



Universidade Federal da Bahia
Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

**SISTEMAS BOSÔNICOS E FERMIÔNICOS
SOB CONDIÇÕES EXTREMAS**

Elenilson Santos Nery

TESE DE DOUTORADO

Salvador, BA
Março, 2018

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Física

Elenilson Santos Nery

**SISTEMAS BOSÔNICOS E FERMIÔNICOS SOB CONDIÇÕES
EXTREMAS**

*Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em
Física do Instituto de Física da Universidade Federal da
Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de
Doutor em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Luciano Melo Abreu*

Salvador, BA
Março, 2018

A minha família, em especial a minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a duas MULHERES, que sustentaram minha caminhada até aqui. Falo de duas mães que tenho, uma de sangue e a outra que encontrei nas andanças por aí (em Feira de Santana). A minha mãe de sangue, Dona Maria da Glória dos Santos Lemos, que mesmo no universo do caos encontrava a devida ordem para criar, educar e amar os seus três filhos. Seu exemplo de vida me ajudou a seguir sempre de cabeça erguida. A outra, Lourinha, a mulher que com sua bondade e proteção me adotou como filho por uns anos e assim pavimentou minha estrada em Feira com serenidade, humildade e fé. Estendo os agradecimentos aos meus familiares de sangue, em especial, minha irmã Edineia Nery e aos meus tios José Vieira Nery e Renato Lemos (*In memoriam*) e aos familiares de Lourinha, que pela afetividade e respeito que construímos ao longo dos anos sinto-me um deles também, em especial, meu irmão Wenderson Santos.

Agradeço aos mestres que me ajudaram a caminhar até aqui, Gil Luciano, Carlos Alberto e Alexandre Carvalho, os profissionais da UFBA e da UEFS. E de maneira singular e plural pela orientação com muita paciência dos últimos anos o mestre Luciano Melo Abreu.

Também agradeço aos meus amigos de escola primária, em especial, Reinaldo e Lili-ane, aos amigos de graduação, em especial, Adriano, Priscila Saldanha, Carla Miranda, Cândido Teles, Elias Brito, Thiago da Cruz Figueiredo, Raphael Silva, Júlio Brandão, Márcio Moura, Antônio Neto, Manassés, Thaise e todos os outros que de alguma forma contribuíram para minha jornada científica até aqui. Aos meus amigos residentes, em especial, Clerivaldo Paixão, Antônio Macklei, Gilvan Maia, e as lendas do quarto 7, pela ajuda em compreender a dinâmica social fortemente desigual do nosso país e se manter firme nas convicções de igualdade de oportunidades. Aos amigos que ganhei na UFBA, Marcelo Toloza, Eric Pinto, Wallas Nascimento, Antônio Lafayette, Vinícius Nonato, Vinícius Mendonça, Leonardo Cerqueira, Felipe Ventura, Rosana Andrade, Mariana Medeiros, Maróivo Pereira, Bruno Gomes, Josnilton do Nascimento, Caio Porto, Alessandro Silva, Vitor Damião, Aureliano Sancho, Jhon Elber, Edwin Edgar, Leonardo Rojas, Caio Guimarães, Patrícia Hepp, Antônio Neto, Adauto do Livramento, Francisco, Olavo, Rafael Menezes, Luan Orion, Rone Lemos, Devair Marcelo, Victor Mancir, Yuri Hamayano, Jime de Souza, Pedro de Siqueira, Wanderson e aos demais, pelos debates científicos e políticos, além de ter dado-me a honra de representá-los no colegiado de pós-graduação.

Agradecer os meus amigos de casa, Eliseu Couto, Tércio Neres e Alexsandro Ricardo, pela convivência, na média, harmoniosa durante os últimos anos. De uma forma geral agradeço a todos e todas que entraram na minha vida deixando-a poética.

Agradeço aos funcionários do colegiado, Marli Cabral, Lúcia Helena, Geraldo Fentanes, Marcos Paulo e João Paulo, e de apoio, Dal, Aloísio, Gilmar, Bruno Santos, Nilton, Gleidson César e João, e todos os outros, por tornar nosso ambiente de trabalho no instituto mais leve e mais humano.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

CADUCIFÓLIAS
E A ARTE DE SOBREVIVER
NO CAOS...

—POETA DO SERTÃO (Eliseu Couto)

RESUMO

Neste trabalho, tendo como motivação a investigação da matéria fortemente interagente sob condições extremas, estudamos o comportamento termodinâmico de sistemas constituídos por bósons e/ou férmions em um meio de outras partículas, via a abordagem de teorias de campos efetivas a temperatura finita. Em particular, utilizamos versões generalizadas do modelo de Walecka no intuito de descrever a estrutura de fases de campos escalares e espinoriais, os quais podem ser associados a mésons escalares e bárions, respectivamente, quando sujeitos a certas condições. Verificamos os efeitos de tamanho finito, da geometria do sistema e a influência de um campo magnético uniforme externo na estrutura de fases. Encontramos uma diversidade peculiar de diagramas que exemplificam como a presença desses parâmetros modificam a dinâmica de fases, seja na intensidade das regiões de transição ou até mesmo na natureza das transições de fases.

ABSTRACT

In this work, with the motivation to investigate the strongly interacting matter under extreme conditions, we study the thermodynamic behavior of systems consisting of bosons and/or fermions in a medium of other particles, through the approach of effective field theories at finite temperature. In particular, we use generalized versions of the Walecka model in order to describe the phase structure of scalar and spinor fields, which can be associated with scalar mesons and baryons, respectively, when subject to certain conditions. We verified the effects of finite size, the geometry of system and the influence of an external uniform magnetic field on the phase structure. We find a peculiar diversity of diagrams that exemplify as the presence of these parameters modify the phase dynamics, either in the intensity of the transition regions or even in the nature of the phase transitions.

SUMÁRIO

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
Capítulo 1—Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita	5
1.1 Representação Integral Funcional da Função de Partição	5
1.1.1 Função de Partição e Integrais de Trajetórias	5
1.1.2 Teoria Quântica dos Campos a Temperatura Finita	8
1.1.2.1 Formalismo de Matsubara Generalizado	12
Capítulo 2—Gás de Bósons	13
2.1 Modelo	13
2.1.1 Sistema com Dimensões Espaciais Compactificadas	19
2.1.1.1 Uma Dimensão Espacial Compactificada	20
2.1.1.2 Duas Dimensões Espaciais Compactificadas	20
2.1.1.3 Três Dimensões Espaciais Compactificadas	21
2.1.2 Temperatura em $M_* \approx 0$	22
2.1.3 Linha Crítica da Teoria de Campo Médio	23
2.2 Estrutura de Fases	24
2.2.1 Sistema sem Fronteiras Espaciais	25
2.2.2 Sistema com Dimensão Espacial Compactificada	30
2.3 Sistema na Presença de um Campo Magnético Uniforme Externo	35
2.3.1 Modelo	35
2.3.2 Estrutura de Fase	38

Capítulo 3—Gás de Férmions	46
3.1 Modelo	46
3.1.1 Sistema com Dimensão Espacial Compactificada	52
3.1.1.1 Uma Dimensão Espacial Compactificada	52
3.1.1.2 Duas Dimensões Espaciais Compactificadas	53
3.1.1.3 Três Dimensões Espaciais Compactificadas	54
3.1.2 Linha Crítica da Teoria de Campo Médio	55
3.2 Estrutura de Fases	56
3.2.1 Sistema sem Fronteiras Espaciais	57
3.2.2 Sistema com Dimensão Espacial Compactificada	61
3.3 Sistema na Presença de um Campo Magnético Uniforme Externo	66
3.3.1 Modelo	66
3.3.2 Estrutura de Fase	69
Conclusões e Perspectivas	76
Apêndice A—Função Zeta Epstein-Hurwitz	79
A.1 Expressões de Interesse no Corpo do Trabalho	81
A.1.1 Sem fronteiras espaciais $k = 1$: compactificação do tempo imaginário	82
A.1.2 $k = 2$: compactificação do tempo imaginário e de uma dimensão espacial	82
A.1.3 $k = 3$: compactificação do tempo imaginário e de duas dimensões espaciais	83
A.1.4 $k = 4$: compactificação do tempo imaginário e de três dimensões espaciais	84
Apêndice B—Integrais Divergentes	86
Referências	88

LISTA DE FIGURAS

2.1	Campo Sigma $\langle\sigma\rangle$ como uma função de temperatura.	26
2.2	Massa Efetiva como uma função de temperatura no bulk.	26
2.3	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva no bulk.	28
2.4	Massa Efetiva como uma função de temperatura com auto-interação no bulk.	29
2.5	Massa Efetiva como uma função de temperatura com uma dimensão espacial compactificada.	31
2.6	Grande potencial termodinâmico como uma função da temperatura com uma dimensão espacial compactificada I.	32
2.7	Grande potencial termodinâmico com uma função da massa efetiva com uma dimensão espacial compactificada II.	32
2.8	Massa Efetiva como uma função de temperatura com uma dimensão espacial compactificada.	33
2.9	Massa Efetiva como uma função de temperatura com uma dimensão espacial compactificada.	34
2.10	Grande potencial termodinâmico com uma função da massa efetiva com uma dimensão espacial compactificada II.	34
2.11	Massa Efetiva como uma função de temperatura na presença de um campo magnético uniforme.	39
2.12	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme I.	40
2.13	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme II.	41
2.14	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme III.	41
2.15	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme IV.	42
2.16	Massa Efetiva como uma função de temperatura na presença de um campo magnético uniforme para um tamanho finito do sistema.	43
2.17	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme e tamanho finito I.	44

2.18	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme e tamanho finito II.	44
3.1	Massa Efetiva como uma função de temperatura no bulk (Walecka).	58
3.2	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva no bulk (Walecka).	59
3.3	Massa Efetiva como uma função de temperatura com auto-interação no bulk (Walecka).	60
3.4	Massa efetiva como uma função de temperatura com uma dimensão espacial compactificada (Walecka) I.	62
3.5	Massa Efetiva como uma função de temperatura com uma dimensão espacial compactificada (Walecka) II.	62
3.6	Grande potencial termodinâmico como uma função da temperatura com uma dimensão espacial compactificada (Walecka) I.	63
3.7	Grande potencial termodinâmico com uma função da massa efetiva com uma dimensão espacial compactificada (Walecka) II.	64
3.8	Massa Efetiva como uma função de temperatura com $d = 1, 2, 3$ dimensões espaciais compactificadas (Walecka).	64
3.9	Grande potencial termodinâmico com uma função da massa efetiva com $d = 1, 2, 3$ dimensões espaciais compactificadas (Walecka).	65
3.10	Massa Efetiva como uma função de temperatura na presença de um campo magnético uniforme (Walecka) I.	70
3.11	Massa Efetiva como uma função de temperatura na presença de um campo magnético uniforme (Walecka) II.	71
3.12	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme (Walecka) I.	72
3.13	Grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na presença de um campo magnético uniforme (Walecka) II.	73
3.14	Massa Efetiva como uma função de temperatura na presença de um campo magnético uniforme para um tamanho finito do sistema.	73
3.15	Massa efetiva como uma função do inverso do tamanho da dimensão compactificada $x = 1/L$ ($\Omega \neq 0$).	74

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o interesse em estudar diagramas de fase de sistemas relativísticos interagentes sob condições extremas tem aumentado consideravelmente. Uma das abordagens teóricas desses estudos é baseado no formalismo da teoria quântica de campos a temperatura e densidade finita. Estes apresentam relevância na compreensão de propriedades fundamentais da matéria que interage via força forte, influenciada através da dinâmica do meio ambiente. Como por exemplo, podemos destacar: diagramas de fase da matéria nuclear e quarkiônica, transição de fase de um gás degenerado, formação do plasma de quarks e glúons em colisões de íons pesados, estrutura de fases de estrelas de nêutrons e assim por diante [1, 2, 3].

A teoria que descreve as interações fortes no modelo padrão, atualmente, é conhecida como Cromodinâmica Quântica¹ (QCD). Uma propriedade fundamental dessa construção é chamada de liberdade assintótica, isso significa que a constante de acoplamento decresce com o aumento da escala de energia. Em pequenas distâncias a QCD é bem descrita em termos de quarks e glúons interagindo fracamente², enquanto que em grandes distâncias, da ordem de 1 fm, a teoria torna-se não perturbativa e quarks e glúons estão confinados³ em hádrons [4, 5, 6].

Em virtude dessa característica e da acessibilidade dos dados experimentais ao regime da fase hadrônica é preciso utilizar métodos alternativos para descrever as propriedades desse estágio da matéria. Esses métodos têm descritos os hádrons com um razoável nível de sucesso em diversas condições físicas. O valor de uma teoria efetiva (a Lagrangiana efetiva) reside em descrever a dinâmica em baixas energias dos graus de liberdade leves de um sistema físico. Embora os modos mais pesados não apareçam explicitamente, a sua contribuição de alguma forma está incluída através de alguns parâmetros na teoria efetiva de modo a garantir que as simetrias da teoria fundamental devem ser preservadas na teoria efetiva [7].

¹Do ponto de vista formal a QCD é uma teoria de Yang-Mills do tipo $SU(3)$, onde os quarks interagem através de $3^2 - 1 = 8$ bósons de calibre (bósons mediadores), os glúons.

²Isto implica na existência de uma fase, em altas temperaturas e/ou densidades, denominado plasma de quarks e glúons.

³Isto significa que os quarks não podem ser observados como partículas livres, mas apenas como estados ligados singlete de cor de quark-antiquarks (mésons) ou de três quarks ou três antiquarks (bárions) ou outras estruturas mais complicadas como tetraquarks e pentaquarks.

Em particular, modelos com interação tipo Yukawa desempenham um papel importante na descrição dessas estruturas da física de partículas. Primeiramente, concebida de maneira efetiva para conhecer as características dos núcleos atômicos (interações de curto alcance: troca de mésons massivos) [8] e em seguida como parte indispensável na construção do modelo padrão das interações fundamentais (quando campos associados a estas partículas são acoplados ao campo de Higgs), de modo a ser uma estrutura física necessária na compreensão da matéria que compõe o modelo padrão.

Destacamos aqui dois tipos de interação tipo Yukawa de nosso interesse: envolvendo somente campos escalares (com um deles complexo) ou com campos espinorial e escalar. No primeiro caso a ausência do grau de liberdade de spin o torna uma teoria relativamente simples de manipulação matemática e conceitual que desse ponto de vista se torna um protótipo de teorias mais realísticas em diversas situações. Na literatura encontramos em diversos cenários, alguns desses casos são: física nuclear e estados ligados de um sistema relativístico de n -corpos [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], espectro hadrônico [22, 23], interações efetivas de quarks escalares em modelos supersimétricos [24, 25], transições de fase de sistemas relativísticos sob mudanças da magnitude da interação [26] e comportamento termodinâmico de sistemas mesônicos [27, 28]. Por outro lado, a interação tipo Yukawa envolvendo campos espinorial e escalar, em diferentes versões também têm sido largamente utilizada como um laboratório para descobertas do comportamento termodinâmico da matéria hadrônica, descrevendo um número razoável de fenômenos no setor das interações fortes [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39].

Usualmente, essas interações são utilizadas na aproximação de campo médio⁴ (modelo de Walecka [39]). Descrevendo, a título de exemplo, a matéria nuclear em temperatura finita, em que um gás de nucleons (associado com o campo de Dirac) estão imersos em um meio contendo outras partículas escalares consideradas efetivamente via o campo σ e ω constituindo um ambiente quente e denso. Neste modelo o aumento da temperatura induz o sistema experimentar uma transição de fase tipo líquido-gás. No contexto mais simples pode-se simular um gás de mésons pesados ou Káons (associado com o campo de Klein-Gordon) interagindo com o meio também. Em ambas as versões as partículas mesônicas σ e ω simulam interações atrativas e repulsivas de curto alcance, respectivamente. De modo que os mésons escalares representam a troca de dois píons. Esses correspondendo uma larga ressonância de um espalhamento $\pi\pi$ em 500 – 600 MeV.

Em geral, ao longo dos anos esses modelos são tratados sem considerar efeitos do tamanho finito do sistema. Porém, recentemente eles têm sido investigados, por exemplo através do formalismo de volume excluído e das contribuições de Coulomb, com a ideia de

⁴A aproximação de campo médio consiste em substituir os campos mediadores pelos seus respectivos valores médios.

obter informações sobre a influência do tamanho finito do sistema na temperatura crítica [40, 41]. Estudar fronteiras espaciais nas propriedades de hádrons têm sido tema de grande investigação nos últimos anos, tanto do ponto de vista experimental [42] quanto teórico [43, 44, 45, 46, 47]. Eles são examinados sobretudo a partir da utilização do método da regularização zeta [48]. A forma mais simples desse processo de incluir os parâmetros de restrição espacial e outros agentes externos ao sistema pode ser útil para melhor entender sistemas confinados que experimentam uma transição de fase no cenário do modelo de Walecka, versão escalar e espinorial.

Um outro aspecto interessante para esses modelos efetivos consiste no estudo de efeitos magnéticos nas transições de fases, da matéria nuclear densa e quente [49] ou de condensados de Bose-Einstein [50, 51]. Do ponto de vista fenomenológico trabalhos recentes mostram que grandes campos magnéticos são produzidos em colisões de íons pesados [52] e da ordem de Λ_{QCD}^2 ($10^{18} - 10^{19}$ G) podem existir no universo primordial na escala das interações fortes. Essa avaliação pode ser importante por exemplo, em estrelas compactas (magnetars⁵) já que a matéria nuclear altamente densa e condensados de mésons leves no seu interior estão submetidos a campos magnéticos que podem chegar a ordem de 10^{15} G.

Neste sentido, tomando como motivação as discussões feitas acima, neste trabalho realizamos, um estudo sobre as influências do tamanho finito do sistema e a presença de um campo magnético uniforme externo no comportamento termodinâmico do modelo de Walecka generalizado (modelo tipo Yukawa escalar e espinorial) a temperatura finita. Tratamos a limitação espacial com o procedimento devido a Matsubara para compactificar a dimensão temporal [53].

O trabalho está organizado da seguinte forma, o capítulo 1 é devotado à descrição das noções fundamentais da teoria quântica de campos a temperatura finita e as ideias de compactificação do espaço-tempo no formalismo de Matsubara generalizado. Inicialmente buscamos construir, no contexto das integrais de trajetória, o funcional gerador das funções de correlação, e associá-lo à função de grande partição típica no contexto da mecânica estatística.

No capítulo 2 introduzimos o modelo escalar, interagindo via troca de mésons escalares e vetoriais (σ, ω) . Apresentamos a densidade de Lagrangiana, discutimos suas simetrias, para construção da grande função de partição e assim as grandezas termodinâmicas de interesse nas diversas combinações de compactificação das coordenadas espaciais e na presença de um campo magnético uniforme externo são encontradas, usando o processo de regularização das funções Zeta Epstein-Hurwitz não-homogênea. Após essas realizações estudamos o efeito da dimensão do espaço-tempo no comportamento térmico e comentamos os principais aspectos do diagrama de fases do modelo. Depois analisamos os

⁵É uma estrela de nêutrons com campos magnéticos extremamente elevados presentes em sua dinâmica.

diagramas de fases sob a ótica dos efeitos de tamanho finito do sistema e do campo magnético uniforme externo. Usamos esse modelo para aplicar a um gás de mésons pesados e mostramos suas características. Esse capítulo organiza os principais resultados publicados nas Refs. [28, 54, 55, 56, 57]⁶.

O capítulo 3 reservamos ao estudo do modelo espinorial. Do ponto de vista estrutural e metodológico esse capítulo tem desenvolvimento análogo que o anterior. Inicialmente descrevemos as características da estrutura de fases do modelo fermiônico no contexto da matéria nuclear sem e com restrições espaciais [58]. Tratamos também, os efeitos no diagrama de fases do modelo devido a presença de um campo magnético externo [59]. Por fim, levantamos as principais conclusões e apresentamos algumas perspectivas com aplicação em teoria da nucleação e condensação de Bose-Einstein.

⁶A Ref. [28] encontra-se disponível apenas no ArXiv.

TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Este capítulo é devotado à teoria quântica de campos a temperatura finita com a ideia de construir a função de partição (a grande função de partição) via representação integral funcional através do formalismo de tempo imaginário. Partindo do conceito de integral de trajetória (funcional gerador) que foi usado por Feynman para estudar amplitude de transições em problemas da mecânica quântica [60]. Essa formulação dá os mesmos resultados que o tratamento padrão, como por exemplo, no esquema de expansão em laços do potencial efetivo (comumente usado para descrever sistemas relativísticos a temperatura finita) [61]. No entanto, em contraste com essa última, em sistemas com a dita aproximação de campo médio, que será objeto de estudo nesta tese, é obtida de uma maneira muito simples e fisicamente óbvia que se assemelha muito à derivação análoga para sistemas mecânicos estatísticos [62].

1.1 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL FUNCIONAL DA FUNÇÃO DE PARTIÇÃO

A representação integral funcional da função de partição é um pilar da moderna teoria quântica dos campos relativísticos interagentes.

1.1.1 Função de Partição e Integrais de Trajetórias

A natureza macroscópica da matéria é descrita modernamente por princípios microscópicos do sistema através da noção de um *ensemble*. Normalmente encontra-se três tipos de ensemble em mecânica estatística em equilíbrio. Entre eles o ensemble Microcanônico é usado para descrever um sistema isolado que tem uma energia fixa E , um número fixo de partículas N , e um volume fixo V . O ensemble Canônico é utilizado para estudar um sistema em contato com um reservatório de calor em temperatura T . Nesse caso, o sistema pode livremente trocar energia com o reservatório, mas o número de partículas e o volume são fixos. Já no conhecido como ensemble grande Canônico o sistema pode trocar partículas bem como energia com um reservatório. Nesse, a temperatura, o volume, e o potencial químico μ são quantidades fixas [63, 64].

A matriz densidade estatística é o objeto fundamental em mecânica estatística em

equilíbrio. Vamos considerar um sistema descrito por um operador hamiltoniano \hat{H} com um reservatório de calor a temperatura $T = 1/\beta^1$, isto é, como dizemos acima o ensemble canônico. Neste sistema a matriz densidade estatística é expressa na forma:

$$\hat{\rho} = \exp(-\beta\hat{H}), \quad (1.1)$$

e, a partir dela, podemos calcular a média estatística de um operador \hat{A} :

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr} \hat{\rho} \hat{A}}{\text{Tr} \hat{\rho}}. \quad (1.2)$$

A conexão com o mundo macroscópico é feito através da *função de partição* que é uma quantidade definida na forma:

$$Z = \text{Tr} \hat{\rho}. \quad (1.3)$$

Na descrição térmica sob a ótica do ensemble grande canônico devemos realizar a seguinte substituição: $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \mu_i \hat{N}_i$, onde \hat{N}_i é o operador número somando sobre as cargas conservadas do sistema. Neste caso, chamamos a grandeza definida na Eq. (1.3) de *grande função de partição*.

A função de partição desempenha um papel importante na mecânica estatística, a partir dela as propriedades termodinâmicas do sistema podem ser determinadas. Em particular, as grandezas termodinâmicas relevantes, como pressão, o número de partículas, a entropia e energia são, no limite de volume infinito, dados em termos desta quantidade, a saber:

$$P = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial V}, \quad (1.4a)$$

$$N_i = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial \mu_i}, \quad (1.4b)$$

$$S = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial T}, \quad (1.4c)$$

$$E = -PV + TS + \mu_i N_i. \quad (1.4d)$$

É interessante observar que se tomarmos o valor médio de um operador na representação de Heisenberg, $A_H(t) = e^{-itH} A(0) e^{itH}$, dizemos que ele é periódico no tempo, com um período de $i\beta$. Este resultado é conhecido como condição de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) e pode ser provado diretamente de (usando as propriedades cíclicas do

¹Usamos o sistema natural de unidades, tal que $k_B = c = \hbar = 1$, onde k_B é a constante de Boltzmann, c é a velocidade da luz e \hbar é a constante de Planck dividida por 2π .

traço):

$$\begin{aligned}
\langle A_H(t) \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}[e^{-\beta H} A(t)] \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}[e^{-\beta H} e^{-itH} A(0) e^{itH}] \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}[e^{-\beta H} A_H(t - i\beta)] \equiv \langle A_H(t - i\beta) \rangle. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

A mudança no argumento de A_H , de $t \rightarrow t - i\beta$, é chamada de rotação de Wick do eixo temporal.

Podemos utilizar essa ideia para construir a função de partição por outro caminho alternativo à matriz densidade estatística. Essa descrição é possível através do formalismo de integrais de trajetória. Para tal, começamos reescrevendo a função de partição na base- $|q\rangle$, como segue:

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}] = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle. \tag{1.6}$$

A rotação de Wick, examinada anteriormente, permite uma mudança do tipo:

$$\int dq \langle q | e^{-it\hat{H}} | q \rangle,$$

onde podemos dividir a exponencial em um produto de $N \gg 1$ termos, definindo $\epsilon \equiv t/N$. De modo que essa amplitude pode ser escrita,

$$\int dq \langle q | e^{-\epsilon \hat{H}} \cdot \dots \cdot e^{-\epsilon \hat{H}} | q \rangle,$$

depois disso podemos inserir N relações da forma,

$$\hat{1} = \int \frac{dp_i}{2\pi} |p_i\rangle \langle p_i|, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.7}$$

no lado esquerdo de cada exponencial, com i aumentando da direita para esquerda, e

$$\hat{1} = \int dq_i |q_i\rangle \langle q_i|, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.8}$$

no lado direito da exponencial, com i aumentando da direita para esquerda, também. Por isso, de maneira geral, encontramos:

$$\begin{aligned}
\langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | e^{-\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})} | q_i \rangle &= e^{ip_i q_{i+1}} \langle p_i | e^{-\epsilon H(p_i, q_i) + \mathcal{O}(\epsilon^2)} | q_i \rangle \\
&= \exp \left\{ -\epsilon \left[\frac{p_i^2}{2m} - ip_i \frac{q_{i+1} - q_i}{\epsilon} + V(q_i) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \right\}. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Além disso, temos um termo do tipo, $\langle q_1 | q \rangle = \delta(q_1 - q)$ que permite realizar a integração em q . Similarmente trocamos o estado $\langle q_{i+1} |$ pelo estado $\langle q_1 |$. Por fim, observamos que $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ não contribui quando tomamos o limite $N \rightarrow \infty$.

Em resumo, a função de partição pode ser escrita na forma:

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left[\prod_{i=1}^N \frac{dq_i dp_i}{2\pi} \right] \exp \left\{ - \sum_{j=1}^N \epsilon \left[\frac{p_j^2}{2m} - ip_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} + V(q_j) \right] \right\} \Big|_{q_{N+1} \equiv q_1}. \quad (1.10)$$

Nota-se que a integral sobre os momentos p_i é Gaussiana e podemos resolver explicitamente, que é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi} \exp \left\{ -\epsilon \left[\frac{p_j^2}{2m} - ip_j \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right] \right\} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\epsilon}} \exp \left[-\frac{m(q_{j+1} - q_j)^2}{2\epsilon} \right]. \quad (1.11)$$

Portanto, a Eq. (1.6) agora pode ser escrita,

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left[\prod_{i=1}^N \frac{dq_i}{\sqrt{2\pi\epsilon/m}} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^N \epsilon \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon} \right)^2 + V(q_j) \right] \right\} \Big|_{q_{N+1} \equiv q_1, \epsilon \equiv t/N} \quad (1.12)$$

A medida ainda contém um fator que é divergente em N grande,

$$C = \left(\frac{m}{2\pi\epsilon} \right)^{N/2} = \exp \left[\frac{N}{2} \ln \left(\frac{m}{2\pi\epsilon} \right) \right]. \quad (1.13)$$

Este fator é, entretanto, independente das propriedades do potencial $V(q_j)$ e assim não contém nenhuma informação dinâmica. Diante disso não precisamos nos preocupar com essa aparente divergência.

Diante das considerações e manipulações executadas acima podemos reescrever a Eq. (1.12) em uma forma funcional para função partição (forma contínua),

$$\begin{aligned} Z &= C \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2} m \dot{q}(\tau) + V(q(\tau)) \right] \right\} \\ &= C \int \mathcal{D}q(\tau) \exp [-S_E] \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde S_E é a ação Euclidiana, obtida tomando $t \rightarrow i\tau$ (*formalismo de tempo imaginário*, uma escolha a partir da rotação de Wick), e a condição $q(\beta) = q(0)$, que quer dizer que a variável q é periódica em τ , e esta assumindo um intervalo $[0, \beta]$. Também, o símbolo indica $\mathcal{D}q$ que devemos somar sobre todas as trajetórias que conectam os pontos $q(t_i) \equiv q_i$ e $q(t_f) \equiv q_f$.

Esse procedimento pode ser generalizado para teoria quântica de campos a temperatura finita como devemos observar na próxima seção.

1.1.2 Teoria Quântica dos Campos a Temperatura Finita

Para tratar fenômenos quânticos e relativísticos, a priori necessitamos de uma teoria quântica de campos. Isto significa que devemos elevar as partículas como sendo excitações

de campos². Por analogia, a função de partição em teoria de campos pode ser definida como:

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi | \exp(-\beta \hat{H}) | \phi \rangle, \quad (1.15)$$

onde estamos integrando sobre todos os estados possíveis dos campos envolvidos no sistema.

Por outro lado, sabemos da teoria quântica de campos que a seguinte relação:

$$\langle \phi_a | \exp(it_1 \hat{H}) | \phi_b \rangle, \quad (1.16)$$

é a amplitude de probabilidade de transição de um estado ϕ_a para um estado ϕ_b em um tempo t_1 [4, 5, 6]. Esta fórmula pode ser escrita, no mesmo caminho que encontramos a Eq. (1.12), na forma de uma integral funcional (forma contínua):

$$\int_{\phi_a(t=0)}^{\phi_b(t=t_1)} \mathcal{D}\phi \exp(iS), \quad (1.17)$$

onde

$$S = \int_0^{t_1} dt \int d^d x \mathcal{L}(\phi), \quad (1.18)$$

é a ação do sistema neste intervalo de tempo e \mathcal{L} é a densidade de Lagrangiana do sistema.

Podemos observar que as Eqs. (1.15) e (1.16) são semelhantes. Logo, como realizado na seção anterior, a função de partição pode ser escrita como uma integral funcional análoga a Eq. (1.14), no contexto da teoria quântica de campos. Para isso devemos fazer a substituição $\beta \rightarrow -it_1$ na Eq. (1.17) e obteremos a solução integrando sobre todos os estados iniciais e finais iguais, isto é integrando sobre todas as funções periódicas em it com período β . Diante disso, é de se esperar que a função de partição possa ser escrita da forma:

$$Z(\beta) = \int_{\text{Periódico}} \mathcal{D}\phi \exp(-S_E) \quad (1.19)$$

com

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^d x \mathcal{L}_E(\phi) \quad (1.20)$$

onde \mathcal{L}_E é a densidade de Lagrangiana Euclidiana. Note que fizemos, como na seção anterior, uma rotação de $t \rightarrow i\tau$ no plano complexo (uma rotação de Wick), tornando o

²No modelo padrão existe três tipos distintos de partículas: duas famílias de férmions de spin-1/2, chamados léptons e quarks, e uma família de bósons de spin-1, chamados de bósons de calibre, que atuam como os mediadores das interações na teoria. Além disso, tem uma partícula de spin-0, chamado de bóson de Higgs [65].

tempo imaginário, isto é, fazendo uma continuação analítica da ação e, posteriormente, das funções de Green do espaço de Minkowsky para o espaço Euclidiano. E o termo periódico utilizado na expressão dada pela Eq. (1.19) significa que a integração sobre os campos é restrita a $\phi(\vec{x}, 0) = \pm\phi(\vec{x}, \beta)$, onde o sinal positivo corresponde a campos bosônicos e o sinal negativo a campos fermiônico.

Essa característica pode ser observada das funções de Green térmica definida por:

$$G(x, y; \tau_1, \tau_2) = Z^{-1} Tr[\hat{\rho} T_\tau(\hat{\phi}(x, \tau_1)\hat{\phi}(y, \tau_2))], \quad (1.21)$$

onde T_τ é operador de ordenamento temporal imaginário, que atua como segue:

$$T_\tau[\hat{\phi}(x, \tau_1)\hat{\phi}(y, \tau_2)] = \hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2)\theta(\tau_1 - \tau_2) \pm \hat{\phi}(\tau_2)\hat{\phi}(\tau_1)\theta(\tau_2 - \tau_1) \quad (1.22)$$

onde θ é a função degrau e \pm representa com o sinal superior bósons enquanto que o sinal inferior trata de partículas fermiônicas. Usando o fato que T_τ comuta com $\hat{\rho} = e^{-\beta\hat{K}}$, onde $\hat{K} \equiv \hat{H} - \mu_i\hat{N}_i$, e as propriedades cíclicas do traço, encontramos que (o mesmo tratamento dado a determinar a condição KMS, na Eq. (1.5)),

$$G(x, y; \tau, 0) = \pm G(x, y; \tau, \beta). \quad (1.23)$$

Usamos as mesmas mudanças (representação de Heisenberg para os campos $\hat{\phi}$) para deduzir a relação dada pela Eq. (1.5). O resultado da Eq. (1.23) implica em $\phi(y, 0) = \pm\phi(y, \beta)$ (os sinais representam bósons e férmions como observamos antes), conseqüentemente é conveniente lidar com os campos no espaço dos momentos com uma transformada modulada por frequências determinadas devido a essas restrições de periodicidade nos campos. Neste caso, a expansão de Fourier é dada por:

$$\phi(x, \tau) = \sum_{n, \vec{p}} e^{i\omega_n \tau} \phi(\omega_n, \vec{p}), \quad (1.24)$$

não é mais uma integral contínua de Fourier, mas uma série de Fourier. Essa limitação, pode ser absolvida a partir de frequências discretas, tais como para bósons (periódica):

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (1.25)$$

e para férmions (antiperiódica³),

$$\omega_n = \frac{\pi(2n + 1)}{\beta}, \quad (1.26)$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ são os números inteiros. Essas frequências são chamadas de frequências de Matsubara [53].

³Essa periodicidade devido a aproximação de tempo imaginário é equivalente a teoria formulada em uma topologia compactificada $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$, onde \mathbb{S}^1 é uma circunferência de comprimento proporcional ao inverso da temperatura [66, 67].

Portanto, a integração sobre todas as componentes do momentos deve ser substituída por uma soma sobre as frequências de Matsubara. Mais especificamente, devemos usar:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(\omega_n, \vec{p}), \quad (1.27)$$

com $p_0 \rightarrow i\omega_n$ onde ω_n é dado pelas Eqs. (1.25) e (1.26), para bósons e férmions, respectivamente.

Em casos de campos de partículas livres a solução da Eq. (1.19) não passa de uma integral funcional Gaussiana do qual sabemos manipular. Entretanto, em sistemas acoplados podemos desenvolver cálculos perturbativos de forma análoga à teoria de campos à temperatura zero. Por exemplo, dada uma teoria de campos, interagindo fracamente, podemos deduzir os vértices a partir da forma euclidiana da Lagrangiana e usar os propagadores para executar um cálculo diagramático que fornece a média no ensemble para um dado observável, expandindo a função partição em série de potências. Neste sentido, só precisamos decompor a ação no seguinte caminho:

$$S_E = S_0 + S_I, \quad (1.28)$$

onde S_I é a parte devido a interação. A expansão em uma série de potências do termo de interação na Eq. (1.19), obtemos:

$$Z = N \int [d\phi] e^{S_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{S_I^l}{l!}, \quad (1.29)$$

tomando o logaritmo em ambos os lados temos,

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln \left(N \int [d\phi] e^{S_0} \right) + \ln \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\int [d\phi] e^{S_0} S_I^l}{\int [d\phi] e^{S_0}} \right) \\ &= \ln Z_0 + \ln Z_I. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Esta equação separa explicitamente a contribuição de interação de um gás ideal (como vamos observar no próximo capítulo). Na Ref. [1] encontramos as correções de ordem superiores para a função de partição para uma teoria $\lambda\phi^4$ e de uma simples teoria envolvendo férmions interagindo com um campo escalar (teoria de Yukawa). Também, na Ref. [62], destaco, que existe uma descrição da termodinâmica de campos interagentes (modelo de troca de mésons) através do funcional gerador como descrevemos nas linhas anteriores (similares daquelas interações que vamos descrever ao longo dos próximos dois capítulos). Para condições em que a expansão perturbativa não seja possível pode-se avaliar a função de partição a partir de uma rede finita do espaço-tempo usando técnicas de Monte Carlo.

Para uma leitura mais detalhada sobre a teoria quântica de campos a temperatura finita o leitor pode utilizar as Refs. [68, 69, 70] que elegantemente se desdobram em apresentar o tema de maneira especialmente pedagógica.

1.1.2.1 Formalismo de Matsubara Generalizado O formalismo de Matsubara desenvolvido na seção anterior (o tempo imaginário como uma dimensão compactificada) pode ser generalizado para incluir as coordenadas espaciais, também, no processo de compactificação [71, 72, 73, 74, 75, 76]. Essa ideia define uma teoria em uma topologia $\Gamma_D^\delta = (\mathbb{S}^1)^\delta \times \mathbb{R}^{D-\delta}$, com $1 \leq \delta \leq D$, onde \mathbb{S}^1 corresponde a compactificação do tempo e $\mathbb{S}^{1^2}, \dots, \mathbb{S}^{1^\delta}$ diz respeito a $\delta - 1$ compactificações espaciais. A característica desta estrutura topológica é que leva a modificações de condições de fronteira impostas aos campos e as funções de correlação, mas não modifica as equações de campo locais; isto é, a topologia desempenha um papel nas propriedades globais do sistema, mas não localmente, que estão associados aos invariantes das simetrias espaço-tempo [77, 78]. De modo que um ponto dado por $\mathbf{u} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_d, \vec{z})$, onde x_0 é a coordenada padrão para o tempo com $x_0 \in [0, \beta]$ e (x_1, x_2, \dots, x_d) corresponde as coordenadas espaciais compactificada com $x_i \in [0, L_i]$. A transformada de Fourier dual do vetor \mathbf{u} é um vetor de D dimensões no espaço dos momentos, $\mathbf{q} = (p_\tau, p_{x_1}, p_{x_2}, \dots, p_{x_d}, \vec{k})$. Também, temos um vetor \vec{z} em $(D - \delta)$ dimensões, com o momento correspondente \vec{k} , no espaço dos momentos em $(D - \delta)$ dimensões. Explicitamente, as regras de Feynman no espaço dos momentos são modificadas, para cada dimensão espacial compactificada também. Da mesma forma que a Eq. (1.27) temos:

$$\int \frac{dp_{x_i}}{2\pi} f(p_{x_i}) \rightarrow \frac{1}{L_i} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} f(\omega_{n_i}), \quad (1.31)$$

com $i = 1, \dots, \delta - 1$, onde existe uma troca do tipo,

$$p_{x_i} \rightarrow \omega_{n_i} = \frac{2\pi n_i}{L_i}, \quad (1.32)$$

para bósons, e

$$p_{x_i} \rightarrow \omega_{n_i} = \frac{\pi(2n_i + 1)}{L_i}, \quad (1.33)$$

para férmions, onde $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ são os números inteiros. E os ω_{n_i} são as frequências de Matsubara generalizadas.

De maneira geral, mais uma vez, a integração sobre todas as componentes dos momentos deve ser substituída por uma soma sobre as frequências de Matsubara generalizada. De modo que:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p) \rightarrow \frac{1}{\beta L_1 \dots L_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-\delta} p}{(2\pi)^{D-\delta}} f(\omega_n, \omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_d}, \vec{k}). \quad (1.34)$$

Portanto, as ideias desenvolvidas neste capítulo serão de grande utilidade nos próximos capítulos a fim de descrevermos o comportamento termodinâmico de sistemas relativísticos através do modelo de troca de mésons na aproximação de campo médio. Em especial, para obter informações sobre a estrutura de fases e mensurar as características apresentadas devido parâmetros tais como restrições de tamanho finito nesses sistemas.

GÁS DE BÓSONS

Nosso interesse neste capítulo é o estudo de um sistema relativístico com graus de liberdade bosônicos através do modelo de troca de mésons σ e ω , na aproximação de campo médio. Em especial, queremos compreender a dinâmica térmica através da estrutura de fases associados a efeitos do tamanho do sistema e/ou campo magnético uniforme externo e suas relações com a natureza do diagrama de fases [54, 55, 56, 57]. Por fim, associamos esse modelo a um sistema de mésons pesados interagindo com um meio hadrônico quente constituídos de mésons leves [28].

2.1 MODELO

Inicialmente, o modelo de troca de mésons foi desenvolvido por meio de campos de spin semi-inteiros (espinores tipo Dirac) para descrever a matéria nuclear densa (próximo capítulo). Por outro lado, esse modelo pode ser bastante simplificado se tratarmos os campos numa versão escalar. Como no caso espinorial tal sistema, também, dependerá do mesmo número de parâmetros, a saber: as massas dos campos e as constantes de acoplamento. O tratamento estrutural matemático é mais simples que o primeiro caso. A densidade de Lagrangiana efetiva¹ que descreve um sistema com campo escalar que pode ser associado a mésons de spin-0 interagindo com campos escalares que podem ser associados aos mésons escalar σ e vetorial ω ² é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^\dagger - M_\phi^2 \phi \phi^\dagger - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \\ & - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{a}{3!} \sigma^3 - \frac{b}{4!} \sigma^4 + g_{\phi\sigma} \phi \phi^\dagger \sigma + i g_{\phi\omega} \omega^\mu [\phi \partial_\mu \phi^\dagger - (\partial_\mu \phi) \phi^\dagger], \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde o tensor de campo é definido por $W_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ e M_ϕ , M_σ e M_ω são as massas do campo escalar ϕ , do campo σ e do campo ω , respectivamente. As constantes de acoplamento são: $g_{\phi\sigma}$ e $g_{\phi\omega}$, além das constantes de auto-interação³ cúbica e quártica

¹Essa densidade de Lagrangiana pode descrever também, a partir da teoria de perturbação, mésons pesados como foi feito na Ref. [79].

²No limite não relativístico as interações $\sigma - \psi\bar{\psi}$ e $\omega - \psi\bar{\psi}$ correspondem a parte atrativa e repulsiva (Para os ϕ e atrativa para os $\bar{\phi}$), respectivamente, ver seção 6.6 da Ref. [6].

³No contexto da matéria nuclear densa a presença dessas auto-interações na Lagrangiana combinado com os outros parâmetros da teoria encontram-se valores desejáveis da incompressibilidade nuclear por exemplo.

do campo σ , a e b , nesta ordem.

Aplicando o calibre de Lorentz $\partial_\lambda \omega^\lambda = 0$, as equações de movimento para os campos σ , ω e ϕ são, respectivamente,

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + M_\sigma^2 \sigma = g_{\phi\sigma} \phi \phi^\dagger - \frac{a}{2!} \sigma^2 - \frac{b}{3!} \sigma^3, \quad (2.2)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \omega^\nu + M_\omega^2 \omega^\nu = -i g_{\phi\omega} [\phi \partial^\nu \phi^\dagger - (\partial^\nu \phi) \phi^\dagger], \quad (2.3)$$

$$\partial'_\mu \partial'^\mu \phi + (M_\phi^2 - g_{\phi\sigma} \sigma + g_{\phi\omega}^2 \omega_\mu \omega^\mu) \phi = 0, \quad (2.4)$$

onde $\partial'_\mu = \partial_\mu + i g_{\phi\omega} \omega_\mu$. As Eqs. (2.2) e (2.3) são equações de campos massivos, tendo como fontes o campo ϕ . Já a Eq. (2.4) é do tipo Klein-Gordon para o campo ϕ , com o méson ω incluído no acoplamento mínimo.

Note que as Eqs. (2.2), (2.3) e (2.4) não têm soluções triviais, entretanto, podemos reduzir a uma descrição mais simples se considerarmos um sistema uniforme de mésons em uma caixa de volume V , ou seja, conforme a densidade aumenta o mesmo acontece com os termos fonte do lado direito das Eqs. (2.2) e (2.3) e quando as fontes são grandes, os campos de mésons (σ, ω) podem ser trocados por seus valores esperados, que são os campos clássicos [39]: $\sigma = \langle \sigma \rangle$ e $\omega = \langle \omega^0 \rangle$, com $\omega^\mu = 0$ para $\mu \neq 0$. Assim, a densidade de Lagrangiana dada na Eq. (2.1), torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - (M_\phi^2 - g_{\phi\sigma} \langle \sigma \rangle) \phi \phi^\dagger + \frac{1}{2} M_\omega^2 \langle \omega^0 \rangle^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 - \frac{a}{3!} \langle \sigma \rangle^3 - \frac{b}{4!} \langle \sigma \rangle^4 + \\ & + g_{\phi\omega} \langle \omega^0 \rangle \rho. \end{aligned} \quad (2.5)$$

E as Eqs. (2.2) e (2.3) ficam:

$$M_\sigma^2 \langle \sigma \rangle + \frac{a}{2!} \langle \sigma \rangle^2 + \frac{b}{3!} \langle \sigma \rangle^3 = g_{\phi\sigma} \rho_s, \quad (2.6)$$

e

$$\langle \omega^0 \rangle = -\frac{g_{\phi\omega}}{M_\omega^2} \rho, \quad (2.7)$$

onde $\rho_s = \phi \phi^\dagger$ é a densidade escalar e $\rho = i[(\partial_0 \phi) \phi^\dagger - \phi (\partial_0 \phi^\dagger)]$ é a densidade número. Evidentemente isso permite dizer que o aumento dos campos médios conduz um crescimento do condensado formado pelos campos escalares fundamentais.

Diante das considerações anteriores e a partir daquilo que foi discutido sobre o formalismo de tempo imaginário no capítulo anterior podemos construir um sistema térmico de interesse usando a densidade de Lagrangiana dada pela Eq. (2.5): um gás de bósons cujo aspectos fundamentais da interação são estudados via aproximação de campo médio. As correções de ordem superiores na função de partição são desconsideradas neste modelo⁴.

⁴O leitor pode verificar as mudanças que as correções de ordem superior engendram para a função de partição neste modelo na Ref. [1].

As modificações devido as interações são incorporadas na massa e no potencial químico como vamos observar logo abaixo. Assim, a grande função de partição tem a forma:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^{D^*} x (\mathcal{L}_E + \mu j_0) \right], \quad (2.8)$$

de modo que definimos uma topologia do tipo $\Gamma_D^\delta = \mathbb{S}^{1_1} \times \mathbb{R}^{D^*}$, onde $D^* = D - 1$, com \mathbb{S}^{1_1} correspondendo a compactificação do tempo: $\tau = [0, \beta]$. Sendo \mathcal{L}_E a densidade de Lagrangiana Euclidiana, μ o potencial químico que está associado com a corrente de Noether devido a invariancia da ação por meio da transformação global $U(1)$ ⁵ e $j_0 \propto -i\phi\partial_0\phi^\dagger$ é a corrente conservada. Diante disso, a Eq. (2.8), com a Lagrangiana dada na Eq. (2.5), fica na forma:

$$Z = C \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi e^{\mathcal{S}^B}, \quad (2.9)$$

onde \mathcal{S}^B é ação (com a substituição minimal na derivada temporal devido ao potencial químico) dada por:

$$\mathcal{S}^B = - \int_0^\beta d\tau \int d^{D^*} x \phi [(\partial_0 - \mu_*)^2 + \vec{\nabla}^2 + M_*^2] \phi^\dagger, \quad (2.10)$$

e a constante C é escrita na forma,

$$C = \exp \left[\beta V_{D^*} \left(\frac{1}{2} M_\omega^2 \langle \omega^0 \rangle^2 - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 - \frac{a}{3!} \langle \sigma \rangle^3 - \frac{b}{4!} \langle \sigma \rangle^4 \right) \right], \quad (2.11)$$

sendo V_{D^*} o hiper volume. Os termos M_* e μ_* na Eq. (2.10) são:

$$M_*^2 = M_\phi^2 - g_{\phi\sigma} \langle \sigma \rangle, \quad (2.12)$$

$$\mu_* = \mu - g_{\phi\omega} \langle \omega^0 \rangle, \quad (2.13)$$

a massa efetiva e potencial químico efetivo, respectivamente. Neste sentido, podemos interpretar que a massa e o potencial químico são efetivamente modificados devido as interações entre seus constituintes e o meio denso e quente que eles estão imersos: as interações atrativas se manifestam na massa efetiva enquanto que as interações repulsivas revelam-se no potencial químico efetivo.

Uma forma de encontrar a grande função de partição Eq. (2.9) é usando a periodicidade dos campos $\phi(\vec{x}, \tau)$ que de acordo com a prescrição de compactificação da variável temporal restringe o intervalo $0 < \tau < \beta$, assim, podemos expandir essas funções de campo em uma série de Fourier na forma:

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} + \omega_n\tau)} \phi_n(\vec{p}), \quad (2.14)$$

⁵Ver Ref. [1] seção 2.4 (Pag. 19): Condensação de Bose-Einstein.

onde $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ são as frequências de Matsubara para bósons com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, como tínhamos visto no capítulo anterior.

Se substituirmos a Eq. (2.14) na Eq. (2.10), efetuando todas as manipulações matemáticas necessárias, encontramos:

$$\mathcal{S}^B = -\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \phi_{n,\vec{p}} [(i\omega_n - \mu_*)^2 + \vec{p}^2 + M_*^2] \phi_{n,\vec{p}}^\dagger, \quad (2.15)$$

onde usamos a identidade:

$$\int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau} = \beta \delta_{nn'}. \quad (2.16)$$

Assim, encontramos na Eq. (2.9) uma integração em $\phi_n(\vec{p})$ e $\phi_n^\dagger(\vec{p})$ Gaussiana, de modo que podemos calcular ela exatamente, com a ajuda da expressão,

$$\int [d\varphi] e^{-(\varphi, \bar{D}\varphi)/2} = h(\det \bar{D})^{-1/2} \quad (2.17)$$

onde h é uma constante (não depende da temperatura ou de outra grandeza termodinâmica que afeta a dinâmica térmica). Em nosso sistema \bar{D} é similar ao termo dado na Eq. (2.15). Lembrando que $U = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ é o *grande potencial termodinâmico* [1], daí podemos obter⁶:

$$\frac{U(\beta, \mu_*)}{V_{D^*}} = U_{\sigma,\omega} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D^*} p}{(2\pi)^{D^*}} \ln[(\omega_n - \mu_*)^2 + p^2 + M_*^2]. \quad (2.18)$$

Daqui todas as quantidades termodinâmicas macroscópicas podem ser obtidas a partir da função partição, por exemplo: a pressão, o número de partículas, a entropia e a energia. Porém, a grandeza de maior interesse no decorrer deste capítulo e nos demais é o grande potencial termodinâmico. O termo $U_{\sigma,\omega}$ é dado por:

$$U_{\sigma,\omega} = -\frac{1}{2} M_\omega^2 \langle \omega^0 \rangle^2 + \frac{1}{2} M_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 + \frac{a}{3!} \langle \sigma \rangle^3 + \frac{b}{4!} \langle \sigma \rangle^4. \quad (2.19)$$

Iremos desenvolver um série de estudos devido a presença de restrições espaciais no modelo sob estudo, podemos realizar isso através de uma topologia mais geral discutida na última seção do capítulo anterior. Dessa forma, $\Gamma_D^\delta = \mathbb{S}^{1_1} \times \mathbb{S}^{1_2} \times \dots \times \mathbb{S}^{1_\delta} \times \mathbb{R}^{D-\delta}$, onde \mathbb{S}^{1_1} corresponde a compactificação do tempo e $\mathbb{S}^{1_2}, \dots, \mathbb{S}^{1_\delta}$ diz respeito a $\delta - 1$ compactificações espaciais. Logo, podemos escrever a Eq. (2.18) como:

$$\frac{U(\beta, \mu_*, \{L_i\})}{V_D} = U_{\sigma,\omega} - \frac{A_L}{2\beta} \sum_{n, \{n_i\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-\delta} p}{(2\pi)^{D-\delta}} \ln \left[(\omega_n - \mu_*)^2 + \sum_{i=1}^d \omega_{n_i}^2 + p^2 + M_*^2 \right], \quad (2.20)$$

⁶Para maiores detalhes sobre a integração da Eq. (2.9) para obter o grande potencial termodinâmico o leitor pode verificar a Ref. [80].

com $A_L = (L_1 \cdot \dots \cdot L_d)^{-1}$, V_D volume encerrado pelas partículas e $\{\omega_{n_i}\} \equiv \omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_d}$ as frequências de Matsubara para as respectivas compactificações de acordo com as ideias desenvolvidas no capítulo anterior.

Essa expressão para o grande potencial termodinâmico Eq. (2.20) pode ser reescrita de maneira a facilitar a manipulação matemática, deste modo:

$$\frac{U(\beta, \mu_*, \{L_i\})}{V_D} = U_{\sigma, \omega} - \frac{A_L}{2\beta} Y'(0) \quad (2.21)$$

onde usamos a seguinte definição para o último termo,

$$Y(s) = \sum_{n, \{n_i\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-\delta} p}{(2\pi)^{D-\delta}} \left[(\omega_n - \mu_*)^2 + \sum_{i=1}^d \omega_{n_i}^2 + p^2 + M_*^2 \right]^{-s}. \quad (2.22)$$

Essa integral pode ser resolvida realizando um procedimento de regularização dimensional (ver Eq. (B.1) no apêndice B), nestas condições obtemos,

$$Y(s) = J(s, \delta) E_\delta^{M_*^2} \left(s - \frac{D-\delta}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \dots, \frac{4\pi^2}{L_d^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi}, 0, \dots, 0 \right) \quad (2.23)$$

onde $\delta = d + 1$,

$$J(s, \delta) = \frac{1}{(4\pi)^{(D-\delta)/2}} \frac{\Gamma(s - \frac{D-\delta}{2})}{\Gamma(s)} \quad (2.24)$$

e $E_\delta^{M_*^2}$ é a função Zeta Epstein-Hurwitz não-homogênea [81], definida como

$$E_k^{c^2}(\nu; \{a_i\}, \{b_i\}) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} [a_1(n_1 - b_1) + \dots + a_k(n_k - b_k)^2 + c^2]^{-\nu}, \quad (2.25)$$

onde $\{a_i\} \equiv a_1, \dots, a_k$; $\{b_i\} \equiv b_1, \dots, b_k$ e $\{n_i\} \equiv n_1, \dots, n_k$. A função $E_k^{c^2}$ tem uma representação analítica, válida em todo plano complexo- ν , isso é mostrado no apêndice A.

De modo a obter a Eq. (2.21) devemos agora trabalhar a derivada da função $Y(s)$ com respeito a s , para $s \rightarrow 0$, a partir da estrutura matemática dada acima para as funções Zeta Epstein-Hurwitz não homogênea. Essa manipulação envolve a função Gamma, que tem um polo em $s = 0$, $\Gamma(s)$ tende a $1/s$ quando $s \rightarrow 0$, por outro lado temos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{G(s)}{\Gamma(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Gamma(s)} \frac{dG(s)}{ds} - \frac{G(s)}{\Gamma^2(s)} \frac{d\Gamma(s)}{ds} \right] = G(0). \quad (2.26)$$

Da Eq. (2.23) surgem dois termos devido o produto de $J(s, \delta)$ com a continuação analítica da soma $E_\delta^{M_*^2}$: o primeiro termo é divergente (ver apêndice B-Termo de vácuo) e o segundo termo se adequa a simplificação dada na Eq. (2.26). Logo, escrevemos a Eq. (2.21) na forma,

$$\frac{U(T, \mu, \{L_i\})}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v - \frac{1}{\pi^{D/2}} \bar{E}_\delta^{M_*^2} \left(-\frac{D-\delta}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \dots, \frac{4\pi^2}{L_d^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi}, \{0\} \right), \quad (2.27)$$

onde $\{L_i\} \equiv L_1, L_2, \dots, L_d$, U_v é o termo de vácuo⁷, que foi obtido no apêndice B, e o último termo, $\bar{E}_\delta^{M_*^2}$, é todos os termos da função Zeta Epstein-Hurwitz exceto o primeiro⁸ (lado direito).

A forma mais simples do grande potencial termodinâmico seria um sistema sem dimensões espaciais compactificadas (Bulk). E neste caso $\delta = 1$ representa uma topologia do tipo: $\Gamma_D^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$. Diante dessa estrutura, temos $\bar{E}_1^{M_*^2} \left(-\frac{D-1}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} \right)$, com uso da igualdade $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$, encontramos:

$$\frac{U(T, \mu_*)}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v - \frac{1}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}}(n\beta M_*), \quad (2.28)$$

onde K_ν é a função de Bessel modificada de ordem $D/2$.

Minimizando o grande potencial termodinâmico com respeito aos campos médios σ e ω obtemos as informações sobre a dinâmica térmica do sistema (equações de estado). Isto é feito resolvendo numericamente as equações de estado:

$$\frac{\partial U}{\partial \langle \sigma \rangle} = 0 \quad (2.29)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial \langle \omega^0 \rangle} = 0. \quad (2.30)$$

Esse processo produz equações da mesma natureza que as Eqs. (2.6) e (2.7). De modo que encontramos as seguintes relações para densidade escalar e a densidade número,

$$\rho_s = \frac{g_{\phi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(n\beta M_*), \quad (2.31)$$

e

$$\rho = \frac{g_{\phi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (n\beta) \sinh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}}(n\beta M_*), \quad (2.32)$$

respectivamente. Assim, temos um sistema de duas equações acopladas em σ e ω , que devem ser resolvidas autoconsistentemente. No entanto, quando considerado o mesmo número de bósons e antibósons, ou seja, $\mu_* = 0$, situação de equilíbrio químico, podemos notar que ρ se anula, e pela Eq. (2.7), temos $\langle \omega^0 \rangle = 0$. Portanto, a solução do sistema de equações se reduz a apenas uma equação de estado em função de σ apenas, Eq. (2.31).

⁷Não vamos utilizar esse termo para obter os diagramas de fase, no último apêndice indicamos uma referência que trata de seu uso em modelos de aproximação de campo médio tal qual este descrito no capítulo.

⁸Lembrando que o termo $\frac{A_L}{2\beta}$ é absorvido pelos termos que aparecem multiplicando todos os termos na forma analítica da função Zeta Epstein-Hurwitz não homogênea.

Agora, podemos derivar outras quantidades termodinâmicas relevantes por meio do grande potencial termodinâmico dado pela Eq. (3.25). Por exemplo, a pressão é dada por:

$$\begin{aligned} p(T, \mu_*) &\equiv -\frac{\partial U}{\partial V_D} \\ &= -U_{\sigma, \omega} - U_v + \frac{1}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta}\right)^{D/2} K_{D/2}(n\beta M_*). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto, os valores de $\langle \sigma \rangle$ e $\langle \omega^0 \rangle$ que extremiza a pressão deve também satisfazer as Eqs. (2.6) e (2.7) através das Eqs. (2.31) e (2.32). Nota-se também que o último termo dessa expressão diz respeito a pressão de um Gás de Bose-Einstein [1] em função da massa efetiva e do potencial químico efetivo definidos nas Eqs. (2.12) e (2.13), respectivamente.

Além disso, a entropia e a densidade de energia em equilíbrio químico são dadas pelas expressões,

$$\begin{aligned} s(T) &\equiv \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\mu_*=0} \\ &= \frac{1}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_*}{n}\right)^{\frac{D}{2}} n M_* K_{\frac{D}{2}+1}(n\beta M_*), \end{aligned} \quad (2.34)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(T) &\equiv (-p + Ts)_{\mu_*=0} \\ &= \frac{1}{2} M_\sigma \langle \sigma \rangle^2 + \frac{1}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_*}{n\beta}\right)^{\frac{D}{2}} \left[3K_{\frac{D}{2}}(n\beta M_*) + n\beta M_* K_{\frac{D}{2}-1}(n\beta M_*) \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

respectivamente.

2.1.1 Sistema com Dimensões Espaciais Compactificadas

O estudo de sistemas relativísticos confinados a uma determinada geometria não é um desenvolvimento apenas do campo teórico. Observar os efeitos de tamanho e da geometria pode mostrar mudanças quantitativas e qualitativas sob certas características de um determinado sistema físico. Efeitos de tamanho finito por exemplo, em transições de fases é esperado desempenhar um papel importante em diversas áreas da física [82]. Do ponto de vista cosmológico, para o universo primordial, que tem um pequeno volume [83] esses estudos são extremamente necessários. A avaliação desses parâmetros é também usada como uma eficiente extrapolação para simulações numéricas tipo Monte Carlo limitado a amostras bastante pequenas [84, 85].

Nesse sentido, vamos ampliar o estudo termodinâmico discutido nas linhas que antecedem esta seção para implementar os parâmetros relacionados as fronteiras colocadas a partir de uma escolha, a priori, da geometria do sistema aquecido. Devemos assim, utilizar todo o processo sistemático discutido no final do capítulo anterior.

2.1.1.1 Uma Dimensão Espacial Compactificada Inicialmente vamos considerar uma topologia que reproduz a ideia de uma dimensão espacial compactificada $d = 1$, simbolicamente temos: $\Gamma_D^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D-2}$. Da Eq. (2.18) seguindo o mesmo roteiro para obter a Eq. (2.27), através da prescrição de Matsubara generalizada, o grande potencial termodinâmico, torna-se

$$\frac{U(T, \mu, L_1)}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v - \frac{1}{\pi^{D/2}} \bar{E}_2^{M_*^2} \left(-\frac{D-2}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi}, 0 \right). \quad (2.36)$$

E os termos $U_{\sigma, \omega}$ e U_v são dados pelas Eqs. (2.19) e (B.10), respectivamente.

Dessa expressão para o grande potencial termodinâmico devemos encontrar as equações de estado através das Eqs. (2.29) e (2.30) para os campos σ e ω . Diante disso, para topologia dada obtemos a densidade escalar e a densidade número,

$$\rho_s = \frac{g_{\phi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \bar{E}_2^{M_*^2} \left(-\frac{D-2}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi}, 0 \right), \quad (2.37)$$

e

$$\rho = \frac{g_{\phi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n\beta \sinh(n\mu_*\beta) X_{\beta L}^n, \quad (2.38)$$

respectivamente, onde a função $\bar{E}_k^{M_*^2}$ representa a função $\bar{E}_k^{M_*^2}$ com a redução das potências e da ordem das funções de Bessel em uma unidade, na forma:

$$(x/y)^\nu K_\nu(xy) \rightarrow (x/y)^{\nu-1} K_{\nu-1}(xy),$$

e

$$\begin{aligned} X_{\beta L}^n &= \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}}(n\beta M_*) + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{M_*}{\sqrt{n^2\beta^2 + n_j^2 L_j^2}} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2\beta^2 + n_j^2 L_j^2} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Usamos $\alpha = 1$ na Eq. (2.39) para adicionarmos na Eq. (2.38). As densidades se relacionam com os campos de mésons por meio das Eqs. (2.6) e (2.7). Adicionalmente, as equações acopladas ganham um novo parâmetro: o tamanho do sistema L . Continuamos com $\langle \omega^0 \rangle = 0$ quando $\mu_* = 0$, neste caso, apenas com a contribuição do campo σ para o estudo termodinâmico.

2.1.1.2 Duas Dimensões Espaciais Compactificadas Nesse caso temos uma topologia com a seguinte estrutura, $\Gamma_D^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D-3}$, sendo $d = 2$. Deste

modo, executando o mesmo processo para encontrar a Eq. (2.36), o grande potencial termodinâmico, torna-se

$$\frac{U(T, \mu, L_1, L_2)}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v - \frac{1}{\pi^{D/2}} \bar{E}_3^{M_*} \left(-\frac{D-3}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi}, 0, 0 \right). \quad (2.40)$$

Também encontramos as equações de estado através das Eqs. (2.29) e (2.30) para os campos σ e ω . Desse modo, realizadas as devidas manipulações matemáticas, chegamos as densidades escalar e número,

$$\rho_s = \frac{g_{\phi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \bar{E}_3^{M_*} \left(-\frac{D-3}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi}, 0, 0 \right), \quad (2.41)$$

e

$$\rho = \frac{g_{\phi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n \beta \sinh(n\mu_* \beta) X_{\beta LL}^n, \quad (2.42)$$

respectivamente. Onde definimos a função $X_{\beta LL}^n$ como,

$$\begin{aligned} X_{\beta LL}^n &= X_{\beta L}^n + \\ &+ 2^2 \sum_{i < j=1}^{\lambda} \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \left(\frac{M_*}{\sqrt{n^2 \beta^2 + n_i^2 L_i^2 + n_j^2 L_j^2}} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2 \beta^2 + n_i^2 L_i^2 + n_j^2 L_j^2} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

com $X_{\beta L}^n$ dado na Eq. (2.39) com $\alpha = 2$ e no caso de interesse $\lambda = 2$. Ademais, as equações acopladas ganham dois novos parâmetros: o tamanho finito de duas coordenadas L_1 e L_2 . Para $\mu_* = 0$, o campo mesônico vetorial leve não contribui para o sistema térmico: $\langle \omega^0 \rangle = 0$.

2.1.1.3 Três Dimensões Espaciais Compactificadas Finalmente, encontramos as funções termodinâmicas de interesse com topologia, $\Gamma_D^4 = \mathbb{S}^{1_1} \times \mathbb{S}^{1_2} \times \mathbb{S}^{1_3} \times \mathbb{S}^{1_4} \times \mathbb{R}^{D-4}$, em que $d = 3$. Então, procedimento similar para obter a Eq. (2.36), o grande potencial termodinâmico, torna-se

$$\begin{aligned} \frac{U(T, \mu, L_1, L_2, L_3)}{V_D} &= U_{\sigma, \omega} + U_v - \\ &- \frac{1}{\pi^{D/2}} \bar{E}_4^{M_*} \left(-\frac{D-4}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}, \frac{4\pi^2}{L_3^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi}, 0, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Da mesma forma que as realizações anteriores as equações de estado são encontradas através da Eq. (2.29) e (2.30) para os campos σ e ω que por meio das densidades escalar

e número,

$$\rho_s = \frac{g_{\phi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \bar{E}_4^{M_*} \left(-\frac{D-4}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}, \frac{4\pi^2}{L_3^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi}, 0, 0, 0 \right), \quad (2.45)$$

e

$$\rho = \frac{g_{\phi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n\beta \sinh(n\mu_*\beta) X_{\beta LLL}^n, \quad (2.46)$$

respectivamente. Do qual usamos a seguinte definição para a função $X_{\beta LLL}^n$:

$$\begin{aligned} X_{\beta LLL}^n &= X_{\beta L}^n + X_{\beta LL}^n + \\ &+ 2^3 \sum_{\{n_j\}=1}^{\infty} \left(\frac{M_*}{\sqrt{n^2\beta^2 + \sum_{j=1}^3 n_j^2 L_j^2}} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2\beta^2 + \sum_{j=1}^3 n_j^2 L_j^2} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

chegamos a duas Equações acopladas em $\langle\sigma\rangle$ e $\langle\omega^0\rangle$. Neste caso, a geometria adequa-se a parametrização $\alpha = 3$ na Eq. (2.39) e $\lambda = 3$ na Eq. (2.43). Em resumo, aqui as equações acopladas ganham três novos parâmetros: o tamanho finito de três coordenadas L_1 , L_2 e L_3 . Da mesma forma que os casos anteriores o campo ω não contribui para as grandezas termodinâmicas quando o número de bósons e antibósons são iguais ($\mu_* = 0$).

2.1.2 Temperatura em $M_* \approx 0$

Da Eq. (2.12) podemos observar que quando o campo σ atingir seu valor máximo a massa efetiva desaparece. Na presente abordagem, consideramos o simples caso em que a e b (as interações cúbica e quárticas) e o campo $\omega = 0$ (equilíbrio químico) não contribuem para grande potencial termodinâmico, num cenário em que o sistema se encontra no bulk tendo como grandezas fundamentais as Eqs. (2.28) e (2.31), que representam o grande potencial termodinâmico e a equação de estado, respectivamente. Assim, devemos avaliar o comportamento da massa efetiva desaparecendo através das Eqs. (2.31) e (2.6). Tomando a expansão assintótica para valores pequenos das funções de Bessel [86],

$$K_\nu(z) \approx \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} \quad (z \approx 0; \text{Re}(\nu) > 0), \quad (2.48)$$

obtemos,

$$T^{D-2} = \frac{DM_\phi^2 M_\sigma^2}{g_{\phi\sigma}^2 h(D)}, \quad (2.49)$$

onde $h(D) = \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \zeta(D-2)/\pi^{D/2}$ e $\zeta(s)$ é a função de Zeta Riemann. Para $D = 3$ a função Zeta em $h(D)$ tem um pólo e um procedimento de subtração é necessário, isso pode ser feito através da expansão de Laurent de $\zeta(s)$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma - \gamma_1(s-1) + \dots, \quad (2.50)$$

onde $\gamma \approx 0.577$ e $\gamma_1 \approx 0.0728$ são as constantes de Euler-Mascheroni e a primeira Stieltjes, respectivamente.

Quando escolhemos um espaço-tempo de dimensão $D = 4$ (Euclidiano), que será tratado a partir daqui como a dimensão espaço-temporal de todos os resultados que serão obtidos logo abaixo, encontramos:

$$T_{D=4} = \sqrt{12} \frac{M_\phi M_\sigma}{g_{\phi\sigma}}. \quad (2.51)$$

Como vamos observar nas próximas seções esse valor corresponde analiticamente com os resultados obtidos numericamente do sistema sem a presença de parâmetros externos.

Diferentemente daqui, na próxima seção vamos estudar com mais detalhes o comportamento termodinâmico da massa efetiva em todo intervalo que a Eq. (2.31) permite uma solução não-trivial para o campo $\langle\sigma\rangle$ e diante dela as principais características que surgem no contexto do diagrama de fases do modelo em questão.

2.1.3 Linha Crítica da Teoria de Campo Médio

No contexto de $\langle\sigma\rangle = 0$ o sistema exhibe uma simples fase, correspondendo a um gás livre (ver Ref. [27]). De modo que as características mais significativas do sistema com fase única é o comportamento suave e contínuo das funções termodinâmicas. Entretanto, a presença dos termos de interações atrativas e repulsivas no sistema $g_{\phi\sigma}\langle\sigma\rangle$ e $g_{\phi\omega}\langle\omega^0\rangle$ produz correções na massa e no potencial químico, respectivamente, dos bósons, diante disso o sistema experimenta uma transição de fase governado pelos parâmetros associados ao campo bosônico fundamental e os campos σ e ω .

Neste sentido, devemos especular sobre a natureza da transição de fase que norteia o sistema a partir da solução da Eq. (2.31) introduzida na Eq. (2.6) através da relação dada na Eq. (2.12) que determina a massa efetiva. Então, é possível compreender essa estrutura de fases com um estudo matemático dessas equações. Por simplificação, façamos um estudo a priori do caso em que o sistema não tem restrições de fronteira: $\delta = 1$, o espaço-tempo Euclidiano ($D = 4$), em equilíbrio químico e sem considerar as auto-interações cúbica e quártica. Numericamente observamos que existe um intervalo de temperatura que a massa efetiva tem dois valores para uma determinada temperatura, deste modo a densidade de energia dada na Eq. (2.35) nesta região terá também valor duplo [27]. Esse comportamento indica uma transição de fase.

A curva da derivada da massa efetiva (como realizado na Ref. [32]) permite encontrar pólos que conectam pontos da trajetória da massa efetiva a evitar regiões de instabilidade física (uma construção similar à de Maxwell para descrever a transição de fase líquido-gás: condensação de van der Waals [63]). Assim, podemos caracterizar a transição de fase por meio do número de intersecções entre a curva da derivada e a linha que determina a massa

efetiva⁹: um ponto comum designa uma transição de fase de segunda ordem e para dois pontos a transição é de primeira ordem. Desse modo, escrevemos:

$$\frac{dM_*}{dT} = \frac{\frac{C_S^2 M_*^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1\left(\frac{nM_*}{T}\right)}{-M_* - M_\phi^2 + \frac{C_S^2 M_*}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_0\left(\frac{nM_*}{T}\right) + K_2\left(\frac{nM_*}{T}\right) \right]}, \quad (2.52)$$

onde $C_S^2 = g_{\phi\sigma}^2/M_\sigma^2$. Essa expressão tem pólos devido ao fato do denominador desaparecer para um conjunto de pontos do tipo: $\{M_*, T\}$. Então, podemos determiná-los resolvendo a equação abaixo (Denominador da Eq. (2.52)):

$$M_* + M_\phi^2 - \frac{C_S^2 M_*}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_0\left(\frac{nM_*}{T}\right) + K_2\left(\frac{nM_*}{T}\right) \right] = 0. \quad (2.53)$$

Logo, o estudo numérico dessa equação e a curva da massa efetiva conduz aos seguintes resultados:

1. Para $C_S^2 \ll 1.0$ a linha representando a Eq. (2.53) produz apenas um ponto de intersecção com a Eq. (2.31) assim temos uma transição de fase de segunda ordem¹⁰.
2. Para $C_S^2 > 1.0$ a linha que é solução da Eq. (2.53) tem dois pontos de intersecção com a solução da equação de auto-consistência e isso determina uma transição de fase de primeira ordem.

Seguindo essas prescrições, baseado nas ideias desenvolvidas no primeiro capítulo desta tese e diante das grandezas termodinâmicas construídas nas seções anteriores, vamos mostrar ao longo das linhas abaixo as sensibilidades que cada natureza de fase experimenta quando novos parâmetros aparecem no sistema, tais como: tamanho das dimensões espaciais do sistema e a presença de um campo magnético uniforme externo. Além disso, é natural compreender de que maneira esses resultados são importantes para descrever alguns fenômenos físicos de interesse: como um gás de mésons charmosos.

2.2 ESTRUTURA DE FASES

Nas seções anteriores introduzimos a estrutura teórica e as características do comportamento termodinâmico dos bósons na presença de um meio constituído de mésons leves. A partir daqui vamos utilizar apenas a dimensão Euclidiana ($D = 4$). Em especial, vamos considerar o caso em que o sistema está em equilíbrio químico, $\mu_* = 0$, neste ω não contribui para as quantidades termodinâmicas de acordo com a descrição dada na seção 2.1.3. Portanto, focamos em resolver a equação de estado para encontrar $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle(T, L)$.

⁹Formalmente podemos denominar a massa efetiva como o parâmetro de ordem que governa a transição de fase desse sistema da mesma forma que a magnetização faz num sistema ferromagnético.

¹⁰Podemos imaginar a obtenção dos expoentes críticos que governam essas transições através de modelos de leis de potências para regiões próximas do ponto de transição.

Por conveniência, todas as quantidades físicas estão escalonadas através da massa do campo dos bósons ϕ , M_ϕ ,

$$\frac{U}{M_\phi^4} \rightarrow U, \quad \frac{T}{M_\phi} \rightarrow T, \quad \frac{\mu}{M_\phi} \rightarrow \mu, \quad \frac{\sigma}{M_\phi} \rightarrow \sigma, \quad \frac{M_\sigma}{M_\phi} \rightarrow M_\sigma, \quad \frac{M_*}{M_\phi} \rightarrow M_*, \quad LM_\phi \rightarrow L. \quad (2.54)$$

Além disso, os gráficos do grande potencial termodinâmico será dado através da normalização em relação ao estado de referência $U(M_* = 0) = 0$:

$$\frac{\bar{U}(M_*, T, L)}{V} = \frac{1}{V}[U(M_*, T, L) - U(M_* = 0, T, L)]. \quad (2.55)$$

A discussão sobre a estrutura de fases do presente modelo é acompanhado por meio das mudanças dos parâmetros relevantes, atento à influência das dimensões espaciais compactificadas nas fases descritas na seção acima 2.1.3. Neste sentido, as transições de fase são analisadas e comparadas com as diversas situações encontradas na literatura. Escolhemos o cenário mais simples para obter os resultados: com comprimento de todas as dimensões compactificadas sendo o mesmo, isto é, $L_i \equiv L$. Isso reduz o sistema em $d = 1, 2, 3$: confinado em dois planos paralelos a uma distância L entre eles; confinado em um tubo infinitamente longo tendo uma seção transversal quadrada de área L^2 ; e uma caixa cúbica de volume L^3 .

2.2.1 Sistema sem Fronteiras Espaciais

Iniciamos nossa descrição com a situação mais simples para a estrutura de fase deste modelo relativístico, o sistema sem a presença de fronteiras ($L \rightarrow \infty$) e sem levarmos em consideração as auto-interações (cúbica e quártica). Neste caso não nos preocuparemos com a forma e as dimensões do sistema.

Na Fig. 2.1, plotamos o gráfico do $\langle \sigma \rangle$, que é solução da Eq. (2.6), usando a Eq. (2.31), como uma função da temperatura, para três valores diferentes da massa do campo σ , M_σ : 0.1, 0.25 e 0.5, em equilíbrio químico, para $g_{\phi\sigma} = 1.0$. Notamos que $\langle \sigma \rangle$ não existe para temperaturas acima de $T \approx 0.47, 0.96$ e 1.79 , para $M_\sigma = 0.1, 0.25$ e 0.5 , respectivamente. Além disso, $\langle \sigma \rangle$ tem um valor máximo em $T \equiv T_D \approx 0.34, 0.87$ e 1.76 , para os três casos mencionados acima. Esse valor extremo determina o valor crítico T_D que a massa efetiva vai a zero. Observe que essa temperatura pode ser obtida analiticamente na seção 2.1.2 a partir da Eq. (2.51).

Podemos observar, da Eq. (2.6), que a densidade escalar, que aparece como uma fonte para o campo $\langle \sigma \rangle$, aumenta quando a temperatura aumenta, em acordo com os resultados apresentados na Fig. 2.1. Desde que esses mésons escalares descrevam as interações atrativas entre os bósons, estes serão mais fortemente ligados, e assim a massa efetiva diminuirá do mesmo modo que acontece com os nucleons descritos por meio da aproximação de campo médio apresentado na Ref. [32]. No contexto da matéria nuclear densa

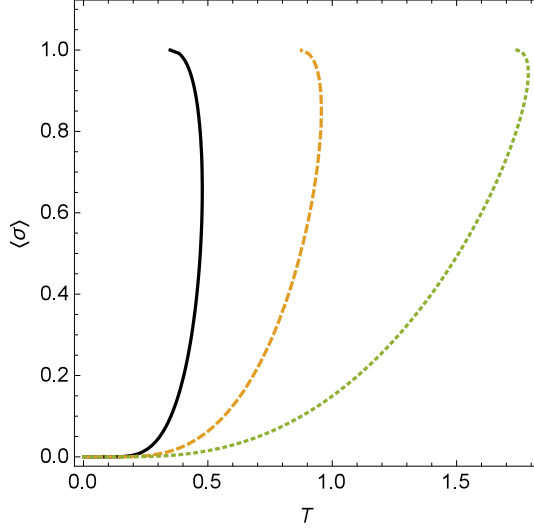


Figura 2.1: Gráfico de $\langle \sigma \rangle$, solução da Eq. (2.31), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $M_\sigma = 0.1, 0.25$ e 0.5 , respectivamente. Fixamos $g_{\phi\sigma} = 1.0$.

essa ideia possibilita o estudo da condensação de Kaons e Antikaons [87]. Essa descrição da condensação de mésons leves desempenham um papel importante nas propriedades da região mais central de estrelas compactas [88].

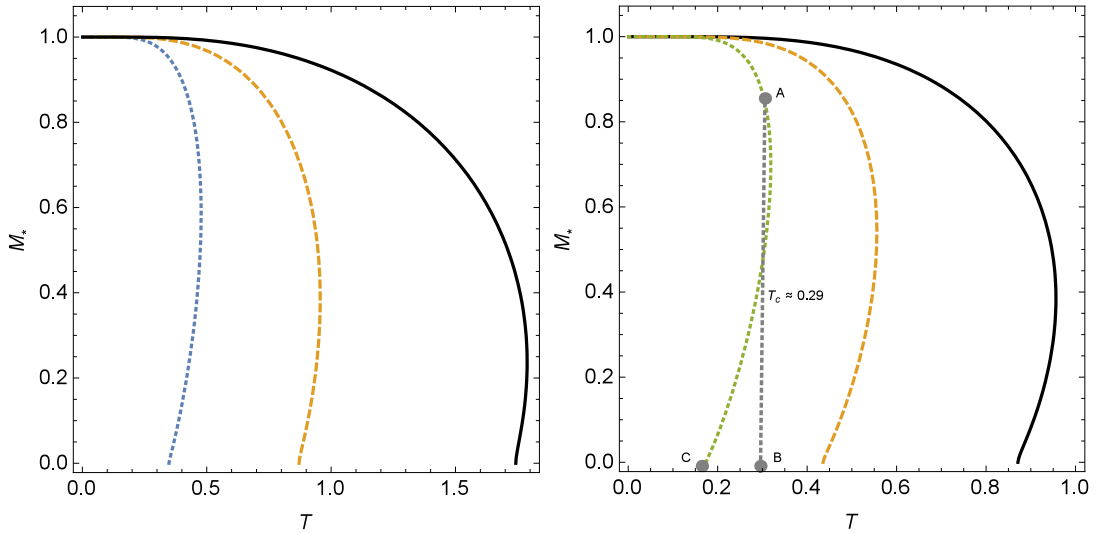


Figura 2.2: Gráfico da massa efetiva Eq. (2.12), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico. No plano esquerdo: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $M_\sigma = 0.1, 0.25$ e 0.5 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 1.0$. No plano direita: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $g_{\phi\sigma} = 1.0, 2.0$ e 5.0 , respectivamente, onde fixamos $M_\sigma = 0.25$.

Dessas considerações que foram feitas sobre o campo escalar $\langle \sigma \rangle$ permite-nos estudar o comportamento da massa efetiva do campo ϕ no meio hadrônico contendo um tipo de

méson escalar leve. Assim, plotamos no plano direito da Fig. 2.2 os valores para a M_* que são soluções da Eq. (2.31) como função de temperatura, para diferentes valores da massa do campo σ . Podemos observar que a massa efetiva é reduzida quando a temperatura aumenta, e uma transição de um gás interagente para uma matéria fortemente interagente aparece em temperatura T_c (similar a uma transição líquido-gás). Esse tipo de transição de fase é comum em sistemas que contém matéria hadrônica leve como por exemplo os píons [89, 90, 91]. A matéria nuclear experimenta uma transição de fase do tipo líquido-gás e seu ponto crítico foi medido em diversos experimentos [92].

Mostramos na Fig. 2.2 (lado direito) um esboço figurativo na curva pontilhada para representar como a transição de fase acontece, descontinuamente, caindo abruptamente através do segmento \overline{AB} (a trajetória \widehat{AC} da M_* é dita não-física como foi discutido na seção 2.1.3). Esse recorte permite melhor entender os resultados do grande potencial termodinâmico, como vamos ver logo abaixo. As curvas apresentadas na Fig. 2.2 tem o mesmo comportamento que a matéria de píons usando o modelo sigma linear [93]. Além disso, esse resultado é similar a matéria nucleon-anti-nucleon [32], que vamos discutir no próximo capítulo, e a um sistema fermiônico descrito no modelo σ quiral com simetria $SU(2) \times SU(2)$ [94].

Ainda sobre a Fig. 2.2 no plano direito, plotamos a massa efetiva como uma função da temperatura tomando diferentes valores da constante de acoplamento $g_{\phi\sigma}$. Observamos que a temperatura crítica decresce quando $g_{\phi\sigma}$ aumenta, de acordo com a redução de T_D (ponto C, uma breve ilustração do que pode acontecer com o sistema), discutido anteriormente. Por exemplo, com $g_{\phi\sigma} = 2.0$ e 5.0 na Eq. (2.51) obtemos $T_D \approx 0.43$ e 0.17 , nesta ordem. Esse fato explicita o papel desempenhado pelo campo σ em ligar os bósons ϕ ; o aumento da magnitude das interações entre os campos σ e ϕ permite o sistema experimentar uma transição de fase em baixas temperaturas.

No intuito de compreender melhor o processo termodinâmico desse sistema, na Fig. 2.3 plotamos a densidade do grande potencial termodinâmico $U(T, \mu_* = 0)/V$, Eq. (2.28), normalizado pela Eq. (2.55), como uma função da massa efetiva para $g_{\phi\sigma} = 2.0$ e 5.0 , respectivamente, e $M_\sigma = 0.25$. Como sugerido nas figuras anteriores¹¹, observamos uma transição de fase de primeira ordem ocorrendo em $T_0 \approx 0.54$, quando a massa efetiva adquire um valor $\Delta M_* \approx 0.71$ no caso em que $g_{\phi\sigma} = 2.0$. Para $g_{\phi\sigma} = 5.0$, uma transição

¹¹A forma do grande potencial termodinâmico confirma que uma transição de fase de primeira ordem aparece, uma vez que exibe dois mínimos degenerados em uma temperatura T_0 (o parâmetro de ordem, a massa efetiva, é descontínua neste ponto, como é mostrado na Fig. 2.2). Em outras palavras, em $T = T_0$ existem duas fases em equilíbrio uma com a outra, uma com $M_* = 0$ e a outra com $M_* = \Delta M_*$. Observe na Fig. 2.3 que $M_* = 0$ é estável quando $T > T_0$ e metaestável quando $T < T_0$. Uma discussão sobre transições de fase de primeira ordem e mais detalhes sobre como essas transições ocorrem podem ser encontrados nas Refs. [95, 96].

de fase descontínua ocorre em $T_0 \approx 0.29$, quando a massa chega ao valor de $\Delta M_* \approx 0.91$. Assim, podemos destacar que a transição de fase de primeira ordem ocorre em baixas temperaturas quando o valor da constante de acoplamento $g_{\phi\sigma}$ aumenta.

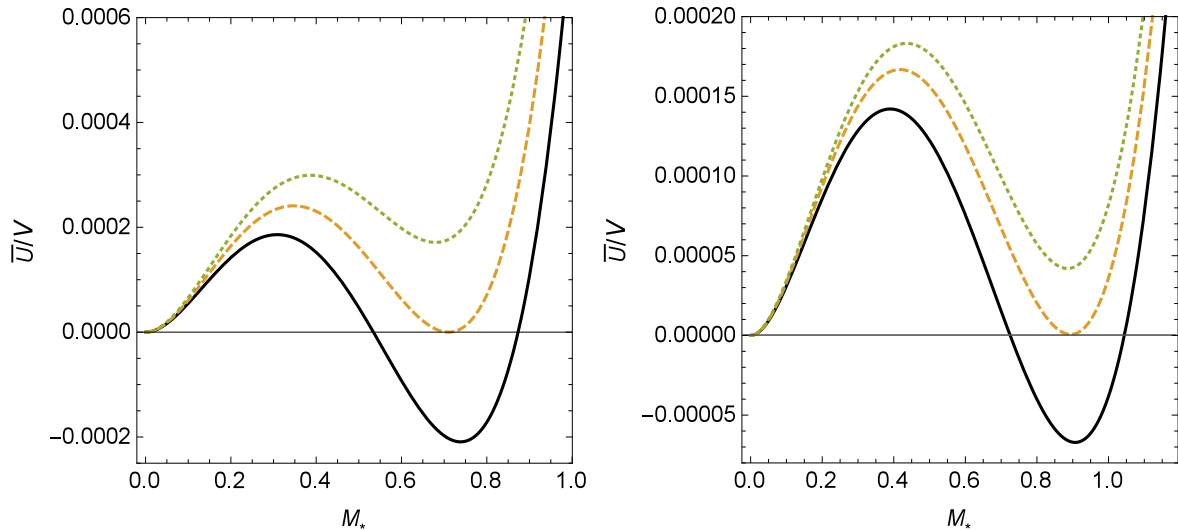


Figura 2.3: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.28), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$. No plano da esquerda: usamos $g_{\phi\sigma} = 2.0$, com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $T = 0.532$, 0.539 e 0.545 , respectivamente. No plano da direita: fixamos $g_{\phi\sigma} = 5.0$, com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando, $T = 0.285$, 0.292 e 0.295 , na mesma ordem.

Na seção denominada linha crítica havíamos mostrado dois cenários para a natureza da transição de fase que o modelo de troca de mésons pode vislumbrar. Os resultados anteriores mostram uma transição de fase de primeira ordem: $(g_{\phi\sigma}/M_\sigma)^2 \gg 1$, ratificando o que foi dito por lá. Por outro lado, um resultado contrário a esse, $0 < (g_{\phi\sigma}/M_\sigma)^2 \ll 1$, exibe uma transição de fase de segunda ordem¹², o parâmetro de ordem, a massa efetiva, decresce suavemente até se anular. Não vamos nos prolongar em discutir esse último resultado.

Na próxima Fig. 2.4 mostramos um detalhe interessante que ocorre quando as auto-interações cúbica e quártica são levadas em consideração. No plano esquerdo exibimos o comportamento da massa efetiva dos bósons para diferentes valores do acoplamento quártico, $b = 0.2$, 0.1 e 0.001 , matendo fixo $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\phi\sigma} = 1.0$. Notamos que quando o valor da magnitude da auto-interação quártica aumenta a temperatura de transição de fase também aumenta. A presença dessas auto-interações, de acordo com nossa interpretação acima, diminui a ligação entre os bósons fundamentais ϕ aumentando assim a temperatura crítica. No plano direito plotamos a massa efetiva também para diferentes

¹²Uma transição de fase de segunda ordem o parâmetro de ordem desaparece continuamente no valor de temperatura crítica T_0 . Em tais casos nunca pode existir fases coexistindo, nem metaestabilidade.

valores do parâmetro de auto-interação quártica $b = 0.1, 0.01$ e 0.001 , com $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\phi\sigma} = 5.0$. Importante observar que em ambos os casos a massa efetiva vai diminuindo mais suavemente com o aumento da temperatura quando o auto-acoplamento quártico vai aumentando (ponto A). Existe um valor da interação quártica que a transição não descrece descontinuamente mas de maneira contínua. Para valores de $a \neq 0$ a curva da massa efetiva se comporta similarmente, embora que em alguns casos existem soluções negativas para $\langle\sigma\rangle$ e assim $M_* > 1.0$, não discutiremos este resultado por aqui. Entretanto, na Ref. [97] encontramos uma boa discussão sobre esses resultados para descrever o chamado plasma de nucleon-anti-nucleon.

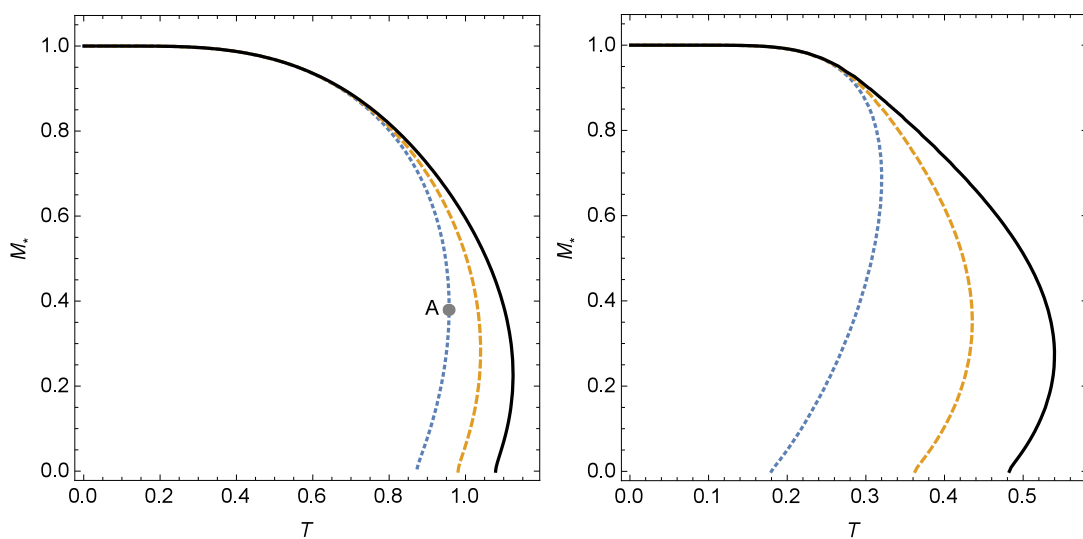


Figura 2.4: Gráfico da massa efetiva Eq. (2.12), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $a = 0$ e $b \neq 0$, para $M_\sigma = 0.25$. No plano da esquerda: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $b = 0.2, 0.1$ e 0.001 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 1.0$. No plano da direita: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $b = 0.1, 0.01$ e 0.001 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 5.0$.

A mudança na massa efetiva de hádrons devido as interações destes com um meio denso e quente pode ser importante no cenário das interações fortes para compreender as propriedades de mésons charmosos. A razão esperada para que as massas desses mésons se modifiquem é que D e \bar{D} contém os quarks leves (u, d) ou os anti-quarks leves que podem interagir com o meio, que pode ser a matéria nuclear, modificando as propriedades desses mésons pesados [98, 99, 100, 101]. Na Ref. [28], a título de exemplo, apresenta-se um modelo de troca de mésons como uma alternativa ao estudo dessas estruturas mêmônicas como estados moleculares.

Desse modo, o modelo em estudo neste capítulo pode ser imaginado como um sistema de mésons D (Mésons Pesados) interagindo com um meio composto de mésons leves σ e ω para formar estruturas exóticas. Neste caso, tomamos $M_D = 1.87$ GeV [102], e escolhendo

$M_\sigma = 0.21M_D \approx 0.4$ GeV e $g_{D\sigma} = 5M_D \approx 9.35$ GeV. Então, da Eq. (2.51) obtemos a temperatura crítica $T_0 \approx 0.148M_D \approx 277$ MeV. Em cálculos de QCD na rede por exemplo a temperatura de dissociação do charmonium tem um valor entre $1.6T_d$ e $2.35T_d$ [103, 104], onde $T_d \approx 0.092M_D \approx 172$ MeV é a temperatura de desconfinamento¹³ [105].

Concluimos esta seção enfatizando que o sistema experimenta uma transição de fase de primeira ordem governado pela intensidade da interação entre o campo bosônico e os mésons leves constituintes do meio e pela magnitude da massa desse campo. De modo que essas transições acontecem em temperaturas mais baixas quando aumentamos a magnitude desses parâmetros. E vimos que diferentemente disso a presença dos termos de auto-interação cúbico e quártico do campo σ essa matéria permite o sistema aumentar a temperatura em que a transição de fase ocorre. Ainda vimos que a descrição do modelo conduz a resultados interessantes no contexto da dissociação de mésons pesados.

2.2.2 Sistema com Dimensão Espacial Compactificada

Nesta seção vamos seguir o mesmo roteiro trilhado no decorrer da seção anterior. Embora a novidade aqui é o estudo da massa efetiva do campo ϕ no meio hadrônico sob a influência das compactificações espaciais e as suas consequências na estrutura de fase do modelo em questão. Desta forma, as transições de fase são estudadas com foco no tamanho do sistema e também comparando os casos de uma, duas e três dimensões espaciais compactificadas.

Na Fig. 2.5 mostramos o comportamento da massa efetiva M_* , para $d = 1$ (uma dimensão compactificada), que é determinada por intermédio da Eq. (2.37), para diferentes valores da coordenada compactificada, em $L = 9.0, 5.0$ e 4.0 , mantendo fixo a constante de acoplamento e a massa do méson sigma, $g_{\phi\sigma} = 1.52$ e $M_\sigma = 0.26$, respectivamente. Podemos observar que o comportamento da massa efetiva é modificada pela presença da fronteira espacial. Em baixas temperaturas, os valores da M_* diminui suavemente quando o tamanho da coordenada compactificada é reduzida. Além disso, pelas ideias tratadas sem a compactificação espacial a transição aqui continua sendo de primeira ordem, similar uma transição líquido-gás. Em resumo, notamos na Fig. 2.5 que a redução do tamanho do sistema permite que a massa efetiva M_* vai a zero em temperaturas mais baixas.

Mais informações sobre a transição de fase desse sistema pode ser retiradas a partir do grande potencial termodinâmico dado na Eq. (2.36), como havíamos feito antes no caso em que $L \rightarrow \infty$. Na Fig. 2.6 mostramos a densidade do grande potencial termodinâmico como função da massa efetiva para diferentes temperatura e cada gráfico caracterizado por um dado valor de tamanho do sistema. Eles ratificam a natureza de

¹³Devemos ter em mente que nesse modelo não existe graus de liberdade internos dos hádrons, e essa analogia com a transição de fase de desconfinamento é uma alegoria meramente teórica.

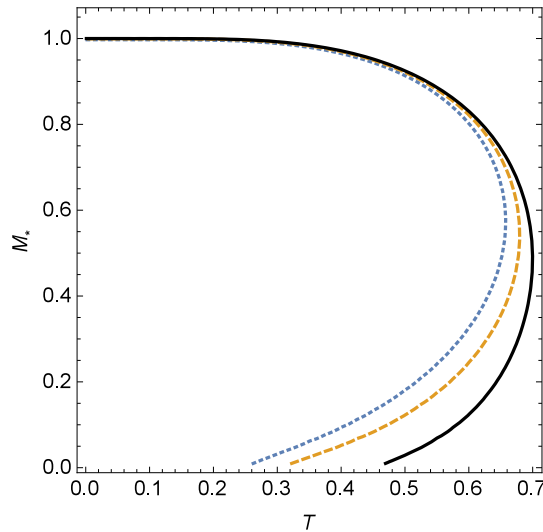


Figura 2.5: Gráfico da massa efetiva Eq. (2.12), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com uma dimensão compactificada $d = 1$. Com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $L = 9.0$, 5.0 e 4.0 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 1.52$ e $M_\sigma = 0.26$.

primeira ordem da transição. Além disso, observamos que a temperatura crítica diminui quando o tamanho L é reduzido. Explicitamente, em unidades de M_ϕ nas figuras, obtemos, $T_c(L = 9.0) = 0.6785$ e $T_c(L = 4.0) = 0.612$ para $M_\sigma = 0.26$ e $g_{\phi\sigma} = 1.52$. Na Fig. 2.7 exibimos a densidade do grande potencial termodinâmico como função da massa efetiva, para diferentes valores de L e a temperatura mantida fixa. Notamos que, diminuindo o valor de L o sistema é dirigido da fase quebrada para fase desordenada, em outras palavras, pode-se dizer que a presença da fronteira tende a inibir a fase quebrada [106] (A terminologia é a mesma para fenômenos de quebra de simetria como no caso do modelo de Ginzburg-Landau).

Focamos agora na influência do número de compactificações espaciais nas quantidades térmicas estudadas anteriormente. Neste sentido, as transições de fase são analisadas e comparadas entre os casos de uma, duas e três dimensões compactificadas. Como foi enunciado no preâmbulo desta seção tomamos o caso em que todas as coordenadas compactificadas tem o mesmo tamanho. Como estamos usando $D = 4$, as limitações da geometria sugere que o sistema com $d = 1, 2, 3$ está confinado em: entre dois planos paralelos (Infinitos) com distância entre eles de tamanho L , em um cilindro infinito de seção transversal de área L^2 ; e em uma caixa de volume L^3 .

Na Fig. 2.8 plotamos a massa efetiva como uma função da temperatura para três tipos de compactificação espacial $d = 1, 2, 3$ com um mesmo comprimento de L , que é mantido fixo, para $M_\sigma = 0.26$ e $g_{\phi\sigma} = 1.52$. Elas são obtidas por meio da solução da densidade escalar que são dadas pelas Eqs. (2.37), (2.41) e (2.45), para $d = 1, 2, 3$,

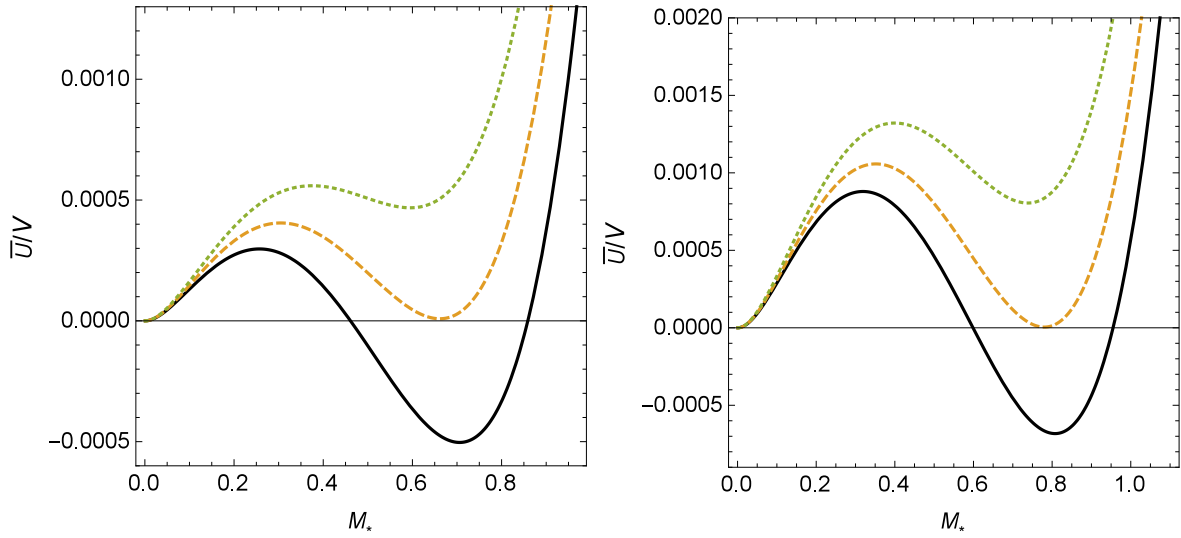


Figura 2.6: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.36), como uma função da massa efetiva, com uma dimensão espacial compactificada ($d = 1$), em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.26$ e $g_{\phi\sigma} = 1.52$. No plano esquerdo: usamos $L = 9.0$, com as linhas cheia, tracejada e pontilhada representando $T = 0.6650$, 0.6785 e 0.6920 , respectivamente. No plano direito: fixamos $L = 4.0$, com as linhas cheia, tracejada e pontilhada representando, $T = 0.597$, 0.612 e 0.630 , na mesma ordem.

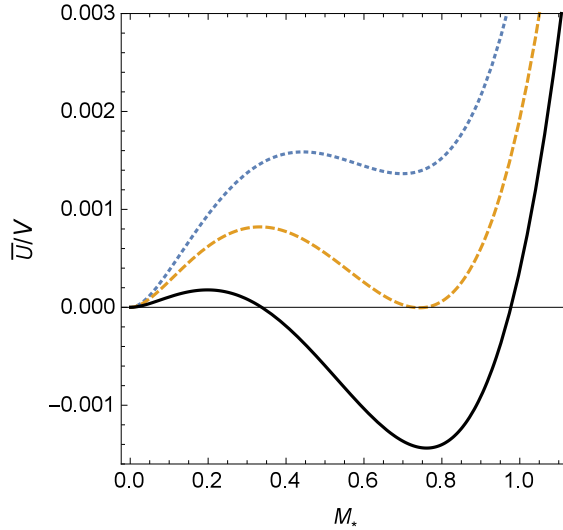


Figura 2.7: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.36), como uma função da massa efetiva, com uma dimensão espacial compactificada ($d = 1$), em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.26$ e $g_{\phi\sigma} = 1.52$. Com as linhas cheia, tracejada e pontilhada representando $L = 9.0$, 5.0 e 4.0 , respectivamente, com $T = 0.6422$.

respectivamente. Como era de se esperar a situação física contínua sendo a mesma daquilo descrito para os casos similares estudados acima, embora aqui, percebemos que uma das consequências de aumentar o número de compactificações espaciais é permitir que a fase

de massa efetiva nula seja alcançada em temperaturas mais baixas. Estudos semelhantes foram desenvolvidos na Ref. [107] para mapear as propriedades das transições de fases influenciados pela geometria do sistema no modelo de Ginzburg-Landau.

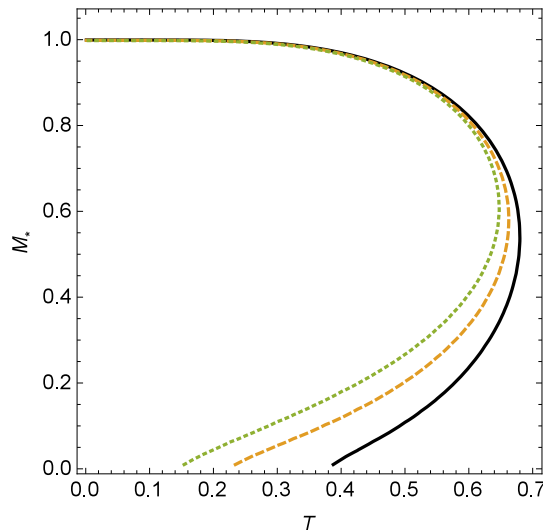


Figura 2.8: Gráfico da massa efetiva Eq. (2.12), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, em $L = 5.0$. Com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $d = 1, 2$ e 3 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 1.52$ e $M_\sigma = 0.26$.

Com base em nossa análise, traçamos na Fig. 2.9 uma situação semelhante à da Fig. 2.8, mas tomando M_* como função do inverso do comprimento da dimensão espacial compactificada ($x = 1/L$), para as três situações de dimensões espaciais compactificadas em estudo. Na Fig. 2.9, a mudança da massa efetiva pela presença da fronteira espacial é mais explícita. Podemos ver que, à medida que L diminui existe um alcance no qual M_* sofre uma redução. Em particular, esta redução é mais rápida para um número maior de dimensões espaciais compactificadas. Em outras palavras, o aumento de d produz um valor maior de L em que o sistema adquire uma massa efetiva que desaparece. Assim, a caixa cúbica tem o maior valor para L_c em que o sistema experimenta uma transição de fase.

Seguindo a estratégia de obter os resultados da estrutura de fase do sistema, por fim, na Fig. 2.10 plotamos a densidade do potencial termodinâmico para os casos $d = 1, 2, 3$, as Eqs. (2.36), (2.40) e (2.44), como função da massa efetiva, para um valor fixo da coordenada compactificada de tamanho L . Ele demonstra que o sistema é dirigido da fase quebrada para a fase desordenada quando o número de dimensões compactificadas d aumenta. Disso, dizemos que o aumento do número de dimensões espaciais compactificadas favorece explicitamente a fase não-quebrada do sistema.

Enfim, encerramos esta seção com a ideia de que a restrição espacial modifica a estrutura de fases do sistema uma vez que o parâmetro de ordem, a massa efetiva, vai a

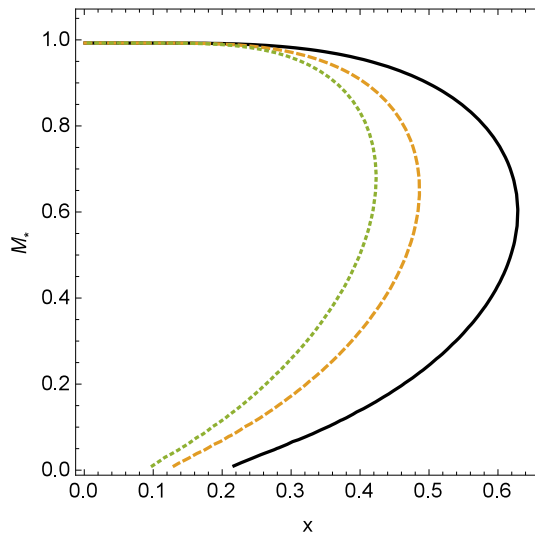


Figura 2.9: Gráfico da massa efetiva Eq. (2.12), como uma função do inverso do tamanho do sistema $x = 1/L$, em equilíbrio químico. Com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $d = 1, 2$ e 3 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 1.52$, $M_\sigma = 0.26$ e $T = 0.3$.

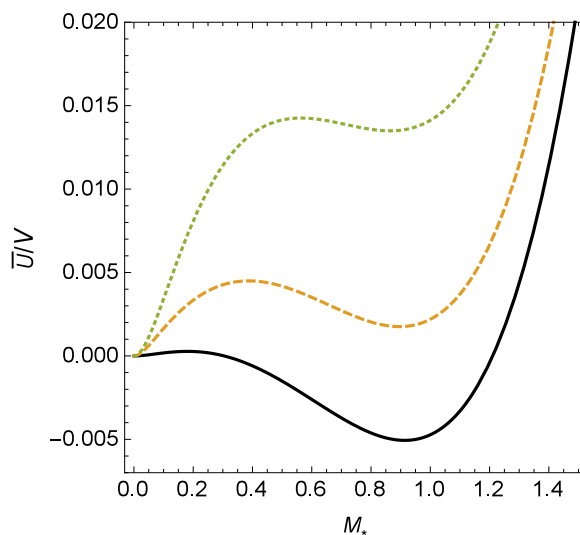


Figura 2.10: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.36), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.26$ e $g_{\phi\sigma} = 1.52$. Com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $d = 1, 2$ e 3 , respectivamente, em $T = 0.5$.

zero em temperaturas mais baixas com a redução da dimensão espacial compactificada. Esses aspectos geométricos são relevantes pois tanto a redução do tamanho do sistema quanto o aumento do número de dimensões espaciais compactificadas desfavorecem a fase ordenada. Contudo, embora o nosso modelo ainda seja muito simples para estudar as interações entre hádrons encontramos aspectos interessantes sobre seu comportamento termodinâmico na aproximação de campo médio investigado sob a ótica dos parâmetros geométricos.

2.3 SISTEMA NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EXTERNO

Nesta seção vamos estudar as mudanças, a partir da presença de um campo magnético uniforme, na estrutura de fase do modelo em questão. Efeitos magnéticos por exemplo, podem explicar processos de resfriamento ou aquecimento na parte mais central de estrelas compactas através da formação de condensados magnetizados de mésons leves [108].

2.3.1 Modelo

De início a densidade de Lagrangiana, Eq. (2.1), tem uma simples mudança nos termos que aparecem a derivada ordinária atuando nos campos carregados para a derivada, comumente chamada, de covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu^{ext}, \quad (2.56)$$

onde q é a carga das partículas bosônicas e A_μ^{ext} o quadripotencial associado ao campo magnético externo. Dessa forma, a Eq. (2.4) de movimento para o campo escalar carregado pode ser reescrita na forma:

$$D_\mu D^\mu \phi + M_*^2 \phi + 2ig_{\phi\omega} \langle \omega^0 \rangle \partial_0 \phi = 0. \quad (2.57)$$

Em uma dimensão do espaço-tempo qualquer, o campo uniforme pode ser representado por $F^{12} = H$, onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor de campo eletromagnético. Caso a dimensionalidade seja $D = 4$ a escolha é dita calibre de Landau, e escrevemos,

$$A_\mu^{ext} = (0, -Hx_2, 0, 0), \quad (2.58)$$

onde H é a intensidade do campo uniforme externo¹⁴. Com essa implementação a Eq. (2.57), na aproximação de campo médio, tem a forma de uma equação tipo oscilador harmônico, cujo desenvolvimento é dado na Ref. [109]. De forma que as autofunções e espectro de energia para Eq. (2.57) são dados por,

$$\phi(\mathbf{x}) = e^{i(p_0x_0 - p_1x_1 - p_3x_3)} \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} \left(\frac{eH}{\pi} \right)^{1/4} H_l[X_2] e^{-\frac{1}{2}X_2^2}, \quad (2.59)$$

e

$$E = \pm \sqrt{p_3^2 + M_*^2 + qH(2l+1) - g_{\phi\omega} \langle \omega^0 \rangle}, \quad (2.60)$$

respectivamente, onde H_l são os polinômios de Hermite e $X_2 = \sqrt{eH} \left(x_2 - \frac{p_1}{eH} \right)$. Sendo $l = 0, 1, 2, \dots$, correspondendo aos níveis de Landau. E da Eq. (2.60) a priori, podemos

¹⁴Esse quadripotencial deriva de um campo magnético uniforme na direção \hat{x}_3 , ou seja, $\vec{H} = H\hat{x}_3$.

observar uma redução dimensional¹⁵ do sistema de quatro para duas dimensões. Assim o efeito magnético inicialmente é a introdução da base de Landau, que implica a mudança no espaço dos momentos da integração, na forma:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p) \rightarrow \frac{qH}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} f(p_0, p_3, l), \quad (2.61)$$

onde $qH/2\pi$ é fator de degenerescência devido a quantização.

A partir dessas informações podemos construir a grande função de partição para tratar o sistema térmico no contexto da presença de um campo magnético. Para começar, a ação descrita na Eq. (2.10), que aparece na função partição, Eq. (2.9), é escrita,

$$\mathcal{S}^B = - \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \phi [(\partial_0 - \mu_*)^2 + \vec{\nabla}^2 - 2iqHx_1 \partial_{x_2} - (qH)^2 x_1^2 + M_*^2] \phi^\dagger, \quad (2.62)$$

notavelmente, pode-se identificar a base desse operador, como a de Landau, com as autofunções normalizadas dadas pela Eq. (2.59).

E diante das ideias acima podemos reescrever a expansão dos campos (com a devida prescrição do formalismo de tempo imaginário), dada na Eq. (2.14), como:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\omega_n \tau + \vec{p} \cdot \vec{x})} \phi_{l,n}(\omega_n, \vec{p}). \quad (2.63)$$

Substituindo essa expansão na Eq. (2.62), obtemos uma ação na forma:

$$\mathcal{S}^B = -\beta \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p_3} \phi [(i\omega_n - \mu_*)^2 + \vec{p}_3^2 + M_*^2 + qH(2l+1)] \phi^\dagger, \quad (2.64)$$

onde usamos a identidade dada na Eq. (2.16) e a relação de ortonormalidade dos polinômios de Hermite, dada por

$$\int dy e^{-y^2} H_n(y) H_n^*(y) = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (2.65)$$

Portanto, integrando a Eq. (2.9), sobre os campos ϕ e ϕ^\dagger , usando a Eq. (2.64) o grande potencial termodinâmico fica na forma:

$$\frac{U(\beta, \mu_*, H)}{V} = U_{\sigma, \omega} - \frac{qH}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_3}{(2\pi)} \ln[(\omega_n - i\mu_*)^2 + p_3^2 + M_l^2], \quad (2.66)$$

onde, por caráter de simplificação definimos:

$$M_l = \sqrt{M_*^2 + 2qH(2l+1)}. \quad (2.67)$$

¹⁵Em um campo magnético uniforme de intensidade \mathbf{H} , ao longo do eixo- x_3 , uma partícula carregada deve seguir uma trajetória helicoidal cujo eixo é paralelo ao eixo- x_3 e cuja projeção no plano (x_1, x_2) é um círculo. O movimento ao longo da direção x_3 tem uma velocidade linear constante v_3 , enquanto que no plano (x_1, x_2) tem uma velocidade angular constante qH/M .

A forma mais simples para o sistema é uma topologia do tipo: $\Gamma_2^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$, onde a coordenada espacial não tem restrições de limite. Neste caso, encontramos a forma do grande potencial termodinâmico (realizando todos os procedimentos matemáticos para chegar na Eq. (2.23), encontrar a série do tipo dada na Eq. (2.25) e chegar na respectiva continuação analítica desenvolvida no apêndice A) como segue,

$$\frac{U(T, \mu, H)}{V} = U_{\sigma, \omega} + U_v^H - \frac{qH}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_l}{n\beta}\right) K_1(n\beta M_l) \quad (2.68)$$

onde $U_v^H = U_v + U_\phi^H$, com U_ϕ^H sendo a contribuição do vácuo magnetizado (observar com atenção o apêndice B), dado por:

$$U_\phi^H = \frac{(qH)^2}{4\pi^2} \left[\zeta' \left(-1, \frac{1}{2} + z \right) - \frac{1}{2} z^2 \ln z + \frac{1}{4} z^2 \right], \quad z \equiv \frac{M_*^2}{2qH} \quad (2.69)$$

onde $\zeta(\nu, a)$ é a função Zeta Hurwitz com $\zeta'(\nu, a) \equiv \partial\zeta(\nu, a)/\partial\nu$. E K_1 é função de Bessel modificada de primeiro tipo.

As equações de estado de gás de bósons na presença de um campo magnético uniforme para os resultados acima têm as formas:

$$\rho_s^H = G_\phi(z) + \frac{qH}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh(n\mu_*\beta) K_0(n\beta M_l), \quad (2.70)$$

e

$$\rho^H = -\frac{qH}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sinh(n\mu_*\beta) M_l K_1(n\beta M_l), \quad (2.71)$$

onde na Eq. (2.70) introduzimos a função,

$$G_\phi(z) = \frac{qH}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{1}{2} + z \right) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + z \ln z - 3z \right]. \quad (2.72)$$

Como antes, na ausência de campo magnético, nota-se da Eq. (2.71) que quando o equilíbrio efetivo é alcançado, $\mu_* = 0$, encontramos $\langle \omega^0 \rangle = 0$, que corresponde $\rho^H = 0$. Portanto, o campo vetorial em nenhum dos casos estudado acima contribuem para as propriedades térmicas do modelo de troca de mésons na aproximação de campo médio quando o número de bósons e anti-bósons são iguais.

Agora imagine que tenhamos a coordenada espacial x_3 compactificada, nessas circunstâncias podemos entender o sistema confinado entre dois planos paralelos, normal ao eixo x_3 , a uma distância L um do outro. E dessa forma, a Eq. (2.66) torna-se:

$$\frac{U(T, \mu, L, H)}{V} = U_{\sigma, \omega} + U_v^H - \frac{qH}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{E}_2^{M_l^2} \left(0; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L^2} i \frac{\mu_*\beta}{2\pi}, 0 \right), \quad (2.73)$$

E as equações de estado de um gás de bósons na presença de um campo magnético uniforme e confinado numa região limitada na direção x_3 , podem ser escritas:

$$\rho_s^{HL} = G_\phi(z) + \frac{qH}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{E}_2^{M_l^2} \left(0; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L^2} i \frac{\mu_* \beta}{2\pi}, 0 \right), \quad (2.74)$$

e

$$\begin{aligned} \rho^{HL} = & -\frac{qH}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sinh(n\mu_*\beta) M_l \left[K_1(n\beta M_l) + \right. \\ & \left. + \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{n\beta}{\sqrt{n^2\beta^2 + n_1^2 L^2}} \right) K_1(M_l \sqrt{n^2\beta^2 + n_1^2 L^2}) \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Da mesma forma que todos os casos anteriores no equilíbrio químico as quantidades termodinâmicas não são afetadas pelo campo médio $\langle \omega^0 \rangle$.

2.3.2 Estrutura de Fase

Focamos nossa análise no grande potencial termodinâmico e na solução da equação de estado dados pelas Eqs. (2.70) e (2.74), respectivamente, em equilíbrio químico. Em especial, vamos verificar as características dos diagramas de fase a partir da influências do campo magnético e do tamanho do sistema. As escalas são as mesmas utilizadas na Eq. (2.54). No mais vamos definir a notação $\Omega = qH$, para expressar assim as chamadas frequências de ciclotron. Podemos observar da Eq. (2.60) que Ω tem dimensão de massa ao quadrado e assim, como tomamos todas as quantidades físicas com a escala da massa do campo bosônico M_ϕ , a frequência de ciclotron terá um parâmetro sem dimensão do tipo:

$$\frac{\Omega}{M_\phi^2} \rightarrow \Omega. \quad (2.76)$$

como todas as outras quantidades da Eq. (2.54). E ainda o grande potencial termodinâmico carrega uma normalização similar aquela dada na Eq. (2.55).

De início vamos tomar o caso mais simples que é $L \rightarrow \infty$ (Bulk). Na Fig. 2.11, a massa efetiva, Eq. (2.12) com a Eq. (2.70), é exibida como uma função da temperatura, para diferentes valores de campo magnético. Encontramos que em valores baixos do campo magnético, a massa efetiva se comporta de maneira similar aos casos estudados nas seções anteriores, sem a presença do campo magnético, o caso típico de uma transição de fase líquido-gás. Entretanto, para grandes valores de campo magnético Ω , observamos que quando a temperatura aumenta, M_* atinge uma região em que começa a decrescer aproximadamente a temperatura constante. Esse efeito é ainda mais notável para baixos valores de constante acoplamento. Ademais, notamos que em baixas temperaturas ocorre

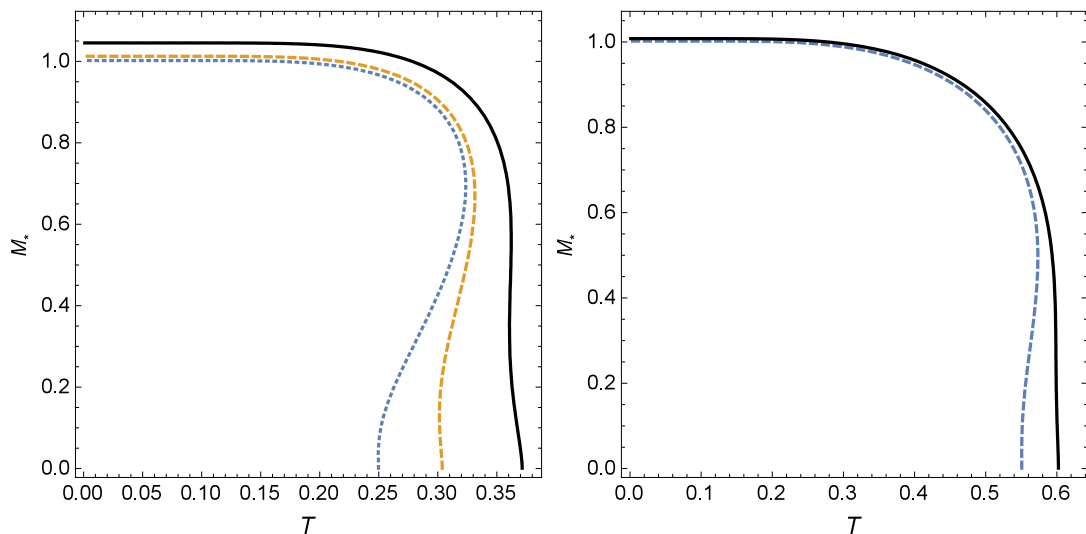


Figura 2.11: Gráfico da massa efetiva, Eq. (2.12) com Eq. (2.70), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $M_\sigma = 0.25$. Na esquerda: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $\Omega = 0.5, 0.25$ e 0.1 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 5.0$. Na direita: as linhas sólida e tracejada representam $\Omega = 0.5$ e 0.25 , respectivamente, onde fixamos $g_{\phi\sigma} = 2.0$.

o processo denominado de catálise magnética, isto significa que a massa aumenta como uma função do campo magnético.

De forma a compreender a dinâmica da estrutura de fases do modelo de troca de mésons na aproximação de campo médio, agora magnetizado, nas Figs. 2.12-2.15 plotamos a densidade do grande potencial termodinâmico, dado na Eq. (2.68), como uma função da temperatura, em diferentes valores de temperatura na região de transição de fase, com o campo magnético mantido fixo em três casos diferentes. Abaixo resumimos alguns aspectos que devem ser notados:

- I Para valores fixos de Ω , existe uma transição da fase quebrada para a fase não-quebrada quando a temperatura aumenta, como nos casos anteriores na ausência de campo magnético.
- II Com o campo magnético mantido em pequenos valores ($\Omega = 0.1$ e $\Omega = 0.25$ na Fig. 2.12), para $g_{\phi\sigma} = 5.0$, o sistema exibe uma transição de fase de primeira ordem quando a temperatura aumenta.
- III Com o campo magnético mantido em grandes valores ($\Omega = 0.25$ e $\Omega = 0.5$ na Fig. 2.13), e para baixo acoplamento $g_{\phi\sigma} = 2.0$, o sistema exibe uma transição de fase de primeira ordem quando a temperatura aumenta em $\Omega = 0.25$ e quando $\Omega = 0.25$ experimenta uma transição de fase de segunda ordem através do aumento da

temperatura. Isso mostra que a natureza da fase do sistema é sensível à escolha do campo magnético.

IV Também, quando o campo magnético aumenta a temperatura crítica em que o sistema apresenta a transição de fase aumenta.

V Em especial, para valores grandes do campo magnético (Como por exemplo, $\Omega = 0.5$ na Fig. 2.15), emerge do sistema uma transição de fase de dois passos quando a temperatura aumenta. Primeiro, uma transição de fase descontínua ocorre quando a massa efetiva salta para valores menores, isto acontece em temperaturas em que dois mínimos locais não nulos do grande potencial termodinâmico são degenerados. Aumentando ainda mais a temperatura, uma transição de fase contínua aparece, com o mínimo absoluto, que dá o valor de equilíbrio da M_* , tendendo a zero. Uma transição de dois passos similar a essa ocorre em um modelo de quatro férmions [110].

VI Dos itens II e V podemos dizer que existe um campo magnético crítico Ω_c que divide o sistema em dois tipos de transição de fase no intervalo $0.3 < \Omega < 0.4$.

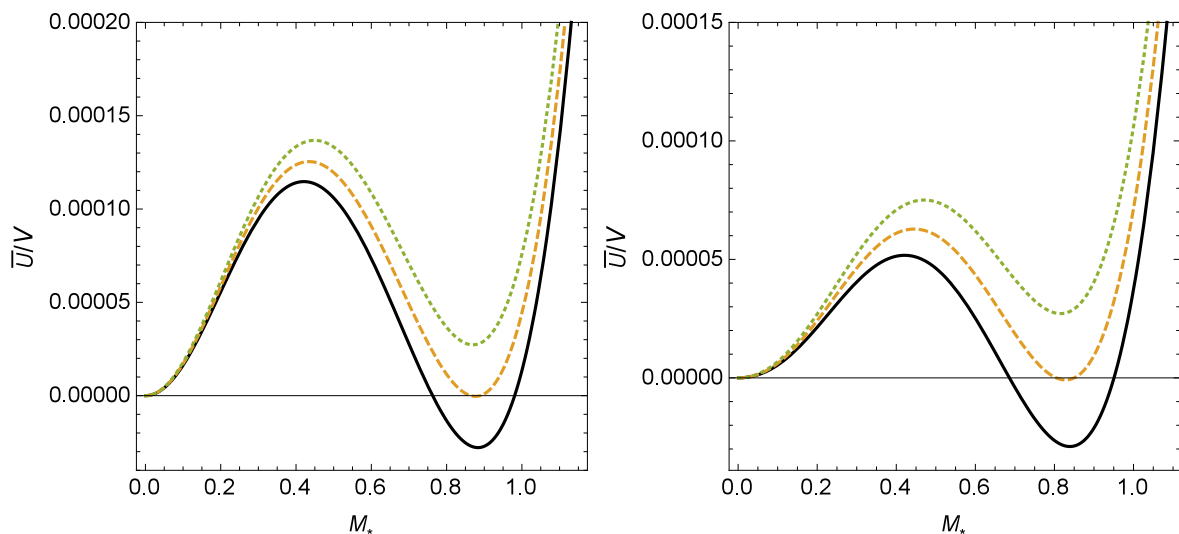


Figura 2.12: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.68), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\phi\sigma} = 5.0$. Na esquerda: com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $T = 0.298, 0.300$ e 0.302 , respectivamente, em $\Omega = 0.1$. Na direita: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando, $T = 0.318, 0.320$ e 0.322 , na mesma ordem, com $\Omega = 0.25$.

Além disso, a densidade de potencial termodinâmico, dado por Eq. (2.68), para $L \rightarrow \infty$, é plotado na Fig. 2.15 como uma função de M_* , para diferentes valores de campo magnético, mas com a temperatura mantida fixa, em dois cenários diferentes. As principais conclusões discutimos nas próximas linhas.

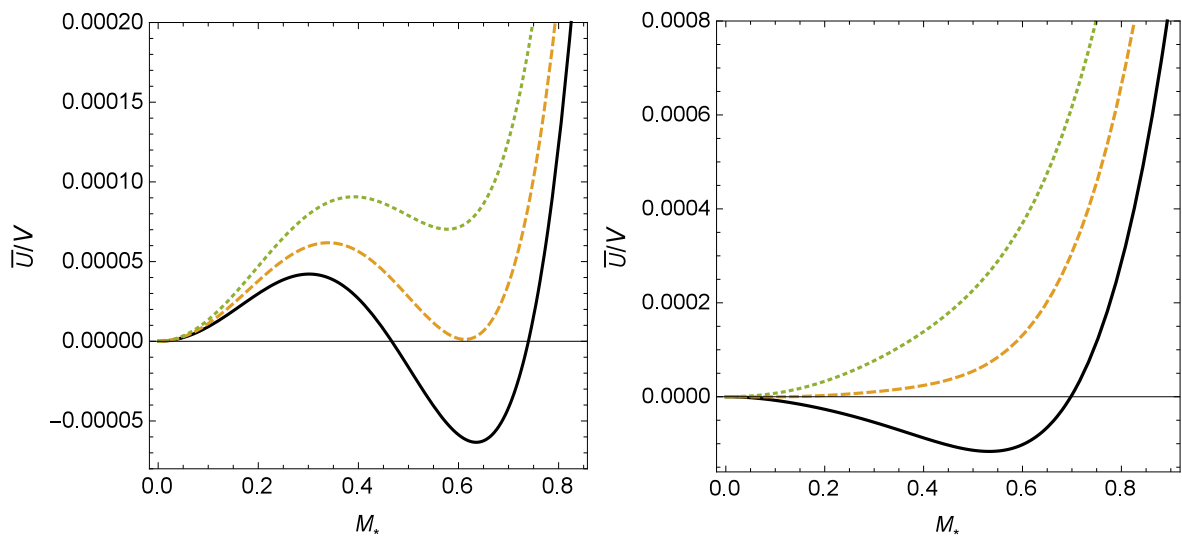


Figura 2.13: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.68), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\phi\sigma} = 2.0$. Na esquerda: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $T = 0.560$, 0.5627 e 0.5658 , respectivamente, em $\Omega = 0.25$. Na direita: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando, $T = 0.590$, 0.600 e 0.610 , na mesma ordem, com $\Omega = 0.5$.

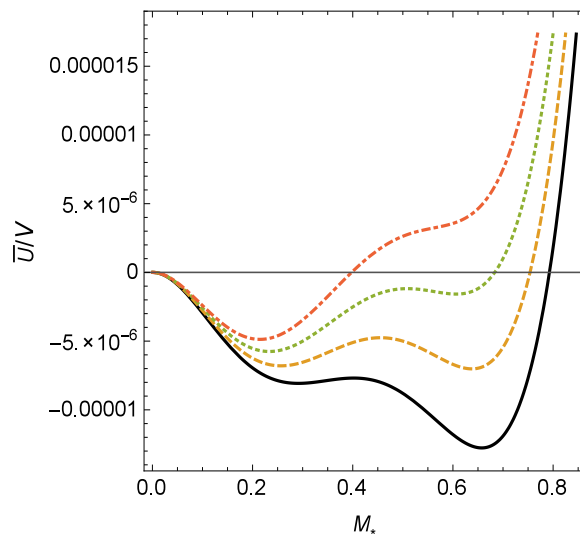


Figura 2.14: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.68), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\phi\sigma} = 5.0$. Fixamos $\Omega = 0.5$, com as linhas sólida, tracejada, pontilhada e traço e ponto representando, $T = 0.361$, 0.3615 , 0.362 e 0.370 , respectivamente.

I Para valores fixos de T , existe uma transição da fase não-quebrada para a fase quebrada dirigida pelo aumento do campo magnético; que é, o aumento do campo magnético tende a favorecer a fase ordenada, em oposição ao aumento da temperatura que conduz o sistema a fase com simetria restaurada. O favorecimento da fase

quebrada com o aumento do campo magnético também é vista em outras situações, incluindo sistemas fermiônicos [111, 112, 113, 114]. O significado físico desse efeito é que o campo magnético dirige o sistema a fase ordenada, a manutenção da correlação de longo alcance é aumentada, favorecendo a ordem.

- II Com a temperatura mantida em pequenos valores, o sistema exibe uma transição de fase de primeira ordem da fase não-quebrada para a fase quebrada quando o campo magnético aumenta.
- III Quando a temperatura aumenta, o campo magnético crítico em que o sistema sofre uma transição de fase aumenta.
- IV Em altas temperaturas, quando o campo magnético aumenta o sistema mais uma vez exibe uma transição de fase de dois passos da fase não-quebrada para a fase quebrada: primeiro uma transição de fase contínua, com o mínimo absoluto aparecendo para um valor não-nulo da massa efetiva M_* , e depois uma transição de fase descontínua, quando o segundo mínimo local emergente com um valor de massa maior supera o primeiro, tornando-se um mínimo absoluto.

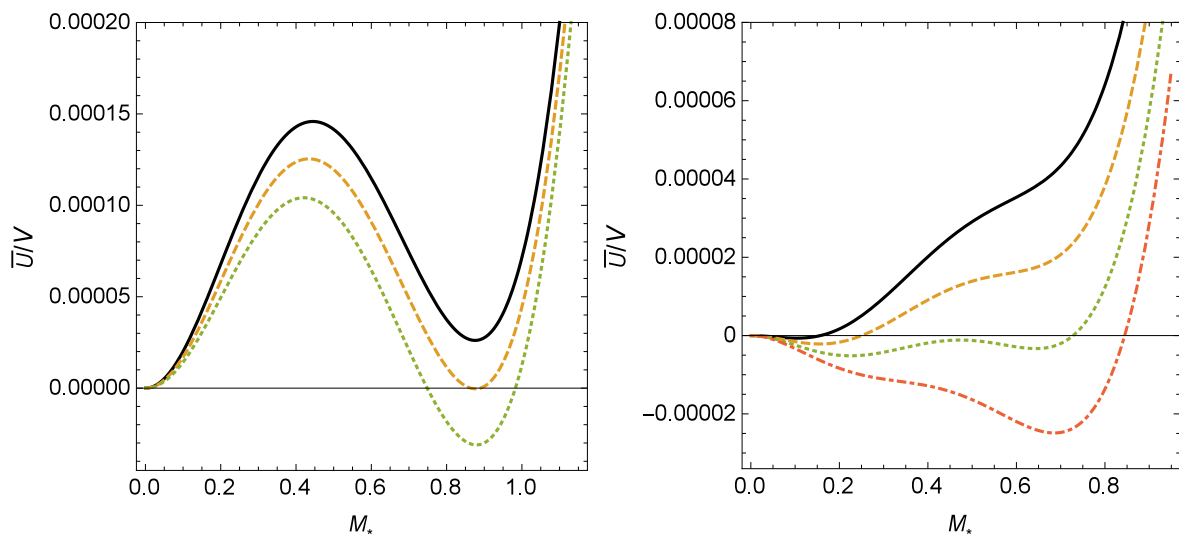


Figura 2.15: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.68), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\phi\sigma} = 5.0$. No plano esquerdo ($T = 0.30$): as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $\Omega = 0.08, 0.10$ e 0.12 , respectivamente. No plano direito ($T = 0.36$): as linhas sólida, tracejada, pontilhada e traço e ponto representando, $\Omega = 0.470, 0.490, 0.491$ e 0.492 , na mesma ordem.

Podemos agora tomar o caso em que o sistema exibe uma geometria de um filme infinito com tamanho L entre as placas. Dessa forma, na Fig. 2.16, mostramos o comportamento da massa efetiva como uma função da temperatura para grandes valores do

campo magnético e da constante de acoplamento, para diferentes tamanho do sistema. Notamos que a presença da fronteira reduz a temperatura que M_* vai a zero (Da mesma forma que a seção 2.2, como era de se esperar) e, principalmente, inibe a região em que a massa é independente da temperatura como vimos. A priori, nesse caso, os dois parâmetros competem entre si para aumentar (Efeito do campo magnético) ou diminuir (Efeito do tamanho finito) a temperatura crítica do sistema, como podemos observar nas Fig. 2.17 e 2.18. Além disso, podemos observar que a presença da fronteira diminui a massa efetiva em baixas temperatura reduzindo o efeito da catálise magnética.

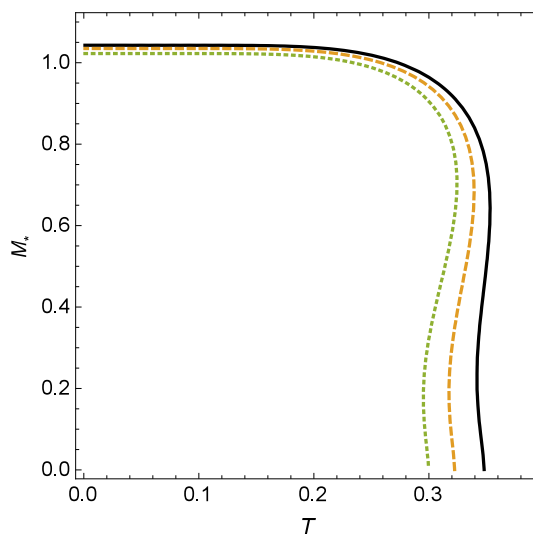


Figura 2.16: Gráfico da massa efetiva, Eq. (2.12) com a Eq. (2.74), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\phi\sigma} = 5.0$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $L = 5.5$, 4.5 e 4.0 , respectivamente, onde fixamos $\Omega = 0.5$.

Revelamos de maneira mais explícita que essa competição é vencida pela fronteira quando esta inibe a natureza de dois passos da transição para grandes valores do campo magnético ($\Omega = 0.5$) exibindo a densidade do grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva na Fig. 2.17. Mostramos isso em dois cenários: primeiro, no plot da esquerda para um grande valor da dimensão compactificada mantendo a transição de fase de dois passos e segundo o plot com um valor reduzido. Observamos que essa redução empurra o mínimo local mais próximo da origem para zero, modificando a natureza de fase de uma de dois passos para uma simples transição de fase de primeira ordem. A Fig. 2.18 reforça essas características.

Na seção anterior consideramos que esses campos escalares fossem mésons charmosos e mostramos a temperatura crítica quando a massa efetiva vai a zero. Sob a influência do campo magnético tomando $\Omega = 0.035M_D = 65$ MeV, a transição de fase ocorre em temperatura crítica de $T_c \approx 0.27M_D \approx 505$ MeV. Esse valor é quase duas vezes maior do que aquele encontrado para o caso sem a presença de um campo magnético externo no

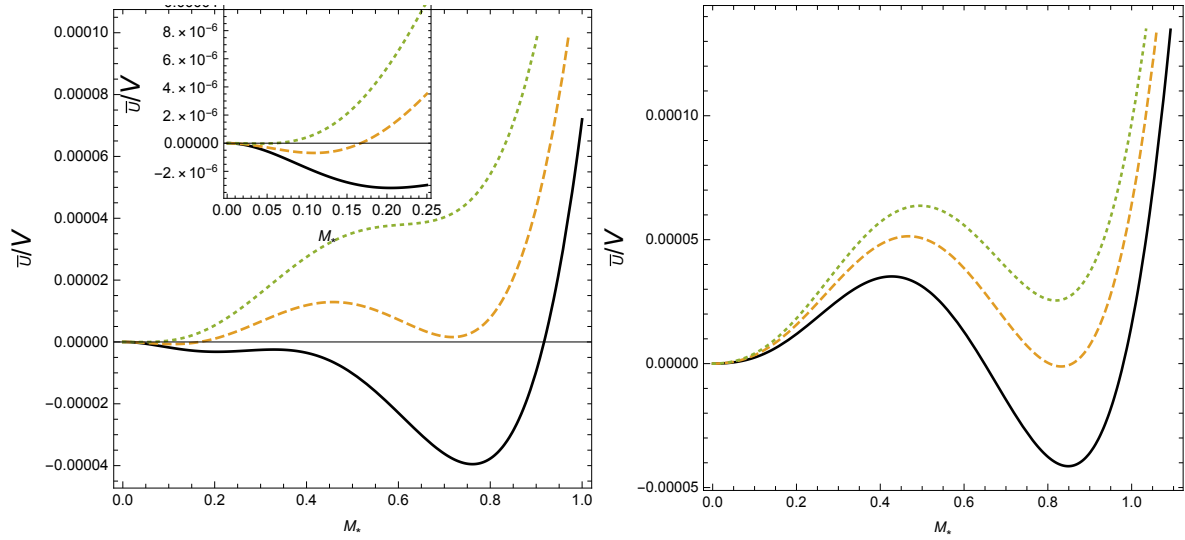


Figura 2.17: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.73), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$, $g_{\phi\sigma} = 5.0$ e $\Omega = 0.5$. Na esquerda ($L = 6.5$): as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $T = 0.353$, 0.356 e 0.359 , respectivamente. Na direita ($L = 4.5$): as linhas sólida, tracejada, pontilhada e traço e ponto representando, $T = 0.3273$, 0.3300 e 0.3318 , nesta ordem.

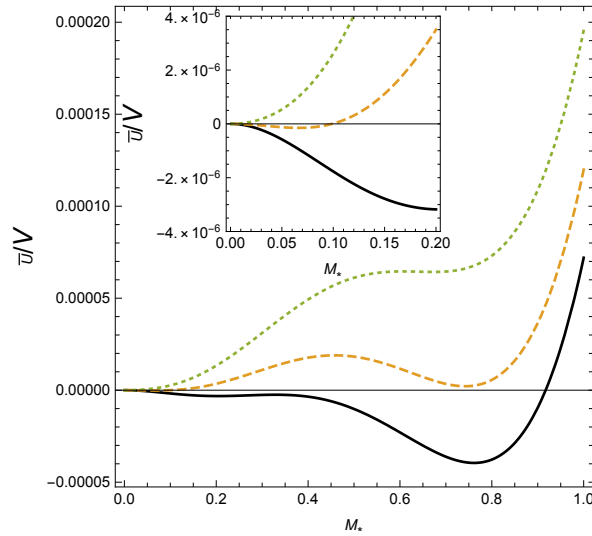


Figura 2.18: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (2.73), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$, $g_{\phi\sigma} = 5.0$, $\Omega = 0.5$ e $T = 0.353$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $L = 5.5$, 6.0 e 6.5 , respectivamente.

bulk (seção anterior). Não obstante eles são menores para campos magnéticos mais fracos como já foi observado na descrição dos resultados apresentados nos gráficos desta seção. O aumento da temperatura crítica com aumento da intensidade do campo magnético é relatado em alguns modelos na literatura para tratar o desconfinamento. Podemos observar essa característica no cenário para mésons leves a partir do modelo de Nambu-

Jona-Lasinio [115] e usando o modelo de Gás de Ressonâncias de Hádrons [116]. Por outro lado a transição de fase hádron-quark a temperatura crítica diminui com o aumento do campo magnético como mostrado na Ref. [117].

Nesta seção vimos que a presença do campo magnético uniforme externo se manifesta no modelo descrito acima de duas formas. Primeiro, que para valores baixos de campo magnético o sistema experimenta uma simples transição de fase de primeira ordem como nas seções anteriores. Segundo, constatamos que para valores altos do campo magnético a natureza da transição de fase é modificada de uma simples transição de fase de primeira ordem para uma transição de fase de dois passos com um valor de fronteira entre elas determinado por Ω_c . Entretanto, mostramos que existe um comportamento não-trivial na região de valores altos de campos magnéticos devido a presença de uma fronteira espacial no sistema que elimina essa transição de fase de dois passos à medida que reduzimos o tamanho finito do sistema, revelando novamente a face de uma simples transição de fase de primeira ordem.

Terminamos, portanto, este capítulo enfatizando que obtemos contribuições importantes para o diagrama de fase de sistemas termodinâmicos simples em que os graus de liberdade são partículas de spin-0 interagindo com um meio denso e quente composto de hádrons leves. Isso através da minimização do grande potencial termodinâmico e por ele próprio combinando diversos parâmetros internos e externos do sistema tais como: a magnitude das interações, o tamanho e a geometria do sistema, e a presença de um campo magnético externo, promovendo a dinâmica de diversos tipos de transições de fases. Ainda mostramos como podemos empregar esses resultados em alguns casos físicos de interesse, como por exemplo: a matéria composta de mésons charmosos.

GÁS DE FÉRMIONS

Neste capítulo dedicamos nossa atenção a descrição de um sistema relativístico com graus de liberdade fermiônicos através do modelo de troca de mésons σ e ω , na aproximação de campo médio (conhecido na literatura como modelo de Walecka). Da mesma forma daquilo que foi desenvolvido no capítulo anterior vamos estudar as modificações no diagrama de fases do sistema devido a aspectos internos e externos tais como: efeitos de tamanho do sistema, da forma geométrica [58] e a presença de um campo magnético uniforme externo [59]. E por fim, aplicamos essas ideias a matéria nucleon-anti-nucleon como instrumento de caracterizar as transições de fase da matéria que interage fortemente.

3.1 MODELO

Esta seção tem como principal objetivo construir o modelo de troca de mésons na aproximação de campo médio desenvolvido por Walecka [39] e aprimorado por Boguta e Bodmer [118]. A ideia central reside em descrever a interação de bárions pela troca de mésons: os campos de mésons escalar-isoescalar σ reproduzem a atração de médio alcance e os campos vetorial-isoescalar ω responsável pela repulsão de curto alcance¹. Pensado do ponto de vista da matéria nuclear a troca de mésons simula a partir do méson σ eletricamente neutro a troca de dois píons e o méson ω a troca do méson σ . De modo que o méson σ representa uma larga ressonância em espalhamentos $\pi\pi$ em 500 – 600 MeV [1]. A densidade de Lagrangiana que contém essas interações, descrevem esses acoplamentos, na forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M_\psi + g_{\psi\sigma}\sigma - g_{\psi\omega}\gamma^\mu\omega_\mu)\psi - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - \\ & - \frac{1}{2}M_\sigma^2\sigma^2 - \frac{a}{3!}\sigma^3 - \frac{b}{4!}\sigma^4, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $W_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$ e M_ψ , M_σ e M_ω são as massas do campo espinorial (Bárions) ψ , do campo σ e do campo ω , respectivamente. As constantes de acoplamento são: $g_{\psi\sigma}$ e $g_{\psi\omega}$, além das constantes de auto interação do campo σ , a e b ². Esses auto-acoplamentos

¹No limite não-relativístico o potencial, por exemplo, de dois nucleons ($\sigma - \psi\bar{\psi}$ e $\omega - \psi\bar{\psi}$), que são interações de Yukawa [4, 5, 6].

²Esses termos foram introduzido por Boguta e Bodmer para encontrar um valor razoável da compressibilidade para matéria nuclear em equilíbrio [118].

podem, também, ser incluídos para cancelar termos divergentes que aparecem na energia de vácuo. Ainda, γ^μ são as matrizes de Dirac, que são definidas pela relação de anticomutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, elas são (na representação padrão):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Essas matrizes tem dimensão 4×4 : com $\hat{1}$ denotando a matriz identidade de dimensão 2×2 e $\vec{\sigma}$ as matrizes de Pauli. Na Eq. (3.1) $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

A Lagrangiana descrita pela Eq. (3.1) tem uma simetria global $U(1)$. Por meio do teorema de Noether dizemos que existe uma corrente conservada associada com essa simetria.

No calibre de Lorentz $\partial_\lambda \omega^\lambda = 0$, as equações de movimento para os campos ψ , σ e ω , são

$$[\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_{\psi\omega} \gamma^\mu \omega_\mu) - (M_\psi - g_{\psi\sigma} \sigma)] \psi = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + M_\sigma^2 \sigma + \frac{a}{2!} \sigma^2 + \frac{b}{3!} \sigma^3 = g_{\psi\sigma} \rho_s, \quad (3.4)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \omega^\nu + M_\omega^2 \omega^\nu = ig_{\psi\omega} j^\nu. \quad (3.5)$$

A Eq. (3.3) é do tipo Dirac para o campo ψ , com os mésons ω e σ incluídos por substituição minimal. As Eqs. (3.4) e (3.5) são equações de campos massivos, tendo como fontes o campo ψ . Com a densidade escalar $\rho_s = \bar{\psi} \psi$, a densidade bariônica $\rho = j_0 = \bar{\psi} \gamma_0 \psi$, e a corrente bariônica $\vec{j} = \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi$.

Do mesmo modo que foi pensado para os campos mesônicos (σ, ω) no capítulo anterior podemos tratá-los na aproximação de campo médio. Assim, a densidade de Lagrangiana dada pela Eq. (3.1), torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - (M_\psi - g_{\psi\sigma} \langle \sigma \rangle) - g_{\psi\omega} \gamma^0 \langle \omega^0 \rangle] \psi + \frac{1}{2} M_\omega^2 \langle \omega^0 \rangle - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 - \\ & - \frac{a}{3!} \langle \sigma \rangle^3 - \frac{b}{4!} \langle \sigma \rangle^4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

E nesta aproximação as equações de movimento, Eqs. (3.4) e (3.5), ficam:

$$M_\sigma^2 \langle \sigma \rangle + \frac{a}{2!} \langle \sigma \rangle^2 + \frac{b}{3!} \langle \sigma \rangle^3 = g_{\psi\sigma} \rho_s, \quad (3.7)$$

e

$$\langle \omega^0 \rangle = -\frac{g_{\psi\omega}}{M_\omega^2} \rho, \quad (3.8)$$

respectivamente, onde $\rho_s = \bar{\psi} \psi$ é a densidade escalar dos férmions e $\rho = \bar{\psi} \gamma_0 \psi$ é a densidade número dos férmions. Uma interpretação disso permite-nos dizer que o (a) aumento (redução) da interação através dos parâmetros de mediação aumenta o condensado

formado pelos campos espinorias fundamentais, que podem ser, por exemplo, nucleons (similar a ideia que aplicamos ao modelo escalar estudado no capítulo anterior).

Com esse modelo podemos construir um sistema térmico que represente um gás de férmions cujos aspectos fundamentais de interação são estudados via aproximação de campo médio. Similarmente do que foi realizado no capítulo 2, ou seja, as modificações devido as interações são incorporadas na massa e no potencial químico como foi realizado lá e vamos observar logo abaixo. A grande função de partição, de acordo com a representação dada no capítulo 1, Eq. (1.19), tem a forma:

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^{D^*} x (\mathcal{L}_E + \mu j_0) \right], \quad (3.9)$$

de tal forma que definimos uma topologia do tipo $\Gamma_D^\delta = \mathbb{S}^{11} \times \mathbb{R}^{D^*}$, onde $D^* = D - 1$, com \mathbb{S}^{11} correspondendo a compactificação do tempo imaginário ($\tau \in [0, \beta]$). O potencial químico μ está associado com a corrente de Noether devido a invariância da ação por meio da transformação global $U(1)$ e $j_0 \propto \bar{\psi}\gamma_0\psi$ é a corrente conservada. Diante disso, a Eq. (3.9), com a Lagrangiana dada na Eq. (3.6), se transforma em,

$$Z = C \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\mathcal{S}^F}, \quad (3.10)$$

onde \mathcal{S}^F é ação para a teoria fermiônica na aproximação de campo médio dada por:

$$\mathcal{S}^F = - \int_0^\beta d\tau \int d^{D^*} x \bar{\psi} [-\gamma^0 \partial_\tau + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - M_* + \mu_* \gamma_0] \psi, \quad (3.11)$$

e a constante C é escrita na forma,

$$C = \exp \left[\beta V_{D^*} \left(\frac{1}{2} M_\omega^2 \langle \omega^0 \rangle - \frac{1}{2} M_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2 - \frac{a}{3!} \langle \sigma \rangle^3 - \frac{b}{4!} \langle \sigma \rangle^4 \right) \right], \quad (3.12)$$

sendo V_{D^*} o hiper volume no espaço. Os termos M_* e μ_* na Eq. (3.11) são:

$$M_* = M_\psi - g_{\psi\sigma} \langle \sigma \rangle, \quad (3.13)$$

$$\mu_* = \mu - g_{\psi\omega} \langle \omega^0 \rangle. \quad (3.14)$$

Essas duas expressões mostram que os campos escalar e vetorial modificam as massas e potencial químico dos bárions em um meio denso e aquecido. Portanto, na ordem mais baixa as interações são manifestadas nas Eqs. (3.13) e (3.14), de modo análogo ao modelo descrito no capítulo 2 para campos escalares carregados. Embora, as massas efetivas dos dois modelos tenham uma forma ligeiramente diferentes.

Como o campo $\psi(\vec{x}, \tau)$ é anti-periódico no intervalo $0 < \tau < \beta$ podemos expandi-los em uma série de Fourier no espaço dos momentos:

$$\psi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} + \omega_n \tau)} \psi(\omega_n, \vec{p}), \quad (3.15)$$

de modo que neste caso as frequências de Matsubara são $\omega_n = \frac{\pi(2n+1)}{\beta}$, onde n é todo e qualquer inteiro.

Se substituirmos a Eq. (3.15) no argumento da Eq. (3.11) e usando a identidade (2.16), obtemos para \mathcal{S}^F :

$$\mathcal{S}^F = -\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \psi_{n,\vec{p}}^* [(i\omega_n - \mu_*) + \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - M_* \gamma^0] \psi_{n,\vec{p}}, \quad (3.16)$$

Notando-se que os espiniores ψ^* e ψ são funções com 4 componentes e que os termos dentro dos colchetes na Eq. (3.16) contém as matrizes γ que tem uma estrutura 4×4 , Eq. (3.2), e os campos obedecem a álgebra de Grassmann³ a integração da Eq. (3.10) deve ser feita levando em conta que (Diferentemente do que usamos para o campo bosônico, Eq. (2.17)):

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi} M \psi} = \det M. \quad (3.17)$$

Usando a representação de Dirac para as matrizes γ e desenvolvendo o termo entre colchetes na Eq. (3.16) chegamos a seguinte notação matricial,

$$\begin{bmatrix} i\omega_n - \mu_* - \vec{p} & 0 & M_* & 0 \\ 0 & i\omega_n - \mu_* + \vec{p} & 0 & M_* \\ M_* & 0 & i\omega_n - \mu_* + \vec{p} & 0 \\ 0 & M_* & 0 & i\omega_n - \mu_* - \vec{p} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Agora, colocando a Eq. (3.16) na integral funcional Eq. (3.10) encontramos uma expressão idêntica a Eq. (3.17). Logo, devemos resolver o determinante da matriz dada na Eq. (3.18) para encontrar a grande função de partição (com a atenção aos somatórios que aparecem). Após essas manipulações e tirar o logaritmo natural do resultado desse processo encontramos a grandeza de interesse, *o grande potencial termodinâmico* para esse sistema fermiônico, que é (mais detalhes sobre essas manipulações matemática ver Ref. [1], capítulo 2, seção 2.5):

$$\frac{U(T, \mu_*)}{V_D} = U_{\sigma,\omega} + \frac{\eta}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln[(\omega_n - \mu_*)^2 + p^2 + M_*^2], \quad (3.19)$$

onde o termo $U_{\sigma,\omega}$ é expressão dada pela Eq. (2.19) do capítulo anterior e η é o fator de degenerescência (que pode assumir os valores de acordo com a natureza dos férmions, por exemplo, $\eta = 4$ para matéria nuclear e $\eta = 2$ para matéria de nêutrons). Essa expressão do grande potencial termodinâmico é diferente em alguns aspectos daquela encontrada para o sistema bosônico no capítulo anterior. Além da frequência de Matsubara ser anti-peródica, aparece um fator (-1) no último termo da Eq. (3.19) devido a integração sobre as variáveis de Grassmann, consequentemente observamos um sinal positivo ali.

³Essa álgebra surge devido a estrutura natural de anti-comutação dos campos fermiônicos (Variáveis de Grassmann).

Essa expressão para o grande potencial termodinâmico pode ser estendido a uma topologia mais geral de modo a implementar no sistema restrições geométricas, como tínhamos discutido na última seção do capítulo 1, para isso devemos tomar: $\Gamma_D^\delta = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{1_2} \times \dots \times \mathbb{S}^{1_\delta} \times \mathbb{R}^{D-\delta}$, com \mathbb{S}^1 correspondendo a compactificação do tempo imaginário e $\mathbb{S}^{1_2}, \dots, \mathbb{S}^{1_\delta}$ diz respeito a $\delta - 1$ compactificações de dimensões espaciais. Assim, reescrevemos a Eq. (3.19) na forma,

$$\frac{U(T, \mu_*, \{L_i\})}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + \frac{\eta A_L}{2\beta} \sum_{n, \{n_i\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-\delta} p}{(2\pi)^{D-\delta}} \ln \left[(\omega_n - \mu_*)^2 + \sum_{i=1}^d \omega_{n_i}^2 + p^2 + M_*^2 \right], \quad (3.20)$$

com $A_L = (L_1 \cdot \dots \cdot L_d)^{-1}$, V_D volume encerrada pelas partículas e $\{\omega_{n_i}\}$ ⁴ sendo as frequências de Matsubara para as respectivas compactificações de acordo com as ideias desenvolvidas no primeiro capítulo desta tese. Por fim, d representa o número de dimensões espaciais compactificadas.

Essa última expressão para o grande potencial termodinâmico Eq. (3.20) pode ser reescrita de maneira a facilitar a manipulação matemática (uma alternativa utilizada no capítulo 2), façamos:

$$\frac{U(\beta, \mu_*, \{L_i\})}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + \frac{\eta A_L}{2\beta} Y'(0), \quad (3.21)$$

onde $Y(s)$ é igual a Eq. (2.23) com a alteração da frequência de Matsubara para bósons trocada por aquela devido a férmions. Realizando a integração sobre o espaço dos momentos utilizando o método de regularização dimensional, Eq. (B.1), encontramos,

$$Y(s) = J(s, \delta) E_\delta^{M_*^2} \left(s - \frac{D-\delta}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \dots, \frac{4\pi^2}{L_d^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right), \quad (3.22)$$

com

$$J(s, \delta) = \frac{1}{(4\pi)^{(D-\delta)/2}} \frac{\Gamma(s - \frac{D-\delta}{2})}{\Gamma(s)}. \quad (3.23)$$

Aqui $E_\delta^{M_*^2}$ é a soma dada na Eq. (2.25), que é a função Zeta Epstein-Hurwitz não-homogênea tratada no apêndice A, que a única diferença em relação ao caso bosônico é os termos $\{b_i\}$ que são todos não-nulos para $i > 2$ agora. Diante disso, podemos usar os detalhes apresentados no capítulo 2 para chegar a Eq. (2.27) passando através da Eq. (2.26) e encontrar o grande potencial termodinâmico descrito na Eq. (3.21). Assim, encontramos,

$$\frac{U(T, \mu, \{L_i\})}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v + \frac{\eta}{\pi^{D/2}} \bar{E}_\delta^{M_*^2} \left(-\frac{D-\delta}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \dots, \frac{4\pi^2}{L_d^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \left\{ \frac{1}{2} \right\}_d \right), \quad (3.24)$$

⁴Em todos os casos desta tese o simbolo $\{a\}_d$ representa um conjunto de elementos a_i com $i = 1, \dots, d$.

onde U_v é o termo de vácuo (primeiro termo da função $E_\delta^{M_*^2}$) e a grandeza $\bar{E}_\delta^{M_*^2}$ é todos os termos da função Zeta Epstein-Hurwitz escrita analiticamente sem o primeiro. E valem aqui as considerações feitas para chegar na expressão semelhante para o sistema de bósons sobre a razão $\frac{A_L}{2\beta}$.

A forma mais simples da Eq. (3.24) descreve o grande potencial termodinâmico sem dimensões compactificadas, traduzindo o caso com $\delta = 1$ de uma topologia do tipo: $\Gamma_D^\delta = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{D-1}$, para um sistema fermiônico. Neste caso a função Zeta Epstein-Hurwitz não-homogênea proporciona uma série do tipo $\bar{E}_1^{M_*^2} \left(-\frac{D-1}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} - \frac{1}{2} \right)$, com $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$, temos:

$$\frac{U(T, \mu_*)}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v - \frac{\eta}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{D/2} K_{D/2}(n\beta M_*). \quad (3.25)$$

Aqui aparece uma fase $(-1)^n$ diferentemente daquilo que ocorre no caso bosônico, proporcionada pela anti-periodicidade dos férmions.

Agora podemos determinar os campos médios $\langle \sigma \rangle$ e $\langle \omega^0 \rangle$ minimizando o grande potencial termodinâmico com respeito a eles (equação de estado). Isto é feito resolvendo numericamente as equações de estado:

$$\frac{\partial U}{\partial \langle \sigma \rangle} = 0 \quad (3.26)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial \langle \omega^0 \rangle} = 0. \quad (3.27)$$

De modo que encontramos as seguintes relações para densidade escalar e a densidade número,

$$\rho_s = \frac{\eta g_{\phi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{D/2-1} K_{D/2-1}(n\beta M_*), \quad (3.28)$$

e

$$\rho = \frac{\eta g_{\phi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n\beta) \sinh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{D/2} K_{D/2}(n\beta M_*), \quad (3.29)$$

respectivamente. A partir das Eqs. (3.7) e (3.8) obtemos os campos médios. Observe, mais uma vez, que temos um conjunto de duas equações acopladas em σ e ω , que deve ser resolvido numericamente. Do mesmo modo que o caso do capítulo 2, quando considerado o mesmo número de bárions e antibárions, ou seja, $\mu_* = 0$, a função sinh se anula na Eq. (3.29), e isso implica que $\rho = 0$ e pela Eq. (3.8) encontramos $\langle \omega^0 \rangle = 0$. Portanto, da mesma forma que o caso anterior com bósons, as interações repulsivas não contribuem para as quantidades termodinâmicas de interesse nestas condições de equilíbrio químico.

Agora, podemos derivar outras quantidades termodinâmicas relevantes por meio do grande potencial termodinâmico dado pela Eq. (3.25). Por exemplo, a pressão é dada por:

$$\begin{aligned} p(T, \mu_*) &\equiv -\frac{\partial U}{\partial V_D} \\ &= -U_{\sigma, \omega} - U_v + \frac{\eta}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_*}{n\beta}\right)^{D/2} K_{D/2}(n\beta M_*). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Portanto, os valores de $\langle \sigma \rangle$ e $\langle \omega^0 \rangle$ que extremiza a pressão devem também satisfazer as Eqs. (3.7) e (3.8) através das Eqs. (3.28) e (3.29). Como podemos observar o último termo da pressão nada mais é que a contribuição de um Gás de Fermi [1] em função da massa efetiva e do potencial químico efetivo definidos nas Eqs. (3.13) e (3.14), respectivamente.

Além disso, a entropia e a densidade de energia em equilíbrio químico são dadas pelas expressões,

$$\begin{aligned} s(T) &\equiv \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\mu_*=0} \\ &= \frac{\eta}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{M_*}{n}\right)^{\frac{D}{2}} n M_* K_{\frac{D}{2}+1}(n\beta M_*), \end{aligned} \quad (3.31)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(T) &\equiv (-p + Ts)_{\mu_*=0} \\ &= \frac{1}{2} M_\sigma \langle \sigma \rangle^2 + \frac{\eta}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{M_*}{n\beta}\right)^{\frac{D}{2}} \left[3K_{\frac{D}{2}}(n\beta M_*) + n\beta M_* K_{\frac{D}{2}-1}(n\beta M_*) \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

respectivamente.

3.1.1 Sistema com Dimensão Espacial Compactificada

Os efeitos de tamanho ou/e da geometria desempenham um papel importante no cenário das interações fortes em diversos sistemas em baixas energias, embora já tenhamos mostrado isso no capítulo anterior é necessário fazê-lo novamente devido ao número de aplicações que o modelo de Walecka espinorial possa propiciar. Neste sentido, vamos descrever as estruturas térmicas de interesse com as principais modificações engendradas por causa da compactificação de dimensões espaciais.

3.1.1.1 Uma Dimensão Espacial Compactificada Para começar, vamos considerar uma topologia que reproduz a ideia de uma dimensão compactificada $d = 1$, que

simbolicamente é expressa assim: $\Gamma_D^2 = \mathbb{S}^{1_1} \times \mathbb{S}^{1_2} \times \mathbb{R}^{D-2}$. Da Eq. (3.20) seguindo a prescrição que orientou-nos a chegar na Eq. (3.24) encontramos o grande potencial termodinâmico para essa geometria na forma,

$$\frac{U(T, \mu_*, L_1)}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v + \frac{\eta}{\pi^{D/2}} \bar{E}_2^{M_*^2} \left(-\frac{D-2}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (3.33)$$

De forma que os termos $U_{\sigma, \omega}$ e U_v são dados pelas Eqs. (2.19) e (B.10), respectivamente.

Além da expressão acima para o grande potencial termodinâmico devemos encontrar as equações de estado através das Eqs. (3.26) e (3.27) para os campos σ e ω . Nestas condições encontramos a densidade escalar e a densidade número,

$$\rho_s = \frac{g_{\psi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \bar{E}_2^{M_*^2} \left(-\frac{D-2}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3.34)$$

e

$$\rho_0 = \frac{g_{\psi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \beta \sinh(n \mu_* \beta) X_{\beta L}^n, \quad (3.35)$$

respectivamente, onde a função $\bar{E}_k^{M_*^2}$ representa a função $\bar{E}_k^{M_*^2}$ com a redução das potências e do argumento das funções de Bessel em uma unidade, na forma: $(x/y)^\nu K_\nu(xy) \rightarrow (x/y)^{\nu-1} K_{\nu-1}(xy)$. E a variável $X_{\beta L}^n$ definimos como:

$$\begin{aligned} X_{\beta L}^n &= \left(\frac{M_*}{n\beta} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}}(n\beta M_*) + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{n_j=1}^{\infty} (-1)^{n_j} \left(\frac{M_*}{\sqrt{n^2 \beta^2 + n_j^2 L_j^2}} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2 \beta^2 + n_j^2 L_j^2} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usamos $\alpha = 1$ na Eq. (3.36) para adicionarmos na Eq. (3.35). Ademais, as equações acopladas ganham um novo parâmetro: o tamanho do sistema L em relação aquelas Equações de estado para a matéria no bulk, Eqs. (3.28) e (3.29). Não obstante, continuamos com $\langle \omega^0 \rangle = 0$ quando $\mu_* = 0$, e neste caso, existe apenas a contribuição do campo σ para as grandezas termodinâmicas.

3.1.1.2 Duas Dimensões Espaciais Compactificadas

Para esse caso temos uma topologia com a seguinte estrutura, $\Gamma_D^3 = \mathbb{S}^{1_1} \times \mathbb{S}^{1_2} \times \mathbb{S}^{1_3} \times \mathbb{R}^{D-3}$, sendo $d = 2$. Executando o mesmo processo para encontrar a Eq. (3.33) e respeitando a geometria dada aqui encontramos para o grande potencial termodinâmico a expressão:

$$\frac{U(T, \mu, L_1, L_2)}{V_D} = U_{\sigma, \omega} + U_v + \frac{1}{\pi^{D/2}} \bar{E}_3^{M_*^2} \left(-\frac{D-3}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}; i \frac{\mu_* \beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (3.37)$$

E de acordo com o procedimento para obter as equações de estado através das Eq. (3.26) e (3.27) para os campos σ e ω , chegamos as densidades escalar e número nas formas,

$$\rho_s = \frac{g_{\psi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \bar{E}_2^{M_*^2} \left(-\frac{D-3}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}; i \frac{\mu_*\beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3.38)$$

e

$$\rho = \frac{g_{\psi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n\beta \sinh(n\mu_*\beta) X_{\beta LL}^n, \quad (3.39)$$

respectivamente. Com a seguinte definição para a função $X_{\beta LL}^n$,

$$\begin{aligned} X_{\beta LL}^n &= X_{\beta L}^n + 2^2 \sum_{i < j=1}^{\lambda} \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} (-1)^{n_i+n_j} \left(\frac{M_*}{\sqrt{n^2\beta^2 + n_i^2 L_i^2 + n_j^2 L_j^2}} \right)^{\frac{D}{2}} \times \\ &\times K_{\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2\beta^2 + n_i^2 L_i^2 + n_j^2 L_j^2} \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $X_{\beta L}^n$ é dado na Eq. (3.36) com $\alpha = 2$ e no caso de interesse aqui $\lambda = 2$. As equações acopladas ganham dois novos parâmetros a saber: o tamanho finito de duas coordenadas espaciais compactificadas L_1 e L_2 . Para o caso de equilíbrio químico $\mu_* = 0$, o campo mesônico vetorial leve não contribui para o sistema térmico como nos casos anteriores.

3.1.1.3 Três Dimensões Espaciais Compactificadas Por último, encontramos as funções termodinâmicas de interesse para uma topologia do tipo: $\Gamma_D^\delta = \mathbb{S}^{1^1} \times \mathbb{S}^{1^2} \times \mathbb{S}^{1^3} \times \mathbb{S}^{1^4} \times \mathbb{R}^{D-4}$, que representa o caso $d = 3$. Fazendo as mesmas realizações matemáticas para chegar a Eq. (3.33), com as ideias física respeitadas (as frequências de Matsubara devido as três compactificações espaciais), o grande potencial termodinâmico, torna-se

$$\begin{aligned} \frac{U(T, \mu_*, L_1, L_2, L_3)}{V_D} &= U_{\sigma, \omega} + U_v + \\ &+ \frac{1}{\pi^{D/2}} \bar{E}_4^{M_*^2} \left(-\frac{D-4}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}, \frac{4\pi^2}{L_3^2}; i \frac{\mu_*\beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Da mesma forma que as realizações anteriores, as equações de estado através das Eq. (3.26) e (3.27) para os campos σ e ω , delas obtemos a densidade escalar e a densidade número,

$$\rho_s = \frac{g_{\psi\sigma}}{2\pi^{D/2}} \bar{E}_2^{M_*^2} \left(-\frac{D-4}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}, \frac{4\pi^2}{L_3^2}; i \frac{\mu_*\beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3.42)$$

e

$$\rho = \frac{g_{\psi\omega}}{\pi^{D/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n\beta \sinh(n\mu_*\beta) X_{\beta LLL}^n, \quad (3.43)$$

respectivamente. E definimos a função $X_{\beta LLL}^n$ como:

$$X_{\beta LLL}^n = X_{\beta L}^n + X_{\beta LL}^n + 2^3 \sum_{\{n_j\}=1}^{\infty} (-1)^{\sum_{j=1}^3 n_j} \left(\frac{M_*}{\sqrt{n^2 \beta^2 + \sum_{j=1}^3 n_j^2 L_j^2}} \right)^{\frac{D}{2}} K_{\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2 \beta^2 + \sum_{j=1}^3 n_j^2 L_j^2} \right). \quad (3.44)$$

Dessa forma, aqui $\alpha = 3$ na Eq. (3.36), $\lambda = 3$ na Eq. (3.40) e $\{n_j\} = n_1, n_2, n_3$. Portanto, as equações acopladas ganham três novos parâmetros: o tamanho finito de três coordenadas espaciais compactificadas L_1, L_2 e L_3 . Da mesma forma que os casos anteriores o campo ω não contribui para as grandezas termodinâmicas quando o número de bárions e antibárions são iguais.

3.1.2 Linha Crítica da Teoria de Campo Médio

De forma similar ao capítulo anterior buscamos nesta seção compreender a natureza da(s) fase(s) que o modelo descrito nas seções anteriores deste capítulo podem experimentar. Novamente, por simplificação, escolhemos o sistema térmico mais simples de todos os casos descritos acima: sem restrições de fronteira, sem a presença das auto-interações cúbica e quártica, sem levar em consideração o campo $\langle \omega^0 \rangle$, ou seja, um sistema com o mesmo número de bárions e anti-bárions e no espaço-tempo Euclidiano ($D = 4$). Como vamos observar abaixo temos que estudar, nessas circunstâncias, apenas a estrutura matemática da equação de auto-consistência dada pela Eq. (3.7) através da Eq. (3.28) com esses resultados implementados na Eq. (3.13) que determinam a massa efetiva em função da temperatura.

Numericamente observamos que existe um intervalo de temperatura que a massa efetiva tem três valores para uma determinada temperatura, deste modo a densidade de energia dada na Eq. (3.32) nesta região terá também valor triplo. Esse tipo de dependência conduz o sistema a uma transição de fase de primeira ordem aplicando a construção de Maxwell de maneira a evitar regiões instáveis, da mesma forma que descrevemos no capítulo anterior. Na Ref. [32] foi utilizado o calor específico para determinar essa transição, nota-se que este pode ser calculado da Eq. (3.32) que é linear em dM_*/dT , através de um pico desta função quando a M_* cai abruptamente. Nesse caminho o fato que notamos um ou dois pólos ou apenas um pico em dM_*/dT significa, respectivamente, que temos uma transição de fase de segunda ordem ou de primeira ordem ou comportamento termodinâmico contínuo.

Dessa maneira, devemos encontrar a estrutura de pólo da função dM_*/dT para encontrar a estrutura de fases do nosso modelo. É fácil construir dM_*/dT como uma função de

M_* e T , temos:

$$\frac{dM_*}{dT} = \frac{-\frac{\eta C_S^2 M_*^2}{\pi^2 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} K_2\left(\frac{nM_*}{T}\right)}{M_\psi + \frac{\eta C_S^2 M_*}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left[K_1\left(\frac{nM_*}{T}\right) + \left(\frac{nM_*}{T}\right) K_0\left(\frac{nM_*}{T}\right) \right]}, \quad (3.45)$$

onde $C_S^2 \equiv g_{\psi\sigma}^2/M_\sigma^2$. E os pólos dessa expressão no plano (M_*, T) permite determinar uma curva em que o denominador desaparece. Usando a Eq. (3.28) esta condição torna-se

$$M_\psi - \frac{\eta C_S^2 M_*^3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} K_0\left(\frac{nM_*}{T}\right) = 0. \quad (3.46)$$

Logo, o número de intersecções dessa linha com a solução da equação de auto-consistência mostra as características do regime de fases. O estudo numérico dessa questão conduz aos seguintes resultados ($\eta = 4$):

1. Para $C_S^2 < 342$ a linha representando a Eq. (3.46) não produz nenhum ponto de intersecção com a função dada pela Eq. (3.13) por meio da Eq. (3.28) assim temos um comportamento contínuo.
2. Para $C_S^2 \approx 342$ a linha representando a Eq. (3.46) produz apenas um ponto de intersecção com a M_* através da Eq. (3.28) assim temos uma transição de fase de segunda ordem.
3. Para $C_S^2 > 342$ a linha que é solução da Eq. (3.46) tem dois pontos de intersecção com a solução da equação de auto-consistência, Eq. (3.28), que inserida na massa efetiva e isso determina uma transição de fase de primeira ordem.

Assim, a ordem da transição de fase é fortemente dependente dos valores da constante de acoplamento e da massa do méson escalar leve. Portanto, a ideia nas próximas seções deste capítulo é estender a análise a uma melhor compreensão e o alcance físico dessa estrutura de fases. Além disso, por meio de outros parâmetros externos tais como: tamanho do sistema, geometria do sistema e campo magnético uniforme externo ou efeitos combinado desses, vamos observar como eles podem influenciar na dinâmica dos diagramas de fase. Também estudaremos se a natureza dessas transições de fases são afetadas por esse conjunto de parâmetros.

3.2 ESTRUTURA DE FASES

Nas seções anteriores descrevemos a estrutura teórica e as características do comportamento termodinâmico dos bárions na presença de um meio denso e quente constituído de outros hádrons leves em um espaço-tempo de dimensão D com e sem restrições espaciais. Agora vamos obter os resultados para $D = 4$, em especial, consideraremos o caso em que o

sistema está em equilíbrio químico, $\mu_* = 0$, de modo que o campo ω não contribuirá para as grandezas térmicas como mostrado acima. Portanto, focamos em resolver as equações de estado para encontrar $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle(T, L)$.

Do mesmo modo que antes, por conveniência, todas as quantidades físicas vão estar escalonadas através da massa do campo dos bárions ψ , M_ψ ,

$$\frac{U}{M_\psi^4} \rightarrow U, \quad \frac{T}{M_\psi} \rightarrow T, \quad \frac{\mu}{M_\psi} \rightarrow \mu, \quad \frac{\sigma}{M_\psi} \rightarrow \sigma, \quad \frac{M_\sigma}{M_\psi} \rightarrow M_\sigma, \quad \frac{M_*}{M_\psi} \rightarrow M_*, \quad LM_\psi \rightarrow L. \quad (3.47)$$

E também vamos fazer uso da normalização descrita na Eq. (2.55) para o grande potencial termodinâmico.

A discussão sobre a estrutura de fases do presente modelo é acompanhado por meio das mudanças dos parâmetros relevantes, em particular à influência das dimensões espaciais compactificadas nos três tipos de natureza de fase mostrada na seção 3.1.2. Neste sentido, as transições de fase são analisadas e comparadas com as diversas situações encontradas na literatura. Novamente, escolhemos o cenário mais simples para obter os resultados: com comprimento de todas as dimensões compactificadas sendo iguais, isto é, $L_i \equiv L$. Dessa forma, o sistema em $d = 1, 2, 3$: confinado em dois planos paralelos a uma distância L entre eles; confinado em um tubo infinitamente longo tendo uma seção transversal quadrada de área L^2 ; e uma caixa cúbica de volume L^3 .

3.2.1 Sistema sem Fronteiras Espaciais

Iniciamos nossa descrição com a situação mais simples para a estrutura de fase deste modelo relativístico, o sistema sem a presença de fronteiras ($L \rightarrow \infty$) e sem levarmos em consideração as auto-interações (cúbica e quártica). Essa descrição é semelhante ao cenário descrito na Ref. [32]. Porém, metodologicamente igual a descrição dada na Ref. [33].

Podemos ver da Fig. 3.1 um comportamento equivalente ao discutido no sistema bosônico: o aumento da magnitude da interação entre os campos ψ e σ faz o sistema experimentar uma transição de fase em valores de temperatura crítica menores. Interessante notar que o campo σ desempenha o papel em ligar mais fortemente as partículas fermiônicas, reduzindo a massa efetiva, da mesma forma que acontece para o caso escalar. Esse comportamento, como foi discutido na seção 3.1.2, regula a natureza da transição de fase de acordo com a magnitude da interação dos constituintes dessa matéria. Neste sentido, na Fig. 3.1 mostramos essas mudanças quando tomamos $M_\sigma = 0.53$ e no plano esquerdo exibimos a descrição do sistema no intervalo de magnitude da interação em $8.0 < g_{\psi\sigma} < 12.0$ de modo que a massa efetiva decresce suavemente com a temperatura com menor valor de $g_{\psi\sigma}$, cai suavemente em um determinado valor de temperatura crítica em $g_{\psi\sigma} = 9.8$ sinalizando uma transição de fase de segunda ordem e é abruptamente

reduzida quando antigi uma região triplamente degenerada para uma dada temperatura para $g_{\psi\sigma} > 9.8$ conduzindo o sistema a uma transição de fase de primeira ordem. Nas Refs. [119, 120] encontramos característica semelhante para o sistema fora do equilíbrio químico.

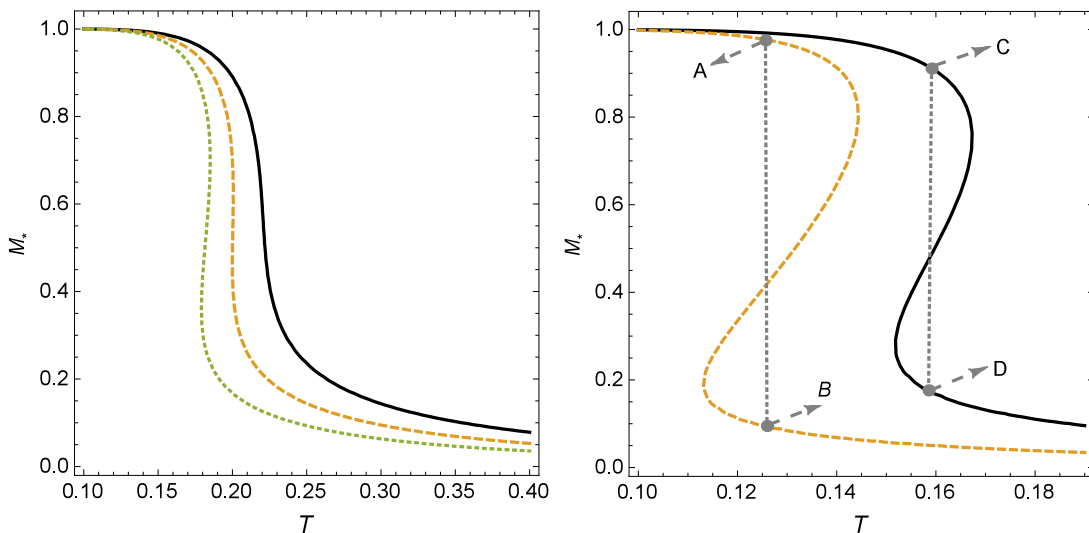


Figura 3.1: Gráfico da massa efetiva, Eq. (3.19) com Eq. (3.28), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $M_\sigma = 0.53$. Na esquerda: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $g_{\psi\sigma} = 8.0, 9.8$ e 12.0 , respectivamente. Na direita: as linhas sólida e tracejada representam $g_{\psi\sigma} = 26.0$ e 16.0 , respectivamente.

Especialmente, no lado direito da Fig. 3.1 plotamos as soluções da equação de estado e por conseguinte encontramos a massa efetiva como uma função da temperatura para grandes valores de $g_{\psi\sigma}$ que engendra uma transição de fase de primeira ordem, com o eixo de temperatura numa região próximo do ponto de transição. Os extremos do segmento de reta \overline{AB} e \overline{CD} indica um par ordenado das coordenadas (T, M_*) que fornece os valores da temperatura crítica e da massa efetiva (duplamente degenerada) que caracteriza a coexistência de fases. No caso em que $g_{\psi\sigma} = 26.00$ a queda abrupta da massa ocorre em $T \approx 0.125 - 0.126$, onde ela muda de ≈ 0.98 até ≈ 0.1 ; enquanto para $g_{\psi\sigma} = 16.00$ a transição de fase está em $T \approx 0.158 - 0.159$, onde M_* vai de ≈ 0.90 até ≈ 0.2 .

Por outro lado, já que a massa efetiva é relativamente pequena em altas temperaturas, observamos que o sistema depois que desacopla subitamente entra numa fase tipo férmions quase livres com massa zero. Isso se deve ao fato que a pressão escrita na Eq. (3.30) e a densidade de energia dada na Eq. (3.32) são ligeiramente constantes devido ao domínio apenas dos primeiros termos. Também, nota-se que a redução da massa efetiva dos hádrons no meio quente implica que a simetria quiral é parcialmente reataurada. Entretanto, essa característica é fortemente dominada pela magnitude da interação. Podemos entender esse aspecto no lado direito da Fig. 3.1 observando uma ligeira diferença

entre a posição no plano (M_*, T) dos pontos B e D .

Ainda podemos esclarecer mais detalhes sobre esse sistema através da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (3.25) normalizado pela Eq. (3.47). Na Fig. 3.1 plotamos a densidade do grande potencial termodinâmico como uma função da massa efetiva para $g_{\psi\sigma} = 16.00$ e $g_{\psi\sigma} = 26.00$ (gráficos da esquerda e direita, respectivamente) com $M_\sigma = 0.53$. Nota-se uma transição de fase de dois passos ocorrendo quando aumentamos a temperatura: de início com uma transição de fase de primeira ordem. Em baixas temperaturas o mínimo global está em um grande valor de M_* , o aumento de T faz o segundo mínimo em pequenos valores de M_* superar o primeiro, tornando-se mínimo absoluto, e para altas temperaturas o mínimo absoluto vai suavemente a zero. Assim, podemos observar mais uma vez que uma transição de fase de primeira ordem é deslocada para temperaturas críticas menores quando a magnitude da interação entre os campos ψ e σ aumenta.

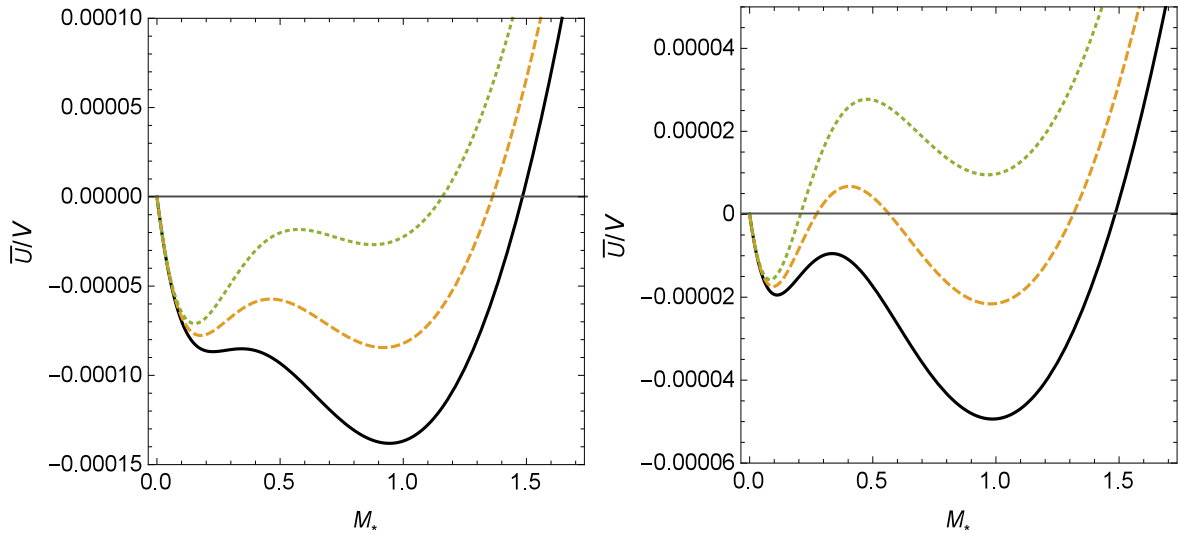


Figura 3.2: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (3.25), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.53$. Na esquerda: usamos $g_{\psi\sigma} = 16.0$, com as linhas cheia, tracejada e pontilhada representando $T = 0.153, 0.158$ e 0.163 , respectivamente. Na direita: fixamos $g_{\psi\sigma} = 26.0$, com as linhas cheia, tracejada e pontilhada representando, $T = 0.120, 0.125$ e 0.130 , na mesma ordem.

Na Fig. 3.3 esboçamos as soluções da equação de estado levando em conta os termos de auto-interação cúbica e quártica do campo escalar σ ($a, b \neq 0$). No plano esquerdo da Fig. 3.3 exibimos o comportamento da massa efetiva dos férmions para dois valores de acoplamento quártico, $b = -0.0019$ e 0.0 (a linha sólida apresenta o caso sem auto-interação), com $a = 0.0$, matendo fixo $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 8.0$ (regime contínuo da massa efetiva). Neste caso, constatamos que a presença do termo de auto-interação quártica a forma em M_* vai a zero é modificada induzindo a uma transformação da natureza da fase

em menores temperaturas. Essa característica é inversa daquilo que acontece no modelo bosônico discutido no capítulo anterior. No plano direito da Fig. 3.3 plotamos a massa efetiva também para dois valores do parâmetro de auto-interação quártica $b = -0.00085$ e 0.0 , com $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 12.0$. Neste setor do modelo em que a transição de fase de primeira ordem toma lugar a presença da auto-interação quártica reduz a temperatura crítica do sistema sem modificar a natureza dela.

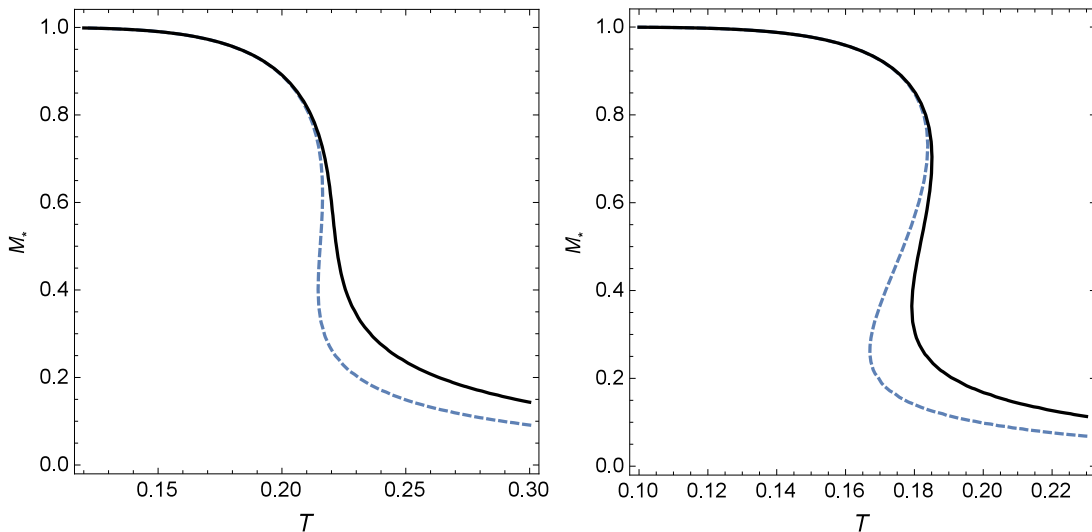


Figura 3.3: Gráfico da massa efetiva, Eq. (3.13) com Eq. (3.28), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $a = 0$ e $b \neq 0$, para $M_\sigma = 0.53$. Na esquerda: as linhas sólida e tracejada representam $b = -0.0019$ e 0.0 , respectivamente, onde fixamos $g_{\psi\sigma} = 8.0$. Na direita: as linhas sólida e tracejada representam $b = -0.00085$ e 0.0 , respectivamente, onde fixamos $g_{\psi\sigma} = 12.0$.

Esse modelo discutido até aqui na Ref. [32] é utilizado para estudar a transição de fase hadrônica da matéria nuclear através da massa efetiva dos nucleons e do calor específico mostrando que o sistema experimenta uma mudança abrupta nas suas características, em densidade bariônica $\rho \approx 0$, em $T_c \approx 200$ MeV. Podemos fazer uso da estrutura acima usando a escala dos prótons, onde $M_p = 931.49$ MeV, de tal maneira que para $M_\sigma = 0.53M_p \approx 493.69$ MeV e $g_{\psi\sigma} \approx 13.0$ encontramos uma temperatura de transição de fase igual a $T_c \approx 200$ MeV, também. De modo que a fase em altas temperatura tem o comportamento de um gás de férmions quase livre com massa efetiva zero com uma mudança constante na densidade de energia e na pressão. Essa característica é bastante similar ao esperado na transição de fase quiral em altas temperatura na QCD⁵ [121]. Já a matéria bariônica excitada é estudada na Ref. [122] sob condições análogas.

⁵Devemos lembrar que esse modelo não existe graus de liberdade internos dos hádrons, e essa analogia com a transição de fase de desconfinamento é uma alegoria meramente teórica.

Portanto, estudamos nesta seção o comportamento termodinâmico da matéria fermiônica a luz das ideias do modelo de Walecka interessado em aspectos físicos que modificam a estrutura de fase do sistema, tais como: magnitude da interação e a presença de termos de auto-interação cúbica ou quártica do campo médio $\langle\sigma\rangle$. Confirmamos as discussões da seção 3.1.2 sobre a natureza da transição de fase ser fortemente dependente da magnitude da interação entre os férmions e o meio hadrônico que ele está imerso. É centrado na compreensão das transições de fase de primeira ordem que ocorrem para valores de $g_{\psi\sigma} > 9.8$ vimos que, ao passo que aumentamos a magnitude dessa interação a temperatura crítica do sistema é reduzida. Vimos que, essa característica acontece também quando levamos em conta a presença da auto-interação quártica para valores $b < 0$. Por fim, aplicamos essas ideias a matéria nuclear e discutimos esse sistema como uma alternativa para descrever a transição hádron-quark.

3.2.2 Sistema com Dimensão Espacial Compactificada

Nesta seção, a ideia é investigar a massa efetiva do campo ψ em um meio denso e quente, com objetivo de verificar a influência das compactificações espaciais na estrutura de fase do modelo de Walecka. Neste sentido, as transições de fase são estudadas com foco no tamanho do sistema e também comparando os casos de uma, duas e três dimensões espaciais compactificadas. Aqui analisaremos a situação $g_{\psi\sigma} > 9.8$ e $M_\sigma = 0.53$, em que a transição de fase de primeira ordem é favorecida, sem levar consideração a presença das auto-interações cúbica e quártica.

Na Fig. 3.4 disponibilizamos o gráfico com os valores de massa efetiva M_* que são soluções para Eq. (3.13), para $d = 1$ (uma dimensão espacial compactificada), determinada com uso da Eq. (3.34), para diferentes valores da coordenada compactificada, mantendo fixo a constante de acoplamento e massa do méson sigma, $g_{\psi\sigma} = 26.0$ e $M_\sigma = 0.53$, respectivamente. Podemos observar que o comportamento da massa efetiva é modificado pela presença da fronteira espacial; o intervalo da temperatura onde ocorre a fase mista é espalhada quando o comprimento da coordenada compactificada diminui. Esse resultado pode ser interpretado como: a fase simétrica é favorecida pela redução do tamanho do sistema.

Também, exibimos na Fig. 3.5 os valores de massa efetiva como uma função do inverso do comprimento ($x = 1/L$), no caso de uma dimensão espacial compactificada. Observamos que M_* permanece sem maiores mudanças para grandes valores de L , onde as flutuações devido aos efeitos de tamanho não são relevantes. Entretanto, quando o tamanho do sistema diminui a massa cai abruptamente. Deste modo, pode-se inferir um tamanho crítico L_c da dimensão espacial compactificada em que a transição de fase descontínua ocorre. Além disso, em baixos valores de L_c são induzidos em baixas temperaturas.

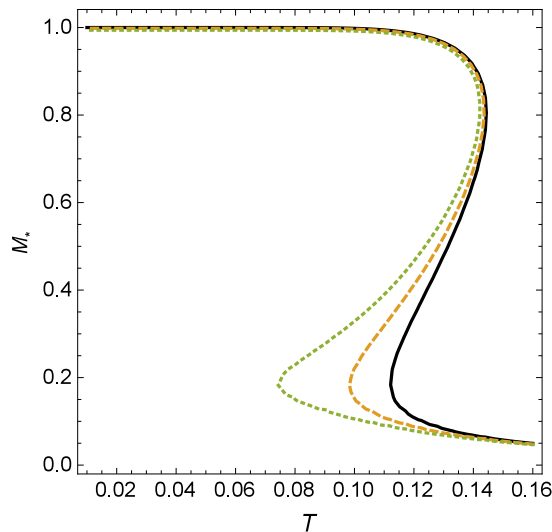


Figura 3.4: Gráfico da massa efetiva, Eq. (3.13) com Eq. (3.34), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com uma dimensão compactificada $d = 1$. Fixamos $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 26.00$, Com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $L = 15.0$, 10.0 e 9.0 , respectivamente.

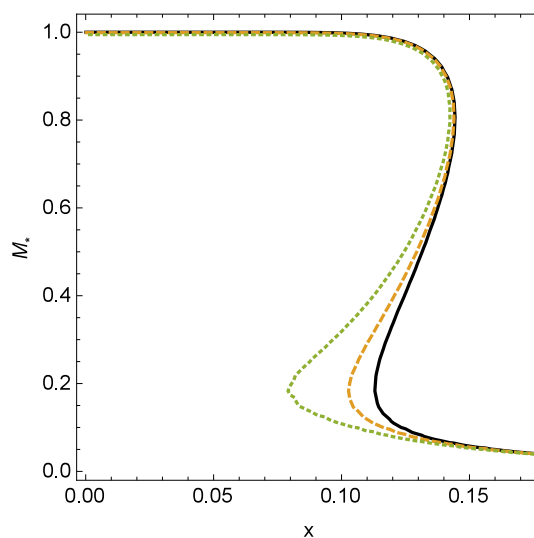


Figura 3.5: Gráfico da massa efetiva, Eq. (3.13) com Eq. (3.34), como uma função do inverso do tamanho do sistema ($x = 1/L$), em equilíbrio químico, com uma dimensão compactificada $d = 1$. Fixamos $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 26.00$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $T = 0.050$, 0.095 e 0.110 , respectivamente.

Podemos observar nas Figs. 3.4 e 3.5 que a fase em altas temperaturas no qual temos um sistema tipo gás de férmions quase livre com massa efetiva aproximadamente zero não depende do tamanho do sistema (as curvas, sólida, tracejada e pontilhada, em qualquer região desse intervalo tem a mesma coordenada no plano $M_* \times T$). Logo, as grandezas termodinâmicas como a pressão e a densidade de energia, por exemplo, devem ter o mesmo

valor para qualquer tamanho do sistema L em altas temperaturas.

Na Fig. 3.6 traçamos gráficos da densidade do grande potencial termodinâmico, definido na Eq. (3.33) para $d = 1$, em função da massa efetiva para diferentes temperaturas. Consideramos nos gráficos à esquerda e à direita diferentes valores de L . Eles confirmam a natureza de primeira ordem da transição como descrevemos acima. Além disso, observamos que a temperatura crítica diminui quando o tamanho L é reduzido. Explicitamente, em unidades de M_ψ , obtemos, $T_c(L = 15.0) = 0.1254$ e $T_c(L = 10.0) = 0.1200$. Este resultado mostra que a redução do tamanho do sistema L inibe a fase quebrada [123], em acordo com a avaliação da Fig. 3.4.

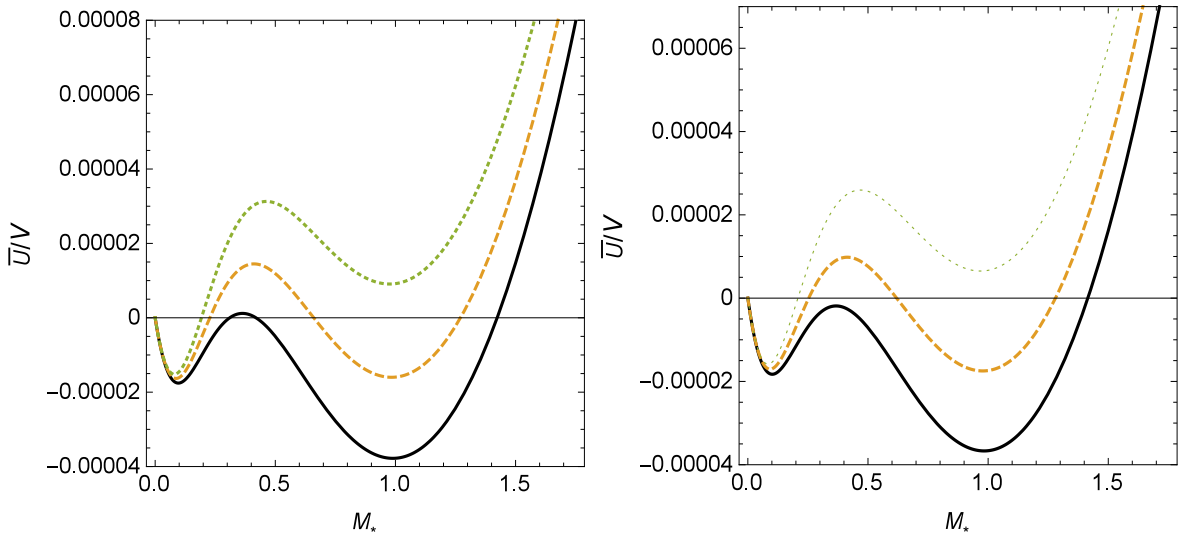


Figura 3.6: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (3.33), como uma função da massa efetiva, com uma dimensão compactificada, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 26.0$. Na esquerda: temos $L = 10.0$, com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $T = 0.1150, 0.1200$ e 0.1250 , respectivamente. Na direita: fixamos $L = 15.0$, com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando, $T = 0.1220, 0.1254$ e 0.1293 , na mesma ordem.

Continuamos nossa discussão com a Fig. 3.7, em que é exibida a densidade do grande potencial termodinâmico normalizado definido na Eq. (3.33) para $d = 1$ como função da massa efetiva, para diferentes valores de L e em temperatura fixa. Notamos que o mínimo global do sistema é descontinuamente dirigido da fase com grandes valores da M_* para uma outra de menor valor, e vai ligeiramente para zero à medida que L diminui.

Completamos esta investigação com a dependência da estrutura de fases com o número de dimensões espaciais compactificada. Dessa forma, na Fig. 3.8 plotamos os valores da massa efetiva, com o uso das equações de estados dadas pelas Eqs. (3.34), (3.38) e (3.42), em função da temperatura para três situações de compactificação espacial $d = 1, 2, 3$, com mesmo comprimento de dimensão espacial L , que é mantido fixo. Observamos que o

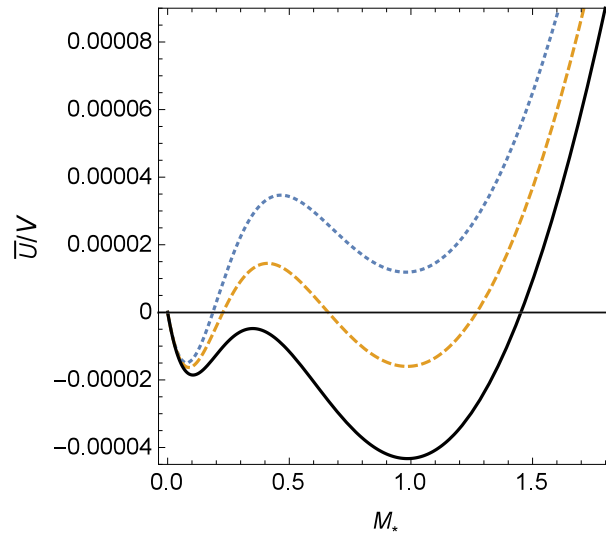


Figura 3.7: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (3.33), como uma função da massa efetiva, com uma dimensão compactificada, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\psi\sigma} = 26.0$. Com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $L = 13.0$, 10.0 e 9.0 , respectivamente, em $T = 0.120$.

intervalo da temperatura em que a fase mista acontece é torna-se maior quando o número de dimensões espaciais compactificada aumenta, com a fase simétrica sendo favorecida por valores maiores de d . Logo, uma das consequências de aumentar o número de dimensões espaciais compactificada é causar a redução da temperatura em que a transição ocorre [124].

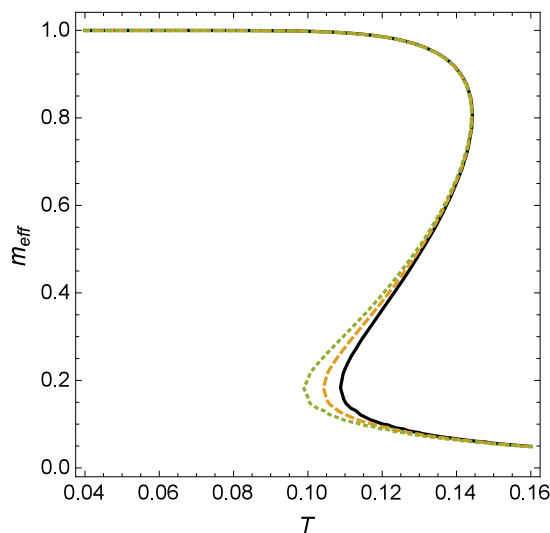


Figura 3.8: Gráfico da massa efetiva, Eq. (3.13) com uso das Eqs. (3.34), (3.38) e (3.42), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 26.00$. Fixamos $L = 12.0$, as linhas sólida, tracejada e pontilhada representam respectivamente os casos de $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$ compactificações espaciais.

Somando aos resultados anteriores seguimos a estratégia de obter a estrutura de fase do sistema, na Fig. 3.9 apresentamos a densidade do potencial termodinâmico para os casos $d = 1, 2, 3$, definida nas Eqs. (3.33), (3.37) e (3.41), como uma função da massa efetiva, para um valor fixo da coordenada espacial compactificada de tamanho L . Notamos que o sistema é dirigido da phase quebrada para a fase desordenada, quando o número de dimensões compactificadas d aumenta. O aumento de d favorece a fase não-quebrada.

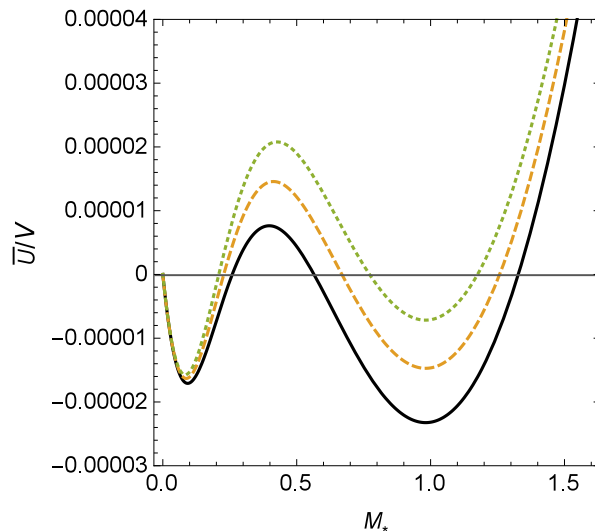


Figura 3.9: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico das Eqs. (3.33), (3.37) e (3.41), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.25$ e $g_{\psi\sigma} = 26.0$. Fixamos $L = 12.0$, com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando respectivamente os casos $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$ dimensões espaciais compactificada, em $T = 0.123$.

Desses resultados podemos estimar a relevância do tamanho finito do sistema na transição de fase hadrônica da matéria nuclear discutida na seção anterior. Tomando os mesmos valores de referências discutido anteriormente na escala da massa dos prótons quando temos um valor de $L = \frac{L}{M_p} \approx 2.0$ fm, encontramos uma temperatura crítica de $T_c \approx 185$ MeV. Essa diminuição em relação ao caso sem restrição espacial é mais próxima de recentes resultados experimentais que mostram uma temperatura de desconfinamento da ordem de 160 MeV [125].

Portanto, obtivemos nesta seção as principais características manifestadas devido a presença de uma fronteira no sistema. Vimos que, a transição de fase de primeira ordem não se modifica com a forma geométrica do sistema, porém a temperatura crítica (em valores menores) é afetada quando reduzimos o tamanho da coordenada espacial compactificada. Ainda observamos que a redução do tamanho do sistema e o aumento do número de dimensões espaciais compactificadas tende a favorecer a fase simétrica.

3.3 SISTEMA NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EXTERNO

Nesta seção iremos investigar as contribuições de um campo magnético uniforme nos diagramas de fases do modelo em questão. A compreensão de efeitos magnéticos na matéria fortemente interagente é de grande interesse para a descrição por exemplo, da matéria nuclear em estrelas compactas devido a grandes campos magnéticos presentes na superfície e no interior desses objetos [126, 127].

3.3.1 Modelo

Como discutimos no capítulo anterior a presença de um campo magnético uniforme externo no sistema é acompanhada da substituição da derivada ordinária que atua sobre o campo ψ na densidade de Lagrangiana dada na Eq. (3.1) pela derivada covariante, escrita na Eq. (2.56). Dessa maneira, a equação de movimento Eq. (3.3) para o campo espinorial deve ser reescrita na forma:

$$[i\gamma^\mu D_\mu - M_* - ig_{\psi\omega}\gamma^0\langle\omega_0\rangle]\psi = 0. \quad (3.48)$$

Depois de algumas manipulações matemática cada componente de ψ satisfaz a equação,

$$\left[\vec{D}^2 + (i\partial_0 - g_{\psi\omega}\langle\omega_0\rangle)^2 - M_*^2 - q(\vec{\sigma} \cdot \vec{H})\right]\psi = 0, \quad (3.49)$$

onde $\vec{D} = \vec{p} - q\vec{A}$, $\vec{\sigma}$ as matrizes de Pauli e \vec{H} o campo magnético. Considerando a situação de nosso interesse, tomamos $D = 4$, e escolhendo o calibre de Landau, dado na Eq. (2.58), a Eq. (3.49) tem a forma de um oscilador harmônico. Desse modo, as autofunções e espectro de energia [6] para Eq. (3.49) são,

$$\psi_l(\mathbf{x}) = e^{i(p_0x_0 - p_1x_1 - p_3x_3)} \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} \left(\frac{eH}{\pi}\right)^{1/4} H_l[X_2] e^{-\frac{1}{2}X_2^2}, \quad (3.50)$$

e

$$E = \pm \sqrt{p_3^2 + M_*^2 + qH(2l + 1 - s) - g_{\psi\omega}\langle\omega^0\rangle}, \quad (3.51)$$

respectivamente, onde H_l são os polinômios de Hermite mais uma vez, $l = 0, 1, 2, \dots$ os rótulos de Landau, $X_2 = \sqrt{eH}\left(x_2 - \frac{p_1}{eH}\right)$ e $s = \pm 1$ é variável de spin.

Depois dessas descobertas podemos escrever a ação que aparece na grande função de partição, Eq. (3.10), na forma

$$\mathcal{S}^F = - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi} [-\gamma^0 \partial_\tau + i\vec{\gamma} \cdot \vec{D} - M_* + \mu_* \gamma_0] \psi. \quad (3.52)$$

A mudança que realizamos da Eq. (3.48) para Eq. (3.49) pode ser implementada no integrando da Eq. (3.52). Dessa maneira encontramos a ação, do campo fermiônico nas condições dadas, na forma:

$$\mathcal{S}^F = - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi} [(\partial_0 - \mu_*)^2 + \vec{\nabla}^2 - 2iqHx_1\partial_{x_2} - (qH)^2x_1^2 - M_*^2 - q(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})] \psi. \quad (3.53)$$

Lembrando que devemos assumir a redução dimensional dada no capítulo anterior através da Eq. (2.61).

Da mesma forma que tínhamos afirmado no começo deste capítulo o campo $\psi_l(\vec{x}, \tau)$ é anti-periódico no intervalo $0 < \tau < \beta$ assim podemos expandi-los em uma série de Fourier no espaço dos momentos. Logo, o campo dado na Eq. (3.50) é escrito na forma,

$$\psi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\omega_n \tau + \vec{p} \cdot \vec{x})} \psi_{l,s,n}(\omega_n, \vec{p}). \quad (3.54)$$

Portanto, desenvolvendo a ação \mathcal{S}^F dada acima na Eq. (3.53), com o campo dado pela Eq. (3.54), obtemos

$$\mathcal{S}^F = -\beta \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p_3} \psi_{l,s,n}^* [(i\omega_n - \mu_*)^2 + p_3^2 - M_{l,s}^2] \psi_{l,s,n}, \quad (3.55)$$

onde, para caráter de simplificação definimos:

$$M_{l,s} = \sqrt{M_*^2 + 2qH(2l + 1 - s)}. \quad (3.56)$$

Para obtermos o grande potencial termodinâmico do sistema fermiônico sob a influência de um campo magnético devemos resolver a integração funcional dada na Eq. (3.10) usando a expressão dada na Eq. (3.55) e depois tirar o logaritmo natural do resultado. Levando em conta a identidade dada pela Eq. (2.16), a relação de ortonormalidade dos polinômios de Hermite dada no capítulo anterior, aplicando a condição dada na Eq. (3.17), encontramos,

$$\frac{U(T, \mu_*, H)}{V} = U_{\sigma, \omega} + \frac{qH\eta}{2\pi} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_3}{(2\pi)} \ln[(i\omega_n - \mu_*)^2 + p_3^2 + M_{l,s}^2]. \quad (3.57)$$

Essa última expressão tem a forma mais simples o caso em que não existe restrições espaciais. Dessa forma, a topologia será representada por: $\Gamma_2^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$, apenas a variável temporal compactificada, neste caso. Logo, implementando todas as manipulações matemáticas necessárias (Da Eq. (2.18) até a Eq. (2.27)) encontramos o grande potencial termodinâmico de férmions carregados na presença de um campo magnético uniforme externo,

$$\frac{U(T, \mu, H)}{V} = U_{\sigma, \omega} + U_v^H - \frac{qH\eta}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{M_{l,s}}{n\beta} \right) K_1(n\beta M_{l,s}) \quad (3.58)$$

onde $U_v^H = U_v + U_\psi^H$, onde U_ψ^H é a contribuição do vácuo magnetizado (Observar com atenção o apêndice B), dado por:

$$U_\psi^H = \frac{\eta(qH)^2}{4\pi^2} \left[\zeta'(-1, z) - \frac{1}{2}(z^2 - z) \ln z + \frac{1}{4}z^2 \right], \quad z \equiv \frac{M_*^2}{2qH} \quad (3.59)$$

onde $\zeta(\nu, a)$ é a função Zeta Hurwitz com $\zeta'(\nu, a) \equiv \partial\zeta(\nu, a)/\partial\nu$. E K_1 é função de Bessel modificada de primeiro tipo.

As equações de estado do gás de férmions na presença de um campo magnético uniforme para os resultados acima são:

$$\rho_s^H = G_\psi(z) + \frac{qH\eta}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cosh(n\mu_*\beta) K_0(n\beta M_{l,s}), \quad (3.60)$$

e

$$\rho^H = -\frac{qH\eta}{\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sinh(n\mu_*\beta) M_{l,s} K_1(n\beta M_{l,s}), \quad (3.61)$$

onde na Eq. (2.70) introduzimos a função,

$$G_\psi(z) = \frac{qH\eta}{8\pi^2} \left[\ln(z) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2}(2z - 1) \ln z + z \right]. \quad (3.62)$$

Nota-se da Eq. (3.61) que quando equilíbrio químico, $\mu_* = 0$, encontramos $\langle \omega^0 \rangle = 0$, que corresponde $\rho^H = 0$. Portanto, o campo vetorial em nenhum dos casos estudado acima contribuem para as propriedades térmicas do modelo de troca de mésons na aproximação de campo médio quando o número de férmions e anti-férmions são iguais, como antes.

Agora tratemos o sistema confinado entre dois planos paralelos, normal ao eixo x_3 , a uma distância L um do outro. Neste caso, o tratamento dado a Eq. (3.57) pelo processo de compactificação espacial e todo aparato matemático já mencionado nos casos anteriores permite encontrarmos o grande potencial termodinâmico na forma:

$$\frac{U(T, \mu, L, H)}{V} = U_{\sigma, \omega} + U_v^H + \frac{qH\eta}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{E}_2^{M_{l,s}^2} \left(0; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}; i \frac{\mu_*\beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3.63)$$

Considerando os procedimentos anteriores as equações de estado para um gás de férmions confinado em um filme na presença de um campo magnético uniforme são:

$$\rho_s^{HL} = G(z) + \frac{qH\eta}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{E}_2^{M_{l,s}^2} \left(0; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}; i \frac{\mu_*\beta}{2\pi} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3.64)$$

e

$$\begin{aligned} \rho^{HL} = & -\frac{qH\eta}{\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sinh(n\mu_*\beta) M_{l,s} \left[K_1(n\beta M_{l,s}) + \right. \\ & \left. + \sum_{n_1=1}^{\infty} (-1)^{n_1} \left(\frac{n\beta}{\sqrt{n^2\beta^2 + n_1^2 L^2}} \right) K_1(M_{l,s} \sqrt{n^2\beta^2 + n_1^2 L^2}) \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Da mesma forma que os casos anteriormente estudados o campo vetorial se anula em equilíbrio químico efetivo e não será relevante para as propriedades térmicas do modelo de troca de mésons na aproximação de campo médio quando o número de férmions e anti-férmions são iguais.

É mais apropriado fazer uma substituição nas somas sobre s nas equações acima no seguinte caminho:

$$\sum_{s=\pm 1} \sum_{l=0}^{\infty} F(2l + 1 - s) \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l,0}) F(2l). \quad (3.66)$$

Portanto, a partir dessas equações desenvolvidas nesta seção esperamos mapear as propriedades que surgem nos diagramas de fase devido a presença de um campo magnético no sistema fermiônico seja ele confinado ou não na seção subsequente.

3.3.2 Estrutura de Fase

Nesta seção, vamos estudar o comportamento termodinâmico do sistema formado pela matéria constituída de férmions carregados ($\eta = 2$) na presença de um campo magnético uniforme externo. Analogamente ao que foi realizado neste trabalho, em seções anteriores, devemos fazer esse estudo a partir do comportamento do grande potencial termodinâmico e da solução da equação de estado descrita pela Eq. (3.60) ou Eq. (3.64), em equilíbrio químico $\mu_* = 0$, em dois cenários distintos: no bulk e com a presença de uma fronteira espacial no sistema. Em especial, vamos verificar as características dos diagramas de fase através da influência do campo magnético e do tamanho do sistema. As escalas são as mesmas utilizadas na Eq. (3.47). Embora como discutido no capítulo anterior o termo $\Omega = qH$ tem dimensão de massa ao quadrado e assim, desde que tomamos todas as quantidades físicas com a escala da massa dos campos bariônicos M_ψ , a frequência de cyclotron terá um parâmetro sem dimensão do tipo:

$$\frac{\Omega}{M_\psi^2} \rightarrow \Omega. \quad (3.67)$$

como todas as outras da Eq. (3.47). E o grande potencial termodinâmico é redefinido em consonância com a normalização dada na Eq. (2.55).

Inicialmente tomemos o caso sem compactificação espacial, em que $L \rightarrow \infty$. Na Fig. 3.10, a massa efetiva, Eq. (3.13) com uso da Eq. (3.60), é exibida como uma função da temperatura, para diferentes valores de campo magnético. Podemos observar que o aumento da intensidade do campo magnético faz com que o sistema modifique a natureza da transição de fase. Vimos nas seções precedentes a esta que sem a presença desse agente externo o sistema para $g_{\psi\sigma} < 9.8$ e $M_\sigma = 0.53$ mostra que a massa efetiva vai a zero de maneira contínua, contrariamente a isso, com o aumento da magnitude do campo

magnético a M_* alcança uma região em que cai abruptamente em menores temperaturas como nos casos estudados com $g_{\psi\sigma} > 9.8$ e $M_\sigma = 0.53$ anteriormente. Situação típica de uma transição de fase líquido-gás, como havíamos explicado no simples contexto da matéria bariônica no bulk. Essa característica de mudança da natureza da transição de fase com o aumento da magnitude do campo magnético também é vista no modelo sigma linear acoplado a quarks [128].

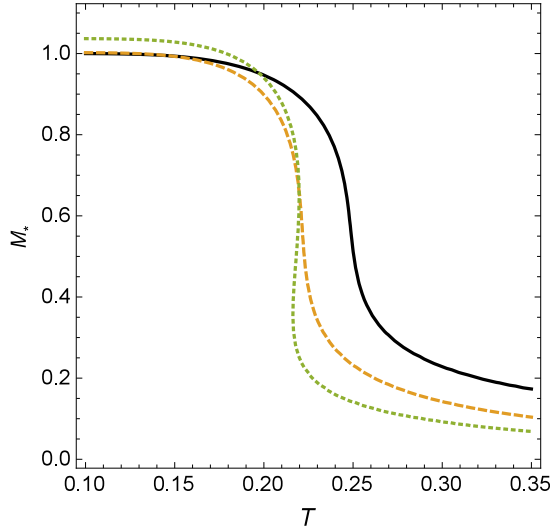


Figura 3.10: Gráfico da massa efetiva Eq. (3.19), usando a Eq. (3.60), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 8.0$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $\Omega = 0.01, 0.05$ e 0.2 , respectivamente.

Na Fig. 3.11 apresentamos a massa efetiva como uma função de temperatura para diferentes valores de campo magnético, para $g_{\psi\sigma} > 9.8$ e $M_\sigma = 0.53$. Neste regime de magnitude de interações como já vimos nas seções anteriores trata-se de um sistema que experimenta uma transição de fase de primeira ordem. Neste caso, nota-se que o efeito do campo magnético é favorecer a massa efetiva ir a zero em menores temperaturas quando aumentamos a intensidade do campo magnético. Esse resultado mostra um comportamento oposto daquele que encontramos para bósons carregados no capítulo anterior, que a massa ia zero em maiores temperaturas quando aumentamos os valores do campo magnético.

Em baixas temperaturas podemos observar o fenômeno de catálise magnética nas Figs. 3.10 e 3.11. Na Ref. [49] essa propriedade é estudada no cenário da matéria nuclear. Interessante notar também que a massa efetiva é ainda menor em altas temperaturas devido o aumento da intensidade do campo magnético. Essa redução da M_* em altas temperaturas devido o aumento do campo magnético pode ser interpretado como uma espécie de catálise magnética inversa [129], diferentemente daquilo que acontece em baixas temperaturas. Note que isso pode ser tratado como um mecanismo auxiliar para que

o sistema recupere a simetria quiral perdida em baixas temperaturas. Esse aspecto é tratado similarmente na Ref. [130] através da dinâmica da massa de férmions em função do potencial químico usando o modelo de Nambu-Jona-Lasinio.

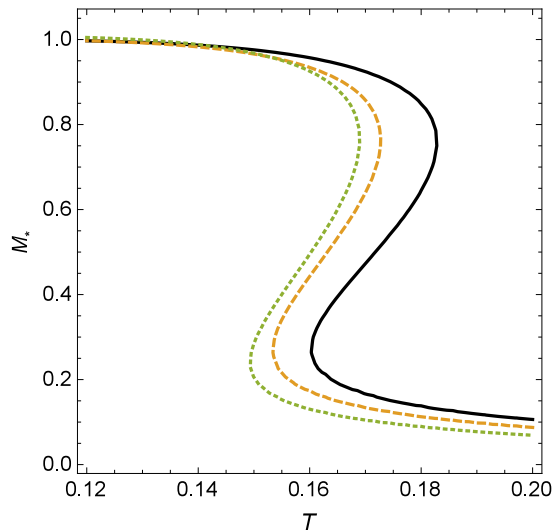


Figura 3.11: Gráfico da massa efetiva Eq. (3.13), usando a Eq. (3.60), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 16.0$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $\Omega = 0.01$, 0.02 e 0.05 , respectivamente.

De forma a compreender melhor a dinâmica da estrutura de fases do modelo na presença de um campo magnético na Fig. 3.12 plotamos a densidade do grande potencial termodinâmico, dado na Eq. (3.58), como uma função da temperatura, em diferentes valores de temperatura na região de transição de fase, com o campo magnético mantido fixo em dois casos diferentes. E na Fig. 3.13 apresentamos o grande potencial termodinâmico em função da massa efetiva para um valor fixo de temperatura para três valores diferentes do campo magnético. Abaixo resumimos alguns aspectos que devem ser notados:

- I Para valores fixos de Ω , existe uma transição da fase quebrada para a fase não-quebrada quando a temperatura aumenta, como nos casos anteriores na ausência de campo magnético.
- II Com o campo magnético mantido em pequenos valores ($\Omega = 0.01$ e $\Omega = 0.05$ na Fig. 3.12), para $g_{\psi\sigma} = 16.0$, o sistema exibe uma transição de fase em dois passos. De início com uma transição de fase de primeira ordem. Em baixas temperaturas o mínimo global está em um grande valor de M_* , o aumento de T faz o segundo mínimo em pequenos valores de M_* superar o primeiro, tornando-se mínimo absoluto, e para altas temperaturas o mínimo absoluto vai suavemente a zero. Mantendo a característica dos casos anteriores sem a presença do agente externo.

- III Quando o campo magnético aumenta a temperatura crítica em que o sistema apresenta a transição de fase diminui. Este comportamento é adequado no contexto da transição de fase de desconfinamento da matéria interagindo fortemente [131]. Esse resultado é oposto daquilo que ocorre com o modelo escalar descrito no capítulo anterior.
- IV Para valores fixos de T , existe uma transição da fase quebrada para a fase não-quebrada dirigida pelo aumento do campo magnético (Fig. 3.13); ou seja, o aumento do campo magnético tende a favorecer a fase desordenada, da mesma forma que o aumento da temperatura conduz o sistema a fase com simetria restaurada.
- V No contexto da invariância quiral o aumento do campo magnético restaurará mais rapidamente tal simetria.

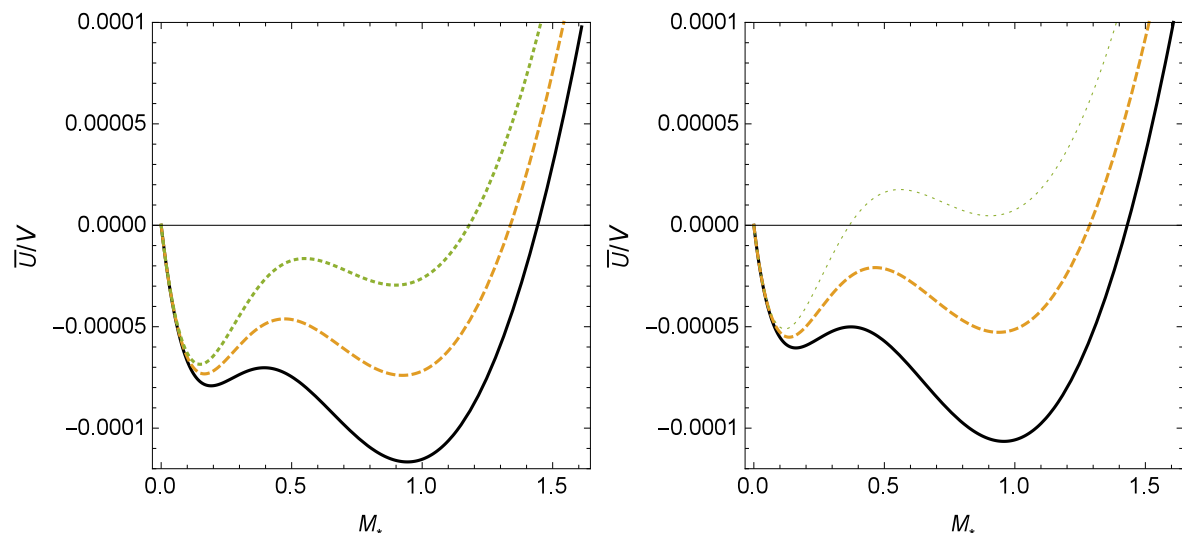


Figura 3.12: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (3.58), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 16.0$. Na esquerda : com as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $T = 0.154$, 0.159 e 0.164 , respectivamente, com $\Omega = 0.05$. Na direita: as linhas sólida, tracejada e pontilhada representando, $T = 0.165$, 0.170 e 0.175 , na mesma ordem, com $\Omega = 0.01$.

Para completar o estudo desta seção vamos a partir daqui compreender os efeitos no sistema desempenhado pela compactificação de uma coordenada espacial (sistema com tamanho finito L). Na Fig. 3.14, mostramos o comportamento da massa efetiva como uma função da temperatura, em valor fixo do campo magnético e para diferentes valores do tamanho do sistema. Notamos que a presença da fronteira modifica o comportamento da massa efetiva em baixas temperaturas (da mesma forma que nos casos anteriores, como era de se esperar). Entretanto, a presença dessa fronteira inibe levemente o efeito da catálise magnética.

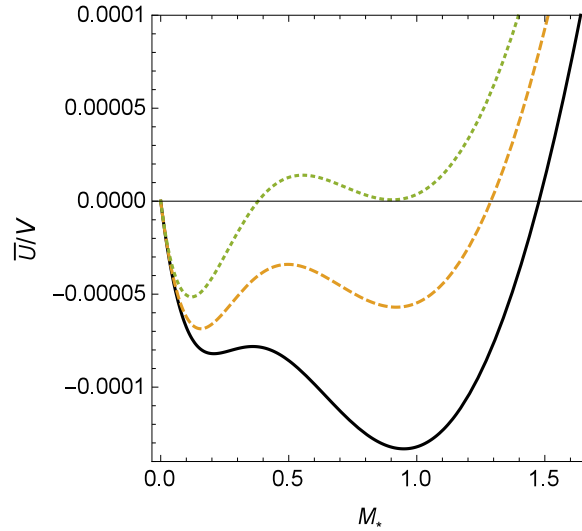


Figura 3.13: Gráfico da densidade do grande potencial termodinâmico Eq. (3.58), como uma função da massa efetiva, em equilíbrio químico, para $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 16.0$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representando $\Omega = 0.01, 0.02$ e 0.05 , respectivamente, em $T = 0.163$.

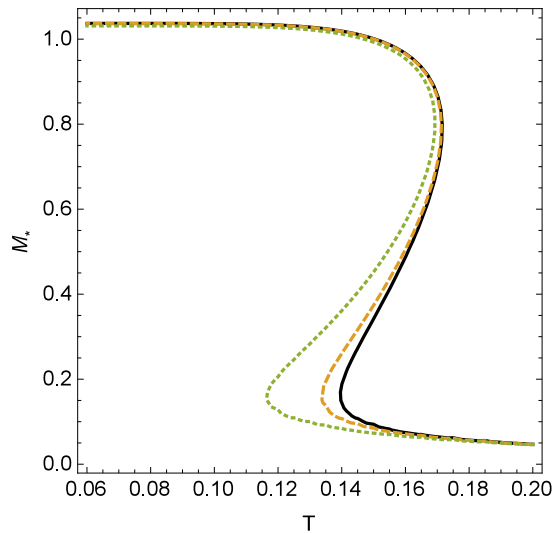


Figura 3.14: Gráfico da massa efetiva, Eq. (3.13), usando a Eq. (3.64), como uma função da temperatura, em equilíbrio químico, com $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 16.0$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $L = 20.0, 10.0$ e 8.0 , respectivamente, onde fixamos $\Omega = 0.1$.

Os efeitos da presença da fronteira combinado com a do campo magnético pode ser compreendido observando a Fig. 3.15, que representa os valores da massa efetiva, Eq. (3.13) usando a Eq. (3.64), como uma função do inverso do comprimento ($x = 1/L$), em baixas temperaturas. Podemos observar que a M_* apresenta uma massa maior em $x \approx 0$ ($L \rightarrow \infty$), preservando assim o efeito de catálise magnética mostrada anteriormente. Além disso, notamos que o aumento da magnitude do campo magnético Ω permite a massa efetiva experimentar uma queda abrupta em um valor maior do tamanho finito L do sis-

tema. Assim, isso sugere que em campos magnéticos mais fortes o sistema apresenta uma transição de fase de primeira ordem em valores maiores de L . Esse resultado é oposto daquele encontrado para o modelo bosônico, que para aumentar o tamanho finito do sistema devemos reduzir os valores da magnitude do campo magnético.

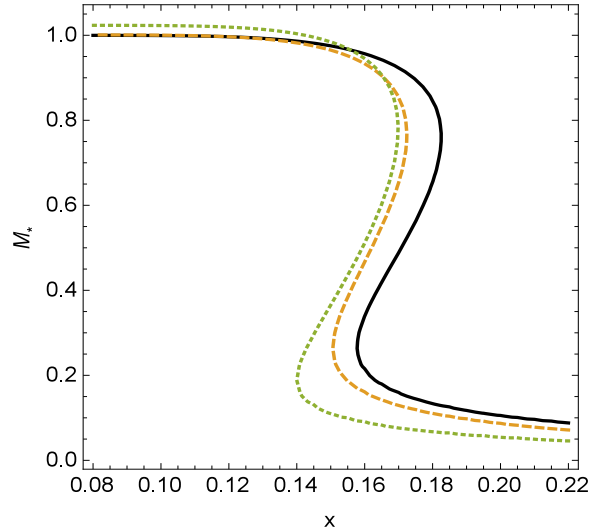


Figura 3.15: Gráfico da massa efetiva Eq. (3.13), usando a Eq. (3.64), como uma função do inverso do tamanho do sistema ($x = 1/L$). Fixamos $M_\sigma = 0.53$ e $g_{\psi\sigma} = 12.0$. As linhas sólida, tracejada e pontilhada representam $\Omega = 0.01, 0.03$ e 0.08 , respectivamente, em $T = 0.1$.

Portanto, vimos aqui nesta seção as formas que se manifestam no diagrama de fases do sistema fermiônico o campo magnético e o tamanho finito do sistema. Mostramos que a fase em que a massa efetiva se caracteriza por decrescer suavemente ($g_{\psi\sigma} < 9.8$) existe um Ω_c em que este regime é substituído por uma transição de fase de primeira ordem devido a queda abrupta da massa efetiva. Vimos também que, a transição de fase de primeira ordem ocorre em menores temperaturas quando aumentamos o valor do campo magnético. Em outras palavras, o aumento do campo magnético tende a favorecer a fase quebrada. Ainda vimos que em altas temperaturas o resultados indicam um fenômeno de *catálise magnética invertida* favorecendo a restauração da simetria quiral. E por fim, observamos que o aumento da magnitude do campo magnético permite que o sistema alcance um ponto crítico de transição de fase de primeira ordem em valores maiores do tamanho do sistema.

Finalizamos este capítulo resumindo as principais características que encontramos para o modelo de troca de mésons no contexto de partículas fermiônicas como graus de liberdade fundamentais. A partir do estudo termodinâmico observamos que a redução da massa efetiva, em diferentes cenários caracteriza uma transição de fase de primeira ou segunda ordem ou comportamento contínuo desse sistema, é fortemente dependente dos parâmetros internos ou externos, como a magnitude de interação entre bárions e o meio

hadrônico, ou a auto-interação quártica do campo escalar, a restrição geométrica associada ao tamanho finito do sistema ou a presença de um campo magnético uniforme externo. Vimos que a transição de fase de primeira ordem ocorre em temperaturas críticas menores quando a magnitude de interação entre os campos ψ e σ aumenta.

Destacamos também que a presença da fronteira espacial no sistema espalha o intervalo de temperatura onde ocorre a fase mista com a redução do comprimento da coordenada espacial compactificada. Esse resultado sugere que a fase simétrica é favorecida quando o tamanho do sistema é diminuído. Além disso, mostramos que o comportamento termodinâmico do sistema é dependente do número de coordenadas espaciais compactificadas d . De modo que a fase simétrica também é favorecida grandes valores d com a redução da temperatura crítica. A presença de mais fronteiras tende a inibir a fase quebrada, da mesma forma que o caso bosônico, descrito no capítulo anterior. Em outras palavras, esses resultados sugerem que a presença de mais fronteiras desfavorece a manutenção das correlações de longo alcance, inibindo a fase quebrada.

No cenário em que o sistema está na presença do campo magnético uniforme externo mostramos para $g_{\psi\sigma} < 9.8$ existe um Ω_c que determina uma mudança da natureza da transição de fase no modelo quando aumentamos esse campo: comportamento contínuo para uma transição de fase de primeira ordem. Além disso, vimos que o sistema apresenta dois fenômenos interessantes: a catálise magnética inversa em altas temperaturas, que favorece a restauração da simetria quirial, e distintamente do ocorre no caso bosônico o sistema experimenta uma transição de fase de primeira ordem em menores temperaturas quando aumentamos a magnitude do campo magnético.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Estudamos ao longo deste trabalho o comportamento termodinâmico da matéria composta de campos relativísticos escalares e campos espinoriais interagindo através dos mésons mediadores σ e ω na aproximação de campo médio. Analisamos a influência na estrutura de fases de fronteiras espaciais e a presença de um campo magnético uniforme externo. Usamos o formalismo de Matsubara generalizado na construção de uma teoria quântica de campos a temperatura finita e na presença de fronteiras, via abordagem da regularização das funções Zeta.

Em particular, mostramos que a versão escalar pode ser aplicada para estudar o comportamento termodinâmico de um gás de mésons, como por exemplo aqueles com sabores pesados interagindo com mésons leves. Já o modelo com campos espinoriais destaca-se no estudo da matéria nuclear, embora possa ser tomado como uma teoria efetiva para estudar a transição de fase associada de modo geral à hadronização da matéria fortemente interagente.

Inicialmente, mostramos que o campo ω não contribui para descrever as grandezas termodinâmicas relevantes no equilíbrio químico. Por outro lado, encontramos que o campo σ descreve uma solução da equação de estado não-trivial, sofrendo um aumento a partir de um certo valor da temperatura. Isso permite que a massa efetiva, pela definição escolhida, decresça com o aumento da temperatura, sinalizando uma transição de fase, que pode ser interpretada como a formação de pares interagindo mais fortemente.

Discutimos que a estrutura de fases é fortemente dominada pelo aumento da magnitude das interações. No sistema escalar estudamos que para baixos valores da constante de acoplamento a fase dominante é de segunda ordem e de primeira ordem para grandes valores. Enquanto que para o sistema fermiônico a transição de fase de primeira ordem aparece quando $g_{\psi\sigma} > 9.8$. Tal transição é semelhante a uma transição de fase líquido-gás, em que o parâmetro de ordem (a massa efetiva), cai abruptamente, constituindo um sistema de fase mista.

Além disso, notamos que os valores permitidos da massa efetiva são afetados pela presença de fronteiras espaciais. Ainda mostramos que a redução do tamanho finito do sistema e o aumento do número de coordenadas espaciais compactificadas o sistema é dirigido da fase quebrada para a fase desordenada. Em outras palavras, a presença da fronteira tende a inibir a fase quebrada. Esse efeito pode ser interpretado no seguinte

caminho: quanto mais fronteiras no sistema este tende a evitar a manutenção das correlações de longo alcance, desfavorecendo a ordem.

Para o caso fermiônico o intervalo de temperatura onde a fase mista ocorre é espalhado quando o comprimento das coordenadas espaciais compactificadas é reduzido. E como acontece no caso bosônico a redução do tamanho finito e o aumento do número de dimensões espaciais do sistema o dirige da fase quebrada para a fase desordenada. Neste sentido, podemos concluir que esses fenômenos acontecem tanto para um gás de bosons quanto para um gás de férmions.

Entretanto, o estudo das versões escalar e espinorial na presença de um campo magnético mostra que eles são influenciados de maneira opostas quando aumentamos a intensidade do campo magnético. Em especial, no modelo escalar o aumento dos valores do campo magnético estimula o sistema a sair de uma região de uma simples transição de fase para uma região de transição de fase de dois passos. Porém, essa característica desaparece para um determinado tamanho finito do sistema. Também, verificamos que o aumento do campo magnético favorece a fase quebrada. Ademais, observamos que a versão fermiônica apresenta uma catálise magnética inversa em altas temperaturas, que pode explicar o estímulo do campo magnético em favorecer a restauração da simetria quiral.

Sabemos que a abordagem teórica acima descrita fornece uma base simplificada para a discussão das interações que ocorrem na matéria hadrônica interagindo com o meio denso e quente. Melhorias devem ser realizadas no intuito de representar o sistema de maneira mais fidedigna, como por exemplo a inclusão da interação dos objetos fundamentais com outros constituintes do meio (outros mésons, nucleons, etc.). Além disso, outro aspecto importante que cabe investigar é considerar o sistema sujeito a potencial químico efetivo não-nulo permitindo elucidar o papel que o méson vetorial ω desempenha no sistema [33, 120]. E neste sentido, seria interessante estudar o comportamento das transições de fase quando a fração de partículas ou antipartículas são variadas (para p, n, Λ, \dots) [132, 133].

Ainda, as perspectivas de desenvolver novos trabalhos surgem devido as transições de fase de primeira ordem que podemos associar a teoria de nucleação de bolhas ou decomposição spinodal que estão presentes em diversos sistemas físicos [134, 135]. Principalmente, suas implicações para transições de fases cosmológicas e a hadronização de um plasma de quarks-glúons gerado em colisões de íons pesados em altas energias.

Outro ponto de interesse reside na condensação de Bose-Einstein que tem sido largamente explorada, sobretudo como um possível estado da matéria presente em estrelas compactas [87, 136]. Nestes trabalhos especula-se a possibilidade de produzir esse estado em sistemas relativísticos em altas temperaturas. Em particular, as propriedades de tamanho finito de um gás de bósons e/ou a presença de campo magnético podem influenciar

a formação desses condensados substancialmente [50, 51, 108]. Com relação a isso podemos estimar através do modelo escalar descrito nesta tese como esses agentes externos se comportam para caracterizar uma condensação desse tipo.

APÊNDICE A

FUNÇÃO ZETA EPSTEIN-HURWITZ

As técnicas de regularização da função Zeta apresentam uma estrutura matemática rica para mapear uma variedade considerável de fenômenos em diversas áreas da física. Como por exemplo, teoria de cordas para estudar propriedades quântica de objetos estendidos tipo D -branas, teoria quântica dos campos em espaços hiperbólicos, efeitos de temperatura finita em teoria quântica dos campos e etc (o leitor pode obter mais informações sobre essas aplicações e outras das técnicas supracitada na Ref. [81]).

Diante daquilo que pretendemos desenvolver ao longo desta tese, estudar o *comportamento termodinâmico de sistemas relativísticos*, vamos neste apêndice apresentar as técnicas necessárias e construir a forma analítica das funções de Epstein-Hurwitz não-homogênea, que aparece no recorrentemente no corpo principal do texto na forma $E_k^{c^2}$. A série multidimensional $E_k^{c^2}$ é dada por:

$$E_k^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k = -\infty}^{\infty} [a_1(n_1 - b_1)^2 + \dots + a_k(n_k - b_k)^2 + c^2]^{-\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Podemos utilizar a transformada de Mellin para encontrar uma forma analítica dessa soma. Assim, ela é escrita na forma:

$$\frac{1}{X^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-Xt} dt, \quad (\text{A.2})$$

onde $\Gamma(\nu)$ é a função Gamma. De modo que a Eq. (A.1) pode ser reescrita na forma,

$$E_k^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} \Theta(t), \quad (\text{A.3})$$

com,

$$\Theta(t) = \sum_{n_1, \dots, n_k = -\infty}^{\infty} e^{-[a_1(n_1 - b_1)^2 + \dots + a_k(n_k - b_k)^2 + c^2]t}. \quad (\text{A.4})$$

Note que esse somatório geral pode ser dividido em k produtos de uma soma do tipo $\sum_{n_i = -\infty}^{\infty} e^{a_i(n_i - b_i)^2 t}$ devido as propriedades de uma potência. Assim, podemos usar a identidade abaixo:

$$\sum_{n = -\infty}^{\infty} e^{-\pi z(n-c)^2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n = -\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{z}n^2 - 2\pi inc}, \quad (\text{A.5})$$

para reescrever a Eq. (A.4) na forma:

$$\sum_{n_1, \dots, n_k = -\infty}^{\infty} e^{-\sum_{j=1}^k [a_j(n_j - b_j)^2 + c^2]t} = \frac{\pi^{k/2}}{t^{k/2}} \frac{e^{-tc^2}}{\sqrt{a_1 \cdot \dots \cdot a_k}} \sum_{n_1, \dots, n_k = -\infty}^{\infty} e^{-\sum_{j=1}^k \left(\frac{\pi^2 n_j^2}{ta_j} + 2\pi i n_j b_j \right)}. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, depois dessas manipulações a função zeta de Epstein-Hurwitz, após ser tratada com a identidade da função gama e da mudança realizada na Eq. (A.6) obtida na Ref. [81], obtemos:

$$E_k^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\nu-1-k/2} e^{-tc^2}}{\sqrt{a_1 \cdot \dots \cdot a_k}} \Theta^T(t), \quad (\text{A.7})$$

onde usamos a seguinte definição,

$$\Theta^T(t) = \sum_{n_1, \dots, n_k = -\infty}^{\infty} e^{-\sum_{j=1}^k \left(\frac{\pi^2 n_j^2}{ta_j} + 2\pi i n_j b_j \right)}. \quad (\text{A.8})$$

Essa expressão ainda pode ser simplificada após manipulações matemáticas, com a ajuda de,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{ta} - 2\pi i n b} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n b) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{ta}}, \quad (\text{A.9})$$

de modo que chegamos a uma soma do tipo¹

$$\begin{aligned} \Theta^T(t) &= 1 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{n_i=1}^{\infty} \cos(2\pi n_i b_i) e^{-\frac{\pi^2 n_i^2}{ta_i}} + \\ &+ 2^2 \sum_{j>i=1}^k \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \cos(2\pi n_i b_i) \cos(2\pi n_j b_j) e^{-\frac{\pi^2 n_i^2}{ta_i}} e^{-\frac{\pi^2 n_j^2}{ta_j}} + \dots + \\ &+ \dots + 2^k \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \cos(2\pi n_i b_i) e^{-\frac{\pi^2 n_i^2}{ta_i}}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Logo a Eq. (A.7), torna-se:

$$\begin{aligned} E_k^{c^2}(\nu; \{a_i\}; \{b_i\}) &= \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\nu-1-k/2} e^{-tc^2}}{\sqrt{a_1 \cdot \dots \cdot a_k}} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{n_i=1}^{\infty} \cos(2\pi n_i b_i) e^{-\frac{\pi^2 n_i^2}{ta_i}} + \right. \\ &+ 2^2 \sum_{j>i=1}^k \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \cos(2\pi n_i b_i) \cos(2\pi n_j b_j) e^{-\frac{\pi^2 n_i^2}{ta_i}} e^{-\frac{\pi^2 n_j^2}{ta_j}} + \dots + \\ &\left. + \dots + 2^k \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \cos(2\pi n_i b_i) e^{-\frac{\pi^2 n_i^2}{ta_i}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

¹Para exemplificar imagina que temos três somatórios, ou seja $k = 3$: $(1 + 2a_1)(1 + 2a_2)(1 + 2a_3) = 1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2^2 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_3 + 2^2 a_2 a_3 + 2^3 a_1 a_2 a_3$.

A etapa final para obtenção da expressão conveniente para $E_k^{c^2}$ devemos levar em conta a seguinte representação para as funções de Bessel modificada K_ν ,

$$2 \left(\frac{A}{B} \right)^{s/2} K_s(2\sqrt{AB}) = \int_0^\infty dx x^{s-1} e^{-\frac{A}{x} - Bx}. \quad (\text{A.12})$$

Desse modo, tomando as devidas manipulações matemáticas na Eq. (A.13), levando em conta essa identidade Eq. (A.12), encontramos a continuação analítica para $E_k^{c^2}(\nu; \{a_i\}; \{b_i\})$:

$$\begin{aligned} E_k^{c^2} = & f_k(\nu; a_1, \dots, a_k) \left[h_k(\nu; c) + 2^2 \sum_{i=1}^k \sum_{n_i=1}^\infty \cos(2\pi n_i b_i) \left(\frac{\pi^2 n_i^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{\nu - \frac{k}{2}}{2}} K_{\nu - \frac{k}{2}} \left(2\pi \frac{c n_i}{\sqrt{a_i}} \right) + \right. \\ & + 2^3 \sum_{j>i=1}^k \sum_{n_i, n_j=1}^\infty \prod_{l=i, j} \cos(2\pi n_l b_l) \left(\frac{\frac{\pi^2 n_i^2}{a_i} + \frac{\pi^2 n_j^2}{a_j}}{c^2} \right)^{\frac{\nu - \frac{k}{2}}{2}} K_{\nu - \frac{k}{2}} \left(2\pi c \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i} + \frac{n_j^2}{a_j}} \right) + \\ & \left. + \dots + 2^{k+1} \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^\infty \prod_{i=1}^k \cos(2\pi n_i b_i) \left(\frac{\sum_{i=1}^k \frac{\pi^2 n_i^2}{a_i}}{c^2} \right)^{\frac{\nu - \frac{k}{2}}{2}} K_{\nu - \frac{k}{2}} \left(2\pi c \sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{a_i}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

com,

$$f_k(\nu; a_1, \dots, a_k) = \frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{a_1 \cdot \dots \cdot a_k} \Gamma(\nu)}, \quad (\text{A.14})$$

e

$$h_k(\nu; c) = c^{-2\nu+k} \Gamma\left(\nu - \frac{k}{2}\right). \quad (\text{A.15})$$

A Eq. (A.13) é a forma final da função zeta de Epstein-Hurwitz que tem utilidade no presente trabalho: tratar um gás de férmions ou bósons imerso num meio contendo partículas mesônicas leves, na presença de fronteiras espaciais ou/e de um campo magnético uniforme externo.

A.1 EXPRESSÕES DE INTERESSE NO CORPO DO TRABALHO

Nos capítulos 2 e 3 deste trabalho estudamos efeitos de temperatura e de tamanho finito de sistemas relativísticos, escolhemos para tratá-los a estrutura matemática das funções Zeta Epstein-Hurwitz. Neste sentido, vamos desenvolver abaixo as diversas formas que essas funções aparecem no decorrer do texto principal. Antes de começarmos note da Eq. (2.23) que $\nu = s - (D - \delta)/2$, logo as funções de Bessel que aparecem na Eq. (A.13) do tipo $\nu - \delta/2^2$ não depende do número de dimensões espaciais compactificadas, pois: $\nu - \delta = s - D/2$.

²Aqui $\delta = k$ e no contexto apresentado na tese $\delta = d + 1$, onde d é o número de dimensões espaciais compactificadas.

A.1.1 Sem fronteiras espaciais $k = 1$: compactificação do tempo imaginário

Esse é o caso mais simples em que nenhuma dimensão espacial tenha sido compactificada ($d = 0$) apenas o tempo imaginário. Nestas condições, temos: $a_1 = 4\pi^2/\beta^2$ e $b_1 = i\mu_*\beta/2\pi - q$, onde $q = 0$ para bósons e $q = 1/2$ para férmions. Logo, a função geradora para encontrarmos a continuação analítica para a série $E_1^{M_*^2} \left(s - \frac{D-1}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} - q \right)$, diante desses parâmetros obtemos:

$$E_1^{M_*^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{4\pi^2}{\beta^2} \left(n - i\frac{\mu_*\beta}{2}\pi + q \right)^2 + M_*^2 \right]^{-\left(s - \frac{D-1}{2}\right)} = f_1[h_1 + X_\beta(q_0)] \quad (\text{A.16})$$

com,

$$X_\beta(q_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{q_0 n} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{n\beta}{M_*} \right)^{s - \frac{D}{2}} K_{s - \frac{D}{2}}(nM_*\beta), \quad (\text{A.17})$$

onde a fase representa o caso periódico (bósons) $q = 0$ e para isso devemos tomar $q_0 = 0$ e o anti-periódico (férmions) $q = 1/2$ de modo que se aplica $q_0 = 1$. Também, utilizamos a igualdade $\cos(in\mu_*\beta) = \cosh(n\mu_*\beta)$. E as funções f_1 e h_1 são,

$$f_1 \left(s - \frac{D-1}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2} \right) = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}\Gamma \left(s - \frac{D-1}{2} \right)} \quad (\text{A.18})$$

e

$$h_1 \left(s - \frac{D}{2}; M_* \right) = M_*^{-2\left(s - \frac{D}{2}\right)} \Gamma \left(s - \frac{D}{2} \right) \quad (\text{A.19})$$

respectivamente. No contexto da termodinâmica o termo h_1 diz respeito a contribuição do vácuo para as quantidades térmicas e será tratado com mais detalhes no próximo apêndice.

A.1.2 $k = 2$: compactificação do tempo imaginário e de uma dimensão espacial

Estamos aqui, por exemplo, com a dimensão temporal imaginária e uma dimensão espacial ($d = 1$) compactificada. Escolhemos: $a_1 = 4\pi^2/\beta^2$, $a_2 = 4\pi^2/L_1^2$, $b_1 = i\mu_*\beta/2\pi - q$ e q_1 . Com $q = q_1 = 0$ para bósons e $q = q_1 = 1/2$ para férmions. Então a soma geradora tem a forma especial $E_2^{M_*^2} \left(s - \frac{D-2}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} - q_1, q_2 \right)$:

$$E_2^{M_*^2} = \sum_{n, n_1=-\infty}^{\infty} \left[\frac{4\pi^2}{\beta^2} \left(n - i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} + q \right)^2 + \frac{4\pi^2}{L_1^2} (n_1 - q_1)^2 + M_*^2 \right]^{-\left(s - \frac{D-2}{2}\right)} \quad (\text{A.20})$$

Expandindo essa série no mesmo caminho que obtemos a Eq. (A.13), encontramos:

$$E_2^{M_*^2} = f_2 [h_2 + X_\beta(q_0) + X_L(1, q_0) + 2X_{\beta L}(1, q_0)] \quad (\text{A.21})$$

com,

$$X_L(\alpha, q_0) = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{n_i=1}^{\infty} (-1)^{q_0 n_i} \left(\frac{n_i L_i}{M_*} \right)^{s-\frac{D}{2}} K_{s-\frac{D}{2}}(n_i M_* L_i) \quad (\text{A.22})$$

e

$$\begin{aligned} X_{\beta L}(\alpha, q_0) &= \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{n, n_1=1}^{\infty} (-1)^{q_0(n+n_1)} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{\sqrt{n^2\beta^2 + n_1^2 L_1^2}}{M_*} \right)^{s-\frac{D}{2}} \times \\ &\times K_{s-\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2\beta^2 + n_1^2 L_1^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

onde mais uma vez a fase representa o caso periódico $q = q_1 = 0$ devemos tomar $q_0 = 0$ e o anti-periódico $q = q_1 = 1/2$ que aqui aplicamos $q_0 = 1$. E as funções f_1 e h_1 são,

$$f_2 \left(s - \frac{D-2}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2} \right) = \frac{\beta L_1}{4\pi\Gamma \left(s - \frac{D-2}{2} \right)} \quad (\text{A.24})$$

e

$$h_2 \left(s - \frac{D}{2}; M_* \right) = M_*^{-2(s-\frac{D}{2})} \Gamma \left(s - \frac{D}{2} \right) \quad (\text{A.25})$$

respectivamente. A expressão dada pela Eq. (A.21) pode ser tomada como um objeto matemático para tratar sistemas térmicos em formato de um filme infinito em que a distância entre os plano é L_1 no espaço Euclidiano $D = 4$.

A.1.3 $k = 3$: compactificação do tempo imaginário e de duas dimensões espaciais

Aqui estamos interessados em construir uma série do tipo dado na Eq. (A.1), onde, por exemplo, compatificamos a dimensão temporal imaginária e duas dimensões espaciais ($d = 1$). Com: $a_1 = 4\pi^2/\beta^2$, $a_2 = 4\pi^2/L_1^2$, $a_3 = 4\pi^2/L_2^2$, $b_1 = i\mu_*\beta/2\pi - q$, $b_2 = q_1$ e $b_3 = q_2$. Com $q = q_1 = q_2 = 0$ para bósons e $q = q_1 = q_2 = 1/2$ para férmions. Então a soma geradora tem a forma especial $E_3^{M_*^2} \left(s - \frac{D-3}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} - q_1, q_2, q_3 \right)$:

$$E_3^{M_*^2} = \sum_{n_1, n_2, n_3=-\infty}^{\infty} \left[\frac{4\pi^2}{\beta^2} \left(n - i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} + q \right)^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{4\pi^2}{L_j^2} (n_j - q_j)^2 + M_*^2 \right]^{-\left(s - \frac{D-3}{2} \right)} \quad (\text{A.26})$$

Tomando a expansão dessa série e usando o desenvolvimento para chegar na Eq. (A.13), obtemos:

$$E_3^{M_*^2} = f_3 [h_3 + X_{\beta}(q_0) + X_L(2, q_0) + 2X_{\beta L}(2, q_0) + 2X_{LL}(2, q_0) + 4X_{\beta LL}(2, q_0)] \quad (\text{A.27})$$

com,

$$X_{LL}(\alpha, q_0) = \sum_{i < j=1}^{\alpha} \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} (-1)^{q_0(n_i+n_j)} \left(\frac{\sqrt{n_i^2 L_j^2 + n_j^2 L_i^2}}{M_*} \right)^{s-\frac{D}{2}} \times \\ \times K_{s-\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n_i^2 L_j^2 + n_j^2 L_i^2} \right) \quad (\text{A.28})$$

e

$$X_{\beta LL}(\alpha, q_0) = \sum_{i < j=1}^{\alpha} \sum_{n, n_i, n_j=1}^{\infty} (-1)^{q_0(n+n_i+n_j)} \cosh(n\mu_*\beta) \left(\frac{\sqrt{n^2\beta^2 + n_i^2 L_j^2 + n_j^2 L_i^2}}{M_*} \right)^{s-\frac{D}{2}} \times \\ \times K_{s-\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2\beta^2 + n_i^2 L_j^2 + n_j^2 L_i^2} \right) \quad (\text{A.29})$$

onde em caso do sistema ser constituído de bósons temos, $q = q_1 = 0$ e devemos tomar $q_0 = 0$ e do contrário o sistema descreve férmions e opta-se por $q = q_1 = 1/2$ e daí $q_0 = 1$.

E as funções f_3 e h_3 são,

$$f_3 \left(s - \frac{D-3}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2} \right) = \frac{\beta L_1 L_2}{8\pi\sqrt{\pi}\Gamma \left(s - \frac{D-3}{2} \right)} \quad (\text{A.30})$$

e

$$h_3 \left(s - \frac{D}{2}; M_* \right) = M_*^{-2(s-\frac{D}{2})} \Gamma \left(s - \frac{D}{2} \right) \quad (\text{A.31})$$

respectivamente. A expressão dada pela Eq. (A.27) pode ser tomada como um objeto matemático para tratar sistemas térmicos em formato de um tubo infinitamente longo de com área da seção transversal $L_1 \times L_2$ no espaço Euclidiano $D = 4$.

A.1.4 $k = 4$: compactificação do tempo imaginário e de três dimensões espaciais

Por fim, o caso em que quatro dimensões são compactificadas, a temporal e três dimensões espaciais. De maneira similar que nos casos anteriores temos: $a_1 = 4\pi^2/\beta^2$, $a_2 = 4\pi^2/L_1^2$, $a_3 = 4\pi^2/L_2^2$, $a_4 = 4\pi^2/L_3^2$, $b_1 = i\mu_*\beta/2\pi - q$, e definindo $b_2 = q_1$, $b_3 = q_2$ e $b_4 = q_3$. Com $q = q_1 = q_2 = q_3 = 0$ para bósons e $q = q_1 = q_2 = q_3 = 1/2$ para férmions. Então a soma geradora tem a forma especial $E_4^{M_*^2} \left(s - \frac{D-4}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}, \frac{4\pi^2}{L_3^2}; i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} - q, q_1, q_2, q_3 \right)$:

$$E_4^{M_*^2} = \sum_{n, n_1, n_2, n_3=-\infty}^{\infty} \left[\frac{4\pi^2}{\beta^2} \left(n - i\frac{\mu_*\beta}{2\pi} + q \right)^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{4\pi^2}{L_j^2} (n_j - q_j)^2 + M_*^2 \right]^{-\left(s-\frac{D-4}{2}\right)} \quad (\text{A.32})$$

Essa série expandida nos mesmos moldes que a Eq. (A.13) encontramos uma expressão na forma:

$$E_4^{M_*^2} = f_4 \left[h_4 + X_{\beta}(q_0) + X_L(3, q_0) + 2X_{\beta L}(3, q_0) + 2X_{LL}(3, q_0) + 4X_{\beta LL}(3, q_0) + \right. \\ \left. + 4X_{LLL}(q_0) + 8X_{\beta LLL}(q_0) \right] \quad (\text{A.33})$$

com,

$$\begin{aligned}
X_{LLL}(q_0) &= \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (-1)^{q_0(n_1+n_2+n_3)} \left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^3 n_i^2 L_i^2}}{M_*} \right)^{s-\frac{D}{2}} \times \\
&\times K_{s-\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{\sum_{i=1}^3 n_i^2 L_i^2} \right)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

e

$$\begin{aligned}
X_{\beta LLL}(q_0) &= \sum_{n, n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} (-1)^{q_0(n+n_1+n_2+n_3)} \cosh(n\mu_*\beta) \times \\
&\times \left(\frac{\sqrt{n^2\beta^2 + \sum_{i=1}^3 n_i^2 L_i^2}}{M_*} \right)^{s-\frac{D}{2}} K_{s-\frac{D}{2}} \left(M_* \sqrt{n^2\beta^2 + \sum_{i=1}^3 n_i^2 L_i^2} \right)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

onde em caso do sistema ser constituído de bósons temos, $q = q_1 = 0$ e devemos tomar $q_0 = 0$ e do contrário o sistema descrever férmions opta-se por $q = q_1 = 1/2$ e daí $q_0 = 1$. E as funções f_3 e h_3 são,

$$f_4 \left(s - \frac{D-3}{2}; \frac{4\pi^2}{\beta^2}, \frac{4\pi^2}{L_1^2}, \frac{4\pi^2}{L_2^2}, \frac{4\pi^2}{L_3^2} \right) = \frac{\beta L_1 L_2 L_3}{16\pi\Gamma\left(s - \frac{D-3}{2}\right)} \tag{A.36}$$

e

$$h_4 \left(s - \frac{D}{2}; M_* \right) = M_*^{-2(s-\frac{D}{2})} \Gamma\left(s - \frac{D}{2}\right) \tag{A.37}$$

respectivamente. Podemos pensar a expressão dada pela Eq. (A.33) como um objeto matemático para tratar sistemas térmicos em formato de um cubo de volume $L_1 \times L_2 \times L_3$ no espaço Euclidiano $D = 4$.

Como podemos observar que $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ e note que eles são independentes do comprimento da coordenada compactificada identificadas como L_1 , L_2 ou L_3 . Esse termo é divergente em alguns casos de dimensão do espaço-tempo D , trataremos disso no próximo apêndice para o caso em que $D = 4$.

APÊNDICE B

INTEGRAIS DIVERGENTES

O primeiro termo das Eqs. (A.16), (A.21), (A.27) e (A.33), os respectivos h_s , representam uma divergência em um espaço-tempo Euclidiano. Em especial, na presença de campo magnético uniforme externo, esses termos descrevem fenômenos interessantes, assim vamos tratá-los nas próximas linhas.

Primeiro vamos verificar que os termos de vácuo propriamente dito são produto de três grandezas, os h_s com os f_s e o $J(s, \delta)$. Avaliando-os podemos observar que a menos de uma constante (A_L/β : que será absorvida pelo fator que multiplica o último termo da Eq. (2.20)) eles descrevem objetos divergentes comumente descritos no cenário da teoria quântica de campos a temperatura finita por:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} [p^2 + M^2]^A = \frac{\Gamma(A - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(A) M^{2(A - \frac{D}{2})}}. \quad (\text{B.1})$$

Agora considere uma partícula com carga q e spin j na presença de um campo magnético uniforme na direção x_3 com intensidade H , com dimensão espacial $D = 3$ e o termo de vácuo se caracteriza por $A = 1/2$. Neste sentido, o termo de vácuo designado acima é escrito como

$$U_v^H(j) = \pm(2j + 1) \frac{qH}{2\pi} \sum_{j_3} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)} \sqrt{p^2 + qH(2l + 1 - j_3) + M^2}, \quad (\text{B.2})$$

onde o sinal positivo significa bósons e o sinal negativo representa férmions. Essa integral pode ser resolvida utilizando o procedimento de regularização dimensional com a seguinte troca: uma integral de dimensão 1 para $1 \rightarrow d = 1 - \epsilon$. Logo, temos

$$U_v^H(j) = \pm(2j + 1) \frac{(qH)^2}{\pi} \sum_a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{(1/2 - \epsilon)/2} \Gamma(-1/2)} \left[\frac{1}{(l + x + a)^{-1 + \epsilon/2}} \right], \quad (\text{B.3})$$

no qual definimos $x = \frac{M^2}{2qH}$ e $a = 1/2 - j_3$. Daqui, usando a definição da função Zeta de Riemann-Hurwitz, podemos usar implicitamente a soma sobre os níveis de Landau, obtendo:

$$U_v^H(j) = \pm(2j + 1) \frac{(qH)^2}{\pi(2\sqrt{\pi})^{1 - \epsilon}} \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_a \zeta\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}, x + a\right). \quad (\text{B.4})$$

Agora expandindo essa expressão em torno de $\epsilon = 0$ e cancelando alguns termos, que podem ser absorvidos por algum processo de renormalização, encontramos,

$$U_v^H(j) = \pm(2j+1) \frac{(qH)^2}{4\pi^2} \sum_a \left[\frac{x^2}{\epsilon} + \frac{x^2}{2}(1-\gamma) - \zeta'(-1, x+a) + jx \ln(x) \right]. \quad (\text{B.5})$$

onde γ é constante de Euler-Mascheroni, ainda usamos o fato que $\sum_a = (a - 1/2) = 0$ e,

$$\zeta(-1, y) = -\frac{B_2(y)}{2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} - y + y^2 \right] \quad (\text{B.6})$$

onde $B_n(y)$ são os polinômios de Bernoulli. Ainda assim existe um termo divergente que podemos remover adicionando e subtraindo o termo de vácuo sem a presença de um campo magnético no sistema a Eq. (B.5). Logo,

$$U_v = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [p^2 + M^2]^{1/2} \quad (\text{B.7})$$

O termo subtraído pode ser convenientemente tratado executando uma mudança de variáveis $p^2 \rightarrow p'^2/(2eH)$ e $M^2 \rightarrow x = M^2/(2eH)$. Realizando a integração em $d = 3 - \epsilon$ dimensão que leva a

$$U_v = \pm(2j+1) \frac{(eH)^2}{2\pi^2} \left[\frac{x^2}{\epsilon} + \frac{x^2}{2}(1-\gamma) - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{4} \right] \quad (\text{B.8})$$

Finalmente, adicionando todas as contribuições que se pode escrever (resignificando os termos):

$$U_v^H(j) = U_v \pm (2j+1) \frac{(eH)^2}{2\pi^2} \sum_a \left[\zeta'(-1, x+a) - \frac{1}{2} x^2 \ln(x) + jx \ln(x) + \frac{x^2}{4} \right] \quad (\text{B.9})$$

Onde U_v , neste caso é dado pela Eq. (B.7) e pode ser obtida integrando até um limite de energia que definimos como Λ (corte). De maneira que:

$$U_v = \pm(2j+1) \frac{1}{8\pi^2} \left[M^4 \ln \left(\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right) - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right] \quad (\text{B.10})$$

De forma que definimos $\epsilon_\Lambda = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$.

Portanto, as funções que definem o termo de vácuo do grande potencial termodinâmico para bósons e férmions são dadas por,

$$U_v^H(0) = U_v + \frac{(eH)^2}{4\pi^2} \left[\zeta' \left(-1, x + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} x^2 \ln(x) + \frac{x^2}{4} \right], \quad (\text{B.11})$$

e

$$U_v^H(1/2) = U_v - \frac{(eH)^2}{2\pi^2} \left[\zeta'(-1, x) - \frac{1}{2} (x^2 - x) \ln(x) + \frac{x^2}{4} \right], \quad (\text{B.12})$$

respectivamente.

Em geral, nos modelos de Walecka, o termo U_v Eq. (B.10) é desprezado. Por outro lado no modelo espinorial ele pode ser absorvido em um processo de renormalização, conhecido na literatura por *aproximação Hartree* [1].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] KAPUSTA, J.I.; GALE, C.. *Finite-Temperature Field Theory Principles and Applications*. Cambridge, New York, 2006.
- [2] LE BELLAC, M.. *Thermal Field Theory*. Cambridge, 1965.
- [3] DAS, A.. *Finite Temperature Field Theory*. World Scientific, Singapore, 1997.
- [4] PESKIN, M.E.; SCHROEDER, D.V.. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1995.
- [5] RYDER, L.H.. *Quantum Field Theory*. Segunda Edição. Cambridge University Press, New York, 1996.
- [6] MAGGIORE, M.. *A Modern Introduction To Quantum Field Theory*. Oxford University, New York, 2005.
- [7] DOBADO, A.; NICOLA, A.G.; MAROTO, A. and PELAEZ JR, A.L. *Effective Lagrangians for the Standard Model*. Theor. Math. Phys. 1997.
- [8] YUKAWA, H.. *On the Interaction of Elementary Particles*. Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
- [9] LEE, I-H.; SHIGEMITSU, J. and SHROCK, R.E.. *Study of different lattice formulations of a Yukawa model with a real scalar field*. Nucl. Phys. B, **334**, 1990.
- [10] DAREWYCH, J.W. *Some exact solutions of reduced scalar Yukawa theory*. Can. J. Phys. **76**, 523 (1998).
- [11] EFIMOV, G.V. *Bound states in quantum field theory, scalar fields*. [arXiv:hep-ph/9907483]
- [12] DING, B. and DAREWYCH, J.W. *A variational calculation of particle-antiparticle bound states in the scalar Yukawa model*. J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **26**, 907 (2000).
- [13] SHPYTKO, V. and DAREWYCH, J.W. *Exact spinor-scalar bound states in a quantum field theory with scalar interactions*. Phys. Rev. D **64**, 045012 (2001).

- [14] DUVIRYAK, A. and DAREWYCH, J.W. *Variational Hamiltonian treatment of partially reduced Yukawa-like models.* J. Phys. A, Math. Gen. **37**, 8365 (2004).
- [15] BARRO-BERGFLODT, K.; ROSENFELDER, R. and STINGEL, M. *Variational Worldline Approximation for the Relativistic Two-Body Bound State in a Scalar Model.* Few-Body Syst. **39**, 193 (2006).
- [16] EMAMI-RAZAVI, M. and KOWALSKI, M. *Effect of virtual pairs for relativistic bound-state problems.* Phys. Rev. D **76**, 045006 (2007).
- [17] EMAMI-RAZAVI, M.; BERGERON, N.; DAREWYCH, J.W. and KOWALSKI, M. *Relativistic three-body bound states in scalar QFT: Variational basis-state approach.* Phys. Rev. D **80**, 085006 (2009).
- [18] EMAMI-RAZAVI, M. *Relativistic wave equations of combined particles and antiparticles in scalar quantum field theory.* Phys. Rev. D **77**, 045025 (2008).
- [19] EMAMI-RAZAVI, M.; BERGERON, N. and DAREWYCH, J.W. *Relativistic wave equations of combined three particles and three antiparticles in scalar quantum field theory.* J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **37**, 025007 (2010).
- [20] EMAMI-RAZAVI, M.; BERGERON, N. and DAREWYCH, J.W. *Relativistic wave equations of n-body systems of particles and antiparticles of various masses in scalar quantum field theory.* J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. **38**, 065004 (2011).
- [21] CHIGODAEV, A. and DAREWYCH, J.W. *Interparticle potentials in a scalar quantum field theory with a Higgs-like mediating field.* Can. J. Phys. **91**, 279 (2013).
- [22] EFIMOV, G.V. and GANBOLD, G. *Meson spectrum and analytic confinement.* Phys. Rev. D **65**, 054012 (2002).
- [23] GANBOLD, G. *Hadron spectrum and infrared-finite behavior of QCD running coupling.* Phys. Part. Nucl. **43**, 79 (2012).
- [24] GUASCH, J.; PEÑARANDA, R. and SANCHEZ-FLORIT, R. J. High Energy Phys. 0904 (2002) 016.
- [25] ABRAHANTES, A.; GUASCH, J.; PEÑARANDA, R. and SANCHEZ-FLORIT, R. *Effective squark/chargino/neutralino couplings: MadGraph implementation.* Eur. Phys. J. C **73**, 2368 (2013).
- [26] ROCHEV, V.E. *Asymptotic behavior and critical coupling in the scalar Yukawa model from SchwingerDyson equations.* J. Phys. A, Math. Theor. **46**, 185401 (2013).

- [27] FREIRE, M.L. de and SILVA, R.R.. *The $D - \bar{D}$ Matter in Walecka's Mean Field Theory*. AIP Conf. Proc. 1296, 2010.
- [28] ABREU, L.M.; NERY, E.S. and SILVA, R.R.. *Exotic Behavior of Heavy-Flavored Meson Matter*. ArXiv: 1211.5505v2 [hep-ph] (2012).
- [29] SAITO, K.; TSUSHIMA, K.; LU, D.H. and THOMAS, A.W. *ω -nucleus bound states in the Walecka model*. Phys. Rev. C **59**, 1203 (1999).
- [30] LAVAGNO, A. *Hot and dense hadronic matter in an effective mean-field approach*. Phys. Rev. C **81**, 044909 (2010).
- [31] TORRES, J.R.; GULMINELLI, F. and MENEZES, D.P. *Liquid-gas phase transition in strange hadronic matter with relativistic models*. Phys.Rev. C **93**, 024306 (2016).
- [32] THEIS, J.; STÖCKER, H.; POLONYI, J.; *et. al.* *Phase Transition of the nucleon-antinucleon plasma in a relativistic mean-field theory*. Phys. Rev. D **28**, 2286-2290 (1983).
- [33] DELFINO, A.; JANSEN, M. and TIMÓTEO, V.S. *Phase transition of the nucleon-antinucleon plasma at different ratios*. Phys. Rev. C **78**, 034909 (2008).
- [34] SHAO, G.Y.; COLONNA, M.; DI TORO, M.; LIU, Y.X. and LIU, B. *Isoscalar-vector interaction and hybrid quark core in massive neutron stars*. Phys. Rev. D **87**, 096012 (2013).
- [35] CASALI, R.H.; CASTRO, L.B. and MENEZES, D.P. *Hadronic and hybrid stars subject to density dependent magnetic fields*. Phys. Rev. C **89**, 015805 (2014).
- [36] MENEZES, D.P.; PROVIDÊNCIA, C.; CHIAPPARINI, M.; BRACCO, M.E.; DELFINO, A. e MALHEIRO, M. *Constraining relativistic models through heavy ion collisions*. Phys. Rev. C **76**, 064902 (2007).
- [37] FUKUSHIMA, K. and SASAKI, C. *The phase diagram of nuclear and quark matter at high baryon density*. Progress in Particle and Nuclear Physics **72**, 99 (2013).
- [38] DUTRA, M. *et al.* *Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter constraints*. Phys. Rev. C **90**, 055203 (2014).
- [39] WALECKA, J.D.. *A theory of highly condensed matter*. Annals Phys. **83**, 491 (1974).
- [40] BAO, S.S. and SHEN, H. *Effects of finite size and symmetry energy on the phase transition of stellar matter at subnuclear densities*. Phys. Rev. C **93**, 025807 (2016).

- [41] WU, X.H. and SHEN, H. *Finite-size effects on the hadron-quark phase transition in neutron stars*. Phys. Rev. C **96**, 025802 (2017).
- [42] ADAMS, J. *et al* (STAR Collaboration) *Experimental and Theoretical Challenges in the Search for the Quark Gluon Plasma: The STAR Collaboration's Critical Assessment of the Evidence from RHIC Collisions*. Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005).
- [43] KIM, D.K.; HAN, Y.D. e KOH, I.G. *Chiral symmetry breaking in a finite volume*. Phys. Rev. D **49**, 12 (1994).
- [44] BRAUN, J.; KLEIN, B.; PIRNER, H.J. e REZAEIN, A.H. *Volume and quark mass dependence of the chiral phase transition*. Phys. Rev. D **73**, 074010 (2006).
- [45] PALHARES, L.F.; FRAGA, E.S. e KODAMA, T. *Chiral transition in a finite system and possible use of finite-size scaling in relativistic heavy ion collisions*. J. Phys. G **38**, 085101 (2011).
- [46] SAMANTA, S.; GHOSH, S. e MOHANTY, B. *Finite size effect of hadronic matter on its transport coefficients*. arXiv:1706.07709v1
- [47] ABREU, L.M.; MALBOUISSON, A.P.C. e MALBOUISSON, J.M.C. *Nambu-Jona-Lasinio model in a magnetic background: Size-dependent effects*. Phys. Rev. D **84**, 065036 (2011).
- [48] KHANNA, F.C.; MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C. and SANTANA, A.E. *Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications*. Phys. Rep. **539**, 135 (2014).
- [49] HEBER, A.; PREIS, F. e SCHMITT, A. *Magnetic catalysis in nuclear matter*. Phys. Rev. D **90**, 125036 (2014).
- [50] AYALA, A.; LOEWE, M.; ROJAS, J.C. e VILLAVICENCIO, C. *Magnetic catalysis of a charged Bose-Einstein condensate*. Phys. Rev. D **86**, 076006 (2012).
- [51] AYALA, A.; MERCADO, P. e VILLVICENCIO, C. *Magnetic catalysis of a finite-size pion condensate*. Phys. Rev. C **95**, 014904 (2017).
- [52] KHARZEEV, D.E.; MCLERRAN, L.D. e WARRINGA, H.J. *The effects of topological charge change in heavy ion collisions*. ArXiv:0711.0950 [hep-ph], 2007.
- [53] MATSUBARA, T. *A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics*. Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).

- [54] ABREU, L.M.; MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C.; NERY, E.S. and RODRIGUES Da SILVA, R. *Thermodynamic behavior of the generalized scalar Yukawa model in a magnetic background*. Nuclear Physics. B, v. **881**, p. 327-342, (2014).
- [55] ABREU, L.M.; NERY, E.S. and MALBOUISSON, A.P.C. *Size effects on the thermodynamic behavior of a simplified generalized scalar Yukawa model*. Physical Review. D, v. **91**, p. 087701, (2015).
- [56] ABREU, L.M.; MALBOUISSON, A.P.C. and NERY, E.S. *Phase structure of the scalar Yukawa model with compactified spatial dimensions*. Modern Physics Letters A, v. **31**, p. 1650121, (2016).
- [57] ABREU, L.M. and NERY, E.S. *Phase structure of a Yukawa-like model in the presence of magnetic background and boundaries*. International Journal of Modern Physics A, v. **31**, p. 1650128, (2016).
- [58] ABREU, L.M. and NERY, E.S. *Finite-size effects on the phase structure of the Walecka model*. Phys. Rev. C **96**, 050204 (2017).
- [59] ABREU, L.M. and NERY, E.S. *Critical behavior of Walecka model in background magnetic*. A ser publicado.
- [60] FEYNMAN, R.P.; HIBBS, A.R.. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Publications, Mineola, New York, 2010.
- [61] FURNSTAHL, R.J.; PERRY, R.J. and SEROT, B.D. *Two-loop corrections for nuclear matter in the Walecka model*. Phys. Rev. C **40**, 321 (1989).
- [62] RISCHKE, D.-H. and GREINER, W. *A functional integral approach to the thermodynamics of the $\sigma - \omega$ model*. Int. J. Mod. Phys. E **3**, 4 (1994) 1157-1194.
- [63] PATHRIA, R.K.. *Statistical Mechanics*. Second Edition. Butterworth-Heinemann, 1997.
- [64] REIF, F.. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [65] MARTIN, B.R. and SHAW, G.. *Particle Physics*. Third Edition. John Wiley, 2008.
- [66] POLCHINSKI, J. *Evaluation of the One Loop String Path Integral* Comm. Math. Phys. **104**, 37 (1986).

- [67] ATICK, J.J. and WITTEN, E. *The hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory*. Nucl. Phys. B **310**, 291 (1988).
- [68] BERNARD, C.W. *Feynman rules for gauge theories at finite temperature*. Phys. Rev. D **9**, 3312 (1974).
- [69] DOLAN, L. and JACKIW, R. *Symmetry behavior at finite temperature*. Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [70] WEINBERG, S. *Gauge and global symmetries at high temperature*. Phys. Rev. D **9**, 3357 (1974).
- [71] BIRREL, N.D. and FORD, L.H. *Renormalization of self-interacting scalar field theories in a nonsimply connected spacetime*. Phys. Rev. D **22**, 330 (1980).
- [72] FORD, L.H. and YOSHIMURA, T. *Mass generation by self-interaction in non-minkowskian spacetimes*. Phys. Lett. A **70**, 89 (1979).
- [73] FORD, L.H. *Vacuum polarization in a nonsimply connected spacetime*. Phys. Rev. D **21**, 933 (1980).
- [74] FORD, L.H. and SVAITER, N.F. *One-loop renormalization of a self-interacting scalar field in nonsimply connected spacetimes*. Phys. Rev. D **51**, 6981 (1995).
- [75] SILVA, J.C.; KHANNA, F.C.; MATOS-NETO, A. and SANTANA, A.E. *Generalized Bogoliubov transformation for confined fields: Applications for the Casimir effect*. Phys. Rev. A **66**, 052101 (2002).
- [76] MALBOUISSON, A.P.C. and MALBOUISSON, J.M.C. *Boundary dependence of the coupling constant and the mass in the vector N -component $(\lambda\phi^4)_D$ theory*. J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2263 (2002).
- [77] BALAZS, N.L. and VOROS, A. *Chaos on the pseudosphere*. Phys. Rep. **143**, 109 (1986).
- [78] LIMA, M.P. and MÜLLER, D. *Casimir effect in $E - 3$ closed spaces*. Classical Quantum Gravity **24**, 897 (2007).
- [79] DING, G-J.. *Are $Y(4260)$ and $Z_2^+(4250)$ D_1D or D_0D^* hadronic molecules?*. Phys. Rev. D, **79**, 014001 (2009).
- [80] KAPUSTA, J.I. *Bose-Einstein condensation, spontaneous symmetry breaking, and gauge theories*. Phys. Rev. D, v. **24**, 2 (1981).

- [81] ELIZALDE, E. *Ten physical applications of spectral zeta function*. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [82] GASSER, J. and LEUTWYLER, H. *Thermodynamics of chiral symmetry*. Phys. Lett. B **188**, 477 (1987).
- [83] BRANDENBERGER, R.H. *Quantum field theory methods and inflationary universe models*. Rev. Mod. Phys. **57**, 1 (1985).
- [84] FLORATOS, E.G. and PETCHER, D. *A two-loop calculation of the mass gap for the $O(N)$ model in finite volume*. Nucl. Phys. B **252**, 689 (1985).
- [85] BREZIN, E. and ZINN-JUSTIN, J. *Finite size effects in phase transition*. Nucl. Phys. B **257**, 867 (1985).
- [86] GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK I.M.. *Table of Integrals, Series, and Products*. Sétima Edição. USA: Elsevier, 2007.
- [87] SCHAFFNER, J.; GAL, A.; MISHUSTIN, I.N.; STÖCKER, H. and GREINER, W. *Kaon effective mass and energy in dense nuclear matter*. Phys. Lett. B **334**, 268 (1994).
- [88] BROWN, G.E.; KUBODERA, K.; RHO, M. and THORSSON, V. *A novel mechanism for kaon condensation in neutron star matter*. Phys. Lett. B **291**, 355 (1992).
- [89] SHURYAK, E.V. *Physics of the pion liquid*. Phys. Rev. D **42**, 1764 (1990).
- [90] KOSTYUK, A.; GORENSTEIN, M.; STÖCKER, H. and GREINER, W. *Phase Transition in Hot Pion Matter*. Phys. Lett. B **500**, 273 (2001).
- [91] ANCHISHKIN, D.V. and NAZARENKO, A.V. *Liquid-like phases of $\pi^+\pi^-$ matter*. J. Phys. Stud. **10**, 93 (2006).
- [92] VIOLA, V.E. *The nuclear liquid-gas phase transition: Q.E.D.* Nucl. Phys. A **734**, 487 (2004).
- [93] PETROPOULOS, N. *Linear sigma model at finite temperature*. arXiv:hep-ph/04022136 (2004).
- [94] ANAND, J.D.; BASU, R.; BISWAS, S.N.; GOYAL, A. and SONI, S.K. *Phase structure of the fermionic system in the $SU(2) \times SU(2)$ chiral σ model*. Phys. Rev. D **34**, 2133 (1986).

- [95] LINDE, A.D. *Phase Transitions In Gauge Theories And Cosmology*. Rept. Prog. Phys. **42**, 389 (1979).
- [96] LINDE, A.D. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Harwood Academic Publishers, (1990).
- [97] SARKAR, S.; NIYOGI, S. and CHOWDHURY, S.K. *Sudden change in the bulk properties of nucleon-antinucleon plasma at a certain temperature in the relativistic Hartree approximations*. Phys. Rev. D **32**, 1823 (1985).
- [98] GONIN, M. *et al.*, NA50 Collaboration, *Anomalous J/Ψ suppression in $Pb + Pb$ collisions at $158 \times A$ GeV/c*. Nucl. Phys. A **610**, 404c (1996).
- [99] ABREU, M.C. *et al.*, NA50 Collaboration, *Dimuon and charm production in nucleus-nucleus collisions at the CERN-SPS*. Eur. Phys. J. C **14**, 443 (2000).
- [100] RAMMELLO, L. *et al.*, NA50 Collaboration, *Charmonium production in $Pb - Pb$ interactions at 158 GeV/c per nucleon*. Nucl. Phys. A **638**, 261c (1998).
- [101] ABREU, M.C. *et al.*, *Observation of a threshold effect in the anomalous J/Ψ suppression*. Phys. Lett. B **450**, 456 (1999).
- [102] BERINGER, J. *et al.* Particle Data Group Collaboration. Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [103] ASAKAWA, M.; HATSUDA, T.. *J/ψ and η_c in the Deconfined Plasma from Lattice QCD*. Physical Review Lett, **92**, 012001 (2004).
- [104] DING, H-T.; FRANCIS, A.; KACZMAREK, O.; KARSCH, F.. *Charmonium Properties in hot quenched lattice QCD*. Phys. Rev. D, **86**, 014509 (2012).
- [105] BORNIAKOV V.G. *et al.* *Finite temperature phase transition with two flavors of improved Wilson fermions*. ArXiv: 1102.4461 [hep-lat] (2011).
- [106] ABREU, L.M.; LINHARES, C.A.; MALBOUISSON, A.P.C. and MALBOUISSON, J.M.C. *Magnetic effects on spontaneous symmetry breaking/restoration in a toroidal topology*. Phys. Rev. D **88**, 107701 (2013).
- [107] MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C. and PEREIRA, R.C. *Boundary effects on the mass and coupling constant in the compactified Ginzburg-Landau model: The boundary dependent critical temperature*. J. Math. Phys. **50**, 083304 (2009).

- [108] LOEWE, M.; VILLAVICENCIO, C. and ZAMORA, R. *Linear sigma model and the formation of a charged pion condensate in the presence of an external magnetic field*. Phys. Rev. D **89**, 016004 (2014).
- [109] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F.. *Quantum Mechanics*. Paris, France: Hermann, 1977.
- [110] INAGAKI, T.; KIMURA, D. and MURATA, T. *Four-Fermion Interaction Model in a Constant Magnetic Field at Finite Temperature and Chemical Potential*. Prog. Theor. Phys. **111**, 371 (2004)
- [111] EBERT, D. and KLIMENKO, K.G. *Quark droplets stability induced by external magnetic field*. Nucl. Phys. A **728**, 203 (2003).
- [112] FRAGA, E.S. and MIZHER, A.J. *Chiral transition in a strong magnetic background*. Phys. Rev. D **78**, 025016 (2008).
- [113] MENEZES, D.P.; PINTO, M.B.; AVANCINI, S.S.; MARTÍNEZ, A.P. and PROVIDÊNCIA, C. *Quark matter under strong magnetic fields in the Nambu-Jona-Lasinio model*. Phys. Rev. C **79**, 0355807 (2009).
- [114] FAYAZBAKHS, SH. and SADOOGHI, N. *Phase diagram of hot magnetized two-flavor color-superconducting quark matter*. Phys. Rev. D **83**, 025026 (2011).
- [115] ZHANG, R.; FU, W.-J. and LIU, Y.-X. *Properties of mesons in a strong magnetic field*. Eur. Phys. J. C **76**, 307 (2016).
- [116] ENDRÖDI, G. *QCD equation of state at nonzero magnetic fields in the Hadron Resonance Gas model*. J. HEP. **04**, 023 (2013).
- [117] AGASIAN, N.O. and FEDOROV, S.M. *Quark-hadron phase transition in a magnetic field*. Phys. Lett. B **663**, 445 (2008).
- [118] BOGUTA, J. and BODMER, A.R. *Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface*. Nucl. Phys. A **292**, 413 (1977).
- [119] ZHANG, B.-W.; HOU, D.-F. and LI, J.-R. *The multiple solutions of self-consistency condition in Walecka model and the validity of the Brown-Rho scaling law*. Phys. Rev. C **61**, 051302 (2000).
- [120] SHU, S.; JING, M. and LI, J.-R. *The effective mass of nucleon under the condition of phase transition*. Mod. Phys. Lett. A **16**, 2021 (2001).

- [121] MONTVAY, I. and PIETARINEN, E. *Thermodynamical properties of the gluon matter*. Phys. Lett. B **115**, 151 (1982).
- [122] WALDHAUSER, B.M.; THEIS, J.; MARUHN, A.; STÖCKER, H. and GREINER, W. *Phase structure of excited baryonic matter in the relativistic mean field theory*. Phys. Rev. C **36**, 1019 (1987).
- [123] ABREU, L.M.; MALBOUISSON, A.P.C. and MALBOUISSON, J.M.C. *Finite-size effects on the phase diagram of difermion condensates in two-dimensional four-fermion interaction models*. Phys. Rev. D **83**, 025001 (2011).
- [124] ABREU, L.M.; MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C. and SANTANA, A.E. *Finite-size effects on the chiral phase diagram of four-fermion models in four dimensions*. Nuclear Physics. B **819**, 127 (2009).
- [125] CHO, S. *et al* (ExHIC Collaboration). *Exotic Hadrons from Heavy Ion Collisions*. arXiv:1702.00486v1
- [126] DUNCAN, R.C. and THOMPSON, C. *Formation of very strongly magnetized neutron stars-Implications for gamma-ray bursts*. Astrophys J. **392**, L9 (1992).
- [127] LAI, D. and SHAPIRO, S.L. *Cold equation of state in a strong magnetic field-Effects of inverse beta-decay* Astrophys J. **383**, 745 (1991).
- [128] FRAGA, E.S. and MIZHER, A.J. *Chiral transition in a strong magnetic background*. Phys. Rev. D **78**, 025016 (2008).
- [129] MAO, S. *Inverse magnetic catalysis in Nambu-Jona-Lasinio model beyond mean field*. Phys. Lett. B **758**, 195 (2016).
- [130] PREIS, F.; REBHAN, A. and SCHMITT, A. *Inverse magnetic catalysis in field theory and gauge-gravity duality*. Strongly interacting matter in magnetic fields: an overview, (2013).
- [131] FRAGA, E.S. and PALHARES, L.F. *Deconfinement in the presence of a strong magnetic background an exercise within the MIT bag model*. Phys. Rev. D **86**, 016008 (2012).
- [132] LAVAGNO, A. and PIGATO, D. *Chemical and mechanical instability in warm and dense nuclear matter*. Phys. Rev. C **86**, 024917 (2012).
- [133] TORRES, J.R.; GULMINELLI, F. and MENEZES, D.P. *Liquid-gas phase transition in strange hadronic matter with relativistic models*. Phys. Rev. C **93**, 024306 (2016).

- [134] SCAVENIUS, O.; DUMITRU, A.; FRAGA, E.S.; LENAGHAN, J.T. and JACKSON, A.D. *First-order chiral phase transition in high-energy collisions: Can nucleation prevent spinodal decomposition?*. Phys. Rev. D **63**, 116003 (2001).
- [135] FRAGA, E.S. and VENUGOPALAN, R. *Finite-size effects on nucleation in a first-order phase transition*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **345**, 121 (2005).
- [136] BANIK, S.; NANDI, R. and BANDYOPADHYAY, D. *Melting of antikaon condensate in protoneutron stars*. Phys. Rev. C **86**, 045803 (2012).