (\mathbf{e}_{\mu b})](\mathbf{e}_\mu)[(\mathbf{e}_\mu) + (\mathbf{e}_{\mu b})] = (\mathbf{e}_{\mu b}), \quad (2.129)$$

$$\gamma_\mu(\mathbf{e}_{\mu b})\gamma_\mu = [(\mathbf{e}_\mu) + (\mathbf{e}_{\mu b})](\mathbf{e}_{\mu b})[(\mathbf{e}_\mu) + (\mathbf{e}_{\mu b})] = (\mathbf{e}_\mu). \quad (2.130)$$

A partir dos geradores de $Cl_4(\mathbf{M}, +\eta)$ é possível construir o elemento

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad (2.131)$$

com a propriedade

$$\gamma_5\gamma_5 = 1, \quad (2.132)$$

ou seja, $\gamma_5^{-1} = \gamma_5$. Desta forma, o operador $S = i\gamma_5$ tem a propriedade de intercambiar todos os $(\mathbf{e}_\mu) \longleftrightarrow (\mathbf{e}_{\mu b})$. Este operador também tem a propriedade interessante de transformar (P) em (P^{J_4}) e vice-versa. De fato,

$$\begin{aligned} iS(P) &= -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4(P) \\ &= -\gamma_1\gamma_2\gamma_3 [(\mathbf{e}_4) + (\mathbf{e}_{4b})](P) \\ &= -\gamma_1\gamma_2\gamma_3(\mathbf{e}_{4b})(P) \\ &= \gamma_1\gamma_2(\mathbf{e}_{4b}) [(\mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_{3b})](P) \\ &\quad \vdots \\ &= -(\mathbf{e}_{4b})(\mathbf{e}_{3b})(\mathbf{e}_{2b})(\mathbf{e}_{1b})(P) \\ &= (\mathbf{e}_{1b})(\mathbf{e}_{2b})(\mathbf{e}_{3b})(\mathbf{e}_{4b})(P) \\ &= (P^{J_4}). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Com cálculos análogos aos encontrados em (2.133), é possível mostrar que

$$-iS(P^{J_4}) = (P), \quad (2.134)$$

isto é, o operador S transforma o estado de vácuo (P) em um estado completo (P^{J_4}) , assim como transforma o estado completo no estado de vácuo. Esta operação está intimamente

ligada ao operador estrela de Hodge, no qual se tem $\star 1 = \tau$ e $\star \tau = 1$, onde 1 e τ aqui representam a identidade e o elemento de volume da álgebra exterior, respectivamente. Neste espírito, a equação de Dirac na representação $C\ell(\mathbf{M}, +\eta)$ pode ser reescrita como

$$[(D) - im]\psi = 0, \quad (2.135)$$

onde (D) é operador de Dirac e é dado por

$$(D) := (d) - (\delta), \quad (2.136)$$

com

$$(d) := (\mathbf{e}_\mu)\partial^\mu, \quad (2.137)$$

$$(\delta) := S(d)S^{-1} = -(\mathbf{e}_{\mu b})\partial^\mu = -(\mathbf{e}^\mu)\partial_\mu, \quad (2.138)$$

Estes operadores ainda têm as propriedades

$$(d)(d) = (\delta)(\delta) = 0, \quad (2.139)$$

$$[(d), (\delta)]_+ = -\partial_\mu\partial^\mu. \quad (2.140)$$

ou seja, os seus quadrados são nulos e a anticomutação de (d) e (δ) é igual ao laplaciano, a menos de um sinal. Estas propriedades ainda permitem que ao se multiplicar (2.135) por $[i(d) - i(\delta) + m]$ se obtenha a equação de onda

$$[\partial_\mu\partial^\mu + m^2]\psi = 0. \quad (2.141)$$

A proposta de se utilizar os geradores de $C\ell_4(\mathbf{M}, +\eta)$ para o papel das matrizes de Dirac foi inicialmente de Bohm e Hiley e está descrita no trabalho [11]. A motivação de Bohm e Hiley, naquele momento, era fazer uma ponte entre a álgebra de Clifford ortogonal e o desenvolvimento de Schönberg. Portanto, difere do caminho usado aqui nesta subseção, já que nosso todo desenvolvimento foi feito a partir e com base exclusiva na visão de Schönberg. Entretanto, a conclusão é similar: os operadores (d) e (δ) são os correspondentes à derivada e à co-derivada exterior. Além disso, a equação (2.135) é o análogo à equação de Dirac-Kähler para formas diferenciais [12].

Uma outra equação que pode ser apresentada na visão algébrica de Schönberg é a equação de *DKP*, que desenvolveremos a seguir.

2.3.2 A Álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau como subálgebra da álgebra de Clifford de W

Esta seção é dedicada a mostrar a importância do formalismo descrito nas seções anteriores e considera o surgimento da álgebra conhecida como álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau (*DKP*). Essa álgebra, como mostraremos, é uma subálgebra de $C\ell_n(\mathbf{W}_b, \Omega_+)$ e tem ampla aplicação.

Por completude faremos um breve histórico do desenvolvimento da equação de *DKP*, assim como da álgebra associada a ela.

2.3.2.1 Resumo histórico da equação de Duffin-Kemmer-Petiau e a sua álgebra associada

A construção de uma equação de onda relativística de primeira ordem capaz de descrever bósons de spin 0 e 1 envolve os esforços de muitos pesquisadores do início do século passado. Este resumo concentra a atenção nas contribuições de Kemmer, Duffin e Petiau [42–46], já que são os principais envolvidos.

A busca de equações de onda que descrevem partículas relativísticas é de longa data. Inicia-se no ano de 1926 com Klein, Gordon e Fock [61–63] ao descobrirem uma equação de onda relativística de segunda ordem que descreve bósons de spin 0. Dois anos depois, em 1928, Dirac publicou dois artigos [47, 48] nos quais apresenta a equação de primeira ordem (2.123) que descreve partículas relativísticas de massa m e spin $1/2$. Para que essa equação, conhecida hoje como equação de Dirac, fosse compatível com a equação de onda, Dirac teve que introduzir um conjunto de matrizes $\{\alpha_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ que obedecem às propriedades (2.125) e mostrou que cada componente do vetor ψ obedece a equação de Klein-Gordon-Fock. Além disso, como foi visto na seção 2.3.1, é importante notar que, pela propriedade (2.125), pode-se concluir que, inerente à equação de Dirac, há uma álgebra de Clifford associada.

Esta equação rapidamente obteve sucesso e foi capaz de prever teoricamente uma nova partícula, com a mesma massa e spin que o elétron, contudo com carga oposta, descoberta experimentalmente anos depois, em 1932 [64]. Visto o sucesso da descrição de partículas fermiônicas de spin $1/2$ através de uma equação linear de primeira ordem, iniciou-se uma busca para encontrar uma equação de onda relativística análoga à equação de Dirac que fosse apropriada para descrever partículas bosônicas. Louis de Broglie foi o primeiro a dar passos nesta direção. Ele acreditava que o fóton possuía massa de repouso não nula e tentou representá-lo a partir da combinação de dois leptons através de matrizes de ordem 16 formadas a partir de dois conjuntos de matrizes de Dirac. No entanto, foi seu aluno Gerard Petiau que conseguiu chegar numa equação de onda relativística para spin inteiro análoga à equação de Dirac. Em sua tese de doutoramento [42], Petiau verificou que a equação de Dirac é uma equação de autovalores linear no momento $\hat{p}_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu}$. Esta linearidade é necessária para haver compatibilidade com o princípio de superposição. Além disto, a equação (2.123) deve implicar na equação de onda, isto é, a equação de Dirac é uma equação tal que [42]

$$S\psi = +m\psi \quad \text{ou} \quad S\psi = -m\psi, \quad (2.142)$$

onde S é um operador linear no momento. Uma consequência direta de (2.142) é

$$S^2\psi = \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \psi = p_\mu p^\mu \psi, \quad (2.143)$$

em que aqui \hat{p}_μ denota o operador momento $-i\partial/\partial x^\mu$ com autovalor p_μ . Além disso, é usada a notação $\hat{p}^\mu = \eta^{\mu\nu} \hat{p}_\nu$ e $\hat{p}_\mu = \eta_{\mu\nu} \hat{p}^\nu$, com $[\eta^{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}]^{-1}$, onde η é o tensor métrico

de Minkowski. Veja que (2.143) é uma equação de onda e o valor de m pode ser dado por [42]

$$m = \sqrt{p_\mu p^\mu}. \quad (2.144)$$

O que Petiau buscava era uma equação linear nos momentos que permitisse, além dos estados (2.144), o estado com $m = 0$. A sua proposta foi usar uma função do operador S cujos autovalores fossem $\pm\sqrt{p_\mu p^\mu}$ e 0, de modo que a equação seria

$$f(S)\psi = 0. \quad (2.145)$$

Mostrou então que a função f do operador S , que tem como autovalores os citados acima, é da forma [42]

$$f(S) = S^3 - S\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu \quad (2.146)$$

Dessa forma, a equação

$$[S^3 - S\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu]\psi = 0 \quad (2.147)$$

implica em

$$S\psi = -m\psi; \quad S\psi = 0; \quad S\psi = +m\psi. \quad (2.148)$$

Seguindo o roteiro para a determinação das matrizes de Dirac, Petiau admitiu que o operador S fosse da forma

$$S = \beta_\mu\hat{p}^\mu, \quad (2.149)$$

e verificou que para que a equação (2.148) fosse obedecida, ao invés de (2.142), as matrizes β_μ deveriam obedecer às relações em um dos seguintes casos [42]

$$I \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_\mu^3 = \eta_{\mu\mu}\beta_\mu \quad \text{não há soma implícita} \\ \beta_\mu = \beta_\mu\beta_\nu^2 + \beta_\nu^2\beta_\mu \\ \beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = 0 \end{array} \right. \quad (2.150)$$

$$II \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_\mu^3 = g_{\mu\mu}\beta_\mu \quad \text{não há soma implícita} \\ \beta_\mu = \beta_\mu\beta_\nu^2 = \beta_\nu^2\beta_\mu \\ \beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu = 0 \end{array} \right. \quad (2.151)$$

O caso I corresponde a partículas de spin $-1, 0$ e $+1$, enquanto o caso II corresponde a partículas de spin $-1/2, 0$ e $+1/2$. Note que, apesar das matrizes β_μ anticomutar no caso

II, elas não são as matrizes de Dirac, pois não gozam da propriedade $\beta_\mu^2 = 1$. Entretanto, vamos somente apreciar o caso *I*, já que está associado aos spins inteiros.

Entretanto, o trabalho de Petiau ficou esquecido do mundo científico e, em particular, Kemmer só veio a ter dele conhecimento depois da Segunda Guerra Mundial [65]. Por outro lado, Proca [66] já havia estendido a teoria de Maxwell para campos massivos, o que corresponde a uma equação de segunda ordem para partículas massivas de spin 1. Kemmer notou que poderia escrever a equação de Proca por meio de um sistema de duas equações acopladas de primeira ordem e de forma análoga escreveu um sistema para o caso de spin 0 [44]. Ademais, ele notou que poderia escrever estas equações de forma explícita usando matrizes de ordem 5 e 10 para os casos de spin 0 e 1, respectivamente; no entanto, a álgebra obedecida por estas matrizes ainda era desconhecida por ele [44, 65]. O sistema de equações acopladas é dado por [43, 66]

$$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\hat{p}^\sigma\varphi^\rho = mF_{\mu\nu}, \quad (2.152)$$

$$\hat{p}^\mu F_{\mu\nu} = m\varphi_\nu, \quad (2.153)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = (\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma})$. Algum tempo depois, Kemmer apresentou o seu trabalho sobre a equação de Proca em um evento de físicos onde se encontrava Duffin [65], que lhe perguntou como era possível saber o spin da teoria. A resposta dada não agradou Duffin, o que o motivou trabalhar com este tema. E ao escrever um vetor ψ constituído das componentes de φ e das 6 componentes distintas de $F_{\mu\nu}$ em (2.152) e (2.153), Duffin conseguiu escrever uma equação de primeira ordem análoga a de Dirac [43], na forma

$$[\beta_\mu\hat{p}^\mu + m]\psi = 0 \quad (2.154)$$

onde as matrizes β_μ obedecem as relações (2.150) encontradas por Petiau sob outros argumentos. Além de verificar que (2.154) implica na equação de onda, Duffin também mostrou que outra consequência dessa equação é [43]

$$S_{\nu\mu}\hat{p}^\mu\psi - i\hat{p}_\nu\psi = m\beta_\nu, \quad (2.155)$$

com

$$S_{\mu\nu} = -i[\beta_\mu, \beta_\nu] \quad (2.156)$$

e obedecem a

$$S_{\mu\nu}^3 = S_{\mu\nu}, \quad (2.157)$$

$$[\beta_\lambda, S_{\mu\nu}] = i\delta_{\nu\lambda}\beta_\mu. \quad (2.158)$$

Utilizando as equações (2.157) e (2.158), mostra-se que o operador $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$, onde $L_{\mu\nu} = x_\mu\hat{p}_\nu - \hat{p}_\nu x_\mu$ comuta com $\beta_\mu\hat{p}^\mu$. Portanto, $S_{\mu\nu}$ pode ser identificado como

uma componente de spin com autovalores $-1, 0$ e 1 , respondendo à questão de Duffin. Petiau já havia chegado a esta conclusão, ao mostrar que a transformação infinitesimal de S correspondente à expressão infinitesimal do grupo de rotações [42]

$$x'_i = 1 + \varepsilon_{ij}x_j \quad (\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \ll 1) \quad (2.159)$$

é dada por

$$S = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}[\beta_i, \beta_j]. \quad (2.160)$$

Duffin também fez o mesmo procedimento para a equação escalar

$$\hat{p}^\mu \phi_\mu = mF, \quad (2.161)$$

$$\hat{p}_\mu F = m\phi_\mu \quad (2.162)$$

onde ϕ_μ é um vetor e F um escalar. Neste caso, as matrizes β_μ são de ordem 5 e além de obedecer as equações (2.150), obedecem a $\beta_\mu\beta_\nu\beta_\mu = 0$. Ainda é necessária a definição de $J_{\mu\nu}$ como a soma do momento orbital $L_{\mu\nu}$ com um spin $S_{\mu\nu}$ para que haja comutação com o operador $\beta_\mu\hat{p}^\mu$, entretanto, neste cenário, a média do operador de spin para uma solução de onda plana é igual a zero. As contribuições de Duffin estão sumarizadas em uma pequena carta para o editor da Physical Review em 1938 [43].

No ano seguinte, 1939, Kemmer fez um estudo minucioso das implicações da equação (2.154) para a física e das propriedades e álgebra das matrizes β_μ [45]. Conhecendo as regras de comutação (2.150) para essas matrizes, ele conseguiu sumariá-las na expressão

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = \eta_{\mu\nu}\beta_\rho + \eta_{\rho\nu}\beta_\mu, \quad (2.163)$$

A forma da expressão (2.163) é conhecida hoje como a relação fundamental da álgebra DKP. Além disto, Kemmer apresentou novas matrizes formadas a partir de β_μ [45, 67], ou seja,

$$\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - \eta_{\mu\mu} \quad (2.164)$$

que obedece às propriedades

$$\begin{cases} \eta_\mu^2 = \eta_{\mu\mu}^2, & \text{(sem soma implícita)} \\ \eta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\eta_\mu = 0, \\ \eta_\mu\eta_\nu - \eta_\nu\eta_\mu = 0, \\ \beta_\mu = \eta_\mu\beta_\mu = \beta_\mu\eta_\mu, & \text{(sem soma implícita)} \end{cases} \quad (2.165)$$

Neste contexto, Kemmer pôde definir um vetor adjunto a ψ como

$$\psi^\dagger := i\psi^*\eta_0 \quad (2.166)$$

e mostrou que

$$j_\mu := \psi^\dagger \beta_\mu \psi \quad (2.167)$$

pode ser interpretado como densidade de corrente, pois $\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu = 0$. O valor esperado de um observável A , em analogia com o caso do elétron, é definido como [45]

$$\bar{A} := -i \int \psi^\dagger \beta_0 A \psi dV. \quad (2.168)$$

O valor esperado do momento, em especial, pode ser escrito por meio do tensor momento energia simetrizado, definido como [45]

$$\Theta_{\mu\nu} := im \left[\psi^\dagger (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \psi - \eta_{\mu\nu} \psi^\dagger \psi \right], \quad (2.169)$$

obtendo-se desta forma

$$p_\mu = \bar{p}_\mu = -i \int \Theta_{\mu,0} dV. \quad (2.170)$$

Neste trabalho [45], Kemmer também mostra que escrevendo o momento angular em termos de (2.170), pode-se concluir que o spin é dado por (2.156). A questão relativa à invariância da equação (2.154) foi também provada por Kemmer. Outra contribuição de Kemmer foi mostrar que as únicas representações irredutíveis das matrizes β_μ são de dimensões 1, 5 e 10. A representação de uma dimensão é a representação trivial $\beta_\mu = 0$ e não tem significado físico, enquanto a representação de cinco dimensões leva a equação de Klein-Gordon-Fock, que corresponde ao caso de partícula com spin 0. A representação de dimensão dez recai nas equações de Proca e descrevem partículas de spin 1. Kemmer mostra que as matrizes β_μ podem ser escritas como uma combinação de dois conjuntos de matrizes $\{\alpha_\mu\}$ e $\{\alpha'_\mu\}$ de Dirac, da seguinte forma

$$\beta'_\mu = \alpha_\mu \otimes 1' + \alpha'_\mu \otimes 1. \quad (2.171)$$

No entanto, a representação (2.171) corresponde à soma das representações trivial, a cinco e a dez dimensões. Isto quer dizer que a equação

$$\left[\beta'_\mu \hat{p}^\mu + m \right] \psi = 0 \quad (2.172)$$

é a “soma” das equações de Klein-Gordon-Fock, Proca além da equação trivial $m\psi_{16} = 0$.

Fainberg e Pimentel [68] dividem o estudo da teoria de *DKP* em três períodos. O primeiro, entre 1939 e 1970, é dedicado ao próprio formalismo e investigações de interações entre mésons e o campo eletromagnético [68]. O segundo período, entre 1970 e 1980, foi marcado pela insatisfação. Nesta época, houve várias descobertas no mundo da física de partículas, tais como violações da paridade [68] e o desenvolvimento da teoria eletrofraca por Weinberg e Salam [69–72]. Essas novas descobertas motivaram os cientistas a verificar a

equivalência entre a teoria de *DKP* e de Klein-Gordon-Fock. Nesta busca pela equivalência, mostrou-se que, em certas condições o formalismo de primeira ordem de *DKP* leva a resultados diferentes daquele de segunda ordem. Essa prova da não equivalência desmotivou o interesse pela teoria de *DKP*, marcando o terceiro período entre 1980 e 2000.

Apesar de não haver uma prova geral da equivalência para casos onde se leva em conta interações e decaimento de partículas, pode-se mostrar a equivalência da matriz S no caso das interações com o campo de Maxwell, da teoria de Yang-Mills e até no caso de interações gravitacionais [68]. Além disso, a teoria de *DKP* permite o surgimento de acoplamentos que não aparecem nos formalismos de Klein-Gordon-Fock e de Proca. Muitos trabalhos vêm sendo feitos desde o ano de 2000, dentre eles a invariância de Galilei usando o espaço de de Sitter [15, 73, 74], teoria de campos massivo e não massivo no formalismo de *DKP* [49], interação colombiana [75], estudos sobre a equação de *DKP* com acoplamentos mínimos e não mínimos [76, 77], dinâmica hamiltoniana covariante na teoria de campos via formalismo de *DKP* [78], extensão da equação de *DKP* para violação da invariância de Lorentz [79] e alguns casos de interesse na cosmologia como estudo da equação de *DKP* no espaço curvo [80] e interação do campo de *DKP* de spin 0 com o campo gravitacional produzido por defeitos topológicos [81].

Ainda em meados dos anos 1990, Nedjadi e Barret [82] introduziram o chamado oscilador de *DKP*, que é uma espécie de oscilador harmônico relativístico para bósons, *i.e.* o análogo ao oscilador de Dirac [83]. O interesse no oscilador de Dirac está no seu uso como potencial de confinamento de quarks. Neste contexto, o oscilador de *DKP* é uma extensão do oscilador de Dirac e pode ser um candidato para o potencial de confinamento de quarks pesados [84]. Além disso, o oscilador de *DKP* é uma ferramenta matemática que permite estudar interações mais complexas. Trabalhos foram publicados nesta área, onde envolvem o oscilador de *DKP* no espaço não comutativo [85–87], propriedades térmicas [88], influência do campo magnético [87] e oscilador de *DKP* com álgebra de Snyder-de Sitter [84].

Já no contexto algébrico, Sanches-Velazuela e Zuazua-Vega [89] fizeram uma revisão da álgebra de *DKP* e a colocou em uma linguagem moderna, fazendo conexão com a álgebra exterior. Fichbach [90] relacionou a álgebra de Lie $so(n)$ com a álgebra de *DKP* e Okubo [50] mostra que a álgebra de *DKP* é um caso especial de uma superálgebra. Ainda no contexto algébrico, Fernandes e Vianna [13–15] seguem as ideias de Schonberg [2, 4, 5], aliados às ideias de Bohm e Holland em [11], escrevem a equação de *DKP* via $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ e, através de uma transformação de Wigner-Moyal, a escrevem no espaço de fase generalizado [10, 11]. Neste sentido, apresentamos aqui a álgebra de *DKP* será apresentada como uma subálgebra de $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Mas antes, é conveniente apresentar a álgebra de *DKP* de uma maneira formal, na linha de [89].

2.3.3 Alguns aspectos formais da álgebra de *DKP*

Sejam \mathbf{V} um espaço de dimensão n sobre o corpo dos reais ou complexos, B uma forma bilinear simétrica não degenerada sobre \mathbf{V} . A álgebra de *DKP* para o par (\mathbf{V}, B) , denotada por $D(\mathbf{V}, B)$, é definida como o quociente da álgebra tensorial pelo ideal I_{DKP} gerado pelo elemento $\mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{u} - B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{u}$. Ou seja¹⁰,

$$D(\mathbf{V}, B) := \frac{T(\mathbf{V})}{I_{DKP}}. \quad (2.173)$$

A multiplicação da álgebra é encontrada considerando $\eta : \mathbf{V} \mapsto D(\mathbf{V}, B)$ uma aplicação linear e observando que a projeção natural $\pi : T(\mathbf{V}) \mapsto D(\mathbf{V}, B)$ é um homomorfismo entre álgebras, *i.e.* π é uma aplicação linear dotada da propriedade $\pi(\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{u}) = \pi(\boldsymbol{\nu})\pi(\mathbf{u})$. Considerar a projeção um homomorfismo implica em dizer que o kernel de π é um ideal. Para mostrar isto, basta notar que

$$\pi(\ker(\pi) \otimes \mathbf{V}) = \pi(\ker(\pi))\pi(\mathbf{V}) = 0D(\mathbf{V}, B) = 0. \quad (2.174)$$

Dessa forma, ao se aplicar a projeção π no elemento gerador do ideal I_{DKP} , tem-se

$$\pi(\mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{u} - B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{u}) = 0, \quad (2.175)$$

de onde se pode obter a relação

$$\pi(\mathbf{u})\pi(\boldsymbol{\nu})\pi(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\pi(\mathbf{u}). \quad (2.176)$$

A aplicação η é chamada de *aplicação de DKP* e é tal que deixa o diagrama da Figura 2

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{\iota} & T(\mathbf{V}) \\ & \searrow \eta & \downarrow \pi \\ & & D(\mathbf{V}, B) \end{array}$$

Figura 2 – $\eta = \pi \circ \iota$

comutativo, onde ι é a injeção de \mathbf{V} em $T(\mathbf{V})$. Isto é

$$\eta = \pi \circ \iota. \quad (2.177)$$

A álgebra $D(\mathbf{V}, B)$ é universal. Em outras palavras, para o par (\mathbf{V}, B) , a aplicação de *DKP* η é única a menos de isomorfismos. Além disso, por ser uma composição de ι com π , a aplicação η obedece a

$$\eta(\mathbf{u})\eta(\boldsymbol{\nu})\eta(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\eta(\mathbf{u}). \quad (2.178)$$

¹⁰ Os teoremas e resultados não demonstrados nesta subseção podem ser encontrados em [89].

A relação (2.178) é a relação fundamental da álgebra DKP associada a (\mathbf{V}, B) . Esta relação é mais conhecida pela sua equivalente

$$\eta(\mathbf{u})\eta(\boldsymbol{\nu})\eta(\boldsymbol{\omega}) + \eta(\boldsymbol{\omega})\eta(\boldsymbol{\nu})\eta(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\eta(\boldsymbol{\omega}) + B(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})\eta(\mathbf{u}), \quad (2.179)$$

com $\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{V}$.

A álgebra $D(\mathbf{V}, B)$ é finita de dimensão $\binom{2n+1}{n}$ e mantém a \mathbb{Z} -gradação da álgebra tensorial. Neste sentido, é conveniente que se defina

$$D_k(\mathbf{V}, B) := \frac{T_k(\mathbf{V})}{I_{DKP}}. \quad (2.180)$$

Com esta definição, tem-se que a gradação de $D(\mathbf{V}, B)$ pode ser escrita como

$$D(\mathbf{V}, B) := \bigoplus_{k=0}^n D_k(\mathbf{V}, B). \quad (2.181)$$

2.3.4 Relação da álgebra de DKP com a álgebra exterior

A álgebra $D(\mathbf{V}, B)$ pode ter uma representação baseada na álgebra exterior [91]. Para mostrar isto, é necessário que se introduza em \mathbf{V} a correlação $\flat : \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}^*$. É conveniente que se defina o espaço¹¹

$$M_k(\mathbf{V}) := \bigwedge_k(\mathbf{V}) \oplus \bigwedge_{k+1}(\mathbf{V}), \quad (2.182)$$

onde seu elemento geral é denotado por $\varphi_{\{k\}} = \varphi_k + \varphi_{k+1}$, com $\varphi_k \in \bigwedge_k(\mathbf{V})$ e $\varphi_{k+1} \in \bigwedge_{k+1}(\mathbf{V})$. Posto isto, cada $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ define dois endomorfismos em M_k dados por

$$\begin{aligned} \eta_k(\mathbf{u}) : M_k &\longmapsto M_k \\ \eta_k(\mathbf{u})\varphi_{\{k\}} &= a(\mathbf{u})\varphi_k + b(\mathbf{u}_\flat)\varphi_{k+1} \end{aligned} \quad (2.183)$$

e

$$\begin{aligned} \eta_k^\dagger(\mathbf{u}) : M_k &\longmapsto M_k \\ \eta_k^\dagger(\mathbf{u})\varphi_{\{k\}} &= a^\dagger(\mathbf{u})\varphi_k + b^\dagger(\mathbf{u}_\flat)\varphi_{k+1} \end{aligned} \quad (2.184)$$

onde a, a^\dagger, b e b^\dagger são os operadores de criação e aniquilação da álgebra exterior definidos por (2.34–2.37). Pode-se mostrar [91] a partir das definições (2.183) e (2.184) que os η_k e η_k^\dagger obedecem a

$$\eta_k(\mathbf{u})\eta_k(\boldsymbol{\nu})\eta_k(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\eta_k(\mathbf{u}), \quad (2.185)$$

e

$$\eta_k^\dagger(\mathbf{u})\eta_k^\dagger(\boldsymbol{\nu})\eta_k^\dagger(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\eta_k^\dagger(\mathbf{u}), \quad (2.186)$$

¹¹ Nesta subseção usamos como base o trabalho [91] e adaptamos a sua linguagem para a notação que será usada nesta tese.

ou equivalentemente

$$\eta_k(\mathbf{u})\eta_k(\boldsymbol{\nu})\eta_k(\boldsymbol{\omega}) + \eta_k(\boldsymbol{\omega})\eta_k(\boldsymbol{\nu})\eta_k(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\eta_k(\boldsymbol{\omega}) + B(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})\eta_k(\mathbf{u}), \quad (2.187)$$

e

$$\eta_k^\dagger(\mathbf{u})\eta_k^\dagger(\boldsymbol{\nu})\eta_k^\dagger(\boldsymbol{\omega}) + \eta_k^\dagger(\boldsymbol{\omega})\eta_k^\dagger(\boldsymbol{\nu})\eta_k^\dagger(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\eta_k^\dagger(\boldsymbol{\omega}) + B(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})\eta_k^\dagger(\mathbf{u}). \quad (2.188)$$

Como $D(\mathbf{V}, B)$ é universal, então $\{\eta_k\}$ e $\{\eta_k^\dagger\}$ formam duas representações de $D(\mathbf{V}, B)$. Para uma futura comparação com a abordagem de Schönberg da álgebra de DKP via a álgebra $C\ell_n(\mathbf{W}_b, \Omega_+)$, é interessante que as definições de η_k e η_k^\dagger sejam estendidas para aplicações $\bigwedge(\mathbf{V}) \mapsto M_k(\mathbf{V})$ da seguinte maneira

$$\eta_k(u) := a(\mathbf{u})P_k + b(\mathbf{u}_b)P_{k+1} \quad (2.189)$$

$$\eta_k^\dagger(u) := a^\dagger(\mathbf{u})P_k + b^\dagger(\mathbf{u}_b)P_{k+1} \quad (2.190)$$

onde $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ e P_k é a projeção da álgebra exterior para o espaço $\bigwedge_k(\mathbf{V})$. É intuitivo verificar que as projeções P_k são idempotentes ortogonais, ou seja, obedecem a

$$P_k P_\ell = \delta_{k\ell} P_k. \quad (2.191)$$

Consequentemente, tem-se uma partição da unidade, ou seja,

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1. \quad (2.192)$$

Algumas observações podem ser feitas acerca dos espaços M_k [89]. *i)* Cada M_k tem uma estrutura de $D(\mathbf{V}, B)$ -módulo, já que as aplicações η_k são representações de $D(\mathbf{V}, B)$. *ii)* Para n par, $M_0, M_1, \dots, M_{n/2}$ e M_n são irredutíveis e dá a lista completa de $D(\mathbf{V})$ -módulos simples. *iii)* Se n for ímpar, $M_0, M_1, \dots, M_{(n-3)/2}$ são irredutíveis. O espaço $M_{(n-1)/2}$ é a soma direta de duas representações irredutíveis, cada um com $\binom{n}{(n-1)/2}$ dimensões; elas dão a lista completa de $D(\mathbf{V}, B)$ -módulos simples para n ímpar.

2.3.5 Relação da álgebra de DKP com a álgebra $C\ell_n(\mathbf{W}_b, \Omega_+)$

As representações irredutíveis da álgebra de DKP também podem ser encontradas dentro da álgebra $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ [4, 5]. Para obter nessas representações, é necessário definir um elemento especial da álgebra de $C\ell_n(\mathbf{W}_n, \Omega_+)$, ou seja,

$$(\Pi_p) := (P_{J_p}^{J_p}), \quad (2.193)$$

onde há uma soma implícita no conjunto multi-índice estritamente ascendente de tamanho p , J_p . Portanto, (2.193) escrita explicitamente, é dada por

$$\begin{aligned} (\Pi_p) &= \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^n (P_{j_1, \dots, j_p}^{j_1, \dots, j_p}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \dots, j_p=0}^n (e^{j_1}) \dots (e^{j_p})(P)(e_{j_p}) \dots (e_{j_1}). \end{aligned} \quad (2.194)$$

O fator de simetria $1/p!$ não é necessário em (2.193), pois se considera J_p um conjunto multi-índice estritamente ascendente. Através da regra de multiplicação (2.86) é fácil verificar que os elementos (Π_p) formam um conjunto de elementos idempotentes ortogonais. Isto é

$$(\Pi_p)(\Pi_q) = \delta_{p,q}(\Pi_p). \quad (2.195)$$

Isto quer dizer que (Π_p) possibilita uma partição da unidade de maneira que se tem:

$$\sum_{p=0}^n (\Pi_p) = 1_{Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)}, \quad (2.196)$$

com $(\Pi_0) := (P)$. Os elementos (Π_p) podem ser analisados como projetores da álgebra, pois, quando multiplicados pela esquerda (pela direita) do elemento geral do ideal $(P)Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+) (Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)(P))$ o projeta no seu elemento geral de ordem p , o que é consequência direta da regra de multiplicação (2.86). Também é possível mostrar que (Π_p) possui as propriedades

$$\begin{cases} (e^j)(\Pi_p) = (\Pi_{p+1})(e^j) \\ (\Pi_p)(e_j) = (e_j)(\Pi_{p+1}) \end{cases} \quad (2.197)$$

Para a obtenção das representações da álgebra de *DKP* no contexto de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ é conveniente que se defina o operador

$$\mathcal{D}_p = \left[(\vec{\Pi}_p) + (\vec{\Pi}_{p+1}) \right] \left[(\overleftarrow{\Pi}_p) + (\overleftarrow{\Pi}_{p+1}) \right] \quad (2.198)$$

e as relações

$$(\Pi_{-1}) = 0; \quad (\Pi_{n+1}) = 0. \quad (2.199)$$

Em (2.198) $(\vec{\Pi}_p) = (\Pi_p) \otimes 1$ e $(\overleftarrow{\Pi}_p) = 1 \otimes (\Pi_p)$ e se define a multiplicação $(N \otimes M)\psi = N\psi M$, para $\psi \in Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$.

Considerando \mathbf{W}_b e as notações das subseções 2.2.11 e 2.2.12, é possível mostrar que

$$\beta^{(p)} := \mathcal{D}_p \circ (b + a \circ b) \quad (2.200)$$

é uma representação da álgebra de *DKP* para o par (\mathbf{V}, g) . De fato, é suficiente aplicar $\beta^{(p)}$ a um vetor $\nu \in \mathbf{V}$ e conferir se obedece a regra fundamental de multiplicação da álgebra $D(\mathbf{V}, g)$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \beta^{(p)}(\mathbf{v}) &= \mathcal{D}_p \circ (b + a \circ b)(\mathbf{v}) \\ &= \mathcal{D}_p \circ (b(\mathbf{v}) + a(\mathbf{v}_b)) \\ &= \left[(\vec{\Pi}_p) + (\vec{\Pi}_{p+1}) \right] \left[(\overleftarrow{\Pi}_p) + (\overleftarrow{\Pi}_{p+1}) \right] [(b(\mathbf{v})) + (a(\mathbf{v}_b))] \\ &= [(\Pi_p) + (\Pi_{p+1})] [(\nu) + (\nu_b)] [(\Pi_p) + (\Pi_{p+1})]. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Escrevendo-se \mathbf{V}_b na base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e com $\mathbf{e}_{j,b} = \mathbf{e}^j$, pode-ser usar as propriedades (2.195), (2.197) e obter o elemento

$$\beta^{(p)}(\nu) = (\Pi_p)(\nu) + (\nu_b)(\Pi_p). \quad (2.202)$$

De forma similar, mostra-se que os $\beta^{(p)}$ aplicados a $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{V}_b$ obedecem a

$$\beta^{(p)}(\nu_1)\beta^{(p)}(\nu_2)\beta^{(p)}(\nu_1) = g(\nu_1, \nu_2)\beta^{(p)}(\nu_1), \quad (2.203)$$

ou equivalentemente,

$$\beta^{(p)}(\nu_1)\beta^{(p)}(\nu_2)\beta^{(p)}(\nu_3) + \beta^{(p)}(\nu_3)\beta^{(p)}(\nu_2)\beta^{(p)}(\nu_1) = g(\nu_1, \nu_2)\beta^{(p)}(\nu_3) + g(\nu_3, \nu_2)\beta^{(p)}(\nu_1), \quad (2.204)$$

com $\nu_3 \in \mathbf{V}_b$. A relação (2.203) ou sua equivalente (2.204) caracterizam a álgebra DKP para o par (\mathbf{V}, g) .

Como visto na subseção 2.3.3, a álgebra de *DKP* é uma álgebra universal. Portanto, a álgebra formada pelos elementos $\beta^{(p)}(\nu)$, para $\forall \nu \in \mathbf{V}_b$ é isomórfica a $D(\mathbf{V}, g)$ e, neste caso, constitui uma representação de $D(\mathbf{V}, g)$ cujo espaço de representação são os ideais mínimos da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Denotamos esta representação por $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$.

Aplicando $\beta^{(p)}$ aos elementos da base de \mathbf{V}_b podemos encontrar os geradores de $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$. De fato, usando (2.203) temos:

$$\beta_i^{(p)}\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} = g_{ij}\beta_i^{(p)}, \quad (2.205)$$

e de (2.203) obtemos:

$$\beta_i^{(p)}\beta_j^{(p)}\beta_k^{(p)} + \beta_k^{(p)}\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} = g_{ij}\beta_k^{(p)} + g_{kj}\beta_i^{(p)}, \quad (2.206)$$

onde foi empregada a notação $\beta_i := \beta(\mathbf{e}_i)$ e $g_{ij} := g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. A representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ é geral no sentido que vale para quaisquer valores de n e $0 \leq p < n$ e quaisquer métricas simétricas em \mathbf{V} . No caso específico em que \mathbf{V} é o espaço de Minkowski, a equação (2.206) corresponde as relações obtidas por Duffin, Kemmer e Petiau das matrizes envolvidas na equação de primeira ordem para partículas bosônicas de spin $-1, 0$ e 1 . Para $p = 0$, corresponde a representação escalar, para $p = 1$ tem-se a representação vetorial, para $p = 2$ a representação pseudo-vetorial e para $p = 3$ a representação pseudo-escalar [4, 5, 14].

O elemento $(\Pi_p) + (\Pi_{p+1})$ é idempotente e comuta com todos os $\beta_i^{(p)}$, portanto ele pode ser visto como a unidade da álgebra. Define-se então o símbolo

$$1_{(p)} := (\Pi_p) + (\Pi_{p+1}) \quad (2.207)$$

para representar a unidade de $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$.

Observe que apesar da definição (2.200) envolver a correlação $\flat : \mathbf{V} \mapsto \mathbf{U}$, e esta identificar a métrica g , a álgebra $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ nem sempre é uma subálgebra métrica de $Cl_n(\mathbf{W}, g)$. Neste sentido, pode-se definir uma álgebra $\mathfrak{D}_{n,p}(\mathbf{V})$ gerada pelos elementos

$$(\mathbf{e}_i)(\Pi_p), \quad (\Pi_p)(\mathbf{e}^i) \quad \text{e} \quad 1_{(p)}, \quad (2.208)$$

de forma que a álgebra $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ seja uma subálgebra de $\mathfrak{D}_{n,p}(\mathbf{V})$ quando $p \neq (n-1)/2$ [4,5]. Neste caso, $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ é uma álgebra afim mesmo que os elementos $\beta_j^{(p)}$ sejam definidos em termos das componentes de um tensor métrico.

Neste momento, é interessante que se faça uma comparação com a álgebra de *DKP* na representação da álgebra exterior. Para isto, é conveniente usar as propriedades (2.197) e escrever

$$\beta^p(\boldsymbol{\nu}) = (\Pi_p)(\boldsymbol{\nu}) + (\Pi_{p+1})(\boldsymbol{\nu}_\flat). \quad (2.209)$$

Com $\beta^p(\boldsymbol{\nu})$ escrito desta maneira, pode-se notar que a aplicação β^p está de alguma maneira relacionada com a aplicação de *DKP* da álgebra exterior η^\dagger , definida na forma (2.190). Uma forma de mostrar isto é notar que os operadores a^\dagger e b^\dagger de criação e aniquilação da álgebra exterior atuam pela direita, de modo que para $\varphi_{\{k\}} \in M_k$, tem-se

$$\eta^\dagger(\boldsymbol{\nu})\varphi_{\{k\}} = \varphi_k \wedge \boldsymbol{\nu} + \varphi_{k+1} \lrcorner \boldsymbol{\nu}. \quad (2.210)$$

Já $\beta^p(\boldsymbol{\nu})$ multiplicado à esquerda por um elemento do ideal à esquerda de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$, dado por $\psi_{(p)} = \psi_p + \psi_{p+1}$, resulta em

$$\beta^p(\boldsymbol{\nu})\psi_{(p)} = \psi_p(\boldsymbol{\nu}) + \psi_{p+1}(\boldsymbol{\nu}_\flat). \quad (2.211)$$

A diferença entre as duas formulações, neste caso, é que os vetores φ_k da álgebra exterior são construídos a partir de k multiplicações de vetores através da multiplicação exterior. Por outro lado, os vetores ψ_p do ideal à esquerda de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ são construídos a partir da multiplicação de p elementos covariantes da álgebra multiplicados entre si com o elemento (P) , que representa o estado de vácuo. Além disto, a multiplicação em questão é a multiplicação de Clifford que é pode ser entendida como a soma da operação de criação e aniquilação da álgebra exterior. Para simples vetores, corresponde à multiplicação exterior somada com a forma bilinear simétrica do espaço.

Dando continuidade ao estudo da álgebra de *DKP* na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$, observe que a introdução de uma correlação em \mathbf{V} permite que se construa não uma, mas duas álgebras de *DKP*. Isto segue da definição das duas álgebras de Clifford por meio da aplicação γ^\pm definida em (2.96). Tem-se nesse caso

$$\beta_p^\pm := \mathcal{D}_p \circ \gamma^\pm, \quad (2.212)$$

que leva às relações

$$\beta_p^\pm(\boldsymbol{\nu}_1)\beta_p^\pm(\boldsymbol{\nu}_2)\beta_p^\pm(\boldsymbol{\nu}_1) = \pm g(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)\beta_p^\pm(\boldsymbol{\nu}_1), \quad (2.213)$$

para $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{V}_b$, ou se aplicada às bases de \mathbf{V}_b , leva à

$$\beta_{i,p}^\pm \beta_{k,p}^\pm \beta_{i,p}^\pm = \pm g_{ij} \beta_{i,p}^\pm \quad (2.214)$$

ou a sua equivalente

$$\beta_{i,p}^\pm \beta_{k,p}^\pm \beta_{j,p}^\pm + \beta_{j,p}^\pm \beta_{k,p}^\pm \beta_{i,p}^\pm = \pm g_{ik} \beta_j^\pm \pm g_{jk} \beta_i^\pm, \quad (2.215)$$

com $\beta_{i,p}^\pm := \beta_p^\pm(\mathbf{e}_i)$.

As os elementos β_p^\pm foram introduzidos por Fernandes e Vianna em [13]. Eles relacionaram os β_p^\pm com a equação de *DKP* e sua adjunta na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ o que será visto na próxima subseção.

2.3.6 A equação de *DKP* na representação $\mathcal{D}_p(V, g)$

A equação de *DKP* na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ foi introduzida por Fernandes e Vianna [13] ao combinar o operador diferencial $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ com os geradores da álgebra nesta representação. Deste modo, a equação de *DKP* é dada por

$$\left[i \beta_\mu^p \partial^\mu - m \mathbf{1}_{(p)} \right] \psi = 0, \quad (2.216)$$

onde

$$\beta_\mu^p = (\Pi_p)(\mathbf{e}_\mu) + (\mathbf{e}_{\mu b})(\Pi_p) \quad (2.217)$$

$$\mathbf{1}_{(p)} = (\Pi_p) + (\Pi_{p+1}), \quad (2.218)$$

e $\psi \in C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$. Os elementos (Π_p) e (Π_{p+1}) projetam ψ nas suas partes de ordem p e $p+1$, respectivamente, de modo a serem elas as únicas partes que são consideradas na equação (2.216). Portanto a equação de *DKP* pode ser reescrita como

$$\left[i \beta_\mu^p \partial^\mu - m \mathbf{1}_{(p)} \right] \psi_{(p)} = 0, \quad (2.219)$$

com

$$\psi_{(p)} = \psi_p + \psi_{p+1} \quad (2.220)$$

onde $\psi_k \in (\Pi_k)C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$. Para reescrever a equação adjunta de (2.219), é oportuno que se defina

$$\overrightarrow{\beta}_\mu^p = \beta_\mu^p \otimes \mathbf{1}_{(p)} \quad (2.221)$$

$$\overleftarrow{\beta}_\mu^p = \mathbf{1}_{(p)} \otimes \beta_\mu^p \quad (2.222)$$

de modo que (2.219) fica

$$\left[i \overrightarrow{\beta}_\mu^p \partial^\mu - m \mathbf{1}_{(p)} \right] \psi_{(p)} = 0 \quad (2.223)$$

e sua adjunta é dada por

$$\left[i \overleftarrow{\beta}_\mu^p \partial^\mu - m 1_{(p)} \right] \psi_{(p)} = 0 \quad (2.224)$$

Os $\overrightarrow{\beta}_\mu^p$ e $\overleftarrow{\beta}_\mu^p$ se relacionam com os $\beta_{\mu,p}^+$ e $\beta_{\mu,p}^-$. Esta relação é feita através da introdução dos elementos

$$\eta_\mu^p := 2\beta_\mu^p - g_{\mu\mu}, \quad (2.225)$$

que obedecem a

$$\begin{cases} (\eta_\mu^p)^2 = g_{\mu\mu}^2 \\ \eta_\mu^p \beta_\nu^p + \beta_\nu^p \eta_\mu^p = 2g_{\mu\nu} \beta_\nu^p \\ \eta_\mu^p \eta_\nu^p - \eta_\nu^p \eta_\mu^p = 4g_{\mu\nu} i S_{\mu\nu}^p \\ \eta_\mu^p \beta_\mu^p = \beta_\mu^p \eta_\mu^p = g_{\mu\mu} \beta_\mu^p \end{cases} \quad (2.226)$$

onde

$$S_{\mu\nu}^p = -i [\beta_\mu^p, \beta_\nu^p] \quad (2.227)$$

é o operador de spin na teoria de *DKP* na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$. As equações (2.226) são generalizações das relações (2.165) para quaisquer espaços quadráticos de dimensão n e tensor métrico g . Veja que a terceira equação de (2.226) fornece outra representação do operador de spin em termos dos elementos η_μ^p , isto é,

$$S_{\mu\nu}^p = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} [\eta_\mu^p, \eta_\nu^p], \quad (2.228)$$

onde $[g^{\mu\nu}]$ é a matriz inversa de $g = [g_{\mu\nu}]$. Contudo a representação (2.228) é um ganho apenas algébrico, pois com o surgimento do elemento inverso do tensor métrico, pode-se haver indeterminações no caso de $g^{\mu,\nu} \neq 0$, como é o caso das métricas euclidianas e pseudo euclidianas. Veja que para tais métricas, $g^{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$ e $[\eta_\mu^p, \eta_\nu^p] = 0$ para $\mu = \nu$, o que daria sempre $S_{\mu\nu}^p = 0$. Entretanto, para métricas diagonais, a terceira equação de (2.227) se torna a recíproca daquela introduzida por Kemmer em (2.165).

É apropriado que se defina os operadores

$$\overline{\overline{\eta}}_\mu^p = 2 \overline{\overline{\beta}}_\mu^p - g_{\mu\mu} \quad (2.229)$$

e

$$\overline{\overline{\eta}}^p = \overline{\overline{\eta}}_1^p \dots \overline{\overline{\eta}}_n^p, \quad (2.230)$$

de maneira que seja possível definir outro operador

$$\omega^p = \overleftarrow{\overline{\overline{\eta}}}^p \overrightarrow{\overline{\overline{\eta}}}^p = \overleftarrow{\eta}^p \overrightarrow{\eta}^p \quad (2.231)$$

de modo que $\omega^p \beta_\mu^p = \eta^p \beta_\mu^p \eta^p$. Utilizando as relações (2.226) é possível mostrar que ω^p tem a seguinte propriedade:

$$\omega^p \beta_\mu^p = \beta_\mu^p \eta_\mu^p \prod_{k \neq \mu}^n (2g_{k\mu} - \eta_\mu^p). \quad (2.232)$$

Para métricas diagonais, como é o caso das métricas euclidianas e pseudoeuclidianas, tem-se que

$$\omega^p \beta_\mu^p = (-1)^{n-1} \beta_\mu^p \omega^p. \quad (2.233)$$

Neste caso, isto quer dizer que ω^p comuta com todos os β_μ^p para espaços euclidianos ou pseudoeuclidianos de dimensão ímpar e anticomutam com todos os β_μ^p para espaços euclidianos e pseudoeuclidianos de dimensão par. Além disso, tem-se que

$$(\omega^p)^2 = (g_{11})^4 \dots (g_{nn})^4. \quad (2.234)$$

Desta maneira, para os espaços euclidianos e pseudoeuclidianos de dimensão par, tem-se

$$\omega^p \beta_\mu^p = -\beta_\mu^p \omega^p, \quad (2.235)$$

$$(\omega^p)^2 = 1. \quad (2.236)$$

Segue que, os $\beta_{\mu,p}^\pm$ se relacionam como os $\overline{\beta}_\mu^p$ da seguinte maneira

$$\beta_{\mu,p}^+ = \overrightarrow{\beta}_\mu^p; \quad \beta_{\mu,p}^- = \omega^p \overleftarrow{\beta}_\mu^p. \quad (2.237)$$

Pode-se ainda definir novos operadores

$$b_\mu^p = \frac{1}{2} (\beta_{\mu,p}^+ + \beta_{\mu,p}^-); \quad b_\mu^{p\dagger} = \frac{1}{2} (\beta_{\mu,p}^+ - \beta_{\mu,p}^-), \quad (2.238)$$

que obedecem às regras de anticomutação

$$[b_\mu^p, b_\nu^p]_+ = [b_\mu^{p\dagger}, b_\nu^{p\dagger}]_+ = 0, \quad (2.239)$$

$$[b_\mu^{p\dagger}, b_\nu^p]_+ = g_{\mu\nu} (\Pi_p) + b_\mu^{p\dagger} b_\nu^p - b_\mu^{p-1\dagger} b_\nu^{p-1} \quad (2.240)$$

As relações (2.229) e (2.230) são generalizações para qualquer espaço quadrático das relações que Fernandes [13] introduziu, para o caso do espaço de Minkowski. Naquela situação, Fernandes estava interessado em estudar no espaço de fase partículas de *DKP* escalares. Como o espaço de Minkowski é de dimensão par, as relações (2.235) e (2.236) são válidas e portanto pode-se relacionar os $\beta_{\mu,p}^\pm$ com os $\overline{\beta}_\mu^p$ como em (2.238). Além disso, para estudar partículas escalares, é necessário considerar $p = 0$. Deste modo, a relação de anticomutação diferente de zero em (2.240) fica

$$[b_\mu^{0\dagger}, b_\nu^0]_+ = g_{\mu\nu} (P) + b_\mu^{0\dagger} b_\nu^0, \quad (2.241)$$

pois, tem-se que $b_\mu^{-1\dagger} = b_\nu^{-1} = 0$. Em vista disso, este desenvolvimento é uma generalização do método proposto por Fernandes [13], uma vez que é válido para quaisquer espaços quadráticos. O vínculo de (2.237) com (2.235) e (2.236) não é necessário, já que se pode obter (2.240) usando a representação $\beta_{\mu,p}^\pm = (\Pi_p)(\mathbf{e}_\mu) \pm (\mathbf{e}_{\mu b})(\Pi_p)$. Além disto, a equação (2.240) é válida para qualquer valor permitido de p . Em [13], a representação (2.237) é importante para encontrar a equação de *DKP* no espaço de fase para partículas com interação. Desta maneira, para utilizar a mesma técnica que Fernandes [11, 13, 14], a generalização de (2.241) para (2.240) deve se limitar a espaços euclidianos e pseudo euclidianos de dimensão par. Em [15], Fernandes estuda a estrutura simplética da álgebra de *DKP* galileana utilizando o espaço euclidiano de dimensão 3 imerso num espaço de dimensão 5, com uma métrica não diagonal dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.242)$$

Vale ressaltar que, nesse caso, Fernandes *et. al.* também estavam interessados somente no caso escalar e propuseram um novo conjunto de elementos η_μ^0 de forma que se mantivesse a anticomutatividade de ω^0 com os β_μ^0 . Com o formalismo descrito aqui, teríamos dificuldade na equação (2.232) para verificar esta anticomutatividade nos casos de métricas não diagonais. Especificamente, no caso da métrica (2.242), teríamos $\beta_4^p \eta_4^p = \beta_5^p \eta_5^p = 0$ e portanto $\omega^p \beta_4^p = \omega^p \beta_5^p = 0$. No entanto, a generalização é suficiente para tratar a equação de *DKP* no espaço de fase para partículas escalares e vetoriais livres.

Para finalizar esta subseção sobre a estrutura da equação de *DKP* sob a representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$, vale a pena fazer algumas observações. Na subseção anterior, foi mostrado que a equação de Dirac na representação $\mathcal{C}\ell_4(\mathbf{M}, +\eta)$ pode ser escrita como uma equação análoga a de Dirac-Kähler para formas diferenciais (2.135), através do operador de Dirac. Estes operadores também aparecem no contexto da álgebra de *DKP* na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$, ao se explicitar o gerador β_μ^p da álgebra de *DKP* combinado com o operador diferencial ∂^μ , isto é,

$$\begin{aligned} \beta_\mu^p \partial^\mu &= (\Pi_p)(\mathbf{e}_\mu) \partial^\mu + (\mathbf{e}_{\mu b})(\Pi_p) \partial^\mu \\ &= \mathcal{D}_p((D)). \end{aligned} \quad (2.243)$$

Definindo o operador de *DKP* como

$$\mathcal{K}_p := \mathcal{D}_p((D)) \quad (2.244)$$

segue que que a equação de *DKP* pode ser escrita como:

$$[i\mathcal{K}_p - m1_p] \psi_{(p)} = 0. \quad (2.245)$$

Essa equação pode ser estendida para

$$[i\mathcal{K} - m]\psi = 0, \quad (2.246)$$

onde

$$\mathcal{K} = \sum_{p=0}^n \mathcal{K}_p \quad (2.247)$$

e ψ é um elemento geral do ideal $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$, uma forma interessante de escrever (2.246), pois permite extrair o setor de spin com uma escolha adequada do parâmetro p .

Como expusemos anteriormente, uma questão de interesse é o estudo da equivalência da equação de *DKP* com as equações de Klein-Gordon-Fock e Proca na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ assunto que desenvolveremos nas próximas subseções.

2.3.7 Equivalência da equação de DKP com as equações de Klein-Gordon-Fock e Proca no formalismo baseado na representação $\mathcal{D}_p(V, g)$

Em 1953 Fujiwara [92] propôs operadores capazes de selecionar os setores de spin 0 e 1 da equação de *DKP* e mostrou que esses setores são equivalentes à equação de Klein-Gordon-Fock e de Proca, respectivamente. Nesta subseção vamos mostrar que com uma escolha adequada de elementos da álgebra $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$, esses obedecem as mesmas propriedades que as introduzidas por Fujiwara e, desta maneira, podemos mostrar dentro de nossa formulação a equivalência de *DKP* com as equações de Klein-Gordon-Fock e de Proca.

2.3.7.1 A equivalência da equação de DKP com a equação de Klein-Gordon-Fock

Os operadores propostos em [92] para extrair o setor escalar da equação de *DKP* no espaço de Minkowski, ou seja, o setor de spin 0 são

$$\mathcal{P} := -\beta_0^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2, \quad (2.248)$$

e

$$\mathcal{P}_\mu := \mathcal{P} \beta_\mu, \quad (2.249)$$

onde $\{\beta_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ é um conjunto de 4 matrizes 5×5 que obedecem a álgebra de *DKP* e β_0 corresponde à coordenada temporal. As propriedades importantes para a demonstração da equivalência são

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \quad (2.250)$$

$$\mathcal{P}_\mu \beta_\nu = \eta_{\mu\nu} \mathcal{P}, \quad (2.251)$$

$$\mathcal{P} S_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} \mathcal{P} = 0, \quad (2.252)$$

$$\mathcal{P}_\mu S_{\sigma\nu} = \eta_{\mu\sigma} \mathcal{P}_\nu - \eta_{\mu\nu} \mathcal{P}_\sigma, \quad (2.253)$$

onde $S_{\mu\nu} = -i[\beta_\mu, \beta_\nu]$ é o operador de spin e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. Usando essas propriedades é possível mostrar que a equação de *DKP*

$$[i\beta_\mu\partial_\mu - m]\psi = 0 \quad (2.254)$$

é equivalente a

$$[\partial_\mu\partial^\mu + m^2]\mathcal{P}\psi = 0, \quad (2.255)$$

ou seja, o vetor $\mathcal{P}\psi$ obedece a equação de Klein-Gordon-Fock (2.255), onde ψ representa a partícula *DKP* escalar.

Para nosso desenvolvimento na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ propomos os seguintes operadores

$$\mathcal{P}_p := (P)(\Pi_p) + (\bar{P})(\Pi_{p+1}) \quad (2.256)$$

e

$$\mathcal{P}_{p,\mu} := \mathcal{P}_p\beta_\mu^p \quad (2.257)$$

que obedecem a

$$\mathcal{P}_p^2 = \mathcal{P}_p \quad (2.258)$$

$$\mathcal{P}_{p,\mu}\beta_\nu^p = g_{\mu\nu}\mathcal{P}_p \quad (2.259)$$

$$\mathcal{P}_p S_{\mu\nu}^p = S_{\mu\nu}^p \mathcal{P}_p = 0, \quad (2.260)$$

$$\mathcal{P}_{\mu,p} S_{\sigma\nu}^p = g_{\mu\sigma}\mathcal{P}_{p,\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{P}_{p,\sigma}, \quad (2.261)$$

onde $S_{\mu\nu}^p = -i[\beta_\mu^p, \beta_\nu^p]$ é o operador de spin e $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço quadrático \mathbf{V} de dimensão n . Para mostrar a equivalência da equação de *DKP* com a equação de Klein-Gordon-Fock, multipliquemos à esquerda a equação de *DKP* por \mathcal{P}_p . Temos então:

$$i\mathcal{P}_{p,\mu}\partial_\mu\psi_{(p)} = m\mathcal{P}_p\psi_{(p)}. \quad (2.262)$$

Por outro lado, multiplicando a equação de *DKP* à esquerda por $\mathcal{P}_{p,\mu}$ obtemos

$$i\mathcal{P}_p\partial^\mu\psi_{(p)} = m\mathcal{P}_{p,\mu}\psi_{(p)}. \quad (2.263)$$

Substituindo (2.263) em (2.262), segue que

$$i\frac{i}{m}\partial_\mu\partial^\mu\mathcal{P}_p\psi_{(p)} = m\mathcal{P}_p\psi_{(p)}, \quad (2.264)$$

ou

$$[\partial_\mu\partial^\mu + m^2]\mathcal{P}_p\psi_{(p)} = 0, \quad (2.265)$$

isto é, a equação de Klein-Gordon-Fock para o vetor $\mathcal{P}_p\psi_{(p)}$. É pertinente que se obtenha a forma de $\mathcal{P}_p\psi_{(p)}$. Neste sentido, observemos que a ação de (P) e (\bar{P}) em (Π_p) é dada por

$$(P)(\Pi_p) = \delta_{0,p}(\Pi_p) \quad (2.266)$$

e

$$(\bar{P})(\Pi_p) = \delta_{n,p}(\Pi_p) \quad (2.267)$$

Desta forma, obtemos

$$\mathcal{P}_p\psi_{(p)} = \delta_{0,p}A_{J_p}(P) + \delta_{n,p+1}(\psi_{p+1}), \quad (2.268)$$

com $\psi_p = A_{J_p}(P^{J_p})$. Isto quer dizer que $\mathcal{P}_p\psi_{(p)}$ só é diferente de zero quando $p = 0$ ou $p = n - 1$. Para o caso do espaço de Minkowski, o valor $p = 0$ corresponde à representação escalar e para $p = 4 - 1 = 3$ corresponde à representação pseudo escalar [4, 5, 14], como era de se esperar. Vale destacar que este procedimento aqui proposto é geral, no sentido de que é válido para quaisquer espaços quadráticos.

É importante que se tenha a forma da equação de *DKP* quando o vetor é dado por (2.268). Esta equação se tornaria duas, uma para cada valor permitido de p . Para $p = 0$, fica

$$[(\delta) - im]\psi_0 = 0, \quad (2.269)$$

onde $\psi_0 = A_{J_0}(P)$ é um elemento de ordem zero do ideal à esquerda de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Agora para a representação pseudoescalar, ou seja, para $p = n - 1$, a equação de *DKP* fica,

$$[(d) + im]\psi_n = 0, \quad (2.270)$$

em que ψ_n é um pseudoescalar do ideal. Isto é, um múltiplo de $S(P)$ ¹².

2.3.8 Equivalência da equação de *DKP* com a equação de Proca

Para o caso da equivalência com a equação de Proca, ou seja, a extração do setor de spin 1 da equação de *DKP*, Fujiwara [92] propôs os operadores

$$\mathcal{R}_\mu = \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2(\beta_0^2 - \eta_{\mu 0}) \quad (2.271)$$

e

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_\mu\beta_\nu, \quad (2.272)$$

com as propriedades

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = -\mathcal{R}_{\nu\mu}, \quad (2.273)$$

$$S_{\mu\nu}\mathcal{R}_\rho = 0, \quad (2.274)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}\beta_\alpha = \mathcal{R}_\mu\eta_{\nu\alpha} - \mathcal{R}_\nu\eta_{\mu\alpha}, \quad (2.275)$$

¹² Ver a equação (2.133).

Utilizando as definições (2.271–2.272) e a propriedade (2.275), pode-se mostrar que a equação de *DKP* se torna

$$\partial^\nu (\partial_\nu \mathcal{R}_\mu \psi - \partial_\mu \mathcal{R}_\nu \psi) + m^2 \mathcal{R}_\mu \psi = 0, \quad (2.276)$$

que é a equação de Proca para partícula livre de spin 1.

Em nosso desenvolvimento na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$, propomos os operadores

$$\mathcal{R}_\mu^p = - \left[(\bar{N}_1) \dots (\bar{N}_{n-1}) (\mathbf{e}_{nb}) (\mathbf{e}_\mu) (\Pi_p) + (N_1) \dots (N_{n-1}) (\mathbf{e}_n) (\mathbf{e}_{\mu b}) (\Pi_{p+1}) \right] \quad (2.277)$$

e

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}^p = \mathcal{R}_\mu^p \beta_\nu^p. \quad (2.278)$$

Esses novos operadores obedecem a propriedades análogas às (2.273–2.275), ou seja,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}^p = -\mathcal{R}_{\nu\mu}^p, \quad (2.279)$$

$$S_{\mu\nu}^p \mathcal{R}_\rho^p = 0, \quad (2.280)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \beta_\alpha = \mathcal{R}_\mu^p g_{\nu\alpha} - \mathcal{R}_\nu^p g_{\mu\alpha}, \quad (2.281)$$

Então para demonstrar a equivalência da equação de *DKP* com a equação de Proca na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$, multipliquemos a equação de *DKP* à esquerda por \mathcal{R}_μ^p , o que resulta em

$$\partial^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}^p \psi_{(p)} = -im \mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)} \quad (2.282)$$

Por outro lado, ao multiplicar a equação de *DKP* por $\mathcal{R}_{\mu\nu}^p$ também à esquerda, obtemos

$$\frac{i}{m} (\partial_\nu \mathcal{R}_\mu^p - \partial_\mu \mathcal{R}_\nu^p) \psi_{(p)} = \mathcal{R}_{\mu\nu}^p \psi_{(p)}. \quad (2.283)$$

Agora, substituindo a equação acima em (2.282), segue que

$$\partial^\nu (\partial_\nu \mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)} - \partial_\mu \mathcal{R}_\nu^p \psi_{(p)}) + m^2 \mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)} = 0, \quad (2.284)$$

que é a equação de Proca na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$. Além disso, observe que se aplicada a derivada ∂_ν em (2.284), chega-se à seguinte condição de vínculo

$$\partial_\mu \mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)} = 0. \quad (2.285)$$

E quando essa condição de vínculo é aplicada em (2.284), resulta em

$$\left[\partial_\nu \partial^\nu + m^2 \mathbf{1}_p \right] \mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)} = 0, \quad (2.286)$$

que é a equação de onda para o vetor $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$. É interessante que se observe a forma explícita desse vetor para $\psi_{(p)} = \psi_p + \psi_{p+1}$, onde $\psi_k = A_{J_k}(P^{J_k})$ é a parte de ordem k de

um elemento do ideal $C\ell_n(\mathbf{W}, \omega_+)(P)$. Uma aplicação direta da definição (2.271) em $\psi_{(p)}$ resulta em [vide apêndice A]

$$\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)} = -\delta_{n-2,p} g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(P) - \delta_{p,1} g_{nn} A_\mu(P^n). \quad (2.287)$$

Observe que o vetor de Proca $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$ só é não trivial nos casos em que $p = 1$ e $p = n - 2$. Esses casos correspondem ao caso vetorial e pseudovetorial. No caso do espaço de Minkowski, onde $n = 4$, tem-se que a partícula vetorial é o caso de $p = 1$ e a partícula pseudovetorial é o caso de $p = 2$.

Concluindo esta subsecção analisemos como se comporta $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$ dado por (2.287) na equação de *DKP* (2.216). A equação desmembraria em duas:

$$[i\beta_\nu^p \partial^\nu - m1_p] \delta_{n-2,p} g_{n,\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(P) = 0, \quad (2.288)$$

e

$$[i\beta_\nu^p \partial^\nu - m1_p] \delta_{p,1} g_{nn} A_\mu(P^n) = 0. \quad (2.289)$$

Note que em (2.288) $\delta_{n-2,p} g_{n,\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(P)$ é de ordem 0 e quando multiplicado por β_ν^p e 1_p para $p > 0$, os termos se anulam. Então esta equação só faz sentido para $p = 0$. Para isto acontecer, deve-se ter $n = 2$. Neste caso, a equação (2.288) torna-se

$$[(\delta) - im] g_{2,\mu} A_1(P) = 0. \quad (2.290)$$

Quanto à equação (2.290) observe. Observe que as equações (2.268) e (2.249) são do mesmo tipo que a equação (2.290). Isto significa que para o caso bidimensional, ou seja, para $n = 2$, e para $p = 0$, é possível obter uma equação de Proca e cada componente de seu vetor de estado obedece a equação de Klein-Gordon-Fock na representação escalar. Já a equação (2.289) é válida para qualquer valor de n e para $p = 1$. Desenvolvendo essa equação para esses valores de n e p , obtém-se

$$[(\delta) - im] g_{nn} A_\mu(P^n) = 0. \quad (2.291)$$

A equação (2.287) permite fazer algumas observações. A primeira delas é que a teoria de *DKP* baseada na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ é válida para quaisquer espaços quadráticos de dimensão finita. Nessa representação é possível, por exemplo, estudar a equação de Proca em espaços de baixas dimensões. Especificamente, para um espaço bidimensional, a equação de Proca é válida tanto para $p = 0$ quanto para $p = 1$, pois a desigualdade $0 \leq p < 2$ é observada. Outra opção seria estudar a equação de Proca em outro espaço que não o espaço de Minkowski, como, por exemplo, no espaço de de Sitter [15]. A segunda observação é que para espaços não diagonais, especificamente onde $g_{nn} = 0$, como é o caso da métrica de de Sitter (2.242), a única representação que daria soluções não triviais é representação pseudovetorial.

A próxima subsecção analisa a equação de *DKP* baseada na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ para o caso não massivo

2.3.8.1 O estudo da equação de *DKP* não massiva na representação $\mathcal{D}_p(V, g)$

Kruglov [49] propôs uma equação para partículas vetoriais massivas e não massivas no formalismo de *DKP*. Ele assim generaliza a equação de Proca que é escrita como um sistema acoplado de primeira ordem como em (2.142–2.153) e propõe duas constantes m_1 e m_2 ao invés de apenas uma. Em seu desenvolvimento [49] escreve a equação de *DKP* em termos dessas novas constantes como

$$\left[i\beta_\mu \partial^\mu - m_1 \bar{\mathbf{P}} - m_2 \mathbf{P} \right] \Psi(x) = 0, \quad (2.292)$$

onde β_μ são matrizes quadradas de ordem 10. O vetor

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_\mu(x) \\ \psi_{[\mu\nu]}(x) \end{pmatrix} \quad (2.293)$$

é formado pelas 4 componentes ψ_μ de um vetor ψ e pelas seis componentes distintas $\psi_{[\mu\nu]}$ do tensor eletromagnético. Os operadores $\bar{\mathbf{P}}$ e \mathbf{P} são projetores que extraem as 4 componentes de ψ e as seis componentes de $\psi_{[\mu\nu]}$, respectivamente, e obedecem as propriedades

$$\bar{\mathbf{P}}^2 = \bar{\mathbf{P}}; \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}; \quad \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{P} = 1; \quad \bar{\mathbf{P}}\mathbf{P} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{P}} = 0; \quad (2.294)$$

$$\beta_\mu \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\beta_\mu = \beta_\mu; \quad \beta_\mu \mathbf{P} + \mathbf{P}\beta_\mu = \beta_\mu. \quad (2.295)$$

Kruglov mostra que a massa da partícula física descrita por (2.292) é dada por

$$m = \sqrt{m_1 m_2}, \quad (2.296)$$

de maneira que, para $m_1 = m_2 = m$, a equação (2.292) se torna a equação de *DKP* usual

$$[i\beta_\mu \partial^\mu - m] \Psi(x) = 0. \quad (2.297)$$

Para a equação de *DKP* não massiva, que corresponde à equação de Maxwell, é atribuído $m_1 = 0$ e (2.292) fica

$$[i\beta_\mu \partial^\mu - m_2 \mathbf{P}] \Psi(x) = 0. \quad (2.298)$$

Nesta subseção obteremos, usando a representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V})$ a equação correspondente a (2.298). De fato, ao se observar as relações (2.294–2.295) verifica-se que na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V})$ os projetores (Π_p) e (Π_{p+1}) correspondem aos entes $\bar{\mathbf{P}}$ e \mathbf{P} , pois

$$(\Pi_p)^2 = (\Pi_p); \quad (\Pi_{p+1})^2 = (\Pi_{p+1}); \quad (\Pi_p) + (\Pi_{p+1}) = 1_p; \quad (2.299)$$

$$(\Pi_p)(\Pi_{p+1}) = (\Pi_{p+1})(\Pi_p) = 0; \quad \beta_\mu^p(\Pi_p) + (\Pi_p)\beta_\mu^p = \beta_\mu^p; \quad (2.300)$$

$$\beta_\mu^p(\Pi_{p+1}) + (\Pi_{p+1})\beta_\mu^p = \beta_\mu^p, \quad (2.301)$$

Além disso, para um elemento $\psi_{(p)} = \psi_p + \psi_{p+1}$, tem-se $(\Pi_p)\psi_{(p)} = \psi_p$ e $(\Pi_{p+1})\psi_{(p)} = \psi_{p+1}$. Dessa forma, a equação (2.292) na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ aparece de forma natural ao

propormos que a constante na equação de *DKP* é uma constante geral no espaço dos $\psi_{(p)}$ dada por

$$m_{(p)} = m_1(\Pi_p) + m_2(\Pi_{p+1}), \quad (2.302)$$

onde m_1 e m_2 são constantes, ou seja, a equação correspondente a (2.292) nessa representação é dada por

$$\left[i\beta_\mu^p \partial^\mu - m_{(p)} \right] \psi_{(p)} = 0. \quad (2.303)$$

Note que (2.303) é mais geral do que a (2.292) no sentido de que a equação acima vale para todos os espaços quadráticos de dimensão n e para $0 \leq p < n$. Como foi visto na subseção anterior, a equação de Proca é válida apenas para $p = 1$ e $p = n - 2$. Assim, o caso específico da (2.292) é obtida ao se considerar o espaço de Minkowski e $p = 1$. Além disso, assim como na teoria de Kruglov, ao se considerar $m_1 = m_2 = m$, a equação de *DKP*

$$\left[i\beta_\mu^p \partial^\mu - m1_p \right] \psi_{(p)} = 0 \quad (2.304)$$

é recuperada.

Para finalizar, é interessante retornar à discussão do subseção anterior, onde o operador \mathcal{R}_μ^p extrai a parte o setor de spin 1 da equação de *DKP*. Foi visto que o vetor de Proca $\mathcal{R}_\mu \psi_p$ só é diferente de zero nas situações em que $p = 1$ e $p = n - 2$ e tem-se as equações (2.290 – 2.291). Essas equações, pela ortogonalidade dos elementos (Π_p) , é possível escrevê-las como

$$\left[(\delta) - im_{(p)} \right] g_{2\mu} A_1(P) = 0; \quad \text{para } n = 2 \text{ e } p = 0. \quad (2.305)$$

e

$$\left[(\delta) - im_{(p)} \right] g_{nn} A_\mu(P^n) = 0; \quad \text{para qualquer } n \text{ inteiro e } p = 1. \quad (2.306)$$

Observe, concluindo, que há uma diferença entre o desenvolvimento de Kruglov e o obtido na representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$. No desenvolvimento original de Kruglov, a massa física é dada por (2.296). Já no desenvolvimento feito aqui o papel de m_2 em (2.302) é irrelevante para o caso da equação de Proca, ou seja, para $p = 1$. Com efeito,

$$(\Pi_1)(P) = (\Pi_2)(P^n) = 0, \quad (2.307)$$

e ter-se-ia para $p = 0$

$$\left[m(\Pi_0) + m'(\Pi_1) \right] g_{2,\mu} A_1(P) = mg_{2,\mu} A_1(P) \quad (2.308)$$

e para $p = 1$

$$\left[m(\Pi_1) + m'(\Pi_2) \right] g_{nn} A_\mu(P^n) = mg_{nn} A_\mu(P^n), \quad (2.309)$$

o que anula o papel que m' poderia ter. Lembre que as equações (2.305-2.306) foram obtidas a partir do vetor de Proca $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$. No caso geral, onde não se extraia a equação de Proca da equação de *DKP*, o papel de m_2 em (2.302) é similar ao do desenvolvimento original de Kruglov.

Este desenvolvimento mostra o poder da representação $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ ao obter e generalizar a equação proposta por Kruglov. Essa generalização foi feita de forma natural, no sentido de que não foi adicionada à teoria elementos externos; apenas foi distribuído o valor da constante m nas partições da unidade (Π_p) e (Π_{p+1}). Em contrapartida, o desenvolvimento feito por Kruglov necessita de elementos externos à teoria quando são propostos os operadores $\bar{\mathbf{P}}$ e \mathbf{P} ¹³. Ainda mais, para o caso específico do vetor de Proca $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$, foi mostrado que utilizar $m1_p$ ou m_p na equação de *DKP* é irrelevante, embora essa constante ainda possa ter algum interesse quando utilizada no caso geral.

¹³ Na verdade, o que foi proposto no artigo de Kruglov foi o elemento da álgebra de matrizes ε^{AB} com as propriedades

$$[\varepsilon^{M,N}]_{AB} = \delta_{MA}\delta_{NB}; \quad \varepsilon^{M,A}\varepsilon^{B,N} = \delta_{AB}\varepsilon^{M,N}. \quad (2.310)$$

Os operadores $\bar{\mathbf{P}}$ e \mathbf{P} , por sua vez, foram propostos a partir de $\varepsilon^{A,B}$ como

$$\bar{\mathbf{P}} = \varepsilon^{\mu\mu}; \quad \mathbf{P} = \frac{1}{2}\varepsilon^{[\nu\mu],[\nu\mu]}, \quad (2.311)$$

onde μ são índices correspondentes às componentes do quadrivetor ψ e $[\mu\nu]$ são índices correspondentes às seis componentes independentes do tensor eletromagnético $\psi_{[\nu\mu]}$.

3 A Mecânica quântica de bósons e a álgebra simétrica

3.1 Introdução

No capítulo 2, foi visto o desenvolvimento da álgebra de Schönberg associada aos férmions $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Nesse caso, a gênese da referida álgebra repousa na introdução de uma forma bilinear simétrica no espaço \mathbf{W} formado pela soma de um espaço vetorial de n dimensões com o seu dual. Foi mostrado que é possível escrever os elementos dessa álgebra através de uma base canônica formada a partir de um idempotente primitivo. Esse idempotente permite a formação de ideais mínimos na álgebra, onde seus elementos são associados aos estados quânticos fermiônicos, enquanto os elementos gerais são associados às transformações lineares nos ideais. Foi visto também que, na base canônica, é possível construir projetores que, nesse formalismo, permitem desenvolver representações irredutíveis da álgebra de *DKP*. Nesse cenário, a mecânica quântica para partículas fermiônicas se torna elegante, no sentido de que observáveis e estados físicos fazem parte de uma mesma estrutura algébrica, o que não ocorre no desenvolvimento usual da escola de Copenhagen. No presente capítulo, será visto que também é possível seguir o mesmo roteiro do capítulo anterior para a construção de uma álgebra que está associada a partículas bosônicas. Como é de se esperar, a versão bosônica da álgebra nasce de premissas ligeiramente diferentes do caso anterior. A diferença está na introdução de uma forma bilinear simplética em \mathbf{V} , em oposição à forma bilinear simétrica do caso anterior. Esta mudança traz consequências significativas: a álgebra resultante passa a ser uma álgebra de Clifford simplética, ou seja, uma álgebra análoga à álgebra de Clifford ortogonal cujo anticomutador é substituído pelo comutador. Da mesma forma que o caso anterior, a natureza da forma bilinear simplética introduzida aqui permite fazer uma decomposição lagrangiana de \mathbf{W} e a álgebra passa a ser uma álgebra de vetores covariantes e contravariantes. Nesse formato, as operações algébricas coincidem com as relações de comutação dos bósons. No entanto, ainda não é possível representar a mecânica quântica bosônica nos mesmos moldes que no caso fermiônico pois a estrutura simétrica dessa álgebra não permite a construção de um idempotente primitivo a partir de seus elementos. Isso significa que não é possível obter ideais mínimos da álgebra. Além disso, sua estrutura simétrica faz com que a álgebra seja construída em um espaço vetorial infinito, o que traz dificuldades na propriedade de fechamento. Por essa razão, Schönberg se referia a ela como uma *quase álgebra*, e ele contorna essas duas dificuldades, primeiro estendendo a álgebra através da introdução *ad hoc* de um idempotente primitivo com propriedades específicas. Isso faz com que seja possível escrever os elementos da nova álgebra por meio de uma base canônica, o que é essencial para

a construção de ideais mínimos. Para resolver o problema do fechamento da álgebra é suficiente considerar subespaços finitos, porém indefinidos, da álgebra estendida. Com essa construção é possível descrever a mecânica quântica para partículas bosônicas. É instrutivo começar apresentando alguns aspectos relevantes da álgebra simétrica, pois esta faz o papel da álgebra exterior, no caso fermiônico. Nesse desenvolvimento seguimos as referências [53] para a parte da álgebra simétrica, [1, 2, 4–6] para a parte da álgebra da revisão da álgebra de Schönberg $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ e [93–98] para a parte relativa aos polinômios de Hermite. O objetivo deste capítulo é apresentar a construção que será usada como base do capítulo 4.

3.2 Aspectos gerais sobre a álgebra simétrica

Esta seção apresentará algumas noções a respeito da álgebra simétrica, importantes para o entendimento da álgebra de Schönberg associada aos bósons.

A *álgebra simétrica* do espaço vetorial \mathbf{V} de n dimensões, denotada por $Sim(\mathbf{V})$, é o par $(\bigvee(\mathbf{V}), \vee)$, onde $\bigvee(\mathbf{V})$ é o espaço graduado dado por

$$\bigvee(\mathbf{V}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigvee_k(\mathbf{V}). \quad (3.1)$$

Na expressão acima, $\bigvee_k(\mathbf{V})$ é o espaço da k -ésima *potência simétrica* de \mathbf{V} . Seus elementos são chamados de *k -tensores simétricos sobre \mathbf{V}* e são dados por

$$\mathbf{T}_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma_i \in S_k} \nu_{\sigma_i(1)} \otimes \nu_{\sigma_i(2)} \otimes \dots \otimes \nu_{\sigma_i(k)}, \quad (3.2)$$

onde $\nu_i \in \mathbf{V}$ e S_m é o grupo de permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$. Seja $\vee : \bigvee_k(\mathbf{V}) \times \bigvee_\ell(\mathbf{V}) \mapsto \bigvee_{k+\ell}(\mathbf{V})$ o *produto simétrico*, dados dois tensores simétricos de ordem k e ℓ , o produto simétrico entre eles é dado por

$$\mathbf{T}_k \vee \mathbf{T}_\ell = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \sum_{\sigma_i \in S_{k+\ell}} \sigma_i(\mathbf{T}_k \otimes \mathbf{T}_\ell). \quad (3.3)$$

Quando $k = \ell = 1$ na expressão acima, $\bigvee_1(\mathbf{V})$ é identificado como o próprio \mathbf{V} e então a expressão (3.3) é dada por

$$\nu \vee \nu' = \frac{1}{2} [\nu \otimes \nu' + \nu' \otimes \nu], \quad (3.4)$$

com $\nu, \nu' \in \mathbf{V}$. O produto simétrico é comutativo e associativo, ou seja,

$$\mathbf{T}_k \vee \mathbf{T}_\ell - \mathbf{T}_\ell \vee \mathbf{T}_k = 0, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{T}_k \vee (\mathbf{T}_\ell \vee \mathbf{T}_m) = (\mathbf{T}_k \vee \mathbf{T}_\ell) \vee \mathbf{T}_m. \quad (3.6)$$

É interessante observar que para os vetores ν e ν' , a expressão (3.5) é dada por apenas por

$$\nu \vee \nu' - \nu' \vee \nu = 0. \quad (3.7)$$

A comutatividade do produto simétrico é a propriedade que torna a álgebra simétrica diferente da álgebra exterior. A anticomutatividade do produto exterior faz com que o elemento $\boldsymbol{\nu} \wedge \boldsymbol{\nu}$ seja identicamente nulo. Este fato leva a um limite na soma (2.16), *i.e.* a álgebra exterior é de dimensão finita. Em contrapartida, a comutatividade da álgebra simétrica faz com que o elemento $\boldsymbol{\nu} \vee \boldsymbol{\nu}$ seja um elemento não nulo de $\bigvee(\mathbf{V})$. Observe-se ainda que, se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ for uma base de \mathbf{V} , então

$$\underbrace{\mathbf{e}_i \vee \dots \vee \mathbf{e}_i}_{k\text{-vezes}}$$

é um dos $\binom{n+k-1}{k}$ elementos da base de $\bigvee_k(\mathbf{V})$. Esse fato faz com que k possa assumir qualquer valor inteiro, inclusive aqueles maiores do que a dimensão de \mathbf{V} . Dessa forma, a álgebra simétrica é de dimensão infinita, como pode ser visto em (3.1).

Uma forma de definir a álgebra simétrica é através do quociente da álgebra tensorial $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ pelo ideal I_s , gerado pelo elemento $\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}' \otimes \boldsymbol{\nu}$, ou seja,

$$\text{Sim}(\mathbf{V}) := \frac{\mathbf{T}(\mathbf{V})}{I_s}. \quad (3.8)$$

Uma análise considerando produtos entre classes de equivalência [52], permite mostrar que a multiplicação no espaço quociente (3.8) é, de fato, dada pela expressão (3.4). Para finalizar, é conveniente indicar a forma de um elemento geral de $\text{Sim}(\mathbf{V})$ escrito em termos de duas bases de $\bigvee(\mathbf{V})$. A primeira base é composta pelos elementos do tipo $\mathbf{e}_{J_k}^\vee$, onde J_k é um conjunto de multi-índices monotonicamente ascendentes¹ de tamanho k e a notação $\mathbf{e}_{J_k}^\vee = \mathbf{e}_{j_1} \vee \mathbf{e}_{j_2} \vee \dots \vee \mathbf{e}_{j_k}$ foi introduzida. Nessa base, um elemento arbitrário da álgebra simétrica é dado por

$$\mathbf{T} = \sum_{k=0}^{\infty} C^{J_k} \mathbf{e}_{J_k}^\vee. \quad (3.9)$$

É importante notar que para $k=0$ tem-se que C^{J_0} é um escalar e \mathbf{e}_{J_0} é a identidade em $\text{Sim}(\mathbf{V})$.

Para a segunda base lembremos que, pode-se mostrar que o espaço dos k -tensores simétricos $\bigvee_k(\mathbf{V})$ é expandido por elementos definidos como [53]

$$\mathbf{e}_{\vee J_{n,k}} := \prod_{\ell}^n j_{\ell,k}! \mathbf{e}_1^{j_{1,k}} \vee \dots \vee \mathbf{e}_n^{j_{n,k}}, \quad (3.10)$$

com os $j_{\ell,k}$ sujeitos às restrições

$$j_{\ell,k} \geq 0; \quad \sum_{\ell=1}^n j_{\ell,k} = k. \quad (3.11)$$

¹ Veja em (2.6) que conjuntos multi-índices monotonicamente ascendentes permitem índices repetidos.

O conjunto $J_{n,k}$ é um conjunto de multi-índices de tamanho k com as restrições (3.11). Veja que cada $j_{\ell,k} \in J_{n,k}$ em (3.10) representa expoentes, de modo que

$$\mathbf{e}_i^{j_{\ell,k}} := \underbrace{\mathbf{e}_i \vee \dots \vee \mathbf{e}_i}_{\ell \text{ vezes}}. \quad (3.12)$$

Nesta base, um elemento geral da álgebra simétrica é dado por

$$\mathbf{T} = \sum_{p=0}^{\infty} B^{J_{n,p}} \mathbf{e}_{\vee J_{n,p}}. \quad (3.13)$$

onde $B^{J_{n,p}} \mathbf{e}_{\vee J_{n,p}}$ representa a soma em todos os índices $j_{\ell,p}$ sujeitos a (3.11).

A base $\mathbf{e}_{\vee J_{n,k}}$ permite mostrar que há um isomorfismo entre a álgebra simétrica $\text{Sim}(\mathbf{V})$ e o anel de séries formais de n variáveis sobre \mathbb{K} , denotado por $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$, ao identificar cada \mathbf{e}_i com uma variável x_i , $1 \leq i \leq n$. Dessa forma, para cada $\mathbf{t}_k \in \vee(\mathbf{V})$ dado por

$$\mathbf{t}_k = B^{J_{n,k}} \mathbf{e}_{\vee J_{n,k}} \quad (3.14)$$

existe associada uma série formal de n variáveis

$$S_{\mathbf{t}_k} = B^{J_{n,k}} x_{J_{n,k}}, \quad (3.15)$$

com a definição

$$x_{J_{n,k}} := \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,k}! x_1^{j_{1,k}} x_2^{j_{2,k}} \dots x_n^{j_{n,k}}, \quad (3.16)$$

onde $j_{\ell,k} \in J_{n,k}$ e os x_i formam um conjunto de n variáveis.

Vale a pena traçar algumas linhas acerca do correspondente isomorfismo da álgebra simétrica sobre o espaço dual de \mathbf{V} , denotada por $\vee(\mathbf{V}^*)$. Neste caso, cada elemento da base dual \mathbf{e}^i pode ser entendido como uma aplicação linear $\mathbf{V} \mapsto \mathbb{K}$, de maneira que o tensor simétrico em $\vee(\mathbf{V}^*)$, dado por

$$\beta = \sum_{p=0}^{\infty} D_{J_{n,p}} \mathbf{e}^{\vee J_{n,p}}, \quad (3.17)$$

é associado à função polinomial

$$G = \sum_p D_{J_{n,p}} \mathbf{e}^{J_{n,p}}, \quad (3.18)$$

onde

$$\mathbf{e}^{\vee J_{n,p}} := \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}! \mathbf{e}_1^{j_{1,p}} \vee \mathbf{e}_2^{j_{2,p}} \vee \dots \vee \mathbf{e}_n^{j_{n,p}} \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{e}^{J_{n,p}} := \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}! \mathbf{e}_1^{j_{1,p}} \mathbf{e}_2^{j_{2,p}} \dots \mathbf{e}_n^{j_{n,p}}, \quad (3.20)$$

em que $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ é a multiplicação de duas funções definida por $(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) = \mathbf{e}_i(\boldsymbol{\nu}_1) \mathbf{e}_j(\boldsymbol{\nu}_2)$. Os elementos do tipo (3.17), juntamente com a operação de soma e produto de funções formam, um anel de funções homogêneas denotado por $\mathbb{K}[[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]]$. Um fato interessante é que (3.17), aplicado a $\boldsymbol{\nu} = \sum_{i=1}^n \nu^i \mathbf{e}_i$, resulta em

$$G(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{p=0}^{\infty} \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}! D_{j_{1,p}, \dots, j_{n,p}} (\nu^1)^{j_{1,p}} \dots (\nu^n)^{j_{n,p}}. \quad (3.21)$$

Note que, para cada $G(\boldsymbol{\nu})$, pode-se associar uma aplicação $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$g(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}! D_{j_{1,p}, \dots, j_{n,p}} (z_1)^{j_{1,p}} \dots (z_n)^{j_{n,p}}; \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n. \quad (3.22)$$

onde usamos, na expressão acima, a notação explícita a fim de facilitar a compreensão da associação $G \mapsto g$. Na forma compacta, a expressão (3.22) é escrita como

$$g(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} D_{J_{n,p}} \mathbf{z}^{J_{n,p}} \quad (3.23)$$

junto com a definição,

$$\mathbf{z}^{J_{n,p}} := \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}! z_1^{j_{1,p}} \dots z_n^{j_{n,p}}. \quad (3.24)$$

Observe que, tanto (3.21) como (3.22) para serem interpretados como funções, é preciso que haja garantia de convergência nestas séries. Entretanto, ambas equações podem ser representadas pela série formal (3.16). Isso quer dizer que também há isomorfismo entre a álgebra simétrica $\text{Sim}(\mathbf{V}^*)$ e o anel de séries formais $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$.

3.2.1 Contrações na álgebra simétrica

A exemplo da álgebra exterior, é interessante que se defina operações capazes de transformar um k -tensor simétrico em um $(k-1)$ -tensor simétrico. Analogamente ao caso anterior, para $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}_i \in \mathbf{V}$ e $\beta^k \in \bigvee^k(\mathbf{V})$, define-se a *contração à esquerda da álgebra simétrica* $\boldsymbol{\nu} \lrcorner$ pelo vetor $\boldsymbol{\nu}$ como

$$(\boldsymbol{\nu} \lrcorner \beta^k)(\boldsymbol{\nu}_2, \dots, \boldsymbol{\nu}_k) := \beta^k(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}_2, \dots, \boldsymbol{\nu}_k). \quad (3.25)$$

Por completude, é conveniente que se defina também $\boldsymbol{\nu} \lrcorner \beta^1 := \beta^1(\boldsymbol{\nu})$ e $\boldsymbol{\nu} \lrcorner \beta^0 := 0$, em que β^0 é uma constante. Ao se considerar $\beta^k = \mathbf{u}_1 \vee \mathbf{u}_2 \vee \dots \vee \mathbf{u}_k$ com $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}$, tem-se

$$\boldsymbol{\nu} \lrcorner (\mathbf{u}_1 \vee \mathbf{u}_2 \vee \dots \vee \mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\nu}) \mathbf{u}_1 \vee \dots \vee \hat{\mathbf{u}}_i \vee \dots \vee \mathbf{u}_k, \quad (3.26)$$

onde $\hat{}$ em $\hat{\mathbf{u}}_i$ indica que \mathbf{u}_i está fora do produto simétrico. Nesse caso, tem-se

$$\boldsymbol{\nu} \lrcorner (\mathbf{u}_1 \vee \mathbf{u}_2 \vee \dots \vee \mathbf{u}_k) (\boldsymbol{\nu}_2 \vee \boldsymbol{\nu}_3 \vee \dots \vee \boldsymbol{\nu}_k) = \text{Perm}[\mathbf{u}_i(\boldsymbol{\nu}_j)] \quad (3.27)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, k$ e $\nu_1 = \nu$. Em (3.27), $\text{Perm}[a_{ij}]$ é o permanente da matriz cujos elementos são dados por a_{ij} . A *contração à direita da álgebra simétrica* $\lrcorner \mathbf{u}$ pelo covetor \mathbf{u} é definida de forma análoga, como

$$(\beta^k \lrcorner \nu)(\nu_1, \dots, \nu_{k-1}) := \beta_k(\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, \nu). \quad (3.28)$$

3.2.2 Operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica

Assim como na álgebra exterior, a multiplicação simétrica do covetor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ por um k -cotensor simétrico $\beta^k \in \bigvee^k(\mathbf{U})$ pode ser interpretada como aplicações à direita e à esquerda de operadores $\bigvee(\mathbf{U}) \mapsto \text{End}(\bigvee(\mathbf{U}))$. Isto é, cada covetor \mathbf{u} em \mathbf{U} define os operadores $c(\mathbf{u})$ e $c^\dagger(\mathbf{u})$ dados por

$$c(\mathbf{u})\beta^k = \sqrt{k+1}\mathbf{u} \vee \beta^k, \quad (3.29)$$

$$c^\dagger(\mathbf{u})\beta^k = \sqrt{k+1}\beta^k \vee \mathbf{u}. \quad (3.30)$$

Esses operadores são chamados de *operadores de criação da álgebra simétrica*. Cada vetor ν em \mathbf{V} , por sua vez, define dois operadores chamados de *operadores de aniquilação da álgebra simétrica* e são dados por

$$d(\nu)\beta^k = \frac{1}{\sqrt{k}}\nu \lrcorner \beta^k, \quad (3.31)$$

$$d^\dagger(\nu)\beta^k = \frac{1}{\sqrt{k}}\beta^k \lrcorner \nu. \quad (3.32)$$

O importante, para o presente trabalho, são as relações algébricas que envolvem os operadores de criação e de aniquilação. A partir das definições e propriedades do produto simétrico e das contrações, é possível encontrar que

$$[d(\nu), c(\mathbf{u})] = [d^\dagger(\nu), c^\dagger(\mathbf{u})] = \mathbf{u}(\nu), \quad (3.33)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o comutador, e todos os outros comutadores que envolvem os operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica são nulos. As relações algébricas destes operadores cumprem papéis importantes na álgebra de Schönberg associada aos bósons, que será o tema da próxima seção.

3.3 Álgebra associada aos bósons

Na seção 2.2.5 foi visto como a escolha de uma forma bilinear simétrica de um espaço lagrangiano formado por vetores contra e covariantes pode determinar toda uma estrutura matemática apropriada para tratar partículas fermiônicas. Nesta seção será feita uma extensão dessa teoria, no sentido de que será mostrado como a introdução de uma segunda forma bilinear pode dar origem a uma álgebra associada aos bósons. Ainda com

argumentos de se ter invariantes sob transformações afins, a forma bilinear proposta para este caso é a versão simplética da forma bilinear anterior, ou seja, aquela que corresponde ao sinal negativo em (2.45). Essa mudança faz com que surja a versão simplética da álgebra de Clifford ortogonal cujos geradores, após uma decomposição lagrangiana do espaço composto por vetores e covetores, obedecem as relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação associados ao oscilador harmônico. Esta revisão está baseada nas referências [1, 2, 4–6].

3.3.1 A forma bilinear antissimétrica e a álgebra de Clifford simplética sobre W

Seja E um espaço vetorial e f uma forma bilinear antissimétrica²; então, o par (E, f) é dito um *espaço vetorial simplético* ou simplesmente um *espaço simplético*. Para todo espaço simplético há uma álgebra tipo Clifford associada, que é a álgebra definida por comutadores ao invés de anticomutadores. Os passos para demonstrar esse fato podem ser feitos utilizando convenientemente o par (W, Ω_-) com W e Ω_- definidos por (2.44) e (2.45), respectivamente.

Considere a notação utilizada na seção 2.2.7. O espaço simplético W pode ser imerso na álgebra tensorial $T(W)$ definida em (2.46) e então a *álgebra de Clifford simplética* é definida como [1]

$$Cl_n(W, \Omega_-) := \frac{T(W)}{I_{\Omega_-}}, \quad (3.34)$$

onde I_{Ω_-} é o ideal gerado por

$$\omega \otimes \omega' - \omega' \otimes \omega - 2\Omega_-(\omega, \omega'), \quad (3.35)$$

com $\omega, \omega' \in W$. Por argumentos matemáticos semelhantes ao desenvolvimento da álgebra de Clifford ortogonal, pode-se mostrar que a multiplicação das classes de equivalência em $T(W)/I_{\Omega_-}$ é realizável em termos da multiplicação simétrica como

$$\omega\omega' = \omega \vee \omega' + \Omega_-(\omega, \omega'). \quad (3.36)$$

A propriedade de simetria do produto externo e antissimetria de Ω_- permite que se chegue à relação fundamental da álgebra de Clifford simplética, expressa como

$$\omega\omega' - \omega'\omega = 2\Omega_-(\omega, \omega'). \quad (3.37)$$

A álgebra de Clifford simplética é uma álgebra universal. Isso quer dizer que a aplicação ϕ que deixa comutativo o diagrama da Figura 3 é única, a menos de isomorfismos, e é dada

² Forma bilinear antissimétrica e forma bilinear simplética são sinônimos [91]. No entanto, a segunda forma é mais utilizada pelos físicos.

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{\iota} & T(W) \\
 & \searrow \phi & \downarrow \vartheta \\
 & & Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)
 \end{array}$$

 Figura 3 – $\phi = \vartheta \circ \iota$

por $\phi = \vartheta \circ \iota$, onde ϑ é a projeção natural de $T(\mathbf{W})$ em $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ e ι denota a imersão de \mathbf{W} na álgebra tensorial.

A seguir será mostrado que o espaço $\mathbf{W} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{U}$ também é um espaço lagrangiano máximo em relação à forma bilinear simplética Ω_- e como surgem, neste contexto, as relações de comutação características da mecânica quântica para partículas bosônicas.

3.3.2 A decomposição lagrangiana de W por uma forma bilinear simplética e a álgebra associada aos bósons

Foi visto na seção 2.2.8 a definição de um subespaço lagrangiano relativo a uma forma bilinear. Neste sentido, pode-se mostrar que os subespaços \mathbf{V} e \mathbf{U} de

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{U} \tag{3.38}$$

são subespaços lagrangianos máximos relativos à forma bilinear $\Omega_- : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\Omega_-((\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}), (\mathbf{u}', \boldsymbol{\nu}')) = \frac{1}{2} [\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}' \rangle - \langle \mathbf{u}', \boldsymbol{\nu} \rangle], \tag{3.39}$$

pois,

$$\Omega_-(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \Omega_-(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0. \tag{3.40}$$

Além disso, $\dim \mathbf{W} = 2n$, onde $n = \dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{U}$. Em outras palavras, o espaço (3.38) é uma decomposição lagrangiana em relação à forma simplética Ω_- .

Nesse contexto, a álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ pode ser entendida como uma álgebra de vetores covariantes e contravariantes por meio da definição da aplicação linear [1]

$$\begin{aligned}
 \{\cdot\} : \mathbf{W} &\mapsto \text{End}(\bigvee(\mathbf{W}^*)) \\
 \{\boldsymbol{\nu} \oplus \mathbf{u}\} &:= \{\boldsymbol{\nu}\} + \{\mathbf{u}\},
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

com

$$\{\boldsymbol{\nu}\} := d(\boldsymbol{\nu}), \tag{3.42}$$

$$\{\mathbf{u}\} := c(\mathbf{u}), \tag{3.43}$$

onde $\bigvee(\mathbf{W}^*)$ é o espaço dual ao espaço dos vetores simétricos sobre \mathbf{W} e c e d são os operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica, respectivamente definidos em

(3.29) e (3.31). Agora, a relação (3.37) que caracteriza o produto da álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ pode ser expressa pelo seguinte conjunto de comutadores entre elementos covariantes e contravariantes da álgebra:

$$[\{\boldsymbol{\nu}\}, \{\boldsymbol{\nu}'\}] = 0, \quad (3.44)$$

$$[\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}'\}] = 0, \quad (3.45)$$

$$[\{\boldsymbol{\nu}\}, \{\mathbf{u}\}] = \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \rangle. \quad (3.46)$$

Ainda mais, os conjuntos $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ podem ser escolhidos como um par de bases duais de \mathbf{V} . Nestas bases, as relações (3.44–3.46) são expressas como

$$[\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}_j\}] = 0, \quad (3.47)$$

$$[\{\mathbf{e}^i\}, \{\mathbf{e}^j\}] = 0, \quad (3.48)$$

$$[\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}^j\}] = \delta_i^j. \quad (3.49)$$

Observa-se, desta maneira, que a álgebra $Cl(\mathbf{W}, \Omega_-)$ se torna isomórfica à álgebra dos operadores de criação e aniquilação associada ao oscilador harmônico. Notemos que as relações algébricas (3.47–3.49) foram obtidas a partir de apenas uma premissa fundamental. Esta premissa é relativa ao espaço \mathbf{W} sobre qual a álgebra é definida, o qual deve ser a decomposição lagrangiana (3.38) com respeito à forma bilinear simplética Ω_- . Deste modo, chega-se à conclusão importante, *i.e.* a escolha da forma bilinear imposta a \mathbf{W} determina a estatística das partículas cuja álgebra correspondente as descrevem. No caso dos férmions, analisado no capítulo 2, a escolha da forma bilinear é suficiente para desenvolver um ambiente matemático próprio para representar a mecânica quântica. Já o caso dos bósons é um pouco mais delicado. Como será explicado, é preciso que se acrescente um ingrediente externo a essa formulação. Isto é justificável na medida em que, em $Cl(\mathbf{W}, \Omega_-)$, não é possível construir um elemento idempotente primitivo apenas com elementos da própria álgebra. É preciso, portanto, adicionar de maneira *ad hoc* tal elemento de tal forma que seja possível o surgimento de uma álgebra mais geral que tem $Cl(\mathbf{W}, \Omega_-)$ como uma subálgebra. Essa construção será apresentada com os detalhes na subseção 3.3.3.

3.3.2.1 O elemento geral da álgebra de Clifford simplética de W

A álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ herda a graduação da álgebra simétrica. Neste sentido, os elementos de sua base são da forma [1, 2, 4, 5]

$$\{\mathbf{e}^1\}^{s_1} \{\mathbf{e}^2\}^{s_2} \dots \{\mathbf{e}^n\}^{s_n} \{\mathbf{e}_n\}^{r_n} \dots \{\mathbf{e}_2\}^{r_2} \{\mathbf{e}_1\}^{r_1}, \quad (3.50)$$

onde s_i e r_j são expoentes e podem assumir qualquer valor inteiro. A identidade de $Cl(\mathbf{W}, \Omega_-)$ é obtida quando todos s_i e r_j forem iguais a zero. Neste cenário, um elemento geral da álgebra de Clifford simplética sobre \mathbf{W} , escrito na base (3.50), é dado por [1, 2, 4, 5]

$$\Lambda = \sum_{p,q=0}^{\infty} C_{J_p}^{K_q} \{\mathbf{e}^{J_p}\} \{\mathbf{e}_{K_q}\}, \quad (3.51)$$

onde J_p e K_q são dois conjuntos de multi-índices monotonicamente ascendentes de tamanho p e q , respectivamente. Lembre-se que nesses conjuntos há índices repetidos, o que justifica os expoentes s_i e r_j poderem receber valores inteiros maiores que a unidade. Especificamente, a notação utilizada é:

$$\{\mathbf{e}^{J_p}\} = \{\mathbf{e}_{j_1}\}\{\mathbf{e}_{j_2}\}\dots\{\mathbf{e}_{j_p}\}, \quad (3.52)$$

$$\{\mathbf{e}_{K_q}\} = \{\mathbf{e}_{k_q}\}\{\mathbf{e}_{k_{q-1}}\}\dots\{\mathbf{e}_{k_1}\}. \quad (3.53)$$

A graduação da álgebra de Clifford simplética pode ser expressa explicitamente com a definição

$$Cl_n^k(\mathbf{W}, \Omega_-) := \frac{T_k(\mathbf{W})}{I_{\Omega_-}}, \quad (3.54)$$

onde $T_k(\mathbf{W})$ é o espaço dos k -tensores sobre \mathbf{W} . A álgebra de Clifford simplética é obtida por meio da soma direta de todos os $Cl_n^k(\mathbf{W}, \Omega_-)$, ou seja,

$$Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} Cl_n^k(\mathbf{W}, \Omega_-). \quad (3.55)$$

Na próxima subseção será visto com mais detalhes como se pode formular a mecânica quântica de bósons a partir do desenvolvimento mostrado até aqui.

3.3.3 A impossibilidade de formar um elemento idempotente primitivo na álgebra de Clifford simplética sobre W

A estrutura algébrica de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ não permite que se construa um elemento idempotente primitivo, com as propriedades análogas a (P) do caso analisado no capítulo 2, a partir de seus elementos. Para observar este fato, notemos como tal idempotente é possível na álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Nesse sentido, observa-se que as relações (2.65) e (2.66) têm como consequência a propriedade $(\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}^i)(\mathbf{e}^i) = 0$. Isso faz com que não possa haver elementos da base com algum (\mathbf{e}_i) ou (\mathbf{e}^i) repetido pois, caso houvesse, seriam identicamente nulos. Além disto, essa propriedade faz com que os (\bar{N}_i) , definidos em (2.71), possam ser usados para construir o elemento (P) dotado das propriedades $(P)^2 = (P)$ e $(\mathbf{e}_i)(P) = (P)(\mathbf{e}^i) = 0$. Como o elemento (P) é um idempotente primitivo, ele pode então ser usado na construção dos ideais mínimos da álgebra que é associada aos férmions. Dado que a construção de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ segue os mesmos passos da construção de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$, espera-se que se possa encontrar um elemento em $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ com as propriedades análogas às de (P) . Agora, o objetivo de dotar o espaço \mathbf{W} com a forma bilinear simplética (3.34) é trazer à tona os comutadores com a mesma importância que os anticomutadores têm em $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Como consequência, note que (3.47–3.48) se tornam redundantes para $i = j$, *i.e.* nesse caso, essas relações se tornam

$$\{\mathbf{e}_i\}\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_i\}\{\mathbf{e}_i\}, \quad (3.56)$$

$$\{\mathbf{e}^i\}\{\mathbf{e}^i\} = \{\mathbf{e}^i\}\{\mathbf{e}^i\}. \quad (3.57)$$

E com isto, os elementos definidos por

$$\{\bar{N}_i\} := \{e_i\}\{e^i\}, \quad (3.58)$$

como uma analogia a (\bar{N}_i) , obedecem a

$$\{e_i\}\{\bar{N}_i\} = \{e_i\}^2\{e^i\}, \quad (3.59)$$

$$\{\bar{N}_i\}\{e^i\} = \{e_i\}\{e^i\}^2, \quad (3.60)$$

ou seja, os elementos $\{\bar{N}_i\}$, assim definidos, não obedecem às propriedades análogas às de (\bar{N}_i) . Isto é, não são idempotentes nem se anulam quando multiplicados à esquerda e à direita por $\{e_i\}$ e $\{e^i\}$, respectivamente. Desta forma, o elemento $\{Q\} = \{\bar{N}_1\}\{\bar{N}_2\} \dots \{\bar{N}_n\}$ não é um idempotente e nem um idempotente primitivo. A consequência de não poder construir um idempotente primitivo na álgebra, por meio de seus elementos naturais, é não poder construir os ideais mínimos necessários para representar os espaços de Hilbert dentro deste contexto algébrico. A solução que Schönberg encontrou para contornar este problema é a seguinte: aos elementos de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ foi adicionado, de maneira *ad hoc*, o elemento $\{P\}$ com as propriedades [1, 2, 4, 5]

$$\{P\}^2 = \{P\}; \quad \{e_i\}\{P\} = 0; \quad \{P\}\{e^i\} = 0. \quad (3.61)$$

Agora, a álgebra gerada por $\{e_i\}$, $\{e^i\}$, $i = 1, \dots, n$ e $\{P\}$, denotada por $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, é uma estrutura mais geral no sentido de que ela contém $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ como sua subálgebra. Matematicamente, esta álgebra pode ser escrita como

$$\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) = Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-) \bigsqcup (\mathbb{K} \times \{P\}), \quad (3.62)$$

onde $(\mathbb{K} \times \{P\})$ representa o conjunto de todos os $c\{P\}$ com c pertencente ao corpo \mathbb{K} . Para expressar a graduação desta nova álgebra, é conveniente definir

$$\mathbb{C}l_n^k(\mathbf{W}, \Omega_-) := Cl_n^k(\mathbf{W}, \Omega_-) \bigsqcup (\mathbb{K} \times \{P\}), \quad (3.63)$$

de forma que

$$\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}l_n^k(\mathbf{W}, \Omega_-). \quad (3.64)$$

A álgebra $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ dotada do idempotente primitivo pode ser decomposta em ideais mínimos.

3.3.3.1 Base canônica, ideais mínimos e a auto representação do grupo linear na álgebra de Clifford Simplética

Com as propriedades (3.62), o elemento $\{P\}$ pode ser usado para construir uma base canônica de $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Esta base é o conjunto formado por todos os elementos definidos como [1, 2, 4, 5]

$$\{P_{J_p}^{K_q}\} := \{e^{K_q}\}\{P\}\{e_{J_p}\} \quad (3.65)$$

onde J_p e K_q são conjuntos multi-índices monotonicamente ascendentes³ e $\{P_0^0\} := \{P\}$. Como este tipo de conjunto multi-índice admite índices repetidos, é conveniente definir os conjuntos

$$\mathfrak{J}_p := \{s_1, s_2, \dots, s_p\}, \quad (3.66)$$

$$\mathfrak{K}_q := \{r_1, r_2, \dots, r_q\}, \quad (3.67)$$

onde s_i e r_i é o número de vezes em que os índices j_i e k_i se repetem nos conjuntos J_p e K_q , respectivamente. Desta forma, os elementos da base são multiplicados entre si de acordo com a regra [1, 2, 4, 5]

$$\{P_{J_p}^{K_q}\} \{P_{J_{p'}}^{K_{q'}}\} = \{\delta_{\mathfrak{J}_p}^{\mathfrak{K}'_{q'}}\} \{P_{J_{p'}}^{K_{q'}}\}, \quad (3.68)$$

onde $\{\delta_{\mathfrak{J}_p}^{\mathfrak{K}'_{q'}}\}$ foi definido em (2.15).

Nesta base, o elemento geral de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ é escrito como

$$\underline{\Lambda} = \sum_{p,q=0}^{\infty} \underline{A}_{J_p}^{K_q} \{P_{K_q}^{J_p}\}, \quad (3.69)$$

onde $\underline{A}_{J_p}^{K_q}$ pertence ao corpo \mathbb{K} e são simétricos em relação aos índices j e k , separadamente.

Os ideais mínimos de $\mathbb{C}\ell(\mathbf{W}, \Omega_-)$ podem ser construídos por meio da multiplicação de $\{P\}$ à direita ou à esquerda de todos os elementos da álgebra. O ideal mínimo à esquerda é definido como

$$\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} := \{\Psi = \underline{\Lambda}\{P\} \mid \forall \underline{\Lambda} \in \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\}, \quad (3.70)$$

enquanto o ideal mínimo à direita é definido de maneira análoga

$$\{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) := \{\Psi = \{P\}\underline{\Lambda} \mid \forall \underline{\Lambda} \in \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\}, \quad (3.71)$$

de forma que a álgebra de Clifford simplética sobre \mathbf{W} pode ser escrita como a união de seus ideais mínimos. Isto é,

$$\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) = \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} \cup \{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-). \quad (3.72)$$

Para mostrar que (3.70) e (3.71) são realmente ideais mínimos, é preciso multiplicar o elemento geral (3.69) à esquerda ou à direita de $\{P\}$ por meio da regra (3.68) e observar que resultam em objetos compostos apenas de vetores ou de covetores. Com efeito, objetos puramente covariantes surgem da multiplicação à esquerda e, portanto, pertencem ao ideal à esquerda, enquanto que objetos puramente contravariantes surgem da multiplicação à direita, sendo assim pertencentes ao ideal à direita. Estes ideais são mínimos pois, por

³ Nesta seção, todos conjuntos multi-índices são monotonicamente ascendentes. Ver seção 2.2.1.

construção, o idempotente $\{P\}$ é primitivo. Desta forma, o que se obtém é situação análoga à que foi discutida na seção 2.2.9.1: um elemento $\underline{\Lambda}$ geral da álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ pode ser interpretado como um operador nos ideais (3.70–3.71), *i.e.* uma auto representação do grupo linear $GL(\mathbb{K})^4$. As aplicações de tal operador nos ideais são definidas como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\underline{\Lambda}}: \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} &\longrightarrow \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} \\ \overrightarrow{\underline{\Lambda}} \psi &= \underline{\Lambda}\psi \end{aligned} \quad (3.73)$$

e

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\underline{\Lambda}}: \{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) &\longrightarrow \{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) \\ \overleftarrow{\underline{\Lambda}} \psi &= \psi\underline{\Lambda} \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde a multiplicação que se tem entre ψ e $\underline{\Lambda}$ do lado direito de (3.73–3.74) é a própria multiplicação da álgebra. Em outras palavras, um elemento geral $\underline{\Lambda}$ “leva” um elemento ψ pertencente ao ideal mínimo – à direita ou à esquerda – em outro elemento ψ' do mesmo ideal. Os elementos destes ideais são conhecidos como espinores algébricos [52].

3.3.3.2 O espaço de Hilbert dos ideais mínimos da álgebra de Clifford simplética estendida sobre W

É importante, dos pontos de vista físico e matemático, que se estabeleça os ideais de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ como um par de espaços de Hilbert duais. Para isto, note que os elementos gerais destes ideais são dados por

$$\underline{\psi} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{J_p} \{P^{J_p}\} \in \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} \quad (3.75)$$

e

$$\overleftarrow{\underline{\psi}}^\dagger = \sum_{p=0}^{\infty} C^{J_p} \{P_{J_p}\} \in \{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-). \quad (3.76)$$

Note que a multiplicação algébrica de $\underline{\psi}$ e $\overleftarrow{\underline{\psi}}^\dagger$, isto é, a multiplicação destes elementos seguindo a regra (3.68), resulta em um elemento de $\mathbb{K} \times \{P\}$. Existe um isomorfismo entre \mathbb{K} e $\mathbb{K} \times \{P\}$ dado pela identificação $c \mapsto c\{P\}$, o que permite definir o espaço dual do ideal à esquerda da álgebra como o conjunto de todas aplicações $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} \mapsto \mathbb{K} \times \{P\}$. Isto por si só faz do ideal à esquerda o seu espaço dual. Para que este fato seja visto com mais clareza, é suficiente encarar os $\overleftarrow{\underline{\psi}}^\dagger$ como aplicações

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\underline{\psi}}^\dagger: \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} &\longmapsto \mathbb{K} \times \{P\} \\ \overrightarrow{\underline{\psi}}^\dagger \underline{\psi} &= \overleftarrow{\underline{\psi}}^\dagger \psi = c\{P\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

⁴ O grupo $GL(\mathbb{K})$, sem a indicação da dimensionalidade, denota o grupo linear de dimensão infinita sobre o corpo \mathbb{K} .

A situação inversa é análoga. Isto é, os elementos do ideal à esquerda $\underline{\psi}$ podem ser entendidos como aplicações

$$\begin{aligned} \underline{\psi}: \{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) &\longmapsto \mathbb{K} \times \{P\} \\ \underline{\psi} \underline{\psi}^\dagger &= \underline{\psi}^\dagger \underline{\psi} = c\{P\}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Neste sentido, pode se definir os elementos $\underline{\psi}$ e $\underline{\psi}^\dagger$ em (3.75) e (3.76), respectivamente, como duais quando

$$C^{J_p} = \overline{C}_{J_p}, \quad (3.79)$$

para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou

$$C^{J_p} = C_{J_p}, \quad (3.80)$$

para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A notação \overline{C} indica o conjugado do número complexo C . O símbolo \dagger pode ser agora usado para indicar o dual do elemento. Mais do que isto, pode ser visto como a aplicação que leva elementos de um ideal mínimo para o outro. Para que isto seja possível, deve-se introduzir a aplicação *transposição* T , tal que

$$\underline{\psi}^T = \sum_{p=0}^{\infty} C^{J_p} \{P_{J_p}\} \quad (3.81)$$

$$\underline{\psi}'^T = \sum_{p=0}^{\infty} C_{J_p} \{P^{J_p}\} \quad (3.82)$$

para os $\underline{\psi} \in \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\}$ e $\underline{\psi}' \in \{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ dados por (3.75–3.76). Veja que, para que haja coerência entre (3.75–3.76) e (3.81–3.82), deve-se definir

$$\{P^{J_p}\}^T := \{P_{J_p}\}; \quad \{P_{J_p}\}^T := \{P^{J_p}\}; \quad \{P\}^T := \{P\}. \quad (3.83)$$

A partir destas definições, é possível mostrar que a operação T obedece às propriedades

$$(\underline{\psi}\underline{\psi}')^T = \underline{\psi}'^T \underline{\psi}^T; \quad (\underline{\psi}^T)^T = \underline{\psi}. \quad (3.84)$$

Deste modo, a operação \dagger pode ser representada como a composição da transposição com a conjugação complexa, desde que, às definições (3.83), seja adicionada

$$\overline{\{P\}} := \{P\}. \quad (3.85)$$

Neste cenário a operação indicada por \dagger recebe o nome de *conjugado transposto*. Essa aplicação herda a propriedade (3.84) da transposição e da conjugação, de maneira que

$$(\underline{\psi}\underline{\psi}')^\dagger = \underline{\psi}'^\dagger \underline{\psi}^\dagger; \quad (\underline{\psi}^\dagger)^\dagger = \underline{\psi}. \quad (3.86)$$

Em meio ao que foi apresentado acima, o espaço de Hilbert \mathbb{H} , associado aos elementos dos ideais mínimos de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, surge ao se considerar o conjunto de elementos duais $\underline{\psi}$ e $\underline{\psi}^\dagger$ tais que obedeçam à restrição

$$\underline{\psi}^\dagger \underline{\psi} < \{+\infty\}, \quad (3.87)$$

onde o símbolo $\{\infty\}$ indica o elemento $c\{P\} \in \mathbb{K} \times \{P\}$ com $c \rightarrow +\infty$.

Uma forma melhor de analisar (3.87) é fazendo a multiplicação algébrica do lado esquerdo da desigualdade. Isto é,

$$\underline{\psi}^\dagger \underline{\psi} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{J_p} C^{J_p} \{P\} = \sum_{p=0}^{\infty} |C_{J_p}|^2 \{P\}. \quad (3.88)$$

Portanto, espaço de Hilbert pode ser equivalentemente definido como o espaço dos $\underline{\psi} \in \mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\}$, dados em (3.75), tais que

$$\sum_{p=0}^{\infty} |C_{J_p}|^2 < +\infty. \quad (3.89)$$

Os espinores algébricos de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ têm muita importância na formulação algébrica da mecânica quântica de bósons sob a perspectiva de Schönberg. Entretanto, a estrutura matemática $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ não forma uma álgebra associativa [1, 4–6] de modo que, para representar a mecânica quântica de bósons na linha algébrica análoga ao que foi feito com os férmions no capítulo 2, não basta que as partículas sejam representadas por espinores algébricos no espaço de Hilbert associado aos ideais mínimos; é preciso ainda mais um ingrediente. Este é o tema da seção 3.3.4.

3.3.4 A representação algébrica da mecânica quântica de bósons

É importante sumarizar o desenvolvimento da álgebra associada aos bósons até este momento antes de avançar em direção à formulação adequada para tratar partículas físicas bosônicas. Foi visto que a introdução de uma forma bilinear simplética no espaço \mathbf{W} determina uma álgebra de Clifford simplética. No entanto, devido à sua natureza simétrica, esta estrutura não é apropriada para representar espaços de Hilbert, pois não há nesta um elemento idempotente primitivo. A forma que Schönberg encontrou para contornar este problema foi introduzir tal elemento de forma *ad hoc* e, com isto, generalizar a álgebra no sentido de que essa passa a ser uma subálgebra de uma estrutura algébrica maior. A introdução de um idempotente primitivo agora permite que se construa ideais mínimos que servem de espaço de representação (a auto representação) do grupo linear nesta álgebra. Conseqüentemente, os elementos do espaço de Hilbert associado a esses ideais são candidatos a representar os estados físicos bosônicos visto que, na situação análoga dos férmions, são os espinores algébricos que representam os estados das partículas físicas.

No entanto, a situação aqui não é completamente análoga ao caso fermiônico devido à simetria do produto simétrico levar a uma álgebra de dimensão infinita. Neste caso, a estrutura matemática $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ referida até então como álgebra não é, na verdade, uma álgebra associativa. Os elementos desta estrutura falham em obedecer o axioma de fechamento da álgebra. Por este motivo, Schönberg se refere a ela como uma *quase*

álgebra. Essa estrutura matemática, como tal, não é suficiente para acomodar a descrição da mecânica quântica de bósons; ainda falta um ingrediente. A solução para esse problema é limitar a soma em (3.69) em algum valor finito; isto corresponde considerar apenas subálgebras finitas da quase álgebra $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Desta forma, é conveniente introduzir outra notação para essa estrutura fechada. Define-se, assim

$$\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) := \bigoplus_{k=0}^m \mathbb{C}l_n^k(\mathbf{W}, \Omega_-); \quad m < \infty. \quad (3.90)$$

Observe-se que a notação do lado esquerdo de (3.90) se refere a qualquer subálgebra de $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, desde que seja de dimensão finita. Com essa construção, os estados físicos de partículas bosônicas podem ser representados por espinores algébricos. Todavia, nesse caso, esses espinores são de dimensão finita e pertencem aos ideais mínimos

$$\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} := \{\underline{\psi} = \underline{\Lambda}\{P\} \mid \underline{\Lambda} \in \mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\}, \quad (3.91)$$

e

$$\{P\}\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) := \{\underline{\psi} = \{P\}\underline{\Lambda} \mid \underline{\Lambda} \in \mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\}, \quad (3.92)$$

à esquerda e à direita, respectivamente. Portanto, os estados físicos de partículas bosônicas podem ser representados por elementos dos subespaços \mathcal{H}_m finitos do espaço de Hilbert \mathbb{H} associado ao ideal mínimo à esquerda de $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Esses elementos podem ser escritos na base $\{P^{J_p}\}$ do ideal como

$$\underline{\psi} = \sum_{p=0}^m C_{J_p} \{P^{J_p}\} \in \mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} \quad (3.93)$$

enquanto seus duais podem ser expressos na base dual $\{P_{J_p}\}$

$$\underline{\psi}^\dagger = \sum_{p=0}^m C^{J_p} \{P_{J_p}\} \in \{P\}\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) \quad (3.94)$$

com $m < \infty$ e $C^{J_p} = \overline{C}_{J_p}$. Como a restrição é a finitude do espaço e não exatamente um valor específico desta dimensão, notaremos, o espaço \mathcal{H}_m será denotado apenas por \mathcal{H} . Resumindo, o espaço que representa as partículas físicas bosônicas pode ser igualmente definido como o conjunto

$$\mathcal{H} := \left\{ \underline{\psi} \in \mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} \mid \underline{\psi}^\dagger \underline{\psi} < \{\infty\} \right\}. \quad (3.95)$$

E o espaço dual de \mathcal{H} , denotado por \mathcal{H}^* , é definido de forma equivalente, ou seja,

$$\mathcal{H}^* := \left\{ \underline{\psi} \in \{P\}\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) \mid \underline{\psi} \underline{\psi}^\dagger < \{\infty\} \right\}. \quad (3.96)$$

Nesse contexto, a operação conjugado transposto \dagger define um isomorfismo entre os espaços \mathcal{H} e \mathcal{H}^* , pois há uma identificação de um para um entre os elementos dos ideais mínimos por meio de (3.79–3.80).

Quando o limite m das somas em (3.93–3.94) tende para o infinito, então os objetos $\underline{\psi}$ e $\underline{\psi}^\dagger$ voltam a ser elementos gerais dos ideais de $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$.

3.3.4.1 A álgebra de Clifford simplética sobre \mathbf{W} e o anel de polinômios de n variáveis

Há um isomorfismo importante entre a álgebra de Clifford simplética sobre \mathbf{W} e o anel de polinômios de n variáveis com coeficientes em \mathbb{K} . Esse isomorfismo não é difícil de se notar quando há uma mudança de base em $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$: primeiramente, observe que o produto em $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) \subset \mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ é dado por (3.36). Para tornar mais explícito, considere a aplicação $\{\cdot\} : T(\mathbf{W}) \mapsto \mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Assim, tem-se que para $\omega, \omega' \in \mathbf{W}$, a multiplicação no espaço quociente $T(\mathbf{W})/I_{\Omega_-} =: \mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ é dada por

$$\{\omega\}\{\omega'\} := \omega \vee \omega' + \Omega_-(\omega, \omega'). \quad (3.97)$$

Foi mostrada na seção 3.3.2 que \mathbf{W} é uma decomposição lagrangiana em relação à forma bilinear simplética Ω_- , pois $\Omega_-(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \Omega_-(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0$. Desta maneira, quando a aplicação $\{\cdot\}$ é restrita a \mathbf{V} e \mathbf{U} , separadamente, o produto da álgebra (3.97) se iguala ao produto simétrico, de maneira que se pode escrever

$$\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-) = \text{Sim}(\mathbf{U})\{P\}\text{Sim}(\mathbf{V}). \quad (3.98)$$

Nesta situação, pode-se utilizar a base (3.10) para escrever o elemento geral de $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ como

$$\underline{\Lambda} = \sum_{p,q=0}^{\infty} B_{J_{n,p}}^{K_{n,q}} \{P_{K_{n,q}}^{J_{n,p}}\} \quad (3.99)$$

onde os elementos $\{P_{K_{n,q}}^{J_{n,p}}\}$ formam uma nova base e são dadas por

$$\{P_{K_{n,q}}^{J_{n,p}}\} := \{e^{J_{n,p}}\}\{P\}\{e_{K_{n,q}}\} \quad (3.100)$$

com

$$\{e^{J_{n,p}}\} := \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,n}! \{e^1\}^{j_{1,p}} \{e^2\}^{j_{2,p}} \dots \{e^n\}^{j_{n,p}} \quad (3.101)$$

e

$$\{e_{K_{n,q}}\} := \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,n}! \{e_1\}^{k_{1,q}} \{e_2\}^{k_{2,q}} \dots \{e_n\}^{k_{n,q}}. \quad (3.102)$$

Os elementos desta base se multiplicam por meio da expressão

$$\{P_{K_{n,q}}^{J_{n,p}}\}\{P_{H_{n,k}}^{Q_{n,\ell}}\} = \{\delta_{K_{n,q}}^{Q_{n,\ell}}\}\{P_{H_{n,k}}^{J_{n,p}}\}. \quad (3.103)$$

O isomorfismo entre $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ e o anel de séries formais de n variáveis sobre \mathbb{K} é dado por meio de seus ideais. Foi visto na subseção 3.3.3 que a operação conjugado transposto \dagger estabelece um isomorfismo entre os ideais mínimos da álgebra de Clifford simplética sobre \mathbf{W} e que essa álgebra pode ser reescrita em termos da união dos respectivos ideais. Portanto, considerar apenas o ideal mínimo à esquerda e a operação \dagger é o bastante

para se ter o mapeamento completo da álgebra. Por outro lado, a álgebra simétrica sobre \mathbf{V} e \mathbf{U} são isomórficas aos ideais mínimos à direita e à esquerda de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, respectivamente, através das associações

$$\vartheta : \begin{aligned} \text{Sim}(\mathbf{U}) &\longmapsto \{P\}\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) \\ \vartheta(\{e^{J_{n,p}}\}) &= \{P^{J_{n,p}}\} \end{aligned} \quad (3.104)$$

e

$$\zeta : \begin{aligned} \text{Sim}(\mathbf{V}) &\longmapsto \mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} \\ \zeta(\{e_{J_{n,p}}\}) &= \{P_{J_{n,p}}\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Também foi visto na subsecção 3.2 que há um isomorfismo entre as álgebras simétricas sobre \mathbf{V} e \mathbf{U} e o anel de séries formais de n variáveis sobre \mathbb{K} . Esses isomorfismos induzem os isomorfismos

$$\delta : \begin{aligned} \{P\}\mathcal{C}\ell(\mathbf{W}, \Omega_-) &\longmapsto \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]] \\ \delta(\{P_{J_{n,p}}\}) &= x_{J_{n,p}}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

e

$$\theta : \begin{aligned} \mathcal{C}\ell(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} &\longmapsto \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]] \\ \theta(\{P^{J_{n,p}}\}) &= x_{J_{n,p}}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

de forma que δ ou θ combinados com a operação conjugado transposto \dagger dá um mapeamento completo de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. A Figura 4 diagrama comutativo entre as diversas álgebras e os anéis de séries formais de n variáveis e de n funções homogêneas.

Observe que π_1 e π_2 são projeções de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ para os ideais mínimos à esquerda e à direita. Essas projeções são exatamente o elemento $\{P\}$ multiplicado à direita ou à esquerda de $\mathcal{C}\ell(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Os isomorfismos entre os ideais e o anel de séries formais de n variáveis são estabelecidas via da álgebra simétrica. Note, por exemplo, que δ – definida por (3.106) – estabelece um isomorfismo entre a álgebra simétrica contravariante e o ideal mínimo à direita de forma que o isomorfismo entre $\{P\}\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ e $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ é dado por

$$\delta = \rho \circ \zeta^{-1}, \quad (3.108)$$

onde $\rho : \text{Sim}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ é o isomorfismo entre a álgebra simétrica contravariante e o anel de séries formais de n variáveis dado pela identificação

$$e_{\vee J_{n,k}} \longmapsto x_{J_{n,k}}. \quad (3.109)$$

Já o isomorfismo entre o ideal mínimo à esquerda e $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ é estabelecido mediante a álgebra simétrica covariante. Neste caso, ainda tem um passo a mais: a álgebra simétrica covariante é isomórfica ao anel de séries formais de n funções homogêneas e esta

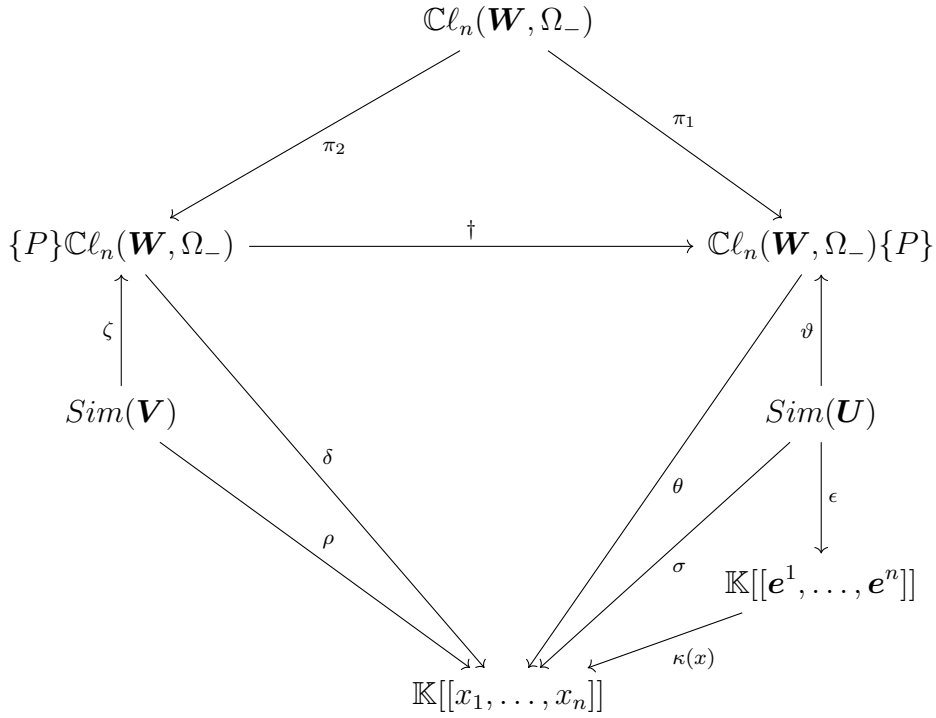


Figura 4 – Diagrama comutativo entre as álgebras e os anéis de séries formais de n variáveis e de n funções homogêneas

é isomórfica ao anel de séries formais de n variáveis. O isomorfismo entre $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\}$ e $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ é dado, portanto, por

$$\theta = \kappa(x) \circ \epsilon \circ \vartheta^{-1}, \quad (3.110)$$

onde $\epsilon : \text{Sim}(\mathbf{U}) \rightarrow \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ é o isomorfismo entre a álgebra simétrica covariante e o anel de séries formais de n funções homogêneas, dado pela identificação

$$\mathbf{e}^{\vee J_{n,p}} \mapsto \mathbf{e}^{J_{n,p}}. \quad (3.111)$$

A aplicação $\kappa(x) : \mathbb{K}[[\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n]] \rightarrow \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ estabelece o isomorfismo entre os anéis de séries formais de n funções homogêneas, para cada $x \in \mathbb{K}^n$. Lembre-se ainda que o conjugado transposto \dagger é um isomorfismo entre os ideais mínimos da álgebra. Essa análise mostra que a álgebra $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ é isomórfica ao espaço

$$\mathfrak{K}[[x_1, \dots, x_n]] = \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]] \otimes \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]] \quad (3.112)$$

munido da multiplicação

$$(z^{J_{n,k}} \oplus g^{K_{n,p}}) (f^{H_{n,s}} \oplus h^{R_{n,r}}) = \{\delta_{K_{n,p}}^{H_{n,s}}\} (z^{J_{n,k}} \oplus h^{R_{n,r}}). \quad (3.113)$$

Neste caso, o anel de séries formais de n variáveis fazem o papel dos ideais mínimos.

Esta análise pode ser estendida para a álgebra $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Neste sentido, os anéis $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ e $\mathbb{K}[[\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n]]$ devem ser trocados pela álgebra de polinômios de n

variáveis $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e a álgebra de funções homogêneas $H(\mathbb{K}^n)$, respectivamente. Desta maneira, tem-se o isomorfismo

$$\mathcal{Cl}(\mathbf{W}, \Omega_-) \sim \mathfrak{K}[x_1, \dots, x_n], \quad (3.114)$$

com

$$\mathfrak{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \oplus H(\mathbb{K}^n), \quad (3.115)$$

em que $\mathfrak{K}[x_1, \dots, x_n]$ é munido da multiplicação

$$(z^{J_{n,k}} \oplus g^{K_{n,p}}) (f^{H_{n,s}} \oplus h^{R_{n,r}}) = \{\delta_{K_{n,p}}^{H_{n,s}}\} (z^{J_{n,k}} \oplus h^{R_{n,r}}) \quad (3.116)$$

onde $z, f \in \mathbb{K}^n$ e g, h são bases de $H(\mathbb{K}^n)$.

Na próxima seção será analisada a situação em que existe uma correlação simétrica que identifica o espaço \mathbf{V} com o espaço \mathbf{U} . Esta correlação induz uma métrica e torna possível a introdução de novos elementos, de forma que o ideal mínimo à esquerda seja isomórfico a um espaço gerado pelos polinômios de Hermite.

3.3.5 A introdução de uma métrica e as distribuições na álgebra de Clifford simplética

A introdução de uma correlação simétrica $\flat : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ induz uma álgebra isomórfica a $\mathcal{Cl}_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ através das definições das aplicações

$$\begin{aligned} q : \mathbf{U} &\rightarrow \text{End}(\bigvee(\mathbf{V})) \\ q &:= \frac{1}{\sqrt{2}}[c + d \circ \flat^{-1}] \end{aligned} \quad (3.117)$$

e

$$\begin{aligned} p : \mathbf{V} &\rightarrow \text{End}(\bigvee(\mathbf{V})) \\ p &:= \frac{1}{\sqrt{2}}[d - c \circ \flat] \end{aligned} \quad (3.118)$$

onde c e d são os operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica. Note que para $\nu \in \mathbf{V}$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, tem-se

$$\begin{aligned} q(\mathbf{u}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[c(\mathbf{u}) + d(\mathbf{u}_{\flat^{-1}})] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{u}_{\flat^{-1}}\}] \end{aligned} \quad (3.119)$$

e, de forma análoga,

$$p(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\{\nu\} - \{\nu_{\flat}\}]. \quad (3.120)$$

Segue que esses operadores obedecem às relações de comutação

$$[q(\mathbf{u}), q(\mathbf{u}')] = 0, \quad (3.121)$$

$$[p(\boldsymbol{\nu}), p(\boldsymbol{\nu}')] = 0, \quad (3.122)$$

$$[p(\boldsymbol{\nu}), q(\mathbf{u})] = \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \rangle, \quad (3.123)$$

onde se observa que, diferentemente do caso fermiônico – ver equação (2.99) –, não aparece no lado direito de (3.123) a métrica. Isto se deve ao fato da definição (3.117) usar a correlação inversa \flat^{-1} e a (3.118); usar a correlação direta \flat . Os comutadores acima são análogos aos comutadores (3.44–3.46), no entanto, os elementos envolvidos nas comutações são diferentes.

É importante que as equações (3.121–3.123) sejam escritas em função da base de \mathbf{V} e sua base dual. Nesse caso, essas equações se tornam

$$[q^i, q^j] = 0 \quad (3.124)$$

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (3.125)$$

$$[p_i, q^j] = \delta_j^i, \quad (3.126)$$

onde são definidos $q^i := q(\mathbf{e}^i)$ e $p_i := p(\mathbf{e}_i)$. As equações (3.124–3.126) são iguais às relações de comutação da posição e *momentum* da mecânica quântica. Porém, essas relações neste desenvolvimento são encontradas a partir da introdução de uma forma bilinear simplética no espaço \mathbf{W} e uma correlação simétrica entre os espaços \mathbf{V} e \mathbf{U} . Os elementos especiais q^i e p_i têm as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} q^i \{P\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{\mathbf{e}^i\} \{P\}; & \{P\} q^i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{P\} \{\mathbf{e}_{b-1}^i\}; \\ p_i \{P\} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \{\mathbf{e}_{ib}\} \{P\}; & \{P\} p_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{P\} \{\mathbf{e}_i\}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

As propriedades (3.127), em conjunto com (3.124–3.126) podem ser usadas para mostrar que [1, 6]

$$\{\mathbf{e}^i\}^{s_i} \{\hat{P}\} = h_{s_i}(q^i) \{P\} \quad (3.128)$$

$$\{\hat{P}\} \{\mathbf{e}_i\} = \{\hat{P}\} h_{s_i}(p_i) \quad (3.129)$$

onde s_i é um expoente e h_{s_i} é o polinômio de Hermite normalizado dado por [96]

$$h_{s_i}(t_i) = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} 2^{\frac{s_i}{2}} e^{-\frac{t_i^2}{2}} H_{s_i}(t_i) \quad (3.130)$$

com H_{s_i} o polinômio de Hermite usual e t_i igual a q^i ou p_i . Em (3.128–3.129), foi usada a definição [1, 6]

$$\{\hat{P}\} := e^{\frac{1}{2}q^{i2}} \{P\}. \quad (3.131)$$

A generalização de (3.129) pode ser feita de forma direta, obtendo-se [1, 6]

$$\{P^{J_{n,k}}\} = h^{J_{n,k}}(\mathbf{q})\{\hat{P}\} \quad (3.132)$$

e

$$\{P_{J_{n,k}}\} = \{\hat{P}\}h_{J_{n,k}}(\mathbf{p}), \quad (3.133)$$

com

$$\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n), \quad (3.134)$$

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n). \quad (3.135)$$

Um elemento geral de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, portanto pode ser escrito como

$$\{\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})\} = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} A_{J_{n,k}}^{K_{n,\ell}} \{\hat{P}_{K_{n,\ell}}^{J_{n,k}}\}, \quad (3.136)$$

onde foi introduzida a notação

$$\{\hat{P}_{K_{n,\ell}}^{J_{n,k}}\} = h^{J_{n,k}}(\mathbf{q})\{P\}h_{K_{n,\ell}}(\mathbf{p}). \quad (3.137)$$

Esses novos objetos (3.137) se multiplicam como

$$\{\hat{P}_{K_{n,\ell}}^{J_{n,k}}\}\{\hat{P}_{R_{n,r}}^{H_{n,s}}\} = \{\delta_{K_{n,\ell}}^{H_{n,s}}\}\{\hat{P}_{R_{n,r}}^{J_{n,k}}\}, \quad (3.138)$$

de onde segue que o conjunto formado pelos elementos (3.136) com o produto (3.138) forma uma álgebra. Esta nova álgebra será denotada por $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}_b, g)$, onde g é a métrica induzida pela correlação simétrica b .

Resultados importantes surgem quando são considerados os ideais mínimos $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)\{\hat{P}\}$ e $\{\hat{P}\}\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)$ à direita e à esquerda do elemento $\{\hat{P}\}$, respectivamente. Com efeito, funções sobre o espaço de configurações e sobre o espaço dos *momenta* podem ser associadas a elementos dos respectivos ideais. Por exemplo, as funções $\mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}$ denotadas $\psi(x)$ e $\psi(x^\dagger)$ ⁵ são associados aos elementos $\{\psi(\mathbf{q})\}$ e $\{\psi(\mathbf{p})\}$, respectivamente, dados por

$$\{\psi(\mathbf{q})\} = \psi(\mathbf{q})\{\hat{P}\}, \quad (3.139)$$

$$\{\psi(\mathbf{p})\} = \{\hat{P}\}\psi(\mathbf{p}), \quad (3.140)$$

com

$$\psi(\mathbf{q}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{J_{n,k}} h^{J_{n,k}}(\mathbf{q}), \quad (3.141)$$

$$\psi(\mathbf{p}) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{J_{n,k}} h_{J_{n,k}}(\mathbf{p}). \quad (3.142)$$

⁵ Aqui x e x^\dagger são números do corpo \mathbb{K} . No entanto é conveniente fazer a distinção entre $F(x)$ e $F(x^\dagger)$ no sentido que o objetivo é associar o espaço dos x com o espaço de configurações e o espaço dos x^\dagger com o espaço dos *momenta*.

i.e., as seguintes associações podem ser realizadas [1, 6]

$$\psi(x) \mapsto \{\psi(\mathbf{q})\}, \quad (3.143)$$

$$\psi(x^\dagger) \mapsto \{\psi(\mathbf{p})\}. \quad (3.144)$$

Nesse desenvolvimento [1, 6], quando $\{\psi(\mathbf{q})\}$ e $\{\psi(\mathbf{p})\}$ são elementos do espaço de Hilbert oriundo dos ideais de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}_b, \Omega_-)$, os $\psi(x)$ e $\psi(x^\dagger)$ convergem para funções de Lebesgue de quadrado integrável sobre o espaço de configurações e o espaço do *momenta*, respectivamente. Por outro lado, quando $\{\psi(\mathbf{q})\}$ e $\{\psi(\mathbf{p})\}$ não pertencem ao espaço de Hilbert oriundo dos ideais, os $\psi(x)$ e $\psi(x^\dagger)$ são funções de quadrado não integrável ou distribuições. Desta forma, os ideais de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)$ estão associados a três entes matemáticos: o espaço de Hilbert, o espaço de funções de quadrado não integrável e o espaço das distribuições. Essa situação pode ser ilustrada no diagrama da Figura 5.

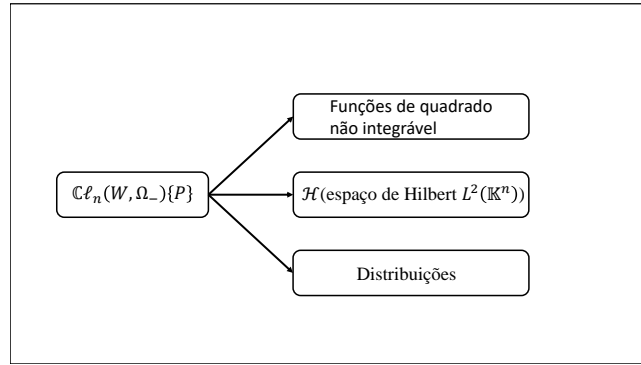


Figura 5 – Os elementos de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\}$ podem ser associados às funções de quadrado não integrável, às funções no espaço de Hilbert ou às distribuições. (Figura adaptada de [1])

Dois exemplos de elementos de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)\{\hat{P}\}$ que correspondem a entes matemáticos que vão além do espaço de Hilbert são os seguintes: *i)* Considere $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$; então o elemento

$$2\pi^{-\frac{n}{2}} i^k h_{J_{n,k}}(\mathbf{u}) h^{J_{n,k}}(\mathbf{p})\{P\} \quad (3.145)$$

corresponde a

$$(2\pi)^{-n} e^{i \sum_j u^j x^j}, \quad (3.146)$$

que é uma função de quadrado não integrável. Note que $h_{J_{n,k}}(\mathbf{u})$ são as funções de Hermite normalizadas sobre \mathbb{R}^n , enquanto $h^{J_{n,k}}(\mathbf{p})$ são as funções de Hermite normalizadas sobre o espaço dos \mathbf{p} . *ii)* O exemplo de distribuições é dado pelo elemento

$$\sum_k h_{J_{n,k}}(\mathbf{u}) h^{J_{n,k}}(\mathbf{q})\{P\} \quad (3.147)$$

e corresponde a n multiplicações do delta de Dirac

$$\prod_{j=1}^n \delta(x^j - u^j), \quad (3.148)$$

onde

$$\delta(a - b) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\psi}_m(a) \psi_m(b) \quad (3.149)$$

e $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$, $m \rightarrow \infty$, forma um conjunto completo de funções ortogonais.

Outro resultado devido à introdução de uma correlação simétrica entre \mathbf{V} e \mathbf{U} è o seguinte: os elementos p_i e q^i agem como derivadas nos elementos dos ideais mínimos à esquerda e à direita, respectivamente. Para demonstrar, consideremos o caso de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}_b, g)\{\hat{P}\}$. O elemento p_i tem a propriedade

$$p_i\{\hat{P}\} = 0 \quad (3.150)$$

o que pode ser verificado por meio da expansão em primeira ordem da exponencial da definição (3.131) de $\{\hat{P}\}$ e da multiplicação da álgebra. Nesse contexto, o elemento da álgebra p_i pode ser encarado como uma derivada e $\{\hat{P}\}$ faz o papel de uma função constante. Isto pode ser generalizado, de forma que haja as associações

$$\{\psi(\mathbf{q})\} \mapsto \psi(x) \quad (3.151)$$

$$\mathbf{p}_i\{\psi(\mathbf{q})\} \mapsto \partial_i \psi(x^\dagger), \quad (3.152)$$

ou seja, cada objeto de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)\{P\}$ corresponde a uma função ou distribuição usual, enquanto p_i multiplicado à esquerda deste objeto no ideal corresponde à derivação da função ou distribuição associada. Vale a pena ressaltar que a derivada na álgebra difere da derivada usual $\frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$. Isto pode ser visto por meio da sua relação com os polinômios de Hermite. De fato, da teoria dos polinômios de Hermite normalizados, tem-se que a sua derivada pode ser dada pela relação [96]

$$\partial_i h_r(x_i) = \sqrt{\frac{r}{2}} h_r(x_i) - \sqrt{\frac{r+1}{2}} h_{r+1}(x_i). \quad (3.153)$$

Então, associado a $\partial_i h_r(x)$ deve existir um elemento da álgebra dado por:

$$p_i h_r(q^i)\{\hat{P}\} = \left[\sqrt{\frac{r}{2}} h_r(q^i) - \sqrt{\frac{r+1}{2}} h_{r+1}(q^i) \right] \{\hat{P}\}. \quad (3.154)$$

Da mesma maneira, um operador $f(\partial_i)$, formado por uma série de potências de derivações, aplicado a uma função ou distribuição $\psi(x)$ è associado ao elemento

$$f(p_i)\{\hat{\psi}\} = f(p_i)\psi(\mathbf{q})\{\hat{P}\} \quad (3.155)$$

onde $\{\hat{\psi}\} = \psi(\mathbf{q})\{\hat{P}\}$. Neste espírito, observe que funções $\psi \in L^2(\mathbb{C})$ podem ser expandidas em uma série de Hermite

$$\psi = \sum_m a_m(\psi) h_m(x); \quad a_m(\psi) \in \mathbb{K}, \quad (3.156)$$

onde seus coeficientes podem ser obtidos através da relação

$$a_m(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) h_m(x) dx \quad (3.157)$$

i.e. haverá um elemento do ideal mínimo à esquerda associado a (3.156) dado por

$$\{\psi\} = \sum_m a_m(\psi) h_m(\mathbf{q}) \{\hat{P}\}, \quad (3.158)$$

e p_i multiplicado à esquerda de (3.158), dará

$$p_i \{\psi\} = \sum_m a_m(\psi) p_i h_m(\mathbf{q}) \{\hat{P}\}. \quad (3.159)$$

Portanto por (3.153–3.154), é natural que se defina a derivada da série (3.156) como

$$\partial^\alpha = \sum_m a_m(\psi) \partial^\alpha h_m(x), \quad (3.160)$$

e já que a expressão (3.153) permite o cálculo das derivadas de todas as ordens, segue que (3.160) é bem definida. Segue também que as expressões (3.153) e (3.157) possibilitam que os coeficientes $a_m(\psi)$ em (3.160) sejam dados por

$$a_m(\psi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \partial h_m(x) dx. \quad (3.161)$$

Deve-se mostrar que existem situações em que a integral (3.161) diverge. Essas situações ocorrem quando uma função não pode ser expandida por meio de uma série formal de polinômios de Hermite [99]. Nesses casos, a derivada ∂ usual do cálculo difere da derivada \mathbf{p} da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)$. A derivada da álgebra é aquela envolvida na teoria dos espaços de Hilbert – no caso, espaços de Hilbert de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ –. Essa derivada corresponde ao operador momento aplicado a um estado $|\psi\rangle$ na mecânica quântica usual. Esse operador é caracterizado por uma matriz e numa determinada representação, por exemplo, na representação das coordenadas, tem-se

$$\langle q | \hat{p} | \psi \rangle = -i \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \quad (3.162)$$

onde $\psi(x)$ é a função de onda do estado $|\psi\rangle$ na representação das coordenadas e $\frac{\partial}{\partial x}$ é a derivada usual do cálculo.

Para finalizar, é importante notar que os polinômios de Hermite são autoestados do operador de Fourier [96]

$$\mathcal{F}[h_r(x)] = (-1)^r h_r(x). \quad (3.163)$$

Este fato motiva a definição do operador de Fourier no ideal $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, g) \{\hat{P}\}$, como

$$\mathfrak{F}[h^{J_{n,k}(\mathbf{q})} \{\hat{P}\}] := (-1)^k \{\hat{P}^{J_{n,k}}\}, \quad (3.164)$$

onde $k = \sum_{\ell=1}^n j_{\ell,k}$, $j_{\ell,k} \in J_{n,k}$. O operador de Fourier definido sobre o ideal à esquerda é, neste contexto, uma generalização do operador de Fourier usual, no sentido de que esse é definido mesmo quando $\{\psi\} \in \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)\{P\}$ corresponde a uma distribuição. Neste caso,

$$\mathfrak{F}[\{\psi\}] = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p C_{J_{n,p}} \{\hat{P}^{J_{n,p}}\} \quad (3.165)$$

Os coeficientes $C_{J_{n,p}}$ da série formal de polinômios de Hermite

$$\psi(\mathbf{q}) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{J_{n,p}} \{\hat{P}^{J_{n,p}}\} \quad (3.166)$$

existem mesmo quando a $\psi(\mathbf{q})$ diverge fortemente.

4 A álgebra $PDKP$, a superálgebra DKP e aplicações

4.1 Introdução

Na subseção 2.3.2.1 foi apresentada a álgebra DKP . Foi visto que essa álgebra está associada a uma equação de primeira ordem análoga à equação de Dirac, no entanto descreve partículas bosônicas. Foi mostrado também que a álgebra DKP possui uma representação em termos da álgebra exterior, o que permite a escrita da equação de DKP por meio de formas diferenciais. Esta formulação, desenvolvida por Jaime [91], tem relação com o desenvolvimento de Schönberg [2, 4, 5] da álgebra DKP por meio da álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$.

Para se obter representações da álgebra DKP no formalismo de Schönberg é necessário construir projetores (Π_p) que “levam” elementos da álgebra em suas porções de ordem p . Todos os elementos envolvidos na construção das representações de Schönberg da álgebra DKP estão contidos na própria álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ o que mostra que a álgebra DKP está contida na álgebra de Clifford ortogonal do espaço \mathbf{W} munida da forma bilinear simétrica Ω_+ .

No presente capítulo desenvolveremos, de forma inédita na literatura, o método usado por Schönberg para extrair a álgebra DKP de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$, mas agora a partir da álgebra de Clifford simplética $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Com esse objetivo, alguns aspectos matemáticos precisam ser observados: o item mais importante nesse sentido é a introdução de uma correlação antissimétrica entre os espaços que compõem \mathbf{W} , em oposição a uma correlação simétrica no caso anterior. Outro passo importante é a construção de projetores da álgebra capazes de extrair uma ordem específica dos elementos. Esses projetores devem obedecer propriedades semelhantes às aquelas obedecidas pelos projetores (Π_p) e os geradores da álgebra (\mathbf{e}_i) e (\mathbf{e}^i) . Para isso mostramos que embora tais projetores não as obedeam, as classes de equivalência a que estes projetores pertencem respeitam tais propriedades. Na sequência, de forma natural, propomos a extensão do método desenvolvido por Schönberg para o espaço de todas as classes de equivalência. Como consequência do novo processo obtemos infinitas representações de uma álgebra complementar à superálgebra DKP proposta por Okubo [50]. Nessa formulação determinamos equações de Dirac, de DKP e de Klein-Gordon-Fock simpléticas.

Explorando as estruturas algébricas de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ e $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, analisamos o que ocorre com a multiplicação dos idempotentes primitivos das álgebras definindo então um novo idempotente primitivo $\{(P)\} = \{P\}(P) = (P)\{P\}$. Mostramos que essa

definição permite que se multiplique os elementos das álgebras *DKP* e *Para-Duffin-Kemmer-Petiau (PDKP)* nas representações de Schonberg, e possibilita a obtenção das equações de Dirac, *DKP* e Klein-Gordon-Fock sobre, seguindo a nomenclatura de Okubo [50], uma supervariiedade.

Somado a este desenvolvimento, nos foi possível explicar a existência da álgebra *PDKP* usando a álgebra simétrica, o que evidencia a diferença entre o formalismo baseado na álgebra de Schönberg $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ e o formalismo baseado na álgebra simétrica. A principal diferença está na presença de um idempotente primitivo no formalismo baseado em $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ que permite a alternância entre os formalismos covariante e contravariante de uma forma natural. Já no desenvolvimento a partir da álgebra simétrica deve-se escolher desde o início se será um formalismo covariante ou contravariante, de maneira que não se pode alternar entre os formalismos. Isso ocorre pois não há um elemento idempotente primitivo na álgebra simétrica. Essas questões serão desenvolvidas nas próximas seções, sendo conveniente começar por uma revisão da álgebra *PDKP* e da superálgebra *DKP*.

4.2 A álgebra *PDKP* e a superálgebra *DKP*

A álgebra *Para-Duffin-Kemmer-Petiau*, ou álgebra *PDKP*, é uma álgebra proposta por Okubo [50] como um complemento da álgebra de *DKP*, no sentido de que essas seriam casos específicos de uma superálgebra. A álgebra *PDKP* pode ser entendida como o quociente da álgebra tensorial pelo ideal I_{PDKP} gerado pelo elemento do tipo

$$\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nu} - f(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u})\boldsymbol{\omega} - f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\nu} \quad (4.1)$$

onde $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$ pertencem a um espaço m -dimensional \mathbf{V} e $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$ é uma forma bilinear simplética não degenerada. Portanto, a álgebra *PDKP*, denotada por $\mathcal{P}(\mathbf{V}, f)$, é definida como

$$\mathcal{P}(\mathbf{V}, f) = \frac{T(\mathbf{V})}{I_{PDKP}}. \quad (4.2)$$

A multiplicação característica da álgebra é obtida através da exigência da projeção natural $pr : T(\mathbf{V}) \rightarrow T(\mathbf{V})/I_{PDKP}$ ser um homomorfismo, o que faz com que $I_{PDKP} \in \ker pr$. Neste caso, tem-se

$$\eta(\boldsymbol{\nu})\eta(\mathbf{u})\eta(\boldsymbol{\omega}) - \eta(\boldsymbol{\omega})\eta(\mathbf{u})\eta(\boldsymbol{\nu}) = f(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u})\eta(\boldsymbol{\omega}) - f(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})\eta(\boldsymbol{\nu}) \quad (4.3)$$

com

$$\eta = pr \circ \iota \quad (4.4)$$

onde $\iota : \mathbf{V} \rightarrow T(\mathbf{V})$ ainda denota a imersão de \mathbf{V} em $T(\mathbf{V})$ por meio da identificação de \mathbf{V} com o espaço $T_1(\mathbf{V})$. Em outras palavras, a aplicação *PDKP* $\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{V}, f)$ deixa o diagrama da Figura 6 comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{V} & \xrightarrow{\iota} & T(\mathbf{V}) \\
 & \searrow \eta & \downarrow pr \\
 & & \frac{T(\mathbf{V})}{I_{PDKP}}
 \end{array}$$

 Figura 6 – $\eta = pr \circ \iota$

A álgebra PDKP é uma álgebra de dimensão infinita e mantém a \mathbb{Z} -gradação da álgebra tensorial. Desta forma, é conveniente que se defina

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{V}, f) := \frac{T_k(\mathbf{V})}{I_{PDKP}} \quad (4.5)$$

de maneira que

$$\mathcal{P}(\mathbf{V}, f) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(\mathbf{V}, f). \quad (4.6)$$

4.3 A superálgebra DKP

A superálgebra DKP é uma álgebra que une as álgebras DKP e PDKP em um único formalismo. Para que ela possa ser entendida, considere o espaço

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 \quad (4.7)$$

onde $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}_0 + \dim \mathbf{V}_1$, com $\dim \mathbf{V}_0 = n$ e $\dim \mathbf{V}_1 = m$. Considere também a assinatura σ definida por

$$\sigma(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{se } \nu \in \mathbf{V}_0; \\ 1, & \text{se } \nu \in \mathbf{V}_1. \end{cases} \quad (4.8)$$

e a forma bilinear \mathcal{G} definida por

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \nu) = \begin{cases} g(\mathbf{u}, \nu), & \text{se } \sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\nu) = 0; \\ f(\mathbf{u}, \nu), & \text{se } \sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\nu) = 1; \\ 0, & \text{se } \sigma(\mathbf{u}) \neq \sigma(\nu). \end{cases} \quad (4.9)$$

onde g e f são formas bilineares simétrica e simplética, respectivamente. Observe que \mathcal{G} , como definida acima, obedece a propriedade

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \nu) = (-1)^{\sigma(\mathbf{u})\sigma(\nu)} \mathcal{G}(\nu, \mathbf{u}). \quad (4.10)$$

A superálgebra DKP, denotada por $S(\mathbf{V}, \mathcal{G})$, é caracterizada pelo produto

$$\xi(\mathbf{u})\xi(\nu)\xi(\omega) + (-1)^{\sum \sigma(\mathbf{u}, \nu, \omega)} \xi(\omega)\xi(\nu)\xi(\mathbf{u}) = \mathcal{G}(\mathbf{u}, \nu)\xi(\omega) + \mathcal{G}(\omega, \nu)\xi(\mathbf{u}) \quad (4.11)$$

onde a aplicação

$$\xi : \mathbf{V} \longrightarrow S(\mathbf{V}, \mathcal{G}) \quad (4.12)$$

é um homomorfismo, de modo que

$$\xi(\mathbf{V}) = \xi(\mathbf{V}_0)\xi(\mathbf{V}_1), \quad (4.13)$$

e, tem-se

$$\sum \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) = (\sigma(\mathbf{u}) + \sigma(\mathbf{v}) + \sigma(\boldsymbol{\omega})) \pmod{2}. \quad (4.14)$$

A expressão (4.11) pode ser escrita em termos da base de \mathbf{V} . Suponha então que

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+m}\} \quad (4.15)$$

seja uma base de \mathbf{V} , de maneira que $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{e}_{2n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+m}\}$ sejam bases de \mathbf{V}_0 e \mathbf{V}_1 , respectivamente. Desta forma, a expressão (4.11) pode ser reescrita como

$$\xi_\mu \xi_\nu \xi_\lambda + (-1)^{\sum \sigma(\mu, \nu, \lambda)} \xi_\lambda \xi_\nu \xi_\mu = \mathcal{G}_{\mu\nu} \xi_\lambda + \mathcal{G}_{\lambda\nu} \xi_\mu \quad (4.16)$$

onde foram definidos

$$\xi_\mu := \xi(\mathbf{e}_\mu); \quad \sum \sigma(\mu, \nu, \lambda) = (\sigma(\mathbf{e}_\mu) + \sigma(\mathbf{e}_\nu) + \sigma(\mathbf{e}_\lambda)) \pmod{2}, \quad (4.17)$$

e $\mathcal{G}_{\mu\nu} := \mathcal{G}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$. Desta maneira, a equação (4.17) se reduz à álgebra de *DKP* quando $\mu, \nu, \lambda = 1, \dots, n$ e à equação característica da álgebra *PDKP* quando $\mu, \nu, \lambda = n+1, \dots, n+m$.

Okubo [50] propôs uma representação para os entes ξ_ν . Essa representação é dada em termos de operadores Q_μ e \bar{Q}_μ que satisfazem as equações

$$Q_\mu \bar{Q}_\nu Q_\lambda + (-1)^{\sum \sigma(\mu, \nu, \lambda)} Q_\lambda \bar{Q}_\nu Q_\mu = \mathcal{G}_{\nu\mu} Q_\lambda + \mathcal{G}_{\nu\lambda} Q_\mu, \quad (4.18)$$

$$\bar{Q}_\mu Q_\nu \bar{Q}_\lambda + (-1)^{\sum \sigma(\mu, \nu, \lambda)} \bar{Q}_\lambda Q_\nu \bar{Q}_\mu = \mathcal{G}_{\nu\mu} \bar{Q}_\lambda + \mathcal{G}_{\nu\lambda} \bar{Q}_\mu. \quad (4.19)$$

Essa representação é caracterizada pelas matrizes 2×2 dadas por

$$\xi_\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & Q_\mu \\ \bar{Q}_\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

como pode ser verificado pela substituição de (4.20) em (4.16). Uma realização pode ser dada por meio de operadores de criação e aniquilação generalizados, isto é,

$$Q_\mu \bar{Q}_\nu + (-1)^{\sigma_\mu \sigma_\nu} \bar{Q}_\nu Q_\mu = \mathcal{G}_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

$$Q_\mu Q_\nu + (-1)^{\sigma_\mu \sigma_\nu} Q_\nu Q_\mu = 0, \quad (4.22)$$

$$\bar{Q}_\mu \bar{Q}_\nu + (-1)^{\sigma_\mu \sigma_\nu} \bar{Q}_\nu \bar{Q}_\mu = 0, \quad (4.23)$$

onde foi definido $\sigma_\mu = \sigma(\mathbf{e}_\mu)$. No conjunto de equações (4.21–4.23) pode-se perceber que, para $\sigma_\mu = \sigma_\nu = 0$, as equações correspondem às relações obedecidas pelos operadores de criação e aniquilação de férmions. No caso em que $\sigma_\mu = \sigma_\nu = 1$, essas são as relações obedecidas pelos operadores bosônicos. Observe ainda que, para $\sigma_\mu \neq \sigma_\nu$, tem-se que os operadores bosônicos e fermiônicos anticomutam entre si.

Para finalizar esta seção, é importante ressaltar a relação da álgebra super *DKP* com a equação de Klein-Gordon-Fock. Para isto, considera-se uma supervariiedade com n coordenadas bosônicas x_1, \dots, x_n e m coordenadas de Grassmann x_{n+1}, \dots, x_{n+m} . Okubo [50] obtém então a equação de *DKP* generalizada escrita como

$$[i\xi_\mu \partial^\mu - m] \psi = 0, \quad (4.24)$$

de onde segue a equação

$$\left[\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} + \sum_{\nu, \lambda=1}^m f_{\nu\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z_\nu \partial z_\lambda} + m^2 \right] \psi = 0, \quad (4.25)$$

com $z_\mu := x_{n+\mu}$. A equação (4.25) é denominada equação de Klein-Gordon-Fock generalizada [50]. Observe que as parcelas correspondente a $\mu = 1, \dots, n$ é a equação de Klein-Gordon-Fock usual, enquanto as parcelas relativas a $\nu, \lambda = 1, \dots, m$ é a sua correspondente para variedades de Grassmann e forma bilinear simplética.

4.4 A relação entre a álgebra *PDKP* e a álgebra simétrica

Apesar de Okubo [50] propor um espaço de representação da álgebra *PDKP*, onde se utiliza tensores simétricos, ele não usa a estrutura da álgebra simétrica. Em contrapartida, como discutimos no capítulo 2, a álgebra de *DKP* pode ser posta como uma subálgebra da álgebra exterior. Este desenvolvimento possibilita tentar explicar a álgebra *PDKP* via álgebra simétrica, o que apresentaremos nesta seção.

Para nosso objetivo, consideremos a correlação antissimétrica entre um espaço vetorial de m -dimensões e seu dual¹

$$\sharp : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^*. \quad (4.26)$$

Consideremos também a forma bilinear simplética induzida por \sharp da seguinte maneira:

$$f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{u}_\sharp(\boldsymbol{\nu}) := \sharp(\mathbf{u})(\boldsymbol{\nu}) = -\sharp(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{u}), \quad (4.27)$$

com $\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbf{V}$. A correlação aplicada na base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ resulta em

$$\mathbf{e}_{\mu\sharp} = f_{\mu\nu} \mathbf{e}^\nu \quad (4.28)$$

¹ Na literatura o símbolo \sharp é comumente utilizado para denotar a inversa de uma correlação simétrica \flat , entretanto nesta tese \sharp denotará uma correlação antissimétrica.

onde $f_{\mu\nu} := f(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$ e $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^m\}$ é a base de \mathbf{V}^* . Consideremos ainda o espaço

$$N^k(\mathbf{V}) = \bigvee^k(\mathbf{V}) + \bigvee^{k+1}(\mathbf{V}), \quad (4.29)$$

onde seus elementos são dados por

$$\varphi^{[k]} = \varphi^k + \varphi^{k+1} \quad (4.30)$$

com $\varphi^\ell \in \bigvee^\ell(\mathbf{V})$. Tendo essa estrutura definamos a operação α^k como

$$\begin{aligned} \alpha^k : \mathbf{V} &\longrightarrow \text{End}\left(\bigvee^k(\mathbf{V})\right) \\ \alpha^k(\boldsymbol{\nu})\varphi^{[k]} &= c \circ \sharp(\boldsymbol{\nu})\varphi^k + d(\boldsymbol{\nu})\varphi^{k+1}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde c e d são operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica covariante definidos na subseção 3.2.2. Cada $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{V}$ define operadores $\alpha^k: N^k(\mathbf{V}) \rightarrow N^k(\mathbf{V})$ e são elementos da representação da álgebra PDKP em termos de álgebra simétrica. Como não há este desenvolvimento na literatura, é instrutivo apresentá-lo em algum detalhe. Devemos calcular inicialmente os termos $\alpha^k(\mathbf{u})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\varphi^{[k]}$ e $\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\mathbf{u})\varphi^{[k]}$, ou seja:

i) Cálculo de $\alpha^k(\mathbf{u})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\varphi^{[k]}$

$$\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\varphi^{[k]} = c(\boldsymbol{\omega}_\#)\varphi^k + d(\boldsymbol{\omega})\varphi^{k+1} \quad (4.32)$$

$$\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\varphi^{[k]} = c(\boldsymbol{\nu}_\#)d(\boldsymbol{\omega})\varphi^{k+1} + d(\boldsymbol{\nu})c(\boldsymbol{\omega}_\#)\varphi^k \quad (4.33)$$

$$\alpha^k(\mathbf{u})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\varphi^{[k]} = c(\mathbf{u}_\#)d(\boldsymbol{\nu})c(\boldsymbol{\omega}_\#)\varphi^k + d(\mathbf{u})c(\boldsymbol{\nu}_\#)d(\boldsymbol{\omega})\varphi^{k+1} \quad (4.34)$$

ii) Cálculo de $\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\mathbf{u})\varphi^{[k]}$

Procedendo de forma análoga ao caso anterior, obtemos

$$\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\mathbf{u})\varphi^{[k]} = c(\boldsymbol{\omega}_\#)d(\boldsymbol{\nu})c(\mathbf{u}_\#)\varphi^k + d(\boldsymbol{\omega})c(\boldsymbol{\nu}_\#)d(\mathbf{u})\varphi^{k+1}. \quad (4.35)$$

Observemos que as parcelas de (4.34) e (4.35) são iguais mediante a troca $\mathbf{u} \longleftrightarrow \boldsymbol{\omega}$. Podemos, então, escolher uma destas equações e mudar a ordem dos fatores, observando que os vetores podem ser expandidos na base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ e, por (3.33) e (4.28), tem-se

$$[d(\mathbf{u}), c(\boldsymbol{\nu}_\#)] = f(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}); \quad (4.36)$$

Escolhendo a equação (4.34) e realizando operações algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha^k(\mathbf{u})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega})\varphi^{[k]} &= [f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})c(\mathbf{u}_\#) - f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})c(\boldsymbol{\omega}_\#) + c(\boldsymbol{\omega}_\#)d(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{u}_\#)]\varphi^k \\ &\quad + [-f(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega})d(\mathbf{u}) + f(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u})d(\boldsymbol{\omega}) + d(\boldsymbol{\omega})c(\boldsymbol{\nu}_\#)d(\mathbf{u})]\varphi^{k+1}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Agora, subtraindo (4.35) de (4.37), resulta que

$$\begin{aligned} [\alpha^k(\mathbf{u})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega}) - \alpha^k(\boldsymbol{\omega})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\mathbf{u})]\varphi^{[k]} &= f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) [c(\mathbf{u}_\#)\varphi^k + d(\mathbf{u})\varphi^{k+1}] \\ &\quad - f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) [c(\boldsymbol{\omega}_\#)\varphi^k + d(\boldsymbol{\omega})\varphi^{k+1}] \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde se reconhece, dentro dos colchetes do lado direito da equação, a definição do operadores $\alpha^k(\mathbf{u})$ e $\alpha^k(\boldsymbol{\omega})$. Como (4.38) é válida para todo $\varphi^{[k]} \in N^k(\mathbf{V})$, segue que:

$$\alpha^k(\mathbf{u})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega}) - \alpha^k(\boldsymbol{\omega})\alpha^k(\boldsymbol{\nu})\alpha^k(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\alpha^k(\boldsymbol{\omega}) + f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})\alpha^k(\mathbf{u}), \quad (4.39)$$

que é a mesma equação que a proposta por Okubo [50], a menos de um sinal negativo em todo lado direito. Isto, entretanto, pode ser resolvido com a proposta de uma forma bilinear dada por

$$\begin{aligned} f' : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) &= -f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Desta forma, em termos da base de \mathbf{V} a equação (4.39) pode ser reescrita como

$$\alpha_\mu^k \alpha_\nu^k \alpha_\lambda^k - \alpha_\lambda^k \alpha_\nu^k \alpha_\mu^k = f'_{\mu\nu} \alpha_\lambda^k - f'_{\lambda\nu} \alpha_\mu^k, \quad (4.41)$$

que é a equação de Okubo [50]. Para comparações futuras com o formalismo baseado na álgebra de Schönberg $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, é interessante expandir a definição do domínio de $\alpha^k(\boldsymbol{\nu})$ para toda a álgebra simétrica. Para isto, a projeção natural P^k da álgebra simétrica covariante de ordem k é utilizada, de modo que α é redefinido como

$$\begin{aligned} \alpha^k : \mathbf{V} &\longrightarrow \text{End}(\bigvee(\mathbf{V})) \\ \alpha^k(\boldsymbol{\nu}) &= d(\boldsymbol{\nu})P^{k+1} + c \circ \sharp(\boldsymbol{\nu})P^k. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Observe que as definições (4.31) e (4.42) são equivalentes. Além disto, note que

$$P^k P^\ell = \delta_{k\ell} P^k, \quad (\text{Sem soma implícita}) \quad (4.43)$$

ou seja, são idempotentes ortogonais e, conseqüentemente, partições da unidade, de modo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} P^k = 1_{\text{Sim}(\bigvee(\mathbf{V}^*))}, \quad (4.44)$$

onde $1_{\text{Sim}(\bigvee(\mathbf{V}^*))}$ é a identidade da álgebra simétrica covariante.

Na próxima seção mostraremos como é possível formular a álgebra PDKP por meio da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$.

4.5 A álgebra PDKP na representação baseada em $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$

É possível extrair a álgebra PDKP da álgebra de Clifford simplética de \mathbf{W} . No entanto, o desenvolvimento dessa extração difere do método usado por Schönberg para extrair a álgebra DKP da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Lembrando, esse último é caracterizado pela introdução de um elemento da álgebra capaz de extrair elementos de determinadas ordens dos ideais mínimos; também é necessária a inclusão de uma correlação simétrica

entre os espaços \mathbf{V} e \mathbf{U} . Adicionados esses ingredientes na álgebra, é possível definir elementos que são representações irredutíveis da álgebra DKP .

Seguindo esse protocolo, mas considerando a álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, devemos verificar se é possível introduzir projetores em $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Neste sentido, em analogia com o caso da álgebra de férmions, definamos o elemento

$$\{\Pi_p\} := \sum_j \frac{1}{p!} \{P_{J_p}^{J_p}\}, \quad (4.45)$$

ou explicitamente:

$$\{\Pi_p\} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \{e^{j_1}\} \dots \{e^{j_p}\} \{P\} \{e_{j_p}\} \dots \{e_{j_1}\}, \quad (4.46)$$

com $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_p \leq n$. De fato, o elemento $\{\Pi_p\}$ projeta os ideais mínimos de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ nas suas partes de ordem p , como é possível verificar por meio da multiplicação algébrica (3.68)

$$\begin{aligned} \{\Pi_p\}\psi &= \sum_j \frac{1}{p!} \{P_{J_p}^{J_p}\} \sum_q A_{K_q} \{P^{K_q}\} = \sum_j \sum_q \frac{1}{p!} A_{K_q} \{\delta_{J_p}^{K_q}\} \{P^{J_p}\} \\ &= \sum_j \sum_q \frac{1}{p!} A_{K_q} \delta_{pq} \text{Perm} \hat{\delta}_{J_p}^{K_p} \{P^{J_p}\} \\ &= A_{J_p} \{P^{J_p}\}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde foi usado $\sum_j \text{Perm} \hat{\delta}_{J_p}^{K_p} = p!$. Analogamente, temos que

$$\psi' \{\Pi_p\} = A'^{J_p} \{P_{J_p}\} \quad (4.48)$$

com

$$\psi \in \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) \{P\}; \quad \psi' \in \{P\} \mathbb{C}\ell(\mathbf{W}, \Omega_-). \quad (4.49)$$

Desta maneira, nota-se que $\{\Pi_p\}$ consegue extrair as partes de ordem p dos ideais. Para completar, devemos verificar se esses elementos obedecem às propriedades semelhantes às (2.195) e (2.197). De fato, os $\{\Pi_p\}$ são ortogonais entre si, pois

$$\begin{aligned} \{\Pi_p\} \{\Pi_q\} &= \sum_j \frac{1}{p!} \{P_{J_p}^{J_p}\} \sum_k \frac{1}{q!} \{P_{K_q}^{K_q}\} = \sum_j \sum_k \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \{\delta_{J_p}^{K_q}\} \{P_{K_q}^{J_p}\} \\ &= \delta_{p,q} \sum_j \sum_k \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \text{Perm} \hat{\delta}_{J_p}^{K_p} \{P_{J_p}^{J_p}\} \\ &= \delta_{p,q} \sum_j \frac{1}{p!} \{P_{J_p}^{J_p}\} \\ &= \delta_{p,q} \{\Pi_p\}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

e portanto podem ser pensado como uma partição da unidade, de modo que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \{\Pi_p\} = 1_{\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)}, \quad (4.51)$$

onde $1_{\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)}$ é a unidade da álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$.

A questão, no entanto, é que esses objetos falham em obedecer propriedades análogas (2.197) com os geradores de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Essa falha ocorre devido à simetria da álgebra. Na realidade, tem-se aqui conjuntos multi-índices monotonicamente ascendentes, em contrapartida aos estritamente ascendentes de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Desta maneira, os índices em $\{P_{J_p}^{J_p}\}$ podem se repetir sem anular o termo. É instrutivo mostrar como se calcula $\{\Pi_{p+1}\}\{e^i\}$. Mas antes, note que $\{\Pi_p\}$ pode ser escrito em termos da base (3.100). Como os índices, que nesta nova base são interpretados como expoentes, são os mesmos para $\{e_i\}$ e $\{e^i\}$, espera-se que os fatores de simetria sejam os mesmos que aqueles que se encontram em elementos dos ideais. Tem-se, assim, $\{\Pi_p\}$ na nova base definida como

$$\{\Pi_p\} := \sum_j \frac{1}{p!} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}!} \{P_{J_{n,p}}^{J_{n,p}}\}. \quad (4.52)$$

Explicitamente, a definição (4.52) é dada por

$$\{\Pi_p\} = \sum_j \frac{1}{p!} \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}! \{e^1\}^{j_{1,p}} \dots \{e^n\}^{j_{n,p}} \{P\} \{e_n\}^{j_{n,p}} \dots \{e_1\}^{j_{1,p}}. \quad (4.53)$$

Com a definição (4.53) temos:

$$\begin{aligned} \{\Pi_{p+1}\}\{e^i\} &= \sum_j \frac{1}{(p+1)!} \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p+1}! \{e^1\}^{j_{1,p+1}} \dots \{e^n\}^{j_{n,p+1}} \{P\} \{e_n\}^{j_{n,p+1}} \dots \{e_1\}^{j_{1,p+1}} \{e^i\} \\ &= \sum_j \frac{1}{(p+1)!} \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p+1}! \{e^1\}^{j_{1,p+1}} \dots \{e^n\}^{j_{n,p+1}} \{P\} \{e_n\}^{j_{n,p+1}} \dots \{e_i\}^{j_{i,p+1}} \{e^i\} \dots \{e_1\}^{j_{1,p+1}} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Lembrando que, para dois operadores \hat{A} e \hat{B} que obedecem à regra de comutação $[\hat{A}, \hat{B}] = \gamma$, então tem-se $[\hat{A}^m, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}\gamma$, podemos escrever

$$\{P\}\{e_i\}^{j_{i,p+1}} \{e^i\} = j_{i,p+1} \{P\}\{e_i\}^{j_{i,p+1}-1}, \quad (4.55)$$

já que $\{e_i\}^{j_{i,p+1}} \{e^i\}$ comuta com todos $\{e_k\}$ onde $k \neq i$. Por outro lado, na parte covariante de (4.53) existe o fator $\{e^i\}^{j_{i,p+1}} = \{e\}^i \{e^i\}^{j_{i,p+1}-1}$ e além disto, $\{e^i\}$ comuta com todos $\{e^j\}$. Assim, a expressão (4.54) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \{\Pi_{p+1}\}\{e^i\} &= \sum_j \frac{1}{(p+1)!} \frac{1}{p!} j_{i,p+1} j_{1,p+1}! \dots (j_{i,p+1} - 1)! \dots j_{n,p+1}! \\ &\times \{e^i\} \{e^1\}^{j_{1,p+1}} \dots \{e^i\}^{j_{i,p+1}-1} \dots \{e^n\}^{j_{n,p+1}} \{P\} \{e_n\}^{j_{n,p+1}} \dots \{e^i\}^{j_{i,p+1}-1} \dots \{e^1\}^{j_{1,p+1}}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Note que a soma dos expoentes dos $\{e_k\}$'s e $\{e^k\}$'s agora é igual a p , devida à subtração do expoente do lado direito de (4.55). Os números que estão postos em fatoriais também

têm soma igual a p . Além disto, o índice $j_{i,p+1}$ em (4.56) será sempre uma unidade maior do que o expoente de $\{e_i\}$ e $\{e^i\}$, de maneira que podemos escrever

$$\begin{aligned} \{\Pi_{p+1}\}\{e^i\} &= \{e^i\} \sum_j \frac{(j_{i,p} + 1)}{(p+1)} \frac{1}{p!} \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}! \{e^1\}^{j_{1,p}} \dots \{e^n\}^{j_{n,p}} \{P\} \{e_n\}^{j_{n,p}} \dots \{e_1\}^{j_{1,p}} \\ &= \{e^i\} \sum_j \frac{(j_{i,p} + 1)}{(p+1)} \frac{1}{p!} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}!} \{P_{J_{n,p}}^{J_{n,p}}\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Observe que do lado direito de (4.57) não se encontra o projetor $\{\Pi_p\}$, escrito como em (4.52), mas sim uma espécie de projetor onde em cada parcela da soma em j há um fator multiplicativo $\frac{(j_{i,p} + 1)}{(p+1)}$. O subíndice i de $j_{i,p}$ se refere ao supraíndice do gerador $\{e^i\}$ ao qual $\{\Pi_p\}$ foi aplicado. A expressão (4.57) pode ser reescrita como

$$\{\Pi_{p+1}\}\{e^i\} = \{e^i\}\{\Pi_p^{i\uparrow}\}, \quad (4.58)$$

onde

$$\{\Pi_p^{i\uparrow}\} = \sum_j A_{j_{i,p}}^\uparrow \{P_{J_{n,p}}^{J_{n,p}}\} \quad (4.59)$$

e

$$A_{j_{i,p}}^\uparrow = \frac{(j_{i,p} + 1)}{(p+1)} \frac{1}{p!} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}!}. \quad (4.60)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento, chega-se às propriedades

$$\{e^i\}\{\Pi_p\} = \{\Pi_{p+1}^{i\downarrow}\}\{e^i\}, \quad (4.61)$$

$$\{e_i\}\{\Pi_{p+1}\} = \{\Pi_p^{i\uparrow}\}\{e_i\}, \quad (4.62)$$

$$\{\Pi_p\}\{e_i\} = \{e^i\}\{\Pi_{p+1}^{i\downarrow}\}, \quad (4.63)$$

com

$$\{\Pi_{p+1}^{i\downarrow}\} = \sum_j A_{j_{i,p+1}}^\downarrow \{P_{J_{n,p+1}}^{J_{n,p+1}}\}, \quad (4.64)$$

onde

$$A_{j_{i,p+1}}^\downarrow = \frac{(p+1)}{j_{i,p+1}} \frac{1}{(p+1)!} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p+1}!}. \quad (4.65)$$

As propriedades (4.58) e (4.61–4.63) apresentam os novos elementos $\{\Pi_p^{i\uparrow}\}$ e $\{\Pi_{p+1}^{i\downarrow}\}$. Apesar desses elementos não serem exatamente projetores, no sentido de que se multiplicados por um elemento ψ dos ideais da álgebra, extraem a sua parte de ordem p ou $p+1$, observa-se que se tal multiplicação for feita, terá como resultado um tensor de ordem p ou $p+1$, respectivamente. Além disto, a multiplicação entre os elementos $\{\Pi_p^{i\uparrow}\}$ e $\{\Pi_q^{j\downarrow}\}$, onde o símbolo $\ell \uparrow \downarrow$ indica $\ell \uparrow$ ou $\ell \downarrow$, só é diferente de zero para $p = q$. De modo geral, estes objetos se multiplicam por meio da regra

$$\{\Pi_p^{i\uparrow}\}\{\Pi_q^{j\downarrow}\} = \delta_{pq} \{\Pi_p^{i\uparrow j\downarrow}\}, \quad (4.66)$$

onde

$$\{\Pi_p^{i\uparrow j\downarrow}\} = \sum_k A_{ki,p}^{\uparrow} A_{kj,p}^{\downarrow} \{P_{K_{n,p}}^{K_{n,p}}\} \quad (4.67)$$

ou seja, embora esses entes não sejam, de fato, projetores, eles obedecem as propriedades semelhantes àquelas obedecidas pelos projetores (Π_p) , e isso leva a concluir que tais propriedades podem ser reproduzidas em $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ via classes de equivalência. Com o objetivo de construir tais classes, consideremos o elemento

$$\{\Pi^{J_{n,p}}\} := \frac{1}{p! \prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}!} \{P_{J_{n,p}}^{J_{n,p}}\} \quad (\text{Sem soma implícita}). \quad (4.68)$$

e o espaço $\prod_p(\mathbf{V})$ formado por todos os elementos do tipo

$$\{\Lambda_p\} = A_{J_{n,p}} \{\Pi^{J_{n,p}}\} \quad (\text{Soma implícita}). \quad (4.69)$$

Sendo $\{\psi_p\} \in \prod_p(\mathbf{V})$ e $\{\varphi_q\} \in \prod_q(\mathbf{V})$, diz-se então que $\{\psi_p\}$ é equivalente a $\{\varphi_q\}$, ou $\{\psi_p\} \sim \{\varphi_q\}$, se esses dois elementos pertencerem ao mesmo espaço $\prod_p(\mathbf{V})$, *i.e.*, se $p = q$. Com a definição (4.69), esta relação de equivalência está bem definida, pois

- $\{\psi_p\} \sim \{\psi_p\}$, (reflexão)
- se $\{\psi_p\} \sim \{\varphi_q\}$, então $\{\varphi_q\} \sim \{\psi_p\}$, (simetria)
- se $\{\psi_p\} \sim \{\varphi_q\}$ e $\{\varphi_q\} \sim \{\lambda_k\}$, então $\{\psi_p\} \sim \{\lambda_k\}$, (transição)

com $\{\lambda_k\} \in \prod_p(\mathbf{V})$. Desse modo, a classe de equivalência do elemento $\{\psi_p\}$, denotada por $[\{\psi_p\}]$, é definida como o conjunto de todos elementos equivalentes a $\{\psi_p\}$. Note que, por esta definição, tem-se que

$$\{\psi_p\}, \{\Pi_p\}, \{\Pi_p^{i\uparrow}\}, \{\Pi_p^{i\uparrow j\downarrow}\} \in [\{\Pi_p\}], \quad (4.70)$$

i.e., os elementos $\{\psi_p\}$, $\{\Pi_p\}$, $\{\Pi_p^{i\uparrow}\}$ e $\{\Pi_p^{i\uparrow j\downarrow}\}$ pertencem à mesma classe de equivalência. Além disto,

$$[\{\Pi_p\}] = [\{\psi_p\}] = [\{\Pi_p^{i\uparrow}\}] = [\{\Pi_p^{i\uparrow j\downarrow}\}]; \quad (4.71)$$

nesta tese iremos nos referir a essa classe de equivalência apenas por $[\{\Pi_p\}]$. Designemos por

$$\frac{\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)}{\Pi} \quad (4.72)$$

o conjunto de todas as classes de equivalência $[\{\Pi_p\}]$, com $p \geq 0$. Definindo-se a soma e a multiplicação por escalar em $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)/\Pi$ como

$$[\{\Pi_p\}] + [\{\Pi_q\}] = [\{\Pi_p\}] + [\{\Pi_q\}] \quad (4.73)$$

e

$$[\alpha\{\Pi_p\}] = \alpha[\{\Pi_p\}], \quad (4.74)$$

com $\alpha \in \mathbb{K}$, o conjunto de classes de equivalência (4.72) satisfaz os axiomas de espaço vetorial e adicionando-se a definição de multiplicação entre seus elementos como

$$[\{\Pi_p\}][\{\Pi_q\}] = \delta_{p,q}[\{\Pi_p\}] \quad (4.75)$$

então $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)/\Pi$ se torna uma álgebra. Observe que as classes de equivalência $[\{\Pi_p\}]$ são construídas por elementos proporcionais a

$$\frac{1}{p!} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^n j_{\ell,p}!} \{P_{J_{n,p}}^{J_{n,p}}\} \quad (4.76)$$

e, portanto, por elementos de $\mathbb{C}l_\ell(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Então, naturalmente, essas classes podem ser multiplicadas pelos elementos da álgebra de Clifford simplética. Em especial, as classes de equivalência podem ser multiplicadas pelos geradores da álgebra. Essas multiplicações, que na álgebra obedecem às propriedades (4.58) e (4.61–4.63), quando generalizadas para classes de equivalência resultam em

$$\{e^i\}[\{\Pi_p\}] = [\{\Pi_{p+1}\}]\{e^i\}, \quad (4.77)$$

$$\{e_i\}[\{\Pi_{p+1}\}] = [\{\Pi_p\}]\{e_i\}, \quad (4.78)$$

ou seja, as propriedades desejadas para os projetores $\{\Pi_p\}$ se realizam em termos de suas classes de equivalência. Tendo esses entes, para construir a álgebra PDKP a partir de $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, devemos adicionar a essa construção uma correlação antissimétrica

$$\sharp : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{U}, \quad (4.79)$$

que, como foi visto na seção 4.26 define uma forma bilinear simplética²

$$\begin{aligned} f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f(\nu, \nu') &:= \sharp(\nu)(\nu'). \end{aligned} \quad (4.80)$$

O espaço $\mathbf{W} = \mathbf{V} \oplus \sharp(\mathbf{V})$ será denotado por \mathbf{W}_\sharp . Observe que, em termos das bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{e^1, \dots, e^n\}$ de \mathbf{V} e \mathbf{U} , respectivamente, temos que

$$e_{\mu\sharp} = f_{\mu\nu} e^\nu, \quad (4.81)$$

onde $f_{\mu\nu} := f(e_\mu, e_\nu)$. A representação da álgebra PDKP via álgebra $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ é dada em termos de classes de equivalência de $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}_\sharp, f)$, onde $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}_\sharp, f)$ denota a álgebra de Clifford simplética do espaço \mathbf{W}_\sharp . Especialmente obtemos que essa representação é dada por

$$[\eta_\mu^p] = [\{\Pi_p\}]\{e_\mu\} + \{e_{\mu\sharp}\}[\{\Pi_p\}], \quad (4.82)$$

² A aplicação de \sharp em $\nu \in \mathbf{V}$ também pode ser denotada por ν_\sharp .

sendo direto verificar, utilizando (4.75) e (4.77–4.78), que as classes de equivalência (4.82) obedecem a

$$[\eta_\mu^p][\eta_\nu^p][\eta_\lambda^p] - [\eta_\lambda^p][\eta_\nu^p][\eta_\mu^p] = -f_{\nu\mu}[\eta_i^p] + f_{\lambda\nu}[\eta_\mu^p] \quad (4.83)$$

A equação (4.83) corresponde à equação (4.41) escrita agora em termos de classes de equivalência em $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Novamente, essa equação se relaciona com a definição de Okubo [50] para a álgebra PDKP se usarmos para a definição forma bilinear simplética as relações:

$$\begin{aligned} f' : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f'(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}') &:= -f(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}'), \end{aligned} \quad (4.84)$$

de onde resulta que a expressão (4.83) torna-se

$$[\eta_\mu^p][\eta_\nu^p][\eta_\lambda^p] - [\eta_\lambda^p][\eta_\nu^p][\eta_\mu^p] = f'_{\mu\nu}[\eta_i^p] - f'_{\lambda\nu}[\eta_\mu^p], \quad (4.85)$$

que nessa formulação corresponde à relação de Okubo [50]. Note que (4.85) é a generalização da definição da álgebra PDKP dada por Okubo na medida em que (4.85) é válida para todos os valores de $p \geq 0$. Esta generalização também ocorre quando a álgebra PDKP é obtida por meio da álgebra simétrica, vide equação (4.41).

A relação desta descrição com a da álgebra simétrica é direta, quando se compara (4.82) com (4.42). Para isso observe que (4.82) pode ser reescrita como

$$[\eta_\mu^p] = \{\mathbf{e}_\mu\}[\{\Pi_{p+1}\}] + \{\mathbf{e}_{\mu\sharp}\}[\{\Pi_p\}], \quad (4.86)$$

enquanto a (4.42), aplicada aos elementos da base de \mathbf{V} , nos dá

$$\alpha_\mu^k = d_\mu P^{k+1} + c_{\mu\sharp} P^k, \quad (4.87)$$

onde

$$c_{\mu\sharp} := c(\mathbf{e}_\sharp), \quad (4.88)$$

$$d_\mu = d(\mathbf{e}_\mu), \quad (4.89)$$

sendo c e d os operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica. Como $\{\mathbf{e}^\mu\}$ e $\{\mathbf{e}_\mu\}$ são definidos justamente como operadores de criação e aniquilação da álgebra simétrica e $\mathbf{e}_{\mu\sharp} = f_{\mu\nu}\mathbf{e}^\nu$, a conclusão é que as definições (4.86) e (4.87) são as mesmas a menos dos seus projetores: em (4.87), os projetores P^k não têm uma realização definida, enquanto os elementos que formam as classes de equivalência $[\{\Pi_p\}]$ são constituídas por elementos da própria álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Especificamente, são elementos da subálgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)/\Pi$. O elemento $[\eta_\mu^p]$, escrito como (4.86), multiplica-se pela esquerda o ideal mínimo à esquerda, que pode ser entendido como

$$\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\} = (\bigvee(U))\{P\}, \quad (4.90)$$

enquanto quando escrito na forma

$$[\eta_\mu^p] = [\{\Pi_p\}]\{e_\mu\} + [\{\Pi_{p+1}\}]\{e_{\mu\sharp}\}, \quad (4.91)$$

multiplica-se à direita do ideal mínimo à direita, que analogamente, pode ser escrito como

$$\{P\}\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) = \{P\}(\bigvee(\mathbf{V})). \quad (4.92)$$

Note que α_μ^k em (4.87) é um operador que atua na álgebra simétrica covariante $\bigvee(\mathbf{V})$. Observe também que a álgebra simétrica covariante e o ideal mínimo à esquerda (4.90) são isomórficos; isto justifica a semelhança entre (4.86) e (4.87). Mais do que isto, mostra a importância do idempotente primitivo $\{P\}$ e o poder da álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ que também pode ser entendida como

$$\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-) = (\bigvee(\mathbf{U}))\{P\}(\bigvee(\mathbf{V})). \quad (4.93)$$

Concluindo, notemos que $[\eta_\mu^p]$ atua pela esquerda como (4.86) e pela direita como (4.91), nos ideais mínimos. Essa propriedade é resultado das propriedades (4.77) e (4.78) e, portanto, não depende de definições. Note que $\{e^\mu\}$ atua como operador de criação no ideal à esquerda e como operador de aniquilação no ideal à direita. Por outro lado, o gerador $\{e_\mu\}$ atua como operador de aniquilação no ideal à esquerda e como operador de criação no ideal à direita. A troca de atuação é devida justamente às propriedades que os geradores têm com as classes de equivalência. Essa possibilidade de $[\eta_\mu^p]$ atuar pela esquerda ou pela direita é uma das vantagens de se trabalhar com a álgebra PDKP na representação baseada em $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ e não naquela baseada em álgebra simétrica.

4.6 A equação de Dirac Simplética

Na seção 4.5 foi mostrada que a introdução de uma correlação antissimétrica \sharp entre \mathbf{V} e \mathbf{U} permite a obtenção da álgebra PDKP via o formalismo baseado em classes de equivalência em $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Sabe-se também que a introdução da correlação relaciona um vetor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ com um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ que sofreu o efeito da correlação \sharp , *i.e.*, pode-se dizer que para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ tem-se

$$\mathbf{v}_\sharp = \mathbf{u}, \quad (4.94)$$

com $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Desta forma, para todo elemento $\{\mathbf{u}\}$ da álgebra tem-se o elemento $\{\mathbf{v}_\sharp\}$ e as relações de comutação entre eles são dadas por

$$[\{\mathbf{v}\}, \{\mathbf{v}'_\sharp\}] = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}_\sharp), \quad (4.95)$$

$$[\{\mathbf{v}\}, \{\mathbf{v}'\}] = 0, \quad (4.96)$$

$$[\{\mathbf{v}_\sharp\}, \{\mathbf{v}'_\sharp\}] = 0, \quad (4.97)$$

onde $\nu, \nu' \in \mathbf{V}$. E escrevendo os vetores de \mathbf{V} em termos de sua base, tem-se dos comutadores (4.95–4.97) que

$$[\{\mathbf{e}_\mu\}, \{\mathbf{e}_{\nu\sharp}\}] = f(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu), \quad (4.98)$$

$$[\{\mathbf{e}_\mu\}, \{\mathbf{e}_\nu\}] = 0, \quad (4.99)$$

$$[\{\mathbf{e}_{\mu\sharp}\}, \{\mathbf{e}_{\nu\sharp}\}] = 0. \quad (4.100)$$

Na subseção 2.2.12 foi mostrado que uma das consequências de se introduzir uma correlação simétrica \flat entre \mathbf{V} e \mathbf{U} é a possibilidade de se definir operadores γ^\pm que levam \mathbf{V} na álgebra de Clifford $C\ell_n(\mathbf{V}, \pm g)$, onde g é a métrica induzida por \flat . É natural, assim, esperar algo semelhante para o caso da introdução da correlação \sharp também entre \mathbf{V} e \mathbf{U} . Neste sentido, introduzimos os operadores

$$\begin{aligned} \theta^\pm : \mathbf{V} &\longrightarrow \text{End}(\bigvee(\mathbf{U})) \\ \theta^\pm &= d \pm c \circ \sharp, \end{aligned} \quad (4.101)$$

o que nos conduz à relação:

$$\theta^\pm(\nu) = \{\nu\} \pm \{\nu_\sharp\}, \quad (4.102)$$

para $\nu \in \mathbf{V}$. E utilizando (4.95–4.98) é possível mostrar que

$$\theta^\pm(\nu)\theta^\pm(\nu') - \theta^\pm(\nu')\theta^\pm(\nu) = \mp 2f(\nu', \nu), \quad (4.103)$$

ou com a forma bilinear $f' := -f$

$$\theta^\pm(\nu)\theta^\pm(\nu') - \theta^\pm(\nu')\theta^\pm(\nu) = \pm 2f'(\nu, \nu'). \quad (4.104)$$

A expressão (4.104) caracteriza a álgebra de Clifford simplética do espaço dos θ^\pm , e que designamos por $C\ell_n(\mathbf{V}, \pm f')$. Escrita em termos da base de \mathbf{V} , a equação (4.104) torna-se

$$\theta_\mu^\pm \theta_\nu^\pm - \theta_\nu^\pm \theta_\mu^\pm = \pm f'_{\mu\nu}, \quad (4.105)$$

onde $\theta_\mu^\pm := \theta^\pm(\mathbf{e}_\mu)$. É importante notar que os elementos $\{\mathbf{e}_\mu\}$ e $\{\mathbf{e}_{\mu\sharp}\}$ podem ser escritos em termos de θ_μ^+ e θ_μ^- como

$$\{\mathbf{e}_\mu\} = \frac{\theta_\mu^+ + \theta_\mu^-}{2} \quad (4.106)$$

e

$$\{\mathbf{e}_{\mu\sharp}\} = \frac{\theta_\mu^+ - \theta_\mu^-}{2}. \quad (4.107)$$

Como foi visto na subseção 2.2.12, usando a álgebra de Clifford ortogonal $C\ell_n(\mathbf{V}, g)$, tem-se que a equação de Dirac quando se combina os geradores $\gamma_\mu := \gamma_\mu^+$ com os operadores diferenciais $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$ e que a equação obtida implica na equação de onda (2.124). O

presente formalismo também possibilita uma análise similar. Nessa direção, combinamos os geradores $\theta_\mu := \theta_\mu^+$ com os operadores diferenciais, o que nos dá:

$$[i\theta_\mu \partial^\mu - m] \psi = 0, \quad (4.108)$$

onde m é um escalar e $\psi \in \mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Agora, para ser uma equação com sentido físico, a equação (4.108) deve implicar numa equação de onda. Como os θ_μ obedecem à relação (4.105) da álgebra de Clifford simplética é preciso realizar o desenvolvimento e analisar: multiplicando a equação (4.108) à esquerda pelo operador $[i\theta_\nu \partial^\nu + m]$, obtemos

$$[\theta_\nu \theta_\mu \partial^\nu \partial^\mu + m^2] \psi = 0. \quad (4.109)$$

E somando (4.109) com ela mesma, porém com a troca dos índices μ por ν e vice-versa, temos

$$[\theta_\mu \theta_\nu \partial^\mu \partial^\nu + \theta_\nu \theta_\mu \partial^\nu \partial^\mu + 2m^2] \psi = 0. \quad (4.110)$$

Dessa equação segue que a equação de onda só é recuperada se os operadores diferenciais obedecerem a

$$\partial^\mu \partial^\nu = -\partial^\nu \partial^\mu, \quad (4.111)$$

pois neste caso, a equação (4.110) torna-se

$$[(\theta_\mu \theta_\nu - \theta_\nu \theta_\mu) \partial^\mu \partial^\nu + 2m^2] \psi = 0, \quad (4.112)$$

onde, usando (4.105), chega-se à equação de onda

$$[\partial_\nu \partial^\nu + m^2] \psi = 0, \quad (4.113)$$

com $\partial_\nu := f_{\nu\mu} \partial^\mu$. A necessidade que os operadores diferenciais obedçam a (4.111) sugere o uso de coordenadas anticomutativas. No entanto, os operadores diferenciais ∂^μ e ∂^ν aparecem mediados pela forma bilinear simplética $f_{\nu\mu}$, de modo que $f_{\mu\mu} = 0$. Dessa forma, tem-se que $f_{\mu\mu} \partial^\mu \partial^\mu \psi = 0$ mesmo quando $\partial^\mu \partial^\mu \psi \neq 0$. Essa observação indica que (4.108) e (4.113) não estão definidas para coordenadas não comutativas, nem para coordenadas anticomutativas, mas para coordenadas ditas *não anticomutativas*, *i.e.*, para coordenadas $\{x_1, \dots, x_\mu\}$ tais que

$$x_\mu x_\nu + x_\nu x_\mu = i\vartheta_{\mu\nu} \quad (4.114)$$

onde $\vartheta_{\mu\nu}$ é um parâmetro de deformação tal que para $\vartheta_{\mu\nu} \rightarrow 0$ possibilita recuperar as coordenadas anticomutativas.

A equação (4.108) apresenta semelhanças com o que Reuter chamou de *equação de Dirac-Kähler simplética* [100]. Esse autor chega à referida equação seguindo os passos

de Kähler ao usar formas diferenciais sobre um espaço-tempo riemanniano, mas desta vez considerando tensores simétricos sobre um espaço de fase simplético. Nossa forma de encontrar (4.108) parece mais direta do que o método proposto em [100] que utiliza diversos entes matemáticos tais como tensores simétricos, operadores simétricos e álgebra de Weyl para símbolos bosônicos. Além disto, Reuter utiliza representações específicas do produto de Clifford simplético que, nesse caso, é uma versão simétrica do produto estrela de Hodge. Aqui usamos apenas o espaço $\mathbf{W} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{U}$ dotado de uma forma bilinear simplética e uma correlação antissimétrica entre \mathbf{V} e \mathbf{U} .

Voltando para o aspecto matemático, a equação (4.108) pode ser escrita como

$$[i\{D\} - m]\psi = 0, \quad (4.115)$$

onde

$$\{D\} = \{d\} - \{\delta\}, \quad (4.116)$$

com

$$\{d\} := \{e_\mu\}\partial^\mu, \quad (4.117)$$

$$\{\delta\} := -\{e_{\mu\sharp}\}\partial^\mu = \{e^\mu\}\partial_\mu. \quad (4.118)$$

As derivadas $\{d\}$ e $\{\delta\}$ são uma espécie de derivada e coderivada da álgebra simétrica, e, como é de se esperar, não gozam das propriedades da derivada exterior, ou seja,

$$\{d\}^2 \neq 0 \quad (4.119)$$

$$\{\delta\}^2 \neq 0. \quad (4.120)$$

Consequentemente, tem-se que

$$\{D\}^2 \neq -\partial_\mu\partial^\mu. \quad (4.121)$$

Entretanto, tem-se a relação

$$[\{d\}, \{\delta\}]_+ = -\partial_\mu\partial^\mu = \partial^\mu\partial_\mu, \quad (4.122)$$

onde ∂^μ são derivadas em um espaço não anticomutativo, e, portanto, é válida a relação (4.111).

Na próxima seção desenvolveremos a equação associada à álgebra *PDKP*, a chamada equação de *DKP* simplética.

4.7 A equação de *DKP* simplética

A equação de *DKP* simplética foi implicitamente proposta por Okubo [50] quando apresentou a superequação de *DKP*. Com os resultados da seção 4.6, é possível obter uma equação de *DKP* sobre uma variedade não anticomutativa, o que desenvolveremos nesta seção. Neste sentido, notemos que

$$\sum_{p=0}^{\infty} [\eta_{\mu}^p] = [\{D\}], \quad (4.123)$$

onde

$$[\{D\}] = 1_{\mathcal{C}\ell/\Pi} \{D\} 1_{\mathcal{C}\ell/\Pi}, \quad (4.124)$$

sendo $1_{\mathcal{C}\ell/\Pi}$ a identidade do espaço $\frac{\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)}{\Pi}$. Como os operadores diferenciais ∂^{μ} comutam com $1_{\mathcal{C}\ell/\Pi}$, é possível escrever

$$[\{D\}] = [\{\theta_{\mu}\}] \partial^{\mu}, \quad (4.125)$$

onde

$$[\{\theta_{\mu}\}] = 1_{\mathcal{C}\ell/\Pi} \theta_{\mu} 1_{\mathcal{C}\ell/\Pi}. \quad (4.126)$$

As equações (4.123–4.126) indicam que a álgebra *DKP* é uma dupla projeção da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, f)$

$$\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, f) \xrightarrow{\pi_1} \frac{\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, f)}{\Pi} \xrightarrow{\pi_2^p} \mathcal{P}_p(\mathbf{V}, f) \quad (4.127)$$

onde $\mathcal{P}_p(\mathbf{V}, f)$ é a álgebra *PDKP* de ordem p . Segue então que é possível construir a álgebra *PDKP* através da operação

$$\eta^p := \pi_1^p \circ \pi_1 \circ \theta \quad (4.128)$$

onde $\theta := \theta^+$ são os operadores definidos em (4.101), π_1 é a projeção natural de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, f)$ para o espaço quociente $\frac{\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, f)}{\Pi}$ e π_2^p projeta, enfim, o espaço quociente na álgebra *PDKP* e é dado por

$$\pi_2^p = \overrightarrow{1}_{\{p\}} \overleftarrow{1}_{\{p\}} \quad (4.129)$$

onde

$$1_{\{p\}} = [\{\Pi_p\}] + [\{\Pi_{p+1}\}] \quad (4.130)$$

é a identidade de $\mathcal{P}_p(\mathbf{V}, f)$ e as setas indicam o sentido da multiplicação. Note que, por simplicidade na notação na definição (4.128), evitamos o uso dos colchetes para indicar

que são objetos definidos em termos de classe de equivalência. Neste sentido, a equação de *DKP* simplética é dada por

$$\left[i\eta_\mu^p \partial^\mu - m1_{\{p\}} \right] \psi = 0, \quad (4.131)$$

onde $\psi \in \mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)\{P\}$ e $\eta_\mu^p := \eta_\mu^p(\mathbf{e}_\mu)$. A equação (4.131) deve implicar em (4.113) provido que o espaço sobre o qual é definida seja não anticomutativo.

Concluindo, notamos que as equações (4.108) e (4.113) foram obtidas de forma diferentes da existentes na literatura [50, 100]. A forma desenvolvida aqui não precisa de elementos externos à teoria para encontrar as álgebras associadas às equações. As equações, aparecem, portanto, naturalmente por associações dos geradores dessas álgebras com o operador diferencial, o que veio no caso indicar que as coordenadas às quais as derivadas são tomadas devem ser de natureza não anticomutativa. O sentido físico dessas equações ainda necessita de análise, mas espaços não anticomutativos vêm sendo estudados em alguns contextos específicos [101–105].

4.8 Os fundamentos da superálgebra *DKP*

Nesta seção exporemos os fundamentos da superálgebra *DKP* à luz das álgebras de Schönberg. Lembrando o que foi exposto anteriormente, discutimos como se extrai a álgebra *DKP* da álgebra de férmions e como se extrai a álgebra *PDKP* da álgebra de bósons. Nesta seção, as álgebras *DKP* e *PDKP* serão colocadas em uma mesma estrutura, sempre a partir da visão geométrica das álgebras de Schönberg. Para melhor compreender o método usado apresentaremos o desenvolvimento sob dois enfoques: um considerando apenas uma forma de multiplicar os elementos β_μ da álgebra *DKP* com os elementos η_μ da álgebra *PDKP*, outro sob um ponto de vista matemático-formal, em que propomos a superálgebra *DKP* como uma subálgebra de uma superálgebra maior, construída à maneira das álgebras de Schönberg para férmions e bósons.

4.8.1 A superálgebra *DKP*: primeiro enfoque

Uma forma natural de saber se as álgebras $\mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g)$ e $\mathcal{P}_p(\mathbf{V}, f)$ juntas formam uma superálgebra *DKP* é encontrando uma maneira de implementar a multiplicação entre os elementos das duas álgebras e conferir as propriedades das multiplicações envolvidas com a expressão (4.16) que caracteriza a superálgebra *DKP*. Nesta direção, devemos notar que a álgebra *DKP* é extraída da álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)$ através do projetor (Π_p) , enquanto a álgebra *PDKP* é extraída da álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{V}, f)$ através da classe de equivalência do projetor $\{\Pi_p\}$. Em princípio é possível construir classes de equivalência do elemento (Π_p) de maneira a poder multiplicar com as classes de equivalência de $\{\Pi_p\}$. Entretanto, antes de formalizar as multiplicações entre as classes advindas de álgebras diferentes, é preciso

analisar como se dará a multiplicação entre os geradores de $Cl_n(\mathbf{V}, \Omega_+)$ e de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Em sua formulação, Okubo [50, 106] propôs que os elementos bosônicos anticomutassem com os elementos fermiônicos. Adotaremos então essa hipótese em nosso desenvolvimento restando, no entanto, a dificuldade maior que é como multiplicar os projetores de álgebras diferentes e demonstrar as propriedades entre os projetores de álgebras distintas. A solução encontrada foi introduzir projetores de forma *ad hoc* capazes de extrair elementos de determinadas ordens dos ideais mínimos.

Relembrando a construção dos ideais mínimos neste contexto, foi visto na subseção 2.2.9.1 que o idempotente (P) é formado pelos próprios geradores da álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ e constitui um idempotente primitivo. Já na álgebra $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, o idempotente primitivo $\{P\}$ teve que ser adicionado de maneira *ad hoc*, pois não há elementos naturais da álgebra capazes de formar tal idempotente. Com esses idempotentes é possível construir bases canônicas e somente nessas bases é possível construir os ideais mínimos. Desta forma, para construir os elementos (tensores) capazes de representar partículas físicas associadas à álgebra que está sendo construída nesta seção a partir da multiplicação das álgebras *DKP* e *PDKP*, é necessário que se construa um idempotente primitivo $\{(P)\}$ que propomos ser

$$\{(P)\} = (P)\{P\} = \{P\}(P), \quad (4.132)$$

onde é assumido que a multiplicação entre (P) e $\{P\}$ pode ser efetuada. Esta premissa é coerente, pois por construção que os elementos das álgebras $Cl_n(\mathbf{V}, \Omega_+)$ e $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ se multipliquem. Como os idempotentes (P) e $\{P\}$ devem satisfazer a

$$(\mathbf{e}_\mu)\{P\} = \{P\}(\mathbf{e}_\mu), \quad (4.133)$$

$$(\mathbf{e}^\mu)\{P\} = \{P\}(\mathbf{e}^\mu), \quad (4.134)$$

$$\{\mathbf{e}_\mu\}(P) = (P)\{\mathbf{e}_\mu\}, \quad (4.135)$$

$$\{\mathbf{e}^\mu\}(P) = (P)\{\mathbf{e}^\mu\}, \quad (4.136)$$

o elemento $\{(P)\}$ definido em (4.132) obedece a

$$\{(P)\}^2 = \{(P)\} \quad (4.137)$$

$$(\mathbf{e}_\mu)\{(P)\} = \{(P)\}(\mathbf{e}^\mu) = \{\mathbf{e}_\mu\}\{(P)\} = \{(P)\}\{\mathbf{e}^\mu\} = 0. \quad (4.138)$$

Desta maneira, podemos construir uma base a partir do elemento $\{(P)\}$ considerando

$$\{(P_{K_{s\ell}}^{J_{pq}})\} := \{(\mathbf{e}^{J_{pq}})\}\{(P)\}\{(\mathbf{e}_{K_{s\ell}})\}, \quad (4.139)$$

onde introduzimos a notação dos *conjuntos multi-índices ascendentes híbridos* dada por

$$H_{rt} := \{1 \leq h_{r_1} < h_{r_2} < \dots < h_{r_n} \leq n < h_{r_{n+1}} \leq h_{r_{n+2}} \leq \dots \leq h_{r_{n+t}} \leq n + m\} \quad (4.140)$$

e

$$\{(\mathbf{e}^{J_{pq}})\} = (\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_p}) \{\mathbf{e}^{j_{p+1}}\} \dots \{\mathbf{e}^{j_{p+q}}\} \{(P)\} \{\mathbf{e}_{k_{p+q}}\} \dots \{\mathbf{e}_{k_{p+1}}\} (\mathbf{e}_{k_p}) \dots (\mathbf{e}_{k_1}) \quad (4.141)$$

com os índices j e k obedecendo às condições de um conjunto multi-índices ascendente híbrido, definido em (4.140). Nota-se que os elementos (4.139) se multiplicam de acordo com

$$\{(P_{K_{rs}}^{J_{pq}})\}\{(P_{R_{fg}}^{Q_{uv}})\} = [\delta_{K_{rs}}^{Q_{uv}}]\{(P_{R_{fg}}^{J_{pq}})\}, \quad (4.142)$$

onde definimos

$$[\delta_{K_{rs}}^{Q_{uv}}] := \delta_{ru}\delta_{sv} \left(\det \hat{\delta}_{K_r}^{Q_u} \right) \left(\text{Perm } \hat{\delta}_{K_s}^{Q_v} \right), \quad (4.143)$$

e

$$K_r = \{0, \leq k_1, < k_2, < \dots, < k_r, \leq n\}, \quad (4.144)$$

$$Q_u = \{0, \leq q_1, < q_2, < \dots, < q_u, \leq n\}, \quad (4.145)$$

são conjuntos multi-índice de tamanhos r e u correspondentes às partes estritamente ascendentes de K_{rs} e Q_{uv} , respectivamente, enquanto

$$K_s = \{n+1, \leq k_1, \leq k_2, \leq \dots, \leq k_s, \leq m\}, \quad (4.146)$$

$$Q_u = \{n+1, \leq q_1, \leq q_2, \leq \dots, \leq q_v, \leq m\}, \quad (4.147)$$

são conjuntos multi-índice de tamanhos s e v correspondentes às respectivas partes monotonicamente ascendentes de K_{rs} e Q_{uv} .

O espaço expandido pelos elementos (4.139), mudido da multiplicação (4.142), onde os elementos (\cdot) anticomutam com os elementos $\{\cdot\}$, formam uma álgebra denotada, neste momento, apenas por \mathcal{S}_{nm} . Seus elementos são dados

$$\Xi = \sum_{\ell, p=0}^n \sum_{s, q=0}^{\infty} A_{K_{\ell s}}^{J_{pq}} \{(P_{J_{pq}}^{K_{\ell s}})\}. \quad (4.148)$$

A exemplo das álgebras estudadas nos capítulos 2 e 3, o elemento $\{(P)\}$ faz possível a obtenção de ideais mínimos à esquerda $\mathcal{S}_{nm}\{(P)\}$ e à direita $\{(P)\}\mathcal{S}_{nm}$, onde estão os elementos que podem descrever partículas físicas. Neste contexto, elementos do tipo (4.148) podem ser interpretados como operadores que atuam nos ideais.

Nesse contexto, propomos os projetores $\{(\Pi_p)\}$ de maneira *ad hoc* a partir da propriedade de extrair os tensores de ordem (p, p) – relativo a bosons e férmions –, dos ideais. Para $p > n$, deve-se entender que não há parte referente a férmions. Além disso, estes projetores, por construção, devem obedecer às propriedades

$$\{(\Pi_p)\}\{(\Pi_q)\} = \delta_{pq}\{(\Pi_p)\}, \quad (4.149)$$

e

$$\sum_{p=0}^{\infty} \{(\Pi_p)\} = 1_{\mathcal{S}_{nm}}. \quad (4.150)$$

Devemos assumir também, que os operadores $\{(\Pi_p)\}$, em conjunto com os geradores (\mathbf{e}_μ) , (\mathbf{e}^μ) , $\{\mathbf{e}_\mu\}$ e $\{\mathbf{e}^\mu\}$, obedecem a

$$(\mathbf{e}^\mu)\{(\Pi_p)\} = \{(\Pi_{p+1})\}(\mathbf{e}^\mu), \quad (4.151)$$

$$(\mathbf{e}_\mu)\{(\Pi_{p+1})\} = \{(\Pi_p)\}(\mathbf{e}_\mu), \quad (4.152)$$

$$\{\mathbf{e}^\mu\}\{(\Pi_p)\} = \{(\Pi_{p+1})\}\{\mathbf{e}^\mu\}, \quad (4.153)$$

$$\{\mathbf{e}_\mu\}\{(\Pi_{p+1})\} = \{(\Pi_p)\}\{\mathbf{e}_\mu\}. \quad (4.154)$$

Com essa definição, é possível mostrar que os elementos

$$\beta_{\mu,p} = \{(\Pi_p)\}(\mathbf{e}_\mu) + (\mathbf{e}_{\mu b})\{(\Pi_p)\} \quad (4.155)$$

são geradores da álgebra de *DKP*, enquanto

$$\eta_{\mu,p}^p = \{(\Pi_p)\}\{\mathbf{e}_\mu\} + \{\mathbf{e}_{\mu\#}\}\{(\Pi_p)\} \quad (4.156)$$

são geradores da álgebra *PDKP*, onde se nota que foi feito o uso das correlações $\flat : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{U}_0$ e $\sharp : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{U}_1$, às quais definem a métrica g e a forma bilinear f .

Com o objetivo de tornar este desenvolvimento mais geral, definimos

$$\beta_{\mu,p}^{k_\mu} = \{(\Pi_p)\}(\mathbf{e}_\mu) + k_\mu(\mathbf{e}_{\mu b})\{(\Pi_p)\} \quad (4.157)$$

e

$$\eta_{\mu,p}^{k_\mu} = \{(\Pi_p)\}\{\mathbf{e}_\mu\} + k_\mu\{\mathbf{e}_{\mu\#}\}\{(\Pi_p)\} \quad (4.158)$$

onde k_μ representa ± 1 ou apenas os sinais positivo ou negativo correspondentes.

Utilizando as expressões (2.106–2.108), (4.98–4.129) e a proposta de Okubo de que bósons e férmions anticomutam, obtemos que os objetos (4.157–4.158) obedecem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \beta_{\mu,p}^{k_\mu} \beta_{\nu,p}^{k_\nu} \beta_{\lambda,p}^{k_\lambda} + \beta_{\lambda,p}^{k_\lambda} \beta_{\nu,p}^{k_\nu} \beta_{\mu,p}^{k_\mu} &= k_\nu g_{\nu\mu} \left[\frac{\beta_{\lambda,p}^+ + \beta_{\lambda,p}^-}{2} \right] + k_\nu g_{\nu\lambda} \left[\frac{\beta_{\mu,p}^+ - \beta_{\mu,p}^-}{2} \right] \\ &+ k_\lambda k_\mu g_{\mu\nu} \left[\frac{\beta_{\lambda,p}^+ - \beta_{\lambda,p}^-}{2} \right] + k_\lambda k_\mu g_{\lambda\mu} \left[\frac{\beta_{\mu,p}^+ - \beta_{\mu,p}^-}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.159)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mu,p}^{k_\mu} \eta_{\nu,p}^{k_\nu} \eta_{\lambda,p}^{k_\lambda} - \eta_{\lambda,p}^{k_\lambda} \eta_{\nu,p}^{k_\nu} \eta_{\mu,p}^{k_\mu} &= k_\nu f_{\nu\mu} \left[\frac{\eta_{\lambda,p}^+ + \eta_{\lambda,p}^-}{2} \right] + k_\mu k_\lambda f_{\lambda\mu} \left[\frac{\eta_{\mu,p}^+ - \eta_{\mu,p}^-}{2} \right] \\ &- k_\nu f_{\nu\lambda} \left[\frac{\eta_{\mu,p}^+ + \eta_{\mu,p}^-}{2} \right] - k_\lambda k_\mu f_{\mu\nu} \left[\frac{\eta_{\lambda,p}^+ - \eta_{\lambda,p}^-}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.160)$$

$$\beta_{\mu,p}^{k_\mu} \beta_{\nu,p}^{k_\nu} \eta_{\lambda,p}^{k_\lambda} - \eta_{\lambda,p}^{k_\lambda} \beta_{\nu,p}^{k_\nu} \beta_{\mu,p}^{k_\mu} = k_\nu g_{\nu\mu} \left[\frac{\eta_{\lambda,p}^+ + \eta_{\lambda,p}^-}{2} \right] + k_\lambda k_\mu g_{\mu\nu} \left[\frac{\eta_{\lambda,p}^+ - \eta_{\lambda,p}^-}{2} \right], \quad (4.161)$$

$$\eta_{\mu,p}^{k_\nu} \eta_{\nu,p}^{k_\nu} \beta_{\lambda,p}^{k_\lambda} - \beta_{\lambda,p}^{k_\lambda} \eta_{\nu,p}^{k_\nu} \eta_{\mu,p}^{k_\mu} = k_\nu f_{\nu\mu} \left[\frac{\beta_{\lambda,p}^+ + \beta_{\lambda,p}^-}{2} \right] - k_\lambda k_\mu g_{\mu\nu} \left[\frac{\beta_{\lambda,p}^+ - \beta_{\lambda,p}^-}{2} \right], \quad (4.162)$$

$$\beta_{\mu,p}^{k_\mu} \eta_{\nu,p}^{k_\nu} \beta_{\lambda,p}^{k_\lambda} - \beta_{\lambda,p}^{k_\lambda} \eta_{\nu,p}^{k_\nu} \beta_{\mu,p}^{k_\mu} = 0, \quad (4.163)$$

$$\eta_{\mu,p}^{k_\mu} \beta_{\nu,p}^{k_\nu} \eta_{\lambda,p}^{k_\lambda} - \eta_{\lambda,p}^{k_\lambda} \beta_{\nu,p}^{k_\nu} \eta_{\mu,p}^{k_\mu} = 0. \quad (4.164)$$

Com uma escolha adequada de notação, as expressões (4.159–4.164) podem ser escritas de uma forma unificada. Essa notação expressa os $\beta_{\mu,p}^\pm$ e os $\eta_{\mu,p}^\pm$ com o mesmo símbolo, definido por

$$\theta_\mu^\pm = \begin{cases} \beta_{\mu,p}^\pm; & \text{se } \sigma_\mu = 0, \\ \eta_{\mu,p}^\pm; & \text{se } \sigma_\mu = 1, \end{cases} \quad (4.165)$$

e as formas bilineares g e f também são expressas através de uma forma bilinear dada por

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \begin{cases} g_{\mu\nu}; & \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 0, \\ -f_{\mu\nu}; & \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 1, \\ 0; & \text{se } \sigma_\mu \neq \sigma_\nu, \end{cases} \quad (4.166)$$

que possui a propriedade

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = (-1)^{\sigma_\mu \sigma_\nu} \mathcal{G}_{\nu\mu}. \quad (4.167)$$

Desta forma, as expressões (4.159–4.164) podem ser escritas na forma

$$\theta_{\mu,p}^{k_\mu} \theta_{\nu,p}^{k_\nu} \theta_{\lambda,p}^{k_\lambda} + (-1)^{\sum \sigma(\mu,\nu,\lambda)} \theta_{\lambda,p}^{k_\lambda} \theta_{\nu,p}^{k_\nu} \theta_{\mu,p}^{k_\mu} = \mathcal{G}_{\nu\mu} K^T \theta_{\lambda,p} + \mathcal{G}_{\lambda\nu} K^T \theta_{\mu,p}, \quad (4.168)$$

onde K e $\theta_{\mu,p}$ são as matrizes coluna

$$K = \begin{bmatrix} k_\nu + k_\mu k_\lambda \\ k_\nu - k_\mu k_\lambda \end{bmatrix}, \quad \theta_{\mu,p} = \begin{bmatrix} \theta_{\mu,p}^+ \\ \theta_{\mu,p}^- \end{bmatrix}. \quad (4.169)$$

A expressão (4.168) define uma generalização da superálgebra de DKP , no sentido de que se reduz a esta quando $k_\mu = k_\nu = k_\lambda = +$ e $p = 0$ ou $p = 1$. Ainda para todos os k 's iguais a $+$, a expressão (4.168) apresenta infinitas representações da superálgebra DKP , uma para cada valor de $p \in \mathbb{N}$, onde \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais.

Observe que restrita a \mathbf{V}_0 , ou seja, para $1 \leq \mu, \nu, \lambda \leq n$, a expressão (4.168) é uma generalização de (2.215), pois se reduz à última quando $k_\mu = k_\nu = k_\lambda$. Análise análoga também pode ser feita para álgebra $PDKP$ para $n+1 \leq \mu, \nu, \lambda \leq n+m$. Tendo a álgebra definida por (4.168) como ponto de partida, podemos analisar as superequações de Klein-Gordon-Fock, Dirac e DKP generalizadas, válidas numa supervariiedade com n coordenadas riemannianas e m coordenadas não anticomutativas. Essa discussão será feita nas seções 4.11 e 4.12, após o estudo formal da álgebra \mathcal{S}_{nm} , tendo como base os desenvolvimentos das álgebras $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ e $\mathcal{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$.

4.8.2 A superálgebra DKP: enfoque matemático-formal

Na subseção 4.8.1 mostramos uma generalização da superálgebra através de projeções de uma álgebra onde é permitida a multiplicação de entes relacionados a férmions e entes relacionados a bósons. Na presente seção vamos apresentar essa construção sob um enfoque matemático-formal segundo o desenvolvimento de Schönberg para as álgebras $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ e $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$.

Neste sentido, suponha que \mathbf{W} seja um espaço formado pela soma direta de outros dois espaços \mathbf{W}_0 e \mathbf{W}_1 . Portanto,

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1. \quad (4.170)$$

Por sua vez, o espaço $\mathbf{W}_i (i = 0, 1)$ é também formado pela soma direta do espaço \mathbf{V}_i e seu dual, denotado por \mathbf{U}_i . Suponha também que

$$\dim \mathbf{V}_0 = n, \quad (4.171)$$

$$\dim \mathbf{V}_1 = m. \quad (4.172)$$

Um vetor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{W}$ é dado por

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \oplus \boldsymbol{\omega}_1 \quad (4.173)$$

com

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\nu}_i \oplus \mathbf{u}_i \in \mathbf{W}_i \quad (4.174)$$

e $\boldsymbol{\nu}_i \in \mathbf{V}_i$, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i$. Considere ainda que \mathbf{W} é dotado de uma forma bilinear dada por

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbf{W} \times \mathbf{W} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \Omega &= \Omega_0 \oplus \Omega_1, \end{aligned} \quad (4.175)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_i : \mathbf{W}_i \times \mathbf{W}_i &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \Omega_i(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}'_i) &= \frac{1}{2} [\langle \mathbf{u}_i, \boldsymbol{\nu}'_i \rangle + (-1)^i \langle \mathbf{u}'_i, \boldsymbol{\nu}_i \rangle], \end{aligned} \quad (4.176)$$

de modo que Ω_0 seja uma forma bilinear simétrica e Ω_1 uma forma bilinear simplética. Neste contexto, é conveniente definir a assinatura dos vetores \mathbf{W}_i como

$$\epsilon(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{W}_0, \\ 1, & \text{se } \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{W}_1. \end{cases} \quad (4.177)$$

Temos assim uma *dupla assinatura* \hat{k} definida como

$$\begin{aligned} \hat{k} : \mathbf{W} \otimes \mathbf{W} &\longrightarrow \mathbf{W} \otimes \mathbf{W} \\ \hat{k}(\boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_j) &= (-1)^{\epsilon(\boldsymbol{\omega}_i)\epsilon(\boldsymbol{\omega}_j)} \boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_j \end{aligned} \quad (4.178)$$

juntamente com a propriedade

$$\hat{k}(\omega_i \otimes \omega_j + \omega_k \otimes \omega_s) = \hat{k}(\omega_i \otimes \omega_j) + \hat{k}(\omega_k \otimes \omega_s), \quad (4.179)$$

em que $\omega_r \in \mathbf{W}_r$.

O espaço \mathbf{W} pode ser incluído na álgebra tensorial de \mathbf{W}

$$T(\mathbf{W}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(\mathbf{W}) \quad (4.180)$$

onde

$$T^k(\mathbf{W}) = \underbrace{\mathbf{W} \otimes \dots \otimes \mathbf{W}}_{k\text{-vezes}} \quad (4.181)$$

com a identificação $\mathbf{W} \mapsto T^1(\mathbf{W})$.

Finalmente definimos, a álgebra $S_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$ como o quociente de $T(\mathbf{W})$ pelo ideal I_Ω gerado por elementos do tipo

$$\omega \otimes \omega' + \hat{k}\omega' \otimes \omega - 2\Omega(\omega, \omega') \quad (4.182)$$

com $\omega, \omega' \in \mathbf{W}$, ou seja,

$$S_{nm}(\mathbf{W}, \Omega) := \frac{T(\mathbf{W})}{I_\Omega}. \quad (4.183)$$

Com a imposição da projeção natural $\pi : T(\mathbf{W}) \longrightarrow \frac{T(\mathbf{W})}{I_\Omega}$ ser um homomorfismo e assumindo que π comuta com \hat{k} , tem-se que os vetores em $S_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$ obedecem a

$$[\omega][\omega'] + \hat{k}[\omega'][\omega] = 2\Omega(\omega, \omega'), \quad (4.184)$$

onde em (4.184), $[\cdot]$ é a aplicação da álgebra dada por

$$[\cdot] = \pi \circ \iota, \quad (4.185)$$

com ι a imersão da de \mathbf{W} em $T(\mathbf{W})$.

A expressão (4.184) caracteriza a álgebra $S_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$ como uma generalização das álgebras $\mathcal{Cl}_n(\mathbf{W}_0, \Omega_0)$ e $\mathcal{Cl}_m(\mathbf{W}_1, \Omega_1)$, com os elementos dessas duas últimas anticomutando entre si. Para poder verificar essa afirmação, observe que

$$\Omega(\mathbf{W}, \mathbf{W}_0) = \Omega(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}) = \Omega(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) \equiv \Omega_0(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0), \quad (4.186)$$

$$\Omega(\mathbf{W}, \mathbf{W}_1) = \Omega(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}) = \Omega(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_1) \equiv \Omega_1(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_1), \quad (4.187)$$

$$\Omega(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1) = \Omega(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_0) = 0, \quad (4.188)$$

de maneira que (4.184) pode ser reescrita em termos de três expressões

$$[\omega_0][\omega'_0] + [\omega'_0][\omega_0] = 2\Omega_0(\omega_0, \omega'_0), \quad (4.189)$$

$$[\omega_1][\omega'_1] - [\omega'_1][\omega_1] = 2\Omega_1(\omega_1, \omega'_1), \quad (4.190)$$

$$[\omega_0][\omega_1] + [\omega_1][\omega_0] = 0. \quad (4.191)$$

As expressões (4.189–4.190) definem as álgebras $Cl_n(\mathbf{W}_0, \Omega_0)$ associadas aos férmions e $Cl_m(\mathbf{W}_1, \Omega_1)$ associadas aos bósons, respectivamente, desenvolvidas nos capítulos anteriores. Já a expressão (4.191) indica um vínculo entre as álgebras associadas a bósons e férmions, condicionando que os elementos bosônicos anticomutem com os elementos fermiônicos.

Assim como (4.189–4.190) podem ser reescritas em termos de outras três expressões onde cada elemento da multiplicação é um vetor ou um covetor, o mesmo pode ser feito com a expressão (4.191). Essa, no entanto, se decompõe em quatro relações, oriundas de:

$$\Omega(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1) = \Omega(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_0) = \Omega(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1) = \Omega(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_0) = 0. \quad (4.192)$$

De fato, desta maneira a relação (4.191) fica expressa como

$$[\mathbf{V}_0][\mathbf{V}_1] + [\mathbf{V}_1][\mathbf{V}_0] = 0, \quad (4.193)$$

$$[\mathbf{U}_0][\mathbf{U}_1] + [\mathbf{U}_1][\mathbf{U}_0] = 0, \quad (4.194)$$

$$[\mathbf{V}_0][\mathbf{U}_1] + [\mathbf{U}_1][\mathbf{V}_0] = 0, \quad (4.195)$$

$$[\mathbf{V}_1][\mathbf{U}_0] + [\mathbf{U}_0][\mathbf{V}_1] = 0. \quad (4.196)$$

As expressões (4.193–4.196) mostram que os elementos co e contravariantes de $Cl_n(\mathbf{W}_0, \Omega_0)$ anticomutam com os elementos co e contravariantes de $Cl_n(\mathbf{W}_1, \Omega_1)$ ou em termos físicos, nessa formulação, bósons e férmions anticomutam entre si.

A álgebra $S_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$, como um todo, pode ser escrita em termos de *supercomutadores* $[A, B]$, definidos como

$$[A, B] = AB + (-1)^{\epsilon(A)\epsilon(B)}BA, \quad (4.197)$$

o que resulta em:

$$[[\nu_i], [\mathbf{u}_j]] = \langle \mathbf{u}_j, \nu_i \rangle, \quad (4.198)$$

$$[[\nu_i], [\nu_j]] = 0, \quad (4.199)$$

$$[[\mathbf{u}_i], [\mathbf{u}_j]] = 0, \quad (4.200)$$

com

$$\langle \mathbf{u}_i, \nu_j \rangle = 0, \quad (4.201)$$

para $\epsilon(\mathbf{u}_j) \neq \epsilon(\nu_i)$ e $\nu_i \in \mathbf{V}_i$, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i$, $i = 0, 1$.

Para escrever (4.198–4.200) em termos da base de \mathbf{V}_i e \mathbf{U}_i , é necessário notar que o espaço \mathbf{W} escrito como

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{U}_0 \oplus \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{U}_1 \quad (4.202)$$

é isomórfico ao espaço

$$\mathbf{W}' = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{U}_0 \oplus \mathbf{U}_1, \quad (4.203)$$

de maneira que \mathbf{W} pode ser escrito como

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{U}, \quad (4.204)$$

com

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_1, \quad (4.205)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \oplus \mathbf{U}_1. \quad (4.206)$$

Desta maneira, uma base de \mathbf{V} pode ser dada por $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+m}\}$, onde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é base de \mathbf{V}_0 e $\{\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+m}\}$ é base de \mathbf{U} . Analogamente, a base dual pode ser dada por $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n, \mathbf{e}^{n+1}, \dots, \mathbf{e}^{n+m}\}$, de modo que $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ é base de \mathbf{U}_0 e $\{\mathbf{e}^{n+1}, \dots, \mathbf{e}^{n+m}\}$ é base de \mathbf{U}_1 .

Com a assinatura na base de \mathbf{V} e \mathbf{U} dada por

$$\sigma(\mathbf{e}_\mu) = \sigma(\mathbf{e}^\mu) = \begin{cases} 0; & \text{se } 1 \leq \mu \leq n, \\ 1; & \text{se } n+1 \leq \mu \leq n+m. \end{cases} \quad (4.207)$$

As expressões (4.198–4.200), em termos das bases de \mathbf{V} e \mathbf{U} , tornam-se

$$[[\mathbf{e}_\mu], [\mathbf{e}^\nu]] = \delta_\mu^\nu, \quad (4.208)$$

$$[[\mathbf{e}_\mu], [\mathbf{e}_\nu]] = 0, \quad (4.209)$$

$$[[\mathbf{e}^\mu], [\mathbf{e}^\nu]] = 0, \quad (4.210)$$

onde, na definição do supercomutador $[\cdot, \cdot]$, a assinatura ϵ_i deve ser trocada pela assinatura $\sigma_\mu := \sigma(\mathbf{e}_\mu) = \sigma(\mathbf{e}^\mu)$, como definida em (4.207).

Na próxima seção mostraremos como a introdução de uma supercorrelação em \mathbf{V} pode ser usada para encontrar as relações de supercomutação (4.21–4.23), introduzidas por Okubo [50]. No presente desenvolvimento, a supercorrelação permite ainda encontrar a superálgebra de Clifford, possibilitar a obtenção da equação de Dirac em uma supervariada.

4.9 A introdução de uma supercorrelação e a superálgebra de Clifford

Nesta seção será estudada as consequências de introduzirmos uma supercorrelação no espaço \mathbf{V} escrito como em (4.205). Por *supercorrelação*, entenderemos a soma direta de uma correlação simétrica e uma correlação antissimétrica. Neste contexto, define-se a supercorrelação $\natural : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ como

$$\natural = \flat \oplus \sharp, \quad (4.211)$$

onde $\flat : \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{U}_0$ é uma correlação simétrica e $\sharp : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{U}_1$ é uma correlação antissimétrica, ou seja, para $\nu, \nu' \in \mathbf{V}$, teremos

$$\begin{aligned} \natural(\nu)(\nu') &= \flat(\nu_0)(\nu'_0) + \sharp(\nu_1)(\nu'_1) \\ &= \flat(\nu'_0)(\nu_0) - \sharp(\nu'_1)(\nu_1). \end{aligned} \quad (4.212)$$

A supercorrelação \natural define uma forma bilinear no espaço \mathbf{V} dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V} \\ \mathcal{G}(\nu, \nu') &= \natural(\nu)(\nu'). \end{aligned} \quad (4.213)$$

As correlações \flat e \sharp , por outro lado, definem a métrica g e a forma bilinear simplética f , respectivamente, de maneira que

$$\mathcal{G}(\nu, \nu') = g(\nu_0, \nu'_0) + f(\nu_1, \nu'_1). \quad (4.214)$$

Em termos da base de \mathbf{V} , a forma bilinear \mathcal{G} pode ser sintetizada como

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \begin{cases} g_{\mu\nu}; & \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 0, \\ f_{\mu\nu}; & \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 1, \\ 0; & \text{se } \sigma_\mu \neq \sigma_\nu, \end{cases} \quad (4.215)$$

onde foram definidas as quantidades

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} := \mathcal{G}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu); \quad g_{\mu\nu} := g(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu); \quad f_{\mu\nu} := f(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu). \quad (4.216)$$

A forma bilinear \mathcal{G} aplicada nos elementos da base de \mathbf{V} obedece à propriedade

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = (-1)^{\sigma_\mu \sigma_\nu} \mathcal{G}_{\nu\mu}. \quad (4.217)$$

Apenas por uma questão de comparação com os resultados de Okubo, é conveniente introduzir a forma bilinear

$$\mathcal{G}'_{\mu\nu} = \begin{cases} g_{\mu\nu}; & \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 0, \\ -f_{\mu\nu}; & \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 1, \\ 0; & \text{se } \sigma_\mu \neq \sigma_\nu. \end{cases} \quad (4.218)$$

Isto equivale a uma supercorrelação dada por $\mathfrak{h} = \mathfrak{b} \oplus (-\mathfrak{h})$.

A introdução de \mathfrak{h} tem como consequência uma outra álgebra denotada por

$$S_{nm}(\mathbf{V}, \mathcal{G}') \quad (4.219)$$

caracterizada pelas relações de supercomutação

$$[[\mathbf{e}_\mu], [\mathbf{e}_{\nu\mathfrak{h}}]] = \mathcal{G}'_{\mu\nu}, \quad (4.220)$$

$$[[\mathbf{e}_\mu], [\mathbf{e}_\nu]] = 0, \quad (4.221)$$

$$[[\mathbf{e}_{\mu\mathfrak{h}}], [\mathbf{e}_{\nu\mathfrak{h}}]] = 0, \quad (4.222)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o supercomutador

$$[A, B] = AB + (-1)^{\sigma(A)\sigma(B)}BA \quad (4.223)$$

com

$$\sigma(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A \in \mathbf{V}_0 \text{ ou } A \in \mathbf{U}_0 \\ 1, & \text{se } A \in \mathbf{V}_1 \text{ ou } A \in \mathbf{U}_1. \end{cases} \quad (4.224)$$

Com essa estrutura é possível introduzir os elementos

$$\gamma_\mu^\pm := [\mathbf{e}_\mu] \pm [\mathbf{e}_{\mu\mathfrak{h}}], \quad (4.225)$$

que obedecem à multiplicação

$$\gamma_\mu^\pm \gamma_\nu^\pm + (-1)^{\sigma_\mu \sigma_\nu} \gamma_\nu^\pm \gamma_\mu^\pm = \pm 2\mathcal{G}'_{\mu\nu}, \quad (4.226)$$

ou seja,

$$[\gamma_\mu^\pm, \gamma_\nu^\pm] = \pm 2\mathcal{G}'_{\mu\nu}. \quad (4.227)$$

A expressão (4.226) é equivalente a três expressões, a depender do valor de μ e ν , sendo elas

$$\gamma_\mu^\pm \gamma_\nu^\pm + \gamma_\nu^\pm \gamma_\mu^\pm = \pm 2g_{\mu\nu}; \quad \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 0, \quad (4.228)$$

$$\gamma_\mu^\pm \gamma_\nu^\pm - \gamma_\nu^\pm \gamma_\mu^\pm = \pm 2f'_{\mu\nu}; \quad f'_{\mu\nu} := -f_{\mu\nu}; \quad \text{se } \sigma_\mu = \sigma_\nu = 1, \quad (4.229)$$

$$\gamma_\mu^\pm \gamma_\nu^\pm + \gamma_\nu^\pm \gamma_\mu^\pm = 0; \quad \text{se } \sigma_\mu \neq \sigma_\nu. \quad (4.230)$$

As expressões (4.228–4.229) são facilmente reconhecidas como as expressões que definem as álgebras de Clifford ortogonal e simplética, respectivamente. A expressão (4.230), por sua vez, mostra que os elementos da álgebra de Clifford ortogonal anticomutam com os elementos da álgebra de Clifford simplética. Desta forma, a álgebra caracterizada pela expressão (4.226) é considerada uma supergeneralização da álgebra de Clifford e é

denotada por $Cl_{nm}(\mathbf{V}, \mathcal{G})$. Ela é denominada *superálgebra de Clifford*. Observe que para $\dim \mathbf{V}_0 = \dim \mathbf{V}_1 = 4$, então $Cl_{nm}(\mathbf{V}, \mathcal{G})$ se reduz ao que denominamos superálgebra de Dirac.

As expressões (4.228–4.229) têm conexão com as equações de Dirac ortogonal e simplética. Desta forma, a expressão (4.230) pode também ter conexão com uma versão supergeneralizada da equação de Dirac. O que analisaremos na seção posterior

4.10 A álgebra $\mathcal{S}_{nm}(W, \Omega)$ e os superespinores algébricos

Nos capítulos 2 e 3 foi visto que os elementos das álgebras $Cl_n(\mathbf{W}_0, \Omega_0)$ e $Cl_n(\mathbf{W}_1, \Omega_1)$ – na notação do presente capítulo – podem representar partículas físicas que pertencem aos seus ideais mínimos. Foi visto também que $Cl_n(\mathbf{W}_1, \Omega_1)$ não possui um idempotente primitivo capaz de construir seus ideais, sendo é necessário acrescentar a seus geradores o elemento $\{P\}$ com as propriedades

$$\{P\}^2 = \{P\} \quad (4.231)$$

$$\{e_\mu\}\{P\} = \{P\}\{e^\mu\} = 0. \quad (4.232)$$

No caso de $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$, temos de fazer algo na mesma direção. Os geradores

$$[e_\mu] \quad \text{e} \quad [e^\mu]; \quad 1 \leq \mu \leq n \quad (4.233)$$

expandem a subálgebra $Cl_n(\mathbf{V}_0, \Omega_0)$ e podem construir o idempotente dado por

$$[(P)] = [e_1][e^1][e_2][e^2] \dots [e_n][e^n] \quad (4.234)$$

que obedece às propriedades

$$[(P)]^2 = [(P)], \quad (4.235)$$

$$[e_\mu] [(P)] = [(P)] [e^\mu] = 0; \quad 1 \leq \mu \leq n, \quad (4.236)$$

$$[e_\mu] [(P)] = (-1)^{2n} [(P)] [e_\mu] = [(P)] [e_\mu] \quad n+1 \leq \mu \leq n+m, \quad (4.237)$$

$$[e^\mu] [(P)] = (-1)^{2n} [(P)] [e^\mu] = [(P)] [e^\mu] \quad n+1 \leq \mu \leq n+m. \quad (4.238)$$

Por outro lado, os geradores de $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$

$$[e_\mu] \quad \text{e} \quad [e^\mu]; \quad n+1 \leq \mu \leq n+m, \quad (4.239)$$

que expandem a subálgebra $Cl_m(\mathbf{V}_1, \Omega_1)$, não conseguem formar um elemento com as características (4.235–4.239), onde a segunda equação seja válida para $n+1 \leq \mu \leq n+m$ e as últimas duas sejam válidas para $1 \leq \mu \leq n$. Segue então que tal elemento deve ser incluído de maneira *ad hoc*. Assim, definimos o elemento $[\{P\}]$ através das propriedades

$$[\{P\}]^2 = [\{P\}], \quad (4.240)$$

$$[e_\mu] [\{P\}] = [\{P\}] [e^\mu] = 0; \quad n+1 \leq \mu \leq n+m, \quad (4.241)$$

$$[e_\mu] [\{P\}] = [\{P\}] [e_\mu] \quad 1 \leq \mu \leq n, \quad (4.242)$$

$$[e^\mu] [\{P\}] = [\{P\}] [e^\mu] \quad 1 \leq \mu \leq n. \quad (4.243)$$

Desta maneira, os geradores (4.239) de $S_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$ e o elemento $[\{P\}]$ definido pelas propriedades (4.240–4.243) formam uma superálgebra maior, denotada por $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$.

Uma base canônica de $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$ pode ser construída a partir de seus geradores. Essa base é dada pelo conjunto dos elementos

$$[P_{K_{rs}}^{J_{pq}}] := [e^{J_{pq}}][P][e_{K_{rs}}], \quad (4.244)$$

onde J_{pq} e K_{rs} são conjuntos de multi-índices ascendentes híbridos de tamanhos $p + q$ e $r + s$, respectivamente, e

$$[P] := [(P)][\{P\}] = [\{P\}][P], \quad (4.245)$$

$$[e^{J_{pq}}] = [e^{j_1}] \dots [e^{j_p}][e^{j_{p+1}}] \dots [e^{j_{p+q}}], \quad (4.246)$$

$$[e_{K_{rs}}] = [e_{k_{r+s}}] \dots [e_{k_{r+1}}][e_{k_r}] \dots [e_{k_1}]. \quad (4.247)$$

Os elementos (4.244) se multiplicam através da regra

$$[P_{K_{sr}}^{J_{pq}}][P_{H_{tt}}^{Q_{uv}}] = [\delta_{K_{rs}}^{Q_{uv}}][P_{H_{tt}}^{J_{pq}}], \quad (4.248)$$

onde $[\delta_{K_{rs}}^{Q_{uv}}]$ foi definido em (4.143). Nesse contexto, elemento geral de $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$, expandido nesta base, é dado por

$$\Lambda = \sum_{p,r=0}^n \sum_{q,s=0}^{\infty} A_{J_{pq}}^{K_{rs}} [P_{K_{rs}}^{J_{pq}}], \quad (4.249)$$

onde $A_{J_{pq}}^{K_{rs}}$ pertencem ao corpo \mathbb{K} e são antissimétricos em relação aos primeiros índices, p (r), j 's (k 's) e simétricos em relação aos últimos q (s). Além disto, também são antissimétricos em relação às trocas de índices $p \leftrightarrow r$ e $q \leftrightarrow s$.

Neste contexto, os ideais mínimos à direita e à esquerda de $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$ são encontrados através da multiplicação do elemento $[P]$ à direita e à esquerda, respectivamente, pelos elementos gerais (4.249), utilizando a regra (4.248). Em consequência, o elemento

$$\psi = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^{\infty} A_{J_{pq}} [P_{J_{pq}}] \in \mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)[P], \quad (4.250)$$

e

$$\varphi = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^{\infty} A^{J_{pq}} [P_{J_{pq}}] \in [P]\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega), \quad (4.251)$$

onde $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)[P]$ denota o ideal mínimo à esquerda da referida superálgebra e $[P]\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$ o seu ideal à direita. Os elementos (4.250–4.251) podem representar partículas bosônicas e ferminônicas simultaneamente e, por este motivo, denominaremos de *superespinores algébricos*. É importante notar que, assim como estudado nos casos anteriores, os elementos gerais da superálgebra (4.249) fazem o papel de superoperadores que atuam nos ideais mínimos, isto é, nos espaços dos superespinores algébricos.

Nosso objetivo nesta seção foi construir os elementos básicos para a obtenção dos superespinores da superálgebra $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$. Na próxima seção usaremos estes objetos como solução de superequações.

4.11 A superequação de Dirac

Na seção 4.9, foi visto que a introdução da supercorrelação $\natural : \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{k}$ no espaço $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_1$ induz uma superálgebra de Clifford, caracterizada por elementos do tipo (4.225) que obedecem à multiplicação dada em (4.226). Essa álgebra permite unificar as equações de Dirac ortogonal e simplética em um só formalismo e obtemos os superespinores (4.250–4.251).

Nesta formulação, consideremos uma supervariiedade diferenciável com coordenadas $\{x_1, \dots, x_{n+m}\}$, onde as n primeiras são coordenadas comutativas e as m últimas são coordenadas não anticomutativas, ou seja,

$$[x_\mu, x_\nu] = 0; \quad 1 \leq \mu, \nu \leq n, \quad (4.252)$$

$$[x_\mu, x_\nu]_+ = \vartheta_{\mu\nu} \quad n+1 \leq \mu, \nu \leq n+m, \quad (4.253)$$

onde $\vartheta_{\mu\nu}$ é um parâmetro de deformação tal que para $\vartheta \rightarrow 0$ as coordenadas x_μ ($n+1 \leq \mu \leq n+m$) passam a ser coordenadas de Grassmann.

A superequação de Dirac é dada ao se combinar os geradores $\gamma_\mu := \gamma_\mu^+$, dados em (4.225), com os operadores diferenciais ∂^μ , isto é,

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - m] \psi = 0; \quad 1 \leq \mu \leq n+m, \quad (4.254)$$

onde m é uma constante e $\psi \in \mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)[P]$. A equação (4.254) descreve uma superpartícula de Dirac num espaço riemanniano e uma partícula de Dirac num espaço não anticomutativo, simultaneamente. Na realidade (4.254) pode ser dividida em duas equações, a saber

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - m_R] \psi = 0; \quad 1 \leq \mu \leq n, \quad (4.255)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - m_S] \psi = 0; \quad n+1 \leq \mu \leq n+m, \quad (4.256)$$

onde se usou $m = m_R + m_S$. Note que (4.255) é a equação de Dirac ortogonal para uma partícula de massa m_R e (4.256) é a equação de Dirac simplética para uma partícula de massa m_S . Observe ainda que o ente ψ que representa a partícula é o mesmo em ambas equações (4.255–4.256). Isto dá ao superespinor ψ de Dirac o caráter de um objeto que obedece a duas dinâmicas e que está de acordo com a proposta de Okubo [50].

Observe ainda que (4.254) implica na superequação de Klein-Gordon-Fock

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \psi = 0; \quad 1 \leq \mu \leq n+m, \quad (4.257)$$

com $\partial_\mu = \mathcal{G}_{\mu\nu} \partial^\nu$. Note que para $1 \leq \mu \leq n$ a equação (4.257) é a equação de Klein-Gordon-Fock correspondente a (2.265) do nosso formalismo baseado em $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$, enquanto para $n+1 \leq \mu \leq n+m$ corresponde à equação de Klein-Gordon-Fock simplética (4.113) do também nosso formalismo baseado na álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$.

Para uma comparação na forma com as equações (2.135) e (4.115), é conveniente definir

$$[d] := [e_\mu] \partial^\mu; \quad 1 \leq \mu \leq n + m, \quad (4.258)$$

$$[\delta] = -[e_{\mu\ddagger}] \partial^\mu = -(-1)^{\sigma_\mu \sigma_\nu} [e^\mu] \partial_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq n + m, \quad (4.259)$$

objetos que obedecem a

$$[[d], [\delta]]_+ = -\partial_\mu \partial^\mu; \quad 1 \leq \mu \leq n + m. \quad (4.260)$$

Então nestes termos, a superequação de Dirac (4.254) pode ser reescrita como

$$[i[D] - m] \psi = 0, \quad (4.261)$$

com

$$[D] = [d] - [\delta]. \quad (4.262)$$

Notemos que restrito à variedade riemanniana, isto é, para $1 \leq \mu \leq n$, o superoperador de Dirac $[D]$ é igual ao operador de Dirac (D) , estudado na subseção 2.3.1; desta forma, $[d]$ e $[\delta]$ são a derivada e a coderivada exterior, respectivamente. Nesta restrição, tem-se que $[D]^2 = 0$. Por outro lado, ao se restringir à variedade não anticomutativa, isto é, para $n + 1 \leq \mu \leq n + m$, então $[D]$ é igual ao operador de Dirac simplético, visto na seção 4.6. Observe que nesta situação, o quadrado do superoperador de Dirac já não é mais nulo. Isso se dá pelo fato de que os geradores $[e_\mu]$ e $[e_{\mu\ddagger}]$, nesta restrição, não são mais nilpotentes.

Na próxima seção mostraremos como a supergeneralização da equação de *DKP*, vista em (4.24), é extraída da superálgebra $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \mathbf{V})$, quando há uma supercorrelação entre \mathbf{V} e \mathbf{U} . Neste contexto, a superequação de *DKP* será desenvolvida.

4.12 A superálgebra de *DKP* e a superequação de *DKP*

Assim como a álgebra de *DKP* e *PDKP* são explicadas como uma subálgebras das álgebras de férmions e bósons de Schönberg, respectivamente, a superálgebra *DKP* pode ser entendida como uma subálgebra de uma superálgebra.

Como nos casos anteriores, é crucial a presença de projetores dos ideais mínimos capazes de extrair elementos de determinadas ordens dos ideais. Além disto, esses projetores devem obedecer propriedades específicas em conjunto com os geradores da álgebra. Nota-se no entanto, que essas propriedades não são obedecidas por projetores construídos pelos elementos da superálgebra $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{V}, \mathcal{G})$. Isto se deve ao duplo caráter da superálgebra – simétrico e antissimétrico – que impossibilita que tais propriedades sejam obedecidas por todos os geradores simultaneamente.

Nessas condições se faz necessário que esses projetores sejam incluídos na álgebra de maneira *ad hoc*. Desta maneira, define-se o objeto $[\Pi_p]$ que é capaz de extrair elementos de ordens p dos ideais da seguinte maneira: seja Λ um elemento geral da superálgebra, dado por (4.249), então $[\Pi_p]$ é definido pelas propriedades

$$[\Pi_p]\Lambda = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{\infty} A_{J_{pp}}^{K_{rs}} [P_{K_{rs}}^{J_{pp}}]; \quad 0 \leq p < n, \quad (4.263)$$

$$[\Pi_p]\Lambda = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{\infty} A_{J_{0p}}^{K_{rs}} [P_{K_{rs}}^{J_{0p}}]; \quad p \geq n, \quad (4.264)$$

$$\Lambda[\Pi_p] = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{\infty} A_{J_{rs}}^{K_{pp}} [P_{K_{pp}}^{J_{rs}}]; \quad 0 \leq p < n, \quad (4.265)$$

$$\Lambda[\Pi_p] = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{\infty} A_{J_{rs}}^{K_{0p}} [P_{K_{0p}}^{J_{rs}}]; \quad p \geq n, \quad (4.266)$$

$$[\Pi_p][e_\mu] = [e_\mu][\Pi_{p+1}]; \quad 1 \leq \mu \leq n + m, \quad (4.267)$$

$$[e^\mu][\Pi_p] = [\Pi_{p+1}][e^\mu]; \quad 1 \leq \mu \leq n + m, \quad (4.268)$$

$$[\Pi_p][\Pi_q] = \delta_{pq}[\Pi_p], \quad (4.269)$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} [\Pi_p] = 1_{\mathcal{S}_{nm}}, \quad (4.270)$$

onde $1_{\mathcal{S}_{nm}}$ é a unidade da álgebra $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$. Neste contexto, os elementos $[e_\mu]$, $[e^\mu]$, $[P]$ e $[\Pi_p]$ expandem uma nova superálgebra, denotada por $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)$. Observe ainda que, com as propriedades (4.263–4.270), o elemento $[\Pi_p]$ aplicado à esquerda de um elemento geral do ideal mínimo à esquerda ψ , dado por (4.250), resulta em

$$[\Pi_p]\psi = A_{J_{pp}} [P^{J_{pp}}]; \quad 0 \leq p < n, \quad (4.271)$$

$$[\Pi_p]\psi = A_{J_{0p}} [P^{J_{0p}}]; \quad p \geq n. \quad (4.272)$$

Já $[\Pi_p]$ aplicado ao elemento geral do ideal mínimo à direita φ , dado por (4.251), nos dá:

$$\varphi[\Pi_p] = A^{J_{pp}} [P_{J_{pp}}]; \quad 0 \leq p < n, \quad (4.273)$$

$$\varphi[\Pi_p] = A^{J_{0p}} [P_{J_{0p}}]; \quad p \geq n. \quad (4.274)$$

Agora, com $[\Pi_p]$ definido pelas propriedades (4.263–4.270), é possível definir a superálgebra *DKP*, denotada por $SDP_p(\mathbf{V}, \mathcal{G})$, como a projeção bilateral de $\mathcal{S}_{nm}(\mathbf{V}, \mathcal{G})$ pelos elementos

$$1_{[p]} := [\Pi_p] + [\Pi_{p+1}], \quad (4.275)$$

ou seja,

$$SDP_p(\mathbf{V}, \mathcal{G}) := 1_{[p]} \mathcal{S}_{nm}(\mathbf{V}, \mathcal{G}) 1_{[p]}, \quad (4.276)$$

sendo seus geradores dados por

$$\bar{\theta}_{\mu,p} := 1_{[p]} \gamma_\mu 1_{[p]}, \quad (4.277)$$

onde $\gamma_\mu := \gamma_\mu^+$ são os geradores da superálgebra de Clifford dados por (4.225). Pelas propriedades (4.267–4.269), pode-se mostrar que os $\bar{\theta}_{\mu,p}$ podem ser escritos como

$$\bar{\theta}_{\mu,p} = [\Pi_p][\mathbf{e}_\mu] + [\mathbf{e}_{\mu\ddagger}][\Pi_p]. \quad (4.278)$$

e obedecem a

$$\bar{\theta}_{\mu,p}\bar{\theta}_{\nu,p}\bar{\theta}_{\lambda,p} + (-1)^{\sum\sigma(\mu,\nu,\lambda)}\bar{\theta}_{\lambda,p}\bar{\theta}_{\nu,p}\bar{\theta}_{\mu,p} = \mathcal{G}_{\nu\mu}\bar{\theta}_{\lambda,p} + \mathcal{G}_{\lambda\nu}\bar{\theta}_{\mu,p} \quad (4.279)$$

com

$$\sum\sigma(\mu,\nu,\lambda) = (\sigma_\mu\sigma_\nu + \sigma_\mu\sigma_\lambda + \sigma_\lambda\sigma_\nu) \pmod{2}. \quad (4.280)$$

A expressão (4.279) é definida para $1 \leq \mu, \nu, \lambda \leq n + m$, e para todo valor de $p \geq 0$. Essa expressão é, desta forma, uma generalização de (4.16), proposta por Okubo, na medida em que (4.279) permite infinitas representações, em conformidade com cada valor de p . Neste contexto, é possível fazer a identificação de $[\mathbf{e}_\mu]$ e $[\mathbf{e}^\mu]$ com os operadores de criação e aniquilação (4.21–4.23), bastando para isso fazer a comparação com (4.220–4.222).

O formalismo desenvolvido aqui permite mais uma generalização. Os elementos

$$\theta_{\mu,p}^\pm = [\Pi_p][\mathbf{e}_\mu] \pm [\mathbf{e}_{\mu\ddagger}][\Pi_p]; \quad 1 \leq \mu \leq n + m \quad (4.281)$$

obedecem a

$$\theta_{\mu,p}^{k_\mu}\theta_{\nu,p}^{k_\nu}\theta_{\lambda,p}^{k_\lambda} + (-1)^{\sum\sigma(\mu,\nu,\lambda)}\theta_{\lambda,p}^{k_\lambda}\theta_{\nu,p}^{k_\nu}\theta_{\mu,p}^{k_\mu} = \mathcal{G}'_{\nu\mu}K^T\theta_{\lambda,p} + \mathcal{G}'_{\lambda\nu}K^T\theta_{\mu,p}, \quad (4.282)$$

onde os k_ρ são iguais a ± 1 ou apenas os sinais \pm correspondentes aos sinais de 1, e K e $\theta_{\mu,p}$ são as matrizes colunas

$$K = \begin{bmatrix} k_\nu + k_\mu k_\lambda \\ k_\nu - k_\mu k_\lambda \end{bmatrix}, \quad \theta_{\mu,p} = \begin{bmatrix} \theta_{\mu,p}^+ \\ \theta_{\mu,p}^- \end{bmatrix}. \quad (4.283)$$

A expressão (4.168) foi encontrada quando propusemos a multiplicação entre os elementos da álgebra de bósons e de férmions. Aqui, a expressão (4.282) foi obtida de forma independente considerando a superálgebra encontrada ao introduzir no espaço $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1$ a forma bilinear $\Omega = \Omega_0 \oplus \Omega_1$. Note que a generalização da álgebra de DKP foi obtida ao se propor uma supercorrelação $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{\ddagger}$ entre os espaços $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_1$ e $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \oplus \mathbf{U}_1$ e projetar esta álgebra resultante nas ordens p e $p + 1$.

Para finalizar, obtenhamos a superequação de DKP, dentro do contexto algébrico desta seção. Neste sentido, considere a supervariada da seção 4.11. Como foi visto, os geradores da superálgebra de DKP são projeções bilaterais dos geradores da superálgebra de Clifford pelo elemento $1_{[p]}$, definido em (4.275). Dessa forma é natural assumir que o superoperador de DKP seja dado por

$$[\mathcal{K}_p] := 1_{[p]}[D]1_{[p]}, \quad (4.284)$$

onde $[D]$ é o superoperador de Dirac, definido em (4.262). Portanto, podemos escrever para a superequação de *DKP*

$$\left[i[\mathcal{K}_p] - m1_{[p]} \right] \psi = 0, \quad (4.285)$$

com $\psi \in \mathcal{S}_{nm}(\mathbf{W}, \Omega)[P]$ e m uma constante. A superequação de *DKP* é definida para todos os valores de $p \geq 0$. Esta equação torna-se mais familiar quando escrita em termos dos geradores da superálgebra de *DKP*. De fato, a partir das definições (4.284), (4.275) e (4.281), a superequação (4.285) pode ser escrita em termos dos geradores da superálgebra de *DKP* como

$$\left[i\bar{\theta}_{\mu,p} \partial^\mu - m \right] \psi = 0; \quad 1 \leq \mu \leq n + m. \quad (4.286)$$

implica [50] na superequação de onda

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right] \psi = 0; \quad 1 \leq \mu \leq n + m. \quad (4.287)$$

Observe que a superequação (4.286) para $m = 0$ é igual á equação de *DKP* vista em (2.216) e para $n = 0$ é a equação de *DKP* simplética (4.131). A superequação de *DKP* é, portanto, uma generalização da superequação (4.24), permitindo várias representações conforme o valor de $p \geq 0$.

5 Generalização das álgebras de Clifford ortogonal e simplética e a teoria quântica de campos

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores foi visto como a introdução de uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica em um espaço formado pela soma direta de um espaço vetorial de n dimensões com o seu dual pode induzir a uma álgebra associada à mecânica quântica de férmions ou bósons, respectivamente. Esse formalismo se mostrou suficiente para mostrar, sem elementos externos à teoria, que é possível encontrar as álgebras de DKP e $PDKP$ associadas às equações de DKP ortogonal e simplética. Seguindo os mesmos passos dessas construções, também foi possível explicar o surgimento de uma superálgebra capaz de unir bósons e férmions num mesmo formalismo. Através dessa superálgebra, as álgebras DKP e $PDKP$ são unidas formando a chamada superálgebra de DKP , que está associada à superequação de DKP , equação esta que une as equações de DKP ortogonal e simplética. O que todos estes formalismos têm em comum é que são álgebras sobre espaços vetoriais, e estes espaços são definidos sobre o corpo dos reais ou complexos. As álgebras resultantes destes formalismos estão associadas à mecânica quântica de partículas físicas, de modo que a equação resultante de cada um destes formalismos descreve a dinâmica de uma partícula com determinado spin. Para descrever a cinemática de um conjunto finito ou infinito de partículas quânticas utiliza-se a *teoria quântica de campos*.

Na sua formulação usual, quantizar um campo clássico significa levá-lo à condição de operador e impor que as relações que eles obedeciam enquanto clássicos, por meio do parênteses de Poisson, sejam agora obedecidas por comutadores ou anticomutadores. Neste capítulo, será mostrado como é possível fazer emergir a teoria quântica de campos com uma metodologia inspirada no método de Schönberg de encontrar as álgebras de Clifford ortogonal e simplética $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$, associadas a férmions e bósons, respectivamente. A ideia por trás desta generalização é simples. Estas álgebras devem ser parametrizadas em uma variedade, que irá fazer o papel do espaço-tempo, na formulação usual. Por parametrização das álgebras, leia-se que para cada ponto desta variedade existem álgebras isomórficas a $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$.

Para fazer tal parametrização, a teoria dos *fibrados vetoriais* parece ser a mais adequada, pois um *fibrado* é formado por três espaços topológicos: espaço base, espaço principal e fibra típica. Além destes espaços, há uma projecção π que leva o espaço principal no espaço

base e um grupo chamado de *grupo de estrutura do fibrado*. Cada ponto x da variedade base parametriza uma região do espaço principal chamada de *fibra da projeção π no ponto x* , ou simplesmente *fibra*. Cada fibra de π nos pontos da variedade é isomórfica à fibra típica. No caso dos fibrados vetoriais, a fibra típica é um espaço vetorial.

Como se pode ver, os fibrados vetoriais parecem ser a linguagem matemática por detrás da parametrização das álgebras $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$, pois poderíamos construir uma álgebra de Clifford para cada espaço tangente à variedade de base. Acontece que a parametrização das álgebras não é suficiente, pois a multiplicação de vetores em fibras diferentes não é definida. É preciso definirmos o produto entre entes algébricos relacionando pontos diferentes da variedade de base. Isto pode ser implementado, por exemplo, recorrendo-se à teoria das distribuições ou funções generalizadas conforme originalmente proposto no trabalho [7]. Todavia, a forma proposta aqui é de natureza geométrica e utiliza formulação via fibrado e suas seções transversais (campos) em conjunto com a teoria de distribuições. A inclusão das distribuições está associada à estrutura de módulo do espaço de Hilbert das seções transversais. Neste cenário, a teoria quântica de campos surge quando são consideradas as álgebras de Clifford ortogonal e simplética de módulos vistos como espaços vetoriais cujo corpo é o espaço de funções completas.

Nas seções abaixo serão explicitados os detalhes desta construção. Para todos efeitos, neste capítulo, a variedade M é uma variedade de Hausdorff de n dimensões. No apêndice B, encontra-se uma explanação sobre fibrados vetoriais baseada nas referências [107–109]. Outros textos mais detalhados sobre o assunto podem ser encontrados nas referências [110–117].

5.2 Os núcleos integrais no contexto de fibrados vetoriais holomórficos

Para estabelecer algumas notações deste capítulo, é interessante fazer uma pequena revisão sobre como é possível descrever a teoria de núcleos integrais dentro do formalismo dos fibrados vetoriais. Para o objetivo deste trabalho, é conveniente que seja seguida a notação da referência [117].

Considere um fibrado vetorial holomórfico $\mathbf{E} = (E, \pi, M)$ onde \mathbf{E} denota o espaço principal, M a variedade de base e π a projeção de \mathbf{E} sobre M . Considere também a forma volume $\mu \in \Gamma^{\infty}(\bigwedge^n T^*M)$, onde $n = \dim M$ e $\Gamma^{\infty}(\bigwedge^n T^*M)$ é o espaço de todas seções diferenciáveis da n -ésima potência da álgebra exterior do fibrado cotangente a M .

O espaço de Hilbert de seções $L^2(\mathbf{E})$ do fibrado \mathbf{E} pode ser obtido através da completude do espaço $\Gamma_0^{\infty}(\mathbf{E})$ de todas as seções de \mathbf{E} de suporte compacto com respeito

à norma $\|\cdot\|$ definida pelo produto escalar [117]

$$\langle s|t \rangle = \int_M h(s, t)\mu, \quad (5.1)$$

onde $s, t \in \Gamma_0^\infty$ e h é uma estrutura hermitiana em \mathbf{E} [117]. Outra maneira de identificar o espaço de Hilbert de seções $L^2(\mathbf{E})$ é considerar todas as seções de Lebesgue mensuráveis s de \mathbf{E} cujo quadrado da norma,

$$\|s\|^2 = \int_M h(s, s)\mu(s), \quad (5.2)$$

é finito [117]. Além disto, neste trabalho será considerado que $L^2(\mathbf{E})$ é um espaço de Hilbert separável.

Outro espaço importante para esta discussão é o espaço $L^2H(\mathbf{E})$ de todas as seções holomórficas de $L^2(\mathbf{E})$ definido por [117]

$$L^2H(\mathbf{E}) = L^2(\mathbf{E}) \cap \mathcal{O}(M, E), \quad (5.3)$$

onde $\mathcal{O}(M, E)$ é o espaço de todas as seções holomórficas de \mathbf{E} .

Seja agora $\mathbf{E}^* = (E^*, \pi', M)$ o fibrado dual¹ a \mathbf{E} . Para cada covetor $v^* \in E^*$, pode-se identificar um funcional sobre $L^2H(\mathbf{E})$ dado por

$$\begin{aligned} \epsilon_{v^*} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \epsilon_{v^*}[s] &:= v^*(s(\pi'(v^*))), \end{aligned} \quad (5.4)$$

com $s \in L^2H(\mathbf{E})$. Isto é, o funcional ϵ_{v^*} associado ao vetor dual $v^* \in E^*$, quando avaliado em $s \in L^2H(\mathbf{E})$, resulta em um número complexo igual à avaliação do vetor dual no vetor dado pela seção avaliada num ponto específico. Este ponto é a projeção do próprio covetor em M . Uma propriedade interessante deste funcional é a linearidade. Ou seja, ϵ_{v^*} satisfaz à propriedade

$$\epsilon_{v^*}[as + bs] = a\epsilon_{v^*}[s] + b\epsilon_{v^*}[s], \quad (5.5)$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$.

Como $L^2H(\mathbf{E})$ é um espaço de Hilbert, pode-se usar o teorema de Riesz [117] sobre a representação de funcionais lineares neste espaço. Consequentemente, para cada f no espaço dual ao espaço das seções de Hilbert holomórficas, denotado por $L^2H(\mathbf{E})^*$, existe um único elemento $f^\sharp \in L^2H(\mathbf{E})$ tal que para $s \in L^2H(\mathbf{E})$, tem-se

$$f(s) = \langle f^\sharp|s \rangle. \quad (5.6)$$

Outra consequência é que a aplicação que leva f a f^\sharp é uma isometria antilinear [117]. Isso significa que $f \mapsto f^\sharp$ é uma aplicação g tal que

$$\|g(f)\| = \|f^\sharp\| \quad (5.7)$$

¹ Ver Apêndice B.2.

e

$$g(af + bf') = \bar{a}g(f) + \bar{b}g(f') \quad (5.8)$$

com $f, f' \in L^2H(\mathbf{E})$ e $a, b \in \mathbb{C}$. Nesse espírito, é interessante definir

$$\kappa_{v^*} := g(\epsilon_{v^*}) = \epsilon_{v^*}^\# \in L^2H(\mathbf{E}). \quad (5.9)$$

A aplicação que leva $v^* \in \mathbf{E}_x^*$ em ϵ_{v^*} é a aplicação linear $\alpha : \mathbf{E} \mapsto L^2H(\mathbf{E})^*$. Consequentemente, a aplicação β definida por $\beta(v^*) = \kappa_{v^*}$ é uma aplicação antilinear para qualquer $x \in M^2$, pois é uma composição da aplicação linear α com a aplicação antilinear g , isto é,

$$\beta := g \circ \alpha. \quad (5.10)$$

Isto quer dizer que a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \beta'_{y,x} : \mathbf{E}_x^* &\longrightarrow \bar{\mathbf{E}}_y \\ \beta'_{y,x}(v^*) &:= \overline{\kappa_{v^*}(y)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

é linear para todo $x, y \in M$. Na definição acima, $\bar{\mathbf{E}}_y$ denota a fibra no ponto $y \in M$ do fibrado vetorial que é complexo conjugado a \mathbf{E} , ou seja, um fibrado composto pela mesma tripla (E, π, M) , mas com a multiplicação por números complexos dada por

$$c\bar{v} = \overline{cv}, \quad (5.12)$$

ou

$$\overline{c\bar{v}} = c\bar{v}, \quad (5.13)$$

com $c \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbf{E}$. Este fato permite identificar $\beta'_{y,x}$ como o tensor $K(x, y) \in \mathbf{E}_x \otimes \bar{\mathbf{E}}_y$. Portanto, pode-se identificar a aplicação $(x, y) \mapsto K(x, y)$ como uma seção K do fibrado $\mathbf{E} \tilde{\otimes} \bar{\mathbf{E}}$ sobre a variedade $M \times M$, cuja fibras $\mathbf{E} \tilde{\otimes} \bar{\mathbf{E}}_{(x,y)}$ são dadas por

$$\mathbf{E} \tilde{\otimes} \bar{\mathbf{E}}_{(x,y)} = \mathbf{E}_x \otimes \bar{\mathbf{E}}_y. \quad (5.14)$$

As seções do fibrado $\mathbf{E} \tilde{\otimes} \bar{\mathbf{E}}$ são importantes, pois elas são identificadas como kernels, por possuir as propriedades dos núcleos integrais usuais.

5.2.1 Seções do fibrado $\mathbf{E} \tilde{\otimes} \bar{\mathbf{E}}$ vistas como kernels

Para mostrar a propriedade de K como um kernel, é preciso que definamos as aplicações h^0 e h^1 como

$$\begin{aligned} h^0 : \mathbf{E} \tilde{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbf{E} \\ h^0(v_x \otimes \bar{v}_y, w_y) &:= h(v_y, w_y)v_x \end{aligned} \quad (5.15)$$

² Lembre-se que está sendo considerado $v^* \in \mathbf{E}_x$.

e

$$\begin{aligned} h^1 : \mathbf{E} \otimes \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{E} \otimes \bar{\mathbf{E}} &\longrightarrow \mathbf{E} \otimes \bar{\mathbf{E}} \\ h^1(v_x \otimes \bar{v}'_z, w_z \otimes \bar{w}'_y) &:= h(v'_z, w_z)v_x \otimes \bar{w}'_y, \end{aligned} \quad (5.16)$$

para $v_x \in \mathbf{E}_x$, v_y, w_y e $w'_y \in \mathbf{E}_y$ e $v'_z, w_z \in \mathbf{E}_z$. Desta forma, define-se para todo $s \in L^2H(\mathbf{E})$

$$s(x) := \int_M h^0(K(x, y), s(y))\mu(y). \quad (5.17)$$

Pode-se introduzir a base completa e ortonormal $\{g_m\}$ em $L^2H(\mathbf{E})$, assumindo este espaço como um espaço de Hilbert separável. Desta maneira, o tensor $K(x, y)$ pode ser expresso como

$$K(x, y) = \sum_m g_m(x) \otimes \bar{g}_m(y), \quad (5.18)$$

em que a série do lado direito de (5.18) converge localmente e uniformemente sobre $M \times M$. Em termos de (5.18), uma seção $s \in L^2H(\mathbf{E})$ avaliada em $x \in M$ pode ser escrita como

$$s(x) = \sum_m \langle g_m, s \rangle g_m(x), \quad (5.19)$$

que é justamente a expansão da seção s na base $\{g_m\}$.

A aplicação (5.16) permite reproduzir a propriedade que define os kernels. Observe que

$$\begin{aligned} \int_M h^1(K(x, z), K(z, y))\mu(z) &= \sum_{m, m'} \int_M h^1(g_m(x) \otimes \bar{g}_m(z), g_{m'}(z) \otimes \bar{g}_m(y))\mu(z) \\ &= \sum_{m, m'} \int_M h(g_m(z), g_{m'}(z))g_m(x) \otimes \bar{g}_{m'}(y)\mu(z) \\ &= \sum_{m, m'} \langle g_m, g_{m'} \rangle g_m(x) \otimes \bar{g}_{m'}(y) \\ &= \sum_m g_m(x) \otimes \bar{g}_m(y) = K(x, y). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ou seja,

$$K(x, y) = \int_M h^1(K(x, z), K(z, y))\mu(z). \quad (5.21)$$

O resultado (5.21) encerra a presente seção. Na próxima seção, será visto como este formalismo pode ser reproduzido uma estrutura $\mathcal{F}(M)$ -modular, onde $\mathcal{F}(M)$ é o espaço completo de funções.

5.3 As distribuições que emergem dos espaços de Hilbert de seções

O objetivo desta seção é o detalhamento das estruturas matemáticas que tornarão possível introduzir uma teoria quântica de campos dentro da visão algébrica construída

nos capítulos anteriores. Para isto é necessário ir além do espaço de Hilbert; é preciso explorar as distribuições. Neste sentido, será aproveitada a estrutura modular das seções de \mathbf{E} com a álgebra de funções $M \mapsto \mathbb{C}$. Mas aqui apenas interessa o espaço $\mathcal{F}(M)$ expandido pelo conjunto completo de funções complexas $\{\psi_m : M \rightarrow \mathbb{C}\}$. Será visto que elementos especiais desses $\mathcal{F}(M)$ -módulos podem ser combinados de maneira a encontrar as distribuições.

Contudo, é importante que a notação estabelecida na seção 5.2 seja ajustada para o propósito deste seção, principalmente com relação aos funcionais definidos em (5.4). Veja que nesta definição, o covetor v^* denota um elemento da fibra \mathbf{E}_x^* . Suponha agora que exista uma seção $\sigma^* \in L^2H(\mathbf{E}^*)$ tal que quando avaliada em $x \in M$ seja dada por

$$\sigma^*(x) = v^*. \quad (5.22)$$

Então, sem nenhum prejuízo, pode-se escrever (5.4) como

$$\begin{aligned} \epsilon_{v^*}[s] &= \epsilon_{\sigma^*(x)}[s] = \sigma^*(x)(s(\pi'(\sigma^*(x)))) \\ &= \sigma^*(x)(s(x)). \end{aligned} \quad (5.23)$$

A seção σ^* pode ser expandida na base $\{g_m^*\}$ completa e ortonormal de $L^2H(\mathbf{E}^*)$ como

$$\sigma^* = \sum_m c_m g_m^*, \quad (5.24)$$

onde c_m são funções $M \mapsto \mathbb{C}$. Utilizando (5.24) em (5.23) obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{\sigma^*(x)}[s] &= \sigma^*(x)(s(x)) \\ &= \sum_m c_m(x) g_m^*(x)(s(x)) \\ &= \sum_m c_m(x) \epsilon_{g_m^*(x)}[s]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Isto é, o funcional $\epsilon_{\sigma^*(x)} \in L^2H(\mathbf{E})^*$ (não confundir com $L^2H(\mathbf{E}^*)$) pode ser expandido como

$$\epsilon_{\sigma^*(x)} = \sum_m c_m(x) \epsilon_{g_m^*(x)}. \quad (5.26)$$

Claramente, tem-se que

$$\epsilon_{g_m^*(x)}[g_{m'}] = g_m^*(x)(g_{m'}(x)) = \delta_{m,m'}. \quad (5.27)$$

Pelo teorema de Riesz, existe um único $\epsilon_{g_m^*(x)}^\sharp \in L^2H(\mathbf{E})$ tal que

$$\epsilon_{g_m^*(x)}[g_{m'}] = \langle \epsilon_{g_m^*(x)}^\sharp | g_{m'} \rangle = \delta_{m,m'}. \quad (5.28)$$

Isto é, existe uma relação de um para um entre um funcional em $L^2H(\mathbf{E})^*$ e uma seção em $L^2H(\mathbf{E})$. Desta forma, pode-se entender o superescrito \sharp como uma aplicação

$L^2H(\mathbf{E})^* \longrightarrow L^2H(\mathbf{E})$, de maneira que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ seja a correspondente forma bilinear induzida. Neste contexto, percebe-se que

$$\epsilon_{g_m^*(x)}^\# = g_m. \quad (5.29)$$

Veja que (5.26) é válida para todo valor de $x \in M$. Então, pode-se dizer que para cada seção σ^* de $L^2H(\mathbf{E}^*)$ existe uma seção dual λ_{σ^*} em $L^2H(\mathbf{E})^*$ escrita como

$$\lambda_{\sigma^*} = \sum_m c_m \lambda_m, \quad (5.30)$$

onde $\{\lambda_m\}$ é a base dual de $\{g_m\}$ dada por

$$\lambda_m[\cdot] = \langle g_m | \cdot \rangle \quad (5.31)$$

Na notação da seção 5.2, tem-se que $\kappa_{g_m^*(x)} := \epsilon_{g_m^*(x)}^\#$. Foi dito também que a aplicação $\beta := g \circ \alpha : \mathbf{E}^* \mapsto L^2H(\mathbf{E})$ é anti-linear, o que implica que a aplicação definida por

$$\beta'_{y,x}(g_m^*(x)) = \overline{\kappa_{g_m^*(x)}(y)} \quad (5.32)$$

é uma aplicação bilinear. Agora observe que por (5.29), a definição (5.32) pode ser escrita como

$$\beta'_{y,x}(g_m^*(x)) = \bar{g}_m(y) \quad (5.33)$$

Deste modo, a aplicação $\beta'_{y,x}$ pode ser interpretada como um tensor $K(x, y) \in \mathbf{E}_x \otimes \bar{\mathbf{E}}_y$. A equação (5.32) pode ser reinterpretada utilizando $K(x, y)$ escrito da forma (5.18) e observando que $g_m(x)^*$ é um covetor sobre a fibra \mathbf{E}_x . Assim, a equação (5.32) tem o mesmo efeito que $g_m^*(x)$ aplicado à esquerda de $K(x, y)$. Veja:

$$\begin{aligned} g_m^*(x)K(x, y) &= g_m^*(x) \sum_{m'} g_{m'}(x) \otimes \bar{g}_{m'}(y) \\ &= \sum_{m'} g_m^*(x)(g_{m'}(x)) \bar{g}_{m'}(y) \\ &= \sum_{m'} \delta_{mm'} \bar{g}_{m'}(y) = \bar{g}_m(y). \end{aligned} \quad (5.34)$$

É importante agora encontrar uma maneira de encontrar $s(x)$ que seja compatível com (5.17), mas sem utilizar necessariamente os núcleos integrais. Uma forma de se proceder é através das distribuições. Neste sentido, o espaço $\mathcal{F}(M)$ é definido como o espaço de funções expandido pelo conjunto completo de funções ortogonais $\psi_m : M \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\int_M \psi_m^*(x) \psi_{m'}(x) dx = \delta_{mm'}, \quad (5.35)$$

$$\sum_m \psi_m^*(x) \psi_m(y) = \delta(x, y), \quad (5.36)$$

onde $\delta(x, y)$ é a distribuição delta de Dirac. Deste modo, para cada fibra \mathbf{E}_x é definida a aplicação

$$\begin{aligned}\theta_x : \mathbf{E}_x &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \theta_x(g_m(x)) &= \psi_m(x).\end{aligned}\tag{5.37}$$

Neste contexto, θ_x pode ser aplicado a $s(x)$ escrita na definição (5.17) de forma que segue o desenvolvimento

$$\begin{aligned}(\theta_x \circ s)(x) &= \int_M h^0(K(x, y), s(y))\mu(y) \\ &= \theta_x \circ \sum_m \int_M h^0(g(x) \otimes \bar{g}(y), s(y))\mu(y) \\ &= \sum_m \int_M h(g_m(y), s(y))\theta_x(g_m(x))\mu(y) \\ &= \sum_m \langle g_m | s \rangle \psi_m(x)\end{aligned}\tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}&= \langle \sum_m \bar{\psi}_m(x) g_m | s \rangle \\ &= \langle K_x | s \rangle,\end{aligned}\tag{5.39}$$

onde foi introduzida a seção especial

$$K_x = \sum_m \bar{\psi}_m(x) g_m.\tag{5.40}$$

Desta forma, a seção s avaliada em x , definida em (5.17), pode ser reescrita como

$$s(x) := \theta_x^{-1}(\langle K_x | s \rangle).\tag{5.41}$$

Outro resultado que pode ser obtido é a composição de θ_y com a seção K_x avaliada em y . Isto é

$$\begin{aligned}(\theta_y \circ K_x)(y) &= \sum_m \bar{\psi}_m(x) \theta_y(\psi_m(y)) \\ &= \sum_m \bar{\psi}_m(x) \psi_m(y) \\ &= \delta(x, y).\end{aligned}\tag{5.42}$$

Novas seções especiais podem ser definidas considerando o espaço completo de funções $\mathcal{F}(M)$. Assim, considere as seções

$$K_x^* = \sum_m \psi_m(x) g_m^* \in L^2 H(\mathbf{E}^*),\tag{5.43}$$

$$\lambda_x = \sum_m \psi_m(x) \lambda_m \in L^2 H(\mathbf{E})^*,\tag{5.44}$$

onde $x \in M$ e λ_m é definido por (5.31). Estas seções especiais têm a propriedade

$$K_x^*(z) (K_y(z)) = \langle K_x | K_y \rangle = \lambda_x[K_y] = \delta(x, y),\tag{5.45}$$

$$s(x) = \theta_x^{-1}(\langle K_x | s \rangle) = \theta_x^{-1}(\lambda_x[s]),\tag{5.46}$$

com $x, y, z \in M$ e $s \in L^2H(\mathbf{E})$.

Pode-se ainda obter outra representação para (5.17). Para isto, deve ser introduzido o fibrado $\mathbf{E} \tilde{\otimes} \mathbf{E}^*$ sobre $M \times M$ cujas suas fibras são dadas por

$$\mathbf{E} \tilde{\otimes} \mathbf{E}^*_{(x,y)} = \mathbf{E}_x \otimes \mathbf{E}_y^*. \quad (5.47)$$

As seções deste fibrado são aplicações $M \times M \mapsto \mathbf{E} \tilde{\otimes} \mathbf{E}^*$. Pode-se definir uma seção β no espaço de Hilbert de seções de $\mathbf{E} \tilde{\otimes} \mathbf{E}^*$, denotado por $L^2H(\mathbf{E} \tilde{\otimes} \mathbf{E}^*)$, dada por

$$\beta = \sum_m g_m \otimes g_m^* \quad (5.48)$$

onde $\{g_m\}$ é base de $L^2H(\mathbf{E})$ e $\{g_m^*\}$ base de $L^2H(\mathbf{E}^*)$. Localmente, esta seção assume valores em $\mathbf{E}_x \otimes \mathbf{E}_y$, com $x, y \in M$. Isto é

$$\beta(x, y) = \sum_m g_m(x) \otimes g_m^*(y). \quad (5.49)$$

O tensor (5.49) pode ser interpretado como uma aplicação $\mathbf{E}_y \mapsto \mathbf{E}_x$, pois para $s(y) \in \mathbf{E}_y$, tem-se

$$\begin{aligned} \beta(x, y)s(y) &= \sum_m g_m(x) \otimes g_m^*(y)s(y) \\ &= \sum_m g_m^*(y)(s(y))g_m(x) \\ &= \sum_m \epsilon_{g_m^*(y)}[s]g_m(x) \\ &= \sum_m \langle \epsilon_{g_m^*(y)}^\# | s \rangle g_m(x) \\ &= \sum_m \langle g_m | s \rangle g_m(x), \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde o teorema de Riesz (5.28) foi usado e a identificação (5.29). Veja que por (5.19) a última linha de (5.50) pode ser identificada como $s(x)$, de modo que

$$s(x) = \beta(x, y)s(y). \quad (5.51)$$

Com cálculos análogos, isto é, aproveitando a aplicação de covetores $g_m^*(x) \in \mathbf{E}_x^*$ em vetores $g_{m'}(x) \in \mathbf{E}_x$ e utilizando o teorema de Riesz junto com a identificação $\epsilon_{g_m^*(x)} = g_m$, pode-se mostrar que as seções β obedecem às propriedades

$$\beta(x, y) = \beta(x, z)\beta(z, y). \quad (5.52)$$

para $x, y, z \in M$.

Observe que se se fixar $x \in M$ como primeiro valor de entrada em (5.48), então, pode-se escrever

$$\beta(x, \cdot) = \sum_m g_m(x) \otimes g_m^*. \quad (5.53)$$

Veja que, neste caso, a seção β se relaciona com K_x^* da seguinte maneira,

$$K_x^* = \theta_x \circ \beta(x, \cdot). \quad (5.54)$$

Para finalizar esta seção, é interessante fazer alguns comentários sobre as estruturas que estão por trás das seções especiais K_x , K_x^* e λ_x . Para isto é necessário enxergar o espaço das seções $\Gamma(\mathbf{V})$, um fibrado vetorial \mathbf{V} sobre M , como um $\mathfrak{F}(M)$ -módulo, onde $\mathfrak{F}(M)$ é a álgebra de funções $M \mapsto \mathbb{C}$. Isto é, o espaço vetorial que entra na definição do módulo sobre $\mathcal{F}(M)$ é o próprio espaço de seções, visto como um espaço vetorial independente. No presente caso, este espaço é reduzido para o espaço de Hilbert de seções holomórficas $L^2H(\mathbf{V})$ e a álgebra de funções é reduzida para $\mathcal{F}(M)$. Assim, as seções especiais K_x e K_x^* estão relacionadas com as bases dos $\mathcal{F}(M)$ -módulos sobre $L^2H(\mathbf{V})$, quando \mathbf{V} denota os fibrados \mathbf{E} e \mathbf{E}^* , respectivamente. Esta relação é percebida, quando se representa os $\mathcal{F}(M)$ -módulos por meio do produto vetorial. Desta forma, define-se os elementos dos respectivos módulos

$$\mathcal{K} = \sum_m \bar{\psi}_m \otimes g_m \in \mathcal{S}(\mathbf{E}), \quad (5.55)$$

$$\mathcal{K}^* = \sum_m \psi_m \otimes g_m^* \in \mathcal{S}(\mathbf{E}^*), \quad (5.56)$$

onde $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ é o um $\mathcal{F}(M)$ -módulo sobre $L^2H(\mathbf{E})$, $\mathcal{S}(\mathbf{E}^*)$ é o $\mathcal{F}(M)$ -módulo sobre $L^2H(\mathbf{E}^*)$ e $\{\psi_m\}$ é uma base completa e ortonormal de $\mathcal{F}(M)$ ³. Neste contexto, é conveniente definir $\mathcal{F}(M)$ -módulo dual a $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ como

$$\mathcal{S}(\mathbf{E})^* := \text{hom}(\mathcal{S}(\mathbf{E}), \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M)). \quad (5.57)$$

A aplicação do elemento da base dual $\Lambda_m = \psi_m \otimes \lambda_m$ em $K_{m'} = \bar{\psi}_{m'} \otimes g_{m'}$ é definida como

$$\begin{aligned} \Lambda_m [K_{m'}] &:= \psi_m \otimes \bar{\psi}_{m'} \lambda_m [g_{m'}] \\ &= \psi_m \otimes \bar{\psi}_{m'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Neste contexto é pertinente definir o elemento $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbf{E})^*$ e o elemento $\delta \in \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M)$ como

$$\lambda = \sum_m \psi_m \otimes \lambda_m, \quad (5.59)$$

e

$$\begin{aligned} \delta &= \lambda[K] \\ &= \sum_m \psi_m \otimes \bar{\psi}_m. \end{aligned} \quad (5.60)$$

³ Ver equações (5.35–5.36)

É óbvio que a aplicação de δ em $(x, y) \in M \times M$ é a distribuição delta de Dirac

$$\begin{aligned}\delta(x, y) &= \sum_m \psi_m \otimes \bar{\psi}_m(x, y) \\ &= \sum_m \psi_m(x) \bar{\psi}_m(y).\end{aligned}\quad (5.61)$$

A conexão deste formalismo com o que foi desenvolvido nesta seção se dá quando é fixado um valor $x \in M$ em uma das duas entradas de K , K^* e λ . Neste caso,

$$\mathcal{K}(x, \cdot) = K_x \in L^2H(\mathbf{E}), \quad (5.62)$$

$$\mathcal{K}^*(x, \cdot) = K_x^* \in L^2H(\mathbf{E}^*), \quad (5.63)$$

$$\lambda(x, \cdot) = \lambda_x \in L^2H(\mathbf{E})^*. \quad (5.64)$$

Por sua vez, se também fixado um valor $x \in M$ em uma das entradas de δ , tem-se a função definida por

$$\delta_x = \sum_m \psi_m(x) \bar{\psi}_m, \quad (5.65)$$

tal que

$$\delta_x(y) = \delta(x, y). \quad (5.66)$$

Como foi dito, as ferramentas matemáticas desenvolvidas nesta seção serão usadas na seção 5.6 para construir uma teoria quântica de campos baseadas na álgebra geométrica.

5.4 Sobre a base de $L^2H(E)$ e as seções do fibrado de frames de E

O espaço de Hilbert de seções holomórficas $L^2H(\mathbf{E})$ pode ser visto como um espaço de funções sobre a variedade M que tem valor em E , onde E é o espaço principal do fibrado vetorial $\mathbf{E} = (E, \pi, M)$, definido na seção 5.2. Neste sentido, pode-se escolher a base completa e ortonormal $\mathfrak{B}_g = \{g_m\}$ para expandir as funções em $L^2H(\mathbf{E})$. Portanto, o conjunto \mathfrak{B}_g é composto de infinitos elementos g_m que obedecem as condições

$$\langle g_m | g_{m'} \rangle = \int_M h(g_m, g_{m'}) \mu = \delta_{m, m'} \quad (5.67)$$

e

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \bar{g}_m(y) = \delta(x, y). \quad (5.68)$$

Sabe-se, no entanto, que um fibrado vetorial $\mathbf{V} = (V, \xi, B)$ é um fibrado associado a um fibrado principal chamado *fibrado de frames*, denotado por $P_{\mathbf{V}}$. O espaço principal

P_V é composto pela união das bases de todas as fibras de V , de forma que as seções de P_V aplicadas a um ponto x da variedade base serve como base para a fibra V_x . Nesse sentido é conveniente definir as notações $\Gamma(V)$ e $\Gamma(P_V)$ como os espaços de seções de V e P_V , respectivamente. Assim, para as seções $\sigma \in \Gamma(V)$ e $\{v_\alpha\} \in \Gamma(P_V)$, tem-se que

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^k A_\alpha v_\alpha, \quad \in \quad \Gamma(V) \quad (5.69)$$

$$\sigma(x) = \sum_{\alpha=1}^k A_\alpha(x) v_\alpha(x) \quad \in \quad V_x \quad (5.70)$$

onde k é a dimensão da variedade base de V e A_α são funções $B \mapsto \mathbb{C}$.

Note que o espaço de Hilbert de seções $L^2H(\mathbf{E})$, por ser composto por seções holomórficas de suporte compacto do fibrado vetorial \mathbf{E} , também pode ser expandido por $\mathfrak{B}_e = \{e_\alpha\} \in \Gamma(P_{\mathbf{E}})$. Sendo assim, para uma seção $s \in L^2H(\mathbf{E})$ pode ser escrita como

$$s = \sum_{\alpha=1}^n C_\alpha e_\alpha, \quad (5.71)$$

onde $n = \dim M$ e $C_\alpha : M \mapsto \mathbb{C}$ são uma funções holomórficas dentro do espaço de Hilbert de funções $\mathcal{F}(M)$. Isto é, o espaço $L^2H(\mathbf{E})$ tem uma estrutura de $\mathcal{F}(M)$ -módulo e uma base para expandir seus elementos pode ser dada por \mathfrak{B}_e .

Cada elemento de \mathfrak{B}_g também podem ser expandidos em termos de \mathfrak{B}_e como

$$g_m = \sum_{\alpha=1}^n \gamma_m^\alpha e_\alpha \quad (5.72)$$

onde $\gamma_m^\alpha \in \mathbb{C}$ e $\sum_{\alpha} \bar{\gamma}_m^\alpha \gamma_{m'}^\alpha = \delta_{m,m'}$. Esta última condição é consequência da condição de ortogonalidade de dos elementos de \mathfrak{B}_g . Neste sentido, os coeficientes γ_m^α também pode ser entendido como um conjunto ortogonal de funções $M \mapsto \mathbb{C}$. Mais ainda, se γ_b^a for entendido como o elemento da matriz γ de linha a e coluna b , então, tem-se que

$$\gamma^\dagger \gamma = 1, \quad (5.73)$$

de forma que γ pode ser entendida como uma matriz de transformação unitária. Os seus elementos são funções. Isto é, para $x \in M$, tem-se

$$g_m(x) = \sum_{\alpha=1}^n \gamma_m^\alpha(x) e_\alpha(x) \quad \in \quad \mathbf{E}_x, \quad (5.74)$$

onde $\gamma(x)$ é uma matriz de transformações unitárias na fibra \mathbf{E}_x .

5.5 Produto tensorial entre elementos do $\mathcal{F}(M)$ -módulo e o espaço de Hilbert de funções

Esta seção irá analisar o produto tensorial do $\mathcal{F}(M)$ -módulo sobre $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ ($\mathcal{S}(\mathbf{E}^*)$) com o espaço de Hilbert de seções holomórficas $L^2H(\mathbf{E})$ ($L^2H(\mathbf{E}^*)$). Será analisada também as relações entre seus elementos.

Antes de definir os espaços tensoriais, é conveniente definir uma notação apropriada para os espaços a partir do $\mathcal{F}(M)$ -módulos $\mathcal{S}(\mathbf{E})$

$$\mathcal{S}_x(\mathbf{E}) := \{ \forall S(x, \cdot) \in L^2H(\mathbf{E}) \mid S \in \mathcal{S}(\mathbf{E}) \}; \quad (5.75)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}) := \{ \mathcal{K} \}; \quad (5.76)$$

$$\mathcal{K}_x(\mathbf{E}) := \{ \mathcal{K}_x \}. \quad (5.77)$$

Analogamente, desta vez para $\mathcal{S}(\mathbf{E}^*)$, define-se

$$\mathcal{S}_x(\mathbf{E}^*) := \{ \forall S^*(x, \cdot) \in L^2H(\mathbf{E}^*) \mid S^* \in \mathcal{S}(\mathbf{E}^*) \}; \quad (5.78)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}^*) := \{ \mathcal{K}^* \}; \quad (5.79)$$

$$\mathcal{K}_x(\mathbf{E}^*) := \{ \mathcal{K}_x^* \}. \quad (5.80)$$

Considere agora os espaços formados pelos produtos tensoriais dos $\mathcal{F}(M)$ -módulos com os espaços de Hilbert de seções holomórficas

$$\mathcal{V}(\mathbf{E}) := \mathcal{S}(\mathbf{E}) \otimes L^2H(\mathbf{E}), \quad (5.81)$$

$$\mathcal{U}(\mathbf{E}) := \mathcal{S}(\mathbf{E}^*) \otimes L^2H(\mathbf{E}^*). \quad (5.82)$$

Os elementos de $\mathcal{V}(\mathbf{E})$ e $\mathcal{U}(\mathbf{E})$ são dados por

$$\mathcal{V} = S \otimes \nu, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{U} = S^* \otimes u, \quad (5.84)$$

com $S \in \mathcal{S}(\mathbf{E})$, $S^* \in \mathcal{S}(\mathbf{E}^*)$, $\nu \in L^2H(\mathbf{E})$ e $u \in L^2H(\mathbf{E}^*)$. A aplicação de \mathcal{U} em \mathcal{V} não é definida, no entanto, a aplicação de $\mathcal{U}(x, y)$ em $\mathcal{V}(x', y')$ é dada por

$$\langle \mathcal{U}(x, y), \mathcal{V}(x', y') \rangle = \langle S^*(\cdot, x), S(\cdot, x') \rangle \langle u(y), \nu(y') \rangle \quad (5.85)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ significa a aplicação de covetores em vetores. No caso de S e S^* pertencentes a $\mathcal{F}(M)$ módulos, tem-se que

$$S(\cdot, x) = \phi \otimes s(x) \in \mathcal{F}(M) \otimes \mathbf{E}_x \quad (5.86)$$

$$S^*(\cdot, x) = \varphi \otimes s^*(x) \in \mathcal{F}(M) \otimes \mathbf{E}_x^* \quad (5.87)$$

com $\phi, \varphi \in \mathcal{F}(M)$. De forma que é definido

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^2H(\mathbf{E}^*) \times L^2H(\mathbf{E}) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M) \\ \langle S^*(\cdot, x), S(\cdot, x') \rangle &:= \phi \otimes \varphi \langle s^*(x), s(x') \rangle. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Aqui $\langle s^*(x), s(x') \rangle$ denota a aplicação de um covetor em \mathbf{E}_x^* em $\mathbf{E}_{x'}$. Observe que esta aplicação está definida em duas fibras diferentes. Neste caso poderíamos pensar em considerar uma conexão no fibrado para levar a fibra em x' na fibra em x . Entretanto, este

trabalho irá somente considerar a situação em que E é plano em relação a uma conexão ∇_E . Nesta situação, as seções s e s^* podem ser expressas em termos \mathfrak{B}_e , e, tem-se que $e_\alpha(x')$ é isomórfico a $e_\alpha(x)$. Desta maneira é possível calcular $\langle e_\alpha^*(x), e_\alpha(x') \rangle$, de modo que

$$\langle S^*(\cdot, x), S(\cdot, x') \rangle = \phi \otimes \varphi \sum_{\alpha} c_{\alpha}(x) c'_{\alpha}(x') \quad (5.89)$$

onde $c'_{\alpha}(x')$ e $c_{\alpha}(x)$ são coeficientes de $s(x')$ e $s^*(x)$ nas bases $\{e_{\alpha}(x')\}$ e seu dual $\{e_{\alpha}^*(x)\}$, respectivamente. Aqui foi introduzida as seções dos fibrado de frames [108], denotadas por $\mathfrak{B}_e := \{e_{\alpha}\} \in \Gamma(P_E)$ e $\mathfrak{B}_{e^*} := \{e_{\alpha}^*\} \in \Gamma(P_{E^*})$. Claramente, a aplicação de (5.89) em $(y, z) \in M \times M$, resulta no número complexo

$$\langle S^*(\cdot, x), S(\cdot, x') \rangle(y, z) = \phi(y) \varphi(z) \sum_m c_m(x) c'_m(x'). \quad (5.90)$$

Observe que para S e S^* em $\mathcal{S}(E)$ e $\mathcal{S}(E^*)$, respectivamente, tem-se

$$\langle S^*(y, x), S(z, x') \rangle = \langle S^*(\cdot, x), S(\cdot, x') \rangle(y, z). \quad (5.91)$$

Neste sentido, é interessante definir, para $S \in \mathcal{S}(E)$ e $S \in \mathcal{S}(E^*)$, os seguintes elementos

$$S_x := S(x, \cdot) \in L^2 H(E), \quad (5.92)$$

$$S(x) := S(\cdot, x) \in \mathcal{F}(M) \otimes E_x, \quad (5.93)$$

$$S_x(y) := S(x, y) \in E_y. \quad (5.94)$$

Como dito previamente, para a construção da teoria quântica de campos na visão algébrica, é preciso ir além do espaço de Hilbert das seções. É preciso encontrar as distribuições. Nesta perspectiva, é interessante considerar os subespaços de $\mathcal{V}(E)$ e $\mathcal{U}(E)$, dados por

$$\mathcal{F}(E) := \mathcal{K}(E) \otimes L^2 H(E) \subset \mathcal{V}(E), \quad (5.95)$$

$$\mathcal{F}(E^*) := \mathcal{K}(E^*) \otimes L^2 H(E^*) \subset \mathcal{U}(E), \quad (5.96)$$

$$\mathcal{F}_x(E) := \mathcal{K}_x(E) \otimes L^2 H(E) \quad (5.97)$$

$$\mathcal{F}_x(E^*) := \mathcal{K}_x(E^*) \otimes L^2 H(E^*), \quad (5.98)$$

de modo que para $V = K \otimes \nu \in \mathcal{F}(E)$ e $U = K^* \otimes u \in \mathcal{F}(E^*)$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle(x, x') &= \langle U(x), V(x') \rangle \\ &= \delta \langle u(x), \nu(x') \rangle \\ &= \delta \sum_{\alpha} u_{\alpha}(x) \nu^{\alpha}(x'), \end{aligned} \quad (5.99)$$

onde $u_{\alpha}(x)$ e $\nu_{\alpha}(x')$ são coeficientes da seções u e ν na base \mathfrak{B}_e . Lembre-se que E é considerado um espaço plano em relação à conexão ∇_E . Tem-se ainda que (5.91–5.94), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \langle U_x(y), V_{x'}(y') \rangle &= \delta(x, x') \langle u(y), \nu(y') \rangle \\ &= \delta(x, x') \sum_{\alpha} u_{\alpha}(y) \nu^{\alpha}(y'). \end{aligned} \quad (5.100)$$

Veja que, pela aplicação de K_x^* em $K_{x'}$, surge no lado direito de (5.100) a distribuição delta de Dirac. Assim, pelas suas propriedades, tem-se que

$$\int_M \langle U_x(y), V_{x'}(y') \rangle dx' = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(y) \nu^{\alpha}(y'). \quad (5.101)$$

É como se os campos $V_x = K_x \otimes \nu \in \mathcal{F}_x(\mathbf{E})$ e $U_{x'} = K_{x'}^* \otimes \nu \in \mathcal{F}_{x'}(\mathbf{E}^*)$ estivessem concentrados em x e x' , respectivamente. Neste sentido, os elementos dos espaços $\mathcal{F}_x(\mathbf{E})$ e $\mathcal{F}_x(\mathbf{E}^*)$ são chamados de *campos concentrados em x* . Esses espaços podem ser expandidos pelas bases $\mathfrak{B}_{e,x} = \{e_{x,\alpha} = K_x \otimes e_{\alpha}\}$ e $\mathfrak{B}_{e^*,x} := \{e_{x,\alpha}^* = K_x^* \otimes e_{\alpha}^*\}$.

Como está sendo considerado os espaços principais dos fibrados \mathbf{E} e \mathbf{E}^* planos, a aplicação dos elementos da base dual \mathfrak{B}_{e^*} em \mathfrak{B}_e é dada por

$$\langle e_{x,\alpha}^*(x'), e_{y,\beta}(y') \rangle = \delta(x, y) \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.102)$$

Para finalizar a seção, observe que a equação (5.99) pode ser reescrita como

$$\langle U, V \rangle(x, x') = \delta \otimes \sum_{\alpha} (u_{\alpha} \otimes \nu^{\alpha})(x, x'), \quad (5.103)$$

onde, pela definição de produto tensorial de funções $u_{\alpha} \otimes \nu^{\alpha}(x, x') = u_{\alpha}(x) \nu^{\alpha}(x')$. Da forma como escrita em (5.103), $\langle U, V \rangle$ pode ser entendida como uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle : M \times M &\longrightarrow \mathcal{F}^{4\otimes}(M) \\ \langle U, V \rangle &:= \delta \otimes \sum_{\alpha} u_{\alpha} \otimes \nu^{\alpha}, \end{aligned} \quad (5.104)$$

para $V = K \otimes \nu$ e $U = K^* \otimes u$, onde $\nu = \sum_{\alpha} \nu^{\alpha} e_{\alpha}$ e $u = \sum_{\alpha} u_{\alpha} e_{\alpha}^*$. A distribuição δ é definida por (5.60). Foi também introduzido o espaço $\mathcal{F}^{4\otimes}(M)$, que consiste em quatro produtos tensoriais do espaço $\mathcal{F}(M)$. Escrever da maneira (5.104) só é possível por se tratar E um espaço plano em relação à conexão ∇_E , de forma que não é válido para espaços curvos. Observe que

$$\langle U, V \rangle(x, y, x', y') = \delta(x, y) \sum_{\alpha} u_{\alpha}(x') \nu^{\alpha}(y'), \quad (5.105)$$

resultado este que coincide com (5.100).

Enxergar $\langle U, V \rangle$ como (5.104) é uma importante ferramenta matemática para conseguir definir uma álgebra de Clifford dos $\mathcal{F}(M)$ -módulos. A próxima seção irá detalhar os procedimentos de encontrar tal álgebra e de como encontrar as relações características da teoria quântica de campos.

5.6 A teoria quântica de campos baseada em álgebras geométricas

A ideia que será apresentada nesta seção é a de parametrizar as álgebras $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$, vistas nos capítulos 2 e 3, em uma variedade. Isto é, para cada ponto $x \in M$ deverá existir

uma réplica de $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$. Para isto, a linguagem dos fibrados vetoriais e algébricos parece ser adequada, assumindo-se as referidas álgebras como fibra típica para o fibrado de interesse. Além disso, é preciso associar-se aos fibrados vetoriais $\mathcal{F}(M)$ -módulos para que a distribuição de Dirac surja. Esta distribuição faz um papel essencial na descrição de campos quânticos. Esta digressão matemática foi feita durante as seções anteriores deste capítulo, onde foram desenvolvidas todas ferramentas matemáticas necessárias para a parametrização das álgebras e a inclusão da distribuição de Dirac no formalismo. Apesar dos fibrados serem dispositivos matemáticos capazes de descrever espaços curvos, o formalismo desenvolvido neste trabalho cobre apenas os espaços planos, no entanto, ainda assim é uma estrutura matemática mais rica do que as álgebras $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$. A descrição de campos quânticos em espaços curvos será desenvolvida em outra oportunidade.

5.6.1 Formulação algébrica da teoria quântica de campos

Para analisar como é possível uma formulação algébrica da teoria quântica dos campos, considere o espaço $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ definido por

$$\mathcal{W}(\mathbf{E}) := \mathcal{F}(\mathbf{E}) \oplus \mathcal{F}(\mathbf{E}^*). \quad (5.106)$$

Um elemento geral de $W \in \mathcal{W}(\mathbf{E})$ pode ser escrito sob a forma

$$W = V \oplus U, \quad (5.107)$$

em que $V \in \mathcal{F}(\mathbf{E})$ e $U \in \mathcal{F}(\mathbf{E}^*)$. Considere ainda que $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ é dotado da forma bilinear

$$\begin{aligned} \Theta_{\pm} : \mathcal{W}(\mathbf{E}) \times \mathcal{W}(\mathbf{E}) &\longrightarrow \mathcal{F}^{4\otimes}(M), \\ \Theta_{\pm}(W, W') &= \frac{1}{2} [\langle U, V' \rangle \pm \langle U', V \rangle], \end{aligned} \quad (5.108)$$

onde $\langle U, V \rangle$ é a aplicação definida em (5.104) e $\mathcal{F}^{4\otimes}(M)$ é o espaço definido por

$$\mathcal{F}^{4\otimes}(M) := \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M). \quad (5.109)$$

Veja que $\Theta_{\pm}(W, W')$ é uma aplicação sobre $M \times M \times M \times M$, que quando avaliada no ponto (x, y, x', y') , resulta em

$$\Theta_{\pm}(W, W')(x, y, x', y') = \delta(x, y) \frac{1}{2} \sum_{\alpha} [u_{\alpha}(x')v'^{\alpha}(y') \pm u'_{\alpha}(x)v^{\alpha}(y)]. \quad (5.110)$$

A partir do par $(\mathcal{W}(\mathbf{E}), \Theta_{\pm})$ é possível fazer uma construção análoga às construções das álgebras $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$. Para isto, é preciso definir a álgebra tensorial de $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ como o espaço

$$T(\mathcal{W}(\mathbf{E})) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T_k(\mathcal{W}(\mathbf{E})), \quad (5.111)$$

onde

$$T_k(\mathcal{W}(\mathbf{E})) = \underbrace{\mathcal{W}(\mathbf{E}) \otimes \dots \otimes \mathcal{W}(\mathbf{E})}_{k \text{ vezes}}, \quad (5.112)$$

em que há a associação $T_0(\mathcal{W}(\mathbf{E})) := \mathcal{F}(M)$ e $T_1(\mathcal{W}(\mathbf{E})) := \mathcal{W}(\mathbf{E})$.

Neste cenário, as álgebras de Clifford ortogonal (referente a Θ_+) e simplética (referente a Θ_-) do espaço $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ são definidas como

$$Cl_n(\mathcal{W}(\mathbf{E}), \Theta_{\pm}) := \frac{T(\mathcal{W}(\mathbf{E}))}{\mathcal{I}_{\Theta_{\pm}}}, \quad (5.113)$$

onde $\mathcal{I}_{\Theta_{\pm}}$ é o ideal gerado pelo elemento

$$W \otimes W' \pm W' \otimes W - 2\Theta_{\pm}(W, W'). \quad (5.114)$$

A multiplicação entre os elementos de $Cl_n(\mathcal{W}(\mathbf{E}), \Theta_{\pm})$ é dada, portanto, por

$$\langle W \rangle_{\pm} \langle W' \rangle_{\pm} \pm \langle W' \rangle_{\pm} \langle W \rangle_{\pm} = 2\Theta_{\pm}(W, W'), \quad (5.115)$$

onde

$$\langle \cdot \rangle_{\pm} := \Pi_{\pm} \circ \mathcal{I} \quad (5.116)$$

é a aplicação de $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ na álgebra. Na definição (5.116) \mathcal{I} é a inclusão de $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ na álgebra tensorial e Π_{\pm} são as projeções naturais de $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ nos espaços quocientes (5.113). Veja que esta construção é somente possível se for imposto que as projeções nos quocientes sejam homomorfismos.

É possível mostrar que $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ escrito como (5.106) é uma decomposição lagrangiana pelas formas bilineares

$$\Theta_{\pm}(\mathcal{F}(\mathbf{E}), \mathcal{F}(\mathbf{E})) = 0, \quad (5.117)$$

$$\Theta_{\pm}(\mathcal{F}(\mathbf{E}^*), \mathcal{F}(\mathbf{E}^*)) = 0, \quad (5.118)$$

$$\Theta_{\pm}(\mathcal{F}(\mathbf{E}), \mathcal{F}(\mathbf{E}^*)) = \langle \mathcal{F}(\mathbf{E}^*), \mathcal{F}(\mathbf{E}) \rangle. \quad (5.119)$$

Isto significa que a relação (5.115) pode ser escrita como

$$[\langle V \rangle_{\pm}, \langle V' \rangle_{\pm}]_{\pm} = 0, \quad (5.120)$$

$$[\langle U \rangle_{\pm}, \langle U' \rangle_{\pm}]_{\pm} = 0, \quad (5.121)$$

$$[\langle V \rangle_{\pm}, \langle U \rangle_{\pm}]_{\pm} = \langle U, V \rangle, \quad (5.122)$$

onde $V, V' \in \mathcal{F}(\mathbf{E})$ e $U, U' \in \mathcal{F}(\mathbf{E}^*)$. Ainda mais, se for introduzida as bases dos módulos $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ e $\mathcal{F}(\mathbf{E}^*)$ como

$$\mathfrak{B}_E := \{E_{\alpha} = \mathcal{K} \otimes e_{\alpha}\} \quad (5.123)$$

$$\mathfrak{B}_{E^*} := \{E_{\alpha} = \mathcal{K}^* \otimes e_{\alpha}^*\}, \quad (5.124)$$

onde $e_\alpha \in \mathfrak{B}_e$ e $e_\alpha^* \in \mathfrak{B}_{e^*}$, as relações (5.120–5.122) se traduzem em

$$[\langle E_\alpha \rangle_\pm, \langle E_\beta \rangle_\pm]_\pm = 0, \quad (5.125)$$

$$[\langle E_\alpha^* \rangle_\pm, \langle E_\beta^* \rangle_\pm]_\pm = 0, \quad (5.126)$$

$$[\langle E_\alpha \rangle_\pm, \langle E_\beta^* \rangle_\pm]_\pm = \delta \otimes (\delta_{\alpha\beta}), \quad (5.127)$$

onde $(\delta_{\alpha\beta})$ pode ser entendida como

$$\begin{aligned} (\delta_{\alpha\beta}) : M \times M &\longrightarrow \mathbb{N}, \\ (\delta_{\alpha\beta})(x, y) &:= \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall (x, y) \in M \times M. \end{aligned} \quad (5.128)$$

em que $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker usual.

5.6.2 A teoria quântica de campos no contexto algébrico

A álgebra definida em (5.113) pode ser entendida como uma álgebra de Clifford sobre um espaço vetorial cujo corpo é o espaço de funções $\mathcal{F}(M)$. Este espaço é, na verdade, um $\mathcal{F}(M)$ -módulo sobre o espaço de Hilbert de seções do fibrado $\mathbf{W} = \mathbf{E} \oplus \mathbf{E}^*$. Sendo assim, os coeficientes e a base são entendidos como funções sobre a variedade M . Os coeficientes são funções $M \mapsto \mathbb{C}$, enquanto a base é composta por funções que têm valor no fibrado \mathbf{W} . Isto quer dizer que (5.113) induz outras álgebras por meio da aplicação de seus geradores em $M \times M$.

Por exemplo, as álgebras $Cl_n(\mathcal{W}(\mathbf{E}), \Theta_\pm)$ caracterizadas pelas relações (5.120–5.122), induzem uma álgebra entre os elementos das fibras de \mathbf{E} e \mathbf{E}^* , caracterizada pelos comutadores ou anticomutadores

$$[\langle V_x(x') \rangle_\pm, \langle U_y(y') \rangle_\pm]_\pm = 0, \quad (5.129)$$

$$[\langle U_x(x') \rangle_\pm, \langle V_y(y') \rangle_\pm]_\pm = 0, \quad (5.130)$$

$$[\langle V_x(x') \rangle_\pm, \langle U_y(y') \rangle_\pm]_\pm = \delta(x, y) \sum_\alpha u_\alpha(y') \nu^\alpha(x'), \quad (5.131)$$

com $V = \mathcal{K} \otimes \nu$ e $U = \mathcal{K}^* \otimes u$. As relações (5.129–5.131) são válidas para todo $(x, y, x', y') \in M \times M \times M \times M$.

Sem dúvida, as seções V_x e U_y em (5.129–5.131) são levadas a álgebras isomórficas a $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_\pm)$, desenvolvidas nos capítulos 2 e 3. No entanto, estas seções não podem representar campos quânticos. Os campos quânticos, nesta formulação são os elementos dos módulos $V \in \mathcal{F}(\mathbf{E})$ e $U \in \mathcal{F}(\mathbf{E}^*)$ que são aplicados a $(x, y) \in M \times M$ com $x = y$. Desta maneira, é conveniente definir a aplicação de $V(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathbf{E})$ e $U(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathbf{E}^*)$ em M como

$$V(x) := V(x, x), \quad (5.132)$$

$$U(x) := U(x, x). \quad (5.133)$$

Com as definições (5.132–5.133), as relações de comutação (5.129–5.131) são escritas como

$$[\langle V(x) \rangle_{\pm}, \langle U(y) \rangle_{\pm}]_{\pm} = 0, \quad (5.134)$$

$$[\langle U(x) \rangle_{\pm}, \langle V(y) \rangle_{\pm}]_{\pm} = 0, \quad (5.135)$$

$$[\langle V(x) \rangle_{\pm}, \langle U(y) \rangle_{\pm}]_{\pm} = \delta(x, y) \sum_{\alpha} u_{\alpha}(x) \nu^{\alpha}(y). \quad (5.136)$$

Quando expressas em termos das bases de $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ e $\mathcal{F}(\mathbf{E}^*)$, as relações (5.134–5.136) são dadas por

$$[\langle E_{\alpha}(x) \rangle_{\pm}, \langle E_{\beta}(y) \rangle_{\pm}]_{\pm} = 0, \quad (5.137)$$

$$[\langle E_{\alpha}^*(x) \rangle_{\pm}, \langle E_{\beta}^*(y) \rangle_{\pm}]_{\pm} = 0, \quad (5.138)$$

$$[\langle E_{\alpha}(x) \rangle_{\pm}, \langle E_{\beta}^*(y) \rangle_{\pm}]_{\pm} = \delta(x, y) \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.139)$$

As relações (5.137–5.139) são análogas as relações de (anti)comutação da quantização canônica dos campos vetoriais. Na formulação usual da teoria quântica de campos, a quantização dos campos clássicos consiste em abandonar a interpretação probabilística, onde o módulo ao quadrado do campo é interpretado como a probabilidade de encontrar a partícula numa determinada posição, e promovê-lo à categoria de operadores. Agora os campos que, enquanto clássicos, obedeciam às relações que envolvem os parênteses de Poisson passam a obedecer às mesmas relações, mas com a identificação

$$\{\cdot, \cdot\} \longmapsto [\cdot, \cdot]_{\pm}, \quad (5.140)$$

onde $\{\cdot, \cdot\}$ é o parêntese de Poisson e $[\cdot, \cdot]_{\pm}$ é o (anti)comutador usual. Isto é, o campo vetorial clássico ψ , que obedece às relações

$$\{\psi_{\alpha}(x), \psi_{\beta}(x')\} = \{\pi_{\alpha}(x), \pi_{\beta}(x')\} = 0, \quad (5.141)$$

$$\{\psi_{\alpha}(x), \pi_{\beta}(x')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(x, x'), \quad (5.142)$$

onde π é o momentum conjugado a ψ , é visto como um operador $\hat{\psi}$, e, após a identificação (5.140), passa a obedecer às relações de (anti)comutação

$$[\hat{\psi}_{\alpha}(x), \hat{\psi}_{\beta}(x')]_{\pm} = [\hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(x), \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(x')]_{\pm} = 0, \quad (5.143)$$

$$[\hat{\psi}_{\alpha}(x), \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(x')]_{\pm} = \delta_{\alpha\beta} \delta(x, x'), \quad (5.144)$$

onde foi introduzida a notação $\hat{\pi} = i\hbar\hat{\psi}^{\dagger}$. Na formulação desenvolvida aqui, os $E_{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathbf{E})$ fazem o papel das componentes ψ_{α} dos campos clássicos, enquanto $E_{\alpha}^*(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathbf{E}^*)$ fazem o papel das componentes π_{α} dos momenta conjugados. O processo de quantização se dá com a aplicação de $\langle \cdot \rangle_{\pm}$ sobre os $\mathcal{F}(M)$ -módulos $E_{\alpha}(\cdot)$ e $E_{\alpha}^*(\cdot)$ que os leva para as álgebras de Clifford ortogonal e simplética do $\mathcal{F}(M)$ -módulo sobre o espaço de Hilbert de seções holomórficas do fibrado $\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}^*$ e forma bilinear Θ_{\pm} . Estas álgebras, expressas por (5.134–5.136), induzem álgebras caracterizadas pelas relações (5.137–5.139), e, estas sim, podem ser associadas à teoria quântica de campos.

O processo de quantização canônico usual de campos é um tanto quanto intrigante, no momento em que os campos passam a ser vistos como operadores e os parênteses de Poisson devem ser trocados por (anti)comutadores pela identificação (5.140). Esta identificação não é totalmente arbitrária, ela é fruto do amadurecimento de décadas da mecânica quântica ao ponto de se perceber que a descrição de Heisenberg se assemelha com a descrição via parêntesis de Poisson para partículas clássicas, quando se substitui o comutador pelo parênteses de Poisson. O mesmo deveria acontecer para sistemas de muitos corpos, descritos por campos escalares e vetoriais. Sendo assim, a teoria quântica de campos teve origem ao se fazer a associação das relações de campos clássicos com seus parênteses de Poisson com comutadores de campos quânticos, visto agora como operadores. No entanto, do ponto de vista matemático a associação (5.140) carece de rigor e, em nossa perspectiva, necessita investigação mais aprofundada. O formalismo desenvolvido aqui oferece uma alternativa matematicamente viável utilizando uma linguagem de natureza geométrica e com uso reduzido de ferramentas de Análise Funcional geralmente comum na literatura quando se trata de problema análogo. As premissas utilizadas para chegar na teoria quântica de campos são mínimas. Foi apenas introduzido uma forma bilinear (anti) simétrica num $\mathcal{F}(M)$ -módulo sobre o espaço de Hilbert de seções do fibrado $\mathbf{E} \oplus \mathbf{E}^*$. A introdução da forma bilinear que promove o surgimento das álgebras de Clifford sobre $L^2H(\mathcal{W}(\mathbf{E}))$. A outra premissa é que os elementos dos $\mathcal{F}(M)$ -módulos relevantes para a teoria quântica de campos são da forma $V = \mathcal{K} \otimes \nu$ e $U = \mathcal{K}^* \otimes u$, onde ν e u são seções no espaço de Hilbert de seções de \mathbf{E} e \mathbf{E}^* , respectivamente, e \mathcal{K} e \mathcal{K}^* , dados por (5.55–5.56). Estes módulos devem ser aplicados em $(x, y) \in M \times M$ de forma que $x = y$. Isto é

$$V(x, y) = K_x(y) \otimes \nu(y); \quad x = y, \quad (5.145)$$

$$U(x, y) = K_x^*(y) \otimes u(y); \quad x = y. \quad (5.146)$$

Na linguagem definida em (5.101), é como se os campos devessem ser concentrados no mesmo ponto em que são avaliados. Neste contexto, os módulos V e U fazem o papel dos campos clássicos e a quantização destes campos, no formalismo desenvolvido aqui, é apenas a aplicação natural da álgebra dada por (5.116). Esta é uma forma matematicamente mais consistente do que transformar os campos em operadores e substituir os parênteses de Poisson pelos comutadores ou anticomutadores.

6 Resultados, conclusões e perspectivas

Este capítulo está dividido em duas seções e segue a seguinte estrutura: na seção 6.1 discutiremos os nossos resultados apresentados nos capítulos 2, 4 e 5. E na seção 6.2 apresentaremos as conclusões e perspectivas dos trabalhos realizados nesta tese.

6.1 Resultados

O objeto principal deste trabalho pode ser entendido como a união de quatro subobjetos, que, de certa forma, são independentes. Estes objetos são os formalismos matemáticos para o entendimento dos férmions, bósons, férmions e bósons numa só estrutura, e a generalização destes formalismos para a teoria quântica de campos de partículas fermiônicas e bosônicas. Para cada subobjeto apresentamos contribuições que podem ser somadas aos conhecimentos já estabelecidos na literatura.

Por uma questão organizacional, nossos resultados serão apresentados a seguir em diferentes subseções relativas aos subobjetos ao qual elas pertencem.

6.1.1 A física de férmions, álgebra e equação de *DKP* ortogonais

Nesta parte do trabalho, uma de nossas contribuições está em relacionar a álgebra de Schönberg associada aos férmions $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ a partir da álgebra exterior. A álgebra de férmions se apresenta como uma álgebra quociente da álgebra exterior do espaço $\mathbf{W} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{U}$ (\mathbf{V} é um espaço vetorial de n dimensões sobre \mathbb{K} e \mathbf{U} é o seu dual) pelo ideal gerado por $\omega \otimes \omega' + \omega' \otimes \omega - 2\Omega_+(\omega, \omega')$, com $\omega, \omega' \in \mathbf{W}$ e Ω_+ denotando a forma bilinear simétrica em \mathbf{W} . A conexão com a álgebra exterior está na associação dos geradores $(\mathbf{e}_i \oplus \mathbf{0})$ e $(\mathbf{0} \oplus \mathbf{e}^i)$ de $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ ¹ com os operadores de criação e aniquilação da álgebra exterior, denotados neste trabalho por (\mathbf{e}^i) e (\mathbf{e}_i) , respectivamente. Esta formulação é análoga à apresentada por Fernandes para a álgebra de Schönberg associada aos bósons $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ por meio da álgebra simétrica [1], vista no capítulo 3.

Outra contribuição nesta parte do trabalho foi a de fazer a conexão da álgebra *DKP*, no formalismo de Schönberg, com a álgebra exterior. Mostramos que as aplicações

$$\begin{aligned} \beta^{(p)} : \mathbf{V} &\longrightarrow \mathcal{D}_p(\mathbf{V}, g) \\ \beta^{(p)} &= \mathcal{D}_p \circ (b + a \circ b), \end{aligned} \tag{6.1}$$

¹ Lembre-se que \mathbf{W} escrito como a soma direta de \mathbf{V} com \mathbf{U} é uma decomposição lagrangiana pela forma bilinear simétrica Ω_+ , de modo que $\mathbf{e}_i \oplus \mathbf{0}$ e $\mathbf{0} \oplus \mathbf{e}^i$, onde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é a base de \mathbf{V} e $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ é a base de \mathbf{U} , são elementos da base de \mathbf{W} .

definidas em (2.200) (a e b são os operadores de aniquilação e criação da álgebra exterior, respectivamente, \flat é uma correlação simétrica associada à métrica g de \mathbf{V} e $\mathcal{D}_p = \overrightarrow{1}_{(p)} \overleftarrow{1}_{(p)}^2$) fornecem representações irredutíveis da álgebra de DKP para cada valor de $0 \leq p < n$.

As representações da álgebra DKP via a formulação de Schönberg para férmions já tinham sido obtidas pelo próprio Schönberg e utilizadas nos trabalhos de Vianna e Fernandes [13–15] para a obtenção das equações de DKP ; no entanto, a construção da aplicação (6.1) não se encontra na literatura. Recentemente, um trabalho sobre representações da álgebra e a equação de DKP via formas diferenciais, foi publicado por Jaime [91]. Os passos para a obtenção da álgebra DKP nesse trabalho, adaptados à linguagem da presente tese, foram apresentados na seção (2.3.4) e comparações entre aquele formalismo e o formalismo apresentado aqui realizadas. Notamos que as formulações são similares, porém não iguais. A principal diferença está no fato das projeções no formalismo da referência [91] serem aquelas definidas na álgebra exterior. Já na nossa formulação, tais projeções são os elementos (Π_p) , definidos em (2.193). Algo a se observar, ainda neste contexto, é que os elementos da álgebra de DKP , no formalismo de Schönberg, atuam pela esquerda no ideal mínimo à esquerda ou à direita no ideal à direita de $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Os ideais mínimos à direita e à esquerda são isomórficos às álgebras exteriores de \mathbf{V} e \mathbf{U} , respectivamente; no entanto, não são iguais. Em consequência, o desenvolvimento em [91] não corresponde ao formalismo de Schönberg da álgebra DKP , pois é baseado somente nas formas diferenciais, isto é, na álgebra exterior do espaço cotangente de uma variedade, o que corresponderia à álgebra exterior do espaço \mathbf{U} . Já a formulação de Schönberg é versátil quanto a isto devido às propriedades dos projetores (Π_p) dadas por (2.197). Estas propriedades mudam o espaço de representação da álgebra entre as álgebras exteriores de \mathbf{V} e \mathbf{U} .

Ainda sobre a álgebra de DKP no formalismo de Schönberg, nós generalizamos a metodologia de Fernandes e Vianna [13, 14] para qualquer espaço cujo tensor métrico seja representado por uma matriz diagonal. Isso inclui os espaços euclidianos e pseudo-euclidianos. Além disto, nosso desenvolvimento é mais geral no sentido em que ele possibilita a aplicação da transformação de Wigner-Moyal para qualquer valor de $0 \leq p < n$. Isto é, é possível estender o desenvolvimento de Fernandes e Vianna para partículas vetoriais e estudar, por exemplo, a equação de Proca no espaço de fase. Para além dos trabalhos de Fernandes e Vianna, mostramos que a introdução dos elementos (2.256) e (2.277) permite demonstrar que a equação de DKP no formalismo baseado na álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ é compatível com as equações de Klein-Gordon-Fock e de Proca e têm vetores dados por (2.268) e (2.287), respectivamente.

Para finalizar, é importante salientar que, como mostramos na subseção 2.3.8.1, o formalismo baseado na álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ para a equação de DKP incorpora natural-

² $\overrightarrow{1}_{(p)}$ é a unidade da álgebra de DKP dada por $(\Pi_p) + (\Pi_{p+1})$

mente e generaliza as técnicas desenvolvidas por Kruglov [49] no estudo da equação de *DKP* não massiva de spin 1. Com efeito, distribuindo o valor da constante m da equação de *DKP* (2.216) na unidade da álgebra, de modo se obtenha a equação de *DKP* na forma

$$\left[i\beta_\mu^p \partial^\mu + m_{(p)} \right] \psi = 0, \quad (6.2)$$

com $m_p = m_1(\Pi_p) + m_2(\Pi_{p+1})$ (m_1 e m_2 são constantes e $\psi \in \mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$), tem-se que a massa da partícula é dada por $m = \sqrt{m_1 m_2}$, e o estudo da equação de *DKP* não massiva corresponde à situação onde $m_1 = 0$.

6.1.2 A física de bósons, a álgebra *PDKP* e as equações simpléticas

Nesta parte do trabalho, desenvolvemos uma metodologia para extrair a álgebra *PDKP* da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ baseada no formalismo de Schönberg para extrair a álgebra *DKP* da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$. Em seguida, analisamos e fizemos comparações: no formalismo baseado na álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$, a álgebra *DKP* é uma projeção bilateral da álgebra de Clifford ortogonal do espaço \mathbf{V} , onde a forma quadrática está associada à métrica g , induzida por uma correlação simétrica e esta álgebra está relacionada com a equação de Dirac ortogonal. Já no formalismo baseado na álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, vimos que a álgebra *PDKP* é uma projeção bilateral da álgebra de Clifford simplética do espaço \mathbf{V} . Desta maneira, propusemos uma equação análoga à equação de Dirac ortogonal, onde agora os operadores diferenciais estão associados aos geradores da álgebra de Clifford simplética. Notamos então que para esta nova equação obedecer a equação de onda, necessariamente, os operadores diferenciais devem agir em coordenadas não anticomutativas. Deste modo, obtivemos duas novas equações, a equação de Klein-Gordon-Fock e de Dirac simpléticas. A equação de Dirac simplética foi obtida primeiramente por Reuter [100] quando ele se propôs a seguir os passos de Kähler na obtenção da equação de Dirac por meio de formas diferenciais em um espaço-tempo riemanniano. Reuter, no entanto, parte de tensores simétricos sobre um espaço de fase simplético e recorre a diversos entes matemáticos para encontrar o que ele chamou de equação de Dirac-Kähler simplética, tais quais os tensores simétricos, operadores simétricos e álgebra de Weyl para entes bosônicos. Além disso, teve ele que introduzir representações específicas do produto de Clifford simplético. O desenvolvimento feito por nós não precisa recorrer a tantos entes matemáticos; usamos apenas os geradores da álgebra e os elementos dos ideais mínimos. Não é utilizada aqui nenhuma representação do produto de Clifford. Outro fato que diferencia o nosso formalismo do de Reuter é que as equações de Klein-Gordon-Fock e Dirac simpléticas desenvolvidas por nós não parecem ser definidas sobre o espaço de fase simplético e sim sobre um espaço de coordenadas não anticomutativas. Espaços não anticomutativos já foram estudados em contextos físicos [101–105], mas faz-se necessário identificar em quais situações físicas as equações simpléticas desenvolvidas neste trabalho podem ser usadas.

Seguindo esse desenvolvimento, além das equações de Klein-Gordon-Fock e Dirac simpléticas, propusemos a equação de *DKP* simplética ao associar os geradores da álgebra *PDKP*, extraída da álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, aos operadores diferenciais sobre coordenadas não anticomutativas. Como nas outras equações, o vetor de estado é um elemento dos ideais mínimos da álgebra de $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$. Nossa formulação concorda com o trabalho de Okubo [50] onde ele propõe a álgebra *PDKP* como uma álgebra complementar à álgebra *DKP* e propõe o que ele chama de equação de *DKP* generalizada.

Buscamos ainda entender a álgebra *PDKP* através da álgebra simétrica, utilizando a metodologia de Jaime [91] que busca explicar a álgebra *DKP* por meio da álgebra exterior. Com esta metodologia determinamos infinitas representações da álgebra *PDKP* baseadas na álgebra simétrica. O formalismo baseado na álgebra simétrica embora tenha muitas similaridades com a formulação baseada na álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, apresenta limitações como, por exemplo, seus projetores são introduzidos de maneira *ad hoc* e caracterizam-se apenas por retirar uma ordem específica do tensor simétrico. Em contraste, no formalismo baseado na álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, os projetores têm representação na própria álgebra. Além disto, como no caso da álgebra *DKP*, o formalismo baseado nos desenvolvimentos de Schönberg se mostra mais versátil, pois os ideais mínimos da álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ são os espaços de representação da álgebra *PDKP*, neste desenvolvimento. As duas representações (contravariante e covariante) são intermediadas pelas propriedades das classes de equivalência dos projetores $\{\{\Pi_p\}\}$, dadas por (4.77–4.78). Esta versalidade não é encontrada no formalismo baseada na álgebra simétrica. Esse fato faz o formalismo baseado na álgebra $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ mais vantajoso.

6.1.3 A física de férmions e bósons em uma só estrutura matemática e as superequações

Esta parte do trabalho foi motivada pela proposta de Okubo [50] que mostrou que as álgebras *DKP* e *PDKP* podem ser vistas como subálgebras de uma álgebra maior chamada superálgebra de *DKP*. Foi visto nos capítulos 2 e 3 e na seção 4.5 que as álgebras *DKP* e *PDKP* podem ser entendidas como subálgebras das álgebras $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ e $\mathbb{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, respectivamente, então era de se esperar que a superálgebra de *DKP* pudesse também ser explicada por meio de uma metodologia análoga. Neste contexto, propomos uma forma de multiplicar os elementos da álgebra de *DKP* com os elementos da álgebra *PDKP*. Para isto impomos que os idempotentes primitivos (P) e $\{P\}$ pudessem se multiplicar e formar o elemento $(\{P\}) = (P)\{P\} = \{P\}(P)$. Somado a isso foi usado o resultado encontrado por Okubo [50] no qual férmions e bósons anticomutam. Foi preciso também incluir, de maneira *ad hoc*, projetores que extraíssem a mesma ordem dos tensores associados aos férmions e bósons, que obedecem às propriedades (4.149–4.154). Os espaços sobre os quais esses elementos são definidos devem ser alterados para $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_1$, onde \mathbf{V}_0 é o espaço

associado à álgebra DKP e possui uma correlação simétrica, enquanto \mathbf{V}_1 está associado à álgebra $PDKP$ e possui uma correlação antissimétrica. Neste contexto, os elementos dessas álgebras podem ser reescritos como (4.157–4.158), respectivamente, permitindo assim que os elementos das álgebras diferentes se multipliquem. Observamos que, dessa forma, o conjunto de elementos (4.157–4.158) obedece uma versão generalizada da álgebra de DKP . Essa generalização ocorre em dois sentidos: primeiro, porque a superálgebra de DKP encontrada aqui possui infinitas representações, uma para cada $p \in \mathbb{N}$. Segundo, porque o formalismo baseado nas álgebras $Cl_n(\mathbf{V}, g)$ e $\mathbb{C}l_n(\mathbf{V}, f)$ permite encontrar uma álgebra para cada sinal \pm da forma bilinear $\pm g$ ou $\pm f$ do espaço \mathbf{V} ; a superálgebra encontrada por nós, além de possuir infinitas representações, ainda permite mesclar elementos com quaisquer combinações destes sinais.

Permitir a multiplicação entre os elementos das duas álgebras, como descrito acima, possibilitou enxergar que havia uma superálgebra maior, onde se pode tratar férmions e bósons de maneira unificada, na qual a superálgebra DKP é apenas uma subálgebra. Dessa maneira é natural acreditar que é possível desenvolver um formalismo baseado nas álgebras $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ e $\mathbb{C}l_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$, capaz de explicar essa superálgebra, bem como a superálgebra DKP . Esse formalismo, desenvolvido por nós, parte apenas da premissa de se ter um superespaço $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1$ dotado de uma forma bilinear $\Omega = \Omega_0 \oplus \Omega_1$, onde Ω_0 é uma forma bilinear simétrica do primeiro espaço e Ω_1 é uma forma bilinear simplética do segundo. O espaço \mathbf{W} dotado de forma bilinear Ω faz emergir a superálgebra de Clifford de \mathbf{W} e esta pode ser explicada por relações de supercomutação em que se pode observar que férmions anticomutam com bósons. Essa peculiaridade concorda com o que Okubo [50] havia proposto para explicar a superálgebra de DKP . Nesse contexto, mostramos que a inclusão de uma supercorrelação possibilita extrair da superálgebra de Clifford de \mathbf{W} a superálgebra de Clifford de \mathbf{V} da qual a superálgebra $PDKP$ é apenas uma subálgebra.

Mostramos também que as superálgebras de Clifford de \mathbf{V} e a superálgebra DKP estão associadas a superequações relativas às respectivas álgebras. A superálgebra de Clifford está associada à superequação de Dirac sobre uma supervariiedade com partes das coordenadas riemannianas e parte não anticomutativas. Mostramos ainda que a superequação de Dirac descreve uma partícula que obedece à equação de Dirac ortogonal e outra partícula que obedece à equação de Dirac simplética. Já a superálgebra de DKP está associada à superequação de DKP , introduzida por Okubo em [50]. A diferença entre a equação obtida através do nosso formalismo e a equação proposta por Okubo é que, no nosso formalismo, a superequação de DKP pode ser expressa em infinitas representações, uma para cada valor de $p \in \mathbb{N}$. Sabe-se que o valor de p na álgebra DKP está associada ao spin da partícula que a equação descreve; espera-se que o mesmo aconteça com a álgebra DKP e a superálgebra DKP e suas respectivas equações. No entanto, deixamos para provar essa conjectura como uma perspectiva deste trabalho. Foi mostrado também que a superequação de DKP descreve uma partícula que obedece à equação de DKP ortogonal e

uma partícula que obedece à equação de *DKP* simplética, simultaneamente.

É importante notar que a superálgebra de Clifford de \mathbf{V} , encontrada aqui, apresenta similaridades com a superálgebra proposta em [51] e vai ao encontro da análise de superespaços via álgebras de Clifford realizada por Bie e Sommen [118], principalmente no que se refere aos superoperadores de Clifford. De certa forma nosso tratamento é mais geral que este último trabalho uma vez que pressupõe coordenadas não anticomutativas, em oposição às coordenadas anticomutativas utilizadas por Bie e Sommen.

6.1.4 Generalização das álgebras de Schönberg para uma variedade e a teoria quântica de campos

Nesta parte do trabalho parametrizamos as álgebras $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$ numa variedade. Consideramos os fibrados de Clifford ortogonal e simplético, cujas fibras são isomórficas às citadas álgebras, como a estrutura adequada para fazer essa parametrização, sendo o objetivo principal a inclusão da teoria quântica de campos no formalismo das álgebras de Schönberg. Assim, consideramos o produto tensorial do espaço de Hilbert de seções holomórficas de fibrados vetoriais planos em relação a uma conexão por $\mathcal{F}(M)$ -módulos sobre o mesmo espaço de Hilbert de seções, onde $\mathcal{F}(M)$ é um espaço completo de funções. A construção da teoria quântica, neste formalismo, é realizada quando se dota o espaço $\mathcal{W}(\mathbf{E})$, definido em (5.106), de formas bilineares simétrica e antissimétrica, construídas com base nas formas bilineares das álgebras $Cl_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$. Como resultado, determinamos as álgebras de Clifford ortogonal e simplética dos $\mathcal{F}(M)$ -módulos. Os $\mathcal{F}(M)$ -módulos podem ser vistos como espaços vetoriais cujo corpo, sobre os quais são definidos, é o espaço de funções $\mathcal{F}(M)$. Desse modo, os elementos das álgebras de Clifford encontrados são funções com valores nos fibrados de Clifford ortogonal e simplético. Pelo fato de termos incluído os $\mathcal{F}(M)$ -módulos, é possível encontrar a distribuição de Dirac. Essa distribuição aparece quando uma seção contravariante, avaliada em um determinado ponto da variedade, é aplicada sobre seções contravariantes avaliadas em outro ponto. A consequência principal do surgimento das distribuições é que os elementos das álgebras de Clifford dos $\mathcal{F}(M)$ -módulos, quando avaliados em pontos da variedade, podem ser entendidos como seções co e contravariantes de ordem 1 dos fibrados de Clifford ortogonal e simplético.

O formalismo desenvolvido aqui mostra-se como uma alternativa para se entender a teoria quântica de campos através de uma visão geométrica. Além disto, do ponto de vista matemático, a quantização é feita através da aplicação de Clifford, em oposição ao formalismo usual da teoria quântica de campos em que a quantização é feita quando se eleva os campos clássicos à condição de operadores e, em seguida, associa-se os parênteses de Poisson com os comutadores; desse modo, os agora operadores passam a obedecer as relações canônicas de comutação. Nesse cenário, nosso formalismo é matematicamente mais consistente que o método usual de quantização de campos físicos, desde que a aplicação

na álgebra é uma operação bem definida, enquanto a associação dos parênteses de Poisson com os comutadores não parece ser natural.

6.2 Conclusões e perspectivas

Nesta tese exploramos as álgebras desenvolvidas por Schönberg [2, 4–6] em conexão com as álgebras exterior e simétrica, visando uma ampliação da estrutura matemática baseada em álgebras de Clifford, uma formulação de equações relativísticas de interesse e uma formulação da teoria quântica de campos. Nesse contexto, entre as contribuições e os resultados apresentados, realçamos a demonstração da equivalência da equação de *DKP* com as equações de Klein-Gordon-Fock e de Proca, um tema que vem tendo interesse desde o final do século XX [68], e a demonstração de como estender o desenvolvimento de Kruglov [49] para partículas *DKP* não massivas, de forma a incluir o caso de spin zero, não contemplado pela formulação daquele autor; além disso, obtivemos o resultado que possibilita estudar a equação de *DKP* com massa nula para qualquer valor do parâmetro p tal que $0 \leq p < n$ o que permite com nossa abordagem investigar também partículas de *DKP* pseudoescalares e pseudovetoriais. Obter soluções para a equação de *DKP* na nossa formulação e comparar com os resultados disponíveis de Kruglov são objetivos como perspectivas desta parte do trabalho.

Na relação de resultados, por nós obtidos, destacamos também: *i*) do ponto de vista matemático, o desenvolvimento de método capaz de extrair a álgebra *PDKP* (ParaDKP) da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_-)$ e dentro desse formalismo, do ponto de vista físico, a obtenção das equações de Klein-Gordon-Fock, de Dirac e de *DKP* simpléticas as quais, em outro contexto, foram introduzidas na literatura por Okubo [50] (caso da equação de Klein-Gordon-Fock e de *DKP* simpléticas) e por Reuter [100] (caso da equação de Dirac simplética); um aspecto a mencionar neste item é que nossa abordagem é fechada no sentido que todos os elementos utilizados para a obtenção das equações simpléticas estão contidos numa mesma estrutura matemática, e *ii*) o desenvolvimento, no lado matemático, de um processo para construção de uma superálgebra com a qual é possível tratar bósons e férmions numa mesma estrutura, mostrando como a partir da superálgebra obtida é possível extrair uma superálgebra de Clifford análoga à proposta por Dixon [51] e desta extrair a superálgebra de *DKP*; neste item, no lado físico, propusemos as denominadas superequações de Klein-Gordon-Fock, de Dirac e de *DKP*, discutindo alguns de seus aspectos. Explorar o significado dessas equações no sentido de compreender que situações físicas são de interesse, bem como pesquisar suas soluções e as soluções das equações de Dirac e de *DKP* simpléticas, livres e com interação, são temas que constituem o prosseguimento do trabalho como perspectivas.

Recentemente, a álgebra e a equação de Fierz-Pauli-Gupta (*FPG*) foram propostas

no trabalho [16] dentro da visão geométrica de Schönberg. Nesse desenvolvimento, geradores da álgebra de *FPG* são a soma dos geradores da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, g)$ com os geradores da álgebra de *DKP*. Seguindo nossa formulação, versões da álgebra e da equação de *FPG* simpléticas podem ser propostas ao se somar os geradores da álgebra $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{V}, f)$ com os geradores da álgebra *PDKP*. Da mesma maneira que as equações de Dirac e de *DKP* simpléticas, será preciso também entender o significado físico dessa nova equação. Além disso, encontrada a versão simplética da álgebra e da equação de *FPG*, podemos propor a superálgebra de *FPG* combinando a superálgebra de Clifford com a superálgebra de *DKP*. Para finalizar as perspectivas desta parte do trabalho é importante salientar que a técnica de Hiley e Bohm, de encontrar a equação de Dirac no espaço de fase [11], pode ser estendida para as equações de Dirac, de *DKP* e de *FPG* simpléticas e para as superequações de Dirac e de *DKP*.

Na parte referente à formulação da teoria quântica de campos, obtivemos uma formulação da teoria quântica de campos baseada nas álgebras $\mathcal{C}\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_{\pm})$. A nossa formulação apresenta uma explicação alternativa para as relações de comutação e anticomutação dos campos quantizados, pois combina a teoria dos fibrados vetoriais com a teoria das distribuições em uma estrutura de módulo. Os campos quânticos, nesse contexto, são elementos de uma álgebra de Clifford ortogonal ou simplética de módulos vistos como espaços vetoriais cujo corpo é o espaço de funções completas.

Uma das perspectivas a curto prazo para esta parte do trabalho é realizar comparações com a própria maneira de Schönberg parametrizar suas álgebras na variedade [7] para o caso escalar e para o caso vetorial. Além disso, o formalismo matemático desenvolvido por nós para quantizar campos via álgebra geométrica parece adequado para explicar a quantização *BRST* [119–122]. Outra perspectiva a curto prazo é explicar a álgebra de correntes [123–125] no nosso formalismo por meio de uma combinação dos geradores das álgebras de Clifford dos módulos. Neste sentido, podemos fundamentar a proposta de Hermann [123, 124] de explicar a álgebra de correntes via álgebras geométricas. Por último, podemos generalizar o nosso formalismo para espaços curvos e estender as concentrações dos campos sobre um ponto para uma linha. Essas nova concentração deve surgir ao se considerar outro tipo de distribuição que não a distribuição de Dirac para pontos somente.

Para as perspectivas a longo prazo, podemos construir versões das equações de Dirac e *DKP* segundo nossa proposta geométrica para quantização dos campos. Para isso, é necessário construir um campo que é um idempotente primitivo para todo ponto da variedade, isto é, um elemento

$$\langle P \rangle_+ = \prod_{x \in M} \langle E_1(x) \rangle_+ \langle E^1(x) \rangle_+ \langle E_2(x) \rangle_+ \langle E^2(x) \rangle_+ \dots \langle E_n(x) \rangle_+ \langle E^n(x) \rangle_+. \quad (6.3)$$

A partir deste elemento é possível parametrizar os ideais mínimos referentes aos campos fermiônicos e, assim, construir vetores de estado. Com parametrizações adequadas das

álgebras de Dirac e *DKP*, portanto, podemos propor as teorias de Dirac e *DKP* dentro desse formalismo. Já para os campos bosônicos, o campo idempotente, que assume valores nas fibras como idempotentes primitivos, deve ser introduzido de forma *ad hoc*. Introduzido este campo, versões da teoria de Dirac e *DKP* simpléticas podem ser formuladas, dentro da visão geométrica dos campos quânticos.

Os estudos e resultados desenvolvidos aqui adicionam ao entendimento da natureza dos campos quânticos que podem levar avanços nas resoluções de problemas nas áreas da física de altas energias, cosmologia, matéria condensada e até mesmo na formulação quântica da gravitação, temas que pretendemos abordar futuramente.

A Cálculo de $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$

Neste apêndice será calculada a aplicação do operador \mathcal{R}_μ^p no vetor de DKP $\psi_{(p)}$, presente na seção 2.3.8, na equação (2.287), onde

$$\mathcal{R}_\mu^p = - \left[(N_1)(N_2) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}_{\mu b})(\Pi_{p+1}) + (\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(\mathbf{e}_{nb})(\mathbf{e}_\mu)(\Pi_p) \right] \quad (\text{A.1})$$

e

$$\psi_{(p)} = \psi_{p+1} + \psi_p, \quad (\text{A.2})$$

onde $\psi_k \in (\Pi_k)C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)(P)$ é um elemento geral de k -ésima ordem do ideal à esquerda de $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ dado por

$$\psi_k = A_{J_k}(P^{J_k}), \quad (\text{A.3})$$

em que J_k é um conjunto multi-índice estritamente ascendente de tamanho k .

Primeiro, é preciso estudar a multiplicação de (\mathbf{e}_n) em ψ_{p+1} e ψ_p . Neste sentido, observe que

$$(\mathbf{e}_n)\psi_{p+1} = (\mathbf{e}_n)A_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2}) \dots (\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P), \quad (\text{A.4})$$

onde $j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1}$. Neste caso, deve-se estudar as situações em que *i*) $p+1 = n$ e *ii*) $p+1 < n$. A situação em que $p+1 > n$ é excluída, pois p só pode assumir os valores inteiros $0 \leq p < n$.

i) Para a situação em que $p+1 = n$, ψ_n é um pseudo escalar e, portanto, tem-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_n)\psi_n &= A_{1,2,\dots,n}(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^n)(P) \\ &= (-1)^{n-1} A_{1,2,\dots,n}(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-1})(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}^n)(P) \\ &= (-1)^{n-1} A_{1,2,\dots,n}(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-1}) [1 - (\mathbf{e}^n)(\mathbf{e}_n)](P) \\ &= (-1)^{n-1} A_{1,2,\dots,n}(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-1})(P) \\ &= (-1)^{n-1} A_{1,2,\dots,n}(P^{1,2,\dots,n-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde foram utilizadas as relações obtidas em (2.65–2.67).

ii) A situação em que $p+1 < n$ requer um pouco mais de cuidado. Tem-se

$$(\mathbf{e}_n)\psi_{p+1} = A_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}}(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2}) \dots (\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P) \quad (\text{A.6})$$

onde há somatório implícito nos j 's, de maneira que sempre aconteça de $j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1}$, pois J_{p+1} é um conjunto multi-índice estritamente ascendente de tamanho $p+1$. Por

esse motivo, o $j_k = n$ quando surgir, será no índice j_{p+1} , pois n é o maior valor possível dos j 's. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{e}_n)\psi_{p+1} &= (-1)^p A_{j_1, j_2, \dots, j_p, n}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2}) \dots (\mathbf{e}^{j_p})(\mathbf{e}_n)(P) \\
 &= (-1)^p A_{j_1, j_2, \dots, j_p, n}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2}) \dots (\mathbf{e}^{j_p}) [1 - (\mathbf{e}^n)(\mathbf{e}_n)](P) \\
 &= (-1)^p A_{j_1, j_2, \dots, j_p, n}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2}) \dots (\mathbf{e}^{j_p})(P) \\
 &= A'_{J_p^{\neq n}}(P^{J_p^{\neq n}})
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

com

$$A'_{J_p^{\neq n}} = A'_{j_1, j_2, \dots, j_p} = (-1)^p A_{j_1, j_2, \dots, j_p, n}. \tag{A.8}$$

O supraíndice $\neq n$ em $J_p^{\neq n}$ é para chamar atenção que os índices j_k não podem assumir o valor n . Isto é, eles só podem assumir os valores $1 \leq j_k \leq n - 1$.

Antes de prosseguir, com o cálculo de $\mathcal{R}_{\mu\nu}^p \psi_{(p)}$ note que

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{e}_{\mu b}), (\mathbf{e}_\nu)]_+ &= (\mathbf{e}_{\mu b})(\mathbf{e}_\nu) + (\mathbf{e}_\nu)(\mathbf{e}_{\mu b}) \\
 &= g_{\mu\sigma} [(\mathbf{e}^\sigma)(\mathbf{e}_\nu) + (\mathbf{e}_\nu)(\mathbf{e}^\sigma)] \\
 &= g_{\mu\sigma} \delta_\nu^\sigma \\
 &= g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

e

$$\begin{aligned}
 N_i(\mathbf{e}^\nu) &= (\mathbf{e}^i)(\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}^\nu) \\
 &= (\mathbf{e}^i) [\delta_i^\nu - (\mathbf{e}^\nu)(\mathbf{e}_i)] \\
 &= (\mathbf{e}^i) \delta_i^\nu - (\mathbf{e}^i)(\mathbf{e}^\nu)(\mathbf{e}_i) \\
 &= (\mathbf{e}^i) \delta_i^\nu + (\mathbf{e}^\nu) N_i.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Agora observe a aplicação de N_i em ψ_k :

$$\begin{aligned}
 N_i \psi_k &= A_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k} N_i(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2}) \dots (\mathbf{e}^{j_k})(P) \\
 &= A_{j_1 \leq \dots \leq j_\ell \leq \dots \leq j_k} (\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{\ell-1}}) N_i(\mathbf{e}^{j_\ell})(\mathbf{e}^{j_{\ell+1}}) \dots (\mathbf{e}^{j_k})(P) \\
 &= A_{j_1 \leq \dots \leq j_\ell \leq \dots \leq j_k} (\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{\ell-1}}) [\delta_i^{j_\ell} + (\mathbf{e}^i) N_i] (\mathbf{e}^{j_{\ell+1}}) \dots (\mathbf{e}^{j_k})(P) \\
 &= A_{j_1 \leq \dots \leq i \leq \dots \leq j_k} (\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{\ell-1}}) [1 + (\mathbf{e}^i) N_i] (\mathbf{e}^{j_{\ell+1}}) \dots (\mathbf{e}^{j_k})(P) \\
 &= A_{j_1 \leq \dots \leq i \leq \dots \leq j_k} (\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{\ell-1}}) (\mathbf{e}^{j_{\ell+1}}) \dots (\mathbf{e}^{j_k})(P) \\
 &\quad + A_{j_1 \leq \dots \leq i \leq \dots \leq j_k} (\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{\ell-1}}) (\mathbf{e}^i) N_i (\mathbf{e}^{j_{\ell+1}}) \dots (\mathbf{e}^{j_k})(P)
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

A segunda parcela de (A.11) é identicamente nula, pois $(\mathbf{e}^i) N_i = 0$. Desta forma, chega-se ao resultado

$$N_i \psi_k = A''_{J_{k-1}^{\neq i}}(P^{J_{k-1}^{\neq i}}), \tag{A.12}$$

com

$$A''_{J_{k-1}^{\neq i}} = A_{j_1 \leq \dots \leq i \leq \dots \leq j_k} \quad (\text{A.13})$$

onde $J_{k-1}^{\neq i}$ é um conjunto de multi-índice estritamente ascendentes de tamanho $k - 1$ cujos $j_\ell \neq i$. Isto é

$$N_i \psi_k = \psi'_{k-1} \quad (\text{A.14})$$

onde $\psi'_{k-1} = A''_{J_{k-1}^{\neq i}} (P^{J_{k-1}^{\neq i}})$ é um elemento do ideal a esquerda de $C\ell_n(\mathbf{W}, \Omega_+)$ de ordem $k - 1$.

Finalmente é possível calcular $\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)}$. A aplicação de (A.1) em (A.2) pode ser reescrita da forma

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}^p = - \left[(N_1)(N_2) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}_{\mu b})\psi_{p+1} + (\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(\mathbf{e}_{nb})(\mathbf{e}_\mu)\psi_p \right] \quad (\text{A.15})$$

A.1 Cálculo de $-(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}_{\mu b})\psi_{p+1}$

O primeiro termo de (A.15) pode ser desenvolvido

$$\begin{aligned} -(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}_{\mu b})\psi_{p+1} &= -(N_1)(N_2) \dots (N_{n-1}) [g_{n\mu} - (\mathbf{e}_{\mu b})(\mathbf{e}_n)] \psi_{p+1} \\ &= \underbrace{-g_{n\mu}(N_1) \dots (N_{n-1})\psi_{p+1}}_{\mathcal{A}_\mu} \\ &\quad + \underbrace{(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_{\mu b})(\mathbf{e}_n)\psi_{p+1}}_{\mathcal{B}_\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Novamente, deve-se estudar os casos em que $p = n + 1$ e $p < n + 1$.

A.1.0.1 • $p = n + 1$

Para esse caso, observe que $\psi_n = A_{J_n}(P)^{J_n}$ é um pseudo escalar. Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu &= -g_{n\mu}(N_1) \dots (N_{n-1})A_{1,2,\dots,n}(P^{1,2,\dots,n}) \\ &= -g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^n)(P) \\ &= -g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-2}) \left[1 + (\mathbf{e}^{n-1})(N_{n-1}) \right] (\mathbf{e}^n)(P) \\ &= -g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1) \dots (\mathbf{e}^{n-2})(\mathbf{e}^n)(P) \\ &\quad - g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-1})(N_{n-1})(\mathbf{e}^n)(P) \\ &= -g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1) \dots (\mathbf{e}^{n-2})(\mathbf{e}^n)(P) \\ &\quad - g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1) \dots (\mathbf{e}^n)(N_{n-1})(P) \\ &= -g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1) \dots (\mathbf{e}^{n-2})(\mathbf{e}^n)(P) \\ &\quad \vdots \\ &= -g_{n\mu}A_{1,2,\dots,n}(\mathbf{e}^n)(P), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde foi usado (A.10) e $N_i(P) = 0$. Então, tem-se

$$\mathcal{A}_\mu = -g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n}(\mathbf{e}^1)(P). \quad (\text{A.18})$$

Agora, o termo \mathcal{B}_μ

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu &= (N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_{\mu b})(\mathbf{e}_n) A_{J_n}(P)^{J_n} \\ &= (-1)^{n-1} g_{\mu\nu} (N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^\nu) A_{1,2,\dots,n}(P^{1,\dots,n-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde foi usado (A.5). Veja que $\mathbf{e}^\nu(P^{1,2,\dots,n-1})$ será nulo para todos os valores de ν exceto para $\nu = n$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu &= (-1)^{n-1} g_{\mu n} (N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^n) A_{1,2,\dots,n}(P^{1,\dots,n-1}) \\ &= (-1)^{n-1} g_{\mu n} (N_1) \dots (N_{n-1}) A_{1,2,\dots,n}(\mathbf{e}^n)(\mathbf{e}^1) \dots (\mathbf{e}^{n-1})(P) \\ &= (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} g_{\mu n} A_{1,2,\dots,n}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^1) \dots (\mathbf{e}^{n-1})(\mathbf{e}^n)(P) \\ &= g_{\mu n} A_{1,2,\dots,n}(P^n). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Como a métrica $g_{\mu\nu}$ é por construção simétrica, então ao se comparar (A.20) com (A.18), percebe-se que

$$\mathcal{B}_\mu = -\mathcal{A}_\mu. \quad (\text{A.21})$$

Portanto, para $p + 1 = n$, obtém-se

$$\begin{aligned} -(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}_{\mu b})\psi_n &= \mathcal{A}_\mu + \mathcal{B}_\mu = \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Agora, deve-se estudar o termo acima na situação em que $p + 1 < n$.

A.1.0.2 • $p + 1 < n$

Usando (A.7), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu &= -g_{n\mu} (N_1) \dots (N_{n-1}) A_{J_{p+1}}(P^{J_{p+1}}) \\ &= -g_{n\mu} A_{j_1,\dots,j_{p+1}}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Se $p + 1 < n - 1$, então haverá mais N_i 's do que (\mathbf{e}^{j_i}) 's, e, desta maneira, algum N_i chegará à esquerda de (P) . Portanto, para $p < n - 2$, tem-se que $\mathcal{A}_\mu = 0$. Resta analisar o caso em que $p = n - 2$. Neste caso,

$$\mathcal{A}_\mu = -g_{n\mu} A_{j_1,\dots,j_{n-1}}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{n-1}})(P) \quad (\text{A.24})$$

Se n aparecer nos índices j , será no j_{n-1} . Nessa situação, todos N_i poderão comutar com (\mathbf{e}^{j_k}) até chegar a esquerda de (P) , anulando o termo. Então os j_k só podem variar de 1 a

$n - 1$. Como se tem $n - 1$ \mathbf{e}^{j_k} , então só há a situação

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_\mu &= -g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-1})(P) \\
 &= -g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-2}) \underbrace{N_{n-1}(\mathbf{e}^{n-1})}_{1-(\mathbf{e}^{n-1})N_{n-1}}(P) \\
 &= -g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(N_1) \dots (N_{n-2})(\mathbf{e}^1)(\mathbf{e}^2) \dots (\mathbf{e}^{n-2})(P) \\
 &\quad \vdots \\
 &= -g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(P)
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Portanto, para $p + 1 < n$, tem-se

$$\mathcal{A}_\mu = -\delta_{n-2,p} g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(P). \tag{A.26}$$

Agora deve-se analisar a parcela \mathcal{B}_μ para $p + 1 < n$. Inicialmente, observe o caso do maior p permitido nessa situação. Ou seja, para $p = n - 2$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_\mu &= (N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_{\mu b})(\mathbf{e}_n) A_{J_{n-2}}(P^{J_{n-2}}) \\
 &= A'_{J_p \neq n}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_{\mu b})(P^{J_{n-3}^{\neq n}}) \\
 &= (-1)^{n-1} A_{j_1, \dots, j_{n-3}, n}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_{\mu b})(P^{j_1, \dots, j_{n-3}, n}) \\
 &= (-1)^{n-1} A_{j_1, \dots, j_{n-3}, n}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_{\mu b})(\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{n-3}})(P) \\
 &= (-1)^{n-1} g_{\mu\nu} A_{j_1, \dots, j_{n-3}, n}(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}^\nu)(\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{n-3}})(P)
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

onde foi usadas as relações (A.7) e (A.8). O índice j_{n-3} pode assumir os valores $n - 3$, $n - 2$ e $n - 1$, pois os j 's estão dispostos em ordem estritamente ascendentes. Quando j_{n-3} assume um destes 3 valores, o ν pode assumir os outros 2 e $\nu = n$, já que o valor n é proibido para os j 's, neste caso. De qualquer maneira, para estes valores de ν , o fator

$$(\mathbf{e}^\nu)(\mathbf{e}^{j_1}) \dots (\mathbf{e}^{j_{n-3}})(P) \tag{A.28}$$

terá ordem $n - 2$. Como de seu lado esquerdo há $n - 1$ elementos (N_i), o resultado de (A.27) será zero. Ou seja, para $p = n - 2$, tem-se

$$\mathcal{B}_\mu = 0. \tag{A.29}$$

Como $p = n - 2$ é o maior valor possível de p , no caso de $p + 1 < n$. Então, procedendo da mesma maneira acima para os valores $0 < p < n - 2$, pode-se observar que o valor de \mathcal{B}_μ também é nulo. Desta maneira, tem-se, para $0 < p < n$.

$$-(N_1) \dots (N_{n-1})(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}_{\mu b})\psi_{p+1} = -\delta_{n-2,p} g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(P). \tag{A.30}$$

A.2 Cálculo de $(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e_{nb})(e_\mu)\psi_p$

Como último passo para o cálculo de \mathcal{R}_μ^p , deve-se estudar o segundo termo de (A.15). Desta forma,

$$\begin{aligned} -(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e_{nb})(e_\mu)\psi_p &= -(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e_{nb})(e_\mu)A_{J_p}(P^{J_p}) \\ &= -g_{n\nu}(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^\nu)(e_\mu)A_{J_p}(P^{J_p}) \\ &= \underbrace{-g_{nn}(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^n)(e_\mu)A_{J_p}(P^{J_p})}_{\mathcal{C}_\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Observe que, como $(\bar{N}_i)(e^i) = 0$, o único valor que ν pode assumir tal que $(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^\nu)(e_\mu)$ seja diferente de zero é $\nu = n$, o que justifica o fator $g_{nn}(e^n)$ na expressão acima. Os (\bar{N}_i) comutam entre si e são idempotentes, de maneira que $(\bar{N}_i)(P) = (P)$, já que

$$(P) = (\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_n). \quad (\text{A.32})$$

Explicitamente, a equação (A.31) fica

$$\mathcal{C}_\mu = -g_{nn}A_{j_1 j_2 \dots j_p}(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^n)(e_\mu)(e^{j_1})(e^{j_2}) \dots (e^{j_p})(P). \quad (\text{A.33})$$

onde os j 's estão dispostos em ordem estritamente ascendentes. A expressão (A.33) será igual a zero quando o elemento (e_μ) multiplicar pelo lado esquerdo o elemento (P) , o que ocorre imediatamente quando $p = 0$. Outra situação em que a expressão se anula é quando (e^n) multiplica um (e^{j_k}) com $j_k = n$. Com isso em mente, considere que μ ocorra no índice j_ℓ . Isto é,

$$\mathcal{C}_\mu = -g_{nn}A_{j_1 \dots j_{\ell-1} \mu j_{\ell+1} \dots j_p}(\bar{N}_1) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^n)(e_\mu)(e^{j_1}) \dots (e^{j_\ell}) \dots (e^{j_p})(P), \quad (\text{A.34})$$

com $j_\ell = \mu$. Desenvolvendo algebricamente a equação (A.34), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu &= -(-1)^{\ell-1} g_{nn}A_{j_1 \dots j_{\ell-1}, \mu, j_{\ell+1} \dots j_p}(\bar{N}_1) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^n)(e^{j_1}) \dots (e^{\ell-1})(e_\mu)(e^\mu)(e^{\ell+1}) \dots (e^{j_p})(P) \\ &= (-1)^\ell g_{nn}A_{j_1 \dots j_{\ell-1}, \mu, j_{\ell+1} \dots j_p}(\bar{N}_1) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^n)(e^{j_1}) \dots (e^{\ell-1})(e_\mu)(e^\mu)(e^{\ell+1}) \dots (e^{j_p})(P). \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Como os $j_1, j_2, \dots, j_{\ell-1}, j_{\ell+1}, \dots, j_p$ são diferentes de μ e $(e_\mu)(e^\mu) = [1 - (e^\mu)(e_\mu)]$, tem-se que

$$(e^\mu)(e_\mu)(e^{j_{\ell+1}}) \dots (e^{j_p})(P) = 0. \quad (\text{A.36})$$

Dessa forma, a equação (A.35) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu &= (-1)^\ell g_{nn}A_{j_1 \dots j_{\ell-1}, \mu, j_{\ell+1} \dots j_p}(\bar{N}_1) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^n)(e^{j_1}) \dots (e^{j_{\ell-1}})(e^{j_{\ell+1}}) \dots (e^{j_p})(P) \\ &= (-1)^{\ell+p-1} g_{nn}A_{j_1 \dots j_{\ell-1}, \mu, j_{\ell+1} \dots j_p}(\bar{N}_1) \dots (\bar{N}_{n-1})(e^{j_1}) \dots (e^{j_{\ell-1}})(e^{j_{\ell+1}}) \dots (e^{j_p})(e^n)(P) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

A presença de (\mathbf{e}^n) em (A.37) garante que todos os j 's sejam diferentes de n , desta maneira só podem assumir os valores $\{1, \dots, \hat{\mu}, \dots, n-1\}$, onde $\hat{\mu}$ indica que μ está fora do conjunto. Assim, mesmo que (N_μ) possa multiplicar a esquerda de (P) , os outros (N_i) 's se anularão quando multiplicados pelos correspondentes (\mathbf{e}^i) . A única maneira de \mathcal{C}_μ assumir um valor diferente de zero é quando $p = 1$ em (A.31). Nesta situação, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\mu &= -g_{nn} A_j(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(\mathbf{e}^n)(\mathbf{e}_\mu)(\mathbf{e}^j)(P) \\
&= -g_{nn} A_j(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(\mathbf{e}^n) \left[\delta_\mu^j - (\mathbf{e}^j)(\mathbf{e}_\mu) \right] (P) \\
&= -g_{nn} A_\mu(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(\mathbf{e}^n)(P) \\
&= -g_{nn} A_\mu(\mathbf{e}^n)(\bar{N}_1)(\bar{N}_2) \dots (\bar{N}_{n-1})(P) \\
&= -g_{nn} A_\mu(\mathbf{e}^n)(P) \\
&= -g_{nn} A_\mu(P^n),
\end{aligned} \tag{A.38}$$

ou seja, para $0 \leq p < n$

$$\mathcal{C}_\mu = -\delta_{p,1} g_{nn} A_\mu(P^n). \tag{A.39}$$

Finalmente, por (A.30) e (A.39), chega-se ao resultado

$$\mathcal{R}_\mu^p \psi_{(p)} = -\delta_{n-2,p} g_{n\mu} A_{1,2,\dots,n-1}(P) - \delta_{p,1} g_{nn} A_\mu(P^n). \tag{A.40}$$

B Fibrados Vetoriais

Considere um campo vetorial ϕ dado por

$$\phi : \phi^i(x)\mathbf{e}_i, \quad (\text{B.1})$$

onde as componentes $\phi^i(x)$ são campos escalares $\phi^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é a base do espaço vetorial V . Portanto, o campo ϕ é uma aplicação

$$\phi : M \rightarrow V. \quad (\text{B.2})$$

Isto é, leva os pontos de uma variedade M a um espaço vetorial de n dimensões V .

Porém, na física, aparecem estruturas matemáticas onde ϕ não é uma aplicação de M em um espaço vetorial, mas sim uma aplicação que leva pontos da variedade M a pontos de outra variedade, por exemplo, N . Ou seja,

$$\phi : M \rightarrow N. \quad (\text{B.3})$$

As componentes de ϕ agora são expressas em termos das funções coordenadas da variedade N . Seja $\{(\mathcal{U}_i, \psi_i)\}$ um atlas para N , onde $\psi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\{\mathcal{U}_i\}$ é uma cobertura para N . Então, as componentes de ϕ são dadas por

$$\phi^j(x) := \psi_i^j(\phi(x)) \quad (\text{B.4})$$

em que $\phi(x) \in \mathcal{U}_i$.

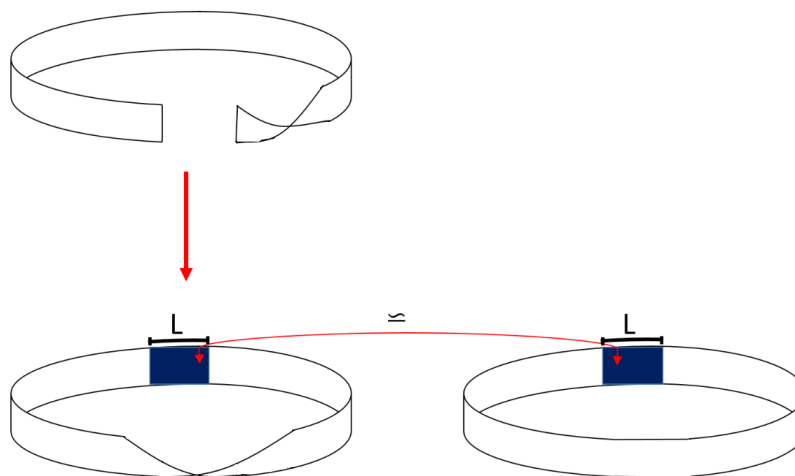


Figura 7 – Localmente, a faixa de Möbius é igual a um cilindro.

Numa situação geral, o campo ϕ varia de ponto a ponto em M . Isso permite escrever N como união de famílias de espaços N_x rotuladas pelo ponto $x \in M$. Neste caso, se trata de uma estrutura matemática chamada fibrado, onde N é chamado de espaço principal e M , o espaço base e para cada $x \in M$ existe um espaço $N_x \subset N$ denominado fibra em x .

O exemplo clássico de um fibrado é a faixa de Möbius. A faixa de Möbius consiste de uma faixa retangular com as suas extremidades unidas após uma torção, como mostra a Figura 7.

Localmente, a faixa de Möbius é isomórfica a um cilindro. Isto é, localmente, é o produto $L \times S'$ de um seguimento de reta L com a circunferência S' (Figura 8).

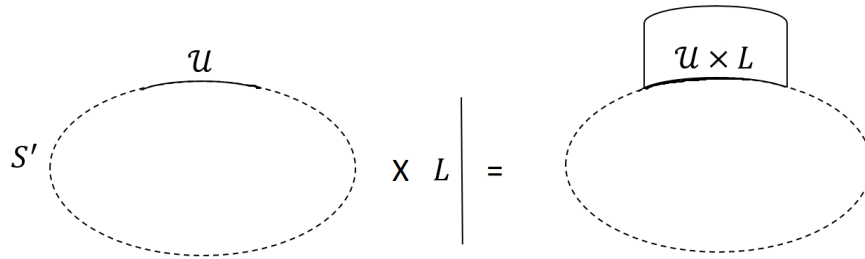


Figura 8 – Produto entre uma arco de circunferência U e uma segmento de reta L .

Um fibrado ainda carrega outras estruturas. Veja na Figura 9 que a faixa de Möbius pode ser projetada em uma circunferência através de uma projeção π .

O conjunto de pontos M na faixa de Möbius tal que $\pi(M) = x_0, x_0 \in M$, é denominado fibra da projeção π no ponto x_0 , ou seja, é a imagem inversa da projeção e será designada por $\pi^{-1}(x_0)$. Observe na Figura 9 que $\pi^{-1}(x_0)$ é um segmento de reta que corta verticalmente a faixa retangular. Este seguimento de reta varia continuamente enquanto $x \in M$ varia. Agora, suponha que \mathcal{U}_α é uma vizinhança do ponto x . Então, a fibra $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ é isomórfica ao produto

$$\mathcal{U}_\alpha \times F, \tag{B.5}$$

onde F é um seguimento de reta. Isto significa que, localmente, a faixa de Möbius é isomórfica ao cilindro. Matematicamente, existe um homeomorfismo h_α tal que

$$h_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \tag{B.6}$$

$$h_\alpha = e, \tag{B.7}$$

onde e é a identidade.

Suponha agora que exista outra vizinhança \mathcal{U}_β que se sobrepõe a \mathcal{U}_α , isto é, $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$. Então, pode-se construir a aplicação

$$h_\beta^{-1} \circ h_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \times F \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \times F. \tag{B.8}$$

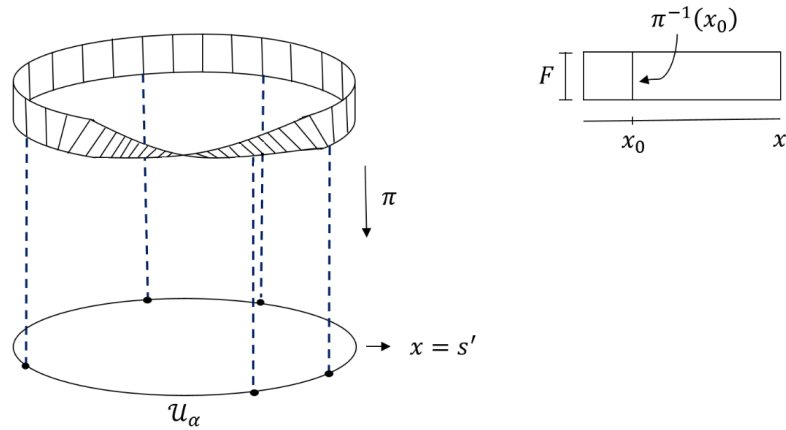


Figura 9 – Cada ponto da circunferência corresponde a um segmento de reta que corta a faixa de Möbius. No contexto de um fibrado, a faixa de Möbius é o espaço principal, a circunferência é o espaço base, π uma projeção e a reta é a fibra de π sobre um ponto x_0 da circunferência.

Isto faz de $h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$ um operador no espaço $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \times F$. Fixando um ponto $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, define-se o homeomorfismo

$$g_{\alpha\beta}(x) : F \longrightarrow F \tag{B.9}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) := h_{\beta,x}^{-1} \circ h_{\alpha,x} \tag{B.10}$$

onde

$$h_{\alpha,x} : F \longrightarrow \pi^{-1}(x). \tag{B.11}$$

As aplicações $g_{\alpha\beta}$ recebem o nome de funções de transição. São estas funções que são responsáveis por como uma fibra $\pi^{-1}(x)$ muda continuamente até a fibra $\pi^{-1}(x')$, com $x \in \mathcal{U}_\alpha$ e $x' \in \mathcal{U}_\beta$. A coleção dos homeomorfismos $g_{\alpha\beta}$ formam um grupo G chamado grupo de estrutura do fibrado. Este grupo, no exemplo da faixa de Möbius, é composto por dois elementos $\{e, g\}$, onde e é a identidade e g é a reflexão pelo ponto central de F . O grupo G pode ser percebido ao se mover uma fibra ao longo da faixa de Möbius. Feito isso, ver-se-á que a fibra sofre uma reflexão R em torno de seu ponto central, o que representa a ação de $g = R$ na fibra F .

A cobertura da circunferência é dada por dois elementos $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$ escolhidos de tal maneira que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$.

Observando a Figura 10, ver-se-á que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ é formado por dois arcos disjuntos A e B . Os elementos $g_{\alpha\beta}$ são dados por

$$g_{12}(x) = \begin{cases} e, & \text{se } x \in A \\ g, & \text{se } x \in B \end{cases} \tag{B.12}$$

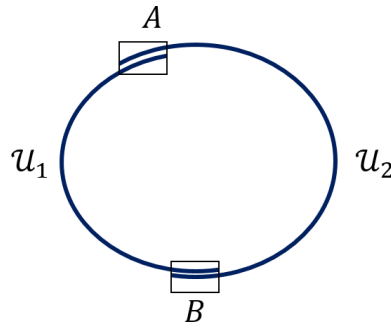


Figura 10 – O conjunto $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$ representa uma cobertura para a circunferência. Os arcos de circunferência em A e B representam a intersecção entre \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 .

Tem-se ainda as propriedades

$$g_{21}(x) = g_{12}^{-1}(x) \quad (\text{B.13})$$

$$g_{11}(x) = g_{22}(x) = e \quad (\text{B.14})$$

Dado um espaço X , as funções de transição $g_{\alpha\beta}$, a fibra F e o grupo G , pode-se recostituir o fibrado E a qual estes objetos pertencem. Esta construção é feita a partir de um espaço que é formado pela união de todos $\mathcal{U}_\alpha \times F$, isto é,

$$\tilde{E} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha \times F. \quad (\text{B.15})$$

As trivializações locais são definidas como uma função que leva elementos $(x, f) \in \tilde{E}$ à classe de equivalência $[(x, f)]$, onde a relação de equivalência é dada de tal forma que se os elementos (x, f) e (x', f') forem equivalentes, então

$$x' = x \quad (\text{B.16})$$

$$f' = g_{\alpha\beta}(x)f. \quad (\text{B.17})$$

Isto é

$$\begin{aligned} h_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times F &\longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \\ (x, f) &\mapsto [(x, f)]. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

O espaço principal do fibrado é dado pelo conjunto de todas as classes de equivalência, denotado por

$$\tilde{E} / \sim. \quad (\text{B.19})$$

Assim, constroi-se o fibrado com funções de transição $g_{\alpha\beta}$.

Para a faixa de Möbius, as funções de transição são dadas por (B.12), e, portanto, tem-se apenas duas classes de equivalência. Para $x \in B$, tem-se que a classe de equivalência

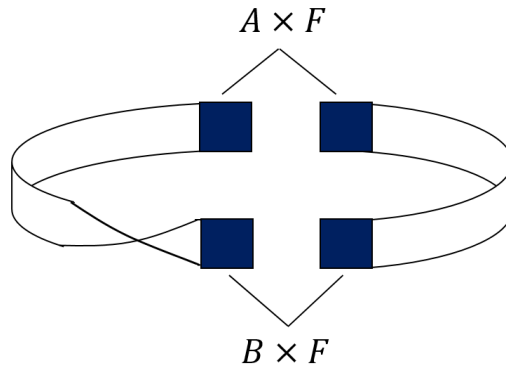


Figura 11 – A faixa de Möbius pode ser construída colando as pontas de uma faixa com outra faixa torcida.

é formada por dois elementos $\{(x, f), (x, gf)\}$. Se $x \in A$, a classe é formada apenas por (x, f) .

Na Figura 11, as regiões hachuradas vão ser coladas. A região $A \times F$ será colada sem nenhuma torção. Isto corresponde à classe de equivalência contendo apenas o elemento (x, f) , $x \in A$. Por outro lado, na região denotada como $B \times F$, as pontas serão unidas após uma torção, o que corresponde à classe de equivalência contendo os elementos (x, f) e (x, gf) , onde g é a reflexão da fibra F em torno do ponto central. Desta maneira, pode-se construir a faixa de Möbius a partir das informações de X , F e G .

B.1 Fibrados Quocientes

Se V for um espaço vetorial sobre K e $V' \subset V$ for um subespaço linear de V , então pode-se formar o espaço vetorial quociente V/V' . Seja W outro espaço vetorial, $W' \subset W$ um subespaço linear, e $g : V \rightarrow W$ for uma aplicação tal que $g(V') = W'$, então existe uma aplicação linear

$$\bar{g} : V/V' \longrightarrow W/W' \tag{B.20}$$

A forma de \bar{g} é dada a partir de g . Basta escolher bases V e W tais que os primeiros elementos de cada base formem as bases de V' e W' , respectivamente. A matriz de g com respeito a essas bases é da forma

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}. \tag{B.21}$$

Então, a representação matricial da aplicação (B.21) é dada pela submatriz D de g . Se g for um isomorfismo de V para W tal que $\bar{g}|_{V'} : V' \rightarrow W'$ é um isomorfismo, então

$$\bar{g} : V/V' \rightarrow W/W' \tag{B.22}$$

também é um isomorfismo.

Agora, suponha que $\eta(V) = (V, \pi, M)$ é um fibrado vetorial sobre M de rank k e fibra K^k . Um subfibrado de η é o fibrado $\eta'(V) = (V', \pi', M)$ de rank k' , onde $V' \subset V$, $\pi' = \pi|_{V'}$ e $k' \leq k$.

Se $\eta'(V)$ for um subfibrado de η , então pode-se formar o fibrado quociente

$$\eta/\eta' = (V/V', \pi_q, M) \quad (\text{B.23})$$

tal que para $p \in M$

$$\pi_q^{-1}(p) = \frac{\pi^{-1}(p)}{\pi'^{-1}(p)}. \quad (\text{B.24})$$

Seja $[(\mathcal{U}_\alpha, h_\alpha)]_{\alpha \in A}$ um atlas para η , com $h_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times K^k \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$. Pode-se escolher h_α de maneira que

$$h_\alpha^{-1}(V') = \mathcal{U}_\alpha \times K^{k'} \times \{0\} \subset \mathcal{U}_\alpha \times K^k \quad (\text{B.25})$$

para todo $\alpha \in A$. Então, o atlas de η/η' com respeito a $[(\mathcal{U}_\alpha, h_\alpha)]$ é dado por $\{(\mathcal{U}_\alpha, f_\alpha) | \alpha \in A\}$ onde

$$f_\alpha = h_\alpha \circ \{id \times q_{k'}^{-1}\} \quad (\text{B.26})$$

em que $q_{k'} : K^k \rightarrow K^{k-k'}$ é a projeção de K^k nas últimas coordenadas. As funções de transição de η/η' são dadas por $\bar{g}_{\alpha\beta} = f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$, isto é

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta} = f_\beta^{-1} \circ f_\alpha &= \{id \times q_{k'}\} \circ h_\beta^{-1} \circ h_\alpha \circ \{id \times q_{k'}^{-1}\} \\ &= \{id \times q_{k'}\} \circ g_{\alpha\beta} \circ \{id \times q_{k'}^{-1}\}, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

onde $\{g_{\alpha\beta}\}$ é o sistema de funções de transição do fibrado η . Isto corresponde dizer que, se as $k' \times k'$ submatrizes superiores de $g_{\alpha\beta}$ correspondem às funções de transição de η' então $\bar{g}_{\alpha\beta}$ é a submatriz $(k - k') \times (k - k')$ inferior direita de $g_{\alpha\beta}$.

B.2 Fibrado Vetorial Dual

Seja $\eta(V) = (V, \pi, M)$ um fibrado vetorial com fibra K^n , grupo de estrutura $GL(n, K)$, atlas $\{[h_i, \mathcal{U}_i]\}$ e sistema de funções de transição $\{g_{ij}\}$, onde $n = \dim V$. Para V^* definido como

$$V^* := \bigcup_{p \in M} (\pi^{-1}(p))^*, \quad (\text{B.28})$$

pode-se construir o fibrado vetorial

$$\eta^*(V) = (V^*, \pi^*, M) \quad (\text{B.29})$$

com fibra K^n , grupo $GL(n, K)$, atlas $\{(h'_i, \mathcal{U}_i)\}$ e sistema de funções de transição $\{g'_{ij}\}$. Observe que

$$\pi^* : V^* \longrightarrow M. \quad (\text{B.30})$$

As trivializações locais $h_i : \mathcal{U}_i \times K^n \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ e $h'_i : \mathcal{U}_i \times K^n \rightarrow \pi^{*-1}(\mathcal{U}_i)$ se correlacionam através de

$$h'_{i,p} = (h_{i,p}^{-1})^* \circ r^{-1}, \quad (\text{B.31})$$

onde $(h_{i,p}^{-1})^* : (K^n)^* \rightarrow (\pi^{-1}(p_i))^*$ é a aplicação dual à inversa de $h_{i,p} : K^n \rightarrow \pi^{-1}(p)$, para $p \in \mathcal{U}_i$, e $r : (K^n)^* \rightarrow K^n$. Para $\{e_i\}$ e $\{e^i\}$ bases de K^n e $(K^n)^*$, respectivamente, r é definida como

$$r(e^i) = e_i. \quad (\text{B.32})$$

Portanto, as funções de transição $g_{ij}(p)$ e $g'_{ij}(p)$, para $p \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ se correlacionam através de

$$\begin{aligned} g'_{ij}(p) = h'_{j,p}{}^{-1} \circ h'_{i,p} &= [(h_{j,p}^{-1})^* \circ r^{-1}]^{-1} \circ (h_{i,p}^{-1})^* \circ r^{-1} \\ &= r \circ (h_{j,p})^* \circ (h_{i,p}^{-1})^* \circ r^{-1} \\ &= r \circ (h_{i,p}^{-1} \circ h_{j,p})^* \circ r^{-1} \\ &= r \circ (g_{ji}(p))^* \circ r^{-1} \\ &= r \circ (g_{ij}^{-1}(p))^* \circ r^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

B.3 Fibrados Vetoriais Sobre a Álgebra Tensorial

Existem fibrados vetoriais cujas fibras são estruturas mais elaboradas do que espaços vetoriais. Uma classe desses fibrados são os chamados *fibrados algébricos*. As referências [112, 113] fazem uma revisão de fibrados vetoriais sobre álgebras associativas graduadas. Neste caso, as fibras destes fibrados são, como o próprio nome diz, álgebras associativas graduadas. Esta presente revisão, no entanto, tratará de um caso específico de tais fibrados, o *fibrado vetorial sobre a álgebra tensorial*, que é essencial na construção de outros fibrados, tais como o fibrado sobre a álgebra exterior e o fibrado de Clifford. O fibrado de Clifford será estudado na Seção B.4.

O objetivo dessa seção é mostrar como as funções de transição do fibrado vetorial $\eta(V) = (V, \pi, M)$, com fibra \mathbb{K}^n se modificam no fibrado dado por

$$\mathcal{W}_*(V) = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \eta_{\ell}(V), \quad (\text{B.34})$$

onde

$$\eta_{\ell}(V) = \underbrace{\eta(V) \otimes \dots \otimes \eta(V)}_{\ell \text{ vezes}}. \quad (\text{B.35})$$

B.3.1 Fibrados Sobre o espaço dos Tensores Covariantes e Contravariantes

Numa situação geral é conveniente considerar fibrados cuja fibra é isomórfica ao espaço de tensores k covariantes e ℓ contravariante, pois a partir dele se pode construir os fibrados sobre álgebra tensorial covariante e contravariante, e, principalmente, pode-se construir o fibrado sobre a álgebra de tensores mistos, que é importante para o desenvolvimento dos fibrados de Schönberg.

Entretanto, antes de iniciar, faz-se necessário introduzir algumas notações usadas em [126], texto base para esta seção.

Seja V_i espaços vetoriais, o espaço $\mathcal{T}(V_1, \dots, V_k)$ é definido como

$$\mathcal{T}(V_1, \dots, V_{k'}) := V_1^* \otimes \dots \otimes V_{k'}^*. \quad (\text{B.36})$$

Seja agora $F_i : V_i \rightarrow W_i$, $i = 1, \dots, k'$ uma aplicação linear, define-se

$$(F_1, \dots, F_{k'})^* : \mathcal{T}(W_1, \dots, W_{k'}) \rightarrow \mathcal{T}(V_1, \dots, V_{k'}) \quad (\text{B.37})$$

$$(F_1, \dots, F_k)^*(T) = T \circ (F_1 \times \dots \times F_{k'}),$$

isto é,

$$(F_1, \dots, F_{k'})^*(T)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k'}) = T(F_1(\mathbf{v}_1), \dots, F_{k'}(\mathbf{v}_{k'})), \quad (\text{B.38})$$

em que $\mathbf{v}_i \in V_i$. Em particular, tem-se

$$(F_1, \dots, F_{k'})^*(\mathbf{u}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{k'}) = F_1^*(\mathbf{u}_1) \otimes \dots \otimes F_{k'}^*(\mathbf{u}_{k'}), \quad (\text{B.39})$$

com $\mathbf{u}_i \in V_i^*$.

A aplicação definida em (B.37) obedece às propriedades

1. Se $F_i : U_i \rightarrow V_i$ e $G_i : V_i \rightarrow W_i$, $i = 1, \dots, k'$, tem-se que

$$(G_1 \circ F_1, \dots, G_{k'} \circ F_{k'})^* = (F_1, \dots, F_{k'})^* \circ (G_1, \dots, G_{k'})^* \quad (\text{B.40})$$

2. Se $id_i : V_i \rightarrow V_i$ é a identidade em V_i , então $(id_1, \dots, id_{k'})^* : \mathcal{T}(V_1, \dots, V_{k'}) \rightarrow \mathcal{T}(V_1, \dots, V_{k'})$ é a identidade em $\mathcal{T}(V_1, \dots, V_{k'})$
3. Se $F_i : V_i \rightarrow W_i$ são isomorfismos para $i = 1, \dots, k'$, então $(F_1, \dots, F_{k'})^* : \mathcal{T}(W_1, \dots, W_{k'}) \rightarrow \mathcal{T}(V_1, \dots, V_{k'})$ com $(F_1, \dots, F_{k'})^{*-1} = (F_1^{-1}, \dots, F_{k'}^{-1})^*$ também é um isomorfismo.
4. Se $F_i : V_i \rightarrow W_i$ são aplicações lineares, para $i = 1, \dots, k+\ell$, então $(F_1, \dots, F_{k+\ell})^*(T \otimes S) = (F_1, \dots, F_k)^*(T) \otimes (F_{k+1}, \dots, F_{k+\ell})^*(S)$, para $T \in \mathcal{T}(W_1, \dots, W_k)$ e $\mathcal{T}(W_{k+1}, \dots, W_{k+\ell})$.

No intuito de construir fibrados cujas fibras são as álgebras de Schönberg, considere $V_1 = \dots = V_k = V$ e $V_{k+1} = \dots = V_{k+\ell} = U$ em (B.36), com $U = V^*$ e $k + \ell = k'$. Deste modo, introduz-se a notação

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\ell^k(V) &= \mathcal{T}(\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{\ell \text{ vezes}} \otimes \underbrace{U \otimes \dots \otimes U}_{k \text{ vezes}}) \\ &= \underbrace{U \otimes \dots \otimes U}_{k \text{ vezes}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{\ell \text{ vezes}}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

O espaço definido em (B.41) é chamado de espaço tensorial do tipo (k, ℓ) sobre V , ou seja, é um espaço formado por tensores covariantes de grau k e contravariantes de grau ℓ . Convencionou-se que $\mathcal{T}_0^0(V) = K$, $\mathcal{T}_0^\ell(V) = \mathcal{T}^\ell(V)$ e $\mathcal{T}_\ell^0(V) = \mathcal{T}_\ell(V)$. Seja \mathfrak{B} uma base para V e \mathfrak{B}^* a base dual, tem-se que

$$\mathcal{T}_\ell^k(\mathfrak{B}) = \underbrace{\mathfrak{B}^* \otimes \dots \otimes \mathfrak{B}^*}_{k \text{ vezes}} \otimes \underbrace{\mathfrak{B} \otimes \dots \otimes \mathfrak{B}}_{\ell \text{ vezes}} \quad (\text{B.42})$$

é uma base para $\mathcal{T}_\ell^k(V)$.

Agora, considere que $F : V \rightarrow W$ é um isomorfismo de V em W , então a aplicação $(F)_\ell^{*k} : \mathcal{T}_\ell^k(W) \rightarrow \mathcal{T}_\ell^k(V)$ é definida como

$$(F)_\ell^{*k} = \underbrace{(F, \dots, F)}_{k \text{ vezes}}, \underbrace{(F^{-1})^*, \dots, (F^{-1})^*}_{\ell \text{ vezes}}, \quad (\text{B.43})$$

de tal forma que

$$(F)_\ell^{*k}(T)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell) = T(F(\mathbf{v}_1), \dots, F(\mathbf{v}_k), \mathbf{u}_1 \circ F^{-1}, \dots, \mathbf{u}_\ell \circ F^{-1}) \quad (\text{B.44})$$

para $T \in \mathcal{T}_\ell^k(W)$, $\mathbf{v}_i \in V$ e $\mathbf{u}_i \in U$. Nos casos que se tem $k = 0$ e $\ell = 1$, os espaços $\mathcal{T}_1(V)$ e $\mathcal{T}_1(W)$ são identificados como V e W , respectivamente. Por sua vez, a aplicação $(F)_1^* : \mathcal{T}_1(W) \rightarrow \mathcal{T}_1(V)$ é identificada como $F^{-1} : W \rightarrow V$.

Para a construção do fibrado sobre a álgebra tensorial, considere o fibrado vetorial $\eta(V) = (V, \pi, M)$ de n dimensões com atlas $\{(h_i, \mathcal{U}_i) | i \in I\}$, funções de transição $\{g_{ij} | i, j \in I\}$ e fibra K^n , onde $\{\mathcal{U}_i | i \in I\}$ forma uma cobertura para M e K representa o campo dos números reais R ou dos números complexos \mathbb{C} .

A partir de $\eta(V)$, pode-se construir o fibrado $\eta_\ell^k(V)$, que é formado por k produtos tensoriais de $\eta^*(V)$ e ℓ produtos tensoriais de $\eta(V)$, isto é,

$$\eta_\ell^k(V) = \underbrace{\eta^*(V) \otimes \dots \otimes \eta^*(V)}_{k \text{ vezes}} \otimes \underbrace{\eta(V) \otimes \dots \otimes \eta(V)}_{\ell \text{ vezes}} = (\mathcal{T}_\ell^k(V), \pi_\ell^k, M) \quad (\text{B.45})$$

onde $\pi_\ell^k : \mathcal{T}_\ell^k(V) \rightarrow M$ é a projeção dada por

$$\pi_\ell^k = \underbrace{\pi^* \otimes \dots \otimes \pi^*}_k \otimes \underbrace{\pi \otimes \dots \otimes \pi}_\ell. \quad (\text{B.46})$$

A fibra de π_ℓ^k sobre $p \in M$ é dada por

$$\pi_\ell^{k-1}(p) \simeq \mathcal{T}_\ell^k(\pi_\ell^k(p)), \quad (\text{B.47})$$

onde $\pi^{-1}(p)$ é a fibra de π sobre o ponto $p \in M$ do fibrado $\eta(V)$. A fibra típica de $\eta_\ell^k(V)$ é K^m , $m = k + \ell$, portanto, um atlas para $\eta_\ell^k(V)$ é $\{(h_{\ell,i}^k, \mathcal{U}_i) | i \in I\}$, onde

$$h_{\ell,i}^k : \mathcal{U}_i \times K^m \longrightarrow \pi_\ell^{k-1}(\mathcal{U}_i). \quad (\text{B.48})$$

As trivializações locais de $\eta_\ell^k(V)$ se relacionam com as trivializações de $\eta(V)$ através de [126]

$$h_{\ell,i,p}^k = (h_{i,p}^{-1})_\ell^{*k} \circ r_\ell''^k, \quad (\text{B.49})$$

com

$$r_\ell''^k = r_\ell'^k \circ \underbrace{(id_{K^n}, \dots, id_{K^n})}_k, \underbrace{(r^{-1}, \dots, r^{-1})}_\ell, \quad (\text{B.50})$$

onde $r_\ell'^k : \mathcal{T}(\underbrace{K^n, \dots, K^n}_{k+\ell}) \longrightarrow K^m$ é um isomorfismo dado por

$$r_\ell'^k(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_\ell}) = \tilde{e}_s, \quad (\text{B.51})$$

em que $\{e^i\}$ e $\{\tilde{e}_s\}$ são bases de $(K^n)^*$ e K^m , respectivamente. A aplicação r é dada por (B.32).

As funções de transição $g_{\ell,ij}^k : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \times K^m \longrightarrow \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \times K^m$ do fibrado $\eta_\ell^k(V)$, para $p \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, são definidas como

$$\begin{aligned} g_{\ell,ij}^k(p) &= h_{\ell,j,p}^{k-1} \circ h_{\ell,i,p}^k = r_\ell''^k \circ (h_{j,p})_\ell^{*k} \circ (h_{i,p}^{-1})_\ell^{*k} \circ r_\ell''^{k-1} \\ &= r_\ell''^k \circ (h_{i,p}^{-1} \circ h_{j,p})_\ell^{*k} \circ r_\ell''^{k-1} \\ &= r_\ell''^k \circ (g_{ij}^{-1}(p))_\ell^{*k} \circ r_\ell''^{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

onde foi utilizada a propriedade (B.40) e $g_{ji}^{-1} = g_{ij}$.

B.3.2 Fibrado Sobre a Álgebra Tensorial Contravariante

O fibrado sobre a álgebra tensorial contravariante $\mathcal{W}_*(V)$ é formado pela soma de Whitney dos fibrados $\eta_\ell(V) := \eta_\ell^0(V)$, isto é,

$$\mathcal{W}_*(V) = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \eta_\ell(V) = (\mathcal{T}_*, \pi_*, M) \quad (\text{B.53})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_*(V) &= \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{T}_\ell(V) \\ &= \{(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t, \dots) \in V \times \dots \times V \times \dots \mid \pi \times \dots \times \pi \times \dots (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t, \dots) = \\ &\quad (p, \dots, p, \dots)\} \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

A fibra típica de $\mathcal{W}_*(V)$ é dada por $K_* = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} K^\ell$ e possui um atlas $\{(\omega_{*,i}), \mathcal{U}_i | i \in I\}$, onde

$$\omega_{*,i} : \mathcal{U}_i \times K_* \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_i). \quad (\text{B.55})$$

As trivializações locais de $\omega_{*,i}$ de $\mathcal{W}_*(V)$ se relacionam com as trivializações locais de $\eta_\ell(V)$ da seguinte maneira

$$\omega_{*,i} = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell,i} \quad (\text{B.56})$$

onde foi usada a identificação $h_{\ell,i} := h_{\ell,i}^0$. Portanto, as funções de transição $g_{*,ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \times K_* \longrightarrow \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \times K_*$ do fibrado $\mathcal{W}_*(V)$ são dadas por

$$\begin{aligned} g_{*,ij}(p) &= \omega_{*,j,p}^{-1} \circ \omega_{*,i,p} = \left(\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell,j,p}^{-1} \right) \circ \left(\bigoplus_{\ell'=0}^{\infty} h_{\ell',i,p} \right) \\ &= \left(\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} r''_\ell \circ (h_{j,p})_\ell^* \right) \circ \left(\bigoplus_{\ell'=0}^{\infty} (h_{i,p})_{\ell'}^* \circ r''_{\ell'-1} \right) \\ &= \bigoplus_{\ell,\ell'=0}^{\infty} r''_\ell \circ (h_{i,p}^{-1} \circ h_{j,p})_\ell^* \delta_{\ell\ell'} \circ r''_{\ell'-1} \\ &= \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} r''_\ell \circ (h_{i,p}^{-1} \circ h_{j,p})_\ell^* \circ r''_{\ell-1} \\ &= \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} r''_\ell \circ (g_{ij}^{-1}(p))_\ell^* \circ r''_{\ell-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

para $p \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ e foi usada a seguinte definição

$$(F_i)_\ell^* \circ (F_j)_{\ell'}^* = (F_j \circ F_i)_\ell^* \delta_{\ell\ell'}. \quad (\text{B.58})$$

Observe que se comparar (B.57) com (B.52), conclui-se que

$$g_{*,ij}(p) = \bigoplus_{\ell}^{\infty} g_{\ell,ij}(p), \quad (\text{B.59})$$

com $g_{\ell,ij}(p) := g_{\ell,ij}^0(p)$.

Veja que no fibrado $\mathcal{W}_*(V)$, as fibras de π_* sobre um ponto $p \in M$ são isomórficas à soma direta das fibras de π_ℓ sobre o mesmo ponto. Ou seja,

$$\begin{aligned} \pi_*^{-1}(p) &= \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \pi_\ell^{-1}(p) = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{T}_\ell(\pi^{-1}(p)) \\ &= \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\pi^{-1}(p) \otimes \dots \otimes \pi^{-1}(p)}_{\ell}. \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Isto quer dizer que para cada ponto $p \in M$ existe um espaço vetorial $\pi_*^{-1}(p)$, que juntamente com o produto tensorial \otimes , formam uma álgebra de tensores contravariantes.

Na próxima seção, o fibrado $\mathcal{W}_*(V)$ será dotado de uma métrica e se desenvolverá o fibrado de Clifford a partir da construção de um subfibrado de $\mathcal{W}_*(V)$ cujas fibras são ideais das fibras de π_* sobre os pontos p da variedade M .

B.4 Fibrado de Clifford

A construção do fibrado de Clifford leva em consideração os seguintes passos: dota-se as fibras $\pi^{-1}(p \in M)$ de um fibrado vetorial $\eta(V) = (V, \pi, M)$ de uma métrica $g_{1,p}$; a métrica nas fibras induz uma métrica g_1 em $\eta(V)$; esse fibrado então é imerso no fibrado sobre a álgebra dos tensores contravariantes $\mathcal{W}_*(V)$ de maneira que $\eta(V)$ é identificado como $\eta_1(V)$; finalmente, através de um morfismo de fibrados, $\mathcal{W}_*(V)$ é levado no fibrado quociente $\mathcal{W}_*(V)/\mathcal{I}_{g_1}$, onde \mathcal{I}_{g_1} é um fibrado cujas fibras são ideais bilaterais das fibras de $\mathcal{W}_*(V)$; o fibrado quociente é definido como o fibrado de Clifford. Estes passos serão desenvolvidos a seguir, utilizando a notação de [111].

Considere o fibrado $\eta(V) = (V, \pi, M)$, com fibra K^n , grupo de estrutura $GL(n, K)$ e atlas $\{(h_i, \mathcal{U}_i) | i \in I\}$, com $n = \dim V$. Agora seja a aplicação $g_{1,p} : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \rightarrow K$, onde $p \in M$, tal que para $\mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_p, \mathbf{v}''_p \in \pi^{-1}(p)$, obedece a

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{1,p}(a\mathbf{v}_p + a'\mathbf{v}'_p, \mathbf{v}''_p) = ag_{1,p}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}''_p) + a'g_{1,p}(\mathbf{v}'_p, \mathbf{v}''_p); \\ g_{1,p}(\mathbf{v}_p, b\mathbf{v}'_p + b'\mathbf{v}''_p) = \bar{b}g_{1,p}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_p) + \bar{b}'g_{1,p}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}''_p); \\ g_{1,p}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_p) = g_{1,p}(\mathbf{v}'_p, \mathbf{v}_p); \\ g_{1,p}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_p) \geq 0; \quad \text{se } K = \mathbb{R}, \text{ então } g_{1,p}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_p) = 0 \text{ se, e somente se, } \mathbf{v}_p = 0. \end{array} \right. \quad (\text{B.61})$$

A aplicação $g_{1,p}$, definida como acima, é um produto interno da fibra de π no ponto $p \in M$. Em outras palavras, para cada ponto $p \in M$ existe um produto interno $g_{1,p}$ em $\pi^{-1}(p)$.

Agora, o fibrado $\eta(V)$ é inserido em $\mathcal{W}_*(V)$ através do morfismo de fibrados

$$(\iota, 1_M) : \eta(V) \hookrightarrow \mathcal{W}_*(V), \quad (\text{B.62})$$

onde $\iota : V \hookrightarrow \mathcal{T}_*(V)$ é a inclusão de V na álgebra tensorial contravariante $\mathcal{T}_*(V)$ e 1_M é a identidade em M . Desta maneira, o fibrado $\eta(V)$ é identificado como $\eta_1(V)$ à medida que V é identificado como $\mathcal{T}_1(V)$.

O produto interno nas fibras de π induz uma métrica no fibrado $\eta_1(V)$ dada por

$$\begin{aligned} g_1 &: E(\eta_1(V) \oplus \eta_1(V)) \rightarrow K \\ g_1|_{\pi_1^{-1}(p) \times \pi_1^{-1}(p)} &= g_1(\pi_1^{-1}(p) \times \pi_1^{-1}(p)), \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

onde $E(\zeta)$ denota o espaço principal do fibrado ζ e $g_1|_{\pi_1^{-1}(p) \times \pi_1^{-1}(p)}$ denota g_1 restrito ao espaço $\pi_1^{-1}(p) \times \pi_1^{-1}(p)$. Observe que, como duas seções ω e ω' de $\eta_1(V)$ avaliadas em um ponto $p \in M$ pertencem à fibra $\pi_1^{-1}(p)$, a métrica g_1 induz um conjunto de aplicações $g_1(\omega, \omega') : M \rightarrow K$ dadas por

$$g_1(\omega, \omega')(p) := g_1(\omega(p), \omega'(p)), \quad (\text{B.64})$$

com $\omega(p), \omega'(p) \in \pi_1^{-1}(p)$. Pode-se agora construir um subfibrado \mathcal{I}_{g_1} de $\mathcal{W}_*(V)$ dado por

$$\mathcal{I}_{g_1} = (I_{g_1}, \pi_*|_{I_{g_1}}, M), \quad (\text{B.65})$$

onde $I_{g_1} \subset \mathcal{T}_*(V)$ é o ideal gerado pelo elemento

$$\omega \otimes \omega' + \omega' \otimes \omega - 2g_1(\omega, \omega'), \quad (\text{B.66})$$

onde $\omega, \omega' \in \text{sect}_1(V)$. Seja agora $\{(\omega_{*,i}, \mathcal{U}_i) | i \in I\}$ um atlas para $\mathcal{W}_*(V)$. Tem-se que $\omega_{*,i}^{-1}(I_g) = \mathcal{U}_i \times \bigoplus_{\ell=0}^n K^\ell \times \{0\}$. Observe que $\bigoplus_{\ell=0}^n K^\ell \subset K_*$, portanto, é possível construir o fibrado quociente

$$\frac{\mathcal{W}_*(V)}{\mathcal{I}_{g_1}} = \left(\frac{\mathcal{T}_*(V)}{I_{g_1}}, \pi_q, M \right) \quad (\text{B.67})$$

com atlas $\{(f_i, \mathcal{U}_i) | i \in I\}$ e fibra $\bigoplus_{\ell=0}^n K^\ell$, onde $n = \dim V$. De acordo com o que foi estudado na Seção B.1, a relação entre as trivializações locais f_i de $\frac{\mathcal{W}_*(V)}{\mathcal{I}_{g_1}}$ com as trivializações locais $\omega_{*,i}$ de $\mathcal{W}_*(V)$ é dada por

$$\xi_i = \omega_{*,i} \circ \{id \times q^{-1}\}, \quad (\text{B.68})$$

onde

$$q : K_* \longrightarrow \bigoplus_{\ell=0}^n K^\ell \quad (\text{B.69})$$

é a projeção nos n primeiros K^ℓ de $\bigoplus_{\ell=0}^n K^\ell$. A projeção $\pi_q : \mathcal{T}_*(V)/\mathcal{I}_{g_1} \longrightarrow M$ é dada pela restrição de $\pi_* : \mathcal{T}_*(V) \longrightarrow M$ ao espaço $\mathcal{T}_*(V)/\mathcal{I}_{g_1}$, isto é,

$$\pi_q = \pi_*|_{\mathcal{T}_*(V)/\mathcal{I}_{g_1}}. \quad (\text{B.70})$$

Na Seção B.1, foi visto qual é a forma de uma fibra sobre um ponto $p \in M$ de fibrado quociente, no caso específico de $\mathcal{W}_q(V)/\mathcal{I}_{g_1}$, tem-se que

$$\pi_q^{-1}(p) = \frac{\pi_*^{-1}(p)}{\pi_*^{-1}(p)|_{\mathcal{I}_{g_1}}} \quad (\text{B.71})$$

com $p \in M$. A fibra $\pi_*^{-1}(p)|_{\mathcal{I}_{g_1}} \subset \pi_*^{-1}(p)$ é um ideal gerado pelo elemento

$$\mathbf{v}_p \otimes \mathbf{v}'_p + \mathbf{v}'_p \otimes \mathbf{v}_p - 2g_{1,p}(\mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_p), \quad (\text{B.72})$$

onde $\mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_p \in \pi_1^{-1}(p)$. Desde modo, as fibras do fibrado $\mathcal{W}_*(V)/\mathcal{I}_{g_1}$ para cada ponto $p \in M$ são isomórficas à álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(\pi_*^{-1}(p), g_{1,p})$. É natural então que se denomine o fibrado quociente (B.67) como *fibrado de Clifford sobre a álgebra tensorial contravariante*, denotando-o como

$$\mathcal{C}\ell(\mathcal{W}_*(V), g_1) := \frac{\mathcal{W}_*(V)}{\mathcal{I}_{g_1}}. \quad (\text{B.73})$$

As funções de transição de $\mathcal{C}\ell(\mathcal{W}_*(V), g_1)$ são dadas por

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{C}\ell,ij}(p) &= \xi_j^{-1} \circ \xi_i = \{id \times q\} \circ \omega_{*,j,p}^{-1} \circ \omega_{*,i,p} \circ \{id \times q^{-1}\} \\ &= \{id \times q\} \circ g_{*,ij}(p) \circ \{id \times q^{-1}\} \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

para $p \in M$.

Seja $\phi : \mathcal{T}_*(V) \rightarrow \mathcal{T}_*(V)/\mathcal{I}_{g_1}$ a projeção de $\mathcal{T}_*(V)$ no espaço quociente $\mathcal{T}_*(V)/\mathcal{I}_{g_1}$, então $(\phi, 1_M) : \mathcal{W}_*(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathcal{W}_*(V), g_1)$ é o morfismo de fibrados que leva o fibrado sobre a álgebra tensorial contravariante no fibrado de Clifford (B.73). Portanto, morfismo de fibrados que leva $\eta(V)$ em $\mathcal{C}\ell(\mathcal{T}_*(V), g_1)$ é dado por $(\varphi, 1_M) = (\phi, 1_M) \circ (\iota, 1_M) = (\phi \circ \iota, 1_M)$, situação ilustrada na Figura 12.

$$\begin{array}{ccc} \eta(V) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{W}_*(V) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \phi \\ & & \mathcal{C}\ell(\mathcal{W}_*(V), g_1) \end{array}$$

Figura 12 – $\varphi = \phi \circ \iota$

Para se obter a multiplicação dentro do fibrado de Clifford, considere $\omega, \omega' \in \text{sec}(\mathcal{C}\ell(\mathcal{W}_*(V), g_1))$ e observe as relações

$$\omega \otimes (\omega + \omega') - \omega \otimes \omega - \omega \otimes \omega' = 0 \quad (\text{B.75})$$

$$(\omega + \omega') \otimes \omega - \omega \otimes \omega - \omega' \otimes \omega = 0 \quad (\text{B.76})$$

$$g_1(\omega, \omega + \omega') - g_1(\omega, \omega) - g_1(\omega, \omega') = 0 \quad (\text{B.77})$$

Tendo em vista (B.75–B.77), pode-se escrever o produto $\omega \otimes \omega'$ como

$$\begin{aligned} \omega \otimes \omega' &= \frac{1}{2} [\omega \otimes \omega' + \omega \otimes \omega'] \\ &= \frac{1}{2} [\omega \otimes \omega' + \omega \otimes \omega'] + \frac{1}{2} [\omega \otimes (\omega + \omega') - \omega \otimes \omega - \omega \otimes \omega' \\ &\quad + (\omega + \omega') \otimes \omega - \omega \otimes \omega - \omega' \otimes \omega \\ &\quad - 2(g_1(\omega, \omega + \omega') - g_1(\omega, \omega) - g_1(\omega, \omega'))]. \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Rearrmando os termos do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} \omega \otimes \omega' &= \frac{1}{2} [\omega \otimes \omega' - \omega' \otimes \omega] + g_1(\omega, \omega') \\ &\quad + \frac{1}{2} [\omega \otimes (\omega + \omega') + (\omega + \omega') \otimes \omega - 2g_1(\omega, \omega + \omega) \\ &\quad - (\omega \otimes \omega + \omega \otimes \omega - 2g_1(\omega \otimes \omega))] \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Observe que o termo entre o segundo colchete do lado direito da equação acima é um elemento do ideal \mathcal{I}_{g_1} gerado por $\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - 2g_1(\alpha, \beta)$, com $\alpha, \beta \in \text{sec}\mathcal{W}_*(V)$. Observe também que $\omega \wedge \omega' = \frac{1}{2}[\omega \otimes \omega' - \omega' \otimes \omega]$. Portanto, tem-se [52]

$$\omega \otimes \omega' \sim \omega \wedge \omega' + g_1(\omega, \omega') \quad (\text{B.80})$$

Desta maneira, o produto no fibrado de Clifford, denotado pela justaposição dos seus elementos, é dado por

$$\omega\omega' = \omega \wedge \omega' + g_1(\omega, \omega') \quad (\text{B.81})$$

Devido à antissimetria do produto externo, tem-se que

$$\omega\omega' + \omega'\omega = 2g_1(\omega, \omega') \quad (\text{B.82})$$

Veja que a equação (B.82) é análoga à relação que caracteriza uma álgebra de Clifford. No entanto, ω e ω' são seções de um fibrado e não um elemento de uma álgebra. Os elementos surgem quando (B.82) é aplicada a um ponto p da variedade M . Neste caso, a equação (B.82) fica

$$\omega(p)\omega'(p) + \omega'(p)\omega(p) = 2g_{1,p}(\omega(p), \omega'(p)), \quad (\text{B.83})$$

que é a relação que caracteriza a álgebra de Clifford na fibra $\pi_q^{-1}(p)$. Em outras palavras, para cada ponto $p \in M$ a fibra $\pi_q^{-1}(p)$ é uma álgebra de Clifford, onde seus elementos obedecem à (B.83).

Referências

- [1] FERNANDES, M. C. B. *Geometric Algebras and the Foundations of Quantum Theory*. 1995. Tese (Doutorado em Física) - Birkbeck College, 1995.
- [2] SCHÖNBERG, M. On The Grassmann and Clifford Algebras I. *An. Acad. Bras. Cienc.*, v. 28, p. 11, 1956.
- [3] SCHÖNBERG, M. On The Grassmann and Clifford Algebras II. *An. Acad. Bras. Cienc.*, v. 32, p. 299, 1960.
- [4] SCHÖNBERG, M. Quantum Kinematics and Geometry. *Suppl. Nuovo Cim. (Serie X)*, v. 6, p. 356, 1957.
- [5] SCHÖNBERG, M. Quantum Mechanics and Geometry. *An. Acad. Bras. Cienc.*, v. 29, p. 473, 1957.
- [6] SCHÖNBERG, M. Quantum Mechanics and Geometry II. *An. Acad. Bras. Cienc.*, v. 30, p. 1, 1958.
- [7] SCHÖNBERG, M. Quantum Mechanics and Geometry III. *An. Acad. Bras. Cienc.*, v. 30, p. 117, 1958.
- [8] SCHÖNBERG, M. Quantum Mechanics and Geometry IV. *An. Acad. Bras. Cienc.*, v. 30, p. 259, 1958.
- [9] SCHÖNBERG, M. Quantum Mechanics and Geometry V. *An. Acad. Bras. Cienc.*, v. 30, p. 439, 1958.
- [10] BOHM, D.; HILEY, B. J. On a Quantum Algebraic Approach to a Generalized Phase Space. *Found. Phys.*, v. 11, p. 179, 1981.
- [11] BOHM, D.; HILEY, B. J. Relativistic Phase Space Arising out of the Dirac Algebra. In: VAN DER MERWE, A. (Ed.) *Old and New Questions in Physics, Cosmology Philosophy and Theoretical Biology*. New York: Plenum Press, 1983. Cap. 4, p. 67.
- [12] BERNDT, R.; RIEMENSCHNEIDER, O. (Eds.). *Mathematische Werke/Mathematical Works*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2003.
- [13] FERNANDES, M. C. B.; VIANNA, J. D. M. On the Duffin-Kemmer-Petiau Algebra and the Generalized Phase Space. *Braz. J. Phys.*, v. 28, p. 00, 1998.
- [14] FERNANDES, M. C.; VIANNA, J. D. M. On the Generalized Phase Space Approach to Duffin-Kemmer-Petiau Particles. *Found. Phys.*, v. 29, p. 201, 1999.

-
- [15] FERNANDES, M.; SANTANA, A. E.; VIANNA, J. Galilean Duffin-Kemmer-Petiau Algebra and Symplectic Structure. *J. Phys. A. Math. Gen.*, v. 36, p. 3841, 2003.
- [16] ROQUE, A. *Teorias Algébricas e Espaço de Fase Generalizado: O Campo de Fierz-Pauli-Gupta*. 2018. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Bahia, 2018.
- [17] BOHM, D. Quantum Theory as an Indication of a New Order in Physics. Part A. The Development of New Orders as Shown Through the History of Physics. *Found. Phys.*, v. 1, p. 359, 1971.
- [18] BOHM, D. Quantum Theory as an Indication of a New Order in Physics. B. Implicate and Explicate Order in Physical Law. *Found. Phys.*, v. 3, p. 139, 1973.
- [19] BOHM, D. J.; HILEY, B. J. On the Intuitive Understanding of Nonlocality as Implied by Quantum Theory. *Found. Phys.*, v. 5, p. 93, 1975.
- [20] FRESCURA, F. A.; HILEY, B. J. The Algebraization of Quantum Mechanics and the Implicate Order. *Found. Phys.*, v. 10, p. 705, 1980.
- [21] FRESCURA, F. A.; HILEY, B. J. The Implicate Order, Algebras, and the Spinor. *Found. Phys.*, v. 10, p. 7, 1980.
- [22] BOHM, D. *Wholeness and the Implicate Order*. New York and London: Routledge, 1982.
- [23] BOHM, D. The Implicate Order and Prigogine's Notions of Irreversibility. *Found. Phys.*, v. 17, p. 667, 1987.
- [24] HILEY, B. J.; DENNIS, G. Dirac, Bohm and Algebraic Approach, *Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1901.01979>*, 2019.
- [25] VIDEIRA, A. L. L.; BARROS, A. L. R.; FERNANDES, N. C. Geometry as an Aspect of Dynamics. *Found. Phys.*, v. 15, p. 1247, 1985.
- [26] CATTANI, M.; FERNANDES, N. A Gentilionic Approach to Quark Colours. *Nuovo Cim.*, v. 87 B, p. 70, 1985.
- [27] HOLLAND, P. R. Minimal Ideals and Clifford Algebras in the Phase Space Representation of Spin-1/2 Fields. In: CHISHOLM, J. S. R.; COMMON, A. K. (Eds.) *Clifford Algebra Their Application Mathematical Physical*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1986. p. 273.
- [28] HOLLAND, P. R. Relativistic Algebraic Spinors and Quantum Motions in Phase Space. *Found. Phys.*, v. 16, p. 701, 1986.

- [29] HOLLAND, P. R.; KYPRIANIDIS, A.; VIGIER, J. P. Causal Phase-Space Approach to Fermion Theories Understood Through Clifford Algebras. *Lett. Math. Phys.*, v. 12, p. 101, 1986.
- [30] WITTEN, E. A Note on the Antibracket Formalism. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 5, p. 487, 1990.
- [31] FRESCURA, F. A. M.; LUBEZONOK, G. Co-Symplectic Geometry and Co-Lagrangian Subspaces. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 29, p. 57, 1990.
- [32] BOLIVAR, A. O. Classical Limit of Fermions in Phase Space. *J. Math. Phys.*, v. 42, p. 4020, 2001.
- [33] TRINDADE, M. A. S.; PINTO, E.; VIANNA, J. D. M. An Approach by Representation of Algebras for Decoherence-Free Subspaces. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, v. 26, p. 771, 2016.
- [34] FERNANDES, M.; HILEY, B. J. The Metaplectic Group, the Symplectic Spinor and the Gouy Phase, *Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1304.7347>*. 2013.
- [35] MONAKHOV, V. Construction of a Fermionic Vacuum and the Fermionic Operators of Creation and Annihilation in the Theory of Algebraic Spinors. *Phys. Part. Nucl.*, v. 48, p. 836, 2017.
- [36] GENTILI, G. Osservazioni Sopra le Statistiche Intermedie. *Il Nuovo Cimento*, v. 17, p. 493, 1940.
- [37] GENTILI, G. Sopra il Fenomeno della Condensazione del Gas di Bose-Einstein. *La Ricerca Scientifica*, v. 12, p. 485, 1941.
- [38] GENTILI, G. Le Statistiche Intermedie e le Proprietà dell'Elio Liquido. *Il Nuovo Cimento*, v. 19, p. 109, 1942.
- [39] CATTANI, M.; FERNANDES, N. General Statistics, Second Quantization and Quarks. *Il Nuovo Cimento A*, v. 79, p. 107, 1984.
- [40] SRIVATSAN, C. S.; MURTHY, M. V. N.; BHADURI, R. K. Gentile Statistics and Restricted Partitions. *Pramana - Journal of Physics*, v. 66, p. 485, 2006.
- [41] CATTANI, M.; BASSALO, J. M. F. Intermediate Statistics, Parastatistics, Fractionary Statistics and Gentileonic Statistics, *Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0903.4773>*, 2009.
- [42] PETIAU, G. *Contribution à la Théorie des Équations d'Ondes Corpusculaires*. 1936. Tese (Doutorado em Física) - Academie Royale des Sciences de Belgique, 1936.

- [43] DUFFIN, R. J. On the Characteristic Matrices of Covariant Systems. *Phys. Rev.*, v. 54, p. 1114, 1938.
- [44] KEMMER, N. Quantum Theory of Einstein-Bose Particles and Nuclear Interaction. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, v. 166, p. 127, 1938.
- [45] KEMMER, N. The Particle Aspect of Meson Theory. *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, v. 173, p. 91, 1939.
- [46] KEMMER, N.; WILSON, A. The Algebra of Meson Matrices. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 39, p. 189, 1943.
- [47] DIRAC, P. The Quantum Theory of the Part II. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, v. 117, p. 351, 1928.
- [48] DIRAC, P. A. M. The Quantum Theory of the Electron. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, v. 117, p. 610, 1928.
- [49] KRUGLOV, S. I. Field Theory of Massive and Massless Vector Particles in the Duffin–Kemmer–Petiau Formalism. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 26, p. 2487, 2011.
- [50] OKUBO, S. Supergeneralization of Duffin–Kemmer–Petiau Algebra and Lie Superalgebra $osp(N, M)$. *J. Math. Phys.*, v. 42, p. 4554, 2001.
- [51] DIXON, G. Super Clifford Algebra. *J. Math. Phys.*, v. 19, p. 2103, 1978.
- [52] VAZ JR., J.; ROCHA JR., R. *An Introduction to Clifford Algebras and Spinors*. Oxford: Oxford University Press, 2016.
- [53] GREUB, W. *Multilinear Algebra*. Second. ed. New York Hildeberg Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [54] TU, L. W. *An Introduction to Manifolds*. Second. ed. New York: Springer, 2011.
- [55] CRUMEYROLLE, A. *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras: Spinor Structures*. Springer Netherlands, 1990.
- [56] LOUNESTO, P. Scalar Products of Spinors and an Extension of Brauer-Wall Groups. *Found. Phys.*, v. 11, p. 721, 1981.
- [57] BAKER, J. W.; FILALI, M. Minimal Ideals in Group Algebras and Their Biduals. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 120, p. 475, 1996.
- [58] BARNES, B. A. Algebras with Minimal Left Ideals Which are Hilbert Spaces. *Pacific J. Math.*, v. 35, p. 537, 1970.

- [59] BUDINICH, P.; BUGAJSKA, K. Spinors as Fundamental Objects. *J. Math. Phys.*, v. 26, p. 588, 1985.
- [60] LOUNESTO, P.; WENE, G. P. Idempotent Structure of Clifford Algebras. *Acta Appl. Math.*, v. 9, p. 165, 1987.
- [61] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Phys.*, v. 37, p. 895, 1926.
- [62] FOCK, V. Zur Schrödingerschen Wellenmechanik. *Zeitschrift für Phys.*, v. 38, p. 242, 1926.
- [63] GORDON, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Zeitschrift für Phys.*, v. 40, p. 117, 1926.
- [64] ANDERSON, C. D. The Positive Electron. *Phys. Rev.*, v. 43, p. 491, 1933.
- [65] KRAJCIK, R. A.; NIETO, M. M. Historical Development of the Bhabha First Order Relativistic Wave Equations For Arbitrary Spin. *Am. J. Phys.*, v. 45, n. 9, p. 818, 1977.
- [66] PROCA, A. Sur la Théorie Ondulatoire des Électrons Positifs et Négatifs. *J. Phys. Radium*, v. 7, p. 347, 1936.
- [67] LUNARDI, J. T.; PIMENTEL, B. M.; TEIXEIRA, R. G.; VALVERDE, J. S. Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau Theory and Gauge Invariance. *Phys. Lett. A*, v. 268, p. 165, 2000.
- [68] FAINBERG, V. Y.; PIMENTEL, B. M. On Equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon Equations. *Braz. J. Phys.*, v. 30, p. 275, 2000.
- [69] GLASHOW, S. L.; GELL-MANN, M. Gauge theories of Vector Particles. *Ann. Phys.*, v. 15, p. 437, 1961.
- [70] GLASHOW, S. L. Partial-symmetries of Weak Interactions. *Nuclear Physics*, v. 22, p. 579, 1961.
- [71] WEINBERG, S. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 19, p. 1264, 1967.
- [72] SALAM, A.; WARD, J. C. Electromagnetic and Weak Interactions. In: ISHAM, C.; KIBBLE, T.; RIAZUDDIN (Eds.) *Selected Papers Of Abdus Salam: (With Commentary)*. World Scientific, 1994. p. 210.
- [73] DE MONTIGNY, M.; KHANNA, F. C.; SANTANA, A. E.; SANTOS, E. S.; VIANNA, J. D. M. Galilean Covariance and the Duffin-Kemmer-Petiau Equation. *J. Phys. A. Math. Gen.*, v. 33, p. L273, 2000.

- [74] DE MONTIGNY, M.; KHANNA, F. C.; SANTANA, A. E.; SANTOS, E. S. Galilean Covariance and Non-relativistic Bhabha Equations. *J. Phys. A. Math. Gen.*, v. 34, p. 8901, 2001.
- [75] HASSANABADI, H.; YAZARLOO, B. H.; ZARRINKAMAR, S.; RAJABI, A. A. Duffin-Kemmer-Petiau Equation Under a Scalar Coulomb Interaction. *Phys. Rev. C - Nucl. Phys.*, v. 84, p. 1, 2011.
- [76] ABREU, L. M.; SANTOS, E. S.; VIANNA, J. D. M. Duffin-Kemmer-Petiau Theory with Minimal and Non-minimal Couplings. *J. Phys. A Math. Theor.*, v. 43, p. 495402, 2010.
- [77] DE OLIVEIRA, L. P. Quantum Dynamics of Relativistic Bosons through Nonminimal Vector Square Potentials. *Ann. Phys.*, v. 372, p. 320, 2016.
- [78] KANATCHIKOV, V. On The Duffin-Kemmer-Petiau Formulation of the Covariant Hamiltonian Dynamics in Field Theory. *Reports Math. Phys.*, v. 46, p. 107, 2000.
- [79] BELICH, H.; PASSOS, E.; DE MONTIGNY, M.; SANTOS, E. S. Lorentz-violating Extension of the Spin-one Duffin-Kemmer-Petiau Equation. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 33, p. 1, 2018.
- [80] FALEK, M.; MERAD, M. Duffin-Kemmer-Petiau Equation in Curved Space-time. *AIP Conf. Proc.*, v. 1444, p. 367, 2012.
- [81] DE MONTIGNY, M.; HOSSEINPOUR, M.; HASSANABADI, H. The Spin-zero Duffin-Kemmer-Petiau Equation in a Cosmic-string Space-time with the Cornell Interaction. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 31, p. 1650191, 2016.
- [82] NEDJADI, Y.; BARRET, R. C. On the Properties of the Duffin-Kemmer-Petiau Equation. *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.*, v. 19, p. 87, 1993.
- [83] MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. The Dirac Oscillator. *J. of Phys. A Math. and Gen.*, v. 22, p. L817, 1989.
- [84] FALEK, M.; MERAD, M.; BIRKANDAN, T. Duffin-Kemmer-Petiau Oscillator with Snyder-de Sitter Algebra. *J. Math. Phys.*, v. 58, 2017.
- [85] DE MELO, G. R.; DE MONTIGNY, M.; SANTOS, E. S. Spinless Duffin-Kemmer-Petiau Oscillator in a Galilean Non-commutative Phase Space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 51, p. 2524, 2012.
- [86] WANG, Z.; LONG, Z. W.; LONG, C. Y.; ZHANG, W. On the Thermodynamic Properties of the Spinless Duffin-Kemmer-Petiau Oscillator in Noncommutative Plane. *Adv. High Energy Phys.*, v. 2015, 2015.

- [87] WU, S. R.; LONG, Z. W.; LONG, C. Y.; WANG, B. Q.; LIU, Y. (2 + 1)-dimensional Klein–Gordon Oscillator Under a Magnetic Field in the Presence of a Minimal Length in the Noncommutative Space. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 32, p. 1750148, 2017.
- [88] BOUMALI, A. Thermal Properties of the One-dimensional Duffin-Kemmer-Petiau Oscillator Using Hurwitz Zeta Function. *Zeitschrift fur Naturforschung A*, v. 70, p. 867, 2015.
- [89] SANCHEZ-VALENZUELA, O.; ZUAZUA-VEGA, R. Related Content Duffin-Kemmer Algebras Revisited. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 26, p. 4967, 1993.
- [90] FISCHBACH, E.; LOUCK, J. D.; NIETO, M. M.; SCOTT, C. K. The Lie Algebra $so(N)$ and the Duffin-Kemmer-Petiau Ring. *J. Math. Phys.*, v. 15, p. 60, 1974.
- [91] VAZ, J.; MANN, S. DKP Algebra, DKP Equation, and Differential Forms. *J. Math. Phys.*, v. 59, p. 083506, 2018.
- [92] FUJIWARA, I. On the Duffin-Kemmer Algebra. *Prog. Theor. Phys.*, v. 10, p. 589, 1953.
- [93] CZAJKOWSKI, A. A.; SKORNY, G. P.; OLESZAK, W. K. Hermite Polynomials Application for Expanding Functions in the Series by These Polynomials. *Probl. Appl. Sci.*, v. 6, p. 67, 2017.
- [94] PATARROYO, K. Y. A Digression on Hermite Polynomials, *Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1901.01648>*. 2019.
- [95] SIMON, B. Distributions and Their Hermite Expansions. *J. Math. Phys.*, v. 12, p. 140, 1971.
- [96] BOYD, J. P. Hermite Functions on C . In: *Weyl Transform*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [97] BOYADZHIEV, K. N.; DIL, A. Series with Hermite Polynomials and Applications. *Publ. Math.*, v. 80, p. 385, 2012.
- [98] CELEGHINI, E.; GADELLA, M.; DEL OLMO, M. A. Hermite Functions, Lie Groups and Fourier Analysis. *Entropy*, v. 20, p. 816, 2018.
- [99] LEBEDEV, N. *Special Functions and Their Applications*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1965.
- [100] REUTER, M. Symplectic Dirac-Kähler Fields. *J. Math. Phys.*, v. 40, p. 5593, 1999.
- [101] KETOV, S. V.; SASAKI, S. Non-anticommutative $N = 2$ supersymmetric $SU(2)$ gauge theory. *Phys. Lett. B*, v. 597, p. 105, 2004.

- [102] KETOV, S. V.; SASAKI, S. BPS-type Equations in the Non-anticommutative $N = 2$ Supersymmetric $U(1)$ Gauge Theory. *Phys. Lett. B*, v. 595, p. 530, 2004.
- [103] BANERJEE, R.; LEE, C.; SIWACH, S. Deformed Conformal and Super-Poincaré Symmetries in the Non-(anti-)Commutative Spaces. *Eur. Phys. J. C*, v. 48, p. 305, 2006.
- [104] WOIT, P. Quantum Mechanics for Mathematicians: Anti-commuting Variables and Pseudo-classical Mechanics Commuting Generators, *Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.419.7263>*, 2013.
- [105] MOFFAT, J. W. Noncommutative and Non-Anticommutative Quantum Field Theory. *Phys. Lett. B*, v. 506, p. 193, 2000.
- [106] OKUBO, S. Parastatistics as Lie-supertriple Systems. *J. Math. Phys.*, v. 35, p. 2785, 1994.
- [107] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. Second. ed. London: IOP Publishing, 2003.
- [108] ISHAM, C. J. *Modern Differential Geometry for Physicists*. Second. ed. Singapore: World Scientific, 1999.
- [109] RUDOLPH, G.; SCHMIDT, M. *Differential Geometry and Mathematical Physics: Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems*. Dordrecht: Springer, 2013.
- [110] STEENROD, N. *The Topology of Fibre Bundles*. New Jersey: Princeton University Press, 1951.
- [111] Dale Husemöller. *Fiber Bundles*. Third. ed. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [112] POPESCU, M.; POPESCU, P. On Algebra Bundles and Pseudomorphisms. *Gen. Math.*, v. 5, p. 331, 1995.
- [113] POPESCU, P.; POPESCU, M. On Graded Algebra Bundles. *Novi Sad Journal of Mathematics*, v. 29, p. 257, 1999.
- [114] FRANKEL, T. *The Geometry of Physics: An Introduction*. Third. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [115] RUDOLPH, G.; SCHMIDT, M. *Differential Geometry and Mathematical Physics Part II. Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields*. Dordrecht: Springer, 2017.
- [116] TAUBES, C. H. *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics, and Curvature*. Oxford: Oxford University Press, 2011.

- [117] PASTERNAK-WINIARSKI, Z. On Reproducing Kernels For Holomorphic Vector Bundles. In: ANTONIE, J.-P.; ALI, S. T.; LISIECKI, W.; MLADENOV, I.; ODZIJEWICZ, A. (Eds.) *Proc. Twelfth Work. Geom. Methods Phys. Quantization Infin. Syst.* Springer, 1994.
- [118] DE BIE, H.; SOMMEN, F. A Clifford Analysis Approach to Superspace. *Ann. Phys.*, v. 322, p. 2978, 2007.
- [119] LAVROV, P. M.; MOSHIN, P. Y. Superfield Lagrangian Quantization with Extended BRST Symmetry. *Phys. Lett. Sect. B*, v. 508, p. 127, 2001.
- [120] FULP, R. BRST Extension of Geometric Quantization. *Found. Phys.*, v. 37, p. 103, 2007.
- [121] FUSTER, A.; Van Holten, J. W. A Note on BRST Quantization of $SU(2)$ Yang-Mills Mechanics. *J. Math. Phys.*, v. 46, p. 102303, 2005.
- [122] SOROUSH, M. BRST Quantization of Noncommutative Gauge Theories. *Phys. Rev. D*, v. 68, p. 3725, 2003.
- [123] HERMANN, R. Geometric Formula For Current-Algebra Commutation Relations. *Phys. Rev.*, v. 177, p. 2449, 1969.
- [124] HERMANN, R. Current Algebras, the Sugawara Model, and Differential Geometry. *J. Math. Phys.*, v. 11, p. 1825, 1970.
- [125] ALEKSEEV, A.; STROBL, T. Current Algebras and Differential Geometry. *J. High Energy Phys.*, v. 2005, p. 35, 2005.
- [126] JOHANNESSEN, S. *Smooth Manifolds and fibre bundles with Applications to Theoretical Physics*. Boca Raton: CRC Press, 2016.