



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



# ESPECTROSCOPIA HADRÔNICA VIA UMA ABORDAGEM EFETIVA DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

**Francisco Miguel da Costa Júnior**

Orientador: Prof. Dr. Luciano Melo Abreu

**Tese de Doutorado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Divisão de Serviços Técnicos

Catálogo da publicação na fonte. UFBA / Biblioteca Central Zila Mamede

---

*Enquanto houver você do outro lado  
Aqui do outro eu consigo me orientar  
A cena repete, a cena se inverte  
Enchendo a minh'alma d'aquilo  
Que outrora eu deixei de acreditar  
Tua palavra, tua história  
Tua verdade fazendo escola  
E tua ausência fazendo silêncio em todo  
lugar  
Metade de mim agora é assim  
De um lado a poesia, o verbo, a saudade  
Do outro a luta, a força e a coragem pra  
chegar no fim  
E o fim é belo incerto, depende de como  
você vê  
O novo, o credo, a fé que você deposita em  
você e só  
"O anjo mais velho- Teatro Mágico"  
E vou viver as coisas novas  
Que também são boas  
O amor, humor das praças  
Cheias de pessoas  
Agora eu quero tudo  
Tudo outra vez  
"Tudo outra vez-BELCHIOR"  
Em memória de minha mãe...*



---

# Agradecimentos

---

Primeiramente gostaria de agradecer ao Criador de todas as coisas, ao Rei dos reis...à Ele toda honra e toda glória...

Gostaria de agradecer ao professor Luciano Melo Abreu, pela orientação, apoio, ensinamentos, e sobretudo, pelo exemplo de profissional devotado à ciência que ele se mostrou.

Aos meus colegas do grupo de Teoria Quântica de Campos, pelos momentos de convivência e aprendizado. Cada qual à sua maneira ajudou na finalização desse trabalho.

Aos mestres que tive durante toda minha formação, deixo minha mais profunda admiração e gratidão.

À minha família, pelo apoio sem medida.

À minha esposa, Bruna Pinheiro, por ter embarcado comigo nessa jornada muitas vezes inglória.

À FAPESB, pelo apoio financeiro.

Ao IFSERTÃO que permitiu meu afastamento para que esse trabalho fosse realizado.









---

# Resumo

---

Buscamos neste trabalho discutir e caracterizar o espectro de mésons tensoriais  $2^{-(-)}$  e de mésons  $B_c$  com diferentes números quânticos ( $J^P = 0^-, 0^+, 1^-, 1^+, 2^+, 2^-$ ), fazendo uso da abordagem da Hamiltoniana da QCD no Gauge de Coulomb com o auxílio de uma aproximação dita Tamm-Dancoff, tendo as interações dadas por um potencial de confinamento melhorado e uma interação hiperfina transversa, cujo kernel é um potencial tipo Yukawa. Por meio desse modelo temos um tratamento unificado dos diferentes tipos de quarks utilizando um número mínimo de parâmetros livres para termos um perfil básico dos espectros mesônicos. As trajetórias de Regge que relacionam os estados fundamentais e radialmente excitados são construídas e as separações hiperfinas analisadas. Por fim fazemos comparações dos resultados numéricos obtidos com dados experimentais e previsões teóricas de outros modelos.

**Palavras-chave:** Hamiltoniano efetivo, QCD no gauge de Coulomb, Espectro mesônico, Técnicas de muitos corpos.



---

# Abstract

---

We seek in this work to discuss and characterize the spectrum of tensor mesons  $2^{-(-)}$  and mesons  $B_c$  with different quantum numbers ( $J^P = 0^-, 0^+, 1^-, 1^+, 2^+, 2^-$ ), making use of the Hamiltonian approach of QCD in the Coulomb Gauge with the aid of a so-called Tamm-Dancoff approximation, having the interactions given by an improved confinement potential and a transverse hyperfine interaction, whose kernel is a Yukawa-like potential. Through this model we have a unified treatment of the different types of quarks using a minimum number of free parameters to have a basic profile of the mesonic spectra. Regge trajectories relating the fundamental and radially excited states are constructed and the hyperfine separations analyzed. Finally, we make comparisons of the numerical results obtained with experimental data and theoretical predictions from other models.

**Keywords:** Effective hamiltonian, QCD in Coulomb gauge, Meson spectrum, Many-body techniques.



---

# Sumário

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Sumário</b>  | <b>i</b>   |
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>iii</b> |
| <b>Lista de Tabelas</b>   | <b>v</b>   |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>   |
| <b>Lista de Símbolos e Abreviaturas</b>                         | <b>1</b>   |
| <b>2 Fundamentos</b>  | <b>5</b>   |
| 2.1 Aspectos gerais do Modelo Padrão . . . . .                  | 5          |
| 2.1.1 Quarks e Hádrons . . . . .                                | 6          |
| 2.1.2 Simetria de Isospin . . . . .                             | 8          |
| 2.1.3 Classificação das partículas . . . . .                    | 9          |
| 2.2 Teorias de gauge e QCD . . . . .                            | 10         |
| 2.2.1 Eletrodinâmica Quântica como teoria abeliana . . . . .    | 11         |
| 2.2.2 Cromodinâmica Quântica como teoria não-abeliana . . . . . | 12         |
| 2.3 Fenomenologia de Regge . . . . .                            | 14         |
| 2.4 Separações hiperfinas . . . . .                             | 15         |
| <b>3 QCD no gauge de Coulomb</b>                                | <b>17</b>  |
| 3.1 Teoria de gauge do $SU_c(3)$ . . . . .                      | 17         |
| 3.2 Quantização: Gauge temporal ( $A_0 = 0$ ) . . . . .         | 19         |
| 3.3 Quantização: Gauge de Coulomb . . . . .                     | 21         |
| <b>4 Modelo efetivo da QCD no gauge de Coulomb</b>              | <b>29</b>  |
| 4.1 HAMILTONIANO EFETIVO . . . . .                              | 29         |
| 4.2 TÉCNICAS DE MUITOS CORPOS . . . . .                         | 31         |
| 4.3 MÉTODO TDA . . . . .  | 35         |
| <b>5 Espectro do méson tensorial <math>2^{-(-)}</math></b>      | <b>43</b>  |
| 5.1 Espectro de massa . . . . .                                 | 43         |
| 5.2 Trajetórias de Regge . . . . .                              | 46         |
| <b>6 Espectro do méson <math>B_c</math></b>                     | <b>51</b>  |
| 6.1 Valores dos parâmetros . . . . .                            | 51         |
| 6.2 Espectro de massa . . . . .                                 | 52         |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 6.3      | Trajelórias de Regge . . . . .                        | 54        |
| 6.4      | Separações hiperfinas . . . . .                       | 57        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões e perspectivas</b>                      | <b>59</b> |
| <b>A</b> | <b>Apêndice</b>                                       | <b>69</b> |
| A.1      | Componentes do $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ . . . . .    | 69        |
| A.2      | Análise dos comutadores da equação TDA . . . . .      | 80        |
| A.3      | Funções de onda da equação TDA de movimento . . . . . | 85        |
|          | <b>Referências bibliográficas</b>                     | <b>68</b> |

---

# Lista de Figuras

---

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Partículas elementares do Modelo Padrão. . . . .  | 6  |
| 4.1 | Massa do quark corrente $M(k)$ como uma função do momento $k$ . . . . .   | 41 |
| 4.2 | Massa de quark constituinte $\mathcal{M} = M(0)$ como uma função de $C_h$ . . . . .   | 41 |
| 5.1 | Trajétórias de Regge no plano $(n, M^2)$ no setor do charmonium. . . . .  | 47 |
| 5.2 | Trajétórias de Regge para o caso específico $C_h = 0.6$ com a linha tracejada correspondendo a um ajuste não-linear. . . . .  | 48 |
| 5.3 | Trajétórias de Regge no plano $(n, M^2)$ no setor do bottomonium. . . . .   | 48 |
| 5.4 | Trajétórias de Regge para o caso específico $C_h = 0.7$ com a linha tracejada correspondendo a um ajuste não-linear. . . . .  | 49 |
| 6.1 | Espectro $B_c$ gerado pelo conjunto de parâmetros III. . . . .  | 53 |
| 6.2 | Trajétórias de Regge no plano $(J, M^2)$ para estados $B_c$ com paridade não-natural $P = (-1)^J$ , para $n = 1, \dots, 5$ (do bottom para o top). . . . .  | 55 |
| 6.3 | Trajétórias de Regge no plano $(n, M^2)$ para estados $B_c$ vetoriais de onda $S$ , vetoriais de onda $P$ e tensoriais de onda $D$ . . . . .  | 55 |
| 6.4 | Trajétórias não-lineares no plano $(J, M^2)$ partindo de estados $B_c$ vetoriais, pseudoscalares e escalares (do bottom para top), com linhas indicando as regiões dos estados $1S, 1P, 1D$ . Circulos representam as massas preditas mostradas na Tabela 6.2, levando em conta os valores do conjunto de parâmetros III. . . . . | 56 |





---

# Lista de Tabelas

---

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Alguns exemplos de bárions e valores correspondentes das suas cargas elétricas $Q$ , estranheza $S$ , charme $C$ e beleza $\tilde{B}$ . . . . . | 7  |
| 2.2 | Alguns exemplos de mésons e valores correspondentes das suas cargas elétricas $Q$ , estranheza $S$ , charme $C$ e beleza $\tilde{B}$ . . . . .  | 7  |
| 2.3 | Resumo das propriedades dos quarks. . . . .   | 9  |
| 2.4 | Tipos de Mésons. . . . .  | 10 |
| 5.1 | As massas corrente ( $m_f$ ) e constituinte ( $\mathcal{M}_f = M_f(0)$ ) dadas em MeV, com $m_g = 600$ MeV e $C_h = 0.7$ . . . . .              | 43 |
| 5.2 | Massas TDA dos estados fundamentais $2^{-(\cdot)}$ , dadas em GeV. . . . .  | 44 |
| 5.3 | Massas TDA dos estados fundamentais $2^{-(\cdot)}$ dadas em GeV. . . . .  | 45 |
| 5.4 | Massas TDA dos estados fundamentais e radialmente excitados $2^{--}$ do $c\bar{c}$ dadas em GeV, obtidos para $m_c = 950$ MeV. . . . .          | 46 |
| 5.5 | Massas TDA dos estados fundamentais e radialmente excitados $2^{--}$ para $b\bar{b}$ dadas em GeV, obtidos para $m_b = 3900$ MeV. . . . .       | 47 |
| 6.1 | Massas de quarks constituintes $\mathcal{M}_{b,c}$ dadas em MeV. . . . .  | 51 |
| 6.2 | Massas TDA dos estados fundamentais e excitados radialmente obtidos para $m_c = 950$ MeV e $m_b = 4000$ MeV. . . . .                            | 52 |
| 6.3 | Comparação das massas TDA dos estados $B_c$ obtidos do conjunto de parâmetros III com outras previsões. . . . .                                 | 53 |
| 6.4 | Parâmetros estabelecidos do ajuste linear das trajetórias de Regge. . . . .   | 56 |
| 6.5 | Separações hiperfinas dos estados $B_c$ dadas em MeV . . . . .  | 57 |
| 6.6 | Razão $r$ para estados $B_c$ de onda $P$ . . . . .  | 58 |



---

# Capítulo 1

## Introdução

---

No Modelo Padrão, a teoria subjacente responsável pela descrição de estados hadrônicos é a Cromodinâmica Quântica (QCD), cujos graus de liberdade fundamentais são quarks, antiquarks e glúons. A fenomenologia dos hádrons, por serem descritos por uma teoria de gauge não-abeliana, em geral é distinta da dos átomos, descritos pela Eletrodinâmica Quântica (QED) que é uma teoria de gauge abeliana. Além do que, os glúons, ao contrário dos fótons, são portadores de carga (de cor), auto-interagem, e estão no cerne de fenômenos como: a liberdade assintótica, responsável por garantir que as propriedades de alta energia da QCD possam ser calculadas na teoria de perturbação de acoplamento fraco [1, 2]; e o confinamento de cor, da qual resulta que todos os hádrons detectados são singletos de cor, ocorrendo em baixas energias, onde a teoria de perturbação de acoplamento fraco falha, levando à construção de modelos alternativos para reproduzir a fenomenologia nesta escala de energia, como o modelo efetivo proposto nesta tese.

As combinações mais comuns de estados singlete de cor que podem ser formadas são  $q\bar{q}$  e  $qqq$ . A exigência de estados de cor neutra, porém, também possibilita a existência de estruturas mais complicadas, o que foi inclusive manifestado por Gell-Mann em um dos seus trabalhos sobre o modelo de quark [3]. Na QCD, temos ainda os possíveis estados híbridos, cujos números quânticos são determinados por seu conteúdo de quark, antiquark e glúon. Por carregarem carga de cor (e auto interagirem), os glúons também podem originar os estados denominados "glueballs", cujos números quânticos são determinados exclusivamente por seu conteúdo gluônico. No geral, qualquer estado que não se adequa às características de um hádron convencional ( $q\bar{q}$  ou  $qqq$ ), é denominado de "exótico" [4–7].

Nas últimas décadas, cada vez mais estados hadrônicos foram observados e em decorrência disso, análises mais apuradas vêm sendo realizadas, tanto do ponto de vista teórico como experimental [4]. O interesse nas espectroscopias tanto de hádrons leves quanto de quarkônios pesados são objetivos frequentes dos experimentos nas principais colaborações, bem como temas de muitos modelos teóricos recentes encontrados na literatura [8–20].

Entre as famílias que compõem o setor do espectro de hádrons leves, os mésons leves são componentes essenciais e têm seus aspectos fundamentais ainda não elucidados, justificando serem objetivos de experimentos nas mais diversas colaborações. Dentre estes experimentos, podemos citar o BESIII, que é um experimento no Beijing Electron do Instituto de Altas Energias (IHEP), projetado para estudar a física dos decaimentos do charme, do charmonium e de hádrons leves. Outro experimento que vale citar é o GlueX, localizado no Jefferson Lab (JLab), cujo objetivo principal é compreender a natureza do confinamento na QCD, identificando espectros de mésons híbridos e exóticos gerados pela excitação do campo gluônico ligando os quarks. Também encontramos diversos trabalhos interessados nos espectros de mésons e hádrons

leves, como nas referências [8–20].

Avaliando a situação experimental dos mésons mais leves de diversos setores, fatos interessantes surgem quando examinamos aqueles com os números quânticos  $J^{P(C)} = 2^{-(-)}$ . Do PDG (Particle Data Group) [4], por exemplo, vemos que apenas quatro mésons fundamentais mais leves foram confirmados: os mésons estranhos  $K_2(1770)$  e  $K_2(1820)$ , o charmonium  $\psi_2(3823)$  e o bottomonium  $\Upsilon_2(1D)$ . No caso das famílias de mésons leves sem sabor, que envolve o méson isovetorial ( $\rho_2$ ) e os mésons isoescalares ( $\omega_2, \phi_2$ ), os quatro estados observados  $\rho_2(1940)$ ,  $\omega_2(1975)$ ,  $\omega_2(2195)$ ,  $\rho_2(2225)$  são interpretados como “outros estados”, pois seus estados fundamentais permanecem ausentes, com a expectativa de que sejam encontrados na mesma região do espectro de massa dos seus pares  $1^{--}$  e  $3^{--}$ , em torno de  $\simeq 1700$  MeV, como considerado nas Refs. [9, 19, 21, 22]. Das abordagens teóricas utilizadas para avaliar o espectro dos mésons tensoriais  $2^{-(-)}$ , citamos o modelo de quark relativístico [21], análises de Regras de soma da QCD [9], modelo de quark relativístico para os estados fundamentais e Fenomenologia de Regge para os estados excitados dos mésons leves [19], dentre outros. Algumas delas reportam previsões para as massas dos mésons que diferem em até centenas de MeV. Os mésons tensoriais  $2^{-(-)}$  são abordados com foco nos mésons leves sem sabor e nas relações entre os estados fundamentais e excitados do charmonium e bottomonium.

Os estados  $B_c$ , por sua vez, são estados ligados quarkonium compostos de um par quark-antiquark pesados com diferentes sabores ( $c\bar{b}$  ou  $b\bar{c}$ ). Os mecanismos de obtenção destes estados apresentam baixa taxa de produção, dificultando as observações e medidas da espectroscopia do  $B_c$ , fazendo com que esta seja menos conhecida que a dos setores do charmonium e bottomonium. Por outro lado, os diferentes sabores de quark em sua composição não permitem que sejam aniquilados dentro dos hádrons, tornando-os mais estáveis que seus análogos nas famílias do charmonium e bottomonium, e sendo mais úteis para entender as dinâmicas da interação forte.

Em 1998 tivemos a primeira observação do méson  $B_c$  com a detecção do estado fundamental pseudoescalar  $B_c(1S)^+$  realizada pela colaboração CDF [61], o que foi confirmado tempos depois por outras colaborações [59, 60]. Este é o único estado  $B_c$  bem estabelecido, com massa de  $6274.9 \pm 0.8$  MeV e números quânticos reconhecidos, de acordo com o PDG. Também encontramos outro estado  $B_c$ , nomeadamente  $B_c(2S)^+$ , com massa de  $(6871.0 \pm 1.7)$  MeV mas sem números quânticos confirmados. Contudo, resultados de algumas colaborações apresentam controvérsias. A colaboração ATLAS [62] reportou a massa  $6842 \pm 4 \pm 5$  MeV de um estado observado consistente com a primeira excitação radial pseudoescalar. O CMS [63] e o LHCb [64] recentemente detectaram dois sinais consistentes com os  $2^1S_0$  e  $2^3S_1$ . Para o  $2^1S_0$ : o LHCb e o CMS encontraram a massa sendo respectivamente  $(6872.1 \pm 1.3 \pm 0.1 \pm 0.8)$  MeV e  $(6871.0 \pm 1.2 \pm 0.8 \pm 0.8)$  MeV. Para o  $2^3S_1$ , o LHCb obteve a massa  $(6841 \pm 0.6 \pm 0.1 \pm 0.8)$  MeV, enquanto o CMS observou a diferença de massa  $m[B_c(2^1S_0)] - m[B_c^*(2^3S_1)] = (29 \pm 1.5 \pm 0.7)$  MeV. Estes dados explicitam o desacordo dos resultados das colaborações para o méson  $B_c^*(2^3S_1)$ . Podemos explicar esse fato notando que o pico observado pela colaboração ATLAS possivelmente é a superposição dos estados  $B_c(2^1S_0)$  e  $B_c^*(2^3S_1)$ , bastante espaçados com relação a resolução da medição. Também observa-se que o estado  $B_c(2^1S_0)$  é mais pesado que o  $B_c^*(2^3S_1)$ , discordando com estimativas teóricas. Isto pode ser justificado levando em conta que o pico observado  $B_c^*(2S)$  possui uma massa menor que o valor verdadeiro, permanecendo desconhecida pela impossibilidade de reconstrução da emissão de fótons de baixa energia quando  $B_c^{*+} \rightarrow B_c^+\gamma$  [63]. Citamos algumas das abordagens teóricas que avaliam o espectro do méson  $B_c$ : modelos de quarks não-relativísticos [65–72], modelos de quarks constituintes relativísticos [21, 73–77], regras de soma da QCD [78, 79], QCD na rede [80–82] e abordagens de equações Dyson-Schwinger e Bethe-Salpeter [83], dentre outras.

Salientamos que daremos foco nas estimativas das energias dos estados fundamentais e radialmente excitados dos estados  $B_c$  com números quânticos  $J^P = 0^-, 0^+, 1^-, 1^+, 2^+, 2^-$ . Também construímos trajetórias de Regge e calculamos as separações hiperfinas dos estados de onda S e P.

Buscamos, deste modo, contribuir para a compreensão dos mésons tensoriais  $2^{-(\prime)}$  e dos mésons  $B_c$  fazendo uso de uma abordagem distinta destas que foram citadas para ambos os casos, auxiliando na construção do perfil dos espectros destes estados. A abordagem utilizada é baseada no modelo da QCD no gauge de Coulomb [84, 85, 87–101], onde a hamiltoniana exata é substituída por uma hamiltoniana efetiva cujas interações são organizadas em potenciais efetivos calculados entre densidades e correntes de cor. Em outras palavras, a versão efetiva empregada supõe que as interações entre quarks e antiquarks são tratados através de um potencial de confinamento e uma interação hiperfina transversa, cujo kernel é um potencial tipo Yukawa.

Esta tese está organizada como segue. O capítulo 2 é dedicado a apresentação dos fundamentos básicos para o entendimento da construção do modelo efetivo e da análise dos resultados obtidos do mesmo, a saber: Aspectos gerais do Modelo Padrão da Física de Partículas; Teorias de gauge abelianas e não-abelianas, tendo como exemplos base a QED e a QCD, respectivamente; aspectos da análise de estados excitados através da Fenomenologia de Regge; além de como efetuar os cálculos das separações hiperfinas, em particular, de estados de onda S e P. No capítulo 3 expomos a obtenção da hamiltoniana da QCD no gauge de Coulomb, partindo do gauge temporal. Com essa hamiltoniana exata no gauge de Coulomb, no capítulo 4 obtemos a versão efetiva do modelo que exclui as contribuições puramente gluônicas, além da obtenção da equação de movimento na aproximação Tamm-Dancoff (TDA), que irá nos possibilitar obter as massas dos estados para posterior análise numérica dos espectros mesônicos. No capítulo 5 e 6, apresentamos os resultados numéricos dos mésons tensoriais  $2^{--}$  e dos mésons  $B_c$ , respectivamente, além da discussão dos mesmos. Por fim, no capítulo 7 apresentamos as conclusões e perspectivas. O trabalho ainda conta com um apêndice que detalha os cálculos das componentes do  $H_{eff}$  no ordenamento normal, que possibilitam obter a equação de gap e a equação da auto-energia; e também com a análise dos comutadores da equação TDA de movimento.



---

## Capítulo 2

# Fundamentos

---

Neste capítulo apresentamos alguns aspectos teóricos utilizados ao longo da tese. Na seção 2.1, trazemos tópicos relativos ao Modelo Padrão da física de partículas, dando ênfase aos quarks e seus estados ligados, a simetria de isospin e as formas usuais para classificação de partículas. Na seção 2.2 revemos os processos de construção de teorias de gauge abelianas e não-abelianas, trazendo como exemplos a QED e a QCD, respectivamente. Na seção 2.3 noções básicas referente a Fenomenologia de Regge são mostradas, com destaque para as trajetórias de Regge, essenciais para relacionar as massas dos estados fundamentais e dos estados excitados. Por fim, na seção 2.4 mostramos as formas utilizadas para obtenção das separações hiperfinas de estados de onda S e P.

Os pontos discutidos neste capítulo são apresentados de maneira sucinta, para o leitor interessado em mais detalhes sugerimos como principais referências: seção 2.1 a referências [25]; seção 2.2 a referência [24]; seção 2.3 a referência [105]; seção 2.4 as referências [26, 27]. Além dessas, outras referências são citadas ao longo do capítulo.

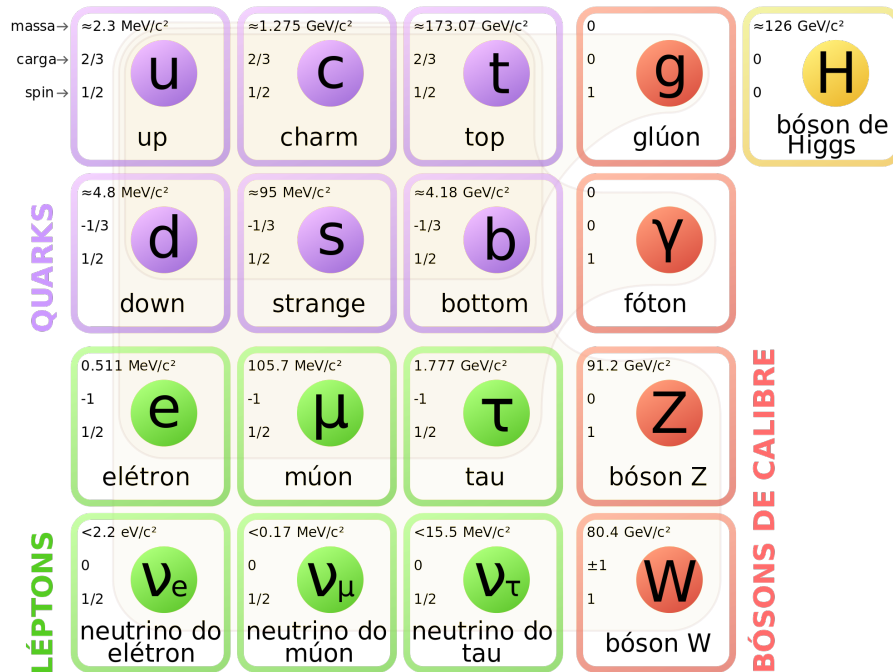
### 2.1 Aspectos gerais do Modelo Padrão

O Modelo Padrão com significativo sucesso explica diversos fenômenos físicos e comporta partículas que podem ser tratadas como pontuais e sem estrutura interna, sendo, portanto, partículas elementares. Tais explicações levam em consideração as propriedades e interações dos férmions, que possuem spin  $1/2$  e são divididos em quarks e léptons; e dos bósons, partículas mediadoras, que possuem spin  $1$ , denominados usualmente bósons de calibre (gauge). Temos ainda um bóson de spin  $0$ , o bóson de Higgs, responsável por dotar de massa todas as partículas do modelo. Na figura 2.1 temos um resumo do Modelo Padrão.

Das quatro forças fundamentais da natureza - eletromagnética, forte, fraca e gravitacional- apenas esta última ainda não está presente no modelo. A interação eletromagnética liga os elétrons, que são os léptons mais conhecidos, aos átomos. A força fraca pode ser observada em processos de decaimento  $\beta$ , que dão origem a partículas leves e neutras como o neutrino do elétron. A interação forte une os hádrons, estados ligados de quarks, tendo como exemplos mais comuns os prótons e nêutrons – denominados núcleons.

Essas três forças fundamentais participantes do Modelo Padrão são mediadas pelos bósons de calibre, os quais possuem uma simetria fundamental chamada invariância de calibre. Na interação eletromagnética os fótons que possuem massa zero são os mediadores, favorecendo a natureza de longo alcance dessa interação. Para a interação fraca, os mediadores são os bósons  $W$  e  $Z$ , cujas massas valem por volta de 80-90 vezes a massa do próton, resultando em uma interação de curto alcance. Por fim, temos os glúons como mediadores da interação forte, sendo também não massivos.

Figura 2.1: Partículas elementares do Modelo Padrão.



Fonte: [23]

Analogamente a interação eletromagnética, devido ao caráter não massivo dos mediadores, a interação forte entre os quarks é de longo alcance, no entanto, entre os estados ligados de quarks (hádrons), a interação residual não é a mesma, mas é uma consequência dela, sendo, portanto, de curto alcance.

### 2.1.1 Quarks e Hádrons

Quarks e hádrons interagem principalmente via força forte, pois os efeitos oriundos das interações fraca e eletromagnética podem ser negligenciados quando comparados com a interação forte. Com o advento dos aceleradores de partículas, muitos hádrons foram sendo descobertos no decorrer do tempo, o que levou no final dos anos 60 ao surgimento do modelo de quarks, resultado dos trabalhos tanto de Gell-Mann quanto de Zweig. As observações deles levaram a concluir que os hádrons conhecidos poderiam ser interpretados como estados ligados de apenas três partículas, batizadas de quarks por Gell-Mann, tendo spin 1/2 e cargas elétricas fracionadas em unidades da carga elétrica elementar do elétron  $e$ , juntamente com suas antipartículas. O sucesso do modelo foi evidente com a descoberta de mais partículas, contudo, questionava-se que quarks fossem partículas reais devido a impossibilidade de detectá-los livres. Posteriormente, observando o espalhamento de alta energia de prótons e elétrons foi possível analisar os efeitos dinâmicos de quarks livres dentro do próton, evidenciando a existência dos mesmos. Juntamente com esses resultados experimentais tivemos o surgimento da Cromodinâmica Quântica (QCD), a qual se mostrou uma teoria fundamental para o entendimento das interações fortes.



No modelo de quarks a princípio havia três sabores de quarks, hoje conhecemos seis, divididos em três gerações: up (u) e down (d), charme (c) e estranho (s), top (t) e bottom (b). Os quarks (u, c e t) tem carga  $+2/3$  e os quarks (d, s e b), tem carga  $-1/3$ , ambos em unidades de  $e$ .

Deduz-se as massas aproximadas dos quarks (d, u, s, c e b) através das massas dos seus estados ligados hadrônicos, com o auxílio de modelos de quarks constituintes. O tempo de vida do quark top é muito curta para produzir estados hadrônicos observáveis, tendo sua massa alcançada de seus produtos de decaimentos.

Apesar da não observância de quarks isolados, muitos estados ligados com cargas elétricas inteiras foram obtidos devido a um novo grau de liberdade existente para quarks, mas não para léptons, denominado cor. Estes estados são os bárions, estados ligados de três quarks ( $3q$ ), partículas de spin semi-inteiro; os antibárions, estados ligados de três antiquarks ( $3\bar{q}$ ), sendo suas antipartículas; e os mésons, estados ligados de um quark e um antiquark ( $q\bar{q}$ ), partículas de spin inteiro. A combinação entre quarks leva em consideração que os hádrons são partículas sem cor e com carga elétrica inteira. Seguem abaixo alguns exemplos de bárions e mésons, com seus respectivos conteúdos quarkônicos.

Tabela 2.1: Alguns exemplos de bárions e valores correspondentes das suas cargas elétricas Q, estranheza S, charme C e beleza  $\tilde{B}$

| Partícula   | Conteúdo | Massa (MeV) | Q | S  | C | $\tilde{B}$ |
|-------------|----------|-------------|---|----|---|-------------|
| $p$         | $uud$    | 938         | 1 | 0  | 0 | 0           |
| $n$         | $udd$    | 940         | 0 | 0  | 0 | 0           |
| $\Lambda$   | $uds$    | 1116        | 0 | -1 | 0 | 0           |
| $\Lambda_c$ | $udc$    | 2285        | 1 | 0  | 1 | 0           |
| $\Lambda_b$ | $udb$    | 5624        | 0 | 0  | 0 | -1          |

Tabela 2.2: Alguns exemplos de mésons e valores correspondentes das suas cargas elétricas Q, estranheza S, charme C e beleza  $\tilde{B}$

| Partícula  | Conteúdo   | Massa (MeV) | Q  | S  | C  | $\tilde{B}$ |
|------------|------------|-------------|----|----|----|-------------|
| $\pi^+$    | $u\bar{d}$ | 140         | 1  | 0  | 0  | 0           |
| $K^-$      | $s\bar{u}$ | 494         | -1 | -1 | 0  | 0           |
| $D^-$      | $d\bar{c}$ | 1869        | -1 | 0  | -1 | 0           |
| $D_s^+$    | $c\bar{s}$ | 1969        | 1  | 1  | 1  | 0           |
| $B^-$      | $b\bar{u}$ | 5279        | -1 | 0  | 0  | -1          |
| $\Upsilon$ | $b\bar{b}$ | 9460        | 0  | 0  | 0  | 0           |

As tabelas acima mostram valores de alguns números quânticos que caracterizam determinado estado dependendo do respectivo conteúdo quarkônico. Tais números não estão associados ao movimento ou às propriedades espaciais das funções de onda, sendo denominados de números quânticos internos. Dentre estes, temos a estranheza S, definida por

$$S \equiv -[N(s) - N(\bar{s})]. \quad (2.1)$$

$N(s)$  e  $N(\bar{s})$  representando os números de quark e antiquarks do estranho.

Os outros números quânticos charme ( $C$ ), beleza  $\tilde{B}$  e top ( $T$ ) são definidos por

$$C \equiv N(c) - N(\bar{c}), \quad (2.2)$$

$$\tilde{B} \equiv - [N(b) - N(\bar{b})], \quad (2.3)$$

$$T \equiv N(t) - N(\bar{t}). \quad (2.4)$$

e ainda temos,  $N_u$  e  $N_d$  que não possuem denominações específicas,

$$N_u = N(u) - N(\bar{u}) \quad (2.5)$$

$$N_d = N(d) - N(\bar{d}). \quad (2.6)$$

O número bariônico ( $B$ ) dado em termos dos números totais de quarks e antiquarks é definido por

$$B \equiv \frac{1}{3} [N(q) - N(\bar{q})]. \quad (2.7)$$

e a carga elétrica dada por

$$Q = \frac{2}{3} [N_u + N_c + N_t] - \frac{1}{3} [N_d + N_s + N_b]. \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Simetria de Isospin

Observações sugerem que a formação de hádrons acontecem em famílias de partículas cujas massas são aproximadamente iguais. Devemos lembrar que as partículas pertencentes a determinada família apresentam cargas elétricas distintas, mas têm o mesmo spin, paridade, número bariônico. Em muitos casos observa-se uma simetria denominada simetria de isospin, a qual estabelece uma aproximação entre as massas dos quarks  $u$  e  $d$ , isto é,  $m_u \approx m_d$ . Apesar de não ser uma simetria exata, mas sim uma boa aproximação, principalmente pela pequena diferença de massa entre os quarks  $d$  e  $u$  e também pelos efeitos das forças eletromagnéticas serem fracas comparados aos das forças fortes, gera simplificações nas interpretações da física hadrônica. Outros números quânticos aparecem nesta simetria, os quais são conservados em interações fortes. Na tabela 2.3 temos um resumo das propriedades dos quarks e seus números quânticos. O primeiro deles é a hipercarga, definida por

$$Y \equiv B + S + C + \tilde{B} + T, \quad (2.9)$$

dada em função de números quânticos já conhecidos.

Chamando o valor máximo dentro de um multiplete de  $I$ , temos

$$I \equiv (I_3)_{max}, \quad (2.10)$$

Se considerarmos que a hipercarga ( $Y$ ) adquire valores iguais para cada membro de um multiplete,  $I_3$

assumiria valores distintos. Os multipletos observados contêm precisamente  $(2I + 1)$  membros, com  $I_3$  valores

$$I_3 = I, I-1, \dots, -I. \quad (2.11)$$

Isto é similar ao formalismo dos números quânticos de spin  $S$  e  $S_3$ , donde

$$S_3 = S, S-1, \dots, -S. \quad (2.12)$$

Desse modo, por analogia,  $I$  é chamado de número quântico de isospin e  $I_3$  a terceira componente de isospin,

$$I_3 \equiv Q - \frac{Y}{2}. \quad (2.13)$$

Tabela 2.3: Resumo das propriedades dos quarks.

| Quark   | Massa(GeV) | $B$ | $Y$  | $Q$  | $\tilde{B}$ | $T$ | $I_3$ | $I$ |
|---------|------------|-----|------|------|-------------|-----|-------|-----|
| Down    | 0.003      | 1/3 | 1/3  | -1/3 | 0           | 0   | -1    | 1/2 |
| Up      | 0.005      | 1/3 | 1/3  | 2/3  | 0           | 0   | +1    | 1/2 |
| Strange | 0.1        | 1/3 | -2/3 | -1/3 | 0           | 0   | 0     | 0   |
| Charm   | 1.3        | 1/3 | 4/3  | 2/3  | 0           | 0   | 0     | 0   |
| Bottom  | 4.5        | 1/3 | -2/3 | -1/3 | -1          | 0   | 0     | 0   |
| Top     | 174        | 1/3 | 4/3  | 2/3  | 0           | +1  | 0     | 0   |

Fonte: [25]

### 2.1.3 Classificação das partículas

Em geral o momento angular total  $J$  e os números quânticos de spin  $L$  e  $S$  são bons números quânticos, de modo que os estados hadrônicos podem ser caracterizada por  $J, L$  e  $S$ . Estes números são a base da chamada notação espectroscópica, na qual os estados são denotados por

$$^{2S+1}L_J. \quad (2.14)$$

Nesta notação é comum escrevermos o valor numérico de  $L$  como  $S(L=0), P(L=1), D(L=2), F(L=3)$ . Assim, para uma partícula denotada por  $^3S_1$ , por exemplo, temos  $L=0, S=1$ .

É comum também denotarmos estados por  $J^{PC}$ , com  $L$  representando o momento angular orbital,  $S$  o spin e o momento angular total  $J$  dado por  $|L-S| \leq J \leq |L+S|$ , paridade  $P = (-1)^{L+1}$  e C-paridade  $C = (-1)^{L+S}$ . Na tabela 2.4 temos as classificações provindas dessa notação.

No PDG, encontramos o rótulo  $I^G$ , no qual temos a G-paridade  $G = (-1)^{L+S+I}$ , que é uma generalização da C-paridade, e  $I$  que é número quântico de isospin.

Tabela 2.4: Tipos de Mésons.

| Tipo           | J | S    | L    | P | C    | $J^{PC}$         |
|----------------|---|------|------|---|------|------------------|
| Pseudoescalar  | 0 | 0    | 0    | - | +    | $0^{-+}$         |
| Escalar        | 0 | 1    | 1    | + | +    | $0^{++}$         |
| Vetorial       | 1 | 1    | 0, 2 | - | -    | $1^{--}$         |
| Pseudovetorial | 1 | 0, 1 | 1    | + | -, + | $1^{+-}, 1^{++}$ |
| Tensorial      | 2 | 1    | 1, 3 | + | +    | $2^{++}$         |

## 2.2 Teorias de gauge e QCD

As interações fundamentais da natureza são teorias de gauge, as quais são uma espécie de princípio guia para escrever as interações fundamentais dos campos. Tendo então com base a simetria de gauge, espera-se que seja possível gerar termos das interações fundamentais fazendo transformações de calibre locais nos termos cinéticos das lagrangianas.

Uma das primeiras teorias a expressar a invariância de gauge foi a Eletrodinâmica Clássica, com a formulação de Maxwell. Hermann Weyl com o intuito de unificar a gravitação e o eletromagnetismo cunhou o termo invariância de gauge como análogo de invariância de escala, imaginando que a escala de comprimento deveria variar de ponto a ponto no espaço e no tempo. As considerações foram tais que uma translação  $dx^\mu$  no espaço-tempo deveria ser seguida de uma mudança de escala do tipo  $l \rightarrow l + \Gamma_\mu(x)dx^\mu$ . A função de calibre  $\Gamma_\mu(x)$  definiria a escala relativa de todos os comprimentos de tal forma que uma função  $f(x)$  com dimensão de comprimento se transformaria como

$$f(x) \rightarrow f(x) + d[(\partial_\mu + \Gamma_\mu(x))]f(x)dx^\mu. \quad (2.15)$$

Com isso, Weyl esperava ser capaz de associar a função de calibre  $\Gamma_\mu(x)$  ao potencial vetor  $A_\mu$  da Eletrodinâmica. Da Mecânica Quântica temos que a interação de uma partícula de carga  $e$  com um campo eletromagnético é feita através do chamado acoplamento mínimo, com a substituição  $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$ , correspondente à substituição da derivada parcial por

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (2.16)$$

Essa transformação coincide com a transformação de escala de Weyl a menos da unidade imaginária, com  $A_\mu$  sendo o potencial vetorial. A invariância da Eletrodinâmica de Maxwell foi demonstrada por Weyl através das transformações de calibre do potencial  $A_\mu$  e da função de onda  $\Psi$  que descreve a partícula carregada dadas por

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad (2.17)$$

$$\Psi \rightarrow e^{ie\alpha}\Psi. \quad (2.18)$$

As simetrias de calibre não possuem interpretação experimental direta, pois não temos neste caso o surgimento de qualquer outra transformação que deixe os resultados físicos inalterados. O teorema de Noether nos ajuda nessa compreensão, lembrando que o mesmo define que qualquer simetria contínua de uma densidade de lagrangiana ( $L$ ) resulta na conservação de uma carga associada. Tomemos como exemplo

a QED, que possui uma simetria de calibre local e é descrita pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\Psi} \gamma_{\mu} (i\partial_{\mu} + eA_{\mu} + m) \Psi, \quad (2.19)$$

com a ação  $\int d^4x \mathcal{L}$  invariante conforme transformações do tipo  $\delta A_{\mu} = \partial_{\mu} \alpha$ , seguidas das transformações relacionadas as funções de onda, tendo então o surgimento de correntes conservadas conforme o teorema de Noether, com a seguinte forma

$$Q = \int d^3x \nabla \cdot (\mathbf{E}\alpha). \quad (2.20)$$

Para uma simetria global, caso em que  $\alpha$  é constante, a carga é dada pela lei de Gauss,

$$Q^{\alpha} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.21)$$

As cargas  $Q^{\alpha(x)}$  se anulam para  $\alpha(x)$ , isto é, quando  $\alpha$  não é constante e se anula no infinito espacial. Isto implica que não temos novas simetrias na natureza relacionadas a transformações de gauge locais, contudo, as mesmas limitam as prováveis formas da ação, ditando deste modo a forma da interação. Temos então que a condição de invariância da teoria por transformações de fase locais derivada da invariância de calibre, estabelece a forma da interação e as propriedades de transformações dos novos campos de gauge, configurando o que denominamos como princípio de gauge.

### 2.2.1 Eletrodinâmica Quântica como teoria abeliana

Vamos levar em conta o caso de uma partícula que obedece à equação livre de Dirac

$$(i\partial_{\mu}\gamma_{\mu} - m)\Psi(x) = 0, \quad (2.22)$$

derivada da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\Psi}(x) \gamma_{\mu} (i\partial_{\mu}\Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x)). \quad (2.23)$$

As quais são invariantes pela transformação de fase global do grupo U(1) com  $\alpha$  constante, dada por

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-ie\alpha}\Psi(x). \quad (2.24)$$

Quando impomos uma transformação local do tipo

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\Psi(x), \quad (2.25)$$

vemos que a densidade lagrangiana e a equação de Dirac não são mais invariantes. Efetuando o cálculo da derivada parcial de  $\Psi$

$$\partial_{\mu}\Psi(x) \longrightarrow \partial_{\mu}[e^{-ie\alpha(x)}\Psi(x)] = e^{-ie\alpha(x)}[\partial_{\mu} - ie\partial_{\mu}\alpha(x)]\Psi(x), \quad (2.26)$$

observamos que o princípio de gauge é satisfeito se houver a substituição da derivada  $\partial_{\mu}$  pela derivada

covariante  $D_\mu$ ,

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (2.27)$$

Juntamente com a introdução do campo de calibre  $A_\mu$  associado ao fóton que obedece a transformação

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x), \quad (2.28)$$

O termo proporcional a  $\partial_\mu \alpha$  incorporado na densidade lagrangiana cancela o termo aditivo inserido em  $\partial_\mu \Psi(x)$  pela transformação de fase local. Esse processo produz a nova densidade de lagrangiana e a nova equação de Dirac, que são invariantes sob transformações de fase locais e transformações de calibre. Quando incluímos na nova densidade de lagrangiana o termo de energia cinética do campo eletromagnético,

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

com o tensor antissimétrico do campo eletromagnético dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.30)$$

teremos então a densidade de lagrangiana completa da QED, podendo ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi + e(\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi)A_\mu. \quad (2.31)$$

Deve ser observado que estamos considerando aqui o espaço euclidiano, isto é, procuraremos construir uma teoria euclidianizada ao longo desta tese, de modo que não faremos distinções entre os índices covariantes e contravariantes.

## 2.2.2 Cromodinâmica Quântica como teoria não-abeliana

O grupo de simetria associado às interações fortes, do qual a QCD é a teoria subjacente, é o grupo  $SU(3)_c$ , que tem um caráter não-abeliano. Uma descoberta relevante realizada em 1973 por Gross, Wilczek e Politzer impulsionou a elaboração da QCD como uma teoria de gauge. Eles observaram que em altas energias o acoplamento quark-glúon-quark se tornava menos intenso, mostrando que apesar de confinados no interior dos hádrons por um acoplamento forte muito intenso, assintoticamente os quarks se comportam como partículas livres. A principal consequência desse fato é a possibilidade de, em altas energias, tratar a QCD de forma perturbativa. A densidade de lagrangiana livre agora é expressa da seguinte forma

$$\mathcal{L}_0 = \sum_f \bar{\Psi}_f(x) [i\gamma_\mu \partial_\mu - m_f] \Psi_f(x), \quad (2.32)$$

com as transformações de fase do grupo  $SU(3)_c$  escritas no espaço das cores como

$$\Psi_f \longrightarrow \Psi'_f = \exp\left[ig_s \alpha_a \frac{\lambda_a}{2}\right] \Psi_f(x), \quad (2.33)$$

com  $(a = 1, 2, \dots, 8)$ , sendo  $\alpha_a$  os parâmetros do grupo,  $\lambda_a$  as matrizes de Gell-Mann e  $g_s$  a constante de acoplamento que define a intensidade das interações fortes entre os quarks. A transformação do grupo não-

abeliano  $SU(3)_c$  torna-se semelhante a uma transformação do grupo abeliano  $U(1)$  quando consideramos transformações de fase globais.

Mas quando consideramos transformações de fase locais juntamente com a manutenção da invariância, precisamos efetuar a substituição da derivada  $\partial_\mu$  na densidade lagrangiana  $\mathcal{L}_0$  pela derivada covariante apropriada,

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a. \quad (2.34)$$

Verifica-se a presença de oito novos campos de calibre  $A_\mu^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ), com spin 1 e massa nula. As interações de quarks com oito glúons serão então dada pela nova densidade de lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f(x) [i\gamma_\mu D_\mu - m_f] \Psi_f(x), \quad (2.35)$$

invariante sob as transformações infinitesimais

$$\Psi_f^i \longrightarrow \Psi_f'^i = \Psi_f^i + ig_s \left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{ij} (\delta\alpha^a) \Psi_f^j, \quad (2.36)$$

juntamente com as transformações de calibre para os campos  $A_\mu^a$ ,

$$A_\mu^a \longrightarrow A_\mu'^a = A_\mu^a - \partial_\mu (\delta\alpha^a) - g_s f^{abc} (\delta\alpha^b) A_\mu^c, \quad (2.37)$$

com  $f^{abc}$  sendo as constantes de estrutura do grupo  $SU(3)_c$ , determinadas pelo seguinte comutador que sinaliza as propriedades não-abelianas do grupo,

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c. \quad (2.38)$$

Introduzindo o termo cinético do campo de glúons, invariante sob as transformações de calibre, com a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \quad (2.39)$$

onde tensor do campo dos glúons é dado por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.40)$$

a densidade de lagrangiana completa da QCD, também invariante sob transformações de calibre, terá então a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{\Psi}_f(x) [i\gamma_\mu D_\mu - m_f] \Psi_f(x). \quad (2.41)$$

### 2.3 Fenomenologia de Regge

Na literatura nos deparamos com vários modelos fenomenológicos úteis para realização dos cálculos das propriedades hadrônicas relacionadas com efeitos não perturbativos, dentre estes temos a Fenomenologia de Regge, derivados do estudo das propriedades da amplitude de espalhamento no plano do momento angular complexo.

Esse modelo tem como um dos atributos mais notórios a trajetória de Regge que exhibe a relação da massa  $M$  e do spin total  $J$  [31,33–41]. Na literatura encontramos vários estudos envolvendo as trajetórias de Regge no plano  $(J, M^2)$ , por exemplo, para mésons de sabores distintos com a obtenção dos valores numéricos dos parâmetros dessas trajetórias [36–40]. Também nos deparamos com a análise das propriedades dessas trajetórias no plano  $(n, M^2)$ , que pode ser visto nas referências [8, 32, 38, 42–48, 48–51, 112]. Uma das características observadas das trajetórias no plano  $(n, M^2)$ , ainda que o valor dos parâmetros não sejam os mesmos em muitos trabalhos, é a linearidade para mésons leves radialmente excitados, e o comportamento não-linear para mésons pesados.

Supondo que temos trajetórias de Regge aproximadamente lineares para mésons leves e também para mésons pesados, escrevemos

$$J = a_{ij} + \alpha'_{ij} M_{ij}^2, \quad (2.42)$$

onde  $i$  e  $j$  denotam os constituintes do quark; e  $a_{ij}$ ,  $\alpha'_{ij}$  são, respectivamente, a interceptação e a inclinação da trajetória na qual o meson  $i_j$  se encontra.

Para um multipletto de mésons com números quânticos  $n^{2s+1}L_J$ , os parâmetros  $a(0)$  e  $a$  com diferentes quarks constituintes podem ser relacionados pelas seguintes relações:

$$a_{ii}(0) + a_{jj}(0) = 2\alpha_{ij}(0), \quad (2.43)$$

representando a soma das interceptações, e

$$\frac{1}{\alpha'_{ii}} + \frac{1}{\alpha'_{jj}} = \frac{2}{\alpha'_{ij}}, \quad (2.44)$$

relacionada a soma dos inversos dos declives. Estas equações, que são válidas inclusive para trajetórias de Regge não-lineares no plano  $(J, M^2)$  [34, 40], foram derivadas em um trabalho que fornece uma abordagem microscópica para descrever a fenomenologia de Regge em termos dos graus de liberdade quarkiônico [40].

Alguns estudos, tais como os encontrados nas referências [44, 45, 57], indicam que a expansão da amplitude possui singularidade em  $t = 0$  ( $t$  é o quadrado do momento transferido), e que para assegurar a analiticidade faz-se necessário outras trajetórias denominadas "filhas" que possuem resíduos singulares responsáveis pelo cancelamento das singularidades da trajetória original "pai" [32, 44–46]. Além disso, observa-se nas "trajetórias filhas" as ressonâncias radiais excitadas, com a relação de massa entre o estado fundamental e suas excitações radiais dadas pela expressão abaixo [8, 38, 48, 49, 51, 112],

$$M_n^2 = M_1^2 + \mu^2(n - 1), \quad (2.45)$$

com  $M_1$  a massa do estado fundamental e  $\mu^2$  é um parâmetro. Em muitos trabalhos que avaliam espectros



de mésons leves,  $M_n^2$  é linear em relação a  $n$  [8, 38, 47–49, 112].

No modelo da corda,  $\mu^2$  e o declive de Regge  $\alpha'$  estão relacionados por [48, 49],

$$\mu^2 = 2\pi\sigma = \frac{1}{\alpha'}, \quad (2.46)$$

onde  $\sigma$  é a tensão da corda. Além disso, vemos que as análises dos dados experimentais para mésons leves realizadas nestes trabalhos citados anteriormente satisfazem  $\mu^2 \approx \frac{1}{a}$ , estando de acordo com o resultado do modelo da corda. No trabalho [112] o autor realiza análises de mésons leves na abordagem quase-clássica descrita pela equação de Salpeter sem massa com um potencial de confinamento linear, e obtém obtendo

$$\mu^2 = \frac{\pi}{2\alpha'}. \quad (2.47)$$

Já na referência [8], donde os cálculos dos espectros leves são realizados na estrutura do modelo de quarks relativístico em uma abordagem quase-potencial, com a posterior análise das trajetórias de Regge, têm-se o resultado:

$$\mu^2 \approx \frac{1.3}{\alpha'}. \quad (2.48)$$

Os valores encontrados do parâmetro  $\mu^2$  em diferentes trabalhos são distintos para mésons leves, devido a origem não experimental dos mesmos e suas interpretações dependerem da abordagem. Em geral, observa-se que natureza linear das trajetórias de Regge são amplamente aceitas para mésons leves, mas não para quarkônios pesados, ainda que o valor de  $\mu^2$  seja incerto.

## 2.4 Separações hiperfinas

Define-se a interação hiperfina como um acoplamento entre os spins intrínsecos dos férmions componentes do estado. No caso de mésons compostos de férmions com spin 1/2, observa-se que um número finito de operadores linearmente independentes contribui para a massa a partir dos ingredientes básicos dos operadores de spin e de momento angular orbital, os quais podem ser definidos no espaço das configurações como

- Hiperfina

$$\mathbf{S}_q \cdot \mathbf{S}_{\bar{q}}; \quad (2.49)$$

- Spin-orbita

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}; \quad (2.50)$$

- Tensor

$$T \equiv (\mathbf{S}_q \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{3}\mathbf{S}_q \cdot \mathbf{S}_{\bar{q}}, \quad (2.51)$$

onde  $S \equiv S_q + S_{\bar{q}}$ . Considerando qualquer múltiplo de estados  $q\bar{q}$ , teremos pelo teorema de Wigner-Eckart para estados com  $S = 0$ , que os elementos da matriz de ambos os operadores spin-órbita e tensor

desaparecem, pois os operadores se transformam em  $S = 1$  e  $S = 2$ , respectivamente. Os mesmos elementos da matriz desaparecem para todos os estados  $L = 0$ , de modo que qualquer separação hiperfina  $n^3S_1 - n^1S_0$  - na qual todos os termos de massa independentes de spin são cancelados - depende apenas do operador hiperfino. Para  $L > 0$  e  $S = 1$ ,  $J = L - 1$ ,  $L$  e  $L + 1$  são permitidos, e usando os resultados

$$\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rangle = \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)], \quad (2.52)$$

e

$$\langle T \rangle = \begin{cases} -\frac{L+1}{6(2L-1)}, J = L-1; \\ +\frac{1}{6}, J = L; \\ -\frac{L}{6(2L+3)}, J = L+1. \end{cases}, \quad (2.53)$$

verificar-se que os elementos da matriz do valor médio de spin para qualquer trio de estados spin-triplete com momento angular orbital maior que zero desaparecem para os operadores de spin-órbita e tensor. Contudo, todos esses estados têm os mesmos termos de massa independentes de spin, que também são iguais aos do spin singleto correspondente  $n^1S_{J=L}$ . Desse modo, a combinação de massa para o momento angular orbital maior que zero definido por:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,L} \equiv & M(n^1L_{J=L}) - \frac{2L-1}{3(2L+1)}M(n^3L_{J=L-1}) + \\ & - \frac{2L+1}{3(2L+1)}M(n^3L_{J=L}) - \frac{2L+3}{3(2L+1)}M(n^3L_{J=L+1}), \end{aligned} \quad (2.54)$$

com as combinações de massa  $\Delta_{n,0} \equiv M(n^1S_0) - M(n^3S_1)$  e  $\Delta_{n,L}$  para  $L > 0$  recebem contribuições somente do operador hiperfino.

Para estados de onda P, a separação hiperfina é comumente definida como

$$\Delta_{n,L} \equiv E(n^1L_{J=L}) - E(n^3L)_{medio}, \quad (2.55)$$

onde

$$E(n^3L)_{medio} = \frac{2L-1}{3(2L+1)}E(n^3L_{J=L-1}) + \frac{2L+1}{3(2L+1)}E(n^3L_{J=L}) + \frac{2L+3}{3(2L+1)}E(n^3L_{J=L+1}). \quad (2.56)$$

Em geral, a expressão acima costuma ser utilizada apenas para o caso  $n = 2$  e  $L = 1$ :

$$\Delta \equiv \Delta_{2,1} = E(1^1P_1) - \frac{1}{9}(5E(1^3P_2) + 3E(1^3P_1) + E(1^3P_0)). \quad (2.57)$$

Com essa breve exposição de alguns tópicos essenciais para o desenvolvimento do trabalho, podemos prosseguir analisando como obter a hamiltoniana da QCD no gauge de Coulomb, sendo este um tópico mais específico para que possamos construir o modelo efetivo de interesse. Vale salientar que cada ponto discutido acima pode ser aprofundando pelo leitor, seguindo as referências sugeridas.

---

## Capítulo 3

# QCD no gauge de Coulomb

---

Neste capítulo iremos realizar a quantização da hamiltoniana da QCD no gauge de Coulomb, inicialmente obtendo grandezas análogas as encontradas na QED e partindo para quantização no gauge temporal para enfim obter a quantização no gauge de Coulomb. Utilizamos como referência o livro do T.D.Lee [28], ainda atual em muitos aspectos, além de um artigo emblemático do Christ e Lee [30], que aborda também aspectos interessantes dessa temática.

### 3.1 Teoria de gauge do $SU_c(3)$

Iniciamos com um breve parêntese referente ao grupo especial unitário,  $SU_c(3)$ , essencial no contexto das interações fortes, uma vez que é o grupo de gauge da cromodinâmica quântica (QCD). O grupo  $SU(3)$  é definido como o conjunto de todas as matrizes  $3 \times 3$  unitárias  $U$ , de determinante 1 composto de oito parâmetros, e cujos elementos são convenientemente escritos em termos do mapa exponencial como

$$U(\Theta) = \exp\left[-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right] = \exp\left[-i \Theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right], \quad (3.1)$$

onde  $\Theta_a$  são números reais e  $\lambda_a$  as oito matrizes de Gell-Mann, que dão origem aos geradores,  $T^l = \lambda^l/2$ , na representação adjunta do  $SU_c(3)$ .

Consideremos então uma teoria de calibre das interações fortes com o  $SU_c(3)$  de cor como o grupo de calibre fundamental, consistindo de campos fermiônicos de spin  $1/2$ , com seis sabores distintos além de suas três cores possíveis. Denotaremos os campos de quark  $\psi_{f,A}$ , em que  $f = 1, \dots, 6$  se refere ao índice de sabor, e  $A = 1, 2, 3$  para o índice de cor. Partiremos então da densidade lagrangiana da QCD, escrita da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu^{\alpha\beta} \psi^\beta - m \psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \psi^\alpha - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^l F_{\mu\nu}^l, \quad (3.2)$$

onde para simplificar a notação omitimos os índices de sabor, salientando que temos uma lagrangiana deste tipo para cada sabor de quark. As derivadas covariantes possuem formas distintas a depender da representação, tanto quando atuam em objetos na representação fundamental como na representação adjunta, teremos, respectivamente

$$D_\mu^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \partial_\mu - ig A_\mu^l T_{\alpha\beta}^l = (\partial_\mu - ig A_\mu)^{\alpha\beta}, \quad (3.3)$$

$$D_{\mu}^{lm} = \delta^{lm} \partial_{\mu} - g f^{lmn} A_{\mu}^n. \quad (3.4)$$

Analogamente aos campos elétrico e magnético encontrados na QED, estabelecemos correspondências que nos possibilitam obter os campos "cromoeletrico" e "cromomagnético", dados respectivamente por,

$$\mathbf{E}^l = -\dot{\mathbf{A}}^l - \nabla A_0^l + g f^{lmn} A_0^m \mathbf{A}^n, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B}^l = \nabla \times \mathbf{A}^l + \frac{1}{2} g f^{lmn} \mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n. \quad (3.6)$$

Usando o princípio variacional  $\delta \int L dt = \delta \int \mathcal{L} d^4(x) = 0$  e a densidade lagrangiana, obtemos as equações de movimento. Para os campos fermiônicos,

$$\gamma_{\mu} D_{\mu}^{\alpha\beta} \psi^{\beta} + m \psi^{\alpha} = 0, \quad (3.7)$$

e para os campos de gauge

$$\partial_{\mu} F_{\mu\nu}^l - g f^{lmn} A_{\mu}^n F_{\mu\nu}^m = -ig \psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \gamma_{\nu} T_{\alpha\beta}^l \psi^{\beta}. \quad (3.8)$$

Definindo a quadricorrente como  $J_{\nu}^l \equiv i \psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \gamma_{\nu} T_{\alpha\beta}^l \psi^{\beta}$ , reescrevemos a derivada covariante de  $F_{\mu\nu}^l$ ,

$$D_{\mu}^{lm} F_{\mu\nu}^m = -g J_{\nu}^l. \quad (3.9)$$

Escrevendo as leis de Maxwell inhomogêneas em termos dos campos  $\mathbf{E}^l$  e  $\mathbf{B}^l$ , primeiramente para  $\nu = 4$ , com a densidade de carga de cor do quark definida como  $\rho_q^l = \psi^{\dagger\alpha} T_{\alpha\beta}^l \psi^{\beta} = \psi^{\dagger} T^l \psi$ , teremos

$$\mathbf{D}^{lm} \cdot \mathbf{E}^m = g \rho_q^l. \quad (3.10)$$

Expandindo a derivada covariante, obtemos o equivalente da lei de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$  para o campo cromoeletrico,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^l = g \rho^l, \quad (3.11)$$

onde usamos a densidade de carga total  $\rho^l = \rho_q^l + \rho_g^l$ . Agora tomando  $\nu = i$ , com a corrente de quarks  $\mathbf{J}^l = \psi^{\dagger\alpha} \alpha T_{\alpha\beta}^l \psi^{\beta}$ , obtemos

$$\mathbf{D}^{lm} \times \mathbf{B}^m = i D_4^{lm} \mathbf{E}^m + g \mathbf{J}^l. \quad (3.12)$$

Obtemos o equivalente à lei de Ampère-Maxwell,  $\nabla \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{J}$ , também expandindo a derivada covariante,

$$\nabla \times \mathbf{B}^l + g f^{lmn} \mathbf{A}^m \times \mathbf{B}^n = \dot{\mathbf{E}}^l + g f^{lmn} \mathbf{E}^m A_0^n + g \mathbf{J}^l. \quad (3.13)$$

### 3.2 Quantização: Gauge temporal ( $A_0 = 0$ )

Para uma configuração qualquer  $A_\mu = f_\mu(\mathbf{x}, t)$  do campo de gauge, é possível escolher para  $U(x)$  tal que a transformação

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (3.14)$$

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = U\Psi, \quad (3.15)$$

traga o campo de gauge da configuração original  $f_\mu(x)$  para o gauge temporal  $A_0(x) = 0$ . Tomando  $\mu = 4$  e usando também a unitariedade da matriz  $U$ , teremos que,  $A'_0 = 0$  em todo o espaço. No gauge temporal, campo cromoeletrício passa a ser dado por  $\mathbf{E}^l = -\dot{\mathbf{A}}^l$ , e o momento conjugado por  $\mathbf{A}^l$ ,  $\Pi^l = -\mathbf{E}^l = \dot{\mathbf{A}}^l$ . Colocando o termo cinético dos campos de gauge em função dos campos  $\mathbf{E}^l$  e  $\mathbf{B}^l$  e já levando em conta o gauge temporal, obtemos

$$F_{\mu\nu}^l F_{\mu\nu}^l = 2 \left( B_i^l B_i^l - \Pi_i^l \Pi_i^l \right). \quad (3.16)$$

Substituindo na densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\Psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu^{\alpha\beta} \Psi^\beta - m \Psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \Psi^\alpha + \frac{1}{2} \left( \Pi_i^l \Pi_i^l - B_i^l B_i^l \right). \quad (3.17)$$

Assim, a densidade Hamiltoniana  $i\Pi^\alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \Psi^\alpha + i\Pi_i^l \frac{\partial}{\partial x_4} A_i^l - \mathcal{L}_{\text{QCD}}$  será

$$\mathcal{H}_{\text{QCD}} = \Psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 (\gamma_i \nabla_i + m) \Psi^\alpha - g J_i^l A_i^l + \frac{1}{2} \left( \Pi_i^l \Pi_i^l + B_i^l B_i^l \right). \quad (3.18)$$

A quantização é obtida impondo as relações de comutação e anticomutação canônicas para os campos de gauge e para os campos de Dirac, respectivamente dados por

$$\left[ A_i^l(\mathbf{x}, t), \Pi_j^m(\mathbf{y}, t) \right] = i \delta^{lm} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.19)$$

$$\left\{ \Psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \Pi^\beta(\mathbf{y}, t) \right\} = i \delta^{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.20)$$

$$\left\{ \Psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \Psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y}, t) \right\} = \delta^{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.21)$$

com as demais relações resultando zero. Tanto o hamiltoniano  $\mathcal{H}_{\text{QCD}}$  quanto as relações de comutação e anticomutação são invariantes sob transformações de gauge independentes do tempo, nos permitindo com isso desconsiderar as componentes temporais.

Uma vez que as matrizes  $U$  são independentes do tempo, o grupo de invariância  $\{U(\mathbf{x})\}$  é gerado pelos operadores  $\mathcal{G}^l$  que são conservados e dependem apenas de  $\mathbf{x}$ , sendo determinados por

$$\mathcal{G}^l \equiv J^l + \Psi^\dagger T^l \Psi, \quad (3.22)$$

com a seguinte definição para os  $J^l$ ,

$$J^l \equiv \frac{1}{g} D_i^{lm} \Pi_i^m. \quad (3.23)$$

Analisando todas as comutações envolvendo o operador  $\mathcal{G}^l$ , que podem ser facilmente obtidas, vemos que estes comutam com o hamiltoniano  $H = \int d^3x \mathcal{H}$ , o que nos dá

$$\dot{\mathcal{G}}^l(\mathbf{x}, t) = -i [H, \mathcal{G}^l(\mathbf{x}, t)] = 0. \quad (3.24)$$

ou seja, satisfazem a equação de movimento de Heisenberg

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] + \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right), \quad (3.25)$$

sendo, portanto, quantidades conservadas. Calculando o comutador do hamiltoniano com as demais variáveis dinâmicas podemos obter as outras equações de movimento. A quantidade  $i\mathcal{G}^l/g$ ,

$$\frac{i}{g} \mathcal{G}^l = \frac{i}{g^2} D_i^{lm} \Pi_i^m + \frac{i}{g} \Psi^\dagger T^l \Psi = -\frac{i}{g^2} (D_i^{lm} E_i^m - g \Psi^\dagger T^l \Psi), \quad (3.26)$$

aparece em uma das equações de movimento quando  $v = 4$ . Desse modo, para manter a coerência com as demais equações de movimento no gauge temporal, devemos requerer que todos os vetores de estado  $|\rangle$  neste gauge, satisfaçam

$$\mathcal{G}^l |\rangle = 0. \quad (3.27)$$

Na representação de Schrödinger os operadores  $A_i = A_i(\mathbf{x})$  e  $\Pi_i = \Pi_i(\mathbf{x})$  não dependem do tempo, tendo suas formas dadas por

$$\Psi(A_i) \equiv \langle A_i^l | \rangle, \quad (3.28)$$

$$\Pi_i^l(\mathbf{x}) = -i \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})}. \quad (3.29)$$

Logo, o hamiltoniano  $H$  é  $H = \mathcal{K} + \mathcal{V}$ , onde  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{V}$  são os operadores energia cinética e energia potencial, respectivamente. Nesta representação suas formas são dadas por

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{2} \int \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} d^3x, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{V} = \int \left[ \frac{1}{2} B_i^l B_i^l - g I_i^l A_i^l + \Psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_i \nabla_i + m) \Psi \right] d^3x. \quad (3.31)$$

Para obtermos a Hamiltoniana da QCD no gauge de Coulomb devemos eliminar as restrições  $\mathcal{G}^l |\rangle = 0$ , através da introdução de coordenadas curvilíneas. Considerando a transformação de um conjunto de coordenadas cartesianas  $q_1, q_2, \dots$  para um conjunto de coordenadas curvilíneas  $Q_1(q_\alpha), Q_2(q_\alpha), \dots$  ( $q_\alpha \rightarrow$

$Q_\beta = Q_\beta(q_\alpha)$ , o termo cinético da lagrangiana pode ser escrito como

$$K \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \dot{Q}_{\alpha} M_{\alpha\beta} \dot{Q}_{\beta}, \quad (3.32)$$

onde  $M$  é uma matriz cujos elementos são dados por

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \frac{\partial q_{\gamma}}{\partial Q_{\alpha}} \frac{\partial q_{\gamma}}{\partial Q_{\beta}}. \quad (3.33)$$

Na Mecânica Quântica, o operador energia cinética  $\mathcal{K}$  na representação das coordenadas é

$$\mathcal{K} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial q_{\alpha}^2} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} |M|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial Q_{\alpha}} \left( M_{\alpha\beta}^{-1} |M|^{1/2} \frac{\partial}{\partial Q_{\beta}} \right), \quad (3.34)$$

com  $|M| = \det M$ , e  $M^{-1}$  a matriz inversa a  $M$ , de elementos

$$M_{\alpha\beta}^{-1} = \sum_{\gamma} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_{\gamma}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\gamma}}. \quad (3.35)$$

Portanto, o elemento  $|M|^{-1/2}$  é dado por

$$|M|^{-1/2} = \det \left( \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \right). \quad (3.36)$$

Vamos aplicar a transformação de coordenadas cartesianas para curvilíneas ao nosso caso. Os momentos conjugados a  $\phi_a$  são

$$p_a(\mathbf{x}) = -i \frac{\delta}{\delta \phi_a(\mathbf{x})}, \quad (3.37)$$

salientando que os operadores são independentes de  $t$ , pois estamos utilizando a representação de Schrödinger.

### 3.3 Quantização: Gauge de Coulomb

Vamos partir dos resultados obtidos no gauge temporal  $A_0 = 0$ , numa configuração qualquer  $A_i^l(x)$ . O campo de gauge será expresso por  $W_{\mu} = W_{\mu}^l T^l$ , com as componentes espaciais satisfazendo a condição que define o gauge de Coulomb,

$$\chi(W_i) = \nabla_i W_i = 0, \quad (3.38)$$

onde  $\chi$  é um funcional homogêneo e linear de  $W_i$ , definido na representação fundamental e que pode ser escrito como uma combinação linear dos geradores do  $SU(3)$ ,  $\chi = \chi^l T^l$ , sendo portanto considerada uma matriz hermitiana e de traço nulo.

Para uma dada configuração inicial  $A_i(\mathbf{x}, t)$  do campo no gauge  $A_0 = 0$ , devemos supor que sempre existirá uma matriz de transformação  $u(\mathbf{x}, t)$  apta em efetuar a mudança de  $A_i$  ao gauge de Coulomb [28],

nos possibilitando escrever

$$A_i = uW_iu^{-1} + \frac{i}{g}u(\nabla_iu^{-1}). \quad (3.39)$$

Considerando a matriz  $u$  função dos parâmetros  $\phi_a$  que são variáveis angulares ( $a = 1, \dots, 8$ ), e que são por sua vez, funções de  $x$ ,  $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ , podemos escrever

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\phi_a(\mathbf{x}, t)), \quad (3.40)$$

podendo ser vista como uma expressão do campo de gauge  $A_i(\mathbf{x}, t)$  em termos de coordenadas curvilíneas  $W_i(\mathbf{x}, t)$  e  $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ . A expressão (3.30) sugere a escolha dos campos  $A_i^l$  como coordenadas cartesianas. Num ponto fixo  $x$ , temos um conjunto de  $3 \times 8 = 24$  campos  $A_i^l(x)$  ( $i$  varia de 1 a 3, e  $l$ , de 1 a 8); por outro lado, o gauge de Coulomb impõe 8 vínculos do tipo  $\nabla_i W_i^l = 0$ , de forma que apenas  $24 - 8 = 16$  dos campos  $W_i^l(x)$  são independentes. Portanto, temos 24 coordenadas cartesianas  $A_i^l(\mathbf{x})$  relacionadas a um conjunto de 16 e 8 coordenadas curvilíneas  $W_i^l$  e  $\phi_a$ . Precisamos definir os momentos conjugados aos  $W_i^l(\mathbf{x})$ , lembrando que os mesmos obedecem aos vínculos impostos pelo gauge de Coulomb. Desse modo, teremos

$$W_i^l(\mathbf{x}) = \sum_N Q_N f_i^l(\mathbf{x})_N = P_i^l(\mathbf{x}) = \sum_N f_i^l(\mathbf{x})_N \left( -i \frac{\partial}{\partial Q_N} \right), \quad (3.41)$$

com  $Q_N$  representando coordenadas generalizadas, e cada uma das funções  $f_i^l(\mathbf{x})_N$  obedecendo o conjunto de vínculos

$$\int d^3x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | \mathbf{x}', m \rangle f_j^m(\mathbf{x}')_N = 0, \quad \forall N, \mathbf{x} \in l. \quad (3.42)$$

bem como

$$\chi^l(P_i, \mathbf{x}) = \int d^3x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | \mathbf{x}', m \rangle P_j^m(\mathbf{x}') = 0. \quad (3.43)$$

Aplicando a transformação de coordenadas ao operador energia cinética, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\frac{1}{2} \int \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} d^3x \\ &= \frac{1}{2} |M|^{-1/2} \int \int d^3x d^3x' \left[ p_a(\mathbf{x}) |M|^{1/2} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} p_b(\mathbf{x}') + p_a(\mathbf{x}) |M|^{1/2} \right. \\ &\quad \times M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ai}^l P_i^l(\mathbf{x}') + P_i^l(\mathbf{x}) |M|^{1/2} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ia}^l p_a(\mathbf{x}') + P_i^l(\mathbf{x}) |M|^{1/2} \\ &\quad \left. \times M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{lm} P_j^m(\mathbf{x}') \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$



com  $M$  sendo a matriz de massa. A inversa dessa matriz foi dividida nas seguintes partes,

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} = \int d^3 x'' \frac{\delta\phi_a(\mathbf{x})}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} \frac{\delta\phi_b(\mathbf{x}')}{\delta A_k^n(\mathbf{x}''')}, \quad (3.45)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ai}^l = \int d^3 x'' \frac{\delta\phi_a(\mathbf{x})}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} \frac{\delta W_i^l(\mathbf{x}')}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} = M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ia}^l, \quad (3.46)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{lm} = \int d^3 x'' \frac{\delta W_i^l(\mathbf{x})}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} \frac{\delta W_j^m(\mathbf{x}')}{\delta A_k^n(\mathbf{x}''')}, \quad (3.47)$$

com as derivadas funcionais dadas abaixo,

$$\frac{\delta\phi_a(\mathbf{x})}{\delta A_i^n(\mathbf{x}')} = -g\lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^k \langle \mathbf{x}, k | (\Gamma_j \mathcal{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}'), \quad (3.48)$$

$$\frac{\delta W_i^m(\mathbf{x})}{\delta A_j^l(\mathbf{x}')} = U^{lm}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \langle \mathbf{x}, m | \mathcal{D}_i (\Gamma_f \mathcal{D}_f)^{-1} \Gamma_j | \mathbf{x}', p \rangle U^{lp}(\mathbf{x}'). \quad (3.49)$$

Definimos as quantidades  $\lambda_a^l$  e  $U^{ml}$  da seguinte forma,

$$iu^{-1} \frac{\partial u}{\partial \phi_a} \equiv \lambda_a \equiv \lambda_a^l T^l, \quad (3.50)$$

$$u^{-1} T^m u \equiv U^{ml} T^l, \quad (3.51)$$

com a derivada covariante na representação adjunta dada por  $\mathcal{D}_i^{lm} = \delta^{lm} \nabla_i - g f^{lmn} W_i^n$ .

Escrevendo a variação do campo de gauge como

$$\delta W_i^l(\mathbf{x}) = \sum_N f_i^l(\mathbf{x})_N \delta Q_N, \quad (3.52)$$

bem como uma variação em  $A_i^l(\mathbf{x})$ ,

$$\delta A_i^l(\mathbf{x}') = U^{lm} [\delta \bar{A}_i^m(\mathbf{x}')_I + \delta \bar{A}_i^m(\mathbf{x}')_{II}]. \quad (3.53)$$

Podemos escrever a matriz  $|M|^{-1/2}$  após algumas considerações como

$$|M|^{-1/2} = \det \begin{bmatrix} -g\lambda^{-1} (\Gamma_i \mathcal{D}_i)^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{1/2} & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

com  $X$  representando uma matriz retangular de elementos  $X_{M\xi}$ . O determinante da matriz inversa,  $|M|^{1/2}$ , vale

$$|M|^{1/2} = \det \left[ -g^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-1/2} \Gamma_i \mathcal{D}_i \lambda \right] = \text{const } \mathcal{J} |\lambda|, \quad (3.55)$$

onde  $|\lambda| = \prod_{\mathbf{x}} \det \lambda(\mathbf{x})$ , e a constante é dada por  $\text{const} = \det[-g^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-1/2}]$ . Temos que  $\mathcal{J}$  é o jacobiano da transformação,  $q_\alpha \rightarrow Q_\beta = Q_\beta(q_\alpha)$ ,

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(q_1, q_2, \dots)}{\partial(Q_1, Q_2, \dots)} \quad (3.56)$$

neste caso, definido de forma direta como

$$J = \det |\Gamma_i \mathcal{D}_i|. \quad (3.57)$$

Usualmente em teorias de gauge não-abelianas esse determinante é chamado como determinante de Faddeev-Popov. Assim, fazendo as devidas substituições na expressão para  $\mathcal{K}$ , teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} J^{-1} \int d^3x P_i^l(\mathbf{x}) J P_i^l(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} J^{-1} |\lambda|^{-1} \int \int d^3x d^3x' \left[ P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{D}_i + g p_a(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. \times (\lambda^{-1})_a^l \right] J (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger \left( \mathcal{D}_k^\dagger \Gamma_k^\dagger \right)^{-1} |\lambda| \left[ \mathcal{D}_l P_l^m(\mathbf{x}') - g (\lambda^{-1})_a^l p_a^m(\mathbf{x}') \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Identificamos os  $P_i^l(\mathbf{x})$  como os momentos transversos; entre colchetes temos a densidade de carga, e o elemento de matriz entre as densidades é a função de Green coulombiana,  $(\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger (\mathcal{D}_k^\dagger \Gamma_k^\dagger)^{-1}$ . Com o intuito de eliminarmos a dependência angular, devemos colocar os geradores do grupo em termos dos momentos conjugados  $p_a$ 's. Com a quantidade

$$i \frac{\partial u}{\partial \phi_a} u^{-1} \equiv \Lambda_a \equiv T^l \Lambda_a^l, \quad (3.59)$$

vamos avaliar a relação das componentes  $\Lambda_a^l$  com os  $\lambda_a^l$ , o que através da multiplicação à direita pela matriz  $u$  e à esquerda por sua inversa, resulta

$$\begin{aligned} i u^{-1} \frac{\partial u}{\partial \phi_a} &= u^{-1} T^l \Lambda_a^l u, \\ T^m \lambda_a^m &= U^{lm} T^m \Lambda_a^l, \\ \lambda_a^m &= U^{lm} \Lambda_a^l. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Invertendo esta expressão, obtemos

$$\Lambda_a^l = U^{lm} \lambda_a^m. \quad (3.61)$$

Considerando

$$p_a \equiv \lambda_a^l j^l \equiv \Lambda_a^l J^l, \quad (3.62)$$

onde temos os conjuntos de operadores  $\{j^l(\mathbf{x})\}$  e  $\{J^l(\mathbf{x})\}$ , que podem ser separados da seguinte forma

$$j^l = (\lambda^{-1})_a^l p_a, \quad J^l = (\Lambda^{-1})_a^l p_a, \quad (3.63)$$

e levando em conta  $U^{ln} = \Lambda_a^l (\lambda^{-1})_a^n = \lambda_a^m (\Lambda^{-1})_a^l$ , resulta em

$$j^l = (\lambda^{-1})_a^l \Lambda_a^k J^k = U^{kl} J^k, \quad J^l = (\Lambda^{-1})_a^l \lambda_a^m j^m = U^{lm} j^m. \quad (3.64)$$

Agora, retornando as restrições  $\mathcal{G}^l | \rangle = 0$ , vemos que os campos de gauge longitudinais são eliminados requerendo que os vetores de estado que constituem o subespaço físico satisfaçam a lei de Gauss.

Reescrevendo estas restrições em função de  $W_i$  e  $\phi_a$ , temos

$$\begin{aligned} G^l \Psi [W_i, \phi_a] &= (J^l + \psi^\dagger T^l \psi) \Psi [W_i, \phi_a] = 0, \\ \left[ -i \frac{\delta}{\delta \phi_a} + \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi \right] \Psi [W_i, \phi_a] &= 0, \\ \left[ \frac{\delta}{\delta \phi_a} + i \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi \right] \Psi [W_i, \phi_a] &= 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Fazendo

$$\Psi [W_i, \phi_a] = \mathcal{U}(\phi_a) \tilde{\Psi}(W_i), \quad (3.66)$$

para resolvermos esta expressão, onde  $\tilde{\Psi}(W_i)$  é um vetor de estado qualquer, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_a} (\mathcal{U}(\phi_a) \tilde{\Psi}(W_i)) &= -i \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi \mathcal{U}(\phi_a) \tilde{\Psi}(W_i) \\ i \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \phi_a} \mathcal{U}^{-1} &= \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde  $\psi^\dagger T^l \psi$  são os geradores de  $\mathcal{U}(\phi_a)$ . Eliminamos a dependência angular em  $\phi_a$  do hamiltoniano redefinindo-o do seguinte modo

$$\tilde{H} = \mathcal{U}(\phi)^{-1} H \mathcal{U}(\phi). \quad (3.68)$$

Aplicando esta transformação aos termos de  $\mathcal{K}$  e de  $\mathcal{V}$ , encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}} &= \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} \int d^3x P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{J} P_i^l(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} |\lambda|^{-1} \int \int d^3x d^3x' \left[ -P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{D}_i \right. \\ &\quad \left. + g \psi^\dagger T^l \psi \right] \mathcal{J} (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger \left( \mathcal{D}_{k'}^\dagger \Gamma_{k'}^\dagger \right)^{-1} |\lambda| \left[ \mathcal{D}_{i'} P_{i'}^l(\mathbf{x}') + g \psi^\dagger T^l \psi \right], \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\tilde{\mathcal{V}} = \int \left\{ \frac{1}{2} B_i^l B_i^l + \psi^\dagger \left[ \alpha_i \left( -i \nabla_i - g T^l W_i^l \right) + m \beta \right] \psi \right\} d^3x. \quad (3.70)$$

Assim, combinando estas expressões podemos obter a forma final do hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(P, W) &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} B_i^l B_i^l + \psi^\dagger \left[ \alpha_i \left( -i \nabla_i - g T^l W_i^l \right) + m \beta \right] \psi \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} \int \int d^3x d^3x' \left[ -P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{D}_i + g \psi^\dagger T^l \psi \right] \mathcal{J} (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger \\ &\quad \times \left( \mathcal{D}_{k'}^\dagger \Gamma_{k'}^\dagger \right)^{-1} \left[ \mathcal{D}_{i'} P_{i'}^l(\mathbf{x}') + g \psi^\dagger T^l \psi \right] + \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} \int d^3x P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{J} P_i^l(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde as variáveis angulares foram completamente eliminadas.

Para obter esta expressão numa notação mais familiar substituímos os momentos conjugados  $P_i^l(\mathbf{x})$  pela seguinte forma  $\Pi_i^l(\mathbf{x})$ , reescrevendo o hamiltoniano como

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) (-i\alpha_i \nabla_i + \beta m) \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d^3x \left[ g^{-1} \Pi_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{J} \Pi_i^l(\mathbf{x}) + B_i^l(\mathbf{x}) B_i^l(\mathbf{x}) \right] \\ & - \frac{g^2}{2} \int \int d^3x d^3x' \rho^l(\mathbf{x}) g^{-1} K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathcal{J} \rho^m(\mathbf{x}') - g \int d^3x J_i^l(\mathbf{x}) W_i^l(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde usamos  $\nabla_i \Pi_i^l = 0$ . O kernel  $K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , é dado por

$$K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}, l | \mathcal{M}^{-1} \nabla^2 \mathcal{M}^{-1} | \mathbf{x}', m \rangle, \quad (3.73)$$

com  $\mathcal{M} = \nabla \cdot \mathbf{D}$ , e a derivada covariante  $\mathbf{D} = \delta^{ab} \nabla - g f^{abc} \mathbf{A}^c$  na representação ajunta. No limite abeliano,  $\mathbf{D} \rightarrow \nabla$ , de forma que  $K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rightarrow \langle \mathbf{x}, l | \nabla^{-2} | \mathbf{x}', m \rangle = -\delta^{lm} / 4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , obtemos novamente o potencial coulombiano da QED. Desse modo, observamos que há no gauge de Coulomb o surgimento de uma interação instantânea  $K^{lm}$ , semelhante ao potencial coulombiano na QED.

Vale notar ainda que a condição  $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$  não fixa unicamente o gauge em teorias não-abelianas: existem cópias de cada configuração do campo de gauge relacionadas entre si por transformações de gauge. A esta liberdade residual dá-se o nome de ambiguidades de Gribov, que são problemas oriundos das teorias de Yang-Mills, e não de um calibre em particular; existindo desse modo em qualquer calibre. No caso específico do gauge de Coulomb, este problema pode ser resolvido, como descrito no trabalho do Zwanziger [114], no qual ele ainda mostra que o hamiltoniano é renormalizável neste gauge. Também observamos que como temos apenas glúons transversais entrando, não teremos graus de liberdade de glúons espúrios, o que garantirá que todos os vetores de Hilbert tenham normalizações positivas, essencial para o uso de técnicas variacionais utilizadas com significativo sucesso na física atômica, molecular e da matéria condensada. Esses aspectos, portanto, são razões suficientes para escolhermos trabalhar com essa abordagem no gauge de Coulomb.

O hamiltoniano que obtivemos possui quatro partes, o que nos possibilita escrever

$$H_{\text{QCD}} = H_q + H_g + H_{qg} + H_C, \quad (3.74)$$

onde cada termo é definido como

$$H_q = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) [-i\alpha \cdot \nabla + \beta m_q] \psi(\mathbf{x}), \quad (3.75)$$

$$H_g = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ g^{-1} \Pi^a(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{J} \Pi^a(\mathbf{x}) + \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \right], \quad (3.76)$$

$$H_{qg} = -g \int d^3x \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}), \quad (3.77)$$

$$H_C = -\frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y \rho^a(\mathbf{x}) g^{-1} K^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{J} \rho^b(\mathbf{y}). \quad (3.78)$$

Isso nos ajuda a compreender melhor o  $H_{\text{QCD}}$ , bem como notar de maneira direta o setor do espectro que cada parte descreve. Nesse sentido, temos que: o primeiro termo,  $H_q$ , é o termo quarkiônico, com  $m_q$  a massa do quark corrente; o segundo termo, o termo gluônico  $H_g$ , contém os campos magnéticos não-abelianos  $\mathbf{B}^a(\mathbf{x})$ ; o terceiro termo, é o termo da interação quark-gluão  $H_{qg}$ , que representa o acoplamento entre os campos, onde  $g$  é a constante de acoplamento da QCD; o quarto termo,  $H_C$ , é a interação

coulombiana não-abeliana.

Obtemos até aqui o  $H_{\text{QCD}}$  e suas partes, tendo então disponível uma teoria na qual todos os graus de liberdade são físicos, o que foi conseguido com a fixação do gauge e da quantização canônica. O próximo passo é a partir desse hamiltoniano, escrever uma versão efetiva do mesmo, que será a base do modelo efetivo utilizado para descrição dos espectros mesônicos.



---

## Capítulo 4

# Modelo efetivo da QCD no gauge de Coulomb

---

Neste capítulo, partindo do hamiltoniano da QCD no gauge de Coulomb obtido anteriormente, construiremos o modelo efetivo usado para obter espectros mesônicos. Na seção 4.1 escrevemos o  $H_{\text{eff}}$ , em seguida na seção 4.2 utilizamos técnicas de muitos corpos para tornar o  $H_{\text{eff}}$  diagonalizado e na sequência, na seção 4.3 obtemos a equação TDA de movimento que irá possibilitar efetuar os cálculos numéricos.

### 4.1 HAMILTONIANO EFETIVO

O foco deste trabalho será o setor quarkiônico, de forma que no  $H_{\text{QCD}}$  obtido no capítulo anterior, o termo  $H_g$  será omitido, isto é, as contribuições gluônicas serão incluídas na parametrização dada pelo termo  $H_{qg}$ . Portanto, o hamiltoniano efetivo com o qual trabalharemos, uma aproximação do hamiltoniano exato (3.74), é dado por [91]

$$H_{\text{eff}} = H_q + V_T + V_C, \quad (4.1)$$

com  $H_q$  já definido, dado por

$$H_q = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_q] \psi(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

e os termos  $V_T$  e  $V_C$  dados por

$$V_T = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_i^a(\mathbf{x}) \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_j^a(\mathbf{y}), \quad (4.4)$$

$$V_C = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \rho_q^a(\mathbf{x}) \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rho_q^a(\mathbf{y}), \quad (4.5)$$

onde a densidade de carga no termo coulombiano é dada apenas pela contribuição quarkiônica. Para construir este hamiltoniano, usamos a ordem mais baixa de expansão – o valor unitário – para o determinante de Faddeev-Popov  $J$ .

O kernel de Coulomb instantâneo,  $K^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , foi substituído por um potencial de confinamento efetivo  $\hat{V}(r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  entre cargas de cor. Temos então, que o novo termo da interação coulombiana ins-

tantânea,  $V_C$ , deve reproduzir o fenômeno do confinamento. Tomamos, para  $\hat{V}(r)$ , um potencial da forma  $\hat{V}(r) = \hat{V}_L(r) + \hat{V}_C(r)$ , onde  $\hat{V}_L(r)$  é um potencial de confinamento linear, e  $\hat{V}_C(r)$  é o potencial de interação coulombiano, que representa o potencial atrativo entre cargas de cor a longas distâncias.

O potencial  $\hat{V}(r)$  é chamado de potencial de Cornell, bastante utilizado na literatura [86, 89]. Sua forma pode ser dada por

$$V(|\mathbf{k}| = k) = -\frac{4\pi\alpha_s}{k^2} - \frac{8\pi\sigma}{k^4},$$

com  $\sigma = 0.135\text{GeV}^2$  sendo a tensão da corda, e  $\alpha_s = g^2/4\pi = 0.4$  a constante de acoplamento corrente da QCD. Utilizamos uma versão modificada desse potencial encontrada nas referências [86, 89, 91], com a seguinte forma

$$V(k) = \begin{cases} C(k) \equiv -\frac{8.07}{k^2} \frac{\log^{-0.62}\left(\frac{k^2}{m_g^2} + 0.82\right)}{\log^{0.8}\left(\frac{k^2}{m_g^2} + 1.41\right)}, & \text{para } k > m_g, \\ L(k) \equiv -\frac{12.25 m_g^{1.93}}{k^{3.93}}, & \text{para } k < m_g, \end{cases}, \quad (4.6)$$

no espaço dos momentos, com  $L(k)$  próximo ao potencial de confinamento linear  $V_L = -8\pi\sigma/k^4$ , e com  $C(k)$  substituindo o potencial coulombiano.

Observa-se que o kernel coulombiano completo torna-se logaritmicamente suprimido em grandes momentos, e em certo ponto crítico e para baixos momentos torna-se mais acentuado sobre o comportamento  $1/k^2$  e escalas como  $k^{-3.75}$ . Isso posto, nos leva a concluir que é possível construir um truncamento fenomenologicamente viável da QCD. Assim, temos que o parâmetro  $m_g$  é a massa efetiva do glúon decorrente da renormalização, cujo valor aproximado será de  $m_g \approx 600$  MeV, representando uma escala de massa grande que permite a rápida convergência de qualquer expansão da série de Fock no setor glúônico da QCD, justificando por que os graus de liberdade dos quarks dominam em baixas energias.

No termo  $H_{qg}$ , a interação entre um par quark-antiquark mediada pela troca de um glúon foi aproximada por uma interação efetiva via um potencial transverso,  $V_T$ . A integração funcional dos graus de liberdade glúônicos gera uma interação hiperfina entre os quarks da forma  $\mathbf{J}^a \cdot \mathbf{J}^a$ , ou ainda,  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ , na qual o kernel  $\hat{U}_{ij}$  tem a estrutura

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right)_{\mathbf{x}} \hat{U}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (4.7)$$

refletindo a condição de gauge transversa. Em razão das dificuldades de se calcular estas interações, diferentes modelos foram testados para o potencial  $\hat{U}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ , de modo que utilizaremos aqui o potencial do tipo Yukawa que gerou os melhores resultados e que pode ser encontrado nas referências [86, 91],

$$U(k) = \begin{cases} C(k), & \text{para } k > m_g, \\ -\frac{C_h}{k^2 + m_g^2}, & \text{para } k < m_g, \end{cases} \quad (4.8)$$

também definido no espaço dos momentos. Este é um potencial de troca de glúons massivos, onde  $C(k)$  é o mesmo potencial coulombiano definido em (4.6), e  $C_h$  é uma constante determinada ao realizar a corres-



pondência entre as regiões de baixos e altos momentos no ponto de transição  $m_g$ .

Os campos fermiônicos satisfazem as relações de anticomutação canônicas

$$\{\psi^\alpha(\mathbf{x}), \psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y})\} = \delta^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.9)$$

com os campos  $\psi(\mathbf{x})$  independentes do tempo. As demais relações de anticomutação valem zero,

$$\{\psi^\alpha(\mathbf{x}), \psi^\beta(\mathbf{y})\} = \{\psi^{\dagger\alpha}(\mathbf{x}), \psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y})\} = 0.$$

A expansão em ondas planas do campo  $\psi(\mathbf{x})$ , em termos dos espinores  $u_\lambda(\mathbf{k})$  e  $v_\lambda(-\mathbf{k})$  de partículas e antipartículas, é dada por

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{c=1}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ u_\lambda(\mathbf{k}) b_{\lambda c}(\mathbf{k}) + v_\lambda(-\mathbf{k}) d_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\epsilon}_c, \quad (4.10)$$

onde  $c$  é o índice de cor,  $\lambda = \pm 1$  é a helicidade e  $\hat{\epsilon}_c$  são os vetores de cor unitários, na forma de matrizes coluna de três elementos. Os operadores  $b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k})$  e  $d_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k})$  são os operadores de criação de quarks e anti-quarks, respectivamente, enquanto que  $b_{\lambda c}(\mathbf{k})$  e  $d_{\lambda c}(\mathbf{k})$  são os operadores de aniquilação correspondentes. No espaço dos momentos, as relações de anticomutação se tornam

$$\{b_{\lambda c}(\mathbf{k}), b_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q})\} = \{d_{\lambda c}(\mathbf{k}), d_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{cc'}, \quad (4.11)$$

em termos dos operadores  $b, d$ . As demais relações de anticomutação são nulas. A partir destes operadores, vamos construir o espaço de Fock das partículas. Começemos definindo o estado de vácuo  $|0\rangle$ , que satisfaz

$$b_{\lambda c}(\mathbf{k}) |0\rangle = d_{\lambda c}(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad (4.12)$$

i.e. é aniquilado pelos operadores de destruição  $b, d$ . Os demais estados são facilmente obtidos por meio da atuação de operadores de criação  $b^\dagger, d^\dagger$  no vácuo  $|0\rangle$ : o estado de um quark de momento  $\mathbf{k}$ , cor  $c$  e helicidade  $\lambda$ , por exemplo, é representado por  $b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$ .

Com o  $H_{\text{eff}}$  determinado, resolveremos o problema de autovetores e autovalores

$$H\psi = E\psi.$$

Em princípio, determinaremos o estado fundamental desse hamiltoniano através da diagonalização do mesmo, utilizando o método Bogoliubov-Valatin, ou BCS (*Bardeen-Cooper-Schriffer*).

## 4.2 TÉCNICAS DE MUITOS CORPOS

O método BCS se resume a aplicar uma rotação de um ângulo  $\theta(k)$ , o ângulo BCS, aos operadores e espinores do espaço de Fock dos quarks correntes, levando-os a uma nova base de quasipartículas na qual  $H_{\text{eff}}$  é diagonal.

O espaço de Fock das quasipartículas é construído a partir do vácuo BCS,  $|\Omega\rangle$ , que satisfaz

$$B_{\lambda c} |\Omega\rangle = D_{\lambda c} |\Omega\rangle = 0, \quad (4.13)$$

por meio da aplicação dos operadores de criação de quarks  $B^\dagger$  e antiquarks  $D^\dagger$  constituintes. O vácuo BCS, por sua vez, é construído a partir do vácuo das partículas "nuas",  $|0\rangle$ , como

$$|\Omega\rangle = \exp \left\{ - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \lambda \tan \left( \frac{\theta_k}{2} \right) b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) d_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} |0\rangle. \quad (4.14)$$

Podemos expandir o campo de quarks  $\psi$  em termos destes novos operadores,

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{c=1}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}_c, \quad (4.15)$$

onde  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  são os espinores "vestidos", que formam uma base completa e satisfazem as condições de normalização não-relativísticas

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = 0, \quad (4.17)$$

que, por sua vez, garantem que os operadores de Fock  $B_{\lambda c}$  e  $D_{\lambda c}$  obedeçam as mesmas relações de anticomutação,

$$\{B_{\lambda c}(\mathbf{k}), B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q})\} = \{D_{\lambda c}(\mathbf{k}), D_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{cc'}. \quad (4.18)$$

A relação entre os operadores "vestidos"  $B_{\lambda c}, D_{\lambda c}$  da nova base e os operadores "nus"  $b_{\lambda c}, d_{\lambda c}$  é dada pela rotação

$$B_{\lambda c}(\mathbf{k}) = \cos \left( \frac{\theta_k}{2} \right) b_{\lambda c}(\mathbf{k}) - \lambda \sin \left( \frac{\theta_k}{2} \right) d_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}), \quad (4.19)$$

$$D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) = \cos \left( \frac{\theta_k}{2} \right) d_{\lambda c}(-\mathbf{k}) + \lambda \sin \left( \frac{\theta_k}{2} \right) b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}), \quad (4.20)$$

e uma rotação similar é aplicada aos espinores  $u$  e  $v$ . Os espinores rotacionados são dados por

$$\mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \sin \phi(k)} \chi_\lambda \\ \sqrt{1 - \sin \phi(k)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\lambda \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \sin \phi(k)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\lambda \\ \sqrt{1 + \sin \phi(k)} \chi_\lambda \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

onde  $\chi_\lambda$  são os espinores de Pauli de duas componentes, e  $\phi_k = \phi(k)$  é o ângulo de *gap*, relacionado ao ângulo BCS por  $\tan(\phi_k - \theta_k) = M_q(k)/k$ . Aqui,  $M_q(k)$  é uma massa dinâmica (em inglês, *running quark mass*) dependente da escala de energia: para grandes valores de  $k$ , quando a interação se torna fraca,  $M_q(k) \rightarrow m_q$ , que é a massa do quark corrente, ou "nu"; para pequenos valores de  $k$ ,  $M_q(0) = \mathcal{M}_q$ , a massa da quasipartícula – também chamada massa do quark constituinte. Podemos escrever o seno e cosseno do ângulo de *gap*  $\phi_k$  em termos da massa  $M_q(k)$  como

$$\sin \phi(k) = \frac{M_q(k)}{E(k)} \equiv s_k, \quad \cos \phi(k) = \frac{|\mathbf{k}|}{E(k)} \equiv c_k, \quad (4.23)$$

onde  $E(k) = \sqrt{M_q^2(k) + \mathbf{k}^2}$ . Vamos, portanto, resolver a equação de *gap*, a fim de determinar o ângulo  $\phi_k$  e, a partir deste, obter a massa constituinte dos quarks. Uma das formas de obtenção da equação de *gap* é minimizar o valor esperado do hamiltoniano efetivo no vácuo BCS em relação ao ângulo de *gap*,

$$\frac{\delta \langle \Omega | H_{\text{eff}} | \Omega \rangle}{\delta \phi_k} = 0, \quad (4.24)$$

o que irá gerar a equação de *gap* em termos do parâmetro variacional  $\phi_k$ . Para obter a equação de *gap* via este princípio variacional o caminho é o seguinte: escreve-se o hamiltoniano efetivo em termos dos operadores de criação e aniquilação de quasipartículas, substituindo a expansão (4.15) em (4.1); tomamos o seu valor esperado no vácuo BCS, e elimina-se os operadores de Fock da expressão utilizando as relações (4.18) e (4.13). A expressão resultante, em termos dos espinores  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , pode ser reescrita em termos do ângulo de *gap*  $\phi_k$ , substituindo os espinores por suas definições (4.21) e (4.22). Por fim, tomando a derivada funcional desta expressão em relação a  $\phi_k$  e igualando-a a zero, encontra-se enfim a equação de *gap*.

Outra forma bem mais direta através da qual a equação de *gap* surge de forma mais natural e com menos esforços é desenvolvida na referência [115], e é a que utilizamos neste trabalho. Novamente, inicia-se escrevendo o hamiltoniano em termos dos operadores da nova base, mas desta vez, ordenados normalmente. Aplicando o teorema de Wick, obtemos  $H_{\text{eff}} = H_0 + : H_2 : + : H_4 :$ , onde  $H_2$  contém todos os termos com dois operadores de Fock,  $H_4$  os termos com quatro operadores, e  $H_0$  contém os termos sem operadores. Encontramos,

$$H_0 = \int \frac{d^3x d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 3 \text{Tr} [\Lambda_k^- (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m_q \beta)] - 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\text{Tr} (\Lambda_k^- \Lambda_q^+) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \text{Tr} (\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j)] \right\}, \quad (4.25)$$

$$: H_2 : = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \epsilon_k \left( B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right), \quad (4.26)$$

$$: H_4 : = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3p d^3q d^3k}{(2\pi)^9} \left\{ -V(|\mathbf{q}|) \sum_{i,j=1}^4 : \Theta_{c_1 c_2}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Theta_{c_3 c_4}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \right. \\ \left. + U(|\mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{q}) \sum_{l,m=1}^4 : \Xi_{c_1 c_2 i}^l(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^m(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \right\} \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \\ \times \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}, \quad (4.27)$$

onde  $D_{ij}(\mathbf{p})$  é a soma de polarizações

$$D_{ij}(\mathbf{p}) = \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right), \quad (4.28)$$

e  $\Lambda_k^+$  e  $\Lambda_k^-$  são os projetores de energia positiva e negativa, respectivamente, definidos como

$$\Lambda_k^+ \equiv \sum_{\lambda} \mathcal{U}_{\lambda}(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda}^\dagger(\mathbf{k}), \quad \Lambda_k^- \equiv \sum_{\lambda} \mathcal{V}_{\lambda}(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda}^\dagger(-\mathbf{k}). \quad (4.29)$$

O termo  $H_0$  é constante, e representa a energia do vácuo; este contém uma integral no volume,  $d^3x$ , que o

torna infinito. No termo quadrilinear  $H_4$ , a fim de simplificar a notação, definimos os vértices

$$\Theta_{\mathcal{L}'c}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) B_{\lambda'\mathcal{L}'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (4.30)$$

$$\Theta_{\mathcal{L}'c}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda'\mathcal{L}'}(-\mathbf{p}'), \quad (4.31)$$

$$\Theta_{\mathcal{L}'c}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{p}) B_{\lambda'\mathcal{L}'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad (4.32)$$

$$\Theta_{\mathcal{L}'c}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda'\mathcal{L}'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (4.33)$$

$$\Xi_{\mathcal{L}'ci}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) B_{\lambda'\mathcal{L}'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (4.34)$$

$$\Xi_{\mathcal{L}'ci}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda'\mathcal{L}'}(-\mathbf{p}'), \quad (4.35)$$

$$\Xi_{\mathcal{L}'ci}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{p}) B_{\lambda'\mathcal{L}'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad (4.36)$$

$$\Xi_{\mathcal{L}'ci}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda'\mathcal{L}'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}). \quad (4.37)$$

No termo  $H_2$ , definimos a auto-energia da quasipartícula  $\varepsilon_k$ , que vale

$$\begin{aligned} \varepsilon_k = m_q s_k + k c_k - \int \frac{d^3 q}{12\pi^3} [s_q s_k V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2s_q s_k U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \\ + c_q c_k x V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2c_q c_k W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)], \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde  $x = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ , e o potencial  $W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)$  é definido como

$$W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) = \frac{(k^2 + q^2)x - kq(x^2 + 1)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|). \quad (4.39)$$

Introduzindo a notação

$$V_n(k, q) \equiv \int_{-1}^{+1} dx V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) x^n, \quad (4.40)$$

para as integrais angulares (também válida para os potenciais  $U$  e  $W$ ), esta lei de dispersão pode ser reescrita como

$$\varepsilon_k = m_q s_k + k c_k - \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{6\pi^2} [s_q s_k (V_0 + 2U_0) + c_q c_k (V_1 + 2W_0)]. \quad (4.41)$$

Ao aplicar o ordenamento normal a  $H_{\text{eff}}$ , nos deparamos, na parte bilinear, com um termo que desestabiliza o vácuo, chamado termo de Bogoliubov anômalo. Requerendo que este termo seja nulo, chegamos, em fim, à equação de gap

$$\begin{aligned} k s_k - m_q c_k = \int \frac{d^3 q}{12\pi^3} [(c_q s_k x - s_q c_k) V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) - 2s_q c_k U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \\ + 2c_q s_k W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)] \\ = \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{6\pi^2} [c_q s_k (V_1 + 2W_0) - s_q c_k (V_0 + 2U_0)]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Impor esta condição equivale a minimizar a energia do vácuo  $H_0$ . Detalhes dos cálculos acima podem ser encontrados pelo leitor nos apêndices. As expressões obtidas para a energia  $\epsilon_k$  e para a equação de gap estão em concordância com a referência [91]. Resolvendo a equação de gap, obtemos o ângulo de gap  $\phi_k$ , o qual podemos substituir em (4.41) a fim de obter a auto-energia. O próximo passo é obtermos a equação de movimento na aproximação Tamm-Dancoff, que é uma técnica de muitos corpos útil para descrever uma ampla gama de famílias de mésons.

### 4.3 MÉTODO TDA

Começemos por definir o operador de criação de mésons,

$$Q_{nJP}^\dagger(\text{TDA}) \equiv \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Psi_{\gamma\delta}^{nJP}(\mathbf{k}) \zeta_{\gamma\delta}^\dagger, \quad (4.43)$$

onde  $\zeta_{\gamma\delta}^\dagger = B_\gamma^\dagger(\mathbf{k}) D_\delta^\dagger(-\mathbf{k})$  é um operador de criação de um par quasipartícula-quasiantipartícula. Desta forma, um estado de um méson com momento angular total  $J$ , paridade  $P$  e número quântico radial  $n$  é representado por

$$|\Psi_{\text{TDA}}^{nJP}\rangle = Q_{nJP}^\dagger(\text{TDA})|\Omega\rangle, \quad (4.44)$$

contendo uma quasipartícula e uma quasiantipartícula excitados do vácuo BCS. Consideremos o elemento matricial

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{\text{eff}}, \zeta_{\alpha\beta}^\dagger] | \Omega \rangle = (E_{nJP} - E_0) \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | \zeta_{\alpha\beta}^\dagger | \Omega \rangle, \quad (4.45)$$

com o hamiltoniano efetivo dado por  $H_{\text{eff}} = H_0 + : H_2 : + : H_4 :$ , após ordenamento normal, e  $E_{nJP}$  e  $E_0$  as energias associadas aos estados  $|\Psi_{\text{TDA}}^{nJP}\rangle$  e  $|\Omega\rangle$ , respectivamente. O comutador de  $H_0$  com  $B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger$  vale zero, uma vez que  $H_0$  é constante. Para os demais termos, temos

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \epsilon_k \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}(\mathbf{k}), \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = & \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{q}) \left[ h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \right. \\ & \left. - t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

a menos de uma constante de normalização multiplicativa. Os coeficientes  $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$  e  $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$ , resultados de contrações dos espinores  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , são dados por

$$h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) = \frac{1}{4} \left\{ c_k c_q [\delta_{\delta\alpha} g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) + \delta_{\beta\gamma} g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}})] + (1 + s_k)(1 + s_q) \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\alpha} + (1 - s_k)(1 - s_q) g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) \right\}, \quad (4.48)$$

$$t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) = -\frac{1}{4} \left[ (1 + s_q)(1 - s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma + c_k c_q \left( \chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma + \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma \right) + (1 - s_q) \times (1 + s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma \right] + \frac{1}{4(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \left\{ (1 + s_q) \times (1 - s_k) (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + c_k c_q [(g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q)] + (1 - s_q)(1 + s_k) (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) \right\}, \quad (4.49)$$

onde definimos  $g_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) \equiv \chi_\alpha^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\beta$ . Da definição (4.44), o elemento de matriz no lado direito pode ser escrito como

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | \zeta_{\alpha\beta}^\dagger | \Omega \rangle = \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}, \quad (4.50)$$

e combinando estes resultados, obtemos o conjunto de equações de movimento

$$\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{q}) \left[ V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) - t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \right] = (E_{nJP} - E_0 - 2\varepsilon_k) \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}. \quad (4.51)$$

Expandindo o vetor de estado  $\Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{k})$  em ondas parciais, temos

$$\Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{k}) = \sum_{LSm_L m_S} \langle L, m_L, S, m_S | J, m_J \rangle (-1)^{\frac{1}{2} + \gamma} \left\langle \frac{1}{2}, \delta, \frac{1}{2}, -\gamma | S, m_S \right\rangle \times Y_L^{m_L}(\hat{\mathbf{k}}) \Psi_{LS}^{nJP}(k), \quad (4.52)$$

onde  $Y_L^{m_L}(\hat{\mathbf{k}})$  são os harmônicos esféricos,  $\Psi_{LS}^{nJP}(w)$  é a função de onda radial,  $L$  é o momento angular orbital e  $S$  o spin, relacionados ao momento angular total por  $J = L + S$ . Substituindo esta expansão na

equação TDA (4.51), obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\Lambda\Sigma m_\Lambda m_\Sigma \\ m_J m_L m_S}} \langle J, m_J | L, m_L, S, m_S \rangle \langle \Lambda, m_\Lambda, \Sigma, m_\Sigma | J, m_J \rangle \int d\Omega_k d\Omega_q Y_L^{*m_L}(\hat{\mathbf{k}}) Y_\Lambda^{m_\Lambda}(\hat{\mathbf{q}}) \\
& \times \frac{4}{3} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \Psi_{\Lambda\Sigma}^{nJP}(q) \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (-1)^{1+\gamma+\beta} \left[ V(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) - U(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) \right] \\
& \times \left\langle S, m_S \left| \frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2}, -\beta \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, \delta, \frac{1}{2}, -\gamma \left| \Sigma, m_\Sigma \right\rangle = (E_{nJP} - E_0 - 2\varepsilon_k) (2J+1) \Psi_{LS}^{nJP}(k), \tag{4.53}
\end{aligned}$$

onde usamos relações de completeza, bem como a ortonormalidade dos harmônicos esféricos,

$$\int d\Omega_k Y_L^m(\hat{\mathbf{k}}) Y_{L'}^{*m'}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{LL'} \delta_{mm'}. \tag{4.54}$$

Definindo o kernel

$$\begin{aligned}
K_{L\Lambda\Sigma}^{JP}(q, k) & \equiv \frac{2}{\pi(2J+1)} \sum_{\substack{m_\Lambda m_\Sigma m_J \\ m_L m_S}} \langle J, m_J | L, m_L, S, m_S \rangle \langle \Lambda, m_\Lambda, \Sigma, m_\Sigma | J, m_J \rangle \\
& \times \int d\Omega_k d\Omega_q Y_L^{*m_L}(\hat{\mathbf{k}}) Y_\Lambda^{m_\Lambda}(\hat{\mathbf{q}}) \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (-1)^{1+\gamma+\beta} \left[ V(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) \right. \\
& \left. - U(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) \right] \left\langle S, m_S \left| \frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2}, -\beta \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, \delta, \frac{1}{2}, -\gamma \left| \Sigma, m_\Sigma \right\rangle, \tag{4.55}
\end{aligned}$$

a equação de movimento (4.53) se torna

$$(M_{nJP} - 2\varepsilon_k) \Psi_{LS}^{nJP}(k) = \sum_{\Lambda\Sigma} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} K_{L\Lambda\Sigma}^{JP}(k, q) \Psi_{\Lambda\Sigma}^{nJP}(q), \tag{4.56}$$

com  $M_{nJP} = E_{nJP} - E_0$  a massa de um méson no estado  $nJP$ . Deve-se salientar que consideramos até então mésons compostos por quarks de massas iguais, mas afim de deixar o estudo mais geral vamos levar em conta quarks com sabores distintos. Os operadores  $B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k})$  e  $D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k})$  passam a ser os operadores de criação de um quark do tipo 1 e de um anti-quark do tipo 2, respectivamente. Observando a expansão de Fourier do campo  $\psi$ , notamos que os espinores  $\mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k})$  e  $\mathcal{V}'_\lambda(-\mathbf{k})$  estão associados aos operadores  $B_{\lambda c}(\mathbf{k})$  e  $D_{\lambda c}(-\mathbf{k})$ , e conseqüentemente, às partículas do tipo 1 e 2. Observamos ainda que a dependência contida no seno e no cosseno do ângulo de gap,  $s_k = M_q(k)/E(k)$  e  $c_k = |\mathbf{k}|/E(k)$ , passará também a ter um seno e um cosseno associados à partícula 1,  $s_{k_1}$  e  $c_{k_1}$ , e o mesmo para a partícula 2. Quando redefinimos os espinores, automaticamente modificamos o hamiltoniano efetivo. Desse modo, a construção do comutador  $[H_{\text{eff}}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger]$  para a equação TDA será alterado. O comutador do termo  $H_0$  vale zero, logo não sofrerá alteração. Para o termo  $H_2$  do hamiltoniano, teremos

$$H_2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \left( \varepsilon_{k_1} B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + \varepsilon_{k_2} D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right), \tag{4.57}$$

resultando,

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}) \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}(\mathbf{k}). \tag{4.58}$$

Para  $H_4$ , os coeficientes  $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$  e  $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$ , passam a ser

$$h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) = \frac{1}{4} [a_5 g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) \delta_{\delta\alpha} + a_8 g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) + a_7 \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\alpha} + a_6 \delta_{\beta\gamma} g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}})], \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) = & -\frac{1}{4} [a_1 (\chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha) (\chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma) + a_3 (\chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha) \\ & \times (\chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma) + a_4 (\chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha) (\chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma) + a_2 \\ & \times (\chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha) (\chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma)] + \frac{1}{4(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} [a_1 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k \\ & - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + a_3 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k \\ & - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + a_4 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k \\ & - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + a_2 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k \\ & - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q)], \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde definimos os coeficientes

$$a_1 = \sqrt{1+s_{k_1}} \sqrt{1+s_{k_2}} \sqrt{1-s_{q_1}} \sqrt{1-s_{q_2}}, \quad (4.61)$$

$$a_2 = \sqrt{1-s_{k_1}} \sqrt{1-s_{k_2}} \sqrt{1+s_{q_1}} \sqrt{1+s_{q_2}}, \quad (4.62)$$

$$a_3 = \sqrt{1+s_{k_1}} \sqrt{1-s_{k_2}} \sqrt{1-s_{q_1}} \sqrt{1+s_{q_2}}, \quad (4.63)$$

$$a_4 = \sqrt{1-s_{k_1}} \sqrt{1+s_{k_2}} \sqrt{1+s_{q_1}} \sqrt{1-s_{q_2}}, \quad (4.64)$$

$$a_5 = \sqrt{1+s_{k_1}} \sqrt{1-s_{k_2}} \sqrt{1+s_{q_1}} \sqrt{1-s_{q_2}}, \quad (4.65)$$

$$a_6 = \sqrt{1-s_{k_1}} \sqrt{1+s_{k_2}} \sqrt{1-s_{q_1}} \sqrt{1+s_{q_2}}, \quad (4.66)$$

$$a_7 = \sqrt{1+s_{k_1}} \sqrt{1+s_{k_2}} \sqrt{1+s_{q_1}} \sqrt{1+s_{q_2}}, \quad (4.67)$$

$$a_8 = \sqrt{1-s_{k_1}} \sqrt{1-s_{k_2}} \sqrt{1-s_{q_1}} \sqrt{1-s_{q_2}}. \quad (4.68)$$

Uma vez que a dependência na massa está contida nos coeficientes  $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$  e  $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$ , com a redefinição dos mesmos não precisamos alterar a forma do comutador. Teremos então a seguinte equação TDA, agora considerando quarks de sabores distintos,

$$(M_{nJP} - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_2}) \Psi_{LS}^{nJP}(k) = \sum_{\Lambda\Sigma} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} K_{L\Lambda\Sigma}^{JP}(k, q) \Psi_{\Lambda\Sigma}^{nJP}(q). \quad (4.69)$$

Os kernels em termos dos novos  $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$  e  $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$  para diferentes estado mesônicos são dados abaixo.

- Pseudoescalar ( $L=0; S=0; J=0$ ),

$$\begin{aligned} K^{(0^{-+})}(k, q) = & V_1(a_5 + a_6) + V_0(a_7 + a_8) \\ & + 2U_0(a_1 + a_2) - 2W_0(a_3 + a_4); \end{aligned}$$



- Escalar ( $L = 1; S = 1; J = 0$ ),

$$K^{(0^{++})}(k, q) = V_0(a_5 + a_6) + V_1(a_7 + a_8) - 2U_0(a_3 + a_4) + (U_1 + W_0 - kqZ_0)(a_1 + a_2);$$

- Vetorial ( $L = 0; S = 1; J = 1$ ),

$$K^{(1^{--})}(k, q) = \frac{1}{3} [3V_1(a_5 + a_6) + a_8(4V_2 - V_0) + 3a_7V_0 - 2(a_1 + a_2)U_0 + 2(a_3 + a_4)U_1 + 2qk(a_3 + a_4)Z_0 + 4(a_1k^2 + a_2q^2)Z_0];$$

- Axial ( $L = 1; S = 0; J = 1$ ),

$$K^{(1^{+-})}(k, q) = (a_5 + a_6)V_2 + (a_7 + a_8)V_1 + 2(a_1 + a_2)U_1 - 2(a_3 + a_4)W_1;$$

- Axial ( $L = 1; S = 1; J = 1$ ),

$$K^{(1^{++})}(k, q) = \frac{1}{2}(V_0 + V_2)(a_5 + a_6) + \frac{1}{2}(U_0 + U_2 - 2W_1)(a_3 + a_4) + V_1(a_7 + a_8) + Z_1(a_1k^2 + a_2q^2) + Z_0\frac{1}{2}(k^2 - q^2)(a_4 - a_3).$$

- Tensorial ( $L = 1; S = 1; J = 2$ ),

$$K^{(2^{++})}(k, q) = \frac{1}{2}(3V_2 - V_0)(a_5 + a_6) + V_1a_7 + \frac{1}{5}(12V_3 - 7V_1)a_8 + \frac{1}{5}(U_1 - 5W_0 - 10kqZ_0)(a_1 + a_2) + \frac{12}{5}Z_1(a_1k^2 + a_2q^2) + \frac{1}{10}(27U_2 - 15W_1 - 9kqZ_1 - 4U_0)(a_3 + a_4);$$

- Pseudotensorial ( $L = 2; S = 0; J = 2$ ),

$$\begin{aligned} K^{(2^{--})}(k, q) &= \frac{1}{2}(3V_3 - V_1)(a_5 + a_6) + \frac{1}{2}(3V_2 - V_0)(a_7 + a_8) \\ &\quad + (3U_2 - U_0)(a_1 + a_2) + (3W_2 - W_0)(a_3 + a_4); \end{aligned}$$

- Pseudotensorial ( $L = 2; S = 1; J = 2$ ),

$$\begin{aligned} K^{(2^{-+})}(k, q) &= V_3(a_5 + a_6) + \frac{1}{2}(3V_2 - V_0)(a_7 + a_8) \\ &\quad + kqZ_1(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(2Z_2 - Z_0)(a_3 + a_4); \end{aligned}$$

Com a função auxiliar  $Z$  sendo definida como:

$$Z(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \equiv U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \frac{1 - x^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2}. \quad (4.70)$$

Devemos observar ainda que mésons com sabor aberto não são auto-estados da conjugação de carga, pois possuem um quark e um antiquark com sabores distintos. Isso implica que o spin total ( $S$ ) não é um bom número quântico, e estados spin-singlete e spin-triplete com  $J = L$  podem misturar. Este é o caso dos estados axial ( $n^3P_1$  e  $n^1P_1$ ) e pseudotensorial ( $n^3D_2$  e  $n^1D_2$ ). Uma prescrição da mistura destes estados  $J = L$  pode ser dada por:

$$\begin{aligned} |nL'_L\rangle &= \cos\theta_{nL}|n^1L_L\rangle + \sin\theta_{nL}|n^3L_L\rangle, \\ |nL_L\rangle &= -\sin\theta_{nL}|n^1L_L\rangle + \cos\theta_{nL}|n^3L_L\rangle, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde  $\theta_{nL}$  é o ângulo de mistura e  $nL'_L, nL_L$  são os estados físicos. Tomando como exemplo a massa dos quarks  $b$  e  $c$ , e supondo que as mesmas satisfazem o limite  $m_b \gg m_c$ , teremos

$$\theta_{nL} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{L/(L+1)},$$

resultando  $\theta_{nP} \rightarrow 35.3^\circ$ ,  $\theta_{nD} \rightarrow 39.2^\circ$ .

São adotadas as relações entre as massas dos pares  $(n^3L_L - n^1L_L)$  e  $(nL'_L - nL_L)$  [102]:

$$M(nL_L) = M(n^1L_L) \cos^2 \theta_{nL} + M(n^3L_L) \sin^2 \theta_{nL} - [M(n^3L_L) - M(n^1L_L)] \frac{\sin^2 2\theta_{nL}}{2 \cos 2\theta_{nL}}, \quad (4.72)$$

$$M(nL'_L) = M(n^1L_L) \sin^2 \theta_{nL} + M(n^3L_L) \cos^2 \theta_{nL} + [M(n^3L_L) - M(n^1L_L)] \frac{\sin^2 2\theta_{nL}}{2 \cos 2\theta_{nL}}. \quad (4.73)$$

Antes de finalizarmos as discussões deste capítulo, é interessante observarmos o comportamento da massa de quark corrente  $M(k)$  com o parâmetro  $C_h$  para compreendermos melhor os passos seguintes. Vejamos:

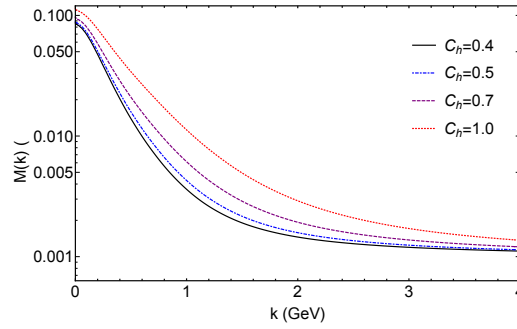


Figura 4.1: Massa do quark corrente  $M(k)$  como uma função do momento  $k$

As massas de quark constituinte  $\mathcal{M}$  podem ser extraídas do limite  $k \rightarrow 0$ , i.e.  $\mathcal{M} \equiv M(0)$ , enquanto para altas escalas a massa de quark corrente  $m_f$  é recuperada.

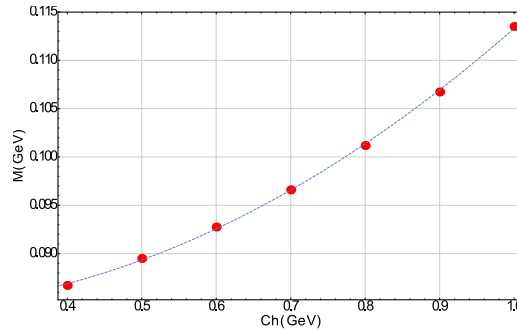


Figura 4.2: Massa de quark constituinte  $\mathcal{M} = M(0)$  como uma função de  $C_h$ .

Notamos que o aumento da magnitude do potencial transversal modifica o valor do ângulo de gap vindo da equação de gap, produzindo maiores valores da massa de quark constituinte.

Com o modelo enfim estabelecido, em sua forma efetiva e com a aproximação Tamm-Dancoff utilizada para obter a equação de movimento, poderemos seguir as análises numéricas já tendo ideia de como se comporta a massa de quark corrente  $M(k)$  com relação ao parâmetro  $C_h$ .

Enfatizamos ainda que a abordagem aqui proposta trabalha com massas de quark correntes menores que alguns modelos de quarks, devido ao fato da auto-energia ( $\epsilon_k^{f(f')}$ ) presente na equação TDA contribuir positivamente nos potenciais de interação, originando a necessidade de massas de quarks mais leves. Passaremos inicialmente a análise dos estados tensoriais  $2^{--}$ .

---

## Capítulo 5

# Espectro do méson tensorial $2^{-(-)}$

---

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos dos estados mesônicos  $2^{-(-)}$ , que gerou o trabalho publicado na PHYSICAL REVIEW D em 2020 [101]. A estratégia para obtenção dos resultados consiste em resolver numericamente a equação de gap seguida da equação TDA de movimento. Relembrando que os parâmetros de entrada do modelo são: a massa dinâmica do glúon constituinte  $m_g$ , as massas de quark corrente  $m_{f(f')}$  e a magnitude do potencial transversal  $C_h$ . As escolhas são feitas em princípio para gerar resultados em consonância com estados observados. Contudo, somente quatro estados fundamentais  $2^{-(-)}$  foram observados até agora. Partimos do conjunto de parâmetros usados na Ref. [100], os quais estão em bom acordo com os estados fundamentais dos mésons pseudoscalar e vetorial.

### 5.1 Espectro de massa

Listamos abaixo na tabela 5.1 as massas de quark corrente  $m_f$  (e respectivas massas de quark constituintes) usadas como entradas, escolhidas com o intuito de avaliar o comportamento dos resultados calculados, além do contraste com outros trabalhos e dados experimentais disponíveis. Os parâmetros  $m_q, m_s, m_c, m_b$  são as massas de quarks corrente associadas aos quarks  $q, s, c, b$ , respectivamente ( $q \equiv u, d$  no limite da simetria de isospin).

Tabela 5.1: As massas corrente ( $m_f$ ) e constituinte ( $\mathcal{M}_f = M_f(0)$ ) dadas em MeV, com  $m_g = 600$  MeV e  $C_h = 0.7$ .

| Sabor  | I (Ref. [100]) | II   | III  | [4, 91]   |
|--|----------------|------|------|-----------|
| $m_q \equiv m_u = m_d$                               | 1              | 1    | 1    | 1.5-5.5   |
| $m_s$  | 50             | 80   | 50   | 70-120    |
| $m_c$  | 830            | 950  | 900  | 1000-1400 |
| $m_b$  | 3900           | 4000 | 4025 | 4000-4500 |
| $\mathcal{M}_q \equiv \mathcal{M}_u = \mathcal{M}_d$ | 97             | 97   | 97   | 200-340   |
| $\mathcal{M}_s$                                      | 208            | 273  | 208  | 450-500   |
| $\mathcal{M}_c$                                      | 1218           | 1398 | 1340 | 1500-1600 |
| $\mathcal{M}_b$                                      | 4436           | 4667 | 4693 | 4600-5100 |

Como pode ser observado, esta abordagem produz massas de quarks constituintes menores que outros modelos de quarks, resultado da auto-energia da quasipartícula que incorpora contribuições dos potenciais

$U$  e  $V$ . Devido a natureza atrativa desses potenciais, suas contribuições são positivas, produzindo valores maiores da auto-energia da quasipartícula  $e$ , conseqüentemente massas de quarks constituintes efetivas também maiores. Em decorrência, as massas TDA obtidas das soluções da equação TDA aumentam, o que demanda uma redução nas massas de quarks correntes, e portanto, nas massas de quarks constituintes, o que é um aspecto esperado para o modelo da QCD no gauge de Coulomb. As massas dos estados fundamentais para diferentes massas de quarks correntes dos conjuntos de parâmetros I-III são exibidas na Tabela 5.2, obtidas das soluções numéricas da equação TDA. Para que seja possível comparações, a tabela também reporta alguns resultados da literatura. Em nossas estimativas consideramos estados puros  $q\bar{q}$  e  $s\bar{s}$ .

Tabela 5.2: Massas TDA dos estados fundamentais  $2^{-(-)}$ , dadas em GeV.

| Conteúdo<br>( $q_f\bar{q}_{f'}$ ) | Massa<br>I | Massa<br>II | Massa<br>III | Ref. [21]    | Ref. [9] |
|-----------------------------------|------------|-------------|--------------|--------------|----------|
| $q\bar{q}$                        | 1.732      | 1.732       | 1.732        | 1.700        | 1.780    |
| $s\bar{q}$                        | 1.795      | 1.839       | 1.795        | 1.780; 1.810 | 1.850    |
| $s\bar{s}$                        | 1.852      | 1.930       | 1.852        | 1.910        | 2.000    |
| $c\bar{q}$                        | 2.806      | 2.945       | 2.887        | 2.830*       | 2.860    |
| $c\bar{s}$                        | 2.838      | 3.002       | 2.919        | 2.920*       | 3.010    |
| $c\bar{c}$                        | 3.670      | 3.927       | 3.820        | 3.840        | 3.970    |
| $b\bar{q}$                        | 6.071      | 6.173       | 6.199        | 6.110*       | 5.660    |
| $b\bar{s}$                        | 6.097      | 6.220       | 6.245        | 6.180*       | 6.400    |
| $b\bar{c}$                        | 6.843      | 7.065       | 7.040        | 7.040*       | 7.080    |
| $b\bar{b}$                        | 9.907      | 10.106      | 10.155       | 10.150       | 10.130   |

Uma comparação entre os estados envolvendo quarks  $s$ ,  $c$ , e  $b$  calculados para os diferentes conjuntos permite-nos identificar um desvio entre algumas dezenas de MeV até 150 MeV mais ou menos. Em termos percentuais, as indeterminações nessas massas calculadas estão entre 3% e 7%, com a maior flutuação para aqueles envolvendo quarks  $c$ . Levando em consideração que nossa abordagem visa incorporar simultaneamente simetrias de quarks leves e pesados, notamos que nossos resultados obtêm o espectro aproximadamente em acordo com outros trabalhos. Na referência [9], por exemplo, na qual utilizam a corrente tensorial com  $J^{PC} = 2$  a fim de calcular a função de correlação de dois pontos seguida da análise da regra de soma da QCD para obter as massas dos estados tensoriais 2, para os estados  $b\bar{b}$  e  $c\bar{c}$ , principal foco do trabalho deles, essas diferenças, utilizando nosso conjunto II, são de 24 MeV e 43 MeV, respectivamente. Observamos também neste trabalho que as massas que utilizam como entrada são em geral maiores comparadas com as que utilizamos. Comparando com o trabalho do Gofrey e Isgur [21], onde utilizam um modelo cujo ingrediente principal é o uso do potencial de confinamento linear e de troca de glúons baseados na QCD levando em conta os efeitos relativísticos, e utilizando o nosso conjunto III para os estados  $b\bar{b}$  e  $c\bar{c}$ , vemos que as diferenças são de 5 MeV e 20 MeV, respectivamente.

Reafirmando que do ponto de vista experimental, poucos mésons fundamentais  $2^{-(-)}$  foram observados: os mésons estranhos  $K_2(1770)$  e  $K_2(1820)$ , cujos números quânticos são  $I(J^P) = 1/2(2^-)$  com paridade  $C$  não definida; o charmonium  $\psi_2(3823)$ ; e o bottomonium  $\Upsilon_2(1D)$ . Observando dados do PDG, vemos que o  $K_2(1770)$  necessita ainda de confirmação. Ressaltamos que ao escolher o conjunto apropriado de parâmetros o formalismo produz resultados em boa conformidade com os mésons observados. Para ilustrar, na Tabela 5.3 mostramos as massas TDA dos estados fundamentais obtidos utilizando o conjunto de parâmetros III bem como seus valores experimentais quando avaliados na literatura, além de considerarmos

que o conteúdo quarkiônico dos estados misturados isoescalar  $\omega_2$  e  $\phi_2$  são puros  $q\bar{q}$  e  $s\bar{s}$ , respectivamente.

Tabela 5.3: Massas TDA dos estados fundamentais  $2^{--}$  dadas em GeV.

| Contêúdo<br>( $q_f\bar{q}_{f'}$ ) | III    | Estado                 | PDG [4]                            |
|-----------------------------------|--------|------------------------|------------------------------------|
| $q\bar{q}$                        | 1.732  | $\rho_2; \omega_2$     | -                                  |
| $s\bar{q}$                        | 1.795  | $K_2(1770); K_2(1820)$ | $1.773 \pm 0.008; 1.819 \pm 0.012$ |
| $s\bar{s}$                        | 1.852  | $\phi_2$               | -                                  |
| $c\bar{q}$                        | 2.887  | $D_2$                  | -                                  |
| $c\bar{s}$                        | 2.919  | $D_{s2}$               | -                                  |
| $c\bar{c}$                        | 3.820  | $\psi_2(3823)$         | $3822.2 \pm 1.2$                   |
| $b\bar{q}$                        | 6.199  | $B_2$                  | -                                  |
| $b\bar{s}$                        | 6.245  | $B_{s2}$               | -                                  |
| $b\bar{c}$                        | 7.040  | $B_{c2}$               | -                                  |
| $b\bar{b}$                        | 10.155 | $\Upsilon_2(1D)$       | $10.1637 \pm 0.0014$               |

Examinando mais detalhadamente o caso de mésons estranhos, observamos que a versão online do PDG [4] sobre o  $K_2(1770)$  refere-se à minirevisão da edição de 2004, que é baseada num trabalho de 1993 no qual os autores apresentam resultados de um estudo de alta estatística para o sistema  $K\omega$  na região  $K_2(1170)$ , e apontam evidências da existência de dois mésons estranhos  $2^{--}$  com massas aproximadas de 1773 e 1816 MeV [113]. Consequentemente, os mésons  $K_2(1770)$  e  $K_2(1820)$  são naturalmente interpretados no contexto do modelo de quark como os estados observados da mistura de estados fundamentais  $1^1D_2$  e  $1^3D_2$  (ou seja, singleto e tripleto). Sendo assim, como no caso dos mésons axiais  $K_1(1270)$  e  $K_1(1400)$ , as atribuições de singleto e tripleto não podem ser determinadas, uma vez que os mésons estranhos não são auto-estados de conjugação de carga.

O nível de energia obtido entre as massas observadas do  $K_2(1770)$  e do  $K_2(1820)$  podem ser caracterizadas razoavelmente. Isso pode ser melhor compreendido se assumirmos que a massa calculada do sistema tripleto  $2^{--}$  seja um pouco maior do que o caso do singleto  $2^{--}$ , gerando os estados misturados  $1D'_2$  e  $1D_2$ , respectivamente, maiores e menores do que estados tripleto e singleto, produzindo níveis de energia ainda mais próximos dos estados observados.

Agora vamos retornar a atenção para as famílias de mésons leves sem sabor: os isovetoriais  $\rho_2$  e os isoescalares  $\omega_2, \phi_2$ . Estas famílias passam por uma situação curiosa. Os estados  $\rho_2(1940); \omega_2(1975); \omega_2(2195)$  e  $\rho_2(2225)$  observados neste setor do espectro são categorizados como "outros estados". É interessante notar que quando consideramos seus pares, por exemplo para as famílias de mésons isovetorial  $\rho$  e isoescalar  $\omega$  com números quânticos  $1^{--}$  e  $3^{--}$ , os estados  $\rho(1700), \rho_3(1690)$  e  $\omega(1650), \omega_3(1670)$  são em geral aceitos como seus respectivos estados fundamentais. Portanto, por correspondência devemos esperar estados fundamentais isoescalar e isovetorial  $2^{--}$  nesta mesma região do espectro. Uma avaliação detalhada deste problema pode ser encontrada na referência [19], no qual empregam o modelo de Godfrey-Isgur(GI) para analisar o espectro de massa e também a Fenomenologia de Regge para estudar quantitativamente o espectro de massa dos mésons leves radialmente excitados. Posto isto, reiteramos que nosso formalismo prediz estados fundamentais ( $1^3D_2$ ) para famílias de mésons leves sem sabor da ordem de 1730 e 1850 MeV, dependendo do conteúdo quarkiônico. Se assumirmos idealmente o conteúdo quarkiônico dos estados misturados isoescalar  $\omega_2$  e  $\phi_2$  são  $q\bar{q}$  e  $s\bar{s}$ , respectivamente, teremos  $m_{\rho_2}, m_{\omega_2} \simeq 1730$  MeV e  $m_{\phi_2} \simeq 1850$

MeV, sendo algumas dezenas de MeV diferentes daqueles nas referências [9, 19, 21]. Assim, nossos resultados corroboram outros achados da literatura sobre a região do espectro de massa no qual os estados fundamentais das famílias de mésons leves sem sabor  $\rho_2$ ,  $\omega_2$ ,  $\phi_2$  devem ser observados. Portanto, esta abordagem efetiva com um pequeno número de parâmetros nos permitem reproduzir razoavelmente os mésons  $2^{--}$  observados até agora; e nossa expectativa é que as previsões esboçadas acima forneçam uma descrição correta das características básicas do espectro a serem confirmadas no futuro.

A análise do comportamento dos resultados com relação aos parâmetros do formalismo são exibidos nas tabelas 5.4 e 5.5, que mostram as massas calculadas para os estados radialmente excitados do  $c\bar{c}$  e  $b\bar{b}$ .

Tabela 5.4: Massas TDA dos estados fundamentais e radialmente excitados  $2^{--}$  do  $c\bar{c}$  dadas em GeV, obtidos para  $m_c = 950$  MeV.

| $m_g = 0.5$ |       |       |       |       |       |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $C_h$       | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ |
| 0.4         | 3.364 | 3.690 | 3.974 | 4.229 | 4.461 |
| 0.5         | 3.459 | 3.780 | 4.061 | 4.314 | 4.544 |
| 0.6         | 3.555 | 3.872 | 4.150 | 4.399 | 4.627 |
| 0.7         | 3.654 | 3.966 | 4.240 | 4.486 | 4.712 |
| 0.8         | 3.754 | 4.061 | 4.331 | 4.575 | 4.798 |
| 0.9         | 3.855 | 4.157 | 4.425 | 4.666 | 4.886 |
| 1.0         | 3.958 | 4.255 | 4.519 | 4.756 | 4.974 |
| 1.5         | 4.492 | 4.767 | 5.014 | 5.238 | 5.445 |
| 2.0         | 5.052 | 5.307 | 5.537 | 5.747 | 5.942 |
| $m_g = 0.6$ |       |       |       |       |       |
| $C_h$       | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ |
| 0.4         | 3.616 | 4.021 | 4.374 | 4.688 | 4.973 |
| 0.5         | 3.718 | 4.117 | 4.465 | 4.776 | 5.059 |
| 0.6         | 3.821 | 4.214 | 4.558 | 4.866 | 5.146 |
| 0.7         | 3.927 | 4.314 | 4.654 | 4.958 | 5.235 |
| 0.8         | 4.034 | 4.416 | 4.751 | 5.052 | 5.326 |
| 0.9         | 4.144 | 4.520 | 4.850 | 5.148 | 5.419 |
| 1.0         | 4.255 | 4.625 | 4.952 | 5.246 | 5.514 |
| 1.5         | 4.836 | 5.177 | 5.483 | 5.760 | 6.014 |
| 2.0         | 5.446 | 5.762 | 6.048 | 6.308 | 6.548 |

Observamos que a variação dos parâmetros produzem notáveis diferenças para as massas calculadas. O aumento da magnitude do potencial transversal de 0.1 aumenta as estimativas em torno de 100–150 MeV, mas este aumento é ligeiramente menor para excitações mais altas. Por outro lado, o crescimento é mais acentuado para o bottomonium. Além disso, o aumento de 0.1 em  $m_g$  origina massas maiores em poucas centenas de MeV.

## 5.2 Trajetórias de Regge

Conforme descrito nas Tabelas 5.4 e 5.5, obtivemos as massas dos estados excitados radialmente até  $n = 5$ , e isso nos possibilita a construção das trajetórias de Regge no plano  $(n, M^2)$  para o charmonium e



Tabela 5.5: Massas TDA dos estados fundamentais e radialmente excitados  $2^{--}$  para  $b\bar{b}$  dadas em GeV, obtidos para  $m_b = 3900$  MeV.

| $m_g = 0.5$ |        |        |        |        |        |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_h$       | $E_1$  | $E_2$  | $E_3$  | $E_4$  | $E_5$  |
| 0.4         | 9.241  | 9.465  | 9.660  | 9.836  | 9.997  |
| 0.5         | 9.378  | 9.598  | 9.791  | 9.964  | 10.124 |
| 0.6         | 9.514  | 9.731  | 9.922  | 10.093 | 10.251 |
| 0.7         | 9.651  | 9.865  | 10.053 | 10.222 | 10.378 |
| 0.8         | 9.788  | 9.999  | 10.184 | 10.351 | 10.505 |
| 0.9         | 9.924  | 10.132 | 10.315 | 10.48  | 10.632 |
| 1.0         | 10.061 | 10.266 | 10.446 | 10.609 | 10.759 |
| 1.5         | 10.744 | 10.934 | 11.101 | 11.253 | 11.393 |
| 2.0         | 11.421 | 11.597 | 11.752 | 11.893 | 12.023 |

| $m_g = 0.6$ |        |        |        |        |        |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_h$       | $E_1$  | $E_2$  | $E_3$  | $E_4$  | $E_5$  |
| 0.4         | 9.460  | 9.739  | 9.982  | 10.201 | 10.402 |
| 0.5         | 9.608  | 9.884  | 10.124 | 10.340 | 10.538 |
| 0.6         | 9.758  | 10.029 | 10.266 | 10.479 | 10.674 |
| 0.7         | 9.907  | 10.174 | 10.407 | 10.618 | 10.810 |
| 0.8         | 10.056 | 10.319 | 10.549 | 10.757 | 10.947 |
| 0.9         | 10.205 | 10.464 | 10.690 | 10.894 | 11.082 |
| 1.0         | 10.354 | 10.609 | 10.833 | 11.034 | 11.219 |
| 1.5         | 11.097 | 11.332 | 11.539 | 11.726 | 11.897 |
| 2.0         | 11.828 | 12.046 | 12.236 | 12.409 | 12.568 |

bottomonium.

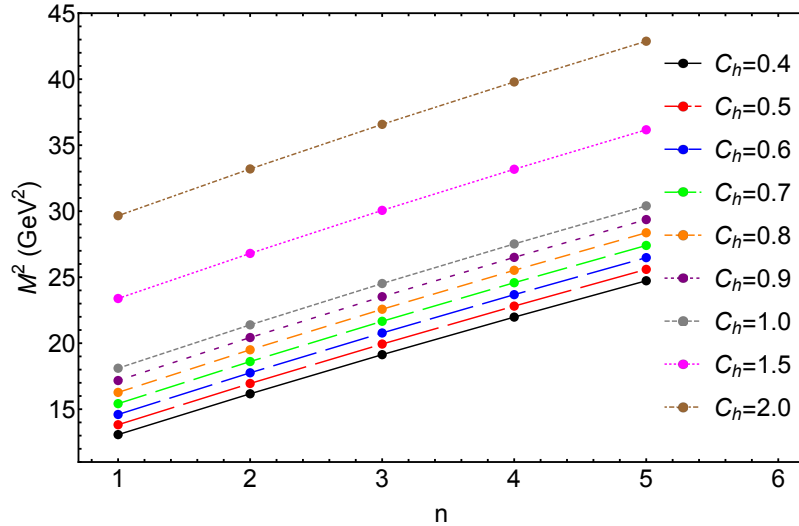


Figura 5.1: Trajetórias de Regge no plano  $(n, M^2)$  no setor do charmonium.

Pode-se notar destes resultados que as trajetórias para diferentes valores de  $C_h$  na maioria são paralelas e equidistantes, refletindo a dependência da equação TDA na interação hiperfina transversa. Além disso, pode-se inferir que o comportamento do quadrado da massa com relação ao número quântico radial não é exatamente linear, o que está em acordo qualitativo com outros trabalhos que exploram diferentes tipos de

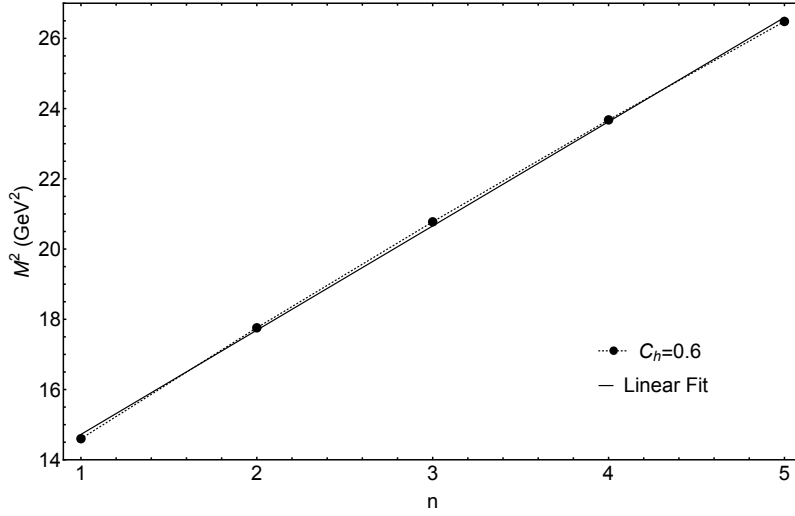


Figura 5.2: Trajetórias de Regge para o caso específico  $C_h = 0.6$  com a linha tracejada correspondendo a um ajuste não-linear.

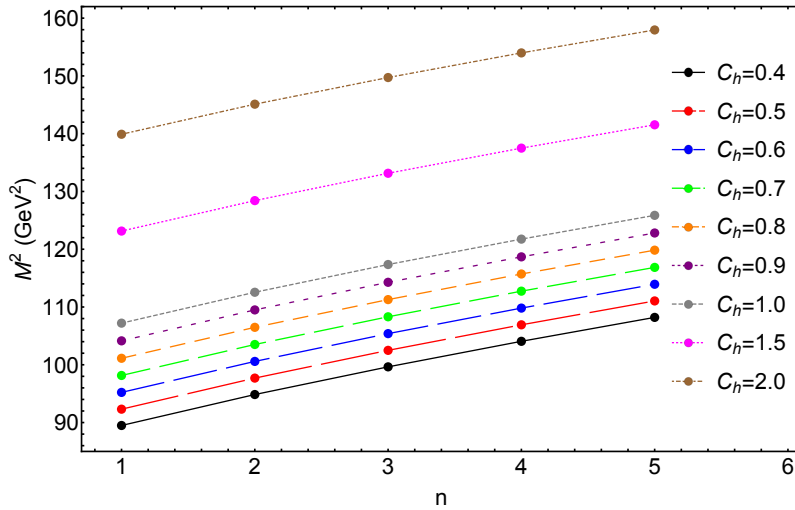


Figura 5.3: Trajetórias de Regge no plano  $(n, M^2)$  no setor do bottomonium.

estados quarkônia e mésons; que pode ser visto por exemplo nas referências [8, 105–109]. Mas no caso charmonium, notamos que a maioria das trajetórias estão mais próximas de um ajuste linear. Adicionalmente, usamos a suposição de que mésons são agrupados aproximadamente nas trajetórias de Regge seguindo a forma [8, 110–112]:

$$M_n^2 = M_1^2 + (n-1)\mu^2, \quad (5.1)$$

onde  $M_1$  é a massa do estado fundamental para cada trajetória correspondente e  $\mu^2$  o declive. Aplicando esta hipótese em nosso cenário, extraímos o parâmetro  $\mu^2$  dos ajustes lineares. Obtemos os seguintes valores:  $\mu_{c\bar{c}}^2 \simeq 2.9 \text{ GeV}^2$  e  $\mu_{b\bar{b}}^2 \simeq 4.7 \text{ GeV}^2$  para o charmonium e bottomonium, respectivamente. A razão entre esses declives é aproximadamente 0.6, o que implica uma inclinação menor para o charmonium com relação ao bottomonium. Esta característica é também reproduzida para outros estados quarkônios pesados com

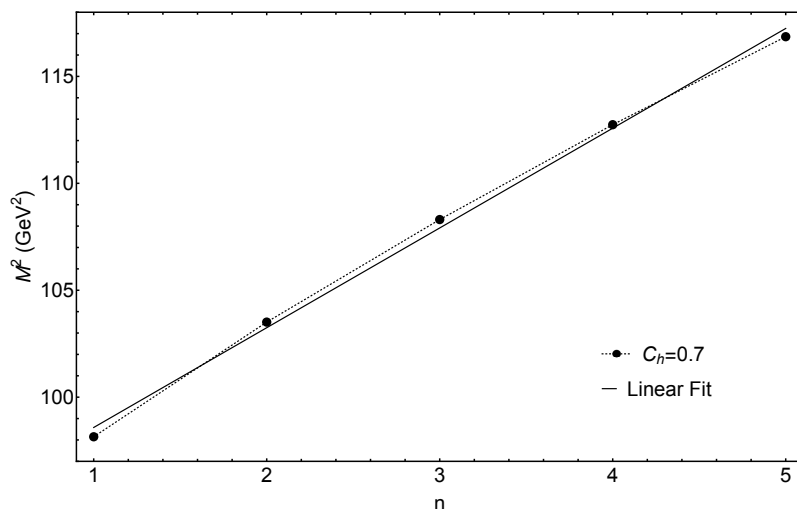


Figura 5.4: Trajetórias de Regge para o caso específico  $C_h = 0.7$  com a linha tracejada correspondendo a um ajuste não-linear.

diferentes números quânticos. O caso dos mésons  $2^{--}$  sob análise, produz esta razão com um valor maior que em outros estados. Na referência [105] utilizando a Fenomenologia de Regge, por exemplo, os autores estudam o espectro do charmonium e do bottomonium no plano  $(n, M^2)$  e predizem a massa de alguns estados  $b\bar{b}$  e  $c\bar{c}$  que não foram observados até agora. O valor da razão entre os declives obtidas por eles é de aproximadamente 0.4, inclusive observam que os valores de  $\mu^2$  são sensíveis ao sabor do quark e ao número quântico orbital L (além de S e J). Utilizam essa razão, que denominam de  $\beta$ , também para prever a massa de alguns estados, considerando o limite de quarks pesados e supondo que a mesma é constante.

Mostramos até aqui, as características básicas dos mésons tensoriais  $2^{--}$  através de uma ampla gama de massas de quarks e conseguimos através do ajuste dos parâmetros do modelo obter resultados em bom acordo com a literatura, principalmente para estados fundamentais isoescalares e isovetoriais das famílias de mésons leves sem sabor. Além disso, a análise do comportamento do quadrado da massa com o número quântico radial mostrou que a maioria das trajetórias de Regge são quase, mas não exatamente linear, em acordo com outros trabalhos da literatura. Dando sequência a análise numérica, iremos mostrar no próximo capítulo os resultados obtidos para os mésons  $B_c$ .



---

## Capítulo 6

# Espectro do méson $B_c$

---

Nesta seção exibiremos os resultados do espectro dos mésons  $B_c$ , que gerou o trabalho publicado na PHYSICAL REVIEW D em 2020 [116]. Relembrando que a estratégia consiste em resolver a equação de gap para obter os valores das funções  $c_{k(q)}^{b(c)}$  e  $s_{k(q)}^{b(c)}$ , que serão usadas para resolver a equação TDA de movimento. Como parâmetros de entrada temos a massa dinâmica do glúon constituinte  $m_g$ , as massas de quark corrente dos quarks  $b$  e  $c$  ( $m_b$  e  $m_c$ ), e a magnitude do potencial transversal  $C_h$ .

### 6.1 Valores dos parâmetros

Os dados para as famílias dos mésons  $B_c$ , como já apontado, são limitados a dois estados observados: o estado fundamental pseudoescalar, único considerado como uma partícula estabelecida, com massa  $M[B_c(1S)^+] \approx 6274.9 \pm 0.8$  MeV; e o outro com massa  $6871.0 \pm 1.7$  MeV consistente com uma primeira excitação radial pseudoescalar, mas sem números quânticos confirmados. Iniciamos mostrando na Tabela 6.1 os valores das massas de quarks constituintes  $\mathcal{M}_{b,c}$  geradas pelas massas de quarks correntes  $m_b = 4000$  MeV e  $m_c = 950$  MeV. Consideramos diferentes valores para os parâmetros  $C_h$  e  $m_g$  com o intuito de avaliar seus impactos nas massas de quarks constituintes  $\mathcal{M}_{b,c}$ , extraídos no limite  $M_{b,c}(k \rightarrow 0) \equiv \mathcal{M}_{b,c}$ .

Tabela 6.1: Massas de quarks constituintes  $\mathcal{M}_{b,c}$  dadas em MeV.

| Conjunto ( $m_g, C_h$ ) | $\mathcal{M}_c$ | $\mathcal{M}_b$ |
|-------------------------|-----------------|-----------------|
| I (600, 0.4)            | 1208            | 4343            |
| II (650, 0.4)           | 1222            | 4362            |
| III (700, 0.4)          | 1236            | 4380            |
| IV (700, 0.5)           | 1288            | 4452            |
| PDG [4]                 | 1500-1600       | 4600-5100       |

Podemos notar que o aumento de  $C_h$  e  $m_g$  produzem valores maiores para  $\mathcal{M}_{b,c}$  devido a modificação dos ângulos de gap vindos das soluções da equação de gap. Enfatizamos que os valores das massas de quarks corrente e constituinte comparadas com alguns modelos de quarks são menores, e isso é devido as contribuições dos potenciais de interação na equação de gap e da auto-energia  $\epsilon_k^{b,c}$  na equação TDA. Para mais detalhes desta discussão sugerimos uma leitura das referências [91, 100]. Nesse sentido, também podemos citar que muitos cálculos recentes da QCD na rede ( $n_f = 2 + 1 + 1$ ), mostraram estimativas da massa do quark charme por volta de 980-995 MeV [103, 104], o que são próximos dos valores que utilizamos.

## 6.2 Espectro de massa

Na Tabela 6.2 listamos a massas calculadas para os estados  $b\bar{c}$  com a utilização dos seguintes ângulos de mistura:  $\theta_{1P} - \theta_{5P} = 35.3^\circ$ ,  $\theta_{1D} = 42.5^\circ$ ,  $\theta_{2D} = 42.2^\circ$ ,  $\theta_{3D} = 33.2^\circ$ ,  $\theta_{4D} = 21.1^\circ$ ,  $\theta_{5D} = 5.2^\circ$ .

Tabela 6.2: Massas TDA dos estados fundamentais e excitados radialmente obtidos para  $m_c = 950$  MeV e  $m_b = 4000$  MeV.

|          | Conjunto   | $E_1$       | $E_2$       | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ |
|----------|------------|-------------|-------------|-------|-------|-------|
| $0^-$    | I          | 6146        | 6619        | 6986  | 7298  | 7573  |
|          | II         | 6212        | 6733        | 7136  | 7477  | 7779  |
|          | <b>III</b> | <b>6277</b> | <b>6845</b> | 7284  | 7656  | 7983  |
|          | IV         | 6417        | 6977        | 7411  | 7779  | 8103  |
| $0^+$    | I          | 6449        | 6852        | 7187  | 7478  | 7740  |
|          | II         | 6545        | 6989        | 7356  | 7675  | 7961  |
|          | III        | 6639        | 7123        | 7523  | 7871  | 8181  |
|          | IV         | 6786        | 7264        | 7659  | 8002  | 8309  |
| $1^-$    | I          | 6154        | 6625        | 6990  | 7302  | 7576  |
|          | II         | 6222        | 6739        | 7141  | 7482  | 7782  |
|          | III        | 6288        | <b>6853</b> | 7290  | 7661  | 7988  |
|          | IV         | 6431        | 6986        | 7418  | 7785  | 8108  |
| $1^+$    | I          | 6423        | 6821        | 7153  | 7443  | 7703  |
|          | II         | 6516        | 6955        | 7318  | 7635  | 7920  |
|          | III        | 6606        | 7088        | 7488  | 7836  | 8148  |
|          | IV         | 6744        | 7216        | 7608  | 7950  | 8254  |
| $1^{+'}$ | I          | 6456        | 6845        | 7171  | 7458  | 7715  |
|          | II         | 6552        | 6979        | 7339  | 7653  | 7935  |
|          | III        | 6.656       | 7121        | 7513  | 7856  | 8164  |
|          | IV         | 6783        | 7243        | 7629  | 7968  | 8272  |
| $2^+$    | I          | 6468        | 6853        | 7178  | 7463  | 7720  |
|          | II         | 6568        | 6991        | 7347  | 7659  | 7940  |
|          | III        | 6667        | 7127        | 7515  | 7854  | 8159  |
|          | IV         | 6805        | 7259        | 7641  | 7976  | 8277  |
| $2^-$    | I          | 6687        | 7023        | 7331  | 7600  | 7845  |
|          | II         | 6812        | 7177        | 7512  | 7808  | 8076  |
|          | III        | 6931        | 7334        | 7694  | 8015  | 8306  |
|          | IV         | 7046        | 7441        | 7815  | 8135  | 8422  |
| $2^{-'}$ | I          | 6687        | 7043        | 7338  | 7608  | 7853. |
|          | II         | 6801        | 7197        | 7522  | 7816  | 8085  |
|          | III        | 6920        | 7345        | 7704  | 8024  | 8315  |
|          | IV         | 7068        | 7492        | 7828  | 8144  | 8432  |

Notamos que o aumento da massa do glúon constituinte( $m_g$ ), aumenta as estimativas das massas em torno de 100-200 MeV, e o aumento de 0.1 na magnitude do potencial transversal produz massas em torno

de 100-150 MeV melhores. Embora o ajuste fino dos parâmetros possa dar até melhores resultados, acreditamos que o conjunto III é suficiente para gerar resultados em boa conformidade com os estados observados. O espectro gerado para este conjunto é mostrado esquematicamente na Fig. 6.1.

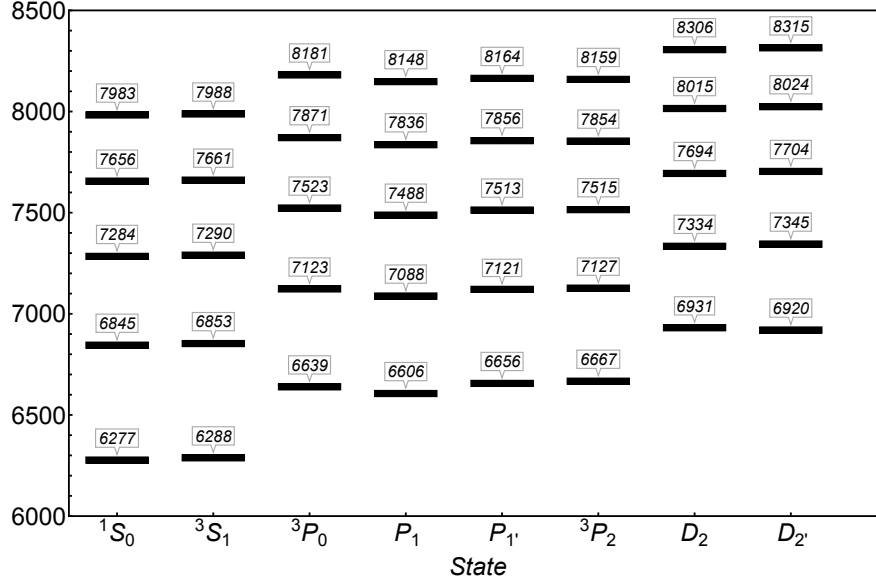


Figura 6.1: Espectro  $B_c$  gerado pelo conjunto de parâmetros III.

Na Tabela 6.3 avaliamos nossas previsões através da comparação com outros trabalhos teóricos e com os dados experimentais disponíveis, também utilizando o conjunto de parâmetros III. As abordagens teóricas empregadas nestes outros estudos são: modelo de quark relativístico com a presença de um potencial de confinamento linear e uma interação de Coulomb de cor [21]; modelo de quark constituinte no limite da simetria de quarks pesados com potenciais de confinamento escalar e de Coulomb vetorial [73]; modelo de quark não-relativístico(NRQM) consistindo de um potencial de confinamento e de um potencial de troca de um glúon [66]; modelo de potencial linear não-relativístico com uma interação dependente de spin [70].

Tabela 6.3: Comparação das massas TDA dos estados  $B_c$  obtidos do conjunto de parâmetros III com outras previsões.

| Estado        | $J^P$ | Ref. [21] | Ref. [73] | Ref. [66] | Ref. [68] | Ref. [70] | Dados exp. [62–64] | III  |
|---------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------------|------|
| $B_c(1^3S_1)$ | $1^-$ | 6338      | 6340      | 6357      | 6314      | 6326      | ...                | 6288 |
| $B_c(1^1S_0)$ | $0^-$ | 6271      | 6260      | 6275      | 6274      | 6271      | 6275               | 6277 |
| $B_c(2^3S_1)$ | $1^-$ | 6887      | 6900      | 8697      | 6855      | 6890      | 6842               | 6853 |
| $B_c(2^1S_0)$ | $0^-$ | 6855      | 6850      | 6862      | 6841      | 6871      | 6842               | 6845 |
| $B_c(3^3S_1)$ | $1^-$ | 7272      | 7280      | 7333      | 7206      | 7252      | ...                | 7290 |
| $B_c(3^1S_0)$ | $0^-$ | 7250      | 7240      | 7308      | 7197      | 7239      | ...                | 7284 |
| $B_c(1^3P_2)$ | $2^+$ | 6768      | 6760      | 6737      | 6753      | 6787      | ...                | 6667 |
| $B_c(1P_1')$  | $1^+$ | 6750      | 6740      | 6734      | 6744      | 6776      | ...                | 6656 |
| $B_c(1P_1)$   | $1^+$ | 6741      | 6730      | 6686      | 6725      | 6757      | ...                | 6606 |
| $B_c(1^3P_0)$ | $0^+$ | 6706      | 6680      | 6638      | 6701      | 6714      | ...                | 6639 |

|               |       |      |      |      |      |      |     |      |
|---------------|-------|------|------|------|------|------|-----|------|
| $B_c(2^3P_2)$ | $2^+$ | 7164 | 7160 | 7175 | 7111 | 7160 | ... | 7127 |
| $B_c(2P'_1)$  | $1^+$ | 7150 | 7150 | 7173 | 7098 | 7150 | ... | 7121 |
| $B_c(2P_1)$   | $1^+$ | 7145 | 7140 | 7137 | 7105 | 7134 | ... | 7088 |
| $B_c(2^3P_0)$ | $0^+$ | 7122 | 7100 | 7084 | 7086 | 7107 | ... | 7123 |
| $B_c(3^3P_2)$ | $2^+$ | ...  | 7480 | 7575 | 7406 | 7464 | ... | 7515 |
| $B_c(3P'_1)$  | $1^+$ | ...  | 7470 | 7572 | 7393 | 7458 | ... | 7513 |
| $B_c(3P_1)$   | $1^+$ | ...  | 7460 | 7546 | 7405 | 7441 | ... | 7488 |
| $B_c(3^3P_0)$ | $0^+$ | ...  | 7430 | 7492 | 7389 | 7420 | ... | 7523 |
| $B_c(1D'_2)$  | $2^-$ | 7036 | ...  | 7003 | 6984 | 7032 | ... | 6920 |
| $B_c(1D_2)$   | $2^-$ | 7041 | ...  | 6974 | 6986 | 7024 | ... | 6931 |
| $B_c(2D'_2)$  | $2^-$ | ...  | ...  | 7408 | 7293 | 7347 | ... | 7345 |
| $B_c(2D_2)$   | $2^-$ | ...  | ...  | 7385 | 7294 | 7343 | ... | 7334 |
| $B_c(3D'_2)$  | $2^-$ | ...  | ...  | 7783 | 7562 | 7623 | ... | 7704 |
| $B_c(3D_2)$   | $2^-$ | ...  | ...  | 7781 | 7563 | 7620 | ... | 7694 |

Ressaltamos que nossos resultados, especialmente para  $B_c(1S)$  e  $B_c^*(2S)$ , apresentam um bom acordo com os dados medidos quando os erros experimentais são levados em consideração. Mas esta comparação requer cuidados, pois o pico observado  $B_c^*(2S)$  tem uma massa mais baixa que o valor verdadeiro, que permanece desconhecido devido a impossibilidade de reconstrução dos fótons de baixa energia emitidos no  $B_c^{*+} \rightarrow B_c^+\gamma$ , como apontado em um trabalho baseado na análise de amostras oriundas de colisões próton-próton realizadas pelo CMS para uma energia de centro de massa de 13 TeV, entre 2015 e 2018 [63]. Além disso, a massa da primeira excitação radial  $B_c(2S)$  é maior que a do estado fundamental  $B_c(1S)$  em torno de 557 MeV, o que é bom considerando observações experimentais, e do fato de que  $B_c(2S)$  ainda não está bem estabelecido.

Em geral, as massas previstas para os estados fundamentais apresentam uma diferença com respeito a trabalhos prévios variando de uns poucos MeV até dezenas de MeV. As exceções com maiores desvios de massa são os estados  $1^3P_2, 1P_1, 1P'_1$ . Para estados de maior massa, maiores discrepâncias entre as predições são evidentes, mas a maioria dos nossos resultados estão entre os valores inferiores e superiores relatados na Tabela 6.2. Particularmente, nossos resultados para os estados de onda  $1S, 2S, 3S, 2P$  estão até algumas dezenas de MeV discrepantes daqueles com o modelo de quark relativístico desenvolvido por Godfrey e Isgur em 1985 [21], enquanto para estados de onda  $1P_2, 1P'_1$  e  $1D$  estão em torno de 100 – 140 MeV menores.

### 6.3 Trajetórias de Regge

Os níveis de energia listadas nas Tabelas 6.2 e 6.3 nos permite obter a relação de massa entre os estados fundamentais e seus estados radialmente excitados, possibilitando a construção das trajetórias de Regge no planos  $(n, M^2)$  e  $(J, M^2)$ . Nesse sentido, algumas das propriedades destas trajetórias como linearidade, paralelismo e equidistância podem ser averiguadas.

Assumimos que os declives das trajetórias de Regge são independentes da conjugação de carga, de acordo com a  $C$ -invariância da QCD, e também que os declives das trajetórias com mesma paridade coin-



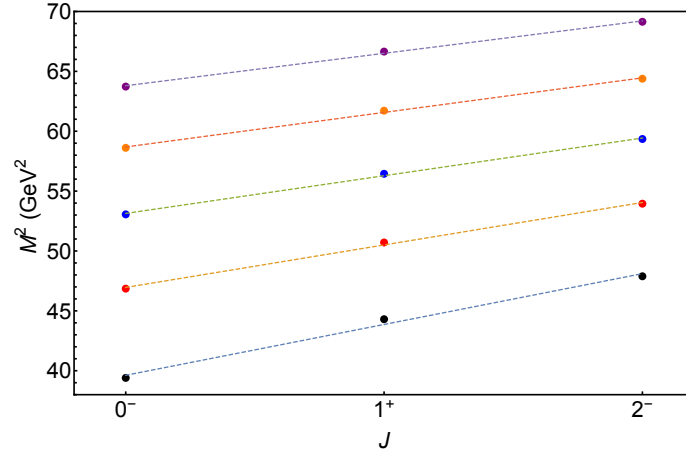


Figura 6.2: Trajetórias de Regge no plano  $(J, M^2)$  para estados  $B_c$  com paridade não-natural  $P = (-1)^J$ , para  $n = 1, \dots, 5$  (do bottom para o top).

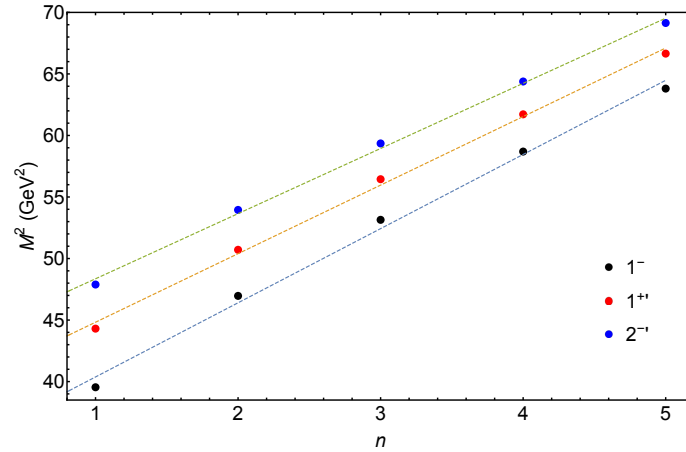


Figura 6.3: Trajetórias de Regge no plano  $(n, M^2)$  para estados  $B_c$  vetoriais de onda  $S$ , vetoriais de onda  $P$  e tensoriais de onda  $D$ .

cidem, analogamente como ocorre no trabalho da referência [105]. Pode-se observar que o comportamento do quadrado das massas com o número quântico radial e  $J^P$  não é exatamente linear. Este fato é acentuado no plano  $(n, M^2)$ , devido ao alto número de excitação. Mais precisamente, as trajetórias filhas (incorporando ambos estados excitados radialmente e orbitalmente) manifestam extrapolações próximas de um ajuste linear. Contudo, as trajetórias pais (começando nos estados fundamentais) revelam uma natureza não-linear, principalmente na região de menor massa. Isto está em acordo qualitativo com outros trabalhos que investigam estados quarkônia pesados. Na referência [105] por exemplo, os autores observam que as trajetórias para excitações radiais mais baixas de mésons no plano  $(n, M^2)$  podem ser assumidas como lineares para o espectro de mésons leves, mas, para o bottomonium, desviam significativamente da linearidade, possivelmente pelo quark  $b$  ser um quark pesado. Já na referência [106] os autores destacam razões para esperar que as trajetórias de Regge pais sejam não-lineares devido a compactação de seus estados fundamentais e excitações mais baixas, o que os coloca na região onde tanto o potencial de confinamento linear quanto partes do potencial de Coulomb desempenham papel igualmente importante. Esses aspectos também são confirmados nos trabalhos [107–109].

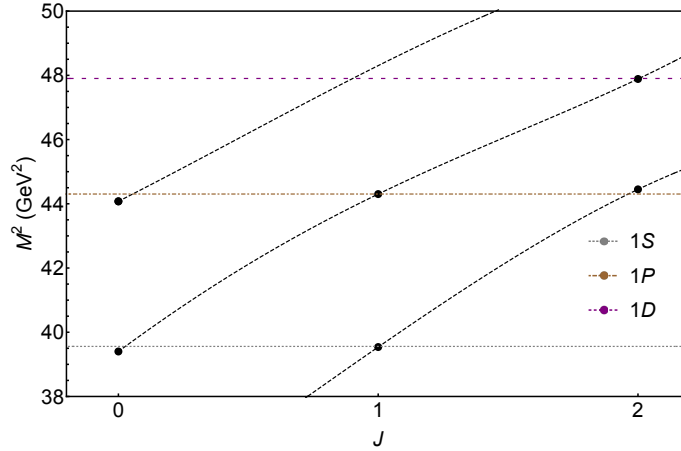


Figura 6.4: Trajetórias não-lineares no plano  $(J, M^2)$  partindo de estados  $B_c$  vetoriais, pseudoscalares e escalares (do bottom para top), com linhas indicando as regiões dos estados 1S, 1P, 1D. Circulos representam as massas previstas mostradas na Tabela 6.2, levando em conta os valores do conjunto de parâmetros III.

Adicionalmente, usamos a aproximação linear para as trajetórias de Regge, através das formas [106, 110–112]

$$\begin{aligned} M^2(J) &= \alpha_0\beta + J\alpha, \\ M^2(n) &= \beta_0 + n\beta, \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde  $\alpha_0, \beta_0$  são as intercepções e  $\alpha, \beta$  os declives para cada trajetória. Agora aplicando esta hipótese, podemos extrair os parâmetros  $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$  dos ajustes lineares. Os valores estimados são listados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Parâmetros estabelecidos do ajuste linear das trajetórias de Regge.

| Plano $(J, M^2)$ |            |          |
|------------------|------------|----------|
| Trajecória       | $\alpha_0$ | $\alpha$ |
| Pai              | 39.620     | 4.243    |
| 1st Filha        | 46.956     | 3.548    |
| 2nd Filha        | 53.137     | 3.147    |
| 3rd Filha        | 58.689     | 2.885    |
| 4th Filha        | 63.801     | 2.705    |
| Plano $(n, M^2)$ |            |          |
| Estado           | $\beta_0$  | $\beta$  |
| $1^-$            | 34.349     | 6.027    |
| $1^{+'}$         | 39.253     | 5.570    |
| $2^-$            | 43.060     | 5.294    |

Podemos observar que o valor destes declives diminuem à medida que as massas e os números de excitação aumentam. A diferença entre estes declives inclusive é bem menor entre as trajetórias filhas, em torno de 0.1. Contudo, no geral estas diferenças não são tão significativas, o que indica que esses declives apresentam forte dependência na massa dos quarks pesados. Além disso, vemos que os valores de  $\beta$  são sistematicamente maiores que  $\alpha$ , diferente do que ocorrem em outros trabalhos, possivelmente devido a diferença na parametrização aqui utilizada.

Apesar dessas diferenças, nossos resultados estão em razoável acordo com a literatura, como por exemplo, o trabalho do Ebert, Faustov e Galkin no qual analisam o espectro do mésons  $B_c$ , do charmonium e do bottomonium [106].

Ademais, neste trabalho corroboram com os aspectos não-lineares apresentados pelas trajetórias de Regge pais. Vemos também com esse formalismo esses aspectos, no qual para os estados fundamentais e primeiras excitações parte do potencial efetivo  $H_c$  contribui de maneira mais substancial, enquanto para as trajetórias filhas a linearidade é mais perceptível devido estarem em outra região.

## 6.4 Separações hiperfinas

O melhor entendimento da interação hiperfina passa pelos cálculos das separações hiperfinas, desse modo, analisamos as separações hiperfinas para os dados obtidos dos estados  $B_c$ .

Iniciamos com os estados de onda  $S$  onde utilizamos,

$$\Delta_{nS}^{HFS} = M(n^3S_1) - M(n^1S_0). \quad (6.2)$$

Tabela 6.5: Separações hiperfinas dos estados  $B_c$  dadas em MeV

| Conjunto | $\Delta_{1S}^{HFS}$ | $\Delta_{2S}^{HFS}$ | $\Delta_{3S}^{HFS}$ | $\Delta_{4S}^{HFS}$ | $\Delta_{5S}^{HFS}$ |
|----------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| I        | 8                   | 6                   | 4                   | 4                   | 3                   |
| II       | 10                  | 6                   | 5                   | 5                   | 3                   |
| III      | <b>11</b>           | <b>8</b>            | <b>6</b>            | <b>5</b>            | <b>5</b>            |
| IV       | 14                  | 9                   | 7                   | 6                   | 5                   |

Podemos observar que estas separações diminuem para estados de maior excitação e ficam maior conforme o parâmetro  $C_h$  cresce. Obtemos a massa para  $B_c(2S)$  menor do que para  $B_c^*(2S)$ , em acordo com outras expectativas teóricas. As separações hiperfinas  $\Delta_{2S}^{HFS}$  foram de 8 MeV, menor do que os 19 MeV encontrado na referência [70]. Adicionalmente, para testar a estrutura das separações de spin em quarkônios pesados realizamos as medidas das separações hiperfinas dos estados de onda  $P$ , seguiremos a discussão realizada na referência [71], na qual observam que a maioria das separações hiperfinas para estados de onda  $P$  são aproximadamente iguais a zero para sistemas  $c\bar{c}$  e  $b\bar{b}$ , mostrando que os dados experimentais corroboram tal afirmativa. Seguindo isso, adaptam a análise para o caso de mésons  $B_c$ . Posto isso, utilizaremos

$$E(n^1P_1) = \frac{1}{9} [5E(n^3P_2) + 3E(n^3P_1) + E(n^3P_0)]. \quad (6.3)$$

Como para estados  $B_c$  a  $C$ -paridade não é um bom número quântico, os estados  $n^3P_1 - n^1P_1$  podem misturar, uma vez que estados com o mesmo momento angular mas diferentes spins permitem isso, o que implica que a equação acima não pode ser diretamente usada. Mas, contrariando essa expectativa, assumimos que a relação  $E(n^3P_1) \approx E(n^1P_1)$  é válida para mésons  $B_c$ , que são compostos apenas de quarks pesados, teremos

$$E(n^3P_0) + 5E(n^3P_2) = 3 [E(nP_1) + E(nP'_1)]. \quad (6.4)$$

Para testar e contabilizar o quanto a equação acima está sendo violada, é introduzida a razão entre as massas.

$$r = \frac{E(n^3 P_0) + 5E(n^3 P_2)}{3[E(nP_1) + E(nP'_1)]}. \quad (6.5)$$

onde o desvio de  $r = 1$  nos dá esses percentuais.

As estimativas de  $r$  para nossos cálculos são listados na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Razão  $r$  para estados  $B_c$  de onda  $P$

| $n$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| $r$ | 1.0047 | 1.0031 | 1.0021 | 1.0014 | 1.0008 |

Vemos que os erros relativos teóricos dos estados fundamentais e radialmente excitados estão abaixo de 0.5%. Para os estados excitados esse percentual é ainda menor. Outro teste que pode ser feito é analisar o aumento da força do potencial transversal, associado à interação hiperfina. Usando, por exemplo, o conjunto IV da tabela 6.1, obteríamos  $r = 1.0057$ , o que claramente evidencia o aumento da razão  $r$ . Isto sugere que qualquer desvio de  $r = 1$  depende da interação hiperfina, em acordo com as conclusões apontadas na referência [71].

As características gerais dos mésons  $B_c$  foram obtidas até aqui, sendo que as massas calculadas estão em bom acordo tanto para os estados observados e listados no PDG quanto para os ainda não-observados, descritos nos mais variados trabalhos. Também avaliamos as trajetórias de Regge e observamos os aspectos não-lineares em geral exibidos, além das separações hiperfinas que nos possibilitou entender melhor a influência da interação hiperfina. No próximo capítulo trataremos as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

---

## Capítulo 7

# Conclusões e perspectivas

---

A proposta geral deste trabalho foi estudar a espectroscopia hadrônica por meio de uma versão efetiva do Hamiltoniano da QCD no gauge de Coulomb, onde os potenciais de interação foram substituídos por potenciais efetivos para o setor quarkônico, com a omissão das contribuições puramente gluônicas. Assim, realizamos a análise dos espectros dos mésons tensoriais  $2^{-(-)}$  e dos mésons  $B_c$ , acessando suas características básicas empregando uma aproximação tipo Tamm-Dancoff, além de assumirmos que as interações entre quarks (quasiparticulas) e antiquarks (anti-quasiparticulas) são dadas pela soma de um potencial de confinamento inspirado numa versão do potencial de Cornell e uma interação hiperfina transversa, com o kernel sendo um potencial tipo Yukawa escolhido para cumprir o papel da troca de um glúon constituinte. Um dos principais benefícios da abordagem é utilização de poucos parâmetros de entrada (a massa dinâmica do glúon constituinte ( $m_g$ ), as massas de quarks corrente ( $m_f$ ) e a magnitude do potencial transversa ( $C_h$ )), que podiam ser facilmente ajustados para fitar os resultados encontrados na literatura. Adicionalmente, os cálculos numéricos demandaram baixos custos computacionais, com tempos de resposta relativamente rápidos.

As predições para os espectros dos mésons tensoriais  $2^{-(-)}$ , principalmente para as famílias dos mésons isoescalar e isovetorial sem sabor, estão em acordo aproximado com outros encontrados na literatura que usam abordagens distintas. Efetuamos ainda a análise dos espectros do charmonium e do bottomonium, o que nos mostrou que o comportamento do quadrado da massa com o número quântico radial é quase mas não exatamente linear, estando em acordo qualitativo com trabalhos que exploram outros tipos de estados quarkônios e mésons.

Já com relação as predições dos mésons  $B_c$ , nossos cálculos produzem a massa do  $B_c(2S)$  mais leve do que para o  $B_c^*(2S)$ . Esperamos que as descobertas futuras mostrem que o pico verdadeiro do  $B_c^*(2S)$  esteja com uma massa maior conforme o fóton emitido na transição radiativa  $B_c^{*+} \rightarrow B_c^+ \gamma$  puder ser reconstruído. Outro aspecto considerado é a relação entre as massas dos estados fundamentais e suas excitações radiais nos planos  $(n, M^2)$  e  $(J, M^2)$ . A não linearidade é mais pronunciada no plano  $(n, M^2)$ . As trajetórias pais (vindas dos estados fundamentais) revelam uma natureza não-linear mais evidente que as trajetórias filhas, o que esta em acordo qualitativo com outros trabalhos. Também estudamos as separações hiperfinas para ambos os estados de onda  $S$  e  $P$ , averiguando que as separações diminuem para estados mais excitados mas torna-se maior conforme o parâmetro  $C_h$  aumenta, como esperado, uma vez que ele guia a força do termo associado a interação hiperfina.

Como perspectivas, temos várias possibilidades em mente, tais como: o estudo das transições radiativas e fortes tanto para os mésons tensoriais  $2^{-(-)}$  quanto para os mésons  $B_c$ ; implementar a análise para mésons  $2^{-(-)}$  sem sabor; analisar as misturas entre os estados  $2^{--}$  e  $2^{-+}$ , onde aparecem elementos fora da diagonal ( $\langle 2^{-+} | H | 2^{--} \rangle$  e  $\langle 2^{--} | H | 2^{-+} \rangle$ ) que não desaparecem da Hamiltoniana. Além dessas, apresentando maior grau de complexidade, temos a possibilidade de ampliarmos o estudo para mésons híbridos, tetraquarks, estados exóticos em geral.

---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Gross, David J. and Wilczek, Frank., Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.*, vol.30, p.1343-1346, 1973.
- [2] Politzer, H. David., Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?, *Phys. Rev. Lett.*, vol.30, p.1346-1349, 1973.
- [3] Gell-Mann, Murray, A Schematic Model of Baryons and Mesons, *Phys. Lett.*, vol.8, p.214-215, 1964.
- [4] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020, 083C01 (2020), The summary tables are available online at <http://pdgLive.lbl.gov>.
- [5] N. Brambilla *et al.*, Heavy Quarkonium: Progress, Puzzles, and Opportunities, *Eur.Phys.J.C*, vol.71, p.1534, 2011.
- [6] A. Esposito, A. L. Guerrieri, F. Piccinini, A. Pilloni and A. D. Polosa, Four-Quark Hadrons: an Updated Review, *Int.J.Mod. Phys.A*, vol.30, p.1530002, 2015.
- [7] N. Brambilla, S. Eidelman, C. Hanhart, A. Nefediev, C. P. Shen, C. E. Thomas, A. Vairo and C. Z. Yuan, The XYZ states: experimental and theoretical status and perspectives, *Phys.Rept.*, vol.873, p.1-154, 2020.
- [8] D. Ebert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, Mass spectra and Regge trajectories of light mesons in the relativistic quark model, *Phys.Rev.D*, vol. 79, p.114029, 2009.
- [9] W. Chen, Z. X. Cai and S. L. Zhu, Masses of the tensor mesons with  $J^P = 2^-$ , *Nucl.Phys.B*, vol. 887, p.201, 2014.
- [10] C. Q. Pang, L. P. He, X. Liu and T. Matsuki, Phenomenological study of the isovector tensor meson family, *Phys.Rev.D*, vol.90, p.014001, 2014.
- [11] B. Wang, C. Q. Pang, X. Liu and T. Matsuki, Pseudotensor meson family, *Phys.Rev.D*, vol.91, p.014025, 2015.
- [12] K. Chen, C. Q. Pang, X. Liu and T. Matsuki, Light axial vector mesons, *Phys.Rev.D*, vol.91, no. 7, p.074025, 2015.
- [13] C. Q. Pang, B. Wang, X. Liu and T. Matsuki, High-spin mesons below 3 GeV, *Phys.Rev.D*, vol.92, no. 1, p.014012, 2015.
- [14] A. Koenigstein and F. Giacosa, Phenomenology of pseudotensor mesons and the pseudotensor glueball, *Eur.Phys.J.A*, vol. 52, no. 12, p.356, 2016.

- [15] M. Piotrowska, C. Reisinger and F. Giacosa, Strong and radiative decays of excited vector mesons and predictions for a new  $\phi(1930)$  resonance, *Phys.Rev.D*, vol.96, no. 5, p.054033, 2017.
- [16] L. M. Wang, S. Q. Luo, Z. F. Sun and X. Liu, Constructing new pseudoscalar meson nonets with the observed  $X(2100)$ ,  $X(2500)$ , and  $\eta(2225)$ , *Phys. Rev.D*, vol.96, no. 3, p.034013, 2017.
- [17] C. Q. Pang, J. Z. Wang, X. Liu and T. Matsuki, A systematic study of mass spectra and strong decay of strange mesons, *Eur.Phys.J.C*, vol.77, no. 12, p.861, 2017.
- [18] F. Giacosa, A. Koenigstein and R. D. Pisarski, How the axial anomaly controls flavor mixing among mesons, *Phys.Rev.D*, vol.97, no. 9, p.091901, 2018.
- [19] D. Guo, C. Q. Pang, Z. W. Liu and X. Liu, Study of unflavored light mesons with  $J^{PC} = 2^{--}$ , *Phys.Rev.D*, vol.99, no.5, p.056001, 2019.
- [20] L. M. Wang, J. Z. Wang, S. Q. Luo, J. He and X. Liu, Studying  $X(2100)$  hadronic decays and predicting its pion and kaon induced productions, *Phys.Rev.D*, vol.101, no.3, p.034021, 2020.
- [21] S. Godfrey and N. Isgur, Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics, *Phys.Rev.D*, vol.32, p.189, 1985.
- [22] S. Godfrey and J. Napolitano, Light meson spectroscopy, *Rev.Mod.Phys.*, vol.71, p.1411, 1999.
- [23] User:MissMJ, "Standard Model of Elementary Particles.svg", <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=49632920>, 2016.
- [24] Introdução à QCD Perturbativa/ Caruso, Francisco Anselmino, Mauro Mahon, José Oguri, Vitor.-Rio de Janeiro: LTC,2013.
- [25] Martin, B.R. and Shaw, G., Particle Physics. Manchester Physics Series, Wiley, 2017.
- [26] Lebed, Richard F. and Swanson, Eric S., Quarkonium  $h$  States As Arbiters of Exoticity, *Phys.Rev.D*, vol.96, p.056015, 2017.
- [27] Peset, Clara and Pineda, Antonio and Segovia, Jorge., P-wave heavy quarkonium spectrum with next-to-next-to-next-to-leading logarithmic accuracy, *Phys.Rev.D*, vol.98, p.094003, 2018.
- [28] Lee:1981mf., Particle Physics and Introduction to Field Theory, vol.1. Harwood Academic Publishers, 1981.
- [29] N. H. Christ and T. D. Lee, Operator Ordering and Feynman Rules in Gauge Theories, *Phys.Rev.D*, vol.22, p.939, 1980.
- [30] Christ, N. H. and Lee, T. D., Operator Ordering and Feynman Rules in Gauge Theories, *Phys.Rev.D*, vol.22, p.939, 1980.
- [31] T. Regge, *Nuovo Cimento* 14, 951 (1959); 18, 947 (1960).
- [32] P. D. B. Collins, An Introduction to Regge theory and HighEnergy Physics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1977); V. N. Gribov, The Theory of Complex Angular Momenta: Gribov Lectures on Theoretical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2003).



- [33] G. F. Chew and S. C. Frautschi, *Phys. Rev. Lett.* 7, 394(1961); 8, 41 (1962).
- [34] M. M. Brisudova, L. Burakovsky, and T. Goldman, *Phys.Rev. D* 61, 054013 (2000).
- [35] L. Burakovsky, T. Goldman, and L. P. Horwitz, *Phys. Rev.D* 56, 7124 (1997).
- [36] D.-M. Li, B. Ma, Y.-X. Li, Q.-K. Yao, and H. Yu, *Eur.Phys. J. C* 37, 323 (2004).
- [37] L. Burakovsky, T. Goldman, and L. P. Horwitz, *Phys. Rev.D* 56, 7119 (1997); *J. Phys. G* 24, 771 (1998).
- [38] A.V. Anisovich, V.V. Anisovich, and A.V. Sarantsev,*Phys. Rev.D* 62, 051502(R) (2000); V.V. Anisovich,*AIP Conf. Proc.* 619, 197 (2002); *Usp. Fiz. Nauk* 174,49 (2004); [*Phys. Usp.* 47, 45 (2004)]; *AIP Conf. Proc.*717, 441 (2004).
- [39] A. Zhang, *Phys.Rev.D*, vol.72, p.017902, 2005.
- [40] A. B. Kaidalov, *Z. Phys. C* 12, 63 (1982).
- [41] X.-H. Guo, K.-W. Wei, and X.-H. Wu, *Phys.Rev.D*,vol.78, p.056005 ,2008.
- [42] A. M. Badalian, B. L. G. Bakker, and Yu.A. Simonov,*Phys. Rev.D*, vol. 66, p.034026, 2002.
- [43] S. S. Afonin, *Int. J. Mod. Phys.A*, vol. 22, p.4537, 2007.
- [44] D. Z. Freedman and J.-M. Wang, *Phys. Rev. Lett.*,vol. 17, p.569, 1966.
- [45] M. L. Goldberger and C.E.Jones,*Phys. Rev.*,vol. 150, p.1269, 1966.
- [46] G. Veneziano, *Nuovo Cimento A*, vol. 57, p.190 ,1968.
- [47] D.V. Bugg, *Phys. Rep.* vol.397, p.257, 2004.
- [48] Yu. S. Kalashnikova, A.V. Nefediev, and Yu.A. Simonov,*Phys. Rev.D*, vol.64, p.014037, 2001.
- [49] L. D. Solovev, *Phys. Rev.D*, vol.61, p.015009, 1999.
- [50] D.-M. Li, B. Ma, and Y.-H. Liu, *Eur.Phys. J.C*, vol. 51, p.359, 2007.
- [51] S. S. Gershtein, A. K. Likhoded, and A.V. Luchinsky,*Phys.Rev.D*, vol.74, p.016002, 2006.
- [52] K. Kawarabayashi, S. Kitakado, and H. Yabuki, *Phys.Lett.B*, vol.28,p. 432, 1969.
- [53] R. C. Brower, J. Ellis, M. G. Schmidt, and J. H. Weis,*Nucl. Phys.B*, vol.128, p.175, 1977.
- [54] N. A. Kobylinsky, E. S. Martynov, and A. B. Prognimak,*Ukr. Fiz. Zh.*,vol. 24, p.969, 1979.
- [55] V.V. Dixit and L. A. P. Balazs, *Phys. Rev.D*, vol. 20, p.816, 1979.
- [56] K. Igi and S. Yazaki, *Phys. Lett.B*, vol.71, p.158, 1977.
- [57] N. N. Khuri, *Phys. Rev.*, vol.132, p.914, 1963.
- [58] W. Cassing, L. A. Kondratyuk, G. I. Lykasov, and M.V.Rzjanin, *Phys. Lett.B*, vol.513, p.1, 2001.

- [59] V. Abazov *et al.* [D0], Observation of the  $B_c$  Meson in the Exclusive Decay  $B_c \rightarrow J/\psi\pi$ , Phys.Rev.Lett., vol.101, p.012001, 2008.
- [60] R. Aaij *et al.* [LHCb], Measurements of  $B_c^+$  production and mass with the  $B_c^+ \rightarrow J/\psi\pi^+$  decay, Phys. Rev. Lett., vol.109, p.232001, 2012.
- [61] F. Abe *et al.* [CDF], Observation of the  $B_c$  meson in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV, Phys. Rev. Lett., vol. 81, p.2432-2437, 1998.
- [62] G. Aad *et al.* [ATLAS], Observation of an Excited  $B_c^\pm$  Meson State with the ATLAS Detector, Phys. Rev. Lett., vol. 113, no.21, p.212004, 2014.
- [63] A. M. Sirunyan *et al.* [CMS], Observation of Two Excited  $B_c^+$  States and Measurement of the  $B_c^+(2S)$  Mass in pp Collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV, Phys. Rev. Lett., vol. 122, no.13, p.132001, 2019.
- [64] R. Aaij *et al.* [LHCb], Observation of an excited  $B_c^+$  state, Phys. Rev. Lett., vol.122, no.23, p.232001, 2019.
- [65] E. J. Eichten and C. Quigg, Mesons with beauty and charm: Spectroscopy, Phys. Rev.D, vol.49, p.5845-5856, 1994.
- [66] A. P. Monteiro, M. Bhat and K. B. Vijaya Kumar, Mass spectra and decays of ground and orbitally excited  $c\bar{b}$  states in nonrelativistic quark model, Int. J. Mod. Phys. A, vol.32, no.04, p.1750021, 2017.
- [67] A. P. Monteiro, M. Bhat and K. B. Vijaya Kumar,  $c\bar{b}$  spectrum and decay properties with coupled channel effects, Phys. Rev.D, vol.95, no.5, p.054016, 2017.
- [68] N. Akbar, M. Atif Sultan, B. Masud and F. Akram, Conventional and hybrid  $B_c$  mesons in an extended potential model, Eur. Phys. J. A, vol. 55, no.5, p.82, 2019.
- [69] E. J. Eichten and C. Quigg, Mesons with Beauty and Charm: New Horizons in Spectroscopy, Phys. Rev. D, vol.99, no.5, p.054025, 2019.
- [70] Q. Li, M. Liu, L. Lu, Q. Lu, L. Gui and X. Zhong, Excited bottom-charmed mesons in a nonrelativistic quark model, Phys. Rev. D, vol. 99, no.9, p.096020, 2019.
- [71] L. Chang, M. Chen, X. q. Li, Y. x. Liu and K. Raya, Can the Miraculous Mass Relation in the  $P$ -wave Spectroscopy of Charmonia and Bottomonia be extended to  $B_c$  Mesons, Few Body Syst.,nucl-th, vol.62, p.4, 2021.
- [72] P. G. Ortega, J. Segovia, D. R. Entem and F. Fernandez, Spectroscopy of  $\mathbf{B}_c$  mesons and the possibility of finding exotic  $\mathbf{B}_c$ -like structures, Eur. Phys. J. C, vol.80, no.3, p.223, 2020.
- [73] J. Zeng, J. Van Orden and W. Roberts, Heavy mesons in a relativistic model, Phys. Rev. D, vol.52, p.5229-5241, 1995.
- [74] S. N. Gupta and J. M. Johnson,  $B_c$  spectroscopy in a quantum chromodynamic potential model, Phys. Rev. D, vol.53, p.312-314, 1996.
- [75] D. Ebert, R. Faustov and V. Galkin, Properties of heavy quarkonia and  $B_c$  mesons in the relativistic quark model, Phys. Rev. D, vol.67, p.014027, 2003.

- [76] S. M. Ikhdaïr and R. Sever, Spectroscopy of  $B_c$  meson in a semirelativistic quark model using the shifted large  $N$  expansion method, *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 19, p.1771-1792, 2004.
- [77] S. Godfrey, Spectroscopy of  $B_c$  mesons in the relativized quark model, *Phys. Rev. D*, vol.70, p.054017, 2004.
- [78] T. Aliev, T. Barakat and S. Bilmis, Properties of excited  $B_c$  states in QCD, *Nucl.Phys.B*, vol.947, p.114726, 2019.
- [79] Z. G. Wang, Analysis of the vector and axialvector  $B_c$  mesons with QCD sum rules, *Eur. Phys. J. A*, vol.49, p.131, 2013.
- [80] I. F. Allison *et al.* [HPQCD, Fermilab Lattice and UKQCD], Mass of the  $B_c$  meson in three-flavor lattice QCD, *Phys. Rev. Lett.*, vol.94, p.172001, 2005.
- [81] R. Dowdall, C. Davies, T. Hammant and R. Horgan, Precise heavy-light meson masses and hyperfine splittings from lattice QCD including charm quarks in the sea, *Phys. Rev. D*, vol.86,p.094510, 2012.
- [82] N. Mathur, M. Padmanath and S. Mondal, Precise predictions of charmed-bottom hadrons from lattice QCD, *Phys. Rev. Lett.*, vol.121, no.20, p.202002, 2018.
- [83] M. Chen, L. Chang and Y. Liu,  $B_c$  meson spectrum via Dyson-Schwinger equation and Bethe-Salpeter equation approach, *Phys. Rev. D*, vol.101, no.5, p.056002, 2020.
- [84] A. Szczepaniak, E. S. Swanson, C. R. Ji and S. R. Cotanch, Glueball spectroscopy in a relativistic many body approach to hadron structure, *Phys. Rev. Lett.*, vol.76, p.2011-2014, 1996.
- [85] S. Cotanch, A. Szczepaniak, E. Swanson and C. Ji, QCD Hamiltonian approach for the glueball spectrum, *Nucl. Phys. A*, vol.631, p.640C-643C, 1998.
- [86] Cotanch, Stephen R. and Llanes-Estrada, Felipe J., Coulomb Gauge Model for Exotic Hadrons, *Fizika*, vol.B20, p.1-16, 2011.
- [87] F. J. Llanes-Estrada and S. R. Cotanch, Meson structure in a relativistic many body approach, *Phys.Rev.Lett.*, vol.84, p.1102, 2000.
- [88] A. P. Szczepaniak and E. S. Swanson, Coulomb gauge QCD, confinement, and the constituent representation, *Phys.Rev.D*, vol.65, p.025012, 2001.
- [89] F. J. Llanes-Estrada and S. R. Cotanch, Relativistic many body Hamiltonian approach to mesons, *Nucl.Phys. A*, vol.697, p.303, 2002.
- [90] N. Ligterink and E. S. Swanson, A Coulomb gauge model of mesons, *Phys.Rev.C*, vol.69, p.025204, 2004.
- [91] F. J. Llanes-Estrada, S. R. Cotanch, A. P. Szczepaniak and E. S. Swanson, Hyperfine meson splittings: Chiral symmetry versus transverse gluon exchange, *Phys.Rev.C*, vol.70, p.035202, 2004.
- [92] F. J. Llanes-Estrada, P. Bicudo and S. R. Cotanch, Oddballs and a low odderon intercept, *Phys.Rev.Lett.*, vol. 96, p.081601, 2006.

- [93] A. P. Szczepaniak and P. Krupinski, Coulomb energy and gluon distribution in the presence of static sources, *Phys.Rev.D*, vol.73, p.034022, 2006
- [94] I. J. General, P. Wang, S. R. Cotanch and F. J. Llanes-Estrada, Light  $1^{-+}$  exotics: Molecular resonances, *Phys. Lett. B*, vol.653, p.216-223, 2007.
- [95] P. Guo, A. P. Szczepaniak, G. Galata, A. Vassallo and E. Santopinto, Heavy quarkonium hybrids from Coulomb gauge QCD, *Phys. Rev.D*, vol.78, p.056003, 2008.
- [96] J. M. Torres-Rincon and F. J. Llanes-Estrada, Heavy Quark Fluorescence, *Phys.Rev.Lett.*, vol.105, p.022003, 2010.
- [97] W. Xie, L. Mo, P. Wang and S. R. Cotanch, Coulomb gauge model for hidden charm tetraquarks, *Phys. Lett. B*, vol.725, p.148-152, 2013.
- [98] P. Guo, T. Yépez-Martínez and A. P. Szczepaniak, Charmonium meson and hybrid radiative transitions, *Phys. Rev. D*, vol.89, no.11, p.116005, 2014.
- [99] D. Amor-Quiroz, T. Yépez-Martínez, P. Hess, O. Civitarese and A. Weber, Low energy meson spectrum from a QCD approach based on many-body methods, *Int. J. Mod. Phys. E*, vol. 26, no.12, p.1750082, 2017.
- [100] L. M. Abreu, A. G. Favero, F. J. Llanes-Estrada and A. G. Sánchez, Mixing and  $m_q$  dependence of axial vector mesons in the Coulomb gauge QCD model, *Phys.Rev.D*, vol.100, no. 11, p.116012, 2019.
- [101] L. M. Abreu, F. M. Júnior and A. Favero, Revisiting the tensor  $J^{PC} = 2^{--}$  meson spectrum, *Phys.Rev.D*, vol.101, p.116016, 2020.
- [102] H. G. Blundell, S. Godfrey and B. Phelps, Properties of the strange axial mesons in the relativized quark model, *Phys.Rev.D*, vol.53, p.3712, 1996.
- [103] A. Lytle et al. [HPQCD], Determination of quark masses from  $\mathbf{n}_f = 4$  lattice QCD and the RI-SMOM intermediate scheme, *Phys. Rev. D*, vol. 98, no.1, p.014513, 2018.
- [104] D. Hatton, C. Davies, B. Galloway, J. Koponen, G. Lepage and A. Lytle, Charmonium properties from lattice QCD + QED: hyperfine splitting,  $J/\psi$  leptonic width, charm quark mass and  $a_\mu^c$ , *Phys.Rev.D*, vol.102,no.5, p.054511, 2020.
- [105] K. W. Wei and X. H. Guo, Mass spectra of doubly heavy mesons in Regge phenomenology, *Phys.Rev.D*, vol.81, p.076005, 2010.
- [106] D. Ebert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, Spectroscopy and Regge trajectories of heavy quarkonia and  $B_c$  mesons, *Eur.Phys.J.C*, vol.71, p.1825, 2011.
- [107] J. K. Chen, Regge trajectories for heavy quarkonia from the quadratic form of the spinless Salpeter-type equation, *Eur.Phys.J.C*, vol.78, no.3, p.235, 2018.
- [108] J. K. Chen, Concavity of the meson Regge trajectories, *Phys.Lett.B*, vol.786, p.477, 2018.
- [109] D. Jia and W. C. Dong, Regge-like spectra of excited singly heavy mesons, *Eur.Phys.J.Plus*, vol.134, no. 3, p.123, 2019.

- [110] A. V. Anisovich, V. V. Anisovich and A. V. Sarantsev, Systematics of  $q$  anti- $q$  states in the  $(n, M^2)$  and  $(J, M^2)$  planes, *Phys.Rev.D*, vol.62, p.051502(R), 2000.
- [111] A. V. Anisovich *et al.*,  $I = 0$   $C = +1$  mesons from 1920 to 2410 MeV, *Phys.Lett.B*, vol.491, 2000.
- [112] S. S. Afonin, Properties of new unflavored mesons below 2.4-GeV, *Phys.Rev.C*, vol.76, p.015202, 2007.
- [113] D. Aston *et al.*, Evidence for two  $J^{(P)} = 2^-$  strange meson states in the  $K(2)$  (1770) region, *Phys. Lett. B*, vol.308, p.186-192, 1993.
- [114] Zwanziger, Daniel., Lattice Coulomb Hamiltonian and static color Coulomb field, *Nucl. Phys.B.*, vol.485, p.185-240, 1997.
- [115] Bicudo, Pedro J. de A. and Ribeiro, Jose E. F. T., "Current Quark Model in a  $p$  Wave Triplet Condensed Vacuum. 1. The Dynamical Breaking of Chiral Symmetry", *Phys. Rev.D*, vol.42, p.1611-1624, 1990.
- [116] Abreu, L. M. and Júnior, F. M. da Costa and Favero, A. G., Bottom-charmed meson spectrum from a QCD approach based on the Tamm-Dancoff approximation, *Phys. Rev.D*, vol.102, p.034002, 2020.



---

# Apêndice A

## Apêndice

---

### A.1 Componentes do $H_{\text{eff}}$

A expansão dos operadores  $\Psi$  na nova base de quasi-partículas é dada por

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{c=1}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}'_\lambda(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\epsilon}_c.$$

Introduzindo os espinores

$$\mathcal{U}_{0\lambda} = \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{V}'_{0\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\sigma_2 \chi_\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

podemos escrever os espinores de Dirac como

$$\mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+s_k)}} (1 + s_k \beta + c_k \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{U}_{0\lambda} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{V}'_\lambda(-\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+s_k)}} (1 - s_k \beta - c_k \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{V}'_{0\lambda} \quad (\text{A.3})$$

Além disso, também podemos definir os projetores

$$\Lambda_k^+ = \sum_\lambda \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_k & c_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ c_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} & 1-s_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + s_k \beta + c_k \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.4})$$

$$\Lambda_k^- = \sum_\lambda \mathcal{V}'_\lambda(-\mathbf{k}) \mathcal{V}'_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-s_k & -c_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ -c_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} & 1+s_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 - s_k \beta - c_k \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.5})$$

O Hamiltoniano efetivo é dado por  $H_{\text{eff}} = H_q + V_T + V_C$ , com

$$H_q = \int d\mathbf{x} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m_q \beta] \Psi(\mathbf{x})$$

$$V_T = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} J_i^a(\mathbf{x}) \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_j^a(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \alpha_i T^a \Psi(\mathbf{x}) \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \alpha_j T^a \Psi(\mathbf{y})$$

$$V_C = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \rho^a(\mathbf{x}) \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rho^a(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) T^a \Psi(\mathbf{x}) \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) T^a \Psi(\mathbf{y})$$

Após aplicar ordenamento normal, podemos reescrever o Hamiltoniano efetivo como

$$H_{\text{eff}} = H_0 + : H_2 : + : H_4 :$$

onde  $H_{2,4}$  contém os termos com dois(quatro) operadores, e  $H_0$  contém os termos sem operadores. Usando uma notação simplificada, temos

$$H_{\text{eff}} = T \left( \Psi^\dagger K \Psi - \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi \right) \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\begin{aligned} K &= -i\alpha \cdot \nabla + m_q \beta \\ \Gamma &= T^a \\ \Gamma_i &= \alpha_i T^a \end{aligned}$$

A contração de Wick dos campos são dadas por

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_\alpha(\mathbf{x}) \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})} &= \left\{ \sum_{\lambda c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{U}_{\lambda\alpha}(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\epsilon}_c, \sum_{\lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{U}_{\lambda'\beta}^\dagger(\mathbf{q}) B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \hat{\epsilon}_{c'}^\dagger \right\} \\ &= \sum_{\lambda c \lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{U}_{\lambda\alpha}(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda'\beta}^\dagger(\mathbf{q}) \left\{ B_{\lambda c}(\mathbf{k}), B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q}) \right\} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c \hat{\epsilon}_{c'}^\dagger \\ &= \sum_{\lambda c \lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{U}_{\lambda\alpha}(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda'\beta}^\dagger(\mathbf{q}) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{cc'} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c \hat{\epsilon}_{c'}^\dagger \\ &= \sum_{\lambda c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{U}_{\lambda\alpha}(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda\beta}^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c \hat{\epsilon}_c^\dagger = \sum_c \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Lambda_{k\alpha\beta}^+ e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c \hat{\epsilon}_c^\dagger \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Psi_\beta(\mathbf{y})} &= \left\{ \sum_{\lambda c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\epsilon}_c^\dagger, \sum_{\lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda'\beta}(-\mathbf{q}) D_{\lambda' c'}^\dagger(-\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \hat{\epsilon}_{c'} \right\} \\ &= \sum_{\lambda c \lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda'\beta}(-\mathbf{q}) \left\{ D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), D_{\lambda' c'}^\dagger(-\mathbf{q}) \right\} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c^\dagger \hat{\epsilon}_{c'} \\ &= \sum_{\lambda c \lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda'\beta}(-\mathbf{q}) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{cc'} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c^\dagger \hat{\epsilon}_{c'} \\ &= \sum_{\lambda c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda\beta}(-\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c^\dagger \hat{\epsilon}_c \\ &= \sum_{\lambda c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda\beta}(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^\dagger(-\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c^\dagger \hat{\epsilon}_c \\ &= \sum_c \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Lambda_{k\beta\alpha}^- e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \hat{\epsilon}_c^\dagger \hat{\epsilon}_c \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\overline{\Psi_\alpha(\mathbf{x}) \Psi_\beta(\mathbf{y})} = 0 \quad (\text{A.9})$$



$$\overline{\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x})\Psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{y})} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Desta forma, temos

$$H_0 = \overline{\Psi^{\dagger}K\Psi} - \frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi V\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi} + \frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma_i\Psi U_{ij}\Psi^{\dagger}\Gamma_j\Psi} \quad (\text{A.11})$$

$$H_2 = \overline{\Psi^{\dagger}K\Psi} - \frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi V\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi} - \frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi V\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi} + \frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma_i\Psi U_{ij}\Psi^{\dagger}\Gamma_j\Psi} + \frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma_i\Psi U_{ij}\Psi^{\dagger}\Gamma_j\Psi} \quad (\text{A.12})$$

$$H_4 = -\frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi V\Psi^{\dagger}\Gamma\Psi} + \frac{1}{2}\overline{\Psi^{\dagger}\Gamma_i\Psi U_{ij}\Psi^{\dagger}\Gamma_j\Psi} \quad (\text{A.13})$$

Calculemos  $H_0$ . O primeiro termo vale

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x})K\Psi_{\beta}(\mathbf{x})} &= \\ \int d\mathbf{x} \left\{ \sum_{\lambda c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^{\dagger}(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\epsilon}_c^{\dagger}, \sum_{\lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (\alpha \cdot \mathbf{q} + m_q \beta)_{\alpha\beta} \mathcal{V}_{\lambda'\beta}(-\mathbf{q}) D_{\lambda'c'}^{\dagger}(-\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \hat{\epsilon}_{c'} \right\} \\ &= 3 \int d\mathbf{x} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\Lambda_k^{-} (\alpha \cdot \mathbf{k} + m_q \beta)] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

enquanto que o termo com  $\Gamma_1$  vale

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x})\Gamma_1\overline{\Psi_{\beta}(\mathbf{x})V\Psi_{\gamma}^{\dagger}(\mathbf{y})\Gamma_1\Psi_{\delta}(\mathbf{y})}} &= \sum_{\lambda\lambda'c'c''\rho\rho'l'l'} \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^{\dagger}(-\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda'\beta}(\mathbf{q}) \times \\ &\times \mathcal{U}_{\rho\gamma}^{\dagger}(\mathbf{k}') \mathcal{V}_{\rho'\delta}(-\mathbf{q}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{y}} \left\{ D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), D_{\rho'l'}^{\dagger}(-\mathbf{q}') \right\} \times \\ &\times \left\{ B_{\lambda'c'}(\mathbf{q}), B_{\rho'l}^{\dagger}(\mathbf{k}') \right\} \hat{\epsilon}_c^{\dagger} T^a \hat{\epsilon}_{c'} \hat{\epsilon}_l^{\dagger} T^a \hat{\epsilon}_{\rho'} \hat{V}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \\ &= 4 \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\Lambda_k^{-} \Lambda_q^{+}) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \hat{V}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \end{aligned}$$

Façamos uma mudança de variáveis  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ , com

$$\begin{cases} \mathbf{X} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y} \\ \mathbf{Y} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{X} + \mathbf{Y} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Y} - \frac{1}{2}\mathbf{X} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

tal que o elemento de integração se transforme segundo  $d\mathbf{x}d\mathbf{y} = Jd\mathbf{X}d\mathbf{Y}$ , com o Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{Y}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{Y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{A.16})$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x})\Gamma_1\overline{\Psi_{\beta}(\mathbf{x})V\Psi_{\gamma}^{\dagger}(\mathbf{y})\Gamma_1\Psi_{\delta}(\mathbf{y})}} &= 4 \int d\mathbf{X}d\mathbf{Y} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\Lambda_k^{-} \Lambda_q^{+}) e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{X}} \hat{V}(|\mathbf{X}|) \\ &= 4 \int d\mathbf{Y} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\Lambda_k^{-} \Lambda_q^{+}) V(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde usamos a transformada de Fourier do potencial  $V$ :  $V(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) = \int d\mathbf{X} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{X}} \hat{V}(|\mathbf{X}|)$ . Agora, usando

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right) \hat{U}_{ij}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} U(|\mathbf{p}|) \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

teremos, para o último termo,

$$\begin{aligned} \overbrace{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Gamma_i \Psi_\beta(\mathbf{x}) U_{ij} \Psi_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) \Gamma_j \Psi_\delta(\mathbf{y})} &= 4 \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} U(|\mathbf{p}|) \times \\ \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) \text{Tr}(\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j) e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{k}+\mathbf{p})} e^{i\mathbf{y}\cdot(-\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})} & \\ = 4 \int d\mathbf{x} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} U(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) \times & \\ \left( \delta_{ij} - \frac{(k_i - q_i)(k_j - q_j)}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} \right) \text{Tr}(\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j) & \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Logo,  $H_0$  é dado por

$$\begin{aligned} H_0 = \int \frac{d\mathbf{x} d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ 3 \text{Tr}[\Lambda_k^- (\alpha \cdot \mathbf{k} + m_q \beta)] - 2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[ \text{Tr}(\Lambda_k^- \Lambda_q^+) V(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) + \right. \right. & \\ \left. \left. - U(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) \left( \delta_{ij} - \frac{(k_i - q_i)(k_j - q_j)}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} \right) \text{Tr}(\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j) \right] \right\} & \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

e é um termo infinito. Este termo representa a energia constante do vácuo, e não é um observável físico. Vamos calcular  $H_2$ . O termo sem contrações vale

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger K \Psi &= \sum_{\lambda \lambda' c'} \int d\mathbf{x} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right] (\alpha \cdot \mathbf{q} + m_q \beta) \times \\ &\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{q}) B_{\lambda' c}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{q}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{q}) \right] e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}_c^\dagger \hat{\mathbf{e}}_{c'} \\ &= \sum_{\lambda \lambda' c'} \int d\mathbf{x} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right] (\alpha \cdot \mathbf{q} + m_q \beta) \times \\ &\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{q}) B_{\lambda' c}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{q}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{q}) \right] e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \delta_{cc'} \\ &= \sum_{\lambda \lambda' c'} \int d\mathbf{x} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right] (\alpha \cdot \mathbf{q} + m_q \beta) \times \\ &\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{q}) B_{\lambda' c}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{q}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{q}) \right] e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \\ &= \sum_{\lambda \lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} d\mathbf{q} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right] (\alpha \cdot \mathbf{q} + m_q \beta) \times \\ &\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{q}) B_{\lambda' c}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{q}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{q}) \right] \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \\ &= \sum_{\lambda \lambda' c'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right] (\alpha \cdot \mathbf{k} + m_q \beta) \times \\ &\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Os termos contendo  $\Gamma$  valem

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} + \overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} &= \sum_{\lambda \lambda' c c'} \sum_{\rho \rho' l l'} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left\{ \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^\dagger(-\mathbf{k}) \times \right. \\
&\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{q}) B_{\lambda'c'}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{q}) D_{\lambda'c'}^\dagger(-\mathbf{q}) \right]_\beta \left[ \mathcal{U}_\rho^\dagger(\mathbf{k}') B_{\rho l}^\dagger(\mathbf{k}') + \mathcal{V}_\rho^\dagger(-\mathbf{k}') D_{\rho l}(-\mathbf{k}') \right]_\gamma \mathcal{V}_{\rho'\delta}(-\mathbf{q}') \times \\
&\times \{ D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), D_{\rho' l'}^\dagger(-\mathbf{q}') \} + \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right]_\alpha \mathcal{U}_{\lambda'\beta}(\mathbf{q}) \mathcal{U}_{\rho'\gamma}^\dagger(\mathbf{k}') \times \\
&\times \left[ \mathcal{U}_{\rho'}(\mathbf{q}') B_{\rho' l'}(\mathbf{q}') + \mathcal{V}_{\rho'}(-\mathbf{q}') D_{\rho' l'}^\dagger(-\mathbf{q}') \right]_\delta \{ B_{\lambda'c'}(\mathbf{q}), B_{\rho l}^\dagger(\mathbf{k}') \} \left. \right\} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} e^{i(\mathbf{q}'-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} \hat{\epsilon}_c^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c'} \hat{\epsilon}_l^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{l'} \\
&= \frac{4}{3} \sum_{\lambda \lambda' c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right]_\alpha \times \\
&\times (s_q \boldsymbol{\beta} + c_q \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{q}})_{\beta\gamma} \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda'c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda'c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right]_\delta V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

onde  $\Lambda_q^+ - \Lambda_q^- = s_q \boldsymbol{\beta} + c_q \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ , e  $\sum_l T^a \hat{\epsilon}_l \hat{\epsilon}_l^\dagger T^a = 4/3$ . Por fim, os dois termos contendo  $\Gamma_i$  valem

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi} + \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi} &= \sum_{\lambda \lambda' c c'} \sum_{\rho \rho' l l'} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left\{ \mathcal{V}_{\lambda\alpha}^\dagger(-\mathbf{k}) \times \right. \\
&\times (\alpha_i)_{\alpha\beta} \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{q}) B_{\lambda'c'}(\mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{q}) D_{\lambda'c'}^\dagger(-\mathbf{q}) \right]_\beta \left[ \mathcal{U}_\rho^\dagger(\mathbf{k}') B_{\rho l}^\dagger(\mathbf{k}') + \mathcal{V}_\rho^\dagger(-\mathbf{k}') D_{\rho l}(-\mathbf{k}') \right]_\gamma (\alpha_j)_{\gamma\delta} \mathcal{V}_{\rho'\delta}(-\mathbf{q}') \times \\
&\times \{ D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), D_{\rho' l'}^\dagger(-\mathbf{q}') \} + \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right]_\alpha (\alpha_i)_{\alpha\beta} \mathcal{U}_{\lambda'\beta}(\mathbf{q}) \mathcal{U}_{\rho'\gamma}^\dagger(\mathbf{k}') \times \\
&\times (\alpha_j)_{\gamma\delta} \left[ \mathcal{U}_{\rho'}(\mathbf{q}') B_{\rho' l'}(\mathbf{q}') + \mathcal{V}_{\rho'}(-\mathbf{q}') D_{\rho' l'}^\dagger(-\mathbf{q}') \right]_\delta \{ B_{\lambda'c'}(\mathbf{q}), B_{\rho l}^\dagger(\mathbf{k}') \} \left. \right\} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} e^{i(\mathbf{q}'-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} \hat{\epsilon}_c^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c'} \hat{\epsilon}_l^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{l'} \\
&= \frac{4}{3} \sum_{\lambda \lambda' c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right]_\alpha (\alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i)_{\alpha\delta} \right. \\
&\left. \right\}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Logo, combinando todos os termos, encontramos

$$\begin{aligned}
H_2 &= \Psi^\dagger K \Psi - \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} - \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} + \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi} + \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi} \\
&= \sum_{\lambda \lambda' c} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right] H_k \left[ \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda'c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda'c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right]
\end{aligned}$$

onde  $H_k$  vale

$$H_k = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m_q \boldsymbol{\beta} + \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[ (\alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i) U_{ij}(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) - (s_q \boldsymbol{\beta} + c_q \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{q}}) V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \right] \tag{A.24}$$

Vamos calcular o termo contendo o potencial transversal  $U$ ,

$$H_{kT} = \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (\alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i) U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \left( \delta_{ij} - \frac{(q_i - k_i)(q_j - k_j)}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} \right) \tag{A.25}$$

Temos, para o primeiro termo,

$$\begin{aligned} (\alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i) \delta_{ij} &= \alpha_i (\Lambda_q^+ - \Lambda_q^-) \alpha_i = \alpha_i (s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) \alpha_i = -s_q \beta \alpha_i \alpha_i + c_q \alpha_i \alpha_j \alpha_i \hat{q}_j \\ &= -s_q \beta \delta_{ii} - c_q \alpha_j \hat{q}_j = -3s_q \beta - c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Já o segundo termo pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j &= \alpha_i \frac{1}{2} (1 + s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) \alpha_j = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + s_q \alpha_i \beta \alpha_j + c_q \alpha_i \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} \alpha_j) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j - s_q \alpha_i \alpha_j \beta + c_q \alpha_i (-\alpha_j \alpha_m + 2\delta_{mj}) \hat{q}_m) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j - s_q \alpha_i \alpha_j \beta - c_q \alpha_i \alpha_j \alpha_m \hat{q}_m + 2c_q \alpha_i \hat{q}_j) \\ &= \alpha_i \alpha_j \frac{1}{2} (1 - s_q \beta - c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) + c_q \alpha_i \hat{q}_j = \alpha_i \alpha_j \Lambda_q^- + c_q \alpha_i \hat{q}_j \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i &= \alpha_j \frac{1}{2} (1 - s_q \beta - c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) \alpha_i = \frac{1}{2} (\alpha_j \alpha_i - s_q \alpha_j \beta \alpha_i - c_q \alpha_j \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} \alpha_i) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_j \alpha_i + s_q \alpha_j \alpha_i \beta + c_q \alpha_j \alpha_i \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} - 2c_q \alpha_j \hat{q}_i) \\ &= \alpha_j \alpha_i \frac{1}{2} (1 + s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) - c_q \alpha_j \hat{q}_i = \alpha_j \alpha_i \Lambda_q^+ - c_q \alpha_j \hat{q}_i \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\therefore \alpha_i \Lambda_q^- \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^+ \alpha_i = \alpha_i \alpha_j \Lambda_q^- - \alpha_j \alpha_i \Lambda_q^+ + c_q (\alpha_i \hat{q}_j + \alpha_j \hat{q}_i) \quad (\text{A.29})$$

Em termos das matrizes  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_i \Lambda_q^- \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^+ \alpha_i &= \alpha_i \alpha_j \frac{1}{2} (1 - s_q \beta - c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) - \alpha_j \alpha_i \frac{1}{2} (1 + s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) + c_q (\alpha_i \hat{q}_j + \alpha_j \hat{q}_i) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j - s_q \alpha_i \alpha_j \beta - c_q \alpha_i \alpha_j \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} - \alpha_j \alpha_i - s_q \alpha_j \alpha_i \beta - c_q \alpha_j \alpha_i \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) + c_q (\alpha_i \hat{q}_j + \alpha_j \hat{q}_i) \\ &= \frac{1}{2} ([\alpha_i, \alpha_j] - s_q \{\alpha_i, \alpha_j\} \beta - c_q \{\alpha_i, \alpha_j\} \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) + c_q (\alpha_i \hat{q}_j + \alpha_j \hat{q}_i) \\ &= i\epsilon_{ijl} \alpha_l - \delta_{ij} s_q \beta - \delta_{ij} c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} + c_q (\alpha_i \hat{q}_j + \alpha_j \hat{q}_i) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

O termo  $H_{kT}$  pode então ser reescrito como

$$\begin{aligned} H_{kT} &= \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \left[ -3s_q \beta - c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} - i\epsilon_{ijl} \alpha_l \frac{(q_i - k_i)(q_j - k_j)}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} + s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}} + \right. \\ &\quad \left. - c_q (\alpha_i \hat{q}_j + \alpha_j \hat{q}_i) \frac{(q_i - k_i)(q_j - k_j)}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} \right] \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [2s_q \beta U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}} W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde

$$\begin{aligned} (\hat{q}_i \hat{k}_j + \hat{q}_j \hat{k}_i) \frac{(k_i - q_i)(k_j - q_j)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} &= 2 \frac{(k^2 + q^2)x - kq(x^2 + 1)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \\ W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) &= \frac{(k^2 + q^2)x - kq(x^2 + 1)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \end{aligned}$$

Assim,  $H_k$  pode ser escrito como  $H_k = A_k \beta + B_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}$ , com

$$A_k = m_q - \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} s_q [V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)] \quad (\text{A.32})$$

$$B_k = k - \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} c_q [xV(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)] \quad (\text{A.33})$$

Apliquemos o ordenamento normal a  $H_2$ . Temos

$$\begin{aligned} :H_2: &= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} : \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] : \\ &= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) - \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}(-\mathbf{k}) \right] \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k})$  vale

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) &= \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) (A_k \beta + B_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) \\ &= A_k \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \beta \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) + B_k \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) \hat{k}_i \\ &= (A_k s_k + B_k c_k) \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

com  $\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \beta \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} s_k$ ,  $\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} c_k \hat{k}_i$  e  $\hat{k}_i \hat{k}_i = 1$ . O último termo vale

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) &= \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}) (A_k \beta + B_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) \\ &= -(A_k s_k + B_k c_k) \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

e os demais

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) &= A_k \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \beta \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + B_k \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) \hat{k}_i \\ &= -A_k c_k M_{\lambda\lambda'} + B_k s_k M_{\lambda\lambda'} \hat{k}_i \hat{k}_i = (-A_k c_k + B_k s_k) M_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = -c_k A_k M_{\lambda\lambda'}^\dagger + s_k B_k M_{\lambda\lambda'}^\dagger \hat{k}_i \hat{k}_i = (-A_k c_k + B_k s_k) M_{\lambda\lambda'}^\dagger \quad (\text{A.38})$$

onde  $\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k})\beta\mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = -c_k M_{\lambda\lambda'}$ , e  $\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k})\alpha_i\mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = s_k M_{\lambda\lambda'}\hat{k}_i$ . Logo,

$$\begin{aligned} :H_2: &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \epsilon_k \left( B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right) + \\ &+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda\lambda' c} (-A_k c_k + B_k s_k) \left( M_{\lambda\lambda'} B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) + M_{\lambda\lambda'}^\dagger D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) \right) \end{aligned}$$

que levam à lei de dispersão  $\epsilon_k = A_k s_k + B_k c_k$ . Portanto,  $\epsilon_k$  é a auto-energia de um quark ou antiquark,

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= m_q s_k + k c_k - \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [s_q s_k V(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) + 2s_q s_k U(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) + c_q c_k x V(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) + 2c_q c_k W(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|)] \\ &= m_q s_k + k c_k - \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{6\pi^2} [s_q s_k (V_0 + 2U_0) + c_q c_k (V_1 + 2W_0)] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

e o segundo termo em  $:H_2:$  é o termo de Bogoliubov anômalo. Como este termo desestabiliza o vácuo, impomos a condição  $-A_k c_k + B_k s_k = 0$ , que leva a

$$\begin{aligned} 0 &= -A_k c_k + B_k s_k \\ &= -m_q c_k + k s_k + \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [s_q c_k V(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) + 2s_q c_k U(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) - c_q s_k x V(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) - 2c_q s_k W(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|)] \end{aligned}$$

resultando na equação de gap,

$$k s_k - m_q c_k = \int \frac{d\mathbf{q}}{12\pi^3} [(c_q s_k x - s_q c_k) V(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) - 2s_q c_k U(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) + 2c_q s_k W(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|)] \quad (\text{A.40})$$

Portanto,  $:H_2:$  se torna

$$:H_2: = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \epsilon_k \left( B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right) \quad (\text{A.41})$$

Nos resta ainda calcular o último termo do Hamiltoniano,  $H_4$ . Temos

$$\begin{aligned} H_4 &= -\frac{1}{2} \Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi \\ &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) T^a \Psi(\mathbf{x}) \hat{V}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) T^a \Psi(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \alpha_i T^a \Psi(\mathbf{x}) \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \alpha_j T^a \Psi(\mathbf{y}) \\ &= H_{4C} + H_{4T} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

com

$$\begin{aligned} H_{4C} &= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_4}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \times \\ &\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] \hat{V}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \times \\ &\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_4) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_4) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_4) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_4) \right] e^{i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{x}} \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} e^{i(\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_3)\cdot\mathbf{y}} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned}
H_{4T} = & \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_4}{(2\pi)^3} \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \alpha_i \times \\
& \times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \times \\
& \times \alpha_j \left[ \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_4) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_4) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_4) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_4) \right] e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \quad (\text{A.44})
\end{aligned}$$

A dependência em  $x, y$  leva a

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} &= \int d\mathbf{X} d\mathbf{Y} \hat{V}(|\mathbf{X}|) e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot (\frac{\mathbf{X}}{2} + \mathbf{Y})} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot (-\frac{\mathbf{X}}{2} + \mathbf{Y})} \\
&= \int d\mathbf{X} d\mathbf{Y} \hat{V}(|\mathbf{X}|) e^{i\frac{\mathbf{X}}{2} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_3)} e^{i\mathbf{Y} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3)} \\
&= \int d\mathbf{X} \hat{V}(|\mathbf{X}|) e^{i\frac{\mathbf{X}}{2} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_3)} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \\
&= \int d\mathbf{X} \hat{V}(|\mathbf{X}|) e^{i\mathbf{X} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \\
&= V(|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} &= \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} U(|\mathbf{p}|) \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} \\
&= \int d\mathbf{x} d\mathbf{p} U(|\mathbf{p}|) \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{p}) \\
&= \int d\mathbf{x} U(|\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3|) \left( \delta_{ij} - \frac{(k_{4i} - k_{3i})(k_{4j} - k_{3j})}{(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3)^2} \right) e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{x}} \\
&= (2\pi)^3 U(|\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3|) \left( \delta_{ij} - \frac{(k_{4i} - k_{3i})(k_{4j} - k_{3j})}{(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3)^2} \right) \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
H_{4C} = & -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4}{(2\pi)^9} \delta^3(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \times \\
& \times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] V(|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|) \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \times \\
& \times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_4) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_4) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_4) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_4) \right] \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \\
= & -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \times \\
& \times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] V(|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|) \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \times \\
& \times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2) \right] \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \quad (\text{A.47})
\end{aligned}$$

Façamos uma mudança de variáveis. Definindo  $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{q}$  e fazendo  $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{p}$  e  $\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}$ , temos

$$\begin{aligned}
H_{4C} &= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) \right] \times \\
&\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) \right] \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) \right] \times \\
&\times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right] \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2}^\dagger \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \right. \\
&+ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \\
&+ \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) \left. \right] \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \right. \\
&+ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \\
&+ \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) \left. \right] \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2}^\dagger \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \quad (\text{A.48})
\end{aligned}$$

Após ordenamento normal, obtemos

$$\begin{aligned}
:H_{4C} : &= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) : \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \right. \\
&+ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \\
&- \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) \left. \right] \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \right. \\
&+ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \\
&- \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) \left. \right] : \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2}^\dagger \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) : \left[ \Theta_{c_1 c_2}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \Theta_{c_1 c_2}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \Theta_{c_1 c_2}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \right. \\
&+ \Theta_{c_1 c_2}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \left. \right] \left[ \Theta_{c_3 c_4}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Theta_{c_3 c_4}^3(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Theta_{c_3 c_4}^4(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Theta_{c_3 c_4}^2(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \right] : \times \\
&\times \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2}^\dagger \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

onde definimos os vértices

$$\Theta_{c'c}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}) \quad (\text{A.50})$$

$$\Theta_{c'c}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}') \quad (\text{A.51})$$

$$\Theta_{c'c}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) \quad (\text{A.52})$$

$$\Theta_{c'c}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}) \quad (\text{A.53})$$

Reescrevendo de forma compacta,

$$:H_{4C} : = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2}^\dagger \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \sum_{i,j=1}^4 : \Theta_{c_1 c_2}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Theta_{c_3 c_4}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \quad (\text{A.54})$$



Similarmente, temos, para  $H_{4T}$ ,

$$\begin{aligned}
H_{4T} = & \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \right. \\
& + \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \\
& + \left. \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) \right] \times \\
& \times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \right. \\
& + \left. \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right] \times \\
& \times \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} U(|\mathbf{q}|) \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right)
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Após ordenamento normal, encontramos

$$\begin{aligned}
:H_{4T} : = & \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} : \left[ \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \right. \\
& + \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \\
& - \left. \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) \right] \times \\
& \times \left[ \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \right. \\
& + \left. \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) \right] : \times \\
& \times \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} U(|\mathbf{q}|) \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right)
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Definindo os vértices

$$\Xi_{c'ci}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}) \tag{A.57}$$

$$\Xi_{c'ci}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}') \tag{A.58}$$

$$\Xi_{c'ci}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) \tag{A.59}$$

$$\Xi_{c'ci}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}) \tag{A.60}$$

podemos reescrever  $H_{4T}$  compactamente como

$$\begin{aligned}
:H_{4T} : = & \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} U(|\mathbf{q}|) \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right) \sum_{lm=1}^4 : \Xi_{c_1 c_2 i}^l(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^m(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \times \\
& \times \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}
\end{aligned} \tag{A.61}$$

## A.2 Análise dos comutadores da equação TDA

O operador de criação de mésons é definido por

$$\begin{aligned} Q_{nJP}^\dagger(\text{TDA}) &\equiv \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Psi_{\gamma\delta}^{nJP}(\mathbf{k}) B_\gamma^\dagger(\mathbf{k}) D_\delta^\dagger(-\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Psi_{\gamma\delta}^{nJP}(\mathbf{k}) \zeta_{\gamma\delta}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

com  $\zeta_{\gamma\delta}^\dagger \equiv B_\gamma^\dagger(\mathbf{k}) D_\delta^\dagger(-\mathbf{k})$ , de forma que um méson com momento angular total  $J$ , paridade  $P$  e número quântico radial  $n$  é representado por

$$|\Psi_{\text{TDA}}^{nJP}\rangle = Q_{nJP}^\dagger(\text{TDA}) |\Psi_{\text{BCS}}\rangle \quad (\text{A.63})$$

contendo um buraco e uma quasipartícula excitados do vácuo BCS. A equação TDA é dada por

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle = (E_{nJP} - E_0) \Psi_{\alpha\beta}^{nJP} \quad (\text{A.64})$$

O comutador de  $H_0$  com  $B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger$  vale zero, uma vez que  $H_0$  é constante. Já o comutador de  $H_2$  vale

$$\begin{aligned} [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k \left( [B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}), B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r})] + [D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r})] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

onde

$$\begin{aligned} [B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}), B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r})] &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k}) \delta_{\alpha\lambda} \delta_{ac} B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) - 2B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) \\ [D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r})] &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k}) \delta_{\beta\lambda} \delta_{ac} D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) - 2D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] &= \int d\mathbf{k} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k \left( \delta_{\alpha\lambda} \delta_{ac} B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) + \delta_{\beta\lambda} \delta_{ac} D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k}) + \\ &\quad - 2 \int d\mathbf{k} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k \left( B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right) \\ &= \varepsilon_r \left( B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) + D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) \right) + \\ &\quad - 2 \int d\mathbf{k} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k \left( B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right) \\ &= 2\varepsilon_r B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) + \\ &\quad - 2 \int d\mathbf{k} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k \left( B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Tomando o valor esperado do comutador, encontramos

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= 2\varepsilon_r \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= 2\varepsilon_r \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d\mathbf{w}}{(2\pi)^3} \Psi_{\gamma\delta}^{nJP\dagger}(\mathbf{w}) \langle \Psi_{\text{BCS}} | B_{\gamma g}(\mathbf{w}) D_{\delta g}(-\mathbf{w}) B_{\alpha a}^\dagger(\mathbf{r}) D_{\beta a}^\dagger(-\mathbf{r}) | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= 2\varepsilon_r \Psi_{\alpha\beta}^{nJP\dagger}(\mathbf{r}) \sum_g (2\pi)^3 \delta^3(0) \delta_{ga} \delta_{ga} \\
&= 2\varepsilon_r \Psi_{\alpha\beta}^{nJP\dagger}(\mathbf{r}) (2\pi)^3 \delta^3(0) \delta_{aa} \\
&= 2\varepsilon_r \Psi_{\alpha\beta}^{nJP\dagger}(\mathbf{r}) (2\pi)^3 \delta^3(0) \\
&= 2\varepsilon_r \Psi_{\alpha\beta}^{nJP\dagger}(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{A.67}$$

Por fim, calculemos o comutador com  $H_4$ . Para  $H_{4C}$ , temos

$$: H_{4C} := -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) \hat{\varepsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\varepsilon}_{c_2} \hat{\varepsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\varepsilon}_{c_4} \sum_{i,j=1}^4 : \Theta_{c_1 c_2}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Theta_{c_3 c_4}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) :$$

Tomando  $\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{4C}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle$ , os termos que sobreviverão em  $\sum_{i,j=1}^4 : \Theta_{c_1 c_2}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Theta_{c_3 c_4}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) :$  serão

$$\begin{aligned}
&: \Theta_{c_1 c_2}^1 \Theta_{c_3 c_4}^2 + \Theta_{c_1 c_2}^3 \Theta_{c_3 c_4}^4 + \Theta_{c_1 c_2}^2 \Theta_{c_3 c_4}^1 + \Theta_{c_1 c_2}^4 \Theta_{c_3 c_4}^3 := \\
= & -\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) + \\
& + \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \\
& + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \\
& - \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) :
\end{aligned}$$

Teremos, portanto, os seguintes comutadores,

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger B_2 D_4^\dagger D_3, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | (B_1^\dagger D_4^\dagger B_2 D_3 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger - B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger B_1^\dagger D_4^\dagger B_2 D_3) | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | B_1^\dagger D_4^\dagger B_2 D_3 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \langle \Psi_{\text{BCS}} | B_\gamma D_\delta B_1^\dagger D_4^\dagger B_2 D_3 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \{D_3, D_\beta^\dagger\} \{B_\gamma, B_1^\dagger\} \{D_\delta, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\}
\end{aligned} \tag{A.68}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | (B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger - B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4) | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \langle \Psi_{\text{BCS}} | B_\gamma D_\delta B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\gamma, B_1^\dagger\} \{D_\delta, D_2^\dagger\} \{D_3, D_\beta^\dagger\}
\end{aligned} \tag{A.69}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [B_3^\dagger D_4^\dagger D_1 B_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | (B_3^\dagger D_4^\dagger B_2 D_1 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger - B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger B_3^\dagger D_4^\dagger B_2 D_1) | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | B_3^\dagger D_4^\dagger B_2 D_1 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \langle \Psi_{\text{BCS}} | B_\gamma D_\delta B_3^\dagger D_4^\dagger B_2 D_1 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \{D_1, D_\beta^\dagger\} \{B_\gamma, B_3^\dagger\} \{D_\delta, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\} \quad (\text{A.70})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | (D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger - B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4) | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&= \langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \langle \Psi_{\text{BCS}} | B_\gamma D_\delta D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4 B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger | \Psi_{\text{BCS}} \rangle \\
&\sim \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\gamma, B_3^\dagger\} \{D_\delta, D_2^\dagger\} \{D_1, D_\beta^\dagger\} \quad (\text{A.71})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4C}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle = \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int d\mathbf{w} \Psi_{\gamma\delta}^{mJP\dagger}(\mathbf{w}) V(|\mathbf{r}-\mathbf{w}|) \mathcal{U}_\gamma^\dagger(\mathbf{w}) \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{r}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{r}) \mathcal{V}_\delta(-\mathbf{w}) \delta^3(0)$$

Calculando o produto dos espinores, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{r}) \mathcal{V}_\delta(-\mathbf{w}) \mathcal{U}_\gamma^\dagger(\mathbf{w}) \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-s_r} \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} & \sqrt{1+s_r} \chi_\beta^\dagger \\ \sqrt{1+s_w} \chi_\gamma^\dagger & \sqrt{1-s_w} \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-s_w} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \\ \sqrt{1+s_w} \chi_\delta \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \sqrt{1+s_w} \chi_\gamma^\dagger & \sqrt{1-s_w} \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \\ \sqrt{1-s_r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha & \sqrt{1+s_r} \chi_\alpha \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \left( \sqrt{1-s_r} \sqrt{1-s_w} \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \sqrt{1+s_r} \sqrt{1+s_w} \chi_\beta^\dagger \chi_\delta \right) \times \\
&\times \left( \sqrt{1+s_w} \sqrt{1+s_r} \chi_\gamma^\dagger \chi_\alpha + \sqrt{1-s_w} \sqrt{1-s_r} \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \sqrt{1-s_r} \sqrt{1-s_w} g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{w}}) + \sqrt{1+s_r} \sqrt{1+s_w} \delta_{\beta\delta} \right) \times \\
&\times \left( \sqrt{1+s_w} \sqrt{1+s_r} \delta_{\gamma\alpha} + \sqrt{1-s_w} \sqrt{1-s_r} g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}) \right) \\
&= \frac{1}{4} [c_r c_w (\delta_{\gamma\alpha} g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{w}}) + \delta_{\beta\delta} g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}})) + (1+s_r)(1+s_w) \delta_{\beta\delta} \delta_{\gamma\alpha} + \\
&+ (1-s_r)(1-s_w) g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{w}}) g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}})] \equiv h_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(w, r)
\end{aligned}$$

onde definimos  $g_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}) \equiv \chi_\alpha^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\beta$ , e estamos usando a definição usual dos espinores, sem o termo  $i\sigma_2$ . Assim,  $\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4C}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle$  fica

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4C}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle &= \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int d\mathbf{w} \delta^3(0) \Psi_{\gamma\delta}^{mJP\dagger}(\mathbf{w}) V(|\mathbf{w}-\mathbf{r}|) h_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(w, r) \\
&= \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int d\mathbf{w} \Psi_{\gamma\delta}^{mJP}(\mathbf{w}) V(|\mathbf{w}-\mathbf{r}|) h_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(w, r) \quad (\text{A.72})
\end{aligned}$$

Calculemos, agora, o comutador com  $H_{4T}$ . Temos

$$\begin{aligned} :H_{4T} := & \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sum_{c_1 c_2 c_3 c_4} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} U(|\mathbf{q}|) \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\mathbf{q}^2} \right) \sum_{lm=1}^4 : \Xi_{c_1 c_2 i}^l(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^m(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \times \\ & \times \hat{\Xi}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\Xi}_{c_2} \hat{\Xi}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\Xi}_{c_4} \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Como no caso anterior, após tomar o valor esperado, os termos em  $\sum_{lm=1}^4 : \Xi_{c_1 c_2 i}^l(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^m(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) :$  que sobrevivem são

$$\begin{aligned} & : \Xi_{c_1 c_2 i}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^2(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Xi_{c_1 c_2 i}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \\ & + \Xi_{c_1 c_2 i}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^4(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Xi_{c_1 c_2 i}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^3(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) := \\ & = -\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) + \\ & + \mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \\ & + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \\ & - \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \end{aligned}$$

Portanto, teremos novamente os comutadores

$$\begin{aligned} A \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger B_2 D_4^\dagger D_3, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle & \sim \{D_3, D_\beta^\dagger\} \{B_\gamma, B_1^\dagger\} \{D_\delta, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\} \\ A \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle & \sim \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\gamma, B_1^\dagger\} \{D_\delta, D_2^\dagger\} \{D_3, D_\beta^\dagger\} \\ A \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_3^\dagger D_4^\dagger B_2 D_1, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle & \sim \{D_1, D_\beta^\dagger\} \{B_\gamma, B_3^\dagger\} \{D_\delta, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\} \\ \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle & \sim \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\gamma, B_3^\dagger\} \{D_\delta, D_2^\dagger\} \{D_1, D_\beta^\dagger\} \end{aligned}$$

que levam a

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{4T}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle = -\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int d\mathbf{w} \Psi_{\gamma\delta}^{nJP\dagger}(\mathbf{w}) U(|\mathbf{r} - \mathbf{w}|) \left( \delta_{ij} - \frac{(r_i - w_i)(r_j - w_j)}{(\mathbf{r} - \mathbf{w})^2} \right) \delta^3(0) \mathcal{U}_\gamma^\dagger \alpha_i \mathcal{U}_\alpha \mathcal{V}_\beta^\dagger \alpha_j \mathcal{V}_\delta$$

Nos resta, portanto, calcular o produto de espinores,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\gamma^\dagger(\mathbf{w}) \alpha_i \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{r}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{r}) \alpha_j \mathcal{V}_\delta(-\mathbf{w}) & = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{1+s_w} \chi_\gamma^\dagger & \sqrt{1-s_w} \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \\ \boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+s_r} \chi_\alpha \\ \sqrt{1-s_r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \sqrt{1-s_r} \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} & -\sqrt{1+s_r} \chi_\beta^\dagger \\ \boldsymbol{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_j \\ \boldsymbol{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-s_w} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \\ \sqrt{1+s_w} \chi_\delta \end{pmatrix} \\ & = -\frac{1}{4} \left( \sqrt{1+s_w} \sqrt{1-s_r} \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha + \sqrt{1-s_w} \sqrt{1+s_r} \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma}_i \chi_\alpha \right) \times \\ & \times \left( \sqrt{1-s_r} \sqrt{1+s_w} \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}_j \chi_\delta + \sqrt{1+s_r} \sqrt{1-s_w} \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right) \\ & = -\frac{1}{4} \left[ (1+s_w)(1-s_r) \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}_j \chi_\delta + \right. \\ & + c_r c_w \left( \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma}_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}_j \chi_\delta \right) + \\ & \left. + (1-s_w)(1+s_r) \chi_\gamma^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma}_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right] \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Multiplicando esta quantidade pelo potencial transverso, obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{U}_\gamma^\dagger(\mathbf{w}) \alpha_i \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{r}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{r}) \alpha_j \mathcal{V}_\delta(-\mathbf{w}) U(|\mathbf{r}-\mathbf{w}|) \left( \delta_{ij} - \frac{(r_i-w_i)(r_j-w_j)}{(\mathbf{r}-\mathbf{w})^2} \right) = \\
& = -\frac{1}{4} \left[ (1+s_w)(1-s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_j \chi_\delta + c_r c_w \left( \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_j \chi_\delta \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1-s_w)(1+s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right] \left( \delta_{ij} - \frac{(r_i-w_i)(r_j-w_j)}{(\mathbf{r}-\mathbf{w})^2} \right) \\
& = -\frac{1}{4} \left[ (1+s_w)(1-s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_i \chi_\delta + c_r c_w \left( \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_i \chi_\delta \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1-s_w)(1+s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right] + \frac{1}{4(\mathbf{r}-\mathbf{w})^2} \left[ (1+s_w)(1-s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_j \chi_\delta + \right. \\
& \quad \left. + c_r c_w \left( \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_j \chi_\delta \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1-s_w)(1+s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right] (r_i-w_i)(r_j-w_j) \\
& = -\frac{1}{4} \left[ (1+s_w)(1-s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_i \chi_\delta + c_r c_w \left( \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_i \chi_\delta \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1-s_w)(1+s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4(\mathbf{r}-\mathbf{w})^2} \left[ (1+s_w)(1-s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma_i (r_i-w_i) \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_j (r_j-w_j) \chi_\delta + \right. \\
& \quad \left. + c_r c_w \left( \chi_\gamma^\dagger \sigma_i (r_i-w_i) \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j (r_j-w_j) \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i (r_i-w_i) \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_j (r_j-w_j) \chi_\delta \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1-s_w)(1+s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i (r_i-w_i) \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j (r_j-w_j) \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right] \\
& = -\frac{1}{4} \left[ (1+s_w)(1-s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_i \chi_\delta + c_r c_w \left( \chi_\gamma^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta + \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{r}} \sigma_i \chi_\delta \right) + \right. \\
& \quad \left. + (1-s_w)(1+s_r) \chi_\gamma^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{w}} \chi_\delta \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4(\mathbf{r}-\mathbf{w})^2} \left\{ (1+s_w)(1-s_r) (g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) r - g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}) w) (g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) r - g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{w}}) w) + \right. \\
& \quad \left. + c_r c_w [(g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) r - g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}) w) (g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{w}}) r - g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) w) + (g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}) r - g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) w) (g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) r - g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{w}}) w)] + \right. \\
& \quad \left. + (1-s_w)(1+s_r) (g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}) r - g_{\gamma\alpha}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) w) (g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{w}}) r - g_{\beta\delta}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) w) \right\} \equiv t_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(w, r) \\
\end{aligned} \tag{A.75}$$

Voltando à expressão para o comutador, temos

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4T}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Psi_{\text{BCS}} \rangle & = -\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int d\mathbf{w} \Psi_{\gamma\delta}^{mJP\dagger}(\mathbf{w}) \delta^3(0) t_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(w, r) U(|\mathbf{r}-\mathbf{w}|) \\
& = -\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int d\mathbf{w} \Psi_{\gamma\delta}^{mJP}(\mathbf{w}) t_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(w, r) U(|\mathbf{r}-\mathbf{w}|) \\
\end{aligned} \tag{A.76}$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle & = \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{mJP}(\mathbf{q}) \left[ h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) V(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) \right. \\
& \quad \left. - t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) U(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) \right] \\
\end{aligned} \tag{A.77}$$

### A.3 Funções de onda da equação TDA de movimento

Aqui apresentamos as funções de onda em termos de  $L, S, J$  (índices de helicidade não são exibidos).

- Pseudoescalar ( $L = 0; S = 0; J = 0$ ),

$$\Psi(0^-) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.78})$$

- Escalar ( $L = 1; S = 1; J = 0$ ),

$$\Psi(0^+) = -\sqrt{\frac{1}{4\pi}} (\sigma \cdot \hat{k}) \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.79})$$

- Vetorial ( $L = 0; S = 1; J = 1$ ),

$$\Psi(1^-) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sigma \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.80})$$

- Axial ( $L = 1; S = 0; J = 1$ ),

$$\Psi(1^+) = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \hat{k} \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.81})$$

- Axial ( $L = 1; S = 1; J = 1$ ),

$$\Psi(1^{+'}) = -i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\sigma \times \hat{k}) \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.82})$$

- Tensorial ( $L = 1; S = 1; J = 2$ ),

$$\Psi(2^+) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sigma \hat{k} \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.83})$$

- Pseudotensorial ( $L = 2; S = 0; J = 2$ ),

$$\Psi(2^-) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \hat{k} \hat{k} \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.84})$$

- Pseudotensorial ( $L = 2; S = 1; J = 2$ ),

$$\Psi^{(L=2;S=1;J=2)}(2^{-'}) = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}} (\sigma \times \hat{k}) \hat{k} \frac{i\sigma^2}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.85})$$

O fator ( $i\sigma^2$ ) é introducido para usar a mesma convenção da referência [100].