



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**A Radiação Cósmica de Fundo e a Interação entre
Energia e Matéria Escuras**

Welber Leal de Araújo Miranda

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**A Radiação Cósmica de Fundo e a Interação entre
Energia e Matéria Escuras**

Welber Leal de Araújo Miranda

Orientador: Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Salvador - 2017

Disse o discípulo: "Após ouvir suas palavras, um ano eu corri loucamente, dois anos e eu estava calmo, três anos e as posições intercambiaram, quatro anos e as coisas se assentaram, cinco anos e as coisas fizeram sentido...". Chuang-tzu

Resumo

Vários modelos são capazes de descrever diferentes propriedades do cosmos. O modelo padrão Λ CDM consegue atingir alto grau de precisão na descrição física e também permitir excelente acordo com variadas observações, entretanto, a natureza física das componentes de energia escura e matéria escura continua sendo pouco compreendida. Nesta pesquisa são investigados modelos de interação entre energia escura e matéria escura, com foco em modelo de decaimento a taxa constante. Nestes modelos a energia escura depende do tempo, decaindo linearmente com a função de Hubble. São obtidos o espectro de anisotropia de temperatura da radiação cósmica de fundo e também e o espectro de potência de matéria. Uma análise comparativa entre o modelo padrão e o modelo de decaimento elucidada o comportamento e a discrepância de cada espectro. O modelo $\Lambda(t)$ CDM, com produção de matéria escura em tempos recentes, implica na necessidade de recorrer a maiores valores de densidade de matéria para descrever adequadamente a dinâmica cósmica nas eras atuais. Ao comparar $\Lambda(t)$ CDM e Λ CDM, é possível obter bom acordo entre as curvas teóricas para a função de Hubble, ao se utilizar no $\Lambda(t)$ CDM, a raiz quadrada do valor de concordância usado no Λ CDM para o parâmetro de densidade de matéria total Ω_m . A física para a época do desacoplamento do modelo $\Lambda(t)$ CDM é virtualmente a mesma que a do modelo Λ CDM, notando-se que a produção de matéria se torna proeminente apenas em redshift da ordem de $z = 10$. Neste trabalho é demonstrada a possibilidade de atingir um bom ajuste de curvas teóricas para a radiação cósmica de fundo. A produção de matéria escura tardia implica em efeito Sachs-Wolf integrado mais fraco que àquele observado no modelo padrão.

Abstract

Various cosmological models are capable of describing different cosmological properties. The concordance model Λ CDM can achieve a high degree of precision in this physical description and achieve an excellent agreement with various cosmological observations. In this description it's necessary to include a dark energy and dark matter, but their physical origin are still a mystery. In this research we investigate cosmological models with interaction between dark energy and dark matter. In those models the dark energy is a function of time, linearly decaying with the Hubble function. We describe observational consequences of $\Lambda(t)$ CDM cosmology in the matter power spectrum and on the temperature anisotropy power spectrum of cosmic microwave background. The model $\Lambda(t)$ CDM has a late decaying of dark energy, producing dark matter. This implicates in the need of high values of matter to adequately describe cosmic dynamics. A good agreement within theoretical curves, of the Hubble function, from the two models Λ CDM and $\Lambda(t)$ CDM can be achieved by using the square root of the concordance model of Λ CDM or the later, when comparing the total matter density Ω_m . The physics at decoupling of $\Lambda(t)$ CDM can be made virtually identical of the Λ CDM, owing a divergence only at late times, when dark matter are produced more strongly from redshift of around $z = 10$. This late time dark matter production also implicates in a weaker Integrated Sachs-Wolf Effect than the one observed within the Λ CDM.

Sumário

Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	iv
1 Introdução	1
1.1 A Descoberta da CMB	2
1.2 O Universo em Expansão	3
1.2.1 Relatividade Geral	3
1.2.2 Lei de Hubble e o redshift cosmológico	4
1.2.3 Supernovas e a expansão acelerada	5
1.3 A Radiação Cósmica de Fundo	7
1.4 Estrutura da Tese	15
2 O Universo Homogêneo e seus Componentes	17
2.1 Inventário Cósmico	17
2.1.1 Bárions	19
2.1.2 Matéria Escura	19
2.1.3 Fótons	20
2.1.4 Energia Escura	22
2.2 Equações de Einstein	23
2.2.1 O Princípio Cosmológico e as Equações de Campo	24
2.2.2 Redshift cosmológico	29
3 Modelos Cosmológicos e a Energia Escura	32
3.1 Modelo padrão (Λ CDM plano)	32
3.1.1 A Idade do Universo	36
3.1.2 Era de Radiação	37
3.1.3 Era de Matéria	38
3.1.4 Era de Energia Escura	40
3.2 Modelos com Interação no Setor Escuro	41
3.2.1 Gás de Chaplygin Generalizado	43
3.3 Ansatz para $\Lambda(t)$ CDM	44
3.3.1 Era de Radiação	48
3.3.2 Era de Matéria e Energia Escura	49
3.3.3 Soluções Numéricas	51
3.3.4 Integração Analítica e Comparações entre $\Lambda(t)$ CDM e Λ CDM	53

3.3.5	Redshift de Igualdade entre Radiação e matéria	57
4	O Universo Inomogêneo	58
4.1	Perturbações Newtonianas Lineares	59
4.1.1	Variáveis Perturbadas	59
4.1.2	Equações do fluido	60
4.1.3	Análise Perturbativa	61
4.1.4	Evolução das perturbações na era de matéria para o Λ CDM	63
4.1.5	Evolução das perturbações na era de matéria para $\Lambda(t)$	64
4.2	Teoria de Perturbações Relativísticas	66
4.2.1	Perturbações na métrica	67
4.2.2	Transformações de Gauge	69
4.2.3	Perturbações no Tensor Energia-Momentum	73
4.2.4	Equações de Einstein e Conservação da Energia-Momentum	75
4.2.5	Conservação da Energia-Momentum para o $\Lambda(t)$	78
4.3	A teia cósmica de Larga Escala e o Universo Real	79
5	A Radiação Cósmica de Fundo	83
5.1	Equações de Boltzmann	85
5.1.1	Equação de Boltzmann para fótons	88
5.1.2	Equação de Boltzmann para a matéria bariônica	91
5.1.3	Anisotropia da temperatura em uma direção	93
5.2	Códigos de Boltzmann	96
5.3	Espectro de potência	97
5.3.1	Espectro de potência de matéria	98
5.4	Evolução das perturbações e as funções de Transferência	100
5.4.1	Contraste da matéria escura	101
5.4.2	Velocidade e Potenciais ψ e ϕ	103
5.5	Espectro de Anisotropia de Temperatura	106
5.5.1	Espectro de temperatura para o modelo de interação	107
5.5.2	O efeito Sachs-Wolf integrado tardio (LISW)	108
5.5.3	Caminhos para a obtenção dos parâmetros de concordância	113
6	Conclusões	117
	Referências Bibliográficas	120
A	Gráficos para as perturbações e as funções de Transferência (super-horizonte)	126

Lista de Tabelas

1.1	Parâmetros cosmológicos. (Somente dados do WMAP-1 ano) [19]	10
1.2	Parâmetros cosmológicos derivados. (Somente dados do WMAP-1 ano) [19]	11
5.1	Parâmetros para os modelos teóricos.	101

Lista de Figuras

1.1	Gráfico realizado à mão por E. J. P. Peebles, apresentando a medição realizada por Penzias e Wilson em 1965. [1]	2
1.2	Registro original do diagrama de Hubble [5]	6
1.3	Módulo de distância para um modelo de concordância e dados observacionais de supernovas Ia [8].	7
1.4	Espectro térmico da CMB, em 1990, pelo satélite FIRAS/COBE. Valores observados com barras de erro multiplicadas 400 vezes [14].	11
1.5	Espectro térmico da CMB, em 1990, por interferômetro em foguete suborbital. [12].	12
1.6	Espectro de anisotropias da temperatura de 7 anos do WMAP [20], em conjunto com os dados do ACBAR [21] e QUaD[22]. Dados do ACBAR e QUaD para $l > 690$, região onde os dados do WMAP são dominados por ruído.	12
1.7	Monopolo da CMB, como observado pelo projeto WMAP [23].	13
1.8	Dipolo da CMB e Redshift associado ao movimento peculiar da via láctea em direção ao grupo local, como observado pelo projeto WMAP.	13
1.9	Correção para o espectro de anisotropias corrigida ao levar em conta o movimento da galáxia. A CMB fica marcada com uma faixa central devido ao disco da via Láctea.	14
1.10	Flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo. (WMAP)	14
1.11	Flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo, obtida pelo PLANCK [24]	15
2.1	Vínculos sobre a densidade de bárions devido à nucleossíntese [30]. Predições para elementos leves.	20
2.2	Curva de rotação da galáxia espiral NGC6503. Os pontos representam a medida de velocidade em função do raio da galáxia. A figura mostra as curvas teóricas de um halo de matéria escura (ponto-tracejada), de um disco (tracejada) e de um gás (pontilhada). [35]	21
3.1	Densidade de energia para a evolução cosmológica com um fluido único de radiação (linha tracejada), matéria (linha contínua) e constante cosmológica (linha pontilhada), respectivamente (unidades arbitrárias).	35
3.2	A função de Hubble $H(z)$ para o modelo Λ CDM e diferentes parâmetros de matéria total (unidades arbitrárias). Foram fixados os parâmetros $h = 0.7$, $\Omega_\Lambda = 0.6$, $\Omega_{rad} = 8 * 10^{-5}$ (com $a_0 = 1$)	36

3.3	A Figura mostra as isócronas para o modelo Λ CDM plano. Do lado esquerdo o plano $\Omega_{m,0}$ vs h . Do lado direito, o parâmetro de desaceleração (3.14) em função do redshift. [56]	37
3.4	Comparação para a evolução no tempo das densidades de energia da radiação e matéria (com $a_0 = 1$).	38
3.5	Evolução da razão para as funções de densidade de matéria total e densidade de energia total, tanto em função do fator de escala a como em função do redshift (z). Usa-se $a_0 = 1$.	39
3.6	Evolução da razão para as funções de densidade de energia escura e densidade total, tanto em função do fator de escala a como em função do redshift (z). Usa-se $a_0 = 1$.	41
3.7	A função de Hubble $H(z)$ para o modelo Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para diferentes parâmetros de matéria total. Os outros parâmetros foram fixados em $h = 0.7$, $\Omega_r = 8 \times 10^{-5}$ (com $a_0 = 1$). Os gráficos para Λ CDM estão em linha cheia, enquanto os do $\Lambda(t)$ CDM em linha tracejada.	52
3.8	A Figura mostra as isócronas para o modelo $\Lambda(t)$ CDM plano. Do lado esquerdo o plano $\Omega_{m,0}$ vs h . Do lado direito o parâmetro de desaceleração (3.14) em função do redshift. [56]	53
3.9	Discrepância entre a integração numérica e a aproximação analítica (3.92). As curvas são coincidentes, com diferenças menores que 0,1% [56]. Os rótulos numéricos em cada curva, indicam o parâmetro da densidade de matéria usado.	54
3.10	Discrepância entre a integração numérica e a aproximação analítica, dada por (3.92). Mostramos que a integração está em acordo com os obtidos em [56] e que a mesma possui comportamento numérico oscilatório.	55
3.11	Mostra-se a discrepância para o mesmo par de funções respectivamente para o Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_m = 0.25$ e $\Omega_m = 0.50$. Os outros parâmetros foram fixados em $h \equiv 0.7$, $\Omega_r \equiv 8 \cdot 10^{-5}$.	55
3.12	A função de Hubble $H(z)$ para o modelo Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM diferentes parâmetros de matéria total que produzem praticamente a mesma função $H(z)$. Para o Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_m = 0.25$ e $\Omega_m \equiv 0.50$, respectivamente. Há coincidência entre a curva para $\Lambda(t)$, obtida pelo CLASS e por integração analítica. Os outros parâmetros foram fixados em $h \equiv 0.7$, $\Omega_{rad} \equiv 8 \cdot 10^{-5}$.	56
3.13	A função $\rho_\Lambda(z)$ para o modelo Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. Os outros parâmetros foram fixados em $h \equiv 0.7$, $\Omega_r \equiv 8 \cdot 10^{-5}$.	56
4.1	Fatias bidimensionais do mapa 3D para a posição e o redshift de galáxias, [75].	59
4.2	Evolução para o contraste da matéria para um universo dominado por matéria nos modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. A curva de cima representa um universo Einstein-de Sitter, a do meio o modelo com Λ constante e, mais abaixo, o modelo $\Lambda(t)$ [50].	66
4.3	Ilustração de um espaço-tempo de base, não perturbado, (esquerda). Espaço-tempo perturbado (direita).	67
4.4	Os limites do super-aglomerado local (<i>Laniakea</i>). A ilustração indica as linhas de fluxo de velocidade e os contornos de densidade que determinam as bases de atração das estruturas [100].	80

4.5	A teia cósmica e sua complexidade em escalas de $100 \times 100 \times 10 h^{-1}$ Mpc (dados da simulação Millenium-II). Mostra o campo de densidades (esquerda) e os filamentos (direita) [104].	81
5.1	Mapa de intensidade para a CMB, com alta resolução, obtida de análise combinada do WMAP e Planck [116].	84
5.2	Planck 2015, espectro de temperatura da CMB [116].	85
5.3	Ilustração para a superfície de último espalhamento e o caminho percorrido por um fóton originado na Radiação Cósmica de fundo.	95
5.4	Espectro de potência de matéria total para o modelo Λ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ Best-fit do Planck [38] e $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$, respectivamente. O parâmetro de Hubble foi fixado em $h \equiv 0.678$ para ambos os modelos.	100
5.5	Contraste para a matéria escura. Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).	102
5.6	Velocidade potencial da matéria escura para o Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).	104
5.7	Potencial ψ para o modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).	105
5.8	Potencial ϕ para o modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).	105
5.9	Espectro de anisotropia de temperatura para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado)	109
5.10	Espectro de anisotropia de temperatura para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado)	109
5.11	Discrepância entre o espectro de anisotropia para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$	110
5.12	Discrepância entre o espectro de anisotropia para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$	110
5.13	Espectro de temperatura para a contribuição referente ao efeito Sachs-Wolf de Temperatura para os modelos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).	111
5.14	Efeito Doppler no espectro de temperatura. Modelos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).	111
5.15	Efeito Sachs-Wolf integrado precoce (EISW, do inglês <i>Early Integrated Sachs-Wolf</i>) no espectro de temperatura. Modelos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).	112

5.16	Efeito Sachs-Wolf integrado tardio (LISW, do inglês <i>Late Integrated Sachs-Wolf</i>). Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).	113
5.17	Discrepâncias $((C_l^i - C_l^A)/C_l^A)$ para o efeito Sachs-Wolf integrado tardio para os diferentes modelos. (B)-(A) (magenta-ponto-tracejado); (C)-(A)(Vermelho-ponto-tracejado).	114
5.18	Espectro de anisotropia de temperatura para o modelo padrão com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), e o modelo $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.41$ (roxo-pontilhado) e também $\Omega_{cdm} \equiv 0.45$ (verde-tracejado).	115
5.19	Discrepância para o espectro de anisotropia de temperatura. Foi usado o modelo padrão como valor comparativo, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$. Os modelos estudados são $\Lambda(t)$ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.41$ (roxo-pontilhado), $\Omega_{cdm} \equiv 0.45$ (verde-ponto-tracejado) e $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (vermelho-contínuo).	116
A.1	Oscilações acústicas para a densidade de bárions e sua velocidade. Aqui, foi usado $k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$	127
A.2	Densidade de matéria escura. Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).	127
A.3	Velocidade potencial da matéria escura para o Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).	128
A.4	Potencial $\psi(a)$ em diferentes escalas para os modelos (A): Λ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (Magenta-pontuado). ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).	128
A.5	Potencial $\phi(a)$ para os modelos (A): Λ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (Magenta-pontuado); ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).	129

Capítulo 1

Introdução

O estudo científico do cosmos descreve o universo a partir de seus componentes físicos em larga escala, analisando sua estrutura, suas propriedades e sua evolução. As fronteiras do universo, como visto pela cosmologia, estendem-se por domínios em grandíssimas distâncias, perfazendo escalas equivalentes às centenas de Mpc¹. Nestas escalas, galáxias inteiras não passam de grãos numa extensa malha do espaço-tempo. A textura do universo é diversa e complexa, sendo composta por inumeráveis planetas e estrelas, que se reúnem em galáxias, e, estas ainda, se reúnem em aglomerados e super-aglomerados, compondo complexas estruturas em variadas escalas. O estudo do Cosmos perpassa um variado leque de áreas da física. Deste estudo, diversas propriedades da dinâmica cosmológica foram e vêm sendo elucidadas. A descoberta da expansão por Hubble, por exemplo, estabeleceu a expansão, como uma descrição teórica já consolidada. As observações das Supernovas do tipo Ia, por outro lado, evidenciaram o comportamento acelerado desta expansão. Mais recentemente, o estudo da Radiação Cósmica de Fundo (CMB, do Inglês *Cosmic Microwave Background*) garantiu elevada precisão na determinação das propriedades do universo, e ainda, possibilitou a descoberta e estudo de novos fenômenos cosmológicos. As descrições teóricas que justificam os fenômenos de expansão e expansão acelerada e também a origem da radiação cósmica de fundo serão estudadas neste trabalho.

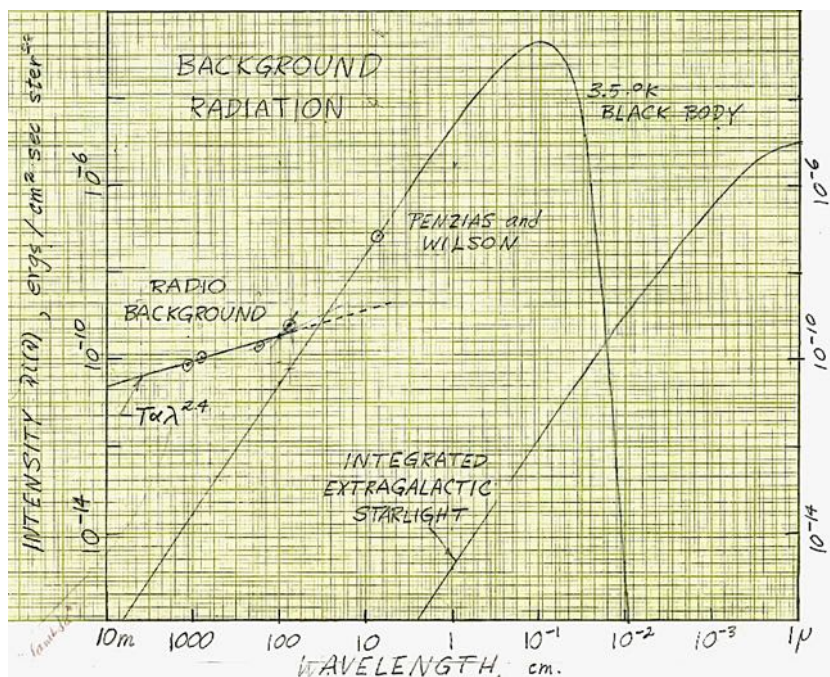


Figura 1.1: Gráfico realizado à mão por E. J. P. Peebles, apresentando a medição realizada por Penzias e Wilson em 1965. [1]

1.1 A Descoberta da CMB

Na figura 1.1 é possível vislumbrar o gráfico (feito em 1966) realizado à mão por Peebles², onde foi identificado o único ponto da medição realizada por Penzias e Wilson em 1965, que mais tarde levou-os ao prêmio Nobel de Física (1973). Uma das maiores inovações desta medição foi a capacidade de realizar medições em tão baixas temperaturas³. Embora, aparentemente simplória, a confirmação de um único ponto na curva do espectro de corpos negro, foi capaz de mudar toda uma área. Mesmo tendo somente este único ponto de medição, a beleza desta medição trata-se justamente da sua medição isotrópica.

O estudo da CMB⁴ (do inglês, *Cosmic Microwave Background*) no contexto de modelos com decaimento de energia escura em matéria escura é o principal objetivo desta tese. Estes temas, são portanto, norteadores da revisão que será feita nos próximos capítulos. Com isto em mente, para entender os mecanismos de geração desta radiação, é preciso compreender os mecanismos de evolução cosmológica. Neste trabalho, os capítulos iniciais apresentam

¹ 1 Pc equivale a 3,3 anos-luz ou aproximadamente 10¹⁶ metros.

² Edwin James Philip Peebles, nascido em 25 de abril de 1935.

³ O prêmio Nobel de 1978 foi dividido entre os físicos Pyotr Leonidovich Kapitsa "for his basic inventions and discoveries in the area of low-temperature physics" e Arno Allan Penzias and Robert Woodrow Wilson "for their discovery of cosmic microwave background radiation".

⁴ Usaremos livremente CMB ou Radiação Cósmica de Fundo ao longo deste trabalho.

uma revisão e são seguidos pelos capítulos que analisam as equações e os resultados para a Radiação Cósmica de Fundo, no contexto do modelo $\Lambda(t)$ CDM. A seguir serão introduzidos os temas tratados ao longo da tese.

1.2 O Universo em Expansão

1.2.1 Relatividade Geral

A evolução do entendimento humano sobre o cosmos é um processo gradativo e lento. Este conhecimento sofreu um avanço extraordinário com a teoria newtoniana, porém, os modelos cosmológicos advindos desta teoria ainda eram severamente limitados. A gravitação newtoniana torna-se impraticável ao tentar lidar com a interação de muitos corpos. Uma solução exata de problemas como o sistema solar, por exemplo, torna-se inviável neste contexto teórico. A descrição newtoniana não é capaz de explicar a origem da equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, presentes em sua segunda lei do movimento e em sua teoria da gravitação, respectivamente. Observa-se também que no cálculo de campos fortes, a gravitação de Newton simplesmente falha. Um outro exemplo clássico é o erro ao calcular o período de precessão anômala do periélio de Mercúrio. Para avançar o entendimento humano do Universo foi preciso novas formulações físicas.

Em 1905, Albert Einstein (1879 a 1955) compilou uma teoria que reformulou a descrição de corpos em movimento isentos de aceleração, conhecida como Teoria da Relatividade Restrita (TRR). A relatividade restrita [2] gerou uma profunda mudança de paradigmas em toda a ciência. Sua pedra fundamental, o postulado de constância da velocidade da luz, estabelece que as ondas eletromagnéticas possuem velocidade constante em qualquer referencial inercial. A velocidade da luz (c), com valor de 299.792.458 m/s, tornou-se o limite para a propagação de entes físicos. Pode-se também citar outro resultado de grande importância, que relaciona a energia dos corpos com sua massa, a equação da energia:

$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2, \quad (1.1)$$

que se reduz ao famoso $E = mc^2$. Este resultado modificou profundamente a noção de massa e energia como entidades independentes e culminou em uma profunda transformação em toda a física.

A teoria da gravitação proposta por Newton não era compatível com estes princípios,

uma vez que sua descrição por forças instantâneas implicava numa velocidade infinita de propagação para a interação gravitacional. Em 1916 o próprio Einstein apresenta uma teoria da gravidade, na qual os princípios da relatividade restrita eram naturalmente respeitados. Esta é a Teoria da Relatividade Geral (T.R.G.), cuja pedra fundamental é o princípio de equivalência, enunciado como:

“Em todo ponto do espaço-tempo sob um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de forma que numa região suficientemente pequena em torno deste ponto, as leis da natureza possuem a mesma forma que as de um sistema de coordenadas cartesiano inercial, isentas de efeitos gravitacionais” [3].

O postulado acima se traduz na equação fundamental da Relatividade Geral, que pode ser escrita sob a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

que representa a relação entre energia-matéria e a malha do espaço-tempo. Com esta nova noção, a gravidade muda radicalmente para um conceito geométrico do espaço-tempo e não mais uma ação instantânea à distância. A Teoria da Relatividade Geral vem sendo intensivamente testada. Os testes observacionais confirmam as previsões desta teoria com incrível precisão [4].

1.2.2 Lei de Hubble e o redshift cosmológico

Um deslocamento do espectro de ondas eletromagnéticas em direção a um maior (menor) comprimento de onda é denominado *redshift* (*blueshift*). O redshift é um excelente parâmetro para uso em cálculos na astrofísica e cosmologia, pois é possível relacioná-lo com a distância dos objetos. Em escalas cosmológicas este efeito pode ser devido a três diferentes mecanismos, a saber, a velocidade de recessão dos corpos (efeito Doppler convencional), variações do campo gravitacional entre o objeto emissor e receptor (efeito Doppler gravitacional) e, por fim, uma possível expansão da geometria do espaço-tempo. O redshift é definido pela diferença relativa, entre os comprimentos de onda (ou frequências) observado (λ_o) e emitido (λ_e) de um objeto:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (1.3)$$

de onde é possível notar que, se a fonte de luz se afasta do observador (ou vice-versa), um desvio para maiores comprimentos de onda ocorre. Por outro lado, se a fonte se move em direção ao observador, então um desvio para menores comprimentos de onda ocorre. É possível comparar o espectro observado de um astro com o espectro de inúmeros elementos e compostos químicos catalogados em laboratórios na Terra. Na prática, se a mesma linha espectral de um dado elemento é identificada em ambos os espectros, porém em diferentes comprimentos de onda, obtém-se experimentalmente o valor do redshift.

A grande diversidade de experimentos das últimas décadas, aliada ao desenvolvimento de novas tecnologias de medição, geraram uma mudança de paradigmas na cosmologia. O estudo do cosmos mudou drasticamente. Novos dados e medições astronômicas estabeleceram vínculos fundamentais para a estrutura do universo, sua idade e evolução. A cosmologia entra numa era de precisão na qual é possível restringir e refinar os modelos cosmológicos. Para estabelecer teorias científicas com elegância matemática e consistência física, é importante analisar os seus vínculos observacionais mais fundamentais. A figura 1.2 mostra o diagrama de Hubble, observado em 1929 para grandes distâncias (de até 2 Mpc).

A partir da descoberta da velocidade de recessão das galáxias por Hubble [5] uma grande quantidade de informações astrofísicas foram catalogadas e estudadas. Dentre as mais importantes, é possível citar algumas das grandezas que foram capazes de estabelecer o que se chama de escada de distâncias. Diferentes medições para distâncias astronômicas podem se sobrepor em certas escalas. Desta forma é possível calibrar diferentes métodos e assim obter medições com bons níveis de confiança. Com esta técnica foi possível usar estrelas cefeidas variáveis para calibrar métodos de medições de distância com supernovas, por exemplo.

Com a observação do redshift das galáxias, o modelo de Big Bang encontrou forte viés favorável, deixando modelos alternativos, como o universo estático de Einstein, para a história. Neste contexto, uma infinidade de submodelos pode ser formulada. É justamente na escrutinização destes modelos e submodelos que se dedica a cosmologia.

1.2.3 Supernovas e a expansão acelerada

As supernovas são fenômenos extremamente luminosos atribuídos fisicamente a processos de explosão em determinadas estrelas. Estes fenômenos vêm sendo observados desde a

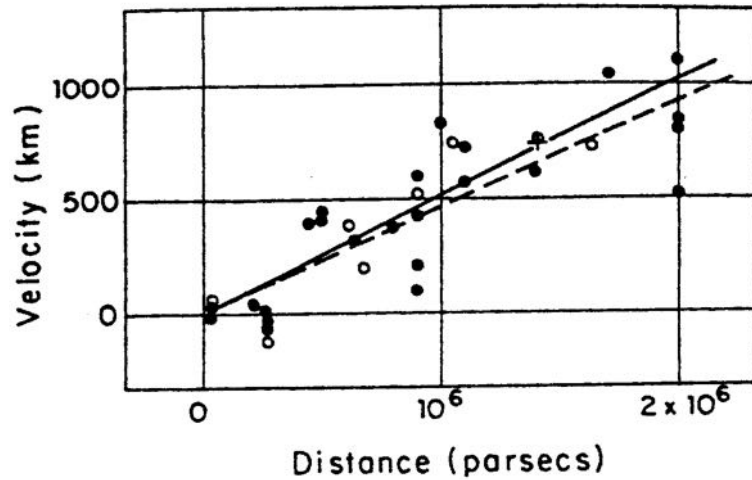


Figura 1.2: Registro original do diagrama de Hubble [5]

antiguidade, até mesmo com registros de astrônomos chineses que datam do ano de 185 d.C. No final da década de 1990, foi possível associar modelos teóricos para melhor classificar e padronizar supernovas do tipo Ia⁵, e com isso, utilizá-las para a estimativa de distâncias [6] [7]. A importância das supernovas para a cosmologia reside na possibilidade de usar estas como velas padrão e, assim, ter uma razoável confiabilidade para estimar distâncias. Estas estimativas foram cruciais para a determinação da aceleração da expansão do universo e, com isso, estabelecer a existência de uma nova forma de energia denominada de Energia Escura (*Dark Energy*)

Diferentes observações indicam que o universo sofreu um considerável processo de expansão e versou, em épocas remotas, uma era de alta densidade e altas temperaturas. A observação de SNIa pode ser considerada um dos pilares observacionais da cosmologia moderna, pois, a partir desta, é possível distinguir modelos cosmológicos, em especial aqueles com aceleração cósmica. Ao dispormos de uma vela padrão, é possível relacionar a distância dos objetos com sua magnitude. As relações obtidas para as SNIa indicam que estas são fenômenos altamente regulares e, portanto, são confiáveis para serem usados como vela-padrão. Para relacionar a distância das SNIa com a distância é possível obter uma função que determina o módulo da distância em função do redshift, para cada modelo cosmológico. Com isso, é possível testar a concordância do mesmo com estas observações. Na figura 1.3

⁵Supernovas do tipo Ia, são explosões cataclísmicas de estrelas (binárias) com uma descrição física supostamente conhecida

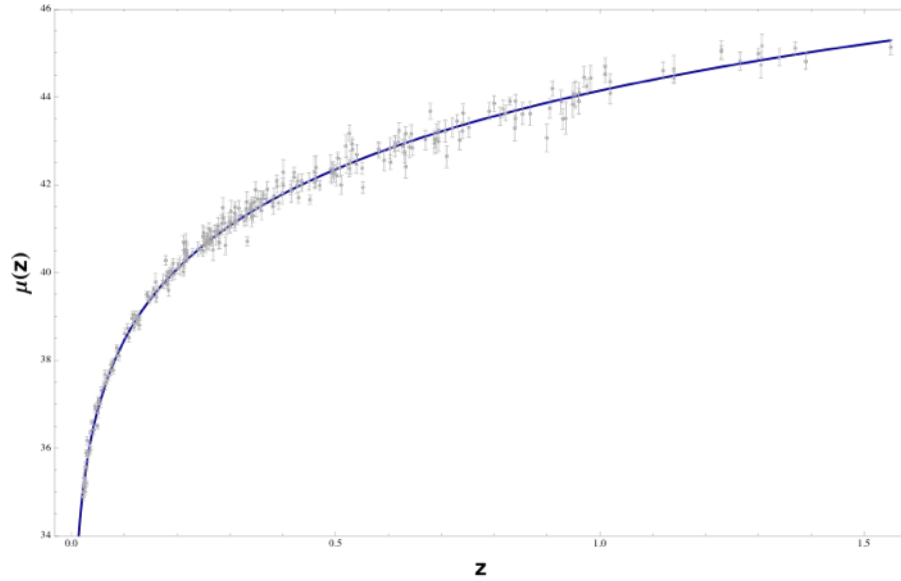


Figura 1.3: Módulo de distância para um modelo de concordância e dados observacionais de supernovas Ia [8].

nota-se o módulo da distância para um modelo de concordância (Λ CDM).

Uma variedade de possibilidades de evolução cosmológica pode ser testada. Aquelas que não encontrarem acordo com as observações, somente seriam viáveis através de uma modificação considerável em nosso entendimento do cosmos, ou de uma sistemática mudança em uma grande quantidade de hipóteses da cosmologia. Modelos com descrições substancialmente diferentes das propostas pelo modelo padrão, até o momento, não alcançaram sucesso em fazer previsões concordantes com as observações.

1.3 A Radiação Cósmica de Fundo

Esta seção busca introduzir o tema Radiação Cósmica de Fundo (CMB). Serão apresentadas algumas das principais observações realizadas majoritariamente nos séculos XX e XXI. Estas observações propiciaram o nível de compreensão que foi atingido com a cosmologia moderna. Será analisada em nível introdutório a importância de cada dado observacional, numa tentativa de manter mínimas as influências de um modelo particular de universo. As hipóteses básicas que restringem os possíveis modelos cosmológicos físicos serão admitidas gradativamente no decorrer do capítulo. Diversos pontos do desenvolvimento histórico e conceitual deste tema serão apresentados aqui, enquanto informações mais detalhadas sobre os experimentos e estudos teóricos serão somente apresentadas e discutidas no capítulo 5.

A Radiação de Fundo em Microondas, CMB (do inglês *Cosmic Microwave Background*) é uma previsão fundamental do modelo de Hot Big Bang. A hipótese básica é de que, durante a expansão, o gás primordial mantém acoplados os prótons e elétrons com a radiação através do espalhamento Compton, até que este atinja determinada energia. Com a expansão, o cosmos gradativamente diminui sua temperatura. Ao atingir determinada temperatura, os fótons não têm energia suficiente para espalhar os elétrons dos átomos e assim haverá a combinação entre os prótons e elétrons (recombinação). A partir deste instante (na verdade, milhares de anos), a radiação seguirá livremente, gerando a Radiação Cósmica de Fundo.

Nos estudos pioneiros de Gamow, este concluiu que a temperatura da CMB deveria ser $T = 10 \text{ K}$ [9], valor que foi posteriormente refinado pelo próprio Gamow e seus estudantes Alpher e Herman [10] para $T = 5 \text{ K}$. Esta radiação foi descoberta em 1964 pelos astrônomos americanos Arno Penzias e Robert W. Wilson [11]. Os astrônomos não conseguiram estabelecer qualquer relação desta radiação com fontes no sistema solar ou na galáxia, uma vez que era detectada em todas as direções e com uma mesma temperatura⁶. De fato, a constatação de que a radiação medida possuía diversas das características esperadas foi ponto fundamental para corroborar a ideia de que a radiação era remanescente de uma era primordial quente, modelo geral que ficou conhecido como *Hot Big Bang*.

No contexto do Big Bang, a CMB é a radiação associada ao desacoplamento entre fótons e matéria, ocorrido nas eras iniciais do universo. A observação destas em 1965 favoreceu decisivamente os modelos de Big Bang. A CMB tem como característica principal um espectro térmico de corpo negro, determinado com extraordinária precisão, inicialmente pelo FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*), revelando o espectro térmico mais perfeito já observado. O espectro da energia em função da frequência para um corpo negro pode ser escrito como:

$$I(\nu, T)d\nu = \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{K_B T}} - 1} d\nu, \quad (1.4)$$

onde I é a energia por unidade de área num intervalo de frequência de ν até $\nu + d\nu$, T é a temperatura, K_B é a constante de Boltzmann e h é a constante de Planck.

A existência de uma radiação cósmica de fundo, com baixa temperatura, associada as medições de expansão do cosmos, é forte evidência de que a temperatura do universo deveria ser maior num passado mais denso. A expansão cósmica foi responsável pela diminuição da

⁶Medida na época em $T = 3.51 \text{ K}$.

energia desta radiação. A radiação de corpo negro, conforme prevista, pode ser detectada em detalhes com o satélite COBE, como mostra a figura 1.4. O experimento realizado em [12], mostrado na figura 1.5, foi largamente ofuscado (e em parte esquecido) com a precisão dos dados adquiridos pelo FIRAS/COBE.

As estimativas de temperatura apresentam concordância com as exigências da nucleossíntese do Big Bang. Recentes medições, do satélite COBE⁷, indicam que a temperatura média da CMB é 2.728 ± 0.004 [13] [14].

A radiação de fundo pode ser detectada em todas as direções do céu. É observada uma radiação com elevado grau de isotropia. Ao observar a correlação para a temperatura em diferentes ângulos, a mesma desvia da isotropia em somente 10^{-5} . Este elevado grau de isotropia é demonstrado na figura 1.7. Importantes processos físicos estão impressos na CMB. As observações da CMB estão em congruência com as predições teóricas do Big Bang. Assim, pode-se afirmar que a CMB é um dos principais pilares observacionais da cosmologia moderna. A observação desta, aliada à grande precisão com que se pode medi-la, permite analisar detalhes de modelos cosmológicos e, desta forma eliminar hipóteses destoantes do que é observado. Importantes processos físicos estão impressos na CMB, desde efeitos em eras iniciais do universo, como as oscilações acústicas bariônicas, até efeitos mais recentes, como a distribuição de grandes estruturas.

Ao longo de múltiplas décadas, vários experimentos relacionados a CMB foram de suma importância para estabelecer o aprofundamento científico que é possível vislumbrar hoje na cosmologia [15]. O estudo da CMB é bastante dificultado pela presença da atmosfera terrestre. Além das moléculas de oxigênio, as moléculas de água são o fator principal para essa dificuldade [16]. Por este motivo, diversos experimentos são propostos em regiões de grande altitude ou localizadas próximas aos polos, uma vez que nestas localidades a humidade relativa do ar é mínima⁸.

Logo após a descoberta da CMB e a medição inicial de sua temperatura, os pesquisadores iniciaram a busca por anisotropias nesta radiação. O dipolo da CMB foi observado inicialmente por Conklin [17] e, a precisão em que foi medida foi constantemente melhorada nos anos seguintes. O mapa para o dipolo pode ser visto na figura 1.8. Por muitos anos (quase duas décadas) o conhecimento sobre a anisotropia da CMB ficou confinado ao limite de 10^{-4} , em ordem de grandeza para medição da anisotropia. Somente em 1989 com o lançamento do

⁷Mesmo após o WMAP e satélite Planck, nesta data, estas ainda são as mais precisas medições para a temperatura absoluta da CMB.

⁸Vapor d'água absorve energia em variadas faixas da radiação eletromagnética em microondas

Tabela 1.1: Parâmetros cosmológicos. (Somente dados do WMAP-1 ano) [19]

Parâmetro	símbolo	Média (68% de confiança)
Densidade de Bárions	$\Omega_b h^2$	0.024 ± 0.001
Densidade de matéria total	$\Omega_m h^2$	0.14 ± 0.02
Constante de Hubble	h	0.72 ± 0.05
Amplitude	A_s	0.9 ± 0.1
Profundidade óptica	τ	0.166 ± 0.076
Índice Espectral	n_s	0.99 ± 0.04

satélite COBE [14] é que a precisão foi reduzida à ordem de 10^{-5} . A importância do dipolo reside em seu significado físico, este é associado à velocidade de recessão da galáxia⁹. O valor medido pelo COBE, associado à velocidade de recessão da *via-láctea* é de $v = 369 \pm 0.9$ km/s [18].

A grande importância da CMB está na possibilidade de estabelecer com alta precisão os parâmetros de um modelo cosmológico teórico ou, é claro, ser evidência contrária a modelos em escrutinação. O estudo dos mapas pode ser feito ao se decompor o contraste da temperatura dos fótons em harmônicos esféricos, usando a decomposição de Fourier. Ao se conhecer a evolução física de todas as componentes cósmicas, é possível estabelecer o espectro de anisotropias de temperaturas para a CMB. A figura 1.9 mostra os multipólos da CMB, ainda com a interferência da galáxia, enquanto a figura 1.10 mostra o mapa de anisotropias livre de interferências cosmológicas locais.

O capítulo 5, focará a análise dos modelos teóricos, comparando-os aos dados fornecidos pelo satélite Planck. Para obter uma visão ampla (ainda sem os dados do Planck) dos variados experimentos realizados com a CMB, vejamos nas tabelas 1.1 e 1.2 alguns dos resultados precedentes, do WMAP. A figura 1.11 mostra o mapa de alta precisão obtido pelo Planck.

⁹Sim, a CMB estabelece um sistema de referência privilegiado para objetos cosmológicos

Tabela 1.2: Parâmetros cosmológicos derivados. (Somente dados do WMAP-1 ano) [19]

Parâmetro	Mean (68% de confiança)
Amplitude de flutuações galácticas	$\sigma_8 = 0.9 \pm 0.1$
Densidade de bárions/Densidade crítica	$\Omega_b = 0.047 \pm 0.006$
Densidade de matéria total/Densidade crítica	$\Omega_m = 0.29 \pm 0.07$
Idade do Universo	$t_0 = 13.4 \pm 0.3 Gyr$
Redshift da Reionização	$z_{reio} = 17 \pm 5$
Redshift do Desacoplamento	$z_{dec} = 1088_{-2}^{+1}$
Idade do universo no desacoplamento	$t_{dec} = 372 \pm 14 kyr$
Largura da superfície de último espalhamento (z)	$\Delta z_{dec} = 194 \pm 2$
Largura da superfície de último espalhamento (t)	$\Delta t_{dec} = 115 \pm 5 kyr$
Redshift na igualdade Radiação-Matéria	$z_{eq} = 3454 \pm 38$
Horizonte sonoro no desacoplamento	$r_s = 144 \pm 4 Mpc$
Escala acústica angular	$l_A = 299 \pm 2$
Razão entre bárions e fótons	$\eta = (6.5_{-0.3}^{+0.4})10^{-10}$

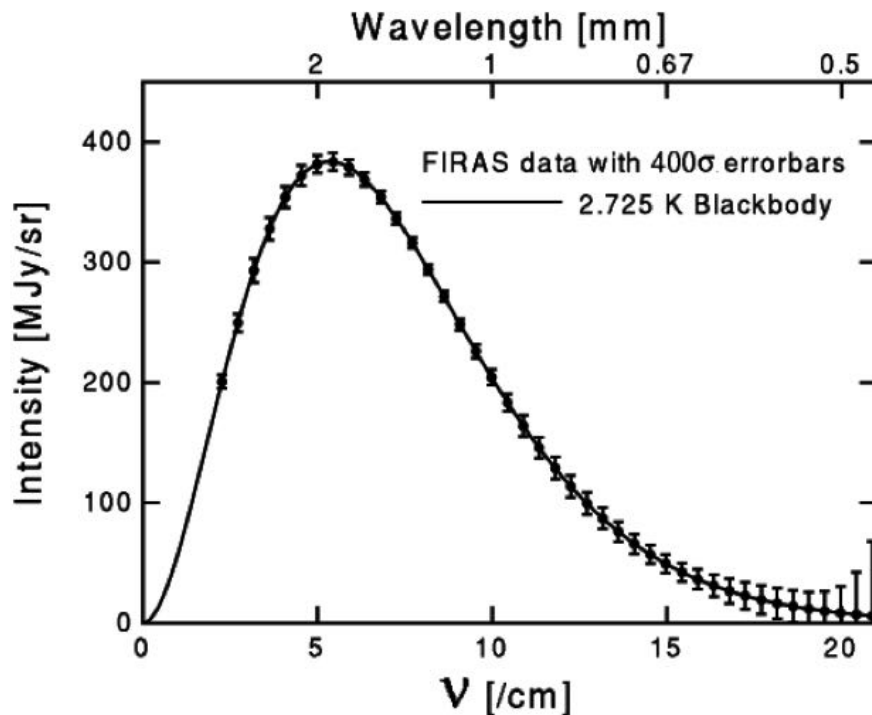


Figura 1.4: Espectro térmico da CMB, em 1990, pelo satélite FIRAS/COBE. Valores observados com barras de erro multiplicadas 400 vezes [14].

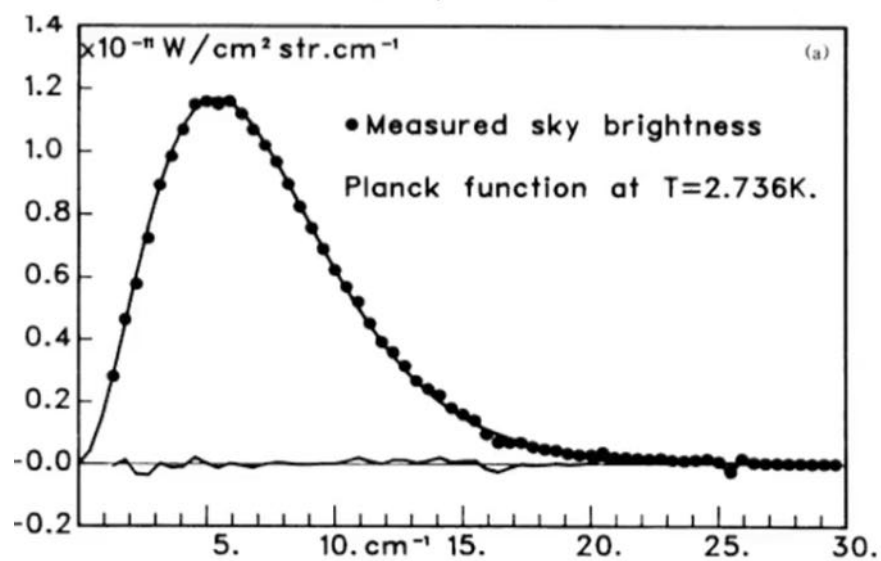


Figura 1.5: Espectro térmico da CMB, em 1990, por interferômetro em foguete suborbital. [12].

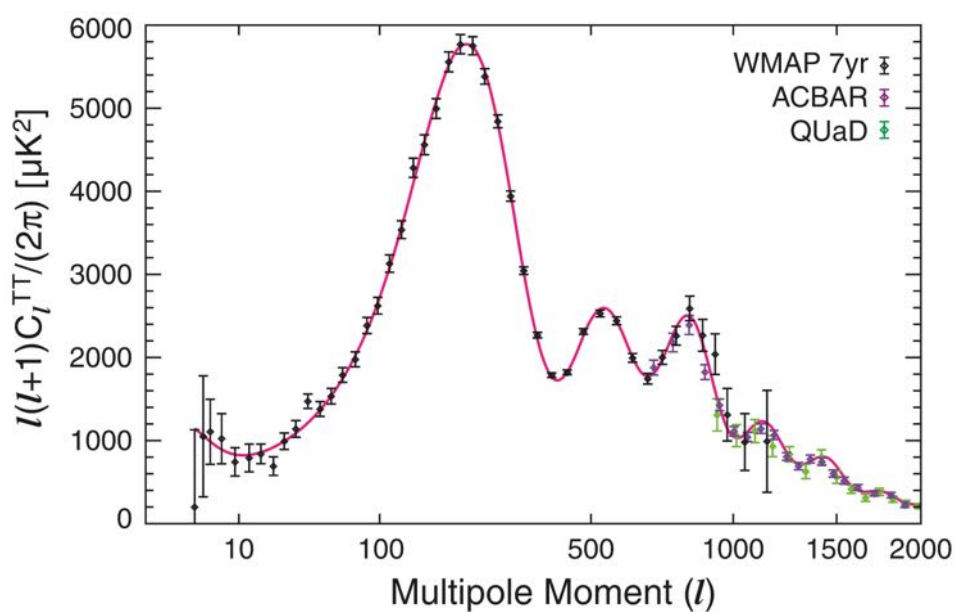


Figura 1.6: Espectro de anisotropias da temperatura de 7 anos do WMAP [20], em conjunto com os dados do ACBAR [21] e QUaD[22]. Dados do ACBAR e QUaD para $l > 690$, região onde os dados do WMAP são dominados por ruído.

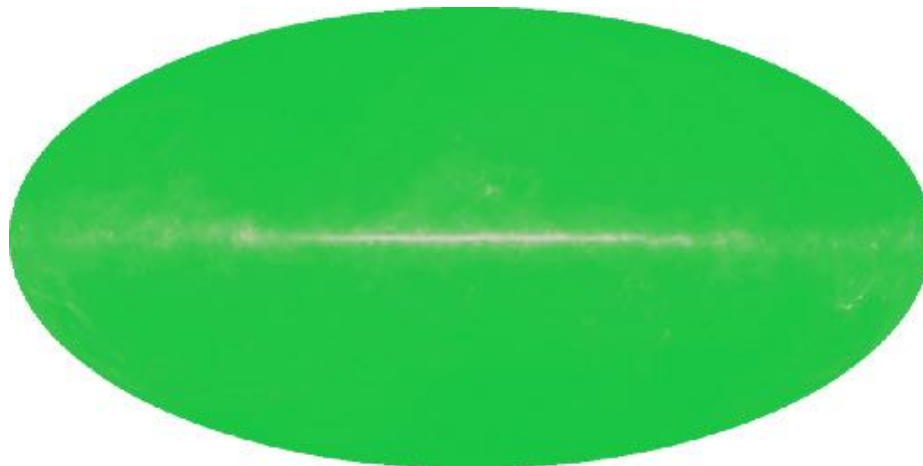


Figura 1.7: Monopolo da CMB, como observado pelo projeto WMAP [23].

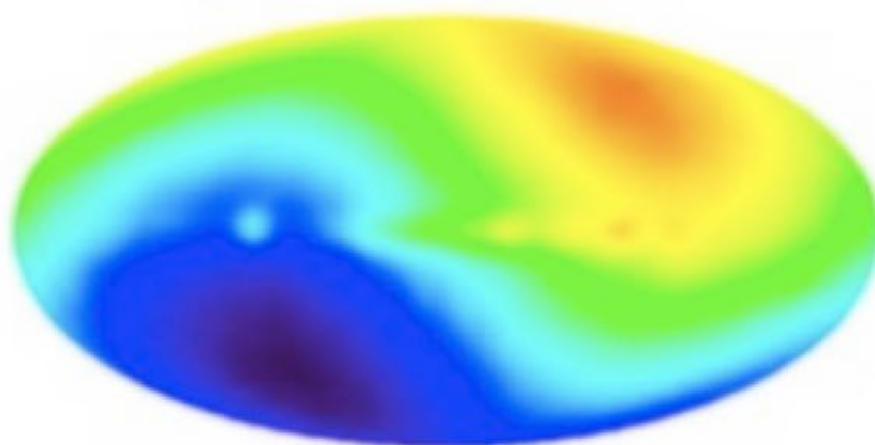


Figura 1.8: Dipolo da CMB e Redshift associado ao movimento peculiar da via láctea em direção ao grupo local, como observado pelo projeto WMAP.

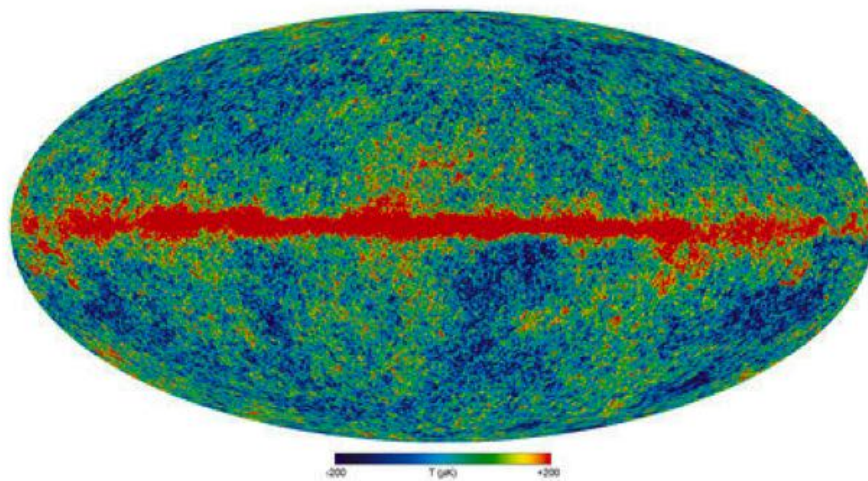


Figura 1.9: Correção para o espectro de anisotropias corrigida ao levar em conta o movimento da galáxia. A CMB fica marcada com uma faixa central devido ao disco da via Láctea.

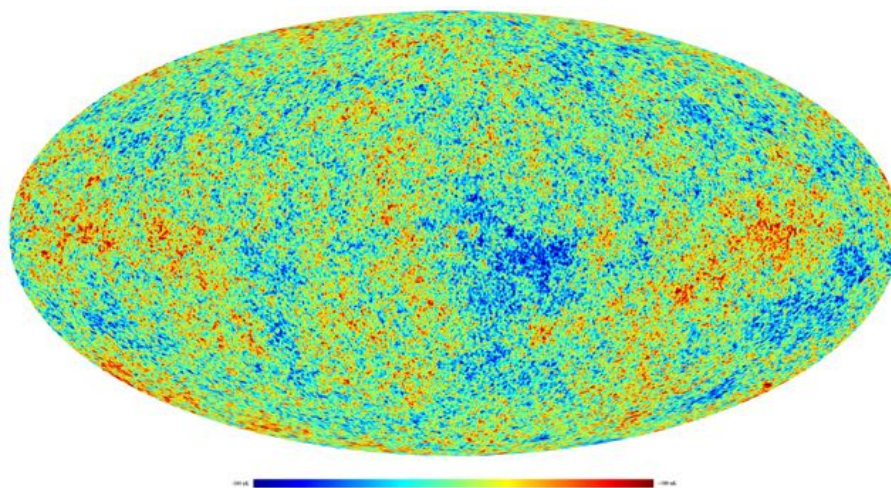


Figura 1.10: Flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo. (WMAP)

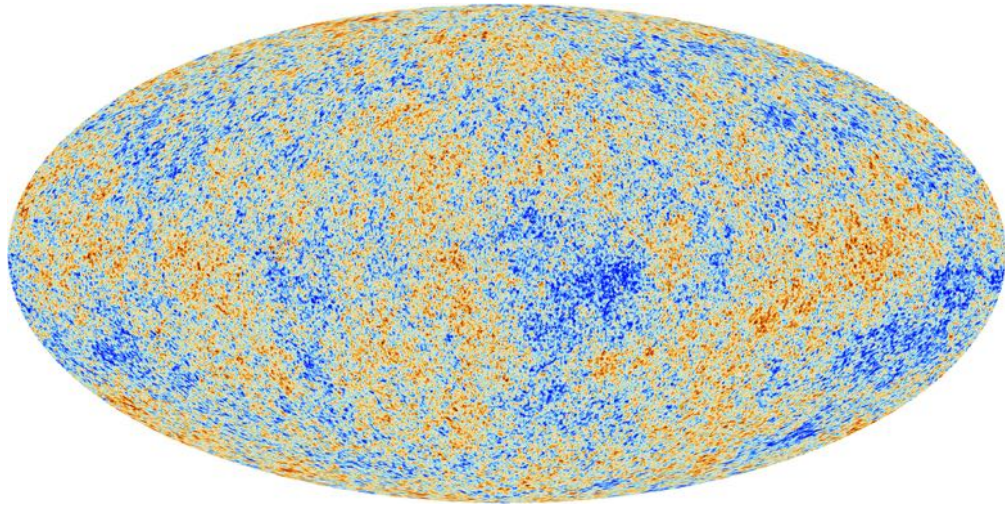


Figura 1.11: Flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo, obtida pelo PLANCK [24]

1.4 Estrutura da Tese

Nos próximos capítulos será feita uma revisão dos principais modelos cosmológicos, dentro do contexto da relatividade geral. Alguns modelos de importância conceitual para o desenvolvimento da cosmologia física no capítulo 2. No capítulo 3, estudaremos o modelo padrão da cosmologia, em seguida o modelo de decaimento de vácuo, que denominamos de $\Lambda(t)$ em nível de base. As principais características de cada modelo serão demonstradas, evidenciando as principais diferenças entre eles. Em 3.2 e 3.3, apresentamos detalhes do modelo de decaimento $\Lambda(t)$ aqui estudado, assim como as equações aproximadas para cada era cosmológica e uma comparação direta com o modelo padrão e seus parâmetros.

No capítulo 4 são estudadas as equações perturbadas dos modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM, sendo seguida por um estudo da física do universo inhomogêneo e algumas considerações sobre a CMB. Na seção 4.2 são analisadas as equações que regem as perturbações e são usadas para obter o espectro de temperatura da CMB, já no capítulo 5 estudamos a própria Radiação Cósmica de Fundo e seus principais efeitos. Serão analisadas as características da CMB no modelo padrão da cosmologia e no modelo de decaimento de energia escura que será aqui estudado. O presente trabalho tem como novidade uma análise extensa do espectro de anisotropia da temperatura para o modelo $\Lambda(t)$ CDM. As principais equações e discussões são mostradas em 4.2 e 5. Em seguida serão obtidos os espectros de anisotropia da temperatura para o modelo Λ CDM e para o modelo $\Lambda(t)$, com decaimento de vácuo em matéria escura. No capítulo 6, apresentamos os resultados e são sumarizadas as principais descobertas deste

trabalho.

Capítulo 2

O Universo Homogêneo e seus Componentes

Ao observar as constituintes do universo, é possível separar (matematicamente) a evolução do universo em eras cosmológicas. Isso é feito uma vez que cada componente tem comportamento energético conhecido, revelando em quais eras cada constituinte se torna dominante para a evolução da expansão. É também possível separar o comportamento matemático do universo homogêneo e inhomogêneo, respectivamente a partir da métrica de background e da perturbação desta métrica. As características não homogêneas são, então, descritas a partir da métrica perturbada.

O atual modelo padrão da cosmologia, é o conhecido Λ CDM. Suas componentes mais relevantes são a constante cosmológica (Λ , Lambda), e a matéria, incluindo a bariônica e a matéria escura *CDM*, *Cold Dark Matter*). O modelo de decaimento que será aqui estudado contém uma densidade de energia escura proporcional a função de Hubble, portanto varia ao longo do tempo. Desta forma, neste estudo será usada (mantida) a denominação $\Lambda(t)$ CDM.

2.1 Inventário Cósmico

Para descrever as diferentes componentes presentes no fluido cosmológico, é necessário descrevê-las a partir do conceito de fluido perfeito e, em alguns casos, a partir de sua função de distribuição energética. A energia de uma determinada espécie pode ser obtida somando a energia sobre todos os seus elementos de fase $\sum f(\vec{x}, \vec{p})E(p)$ onde $E(p)$ é a energia rela-

tivística¹, dada pela eq. (1.1) ou $E(p) = \sqrt{p^2 + m_0^2}$. A energia de uma dada componente qualquer, poderia ser escrita como

$$\rho_i = g_i \int f_i(\vec{x}, \vec{p}) E(p) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.1)$$

onde i define a componente estudada, g_i é a possível degenerescência desta espécie (e.g. igual a 2 para fótons, devido aos seus estados de spin). A função de distribuição é dada por f_i . Logo mais, será visto que no caso de bósons (e.g. fótons) e férmions (e.g. elétrons) têm-se as famosas distribuições de Bose-Einstein e Fermi-Dirac, respectivamente. No capítulo 4, serão descritas as perturbações nesta função de distribuição de fótons, com o objetivo de obter as anisotropias da radiação cósmica de fundo, estas no capítulo 5. É possível também, descrever a pressão de determinada espécie, a partir de sua função de distribuição [25], através de

$$p_i = g_i \int f_i(\vec{x}, \vec{p}) \frac{p^2}{3E} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.2)$$

A descrição das componentes do universo a partir de uma perspectiva de partículas somente é necessária no contexto das inhomogeneidades. Para descrever o comportamento individual de cada espécie, é preciso conhecer a sua função de distribuição e como esta evolui no tempo. O modelo de partículas fundamentais determina esquemas de classificação e controle para a dinâmica destas partículas. A classificação mais utilizada, agrupa as partículas subatômicas segundo as interações que estas realizam. Uma divisão comum separa as partículas em *hádrons* e *léptons*.

Os *hádrons* são partículas que interagem segundo as quatro forças elementares e são subdivididas em *quarks*, como exemplo clássico, tem-se o próton. Aqueles que são mais pesados que o próton, são geralmente chamados de *bárions* (ver 2.1.1), enquanto partículas menos massivas são chamadas de *mésons*. Já os *léptons* não sentem a força forte e não são compostos de quarks. Estas são partículas que, até agora, não apresentam estrutura interna. Desta forma, aparentam serem partículas verdadeiramente fundamentais (indivisíveis). O lépton mais conhecido é o elétron. Vamos agora analisar aspectos introdutórios para cada uma das principais componentes do universo nas próximas seções.

¹Observe que fizemos, $c \equiv 1$

2.1.1 Bárions

As partículas mais pesadas do modelo de partículas da física (e.g. próton, nêutron) são denominadas *bárions*. No contexto cosmológico, para efeito de densidade, pode-se chamar os átomos não ionizados (prótons e elétrons) de bárions, uma vez que a massa dos elétrons é muito inferior a dos prótons. No contexto cosmológico, não é possível medir diretamente o conteúdo de bárions, nem inferir sua densidade a partir da temperatura da CMB (como os fótons, por exemplo). A densidade de bárions pode ser inferida a partir de observações de objetos astrofísicos [26], e da sua distribuição nas galáxias. Grande parte da matéria bariônica distribuída no universo está em forma de gás no meio intergaláctico, assim como há bárions que não emitem, ou não apresentam radiação detectável da Terra (bárions escuros). Desta forma, a observação direta das galáxias não pode ser a única fonte de informação para inferir a densidade dos bárions.

É possível estabelecer fortes limites para a densidade de bárions a partir de estimativas de absorção da luz através do meio intergaláctico e também usando as florestas de Ly- α [27] em objetos astrofísicos. Outra técnica para determinação da densidade de bárions é a partir de estimativas de Nucleossíntese. Estas e outras técnicas nesta temática são discutidas em [28] [29] [30]. A figura 2.1.1 mostra os vínculos observacionais sobre os elementos leves Hélio, Lítio e Deutério. Este gráfico mostra, nas barras coloridas, a variação permitida para os valores de cada componente. As caixas delimitam a região do espaço de parâmetros em que há congruência observacional.

2.1.2 Matéria Escura

Matéria escura é uma forma de matéria de pressão desprezível, inferida a partir de seus efeitos gravitacionais sobre a matéria visível (bárions) e também seus efeitos de lentes gravitacionais. Esta forma de matéria não emite nem espalha luz ou qualquer tipo de radiação eletromagnética. A primeira inferência acerca da presença de uma forma de matéria insensível² à radiação eletromagnética foi feita por Zwicky, e também, na década de 1930 [31] [32] estudadas por Vera Rubin, [33] [34].

Nos estudos de Rubin, se aplica, e.g., o teorema do virial para avaliar a aglomeração de galáxias próximas, a velocidade de rotação e sua luminosidade total. Nestes trabalhos, foram determinados cerca de 400 vezes mais massa que o esperado, caso fosse considerada somente

²Na verdade minimamente acoplada à gravidade

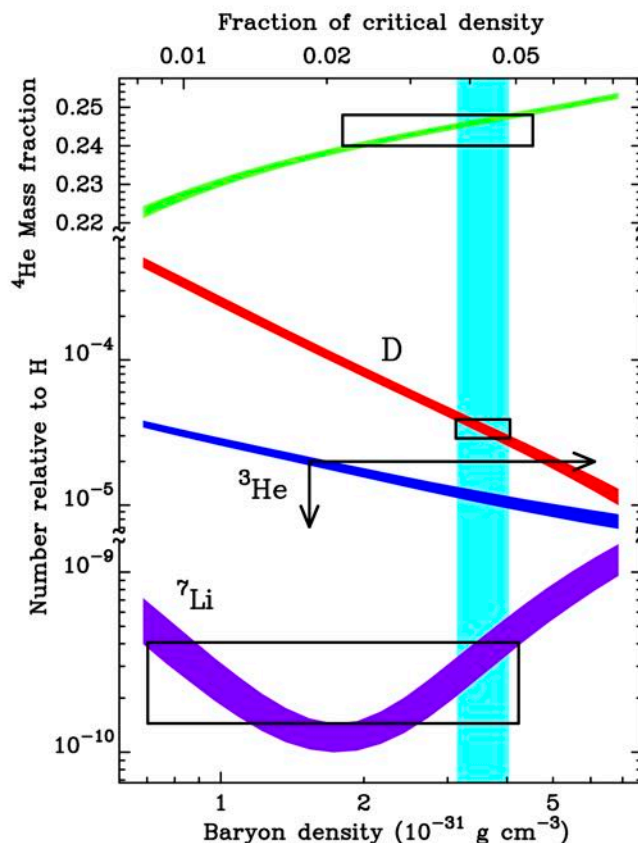


Figura 2.1: Vínculos sobre a densidade de bárions devido à nucleossíntese [30]. Predições para elementos leves.

a matéria observável. Este problema ficou conhecido como *problema da massa faltante* (do inglês, *missing mass problem*) [36]. Esta massa "faltante" é atribuída a um tipo de matéria não luminosa denominada de matéria escura. O método clássico para determinar esta massa envolve a medida do campo gravitacional em determinado sistema.

Na figura 2.2 nota-se a distribuição de velocidades de estrelas na galáxia NGC 6503, onde são observados valores superiores aos esperados pela teoria newtoniana, ao se considerar somente a matéria visível. Diversas técnicas para inferência da densidade de matéria escura (ou matéria total) vêm sendo desenvolvidas. Será mostrado no capítulo 4 que o espectro de potência de matéria - como ainda será visto - é uma das técnicas usadas para esta inferência, assim como a própria radiação cósmica de fundo, que será estudada no capítulo 5.

2.1.3 Fótons

Conhece-se a temperatura absoluta da Radiação Cósmica de Fundo com precisão extraordinária. O satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*), através de seu instrumento

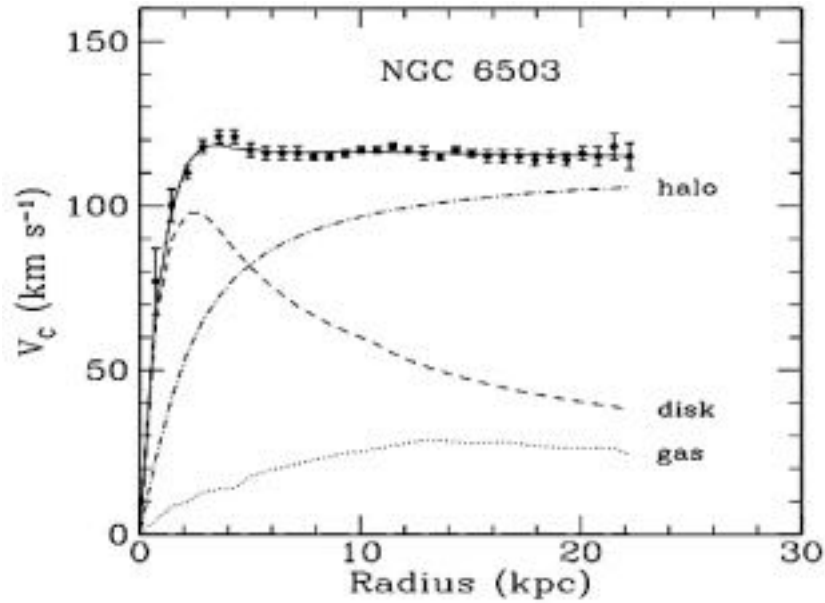


Figura 2.2: Curva de rotação da galáxia espiral NGC6503. Os pontos representam a medida de velocidade em função do raio da galáxia. A figura mostra as curvas teóricas de um halo de matéria escura (ponto-tracejada), de um disco (tracejada) e de um gás (pontilhada). [35]

FIRAS (*Far InfraRed Absolute Spectrophotometer*) estabeleceu o valor para a temperatura desta radiação em $T = 2.728 \pm 0.004$ (1σ) [13] [37]. Mais recentemente o Satélite Planck também realizou medidas precisas para a temperatura absoluta, com resultados em [38].

A densidade de energia associada a radiação é definida, por:

$$\rho_\gamma = g_\gamma \int f_\gamma(\vec{x}, \vec{p}) E(p) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.3)$$

onde a função de distribuição é $f_\gamma(\vec{x}, \vec{p}) = f_{BE}$ e $g_\gamma = 2$ (2 estados de spin). Usando a função de distribuição de Bose-Einstein, fica-se com

$$\rho_\gamma = 2 \int \frac{1}{e^{p/t} - 1} p \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.4)$$

onde a energia de um fóton é simplesmente $E = p^3$. A integral acima pode ser calculada em sua parte angular, para obter

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi T^4}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^3}{e^\xi - 1}, \quad (2.5)$$

³Lembre que foi feito $c \equiv 1$

faz-se $\xi \equiv p/T$. Esta integral fornece $\pi^4/15$, assim, se chega à conhecida lei de Stefan-Boltzmann, dada por

$$\rho_\gamma = \sigma T^4. \quad (2.6)$$

onde σ é a constante, expressa pela igualdade $\sigma \equiv \frac{\pi^2}{15}$

Obtém-se assim, a expressão para energia do fóton a partir de sua função de distribuição. O capítulo 4 apresentará a função de distribuição para um fluido de radiação perturbado. Isto trará modificações importantes quanto a esta distribuição, que terá, em primeira ordem, uma dependência em relação às coordenadas espaciais. A radiação, enquanto componente cosmológica, possui grande importância, em especial porque é fator energético de grande relevância para a dinâmica em altas energias. O entendimento desta componente é primordial para acessar as informações contidas na Radiação Cósmica de Fundo.

2.1.4 Energia Escura

A energia escura é um fluido hipotético⁴, com pressão negativa, necessário para fornecer o comportamento acelerado da expansão do universo e também para garantir a energia necessária para explicar diversas observações cosmológicas. Existem dois argumentos distintos para evocar a presença da energia escura. O primeiro deles é justamente a necessidade de compor a energia mínima necessária para obter um universo plano, ou seja, obter a energia crítica, hoje ⁵. Uma outra forte evidência a favor da existência de energia escura, foi descoberta pelas famosas análises (independentes) de supernovas do tipo Ia [6] [39]. Estas observações estabeleceram com razoável precisão o comportamento acelerado do universo atual. Isso só foi possível explicar, em nível teórico, a partir da inserção desta componente de energia escura.

Devido à natureza desconhecida desta forma de energia, diversas descrições físicas podem ser formuladas com o objetivo de rastrear o seu comportamento. A escolha mais simples, é a mesma que vem demonstrando grande sucesso observacional, a constante cosmológica. Ao se definir um fluido de pressão negativa, com equação de estado dada por $\omega = p/\rho$, com $\omega = -1$ é possível garantir uma componente cuja energia é constante (Λ) ao longo da evolução cósmica [40] [41] [42] [43]. Esta é capaz de descrever diversas das características detectadas nas principais observações cosmológicas.

⁴Somente seus efeitos são observados.

⁵Este ponto será aprofundado na seção 2.2.1.

Muitas outras tentativas teóricas para descrever a energia escura foram, e ainda estão sendo testadas. Embora a constante cosmológica explique bem uma variedade de observações, esta também não está isenta de alguns inconvenientes teóricos [44]. Um deles é conhecido como *problema da coincidência*, onde observa-se que esta energia escura passou a dominar a dinâmica cósmica em eras cosmológicas recentes, com uma densidade de energia muito próxima da de matéria total. Outras descrições cosmológicas podem atacar os problemas teóricos do modelo padrão. Existem também descrições que não exigem uma energia escura constante. Dentre as mais comuns estão os variados modelos de quintessência [45] [46] [47].

Outra possibilidade é a existência de interação entre a componente de energia escura e a matéria escura. O objetivo nesta tese é de justamente escrutinar um modelo de energia escura com produção de matéria escura a uma taxa constante, a partir do decaimento de vácuo, e suas consequências para a CMB. Modelos de decaimento de vácuo [48] [49] [50] [51] [52] vêm sendo propostos a partir de diferentes argumentações teóricas. Até o momento, a maior parte dos testes de concordância apontam bom acordo com as observações. Nesta tese grande foco será dado para a análise destes modelos do ponto de vista observacional. Será obtido o espectro de anisotropia de temperatura para a CMB, assim como, serão detalhados os efeitos específicos apresentados por estes modelos de decaimento.

2.2 Equações de Einstein

A Relatividade Geral estabelece que a geometria do espaço-tempo é um efeito produzido por campos gravitacionais. Esta descrição abdica do conceito newtoniano de força e relaciona a dinâmica dos corpos com a geometria do espaço-tempo. As relações obtidas por esta teoria são dadas pelas equações de Einstein. Pode-se fazer $8\pi G/3 = 1$, para reduzir a equação (1.2), em:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 3T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum que descreve o conteúdo material. Já o lado esquerdo depende o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que estabelece a geometria do espaço-tempo. O outro tensor de ordem 2 $R_{\mu\nu}$, é o tensor de Ricci. Já o escalar R é o tensor de Ricci contraído (escalar de Ricci). É possível então obter soluções para (2.7) utilizando-se, do lado esquerdo um tensor métrico específico. Do lado direito, um fluido que descreva as componentes observadas no

universo, através do tensor energia-momentum ($T_{\mu\nu}$).

2.2.1 O Princípio Cosmológico e as Equações de Campo

Em pequenas escalas, observam-se planetas, sistemas planetários, estrelas e galáxias. Em grandes escalas (centenas de Mpc), diversas galáxias e estruturas de galáxias podem ser englobados numa escala homogênea. Nestas escalas é possível tomar o universo como homogêneo e isotrópico. Esta hipótese, se reflete no que é denominado de Princípio Cosmológico. O Princípio Cosmológico enuncia que o universo, quando visto de uma escala suficientemente grande, tem as mesmas propriedades para todos os observadores. Esta propriedade pode ser ficar evidenciada na homogeneidade da radiação cósmica em 1.7.

Fundamentando-se no princípio cosmológico e em observações que indicam uma expansão para o cosmos, deseja-se descrever a geometria do universo através uma métrica cuja seção espacial seja homogênea e isotrópica, mas que esteja livre para se expandir ou contrair-se. A partir destas hipóteses, a única métrica que pode ser construída é a chamada métrica FLRW. A métrica $g_{\mu\nu}$ de um espaço 4-dimensional, homogêneo, espacialmente plano e isotrópico é descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (2.8)$$

que, através de uma transformação para o sistema de coordenadas esférico, pode ser colocado na forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi \right], \quad (2.9)$$

que também pode ser colocada na expressão conforme.

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-c^2 d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi \right], \quad (2.10)$$

onde o tempo t foi redefinido para o tempo conforme τ , através da relação

$$a d\tau \equiv dt. \quad (2.11)$$

É possível obter soluções para a métrica (2.10) ao inserirmos do lado direito das equações de Einstein, um tensor energia-momentum com conteúdo energético compatível com a expressão

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

onde ρ é a densidade de energia do fluido e p é a pressão exercida por ele. A quadri-velocidade do respectivo fluido é dada por u_μ . Em coordenadas comóveis esta quadri-velocidade assume a forma $u_\mu = \delta_\mu^0$. É possível contrair os tensores dos dois lados da equação (2.7) obtêm-se $R = -T$. Substituindo de volta em (2.7), ficamos com a conveniente relação:

$$R_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde o lado direito é

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T, \quad (2.14)$$

Pode-se agora utilizar a métrica (em (2.9)) do espaço-tempo e um conteúdo material-energético (através de (2.12)) para resolver as equações de Einstein. O tensor de Ricci, do lado esquerdo, pode ser calculado com a métrica FRW, da eq. (2.9). Obtém-se para a componente temporal

$$R_{00} = \frac{-3\ddot{a}}{a}, \quad (2.15)$$

enquanto as componentes espaciais, resultam em

$$R_{ii} = -g_{ii} \left[\frac{2k + 2\dot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right], \quad (2.16)$$

onde a derivada em relação ao tempo cosmológico é representada pelo ponto acima das variáveis. Os termos cruzados do tensor de Ricci ficam

$$R_{i0} = R_{0i} = R_{ij} = 0, \quad (2.17)$$

para $i \neq j$. Agora, olhando para lado direito da equação ((2.14)) tem-se

$$S_{00} = 1/2(\rho + 3p), \quad (2.18)$$

$$S_{ii} = -1/2g_{ii}(\rho - 3p), \quad (2.19)$$

com os termos cruzados i e j dados por

$$S_{ij} = S_{io} = S_{oi} = 0, \quad (2.20)$$

para $i \neq j \neq 0$. Ao igualar as equações (2.18) e (2.15), obtém-se a *equação da aceleração*:

$$\ddot{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)a. \quad (2.21)$$

Na equação acima é possível observar que, se ρ e p são positivos, então a expansão do Universo será desacelerada ($\ddot{a} < 0$). Por outro lado, se $p < -\rho/3$, o Universo estará acelerado ($\ddot{a} > 0$). Agora olhando para os termos espaciais das equações (2.16) e (2.19), usando também a eq. de aceleração (2.21), obtém-se a relação

$$3H^2 = \rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (2.22)$$

que é historicamente conhecida como a *equação de Friedmann*. A função $H = \dot{a}/a$ é a função de Hubble. Esta é uma equação de grande importância para a cosmologia. Uma vez conhecida a densidade de energia ρ , a curvatura K , e a evolução do fator de escala $a(t)$, toda a dinâmica do universo homogêneo é revelada através de (2.22). Conhecer $H(t)$ com precisão é um dos maiores desafios da cosmologia moderna.

Ao supor que o universo está livre de forças (ou interações) externas, tem-se como consequência a conservação do tensor energia-momentum. Com isto, fica-se com

$$T_{\mu\nu;0} = 0, \quad (2.23)$$

e usando o fluido perfeito da equação (2.12) e fazendo as operações necessárias, pode-se colocar a equação acima na forma

$$T_{\mu\nu;0} = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \quad (2.24)$$

e assim tem-se a forma mais usada da equação da conservação da energia para um fluido cosmológico na forma

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.25)$$

A equação de Friedmann (2.22), a equação da aceleração (2.21) e a equação da conser-

vação da energia do fluido (2.25) ⁶, são relações chave para entendermos as características dinâmicas da expansão do universo. Para descrever a evolução temporal do universo através destas equações, deve-se conhecer o conteúdo energético deste universo. Em geral, precisamos conhecer a densidade de energia total, que pode-se escrever como

$$\rho_T = \sum_{i=1}^n \rho_i. \quad (2.26)$$

onde ρ_i é a densidade de energia de cada componente e ρ_T é densidade de energia total. Para cada específico conteúdo material, a equação de Friedmann fornecerá uma evolução cosmológica particular. É necessário especificar, para cada fluido-componente, de que forma a sua densidade de energia se relaciona com a pressão do fluido. Isto é feito da chamada *equação de estado*, dada por

$$\omega_i = \frac{p_i}{\rho_i}. \quad (2.27)$$

Agora, com as equações (2.16), (2.15), (2.13) e (2.12) pode-se buscar conteúdos energéticos que nos forneçam soluções homogêneas e isotrópicas. Esta busca por conteúdo material estabelece a interface entre os modelos teóricos e as diferentes observações, de forma que devemos descrever componentes que produzam grandezas física compatíveis com as grandezas observadas.

Da equação (2.22) obtivemos a definição da função de Hubble, dada por

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.28)$$

com dimensões de $Km/s.Mpc$. É possível obter o parâmetro adimensional h , através de $h = \frac{H_0}{100km/s.Mpc}$. Define-se também a função de E(t) com

$$E(t) = \frac{H(t)}{H_0}, \quad (2.29)$$

e também o parâmetro de desaceleração q , dado por

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}. \quad (2.30)$$

Com a aplicação da métrica FRW (2.9) na equação tempo-tempo de (1.2), teremos a *equação de Friedmann*, que expressaremos como [53] [25]

⁶A equação da continuidade pode ser obtida a partir de (2.22) e (2.21).

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_T(t) + \frac{\rho_{cr} - \rho_0}{a^2(t)} \right], \quad (2.31)$$

onde G é constante da gravitação universal.

A equação (2.31) demonstra a dinâmica do universo a partir da contribuição de suas componentes energéticas. O segundo termo do lado direito da equação contém a contribuição da curvatura do espaço. Nesta dinâmica o fator ρ_0 é a densidade total de energia hoje.

A densidade crítica é geralmente escrita

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.32)$$

mas já que fazemos $8\pi G/3 = 1$, a expressão (2.32) fica

$$\rho_c \equiv H^2, \quad (2.33)$$

e assim o parâmetro de energia fica

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}}. \quad (2.34)$$

Observa-se que ao fazer $8\pi G/3 = 1$, têm-se as relações para a densidade e pressão

$$\rho_{fis} \equiv \frac{3}{8\pi G} \rho, \quad (2.35)$$

$$p_{fis} \equiv \frac{3}{8\pi G} p, \quad (2.36)$$

onde p é a redefinição para pressão e ρ é a redefinição para a densidade de energia. p_{fis} e ρ_{fis} são a pressão e as densidades com unidades usuais da física⁷. Pode-se reescrever o segundo membro, ao dividir e multiplicar pela densidade crítica no tempo atual, e assim escrever a equação de Friedmann ((2.31)) no formato geral

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\Omega_T(t) + \frac{1 - \Omega_0}{a^2(t)} \right]. \quad (2.37)$$

Como o termo $1 - \Omega_0 \equiv \Omega_k$, pode-se sumarizar:

⁷Escolhemos esta notação para ficar em acordo com as equações do código numérico CLASS, que será usado adiante neste trabalho.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_k = 0 \Rightarrow \Omega_0 = 1 \Rightarrow k = 0 \text{ (Curvatura nula),} \\ \Omega_k > 0 \Rightarrow 0 < \Omega_0 < 1 \Rightarrow k = +1 \text{ (Curvatura positiva),} \\ \Omega_k < 0 \Rightarrow \Omega_0 > 1 \Rightarrow k = -1 \text{ (Curvatura negativa).} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_k > 0 \Rightarrow 0 < \Omega_0 < 1 \Rightarrow k = +1 \text{ (Curvatura positiva),} \\ \Omega_k < 0 \Rightarrow \Omega_0 > 1 \Rightarrow k = -1 \text{ (Curvatura negativa).} \end{array} \right\} \quad (2.39)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_k > 0 \Rightarrow 0 < \Omega_0 < 1 \Rightarrow k = +1 \text{ (Curvatura positiva),} \\ \Omega_k < 0 \Rightarrow \Omega_0 > 1 \Rightarrow k = -1 \text{ (Curvatura negativa).} \end{array} \right\} \quad (2.40)$$

Na mecânica dos fluidos é possível descrever fenômenos de deslocamento utilizando a equação da continuidade. Já foi visto, anteriormente, a equação da continuidade no contexto da relatividade geral (equações (2.23), (2.24) e (2.25)). Pode-se escrever um Universo multifluido a partir da composição de vários fluidos minimamente acoplados, i.e, que integram somente de forma gravitacional. Neste contexto, um fluido perfeito com pressão p_i e densidade ρ_i (componente i), tem-se

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0. \quad (2.41)$$

Para o fluido total, composto pela soma das componentes $\rho = \sum \rho_i$

$$\dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + p_T) = 0. \quad (2.42)$$

Com a equação da continuidade (2.42) para fluido cosmológico total e também com a equação de Friedman (2.22), pode-se descrever o comportamento cosmológico e obtém-se uma descrição matemática da evolução do cosmos.

2.2.2 Redshift cosmológico

Ao observar diferentes objetos astronômicos, nota-se em objetos distantes a modificação das linhas espectrais esperadas. No contexto de um universo em expansão, os objetos tendem a apresentar um desvio para maiores comprimentos de onda, portanto apresentam o que é chamado de desvio para o vermelho, ou *redshift*. Pode-se definir este redshift como um parâmetro⁸

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.43)$$

onde λ_e é o comprimento de onda emitido, e λ_0 , é o comprimento de onda no instante da observação. Ao observar o redshift de objetos distantes, pode-se relacioná-lo com o fator de escala $a(t)$ e com o tempo. Devido à expansão cósmica, é direto relacionar que objetos

⁸Para objetos próximos, é possível observar um blueshift devido à sua velocidade peculiar de aproximação.

astrofísicos com grandes desvios para vermelho foram emitidos numa época onde o fator de escala era muito menor.

Pode-se obter uma relação entre redshift (z) e o fator de escala ao tomarmos um objeto com coordenadas espaciais (r, θ, ϕ) , emitindo um sinal de radiação eletromagnética observado da terra, com coordenadas $(0, 0, 0)$. Sabendo que a luz irá percorrer uma geodésica nula, da equação (2.9), teremos

$$c \frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.44)$$

Se em determinado tempo t_e uma primeira onda é gerada e em seguida observada na terra num tempo t_0 , pode-se escrever

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.45)$$

Agora pode-se expressar uma frente de onda consecutiva à primeira, em que tem-se

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.46)$$

Do lado direito, a integração comóvel levará ao mesmo resultado em ambas as equações (2.45) e (2.46). De forma que pode ser igualado o primeiro membro para obter

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.47)$$

Sabendo agora que as duas frentes de onda foram emitidas decorrido um tempo curto entre elas, pode-se supor que $a(t)$ é constante e assim escrever

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (2.48)$$

e agora obtém-se a relação desejada para o redshift e o fator de escala $a(t)$, fazendo

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.49)$$

Com a equação acima (2.49), podem-se expressar a função de Hubble e a equação de Friedmann diretamente em função do redshift. Efetivamente, pode-se usar o redshift (z) como um parâmetro de tempo. Grandes valores de redshift indicam um tempo no qual o universo tinha o fator de escala muito pequeno (passado cosmológico), enquanto pequenos

valores de redshift indicam eras recentes. Em particular, o tempo atual fica sendo $z \equiv 0$.

Parte-se agora para a análise de diferentes modelos cosmológicos. Em específico, estudaremos a cosmologia padrão e o modelo Λ CDM assim como o modelo de decaimento de vácuo $\Lambda(t)$ CDM. O primeiro será utilizado como referência e, assim, se estabelecerá um contraponto para realizar comparações entre os diversos parâmetros de interesse físico.

Capítulo 3

Modelos Cosmológicos e a Energia Escura

3.1 Modelo padrão (Λ CDM plano)

O modelo padrão da cosmologia é descrito por um universo que, além de matéria e radiação, é constituído por uma exótica componente denominada de energia escura. Esta é descrita geralmente por uma constante cosmológica, a qual possui uma densidade de energia constante. Este modelo foi favorecido, inicialmente, a partir do advento da determinação de distâncias com supernovas do tipo Ia [6] [7] que estabeleceu um universo em expansão acelerada. Em contraste, o modelo de melhor ajuste anterior (CDM) foi superado [54] [55] [25]. A densidade de energia total para o modelo padrão Λ CDM é descrita pela soma

$$\rho_T = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (3.1)$$

enquanto a constante cosmológica terá energia

$$\rho_\Lambda = \Lambda = cte. \quad (3.2)$$

A matéria incoerente não exerce qualquer pressão, logo $p_m = 0$ e assim $w_m = 0$. A radiação tem pressão conhecida, dada por $p_r = 1/3\rho_r$ e assim $w_r = 1/3$. A constante cosmológica foi concebida para gerar uma expansão cósmica a partir de pressão negativa e, desta forma, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, com $w_\Lambda = -1$. Destas equações, vemos que a constante cosmológica possui densidade constante e produz uma pressão contrária a ação da gravidade. A inserção

da constante cosmológica (Λ) é a opção mais simples para gerar uma aceleração na expansão do universo.

Ao examinar a equação de aceleração (2.21), nota-se que o universo pode estar acelerado somente se $p < -(1/3)\rho$. Se $p > -(1/3)\rho$ o universo terá uma expansão desacelerada. A escolha de uma constante cosmológica com as propriedades citadas produz um universo cuja expansão será acelerada quando Λ for a componente cósmica dominante.

Para descrever a evolução do universo, é conveniente definir a densidade crítica, dada pela equação (2.33), a qual, conforme já visto anteriormente, está associada ao valor preciso que tornaria o universo espacialmente plano ($K = 0$). Da equação de Friedmann, fica-se com $\rho_c = H^2$ ¹. Se a curvatura do universo é positiva, teremos $\rho > \rho_c$, enquanto que uma curvatura negativa nos dá $\rho < \rho_c$. O universo espacialmente plano tem densidade $\rho_T = \rho_c$.

Ao dividir a equação de Friedmann (2.22) por ρ_c , obtém-se o parâmetro Ω , já definido em (2.34). Agora, para o modelo Λ CDM, pode-se escrever para o multifluido cosmológico

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1, \quad (3.3)$$

para o caso sem curvatura. O parâmetro de cada componente fica definido com

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c} = \frac{\rho_r}{H^2}, \quad (3.4)$$

para o termo de radiação. O termo de matéria, fica dado por

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m}{H^2}, \quad (3.5)$$

e o termo da constante cosmológica

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\rho_\Lambda}{H^2}. \quad (3.6)$$

Para obter a evolução dos cosmos, é necessário conhecer como se comportam as componentes energéticas de cada fluido que o compõe. Para isso, deve-se analisar cada uma separadamente. Ao utilizar-se a equação de estado para cada componente na equação de conservação, dada pela equação (2.41), é possível integra-las diretamente em função de a , para obter

¹Lembre-se que redefinimos ρ de forma que $8\pi G\rho_{fis}/3 = \rho$.

$$\rho_m \propto a^{-3}, \quad (3.7)$$

para a densidade de energia da matéria incoerente, e

$$\rho_r \propto a^{-4}, \quad (3.8)$$

para a densidade de energia da radiação. Por outro lado, o termo cosmológico resulta em

$$\rho_\Lambda = \Lambda. \quad (3.9)$$

Com as equações acima, (3.7), (3.8) e (3.9), em conjunto com, as já conhecidas: equação de Friedmann (2.22) e a equação da conservação (2.42), pode-se revelar toda a dinâmica cosmológica. O próximo passo para o multifluido cosmológico é integrar numericamente a equação de Friedmann, que com ajuda das equações de cada componente, agora fica, em sua forma geral, com curvatura, fica igual a

$$H(a)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.10)$$

A tese irá focar no caso plano, desta forma o termo de curvatura $\Omega_k \equiv 0$ e fica-se com

$$H(a)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}, \quad (3.11)$$

A equação (3.11) nos permite obter toda a evolução cosmológica (em nível de base de descrição). Cabe observar, também, como ficam as equações se o redshift é utilizado como parâmetro de evolução temporal. Uma vez que o redshift foi determinado através da equação (2.49), pode-se, facilmente, expressar as principais equações da cosmologia em função do redshift.

O parâmetro de desaceleração, pode ser escrito com (2.21), que irá se tornar

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (3.12)$$

e, como

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a}\dot{a} = -(1+z)H(z), \quad (3.13)$$

o que nos permite calcular \ddot{a} e obter

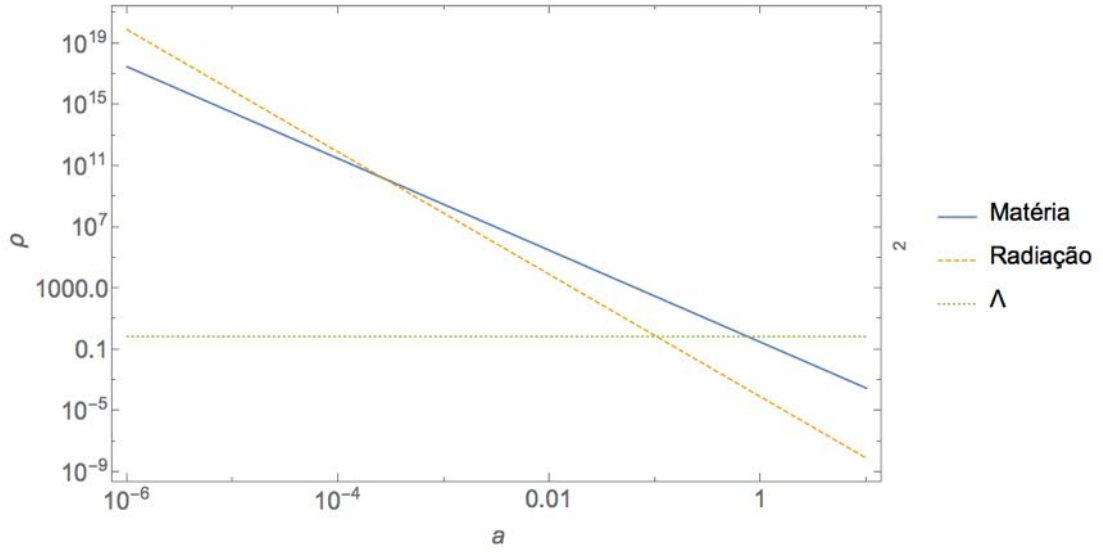


Figura 3.1: Densidade de energia para a evolução cosmológica com um fluido único de radiação (linha tracejada), matéria (linha contínua) e constante cosmológica (linha pontilhada), respectivamente (unidades arbitrárias).

$$q(z) = (1+z) \frac{H'(z)}{H(z)} - 1, \quad (3.14)$$

onde $H' \equiv dH/dz$. Já a equação de Friedmman, ficará

$$H(z)^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}. \quad (3.15)$$

Por vezes, para obter a dinâmica cósmica, também é interessante integrar a função $E(z)$, já definida por $E \equiv H(z)/H_0$, assim, tem-se um conjunto completo de equações para descrever o cosmos, tanto em função do fator de escala a como em função do redshift z . Cada um destes parâmetros apresenta convenientes - e inconvenientes - para determinada descrição.

Pretende-se agora descrever o comportamento do cosmos separando sua evolução em eras cosmológicas. Nas próximas seções, serão analisadas as eras de radiação, de matéria e de domínio da constante cosmológica. A figura (3.1) mostra a evolução para um universo para cada fluido cosmológico, com as componentes apresentadas. Desta figura é possível inferir cada era cronológica em cada componente cosmológica domina a dinâmica evolutiva. Já a figura (3.2) mostra a evolução do universo multifluido, evidenciando as diferenças para diferentes valores do parâmetro Ω_m (matéria total).

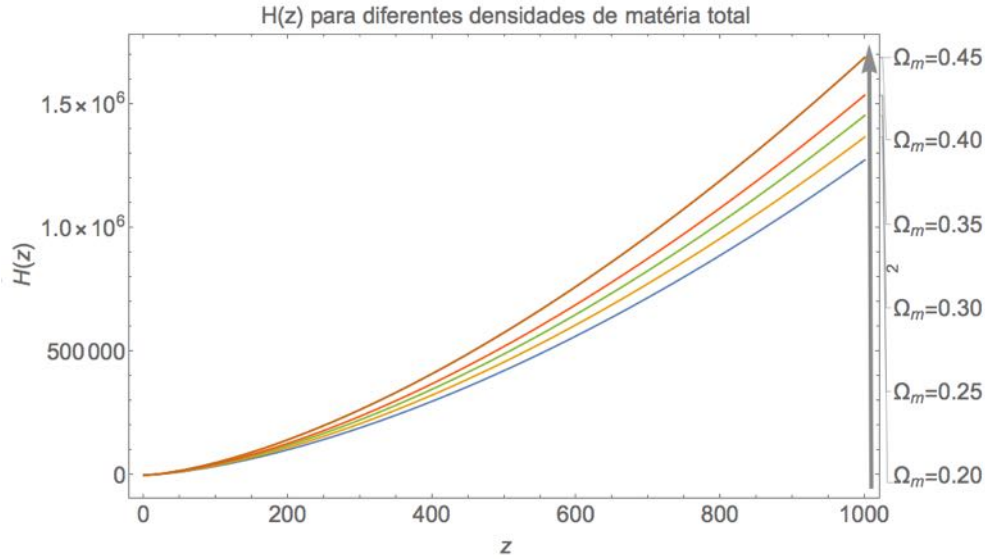


Figura 3.2: A função de Hubble $H(z)$ para o modelo Λ CDM e diferentes parâmetros de matéria total (unidades arbitrárias). Foram fixados os parâmetros $h = 0.7$, $\Omega_\Lambda = 0.6$, $\Omega_{rad} = 8 * 10^{-5}$ (com $a_0 = 1$)

3.1.1 A Idade do Universo

É importante, ao analisar cada modelo cosmológico, poder calcular a idade do universo correspondente aos parâmetros específicos. A ciência domina inúmeras técnicas para determinação de idades. Com técnicas de datação geológica, é possível determinar a idade do planeta Terra, desta forma garantindo uma primeira determinação de limites mínimos para a idade do cosmos. No contexto astronômico a simples determinação do redshift de objetos distantes pode estabelecer fortes vínculos à idade do universo. Neste caso, porém, é inevitável que uma dependência de modelo acabe influenciando na exatidão do resultado estimado.

Uma técnica matemática simples, nos permite calcular a idade do universo utilizando as equações de obtidas na seção anterior 3.1. Para tanto, parte-se da equação (??), para $E(z)$, colocando-a na forma

$$E = \frac{1}{aH_0} \frac{da}{dt}. \quad (3.16)$$

em seguida, isolam-se os termos convenientes para a integração e, também fazendo $z = (a - 1)/a$

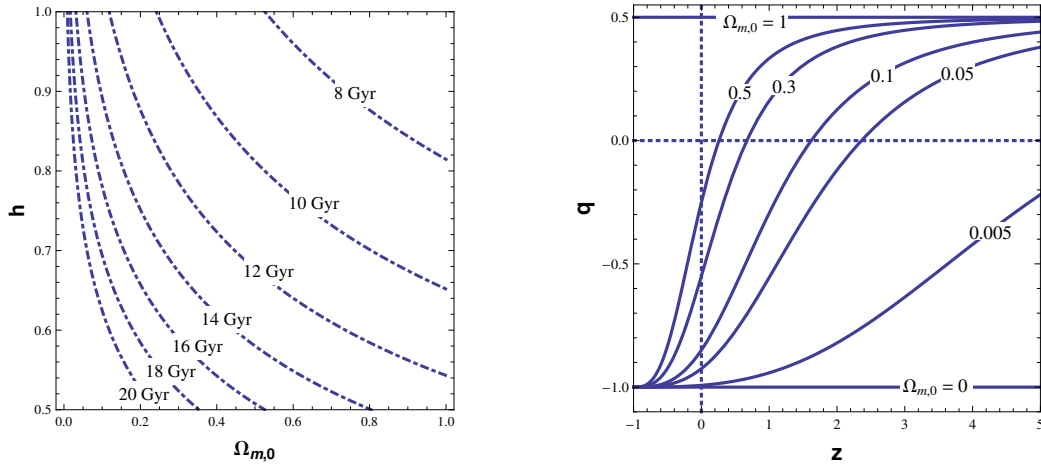


Figura 3.3: A Figura mostra as isócronas para o modelo Λ CDM plano. Do lado esquerdo o plano $\Omega_{m,0}$ vs h . Do lado direito, o parâmetro de desaceleração (3.14) em função do redshift. [56]

$$H_0 \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{a} \frac{1}{E\left(\frac{1}{a} - 1\right)}, \quad (3.17)$$

e isolando t_0 , teremos

$$t_0 = \left(\frac{9.775 \text{Ganos}}{h} \right) \int_0^1 \frac{da}{aE\left(\frac{1}{a} - 1\right)}. \quad (3.18)$$

obtém-se uma relação conveniente para obter a idade do universo. Na figura 3.3 mostramos isócronas no plano $\Omega_{m,0}$ vs h para o modelo Λ CDM plano ($k = 0$).

3.1.2 Era de Radiação

Deve-se tomar como base períodos de tempo curtos ($t \ll t_0$ ou $a \ll a_0$), referentes a eras iniciais do modelo de Big Bang, quando o fator de escala era pequeno. Nesta aproximação, o termo dominante da equação 3.11 é o da radiação, como mostra a figura 3.4. Na era de radiação, pode-se simplificar esta equação por

$$H(a) \approx H_0 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \right]^{1/2}, \quad (3.19)$$

e, agora, utilizando a definição da função de Hubble $H = \dot{a}/a$ e a equação acima (3.19), é possível reescrevê-la na forma

$$dt = \frac{da}{H_0 a \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \right]^{1/2}}, \quad (3.20)$$

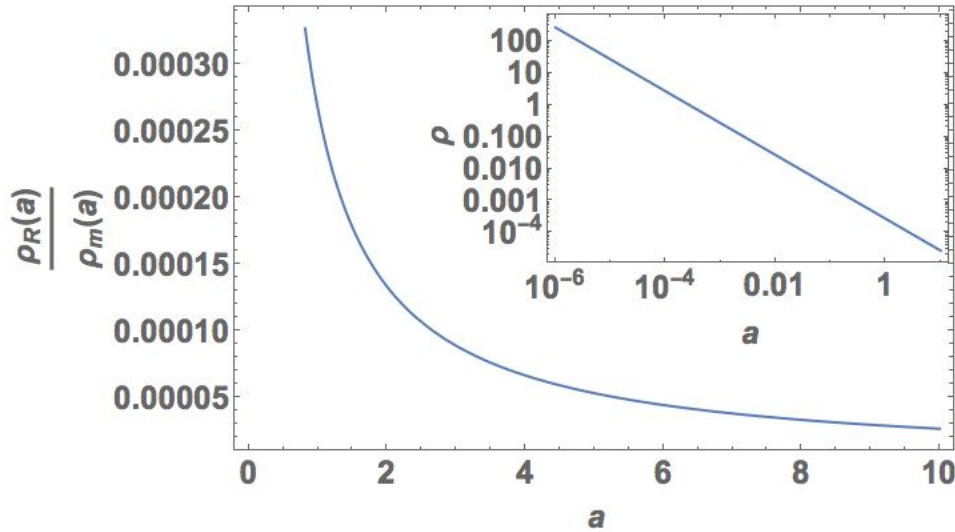


Figura 3.4: Comparação para a evolução no tempo das densidades de energia da radiação e matéria (com $a_0 = 1$).

que é facilmente integrada para obter a evolução do fator de escala na era de radiação

$$a(t) = [2H_0 a_0^2 (\Omega_{r,0})^{1/2}]^{1/2} t^{1/2}, \quad (3.21)$$

Agora, a função de Hubble fica simplesmente

$$H(t) \approx \frac{1}{2t}, \quad (3.22)$$

para a era de dominação da radiação.

3.1.3 Era de Matéria

O termo de matéria, devido a sua dependência com o fator de escala dada por $\rho_m \propto a^{-3}$, irá gradativamente superar a energia de radiação. Durante a evolução cósmica suas densidades serão (foram) iguais. Observa-se que, que com os parâmetros utilizados, o fator de escala de igualdade radiação-matéria (a_{eq}) de aproximadamente $a_{(rad=mat)} \equiv a_{eq} \approx 10^{-4}$. Admitindo $a_0 \equiv 0$, o momento da igualdade fica dado por

$$a_{eq} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}}. \quad (3.23)$$

Embora sujeito à estimativa menos precisa, o parâmetro de Hubble pode ser aproximado

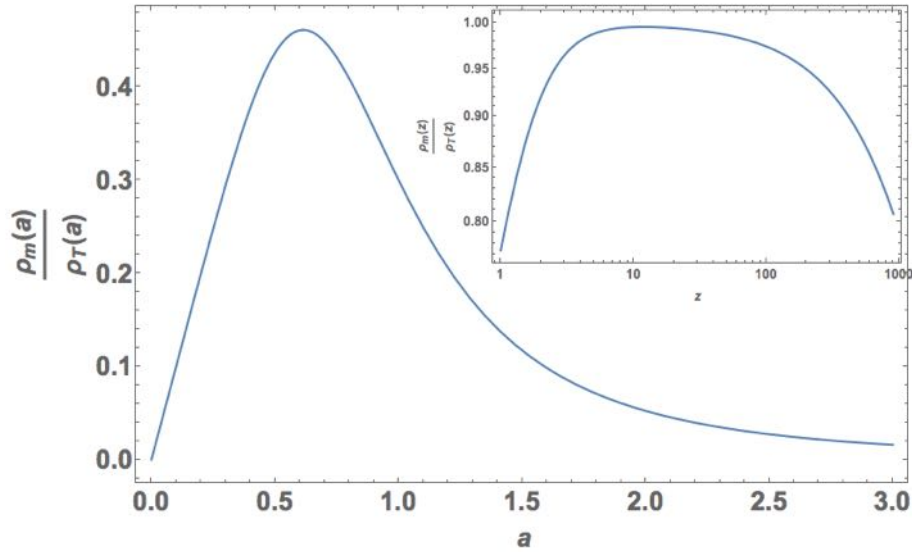


Figura 3.5: Evolução da razão para as funções de densidade de matéria total e densidade de energia total, tanto em função do fator de escala a como em função do redshift (z).

Usa-se $a_0 = 1$.

com razoável precisão pela função

$$H(a) \approx H_0 \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \right]^{1/2}, \quad (3.24)$$

e, agora, novamente usando a definição da função de Hubble obtém-se

$$dt = \frac{da}{H_0 a \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \right]^{1/2}}, \quad (3.25)$$

que é facilmente integrada para obter a evolução do fator de escala na era de radiação

$$H(t) \approx \frac{2}{3t}, \quad (3.26)$$

A figura 3.5 mostra o domínio da matéria ao passo que o universo se expande. Neste gráfico ² é apresentada a razão $\frac{\rho_{m,0}}{\rho_{T,0}}$ e sua evolução, tanto em função do fator de escala, como em função do redshift. Observa-se que a matéria domina grande parte da evolução do cosmos, desde grandes redshifts até eras cosmológicas recentes. A era de matéria se inicia por volta de $z \approx 3000$ (redshift aproximado da igualdade radiação-matéria), atinge domínio entre $z \approx 300$ até $z \approx 10$ e somente passa a ser vencida pela constante cosmológica em eras

²Observe que que as escala do *zoom* está em logarítimo

mais recentes ($z \approx 5$)³.

3.1.4 Era de Energia Escura

A adição da energia escura é necessária para garantir um comportamento acelerado da expansão do cosmos. A constante cosmológica é capaz de realizar esta descrição de forma simples, ao fazer sua densidade com

$$\rho_\Lambda = \Lambda, \quad (3.27)$$

e sua pressão por

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\Lambda. \quad (3.28)$$

A época de domínio da constante cosmológica se dá a partir do momento em que sua densidade de energia supera a da matéria, e isso acontece quando o fator de escala atinge o valor

$$a_{(mat=\Lambda)} = \left[\frac{\rho_{m,0}}{\rho_{\Lambda,0}} \right]^{1/3}, \quad (3.29)$$

marcando assim o final da era de matéria. A partir deste momento a constante cosmológica passa a dominar indefinidamente. Nessas condições a eq. de Friedmann (3.11) pode ser escrita

$$H(a)^2 \approx H_0^2 [\Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}, \quad (3.30)$$

e ao re-expressarmos a função de Hubble, no limite assintótico ($a \rightarrow \infty$), ficamos com

$$dt \propto \frac{da}{H_0 a [\Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}}, \quad (3.31)$$

que é facilmente integrada para obter a evolução do fator de escala na era da energia escura

$$a(t) \propto e^{H_0 [\Omega_{\Lambda,0}]^{1/2} t}. \quad (3.32)$$

A função de Hubble fica expressa por

³Observe que estes valores são aproximados e também dependentes dos parâmetros utilizados.

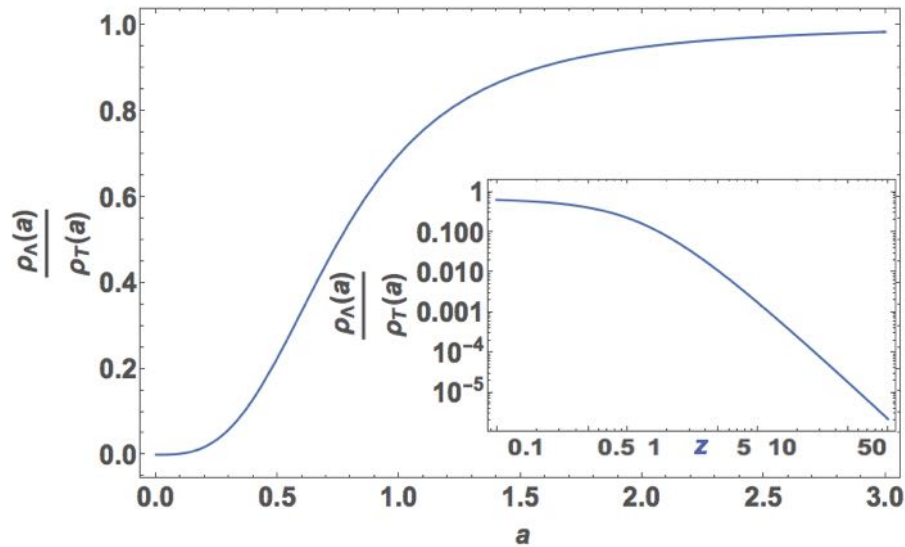


Figura 3.6: Evolução da razão para as funções de densidade de energia escura e densidade total, tanto em função do fator de escala a como em função do redshift (z). Usa-se $a_0 = 1$.

$$H(t) \approx H_0 \left[\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (3.33)$$

como era esperado. Na figura 3.6 observa-se que o fluido da constante cosmológica domina a dinâmica do fluido cósmico. Nota-se que além das características pouco comuns desta componente energética, é possível perceber que a constante cosmológica passou a dominar a evolução cósmica somente em eras recentes, ou seja, para redshift da ordem de $z \approx 1$.

Veremos na próxima seção como um modelo cosmológico alternativo também pode descrever o cosmos.

3.2 Modelos com Interação no Setor Escuro

Apesar do grande sucesso da cosmologia padrão (Λ CDM), apresentando boa concordância com as observações, ainda são necessários grandes avanços para entender com exatidão a dinâmica cósmica. A presença da energia escura é característica fundamental para explicar a expansão acelerada. A descrição desta componente através de uma constante cosmológica enfrenta alguns problemas teóricos [44] como exemplificado na subseção 2.1.4. Ao interpretar a constante cosmológica como a densidade de energia associada à flutuação quântica do vácuo, obtêm-se um resultado divergente. Mesmo ao impor uma renormalização, o valor

obtido é absurdamente alto (cerca de $10^{122}m^{-2}$) [57] [58]. O valor observacional associado à energia do vácuo está na ordem de $10^{-52}m^{-2}$ [59] [60].

A lista de modelos alternativos é imensa [61] [62]. Muitas das alternativas são desclassificadas quando confrontadas com testes observacionais. Em alguns casos é possível obter concordância razoável em determinados testes, porém, há discordância definitiva em outras observações. Modelos com mecanismos de interação no setor escuro (decaimento de vácuo em matéria escura, especificamente) [63] [64] [65] vêm se mostrando capazes de estabelecerem concordância com diferentes observações. A determinação precisa de modelos que se adequem às observações representa uma fronteira de pesquisa da cosmologia. Por este motivo, diferentes modelos vêm sendo testados. Os modelos cosmológicos com decaimento de vácuo em matéria escura concebem uma possível via de análise.

Este trabalho foca em analisar um modelo específico de decaimento, o qual se dá a uma taxa constante. Os modelos com interação no setor escuro são caracterizados por uma equação de fluido com componente de transferência entre a matéria escura e a energia escura. Os resultados observacionais apresentam boa concordância para alguns destes modelos [48] [49] [50] [66] [67] [68]. Nestes modelos de interação, a equação da conservação não pode ser escrita de forma independente para cada uma destas componentes. A principal modificação, se dá na equação da conservação que agora fica

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu}{}^{DM} + T^{\mu\nu}{}_{;\mu}{}^{DE} = 0, \quad (3.34)$$

que indica a transferência de energia entre as componentes citadas ⁴. Para cada componente, pode-se escrever separadamente

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu}{}^{DM} = Q^\nu, \quad (3.35)$$

onde a matéria escura (DM do inglês *Dark Matter*), respeita a relação $T^{\mu\nu}{}_{DM} = \rho_{DM}u^\mu u^\nu$, enquanto

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu}{}^{DE} = -Q^\nu, \quad (3.36)$$

para a matéria escura (DM do inglês *Dark Energy*), respeita a relação $T^{\mu\nu}{}_{DE} = \Lambda u^\mu u^\nu$. Pode-se decompor ainda

⁴Escolhemos manter os termos em inglês: DM \rightarrow *Dark Matter* | DE \rightarrow *Dark Energy*, para a matéria escura e energia escura, respectivamente. A posição destes índices é irrelevante.

$$Q^\mu = Qu^\mu + \bar{Q}^\mu, \quad (3.37)$$

que expressa os termos de transferência de energia Q e o termo de transferência de momentum \bar{Q} (onde $\bar{Q}^\mu u_\mu = 0$). Em um espaço-tempo isotrópico espera-se $\bar{Q}^\mu = 0$. Observa-se também, que o fator de interação para a energia fica dado por Q^μ . Se $Q^\mu = 0$, fica claro que as componentes se conservam independentemente.

3.2.1 Gás de Chaplygin Generalizado

O gás de Chaplygin (gC) é uma descrição matemática de um fluido com características peculiares. Este fluido é capaz de descrever o setor escuro do Universo, ou seja, tem o comportamento esperado da soma das componentes da matéria escura e da energia escura. A equação de estado deste fluido, pode ser escrita com

$$P = -A\rho^{-\alpha}, \quad (3.38)$$

onde A é uma constante positiva e o parâmetro $\alpha \equiv 1$ para o gás de Chaplygin, enquanto é permitido variar $0 < \alpha < 1$ para o *gás de Chaplygin generalizado* [69] [70] [71]. Existem também outras modificações deste fluido [72], porém, este trabalho se dedicará ao estudo da classe de fluidos capazes de descrever o modelo de decaimento de energia escura aqui estudado. Utilizando a equação (3.38) na equação da continuidade, teremos

$$\rho = \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{1/(1+\alpha)}, \quad (3.39)$$

onde B é uma constante.

É possível realizar uma decomposição do fluido do gás cosmológico, com uma parametrização que separa o gás em duas componentes de energia na forma

$$\rho = \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (3.40)$$

onde o termo ρ_m representa o setor do fluido com pressão nula $P_m = 0$ enquanto a componente ρ_Λ terá $P_\Lambda = -A\rho^{-\alpha}$. Com esta escolha, teremos a densidade

$$\rho_m = \rho - \frac{A}{\rho^\alpha}. \quad (3.41)$$

Desta forma é possível expressar ρ_Λ na forma

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{-2\alpha}. \quad (3.42)$$

Finalmente pode-se escrever a equação da conservação na forma

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \Gamma\rho_m, \quad (3.43)$$

onde Γ é uma função, expressa por

$$\Gamma = -\alpha\sigma H^{-2\alpha-1}, \quad (3.44)$$

na qual σ é uma constante, que indica a taxa de criação de matéria. Se $\sigma = 3(1 - \Omega_{m,0})H_0^{2\alpha+1}$ é possível derivar a função de Hubble, com ajuda de (3.43) e obter

$$H^2 = H_0^2 [1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^{3\alpha+3}]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.45)$$

A equação (3.45), representa um gás de Chaplygin generalizado decomposto e não adiabático [49] [68]. Na próxima seção iremos adotar um *ansatz*, obtível diretamente de (3.44) ao particularizar o parâmetro $\alpha \equiv -1/2$. Para o caso em que $\alpha \equiv 0$ o modelo recaí no Λ CDM.

3.3 Ansatz para $\Lambda(t)$ CDM

A partir de agora, focaremos em um caso particular para a interação do setor escuro, onde admitiremos o *ansatz*

$$\Lambda \equiv \sigma H, \quad (3.46)$$

onde σ é uma constante positiva, H é a função de Hubble, obtido como solução na era de matéria. Neste capítulo este modelo será analisado em termos de sua base. No capítulo 4 será detalhado a métrica perturbada e seus efeitos não homogêneos. O *ansatz* (3.46) é equivalente a fazer $\alpha = -1/2$ na equação (3.42). Com esta escolha tem-se um modelo cosmológico com evolução similar ao Λ CDM, porém com a distinção fundamental, que é criação de matéria a uma taxa constante (na verdade, no modelo $\Lambda(t)$ há transferência de

energia entre energia escura e matéria escura a uma taxa constante⁵), como consequência do decaimento da energia do vácuo. A possibilidade de decaimento do vácuo em matéria escura é uma hipótese que nesta tese será testada a partir da concordância com as observações das anisotropias da CMB, no capítulo 5.

Para o modelo estudado (que denominaremos aqui de $\Lambda(t)$ ⁶) a equação da conservação da energia fica com a forma

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\dot{\Lambda}, \quad (3.47)$$

onde o termo $\dot{\Lambda}$ indica um termo fonte (se $\sigma > 0$) na equação de conservação. A equação (3.47) claramente se reduz à mesma forma do modelo padrão, ao fazermos Λ constante ($\dot{\Lambda} = 0$).

Admitindo a equação de Friedmann⁷ para a métrica FRW plana

$$H^2 = \rho_T, \quad (3.48)$$

onde consideramos um universo composto de radiação, matéria escura fria (adotamos o termo em inglês *CDM*, *Cold Dark Matter*, como já foi indicado), matéria bariônica e energia escura. Se explicitamos os termos, do lado direito da equação 3.48, a equação fica

$$H^2 = \rho_r + \rho_{cdm} + \rho_b + \rho_\Lambda, \quad (3.49)$$

ao passo que substituindo o termo de decaimento σH e dividindo pela densidade crítica (2.33), pode-se reescrever com a conveniente parametrização

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_r + \Omega_{cdm} + \Omega_b + \Omega_\Lambda]. \quad (3.50)$$

Se utilizamos a equação acima (3.50) no tempo atual ($a = 1$ ou $z = 0$), com

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{H_0^2} = \frac{\sigma H}{H_0^2}, \quad (3.51)$$

pode-se expressar a constante σ em termos dos parâmetros cosmológicos. O termo (3.51)

⁵Um aumento na energia de matéria escura pode ser tanto por um aumento no número destas partículas como na massa das partículas pré-existentes.

⁶Já mostramos que existem inúmeras possibilidades de descrição da energia escura que evoluem no tempo. Nesta tese focaremos no caso estabelecido pela (3.46). Desta forma não há ambiguidade ao nos referirmos à este modelo como $\Lambda(t)$.

⁷Lembre-se que o fator $8\pi G/3$ foi incorporado na redefinição de ρ .

levará a equação de Friedmann no tempo atual para

$$1 = \Omega_{r,0} + \Omega_{cdm,0} + \Omega_{b,0} + \frac{\sigma}{H_0}. \quad (3.52)$$

Ao isolar a constante e sabendo que $1 - \Omega_{r,0} + \Omega_{cdm,0} + \Omega_{b,0} = \Omega_{\Lambda,0}$, ficamos com

$$\sigma = H_0 \Omega_{\Lambda,0}, \quad (3.53)$$

pode-se integrar numericamente estas equações e obter o comportamento da função de Hubble H e do fator de escala a universo multifluido. Para tanto é preciso expressar o termo H em função das componentes do fluido, resolvendo o caráter auto-referente do H . Para tanto é preciso considerar que o termo cosmológico é dominante somente ao final da era de matéria e, é claro, na própria era da energia escura.

Antes de obter-se a solução completa para H , é preciso estudar melhor o comportamento da função de Hubble em cada era cosmológica. Este estudo será realizado nas seções abaixo. Para o momento, é possível expressar nossas equações em uma forma mais conveniente para analisar em cada era cosmológica. Se utiliza-se a equação de estado na forma geral

$$p_i = (\gamma_i - 1)\rho_i, \quad (3.54)$$

assim pode-se usar $\gamma_i = 1$ para obter a pressão da matéria incoerente ou $\gamma_{rad} = 4/3$ para a radiação. Com a equação da conservação para a i -ésima componente,

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = -\dot{\Lambda}, \quad (3.55)$$

e também a equação de Friedman para o duplo-fluido

$$H^2 = \rho_i + \Lambda. \quad (3.56)$$

Derivando a eq. (3.56), tem-se

$$2H\dot{H} = \dot{\rho}_i + \dot{\Lambda}, \quad (3.57)$$

e agora, com suporte da equação da continuidade (3.55) e a equação de estado (3.54) e da equação de Friedmann (3.56), pode-se obter

$$2\dot{H} + 3\gamma H^2 - 3\sigma\gamma H = 0. \quad (3.58)$$

válida para o duplo-fluido ($\rho_T = \Lambda(t) + \rho_m$ ou $\rho_T = \Lambda(t) + \rho_r$). Esta equação não é, *a priori*, uma representação fiel do multifluido cosmológico, porém é bastante conveniente para analisarmos os diferentes efeitos de $\Lambda(t)$ nas diferentes eras cosmológicas. A equação (3.58) pode ser resolvida para H , com

$$H = \frac{\sigma/3}{1 - \exp(-3\sigma\gamma t/2)}, \quad (3.59)$$

onde foi incorporada a constante de integração numa redefinição de t . A equação de Friedmann nos fornecerá a relação para a densidade de energia, na forma

$$\rho_i = \frac{\sigma^2}{12} \sinh^{-2}(3\sigma\gamma t/4), \quad (3.60)$$

que agora pode ser substituído na definição de Λ , sendo possível obter

$$\Lambda = \frac{\sigma^2/3}{1 - \exp(-3\sigma\gamma t/2)}. \quad (3.61)$$

Também é direto obter a evolução do fator de escala $a(t)$, através da integração da equação (3.59), nos levando a

$$a = K_i [\exp(3/2\sigma\gamma t) - 1]^{2/3\gamma}, \quad (3.62)$$

pode-se agora escrever a densidade de energia tanto para a era de radiação quanto de matéria, bastando para isso utilizar $\gamma = 4/3$ ou $\gamma = 1$, respectivamente.

Se utilizarmos a equação (3.62) sob a forma

$$\exp(-3/2\sigma\gamma t) = \frac{K^{3/2\gamma}}{K^{3/2\gamma} + a^{3/2\gamma}}, \quad (3.63)$$

torna-se possível obter, usando a equação (3.46), o termo de energia escura com

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{K_i}{a} \right)^{3\gamma/2} \right]. \quad (3.64)$$

Já a densidade de energia da matéria, fica

$$\rho_i = \frac{\sigma^2}{3} \left(\frac{K_i}{a} \right)^{3\gamma/2} \left[1 + \left(\frac{K_i}{a} \right)^{3\gamma/2} \right] \quad (3.65)$$

onde K_i é a constante de integração.

3.3.1 Era de Radiação

Ao tomarmos períodos de tempo curtos, referentes as eras iniciais do modelo de Big Bang, o fator de escala era pequeno ($a \ll 1$). Neste caso, é possível perceber que, nesta aproximação, o termo dominante da equação de Friedmann é o da radiação. Neste contexto, pode-se usar $\gamma = 4/3$ e assim reduzirmos a equação (3.62) para

$$a = K_r [\exp(2\sigma t) - 1]^{1/2}, \quad (3.66)$$

onde o termo K_r é a constante de integração, correspondente a solução na era de radiação. Nesta aproximação a densidade de energia (da equação (3.64)) para a energia escura, fica

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C_r^2}{3a^2}, \quad (3.67)$$

enquanto o termo de densidade de energia da radiação (da eq. (3.65)), será dado por

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 K_r^4}{3a^4} + \frac{\sigma^2 K_r^2}{3a^2}. \quad (3.68)$$

Para épocas remotas, onde o fator de escala pode ser considerado muito pequeno, ou seja, $a \rightarrow 0$, pode-se mostrar que

$$\Lambda \cong \frac{\sigma^2 K_r^2}{3a^2}, \quad (3.69)$$

e

$$\rho_r \cong \frac{\sigma^2 K_r^4}{3a^4}. \quad (3.70)$$

Foi verificado que o modelo possui a mesma dependência de densidade de energia que o modelo padrão, quando tomadas às devidas aproximações.. Fica claro das equações acima que ao tomarmos tempos pequenos ($a \rightarrow 0$) o termo de densidade da equação (3.69) será muito menor que o da equação (3.70) e desta forma o termo de energia escura pode ser considerado desprezível, quando comparado com o termo de radiação.

O segundo termo das equações (3.67) e (3.68) têm origem no acoplamento entre radiação

e energia escura. Já sabemos que o termo de matéria escura (no Λ CDM) é proporcional a a^{-3} . Sendo o termo de acoplamento na era de radiação proporcional a a^{-2} , é de se esperar que este termo não modifique significativamente a dinâmica desta era e, portanto, seja irrelevante para os processos físicos analisados neste trabalho, em tempos pequenos⁸. Seguimos, nas próximas seções, com a análise das soluções na era de matéria.

3.3.2 Era de Matéria e Energia Escura

Definimos a era de matéria o domínio temporal onde a densidade de energia da matéria total seja dominante sobre as outras formas de energia. Supondo um duplo-fluido com matéria e energia escura, como discutido no início da seção 3.3, pode-se obter uma solução (da equação (3.62)) para $\gamma = 1$, o termo

$$a = K_m [e^{(3/2\sigma t)} - 1]^{2/3}, \quad (3.71)$$

onde a constante K_m é referente a integração na era cosmológica de domínio da matéria.

Se assumimos a aproximação para tempos remotos, estando ainda em domínio de matéria, teremos

$$e^{(3/2\sigma t)} \cong 1 + 3/2\sigma t, \quad (3.72)$$

e portanto o fator de escala, nesta aproximação se reduz a

$$a = K_m (3/2\sigma t)^{2/3}. \quad (3.73)$$

Pode-se agora, usar as equações (3.64) e (3.65) para obter o termo de energia escura

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{K_m}{a} \right)^{3/2} \right]. \quad (3.74)$$

e a densidade de matéria

$$\rho_m = \frac{\sigma^2}{3} \left[\left(\frac{K_m}{a} \right)^3 + \left(\frac{K_m}{a} \right)^{3/2} \right], \quad (3.75)$$

assim é possível agora, usar a definição do redshift com ajuda da solução para a na era

⁸Para os efeitos aqui estudados, a dinâmica do modelo $\Lambda(t)$ CDM na era de radiação é idêntica à do modelo padrão.

de matéria (3.71), para obter

$$(z + 1)^{3/2} = \frac{e^{3/2\sigma t_0} - 1}{e^{3/2\sigma t} - 1}. \quad (3.76)$$

Da solução (3.59), pode-se escrever o termo exponencial na forma

$$e^{3/2\sigma t} = \frac{3H}{3H - \sigma}, \quad (3.77)$$

e assim, isolar-se o termo H para escrever a função de Hubble para o modelo $\Lambda(t)$ CDM.

$$H(z) = H_0 [\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}], \quad (3.78)$$

que representa a solução para o duplo-fluido (matéria + energia escura). Solução válida para a era de matéria e energia escura. A função de Hubble pode também ser escrita em função do fator de escala a através de

$$H(a) = H_0 \left[\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \right], \quad (3.79)$$

na qual foi usada a relação $\sigma = H_0 \Omega_{\Lambda,0}$, o que nos permite escrever na era de matéria

$$H(a) = H_0 \left[1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} \right]. \quad (3.80)$$

Estas soluções são importantes para descrever o modelo $\Lambda(t)$. Conforme mostrado anteriormente, ao tomar tempos pequenos, o fator de escala assume a mesma dependência temporal que o modelo cosmológico padrão contendo apenas matéria (universo de Einstein). pode-se também tomar tempos longos, onde $\sigma t \gg 1$ e $a \rightarrow \infty$. Com o limite de tempos longos, obtém-se das equações (3.73) (3.74) (3.75), a relação

$$a \cong e^{Ht}, \quad (3.81)$$

se comportando em coerência com universo do tipo de Sitter. Também tem-se a energia escura com

$$\Lambda \cong \frac{\sigma^2}{3}, \quad (3.82)$$

e finalmente a densidade de matéria tende a zero, com

$$\rho_m \cong 0. \quad (3.83)$$

Com a discussão acima, verificamos que o modelo de decaimento com taxa constante $\Lambda(t)$ CDM possui, em geral, as mesmas características apresentadas pelo modelo Λ CDM. A principal diferença se dá a partir do decaimento do termo de energia, gerando conseqüente aumento na energia da matéria escura. Este efeito de produção de matéria se manifesta proeminente na era de matéria e energia escura, enquanto seus efeitos são essencialmente nulos durante a fase de radiação. O comportamento dinâmico esperado na era de matéria se mantém, i.e., em tempos longos o universo adquire expansão acelerada, em concordância com as curvas de módulo da distância ajustadas às observações de supernovas Ia. Uma discussão mais detalhada sobre as diferenças entre os modelos será feita adiante na seção 3.3.4. Na próxima seção vamos analisar as soluções numéricas para o modelo $\Lambda(t)$ CDM.

3.3.3 Soluções Numéricas

Utilizando a equação de Friedmann (3.48) e a equação da conservação na forma

$$\dot{\rho}_r + \dot{\rho}_m + 3H(\rho_r + \rho_m + p_r + p_m) = -\dot{\Lambda}, \quad (3.84)$$

que pode ser expressa, ao usarmos $p_m = 0$ e $p_r = \rho_r/3$ e também $\rho_r + \rho_m = \rho_T - \rho_\Lambda$, na forma

$$\dot{\rho}_T - \dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_T - \rho_\Lambda + \rho_r/3) = -\dot{\Lambda}, \quad (3.85)$$

pode-se, agora, fazer a mudança para o redshift, usando a mudança de variável

$$\frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}, \quad (3.86)$$

e, assim, obter da equação (3.85), a equação

$$-(1+z)\left[\frac{d\rho_T}{dz} - \frac{d\rho_\Lambda}{dz}\right] + 3(\rho_T - \rho_\Lambda) + \rho_r = H(1+z)\frac{d\rho_\Lambda}{dz}, \quad (3.87)$$

e, agora usando (3.46), é possível achar

$$-(1+z)6H\frac{dH}{dz} + 3(H^2 - \sigma H) + \rho_r = 0. \quad (3.88)$$

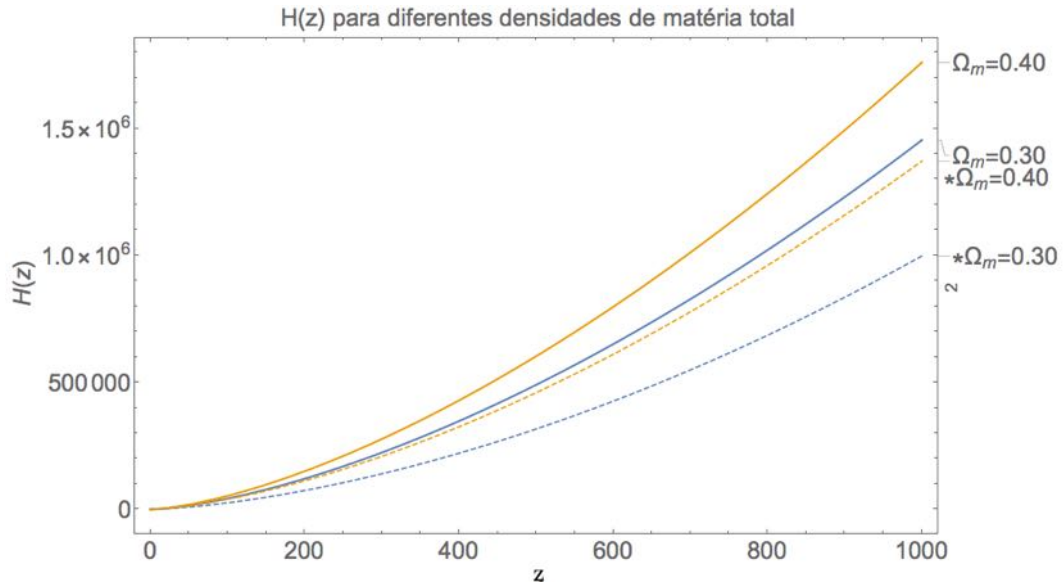


Figura 3.7: A função de Hubble $H(z)$ para o modelo Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para diferentes parâmetros de matéria total. Os outros parâmetros foram fixados em $h = 0.7$, $\Omega_r = 8 \times 10^{-5}$ (com $a_0 = 1$). Os gráficos para Λ CDM estão em linha cheia, enquanto os do $\Lambda(t)$ CDM em linha tracejada.

para encontrar

$$-6(1+z)H \frac{dH}{dz} + 3H^2 - 3\sigma H + H_0^2 \Omega_{r,0} (1+z)^4 = 0, \quad (3.89)$$

e, dividir toda a equação⁹ por H_0^2 (sabendo que $\sigma = H_0 \Omega_{\Lambda,0}$), para obter

$$-2(1+z)E \frac{dE}{dz} + E^2 + \frac{\Omega_{m,0}}{3} - \Omega_{\Lambda,0} E + \Omega_{r,0} (1+z)^4 = 0, \quad (3.90)$$

utilizando-se da conveniente função $E(z) \equiv H(z)/H_0$. Os resultados obtidos nesta seção serão usados para verificar e explicitar a precisão das aproximações adotadas nas próximas seções.

A figura 3.7 mostra os resultados obtidos para a integração da equação (3.90). Já foram mostrados os valores para dois parâmetros de densidade de matéria, tanto no Λ CDM como para o $\Lambda(t)$ CDM. É possível notar que a função $H(z)$ é geralmente menor para o modelo $\Lambda(t)$ CDM que a do Λ CDM. As funções no entanto ficam muito próximas para determinado conjunto de parâmetros. Uma discussão mais aprofundada destes pontos será feita na seção 3.3.4.

⁹Cabe observar que se assumiu a conservação da radiação como fluido não interagente.

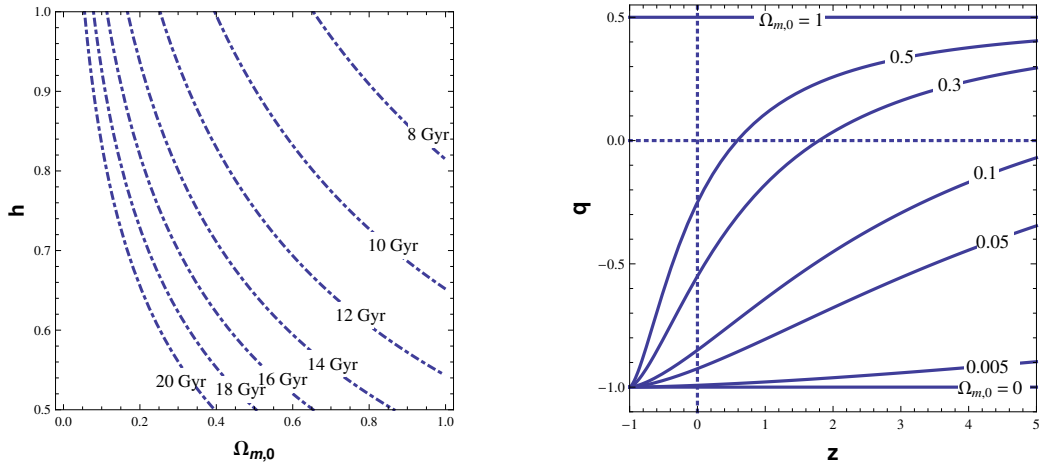


Figura 3.8: A Figura mostra as isócronas para o modelo $\Lambda(t)$ CDM plano. Do lado esquerdo o plano $\Omega_{m,0}$ vs h . Do lado direito o parâmetro de desaceleração (3.14) em função do redshift. [56]

Pode-se usar a idade do universo como parâmetro de importância nas análises cosmológicas. A idade para o modelo $\Lambda(t)$ CDM pode ser obtida com a mesma técnica que utilizada na seção 3.1.1. Mostram-se as curvas isócronas para a idade do universo do modelo $\Lambda(t)$ CDM na figura 3.8, onde também foi apresentado o comportamento do parâmetro de desaceleração deste modelo.

3.3.4 Integração Analítica e Comparações entre $\Lambda(t)$ CDM e Λ CDM

Nas seções anteriores (3.3.1 e 3.3.2) foi analisado o comportamento do modelo $\Lambda(t)$ CDM em cada era de dominação de suas principais componentes. Foi possível mostrar na era de radiação, que o fluido de radiação domina completamente a dinâmica cósmica. Com isto o termo adicional, gerado a partir da interação entre energia escura e radiação pode ser desprezado. Pode-se, então, escrever uma solução aproximada para a função de Hubble, para qualquer era, ao adicionar o fluido de radiação à solução já obtida para a era de matéria e energia escura. Da equação de Friedman, pode-se escrever

$$H(z)^2 = H_0^2 [\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}]^2 + H_0^2 \Omega_{r,0} (1+z)^4, \quad (3.91)$$

ou simplesmente

$$H(z) = H_0 \sqrt{[\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}]^2 + \Omega_{r,0} (1+z)^4}, \quad (3.92)$$

É possível comparar a exatidão da aproximação acima ao resolvermos diretamente a

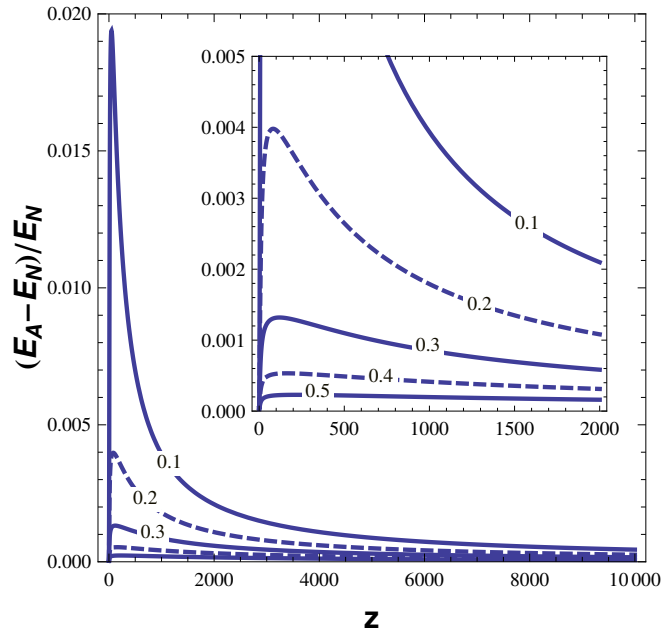


Figura 3.9: Discrepância entre a integração numérica e a aproximação analítica (3.92). As curvas são coincidentes, com diferenças menores que 0,1% [56]. Os rótulos numéricos em cada curva, indicam o parâmetro da densidade de matéria usado.

equação para a função de Hubble, esta integração numérica foi realizada na seção 3.3.3. A figura 3.9 mostra as discrepâncias (obtidas em [56]), enquanto a figura 3.9 mostra que a diferença entre o valor da função analítica e a integração numérica é pequena e portanto a equação (3.92) pode ser usada com boa precisão. Neste contexto, a figura 3.10 deixa claro que, para o conjunto de parâmetros utilizado, a precisão da aproximação analítica é superior a 0,1% para todo o domínio de z .

As figuras 3.11 e 3.12 (nesta figura é mostrada também a congruência da solução analítica com a solução numérica obtida pelo código CLASS¹⁰) mostram o desvio relativo para a função de Hubble do modelo de decaimento e o modelo Λ CDM. Fica claro que é possível estabelecer parâmetros para modelo de decaimento onde este terá evolução muito similar ao modelo padrão, com exceção do comportamento de produção de matéria, cujo efeito tem uma maior relevância somente em eras recentes. A figura 3.13 indica o comportamento dinâmico da energia escura para o $\Lambda(t)$ CDM, em contraste com o modelo padrão Λ CDM.

¹⁰O código CLASS será estudado na seção 5.2.

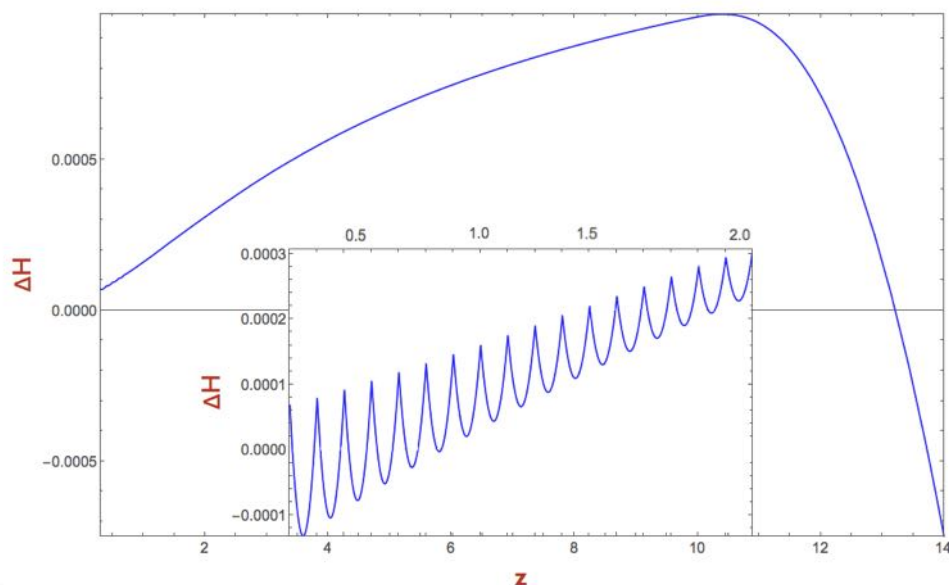


Figura 3.10: Discrepância entre a integração numérica e a aproximação analítica, dada por (3.92). Mostramos que a integração está em acordo com os obtidos em [56] e que a mesma possui comportamento numérico oscilatório.

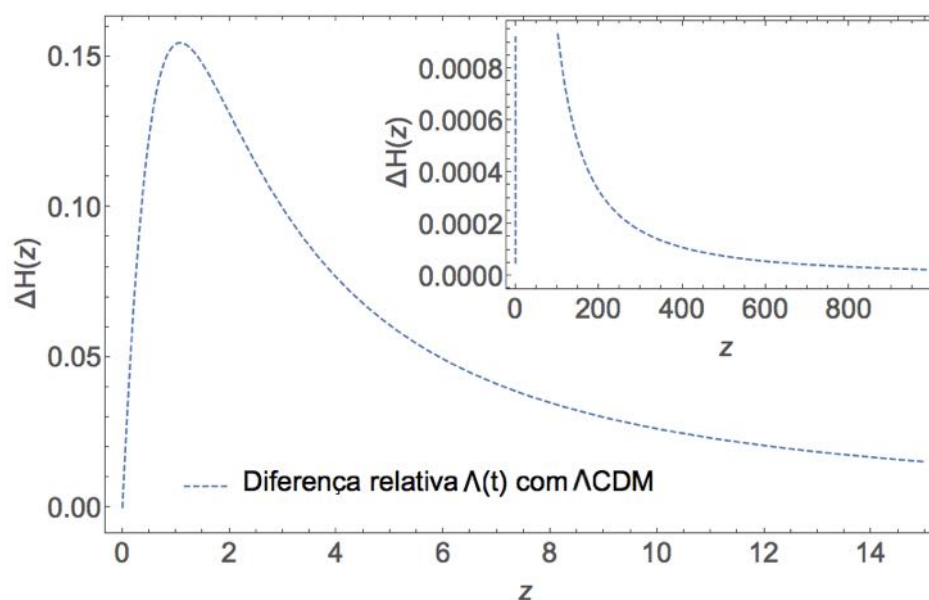


Figura 3.11: Mostra-se a discrepância para o mesmo par de funções respectivamente para o Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_m = 0.25$ e $\Omega_m = 0.50$. Os outros parâmetros foram fixados em $h \equiv 0.7$, $\Omega_r \equiv 8.10^{-5}$.

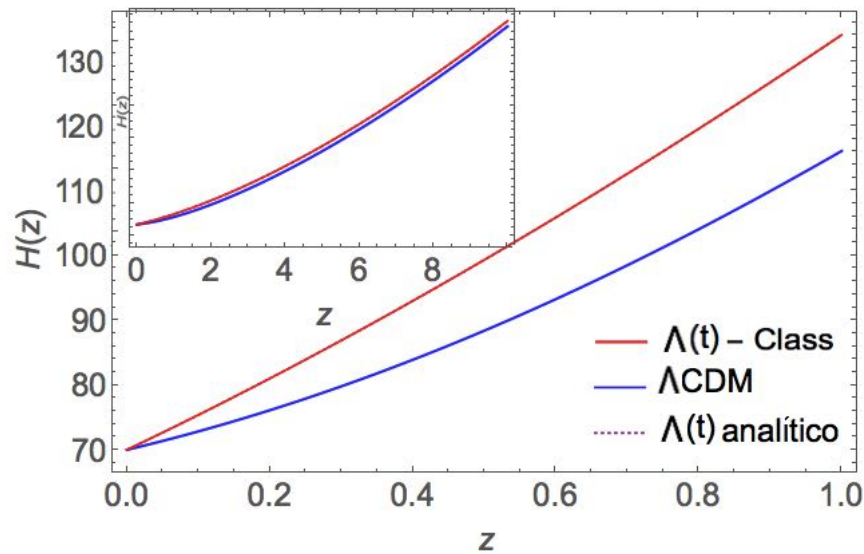


Figura 3.12: A função de Hubble $H(z)$ para o modelo Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM diferentes parâmetros de matéria total que produzem praticamente a mesma função $H(z)$. Para o Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_m = 0.25$ e $\Omega_m \equiv 0.50$, respectivamente. Há coincidência entre a curva para $\Lambda(t)$, obtida pelo CLASS e por integração analítica. Os outros parâmetros foram fixados em $h \equiv 0.7$, $\Omega_{rad} \equiv 8.10^{-5}$.

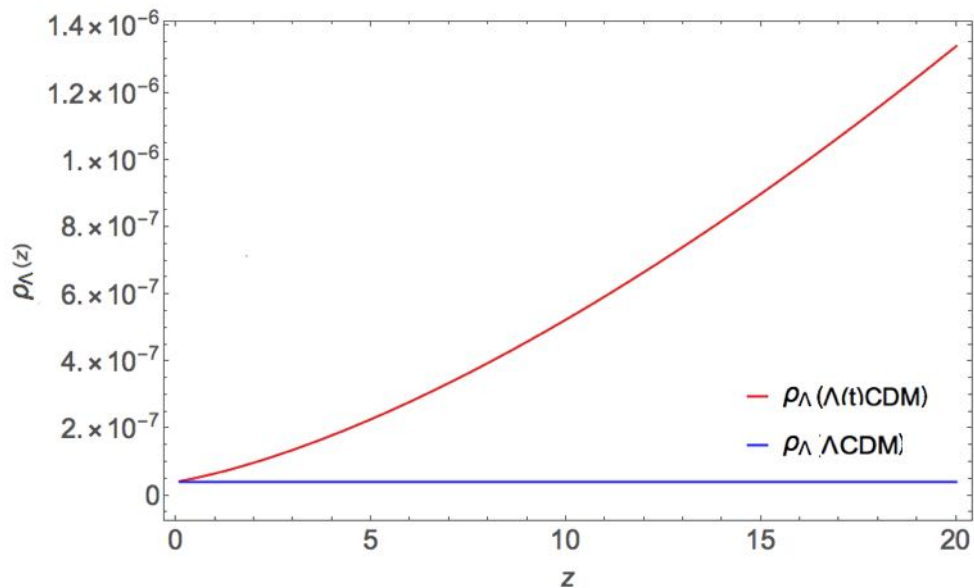


Figura 3.13: A função $\rho_\Lambda(z)$ para o modelo Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. Os outros parâmetros foram fixados em $h \equiv 0.7$, $\Omega_r \equiv 8.10^{-5}$.

3.3.5 Redshift de Igualdade entre Radiação e matéria

Uma vez que se estudou o universo para tempos iniciais, pode-se, ainda, definir em qual redshift existirá a transição para a era de matéria. Desta forma, é possível estimar um tempo específico para a igualdade entre a densidade de energia destas componentes. Ao tomarmos um redshift alto ($z \gg 1$, equivalente a $a \ll 1$), tendo $\rho_m/\rho_T \cong 1$ e, assim, ainda dentro da era de matéria, usando a equação (3.78), se terá

$$\rho_m \approx H_0^2 \Omega_{m,0}^2 z^3. \quad (3.93)$$

por outro lado, em eras iniciais, a densidade de energia da radiação pode ser aproximada para

$$\rho_r \approx H_0^2 \Omega_{r,0} z^4. \quad (3.94)$$

e assim, obtém-se a relação para igualdade no $\Lambda(t)$ CDM, dada por

$$z_{eq} \approx \frac{\Omega_{m,0}^2}{\Omega_{r,0}}. \quad (3.95)$$

Ao utilizar-se as mesmas deduções anteriores, no contexto do modelo Λ CDM, observa-se que a relação para o redshift de igualdade é dado por

$$z_{eq} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}}. \quad (3.96)$$

Observa-se que existe uma conexão entre o parâmetro de igualdade radiação-matéria (z_{eq}) entre o modelo padrão e o modelo de decaimento de vácuo aqui estudado. É possível observar uma conexão entre a dinâmica cosmológica do modelo de decaimento $\Lambda(t)$ CDM e modelo Λ CDM. A dinâmica cósmica do Λ CDM, com valor fixado em certo Ω_m , é aproximadamente igual a dinâmica cosmológica do modelo $\Lambda(t)$ CDM com parâmetro Ω_m^2 . De forma geral, o modelo $\Lambda(t)$ CDM tem ajustes observacionais bons, ao se tomar a equivalência anteriormente descrita. Nos trabalhos [49] [66] [73] [67] [74], observa-se justamente este comportamento.

Capítulo 4

O Universo Inomogêneo

O universo real, tal como se pode ver hoje, não pode ser considerado homogêneo e isotrópico. A hipótese de homogeneidade somente pode ser evocada em certo domínio espaço-temporal. A figura 4.1 mostra uma fatia (bidimensional) da distribuição de galáxias em duas dimensões, obtido por *2df Galaxy Redshift Survey*, [75]. Observa-se a larga escala que o estudo engloba, sendo, e.g., o redshift $z = 0.15$ equivalente à distância comóvel de 600 Mpc. Nas diferentes escalas temporais, percebe-se que a distribuição de galáxias não é aleatória. Em eras remotas esta distribuição se apresenta mais homogênea, enquanto observa-se o aparecimento de estruturas em eras mais recentes. As galáxias se distribuem com um padrão específico de filamentos de maior densidade e grandes espaços vazios entre estes. Ao estudar como pequenas perturbações no universo primordial evoluíram, pode-se inferir justamente o comportamento destes padrões de aglomeração.

Este capítulo irá analisar as estruturas formadas e os efeitos produzidos a partir da perturbação da densidade de matéria. Primeiro serão analisadas as perturbações no contexto newtoniano. Neste caso, a análise somente é válida abaixo de certas escalas. Em seguida será apresentada a análise relativística, onde será observada a aplicação da teoria à métrica de Minkowski e, posteriormente, à métrica FRW, tanto para o modelo Λ CDM como para o modelo de decaimento $\Lambda(t)$ CDM. Uma discussão introdutória será realizada acerca dos diferentes *gauges*. O capítulo será finalizado ao estudar o espectro de potência de matéria e, por fim, serão discutidas as derivações do estudo perturbativo para o entendimento das estruturas de larga escala e para a Radiação Cósmica de Fundo.

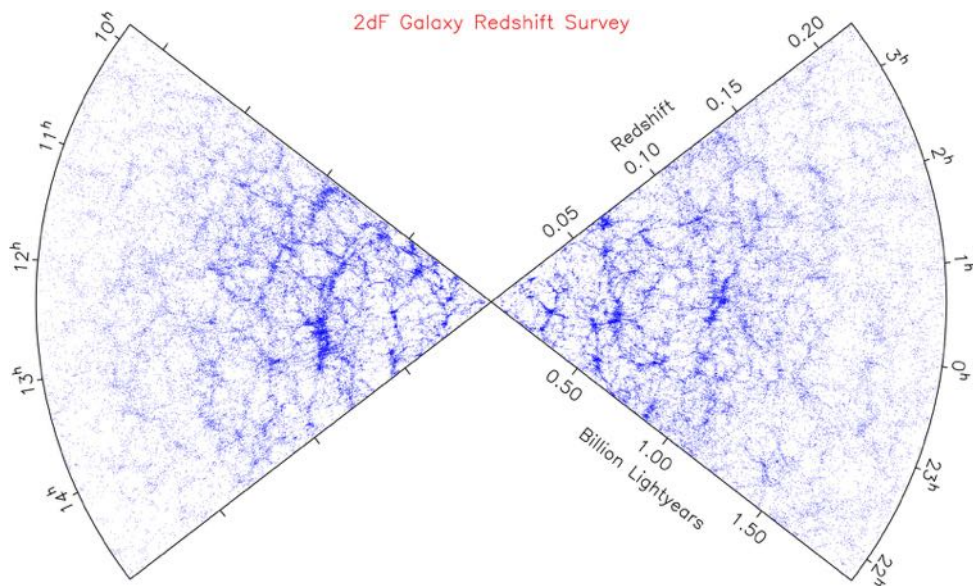


Figura 4.1: Fatias bidimensionais do mapa 3D para a posição e o redshift de galáxias, [75].

4.1 Perturbações Newtonianas Lineares

Nesta seção é apresentada a teoria de perturbações lineares a partir da teoria newtoniana [76] [77] [78]. O objetivo aqui é mostrar alguns dos efeitos físicos em um Universo com pequenos desvios da homogeneidade. Desta análise é possível inferir o efeito do crescimento nas perturbações da densidade de matéria a partir de instabilidades gravitacionais. Neste contexto, a teoria newtoniana¹ provê um bom aparato para interpretar as equações obtidas e será aqui usada como aparato didático. Serão também iniciadas as análises de diferenças entre o modelo padrão e o modelo de interação da energia escura em nível perturbativo. No decorrer do capítulo, a partir da seção 4.2, serão obtidas as equações perturbativas no contexto da relatividade geral.

4.1.1 Variáveis Perturbadas

Para obter o comportamento em nível perturbativo, foi realizada uma perturbação nas variáveis de interesse na forma

$$A(\tau, \mathbf{x}) = \bar{A}(\tau, \mathbf{x}) + \delta A(\tau, \mathbf{x}), \quad (4.1)$$

¹Por conveniência, nesta seção será adotado o S. I.

onde τ é o tempo conforme e \mathbf{x} é o vetor de posição. Denotou-se o valor da base através da barra sobre a variável genérica A e a variável perturbada é indicada por δA . Com a definição acima, pode-se expandir a variável perturbada em uma série de potências do tipo

$$A(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \delta A_n(\tau, \mathbf{x}), \quad (4.2)$$

e com isso obter a ordem da expansão com a precisão requerida. Neste trabalho será adotada perturbações lineares, i.e., até a primeira ordem de expansão em (4.2).

4.1.2 Equações do fluido

Considerando-se um fluido ideal, não relativístico e autogravitante, com densidade de matéria² ρ (com pressão muito pequena), pode-se escrever as equações de movimento, como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho + \Lambda, \quad (4.5)$$

onde a equação (4.3) é a *equação da conservação da matéria*, (4.4) é a *equação de Euler*, e (4.5) é a *equação de Poisson modificada*. Nas equações acima $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade de matéria e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ é o vetor velocidade, $\mathbf{g} = \nabla\phi$ é o campo gravitacional e P é a pressão.

Há ainda duas equações aqui omitidas, a equação de conservação da entropia e a equação de estado da entropia, que estabelecem o comportamento da densidade de entropia. Em todas as discussões procedentes serão assumidas perturbações adiabáticas e, assim, $\delta S = 0$.

A equação (4.3) refere-se à conservação da matéria total. Na hipótese de criação/aniquiação de matéria, um termo fonte/aniquiação deverá aparecer do lado direito desta equação, como poderá ser visto adiante. Observa-se que a equação (4.4) é obtida ao admitir a hipótese de que a matéria escura criada possui a mesma velocidade do fluido³. Supondo também, que não há flutuações na densidade de energia escura e, desta forma, obtendo uma criação de

²No contexto relativístico, fica claro que a densidade de massa seria substituída pela densidade de energia total do fluido.

³Na hipótese de criação de matéria com velocidade qualquer, é necessária a inclusão de um termo adicional na equação de Euler.

partículas uniforme em todo o espaço.

Para a hipótese de criação/aniquilação, tem-se um termo adicional Q , conforme a equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = Q, \quad (4.6)$$

onde para o modelo $\Lambda(t)$ CDM, Q será dado por $Q = -\dot{\Lambda}(t)$. Este termo representa o acoplamento entre a densidade de energia da matéria escura e da energia escura.

4.1.3 Análise Perturbativa

Se for realizada uma perturbação, na forma

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad (4.7)$$

$$\delta\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \delta\mathbf{v}, \quad (4.8)$$

$$P = \bar{P} + \delta P, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} + \delta\mathbf{g}, \quad (4.10)$$

onde $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, δP e $\delta\mathbf{g}$ representam uma pequena perturbação para a densidade de matéria, velocidade, pressão e campo gravitacional, respectivamente.

Ao se aplicarem as perturbações nas respectivas equações do fluido, pode-se obter o comportamento matemático da evolução das variáveis além do universo isotrópico. Considerando a lei de Hubble, pode-se admitir um observador na base (i.e. universo não perturbado), com velocidade $\bar{\mathbf{v}} = d\mathbf{r}/dt = H(t)\mathbf{r}$. Sua posição pode ser expressa por $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$, onde \mathbf{x} é constante. A velocidade peculiar \mathbf{v} indica as modificações nas coordenadas comóveis ao longo do tempo (indica portanto os desvios em relação ao fluxo de Hubble).

Utilizando as equações (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10), pode-se substituir em (4.6) (usando a definição de contraste), e desprezando termos de segunda ordem, podem-se obter as equações da conservação, Euler e Poisson na forma perturbada

$$\dot{\delta\rho} + \bar{\rho}(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\delta\rho + 3H\delta\rho = 0, \quad (4.11)$$

$$\delta\dot{\mathbf{v}} + H(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + H(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \delta\mathbf{g}, \quad (4.12)$$

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{g} = -4\pi G\delta\rho, \quad (4.13)$$

onde usam-se as equações da base

$$\begin{cases} \dot{\bar{\rho}} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}}) = Q & (4.14) \\ \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \bar{\mathbf{g}} & (4.15) \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{g}} = -4\pi G\bar{\rho} + \Lambda. & (4.16) \end{cases}$$

Pode-se agora, passar as equações perturbadas para o espaço de Fourier, ao fazer a expansão

$$\begin{cases} \delta\rho(\mathbf{r}, t) = \delta\rho_k(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a} & (4.17) \\ \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{v}_k(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a} & (4.18) \\ \delta\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{g}_k(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a}, & (4.19) \end{cases}$$

onde, de forma geral, $A(\mathbf{r}, t)$ é a função no espaço de coordenadas e $A_k(t)$ é a função no espaço de Fourier. Desta forma, pode-se decompor as soluções para cada vetor de onda comóvel. Ao substituirmos as equações (4.17), (4.18) e (4.19) nas equações perturbadas (4.11), (4.12) e (4.13), fica-se com

$$\delta\dot{\rho}_k + 3H\delta\rho_k + \frac{i}{a}\bar{\rho}\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_k = 0, \quad (4.20)$$

$$\delta\dot{\mathbf{v}}_k + 3H\delta\mathbf{v}_k = \delta\mathbf{g}_k, \quad (4.21)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{g}_k = -4\pi G a \delta\bar{\rho}. \quad (4.22)$$

Agora, é possível reescrever estas equações em função do contraste de matéria, definido por

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (4.23)$$

Sua derivada em relação ao tempo fica

$$\dot{\delta\rho}_k = \bar{\rho}_j \dot{\delta}_k + \dot{\bar{\rho}} \delta_k, \quad (4.24)$$

que, utilizando a equação da base, nos dará

$$\delta\dot{\rho}_k = \bar{\rho} \dot{\delta}_k + (Q - 3H\bar{\rho})\delta_k, \quad (4.25)$$

válida para o modelo de decaimento ($Q \neq 0$) e Λ CDM (se $Q = 0$). Isolando para $\dot{\delta}$, da equação (4.25), ficamos com

$$\dot{\delta}_k = -\frac{Q}{\bar{\rho}}\delta_k - \frac{1}{a}i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{g}_k, \quad (4.26)$$

e usando a derivada segunda de δ_k , pode-se escrever, para o caso do Λ CDM ($Q = 0$)

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k - (4\pi G\bar{\rho})\delta_k = 0, \quad (4.27)$$

e, no caso do modelo de decaimento de vácuo $\Lambda(t)$ CDM ($Q \neq 0$), assume a forma

$$\ddot{\delta}_k + \left(2H + \frac{Q}{\bar{\rho}}\right)\dot{\delta}_k - \left[4\pi G\bar{\rho} - 2H\frac{Q}{\bar{\rho}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\bar{\rho}}\right)\right]\delta_k = 0, \quad (4.28)$$

onde observam-se os fatores Q , destoantes para os modelos em (4.27) e (4.28).

4.1.4 Evolução das perturbações na era de matéria para o Λ CDM

Para analisar as perturbações no modelo padrão, pode-se escolher aplicar a equação (4.27) para a época dominada por matéria. Nesta simplificação do universo, pode-se analisar o comportamento da evolução para o universo após a era de igualdade radiação-matéria e bem antes do domínio da energia escura. Para o modelo Λ CDM, na era de domínio da matéria, pode-se escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_m \approx 1 \\ H \approx \frac{2}{3t} \\ H^2 \approx \frac{4}{9t^2}, \end{array} \right. \quad (4.29)$$

$$\left. \begin{array}{l} H \approx \frac{2}{3t} \\ H^2 \approx \frac{4}{9t^2}, \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

$$\left. \begin{array}{l} H^2 \approx \frac{4}{9t^2}, \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

e assim, usando a equação de Friedmann e retornando ao sistema de unidades adotado anteriormente, podemos, da equação (4.27), escrever

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{t^2}\delta_k = 0, \quad (4.32)$$

que é conhecida como *equação de Meszaros* [79] [80] [81] e descreve a evolução das perturbações no universo dominado pela matéria. A solução geral da equação acima é obtida com

$$\delta_k(t) = K_1 t^{2/3} + K_2 t^{-1}, \quad (4.33)$$

onde K_1 e K_2 são constantes de integração. O termo $K_2 t^{-1}$ é crescente no tempo, isso significa que no passado, ao fazermos $t \rightarrow 0$, o termo diverge. Esta divergência justifica adotarmos $\delta_k(0) \equiv 0$ como condição inicial. Desta forma a constante $K_2 = 0$ e as perturbações para o modelo Λ CDM, na era de matéria, fica dado somente pelo termo crescente

$$\delta_k(t) = K_1 t^{2/3}, \quad (4.34)$$

ou mesmo, em termos do redshift, com

$$\delta_k = K_1 t^{2/3} \propto a \propto \frac{1}{1+z}. \quad (4.35)$$

Das equações acima, observa-se que as perturbações na densidade de matéria crescem proporcionalmente ao fator de escala. Este comportamento é característico, indicando um universo cada vez mais granulado (menos homogêneo) ao decorrer formação de estruturas em conjunto com a expansão cósmica.

4.1.5 Evolução das perturbações na era de matéria para $\Lambda(t)$

Para o modelo de decaimento da energia escura estudado, tem-se a relação

$$\frac{Q}{\bar{\rho}} = -\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\rho}}. \quad (4.36)$$

Se forem utilizadas as equações (4.36) em (4.28), e também, inserindo as equações com as aproximações do universo Einstein-de Sitter, pode-se fazer $-\dot{\Lambda}/\bar{\rho} = \sigma/2$ e, assim, reescrever a equação da evolução na forma

$$\ddot{\delta}_k + \left(2H - \frac{\dot{\Lambda}}{\rho}\right)\dot{\delta}_k - \left[4\pi G\bar{\rho} + 2H\frac{\dot{\Lambda}}{\rho}\right]\delta_k = 0, \quad (4.37)$$

lembrando da possibilidade de aplicar aqui a equação (3.59), para $\gamma = 1$, $H \cong \sigma/3[1 - \exp(-3\sigma t/2)]^{-1}$ para resolvê-la. As soluções são dadas por [76] e são da forma

$$\delta_k = \frac{x}{(x-1)^{1/3}} \left[D_1(x-1)^{2/3} + D_2(x)^{1/3} + D_2(x-1)^{-2/3\beta(x,1/3,2,3)} \right], \quad (4.38)$$

onde β é a função beta incompleta e x foi definido com $x = \exp(-\sigma t/2)$.

A solução das equações (4.37) e (4.32) indicam um comportamento levemente destoante entre os dois modelos cosmológicos. As figuras em 4.2 mostram a evolução do contraste em função do redshift (z) e do fator de escala (a). Fica claro que o comportamento dos modelos é coincidente para tempos pequenos. Em eras mais recentes, os efeitos do decaimento da energia escura se tornam mais relevantes. Para tempos atuais, a partir do domínio da energia escura sobre a matéria, observa-se uma supressão do contraste. Esta supressão é um comportamento esperado. Com a produção de matéria escura, o universo diminui a taxa granulação ao longo do tempo. Em outras palavras, a formação de estruturas no universo se torna mais lenta, apresentando, assim, uma menor aglomeração das estruturas, quando comparada ao comportamento do modelo Λ CDM.

O estudo newtoniano realizado é atraente, do ponto de vista matemático e é também intuitivo, neste estudo encerra-se interpretações mais diretas sobre a natureza dos fenômenos. Por outro lado, é preciso colocar em uso todo o aparato da relatividade geral para obter aior exatidão na descrição dos fenômenos físicos do universo perturbado, de fato, uma análise relativística faz-se necessária para a descrição completa dos fenômenos cosmológicos. Na próxima seção será realizado o estudo perturbativo no contexto da relatividade geral.

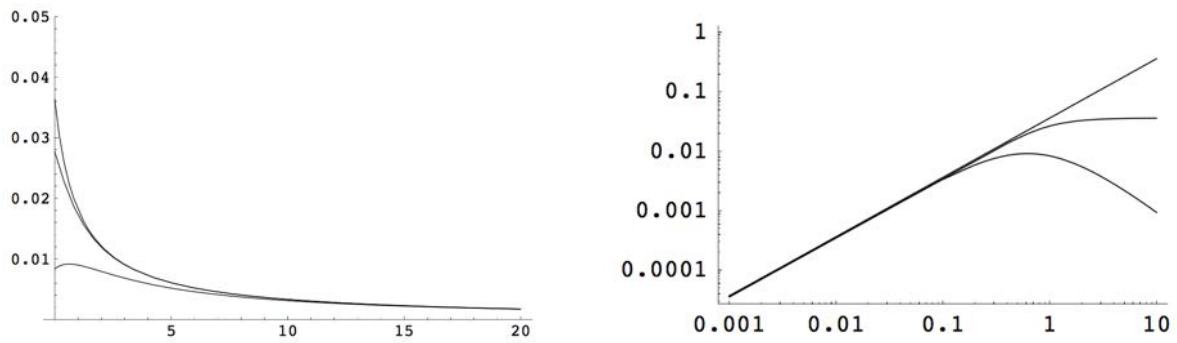


Figura 4.2: Evolução para o contraste da matéria para um universo dominado por matéria nos modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. A curva de cima representa um universo Einstein-de Sitter, a do meio o modelo com Λ constante e, mais abaixo, o modelo $\Lambda(t)$ [50].

4.2 Teoria de Perturbações Relativísticas

No modelo newtoniano descrito nas seções anteriores, foi possível estabelecer um panorama inicial sobre o comportamento da matéria para os modelos de decaimento de energia escura e comparar os efeitos com o modelo padrão. A descrição newtoniana falha em explicar perturbações maiores que a escala de Hubble. Tomou-se também algumas aproximações simplificadoras ao retirar o efeito da pressão nas equações derivadas. Será necessário o uso da relatividade geral para prever todo o comportamento perturbativo, independente da escala analisada.

Neste trabalho, já foi analisada a existência de diferentes fluidos (e.g. matéria escura, bárions, fótons) na composição do universo. A evolução de um universo com múltiplos fluidos não é trivial, várias das componentes podem interagir entre si, e cada uma destas possui uma descrição física própria. Para descrever este cosmos em nível perturbativo e, assim, obter o comportamento da Radiação Cósmica de Fundo é preciso aprimorar a descrição destes fenômenos. A descrição relativística completa, em conjunto com uma descrição matemática dos fenômenos de interação dos fluidos, deverá esclarecer em definitivo os efeitos físicos presentes no modelo padrão e também no modelo de decaimento aqui estudado.

A teoria de perturbações cosmológicas foi desenvolvida inicialmente (no contexto da métrica FRW) por [82], em seguida, compilada em [83]. Diversos autores estudaram e desenvolveram este tema [84] [85] [86] [87]. O desenvolvimento de pesquisas sofreu com dificuldades de interpretação, em especial, quando se tratava da escolha do sistema de coordenadas. Em muitos casos se utilizava o gauge síncrono, sem o entendimento completo que este gauge não fixa totalmente a liberdade das coordenadas. O resultado era o aparecimento de modos indesejáveis (espúrios) ao computar algumas variáveis. O trabalho de Bardeen e colaboradores

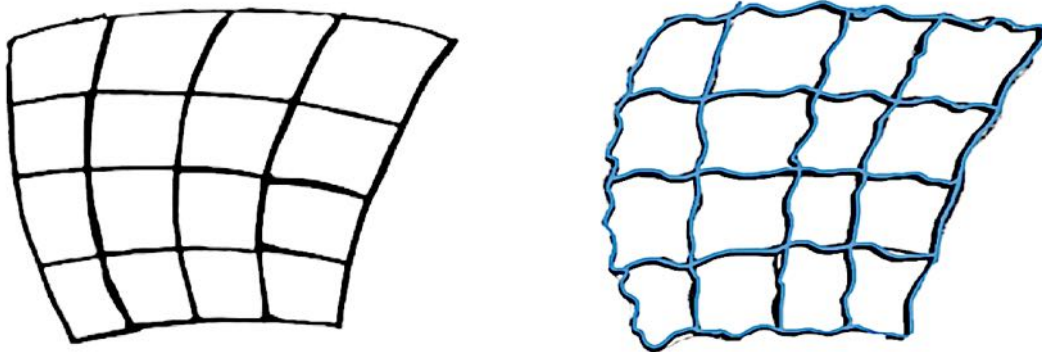


Figura 4.3: Ilustração de um espaço-tempo de base, não perturbado, (esquerda). Espaço-tempo perturbado (direita).

[88], estabeleceu uma forma alternativa de expressar as variáveis cosmológicas de forma invariante de gauge. Diversos métodos foram desenvolvidos para tratar sistemas multifluidos e sistematizar tratamentos consistentes ao contexto cosmológico [89] [90] [91] [92], em especial para aplicar no estudo da Radiação Cósmica de Fundo. O trabalho prosseguirá, finalmente, ao estudo da teoria de perturbações relativísticas.

4.2.1 Perturbações na métrica

Já se sabe que espaço-tempo pode ser escrito de acordo com uma métrica de base. Ao generalizar o espaço-tempo de forma a permitir pequenas variações da homogeneidade, como está ilustrado na figura 4.3, pode-se fazer

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.39)$$

enquanto, agora, pode-se escrever

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (4.40)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo de base (*background*). Como antes, indicou-se uma barra sobre o termo de base e um δ para o termo perturbado da métrica. Variaram-se os índices gregos (μ, ν) de zero a três (0, 1, 2, 3).

Pode-se escrever para a métrica (4.40) com uma separação do tipo $a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$ onde o termo $a^2\eta_{\mu\nu}$ corresponde a métrica com assinatura (-1,1,1,1), enquanto o termo $h_{\mu\nu}$ definirá as coordenadas da métrica perturbada. O universo de base será determinado pela métrica

de Friedmann-Robertson-Walker. É possível também escrever esta métrica em coordenadas comóveis e escolher o termo temporal na forma conforme, assim, tem-se

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)}, \quad (4.41)$$

e a métrica fica escrita

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (4.42)$$

cabe lembrar que, neste caso, tem-se a equação de Friedmann e continuidade, na forma

$$\begin{cases} \mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} a^2 & (4.43) \\ \bar{\rho}' + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}), & (4.44) \end{cases}$$

Define-se o parâmetro de Hubble conforme, como

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a} = aH = \dot{a}, \quad (4.45)$$

onde as variáveis com a linha (*prime*) sobreposta, aqui indicam a derivada em relação ao tempo conforme, enquanto o ponto, a usual derivada em relação ao tempo cosmológico.

De forma geral, pode-se escrever a métrica perturbada utilizando com uma decomposição na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.46)$$

onde

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}$$

desta forma, a métrica perturbada (forma geral) fica dada com as componentes

$$\begin{cases} g_{00}(\tau, \mathbf{r}) = -a^2(\tau) [1 + 2A(\tau, \mathbf{r})] & (4.47) \\ g_{0i}(\tau, \mathbf{r}) = a^2(\tau) B_i(\tau, \mathbf{r}) & (4.48) \\ g_{ij}(\tau, \mathbf{r}) = a^2(\tau) [1 - 2D(\tau, \mathbf{r})\delta_{ij} + 2E_{ij}(\tau, \mathbf{r})], & (4.49) \end{cases}$$

onde $E_{ii} = 0$. Pode-se, agora, sumarizar o elemento de linha da métrica perturbada, com

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ -(1 + 2A)d\tau^2 + B_i d\tau dx^i + [(1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right\}, \quad (4.50)$$

na qual, de forma geral, identifica-se $A(\tau, \mathbf{r})$ como a função de lapso temporal (*lapse function*), que descreve pequenos desvios na passagem do tempo em diferentes coordenadas. A função $D(\tau, \mathbf{r})$ é o vetor de shift (*shift vector*) [93] [94]. Os termos A , D , B_i e E_{ij} são considerados pequenos quando comparados à unidade. A equação (4.50), como apresentada, é conveniente para decompor a métrica em diferentes partes (escalar, vetorial e tensorial). Neste trabalho serão focadas somente as perturbações escalares.

4.2.2 Transformações de Gauge

A relação entre os pontos do espaço-tempo da base e os pontos no espaço-tempo perturbado é feita a partir de uma transformação de coordenadas. Ao analisar a métrica em ordens superiores a zero, não existe um sistema de coordenadas privilegiado, como é o caso do universo de base (homogêneo e isotrópico). Para cada sistema de coordenadas na base, podem-se relacionar diferentes sistemas no espaço-tempo perturbado, todos estes estarão muito próximos entre e si, ou seja, há uma liberdade na escolha das coordenadas que descrevem as perturbações. Se são escolhidos dois sistemas de coordenadas, ambos definidos no espaço-tempo perturbado, um destes com coordenadas (x^μ) e outro com (\hat{x}^μ) , a perturbação métrica no primeiro sistema fica

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \bar{g}_{\mu\nu}(x), \quad (4.51)$$

enquanto no sistema de coordenadas alternativo, fica

$$\delta g_{\mu\nu}(\hat{x}) = g_{\mu\nu}(\hat{x}) - \bar{g}_{\mu\nu}(\hat{x}), \quad (4.52)$$

Uma transformação entre as coordenadas $x^\mu(x) \rightarrow \hat{x}^\mu(\hat{x})$, é chamada de transformação de gauge. A mudança de gauge está conectada à transformação dada por

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu \equiv x^\mu + d^\mu(x^\nu), \quad (4.53)$$

e, ao especificar o vetor $d^\mu \equiv (\alpha, d^i)$, através das coordenadas

$$\begin{cases} \hat{d}^0 \equiv \alpha(\tau, \mathbf{x}) \\ \hat{d}^i \equiv \nabla\beta(\tau, \mathbf{x}) + \epsilon(\tau, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (4.54)$$

$$(4.55)$$

podem-se separar as componentes de x^μ em uma parte temporal e espacial, por

$$\begin{cases} \hat{x}^0 = x^0 + \alpha(\tau, \mathbf{x}) \\ \hat{x}^i = x^i + \nabla\beta(\tau, \mathbf{x}) + \epsilon^i(\tau, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (4.56)$$

$$(4.57)$$

onde o vetor d^i foi decomposto em uma parte longitudinal (ϵ) e outra irrotacional (β), que obedece às condições dadas em

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla\beta = 0 \\ \nabla \cdot \epsilon = 0, \end{cases} \quad (4.58)$$

$$(4.59)$$

onde é possível fazer $\epsilon^i \equiv \epsilon$, por simplicidade.

A condição para manter a invariância do elemento de linha ds^2 por esta transformação, é garantida pela equação

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x})d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (4.60)$$

e, assim, tem-se

$$\hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x}) = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \hat{x}^\nu}, \quad (4.61)$$

onde podem-se expandir as coordenadas \hat{x} em primeira ordem, em consonância com a equação (4.53), para obter uma relação no mesmo sistema de coordenadas x

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\beta}(x)\partial_\nu d^\beta - g_{\alpha\nu}(x)\partial_\mu d^\alpha - d^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x), \quad (4.62)$$

Assumindo que o vetor (d^i) as variáveis perturbadas $A(\tau, \mathbf{x})$, $D(\tau, \mathbf{x})$, $B_i(\tau, \mathbf{x})$ e $E_{ij}(\tau, \mathbf{x})$, são de mesma ordem, e utilizando (4.62), pode-se verificar a transformação para cada componente

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = A - \alpha' - \mathcal{H}\alpha \\ \hat{B}_i = B_i + \partial_i\alpha - \partial_i\beta' - \epsilon_i' \\ \hat{D} = D + \frac{1}{3}\nabla^2\beta + \mathcal{H}\alpha \\ \hat{E}_{ij} = E_{ij} - 2 \left[(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\beta + \frac{1}{2}(\partial_i\epsilon_j + \partial_j\epsilon_i) \right], \end{array} \right. \quad (4.63)$$

$$\hat{B}_i = B_i + \partial_i\alpha - \partial_i\beta' - \epsilon_i' \quad (4.64)$$

$$\hat{D} = D + \frac{1}{3}\nabla^2\beta + \mathcal{H}\alpha \quad (4.65)$$

$$\hat{E}_{ij} = E_{ij} - 2 \left[(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\beta + \frac{1}{2}(\partial_i\epsilon_j + \partial_j\epsilon_i) \right], \quad (4.66)$$

onde, por simplicidade, foram omitidos as variáveis de cada uma das funções.

As quantidades obtidas nas equações (4.63) podem ser escolhidas de forma a fixar um sistema de coordenadas específico. Neste trabalho, o foco será no tratamento das equações no gauge newtoniano (também conhecido como *longitudinal*).

A escolha de um gauge fixa o sistema de coordenadas usado no universo perturbado. Uma outra opção para o tratamento perturbativo é utilizar variáveis invariantes de gauge, ou seja, variáveis ou combinações destas que não se modifiquem quando submetidas à transformação de coordenadas. Em 1980, Bardeen [88] identificou duas destas variáveis, descritas por Φ_A e Φ_H . Mais tarde estes potenciais foram denominados *Potenciais de Bardeen* [95]. Por completeza, serão revisitados, agora, os dois principais⁴ gauges, o síncrono e o newtoniano.

Gauge Síncrono O gauge síncrono corresponde a fazer uma escolha de sincronicidade entre o espaço-tempo de base e o espaço-tempo perturbado. Isso corresponde a

$$\delta g_{0\nu} \equiv 0, \quad (4.67)$$

tendo as coordenadas temporais não perturbadas, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi} \equiv 0 \\ \hat{B}_i \equiv 0, \end{array} \right. \quad (4.68)$$

$$\hat{B}_i \equiv 0, \quad (4.69)$$

O elemento de linha será dado por

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ -d\tau^2 + [\delta_{ij} + h_{ij}] dx^i dx^j \right\}. \quad (4.70)$$

As perturbações métricas neste gauge estão embutidas na função $h_{ij}(\tau, \mathbf{x})$, que pode ser

⁴Mais comuns na literatura.

decomposta em termos $h_{ij} = 1/3h\delta_{ij} + h_{ij}^{\parallel} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^T$, onde as funções h_{ij}^{\parallel} e h_{ij}^{\perp} são tensores (longitudinal e transverso), que obedecem $\epsilon^{ijk}\partial_j\partial_l h_{lk}^{\parallel} \equiv 0$, $\partial^i\partial^j h_{ij}^{\perp} \equiv 0$ e $\partial_i h_{ij}^T \equiv 0$, onde ϵ_{ijk} é o tensor de Levi-Civita. Uma subsequente decomposição pode ainda ser realizada, de forma a explicitar as componentes escalares e vetoriais [96].

O gauge síncrono possui algumas características. A escolha de coordenadas, da forma apresentada, não fixa todos os graus de liberdade da métrica perturbada. Isso implica em modos espúrios ou indesejados, que aparecem nas soluções das equações das densidades perturbadas. Estes modos indesejados foram a principal motivação para o estudo de Bardeen e a determinação do formalismo de grandezas invariantes de gauge. O gauge síncrono foi bastante utilizado durante muitos anos e hoje é o gauge encontrado na maioria dos trabalhos realizados no até o final da década de 2000. Ao se esclarecer que era preciso fixar totalmente os graus de liberdade do gauge, adotou-se o uso comumente do gauge síncrono comóvel. Para fixar totalmente a liberdade de coordenadas, é possível utilizar as definições deste gauge acrescidas de uma condição sobre a velocidade do fluido perturbado de modo a ter $\delta v = 0$, fixando completamente o gauge⁵. Salienta-se que qualquer gauge deve levar às mesmas grandezas observáveis. A seguir, será apresentado o gauge newtoniano, que será o único usado de agora em diante.

Gauge Newtoniano O gauge newtoniano (longitudinal) é caracterizado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_i \equiv 0 \\ \hat{E}_{ij} \equiv 0, \end{array} \right. \quad (4.71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_i \equiv 0 \\ \hat{E}_{ij} \equiv 0, \end{array} \right. \quad (4.72)$$

Por conveniência didática, coerência com a bibliografia anterior [96] e com o código numérico que é utilizado neste trabalho (CLASS) [97], será feita a notação⁶ $A \equiv \psi$ e $D \equiv \phi$. Será usado o tempo conforme e, assim, se terá o gauge *Newtoniano conforme*, que será dado pelas componentes

⁵Neste caso, o gauge é comumente denominado *gauge síncrono comóvel*.

⁶Recomendamos atenção extra com a notação utilizada nas diferentes bibliografias.

$$\begin{cases} g_{00}(\tau, \mathbf{r}) = -a^2 [1 + 2\psi(\tau, \mathbf{r})] & (4.73) \\ g_{0i}(\tau, \mathbf{r}) = 0 & (4.74) \\ g_{ij}(\tau, \mathbf{r}) = a^2 [1 - 2\phi(\tau, \mathbf{r})] \delta_{ij}. & (4.75) \end{cases}$$

O elemento de linha para esta métrica perturbada, fica dado por

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ -(1 + 2\psi)d\tau^2 + (1 - 2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \}. \quad (4.76)$$

O gauge newtoniano fixa totalmente o sistema de coordenadas em nível perturbativo, mas o restringe às perturbações escalares. Neste gauge, os potenciais ψ e ϕ estão diretamente relacionados às variáveis invariantes de gauge de Bardeen, que para este gauge, podem ser escritos através de

$$\psi = \Phi_A, \quad \phi = -\Phi_H. \quad (4.77)$$

O gauge Newtoniano tem a vantagem de simplificar a busca por grandezas independentes de gauge, ao identificá-las diretamente com as perturbações. Desta forma, o uso deste gauge é um atalho para obter as grandezas invariantes. Uma segunda vantagem é a facilidade de interpretação das grandezas perturbadas. O potencial ψ é associado ao potencial gravitacional newtoniano (daí a denominação do gauge), no limite de distâncias menores que o comprimento de Hubble (*sub-Hubble*).

4.2.3 Perturbações no Tensor Energia-Momentum

Da mesma forma que se aplicou a perturbação para a métrica, é preciso obter uma relação que expresse o comportamento de um fluido perfeito submetido às mesmas flutuações. Com as perturbações da métrica, pode-se desvendar o lado geométrico das equações de Einstein perturbadas. Por outro lado, ao perturbar o termo de fonte gravitacional, desvendam-se as relações para expressar completamente as equações de Einstein.

Um fluido perfeito pode ser descrito⁷ pela equação

$$T_{\nu}^{\mu} = P\delta_{\nu}^{\mu} + (\rho + P)U^{\mu}U_{\nu}, \quad (4.78)$$

onde a quadri-velocidade é definida com $U^{\mu} \equiv dx^{\mu}/ds^2$.

⁷O tensor misto é mais conveniente pois $g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$.

Devido à expansão de Hubble, todo o fluido está submetido a um movimento comóvel à própria expansão. A velocidade peculiar deste fluido, pode ser tratada como uma perturbação da mesma ordem que as perturbações da densidade, da pressão e da métrica.

Enquanto na base tem-se

$$\bar{U}_\mu \bar{U}^\mu = \bar{g}_{\mu\nu} \bar{U}^\mu \bar{U}^\nu = a^2 \eta_{\mu\nu} \bar{U}^\mu \bar{U}^\nu = -1, \quad (4.79)$$

e os vetores covariantes e contravariantes ficam $\bar{U}_\mu = (1/a, 0, 0, 0)$ e $\bar{U}^\mu = (-a, 0, 0, 0)$, tendo o vínculo $\bar{U}_\mu \bar{U}^\mu = -1$. Pode-se, agora, perturbar o tensor (4.78), fazendo

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu. \quad (4.80)$$

As perturbações necessárias são $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$, $\delta P = P - \bar{P}$ e também a perturbação na velocidade (u^μ e u_μ). Cabe fazer, então, uma perturbação na quadri-velocidade

$$U^i = \bar{U}^i + \delta U^i, \quad (4.81)$$

tendo também o vínculo

$$U_\mu U^\mu = -1. \quad (4.82)$$

Sabendo que $\bar{U}^i = \bar{U}_i = 0$, pode-se fazer a definição da perturbação com

$$\delta U^i \equiv v_i/a, \quad (4.83)$$

logo a perturbação da velocidade será a própria velocidade peculiar do fluido. Com alguma álgebra, obtém-se o tensor δT_ν^μ , que fica com componentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta T_0^0 = -\delta\rho \end{array} \right. \quad (4.84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta T_0^i = (\bar{\rho} + \bar{P})(v_i - B_i) \end{array} \right. \quad (4.85)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta T_i^0 = -(\bar{\rho} + \bar{P})v_i \end{array} \right. \quad (4.86)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta T_j^i = \delta P \delta_j^i, \end{array} \right. \quad (4.87)$$

no qual $B_i = 0$ no gauge newtoniano. A parte espacial do tensor δT_j^i pode ainda ser decomposta em perturbações além do fluido perfeito, na forma

$$\delta T_j^i = \delta P \delta_j^i + \Sigma_j^i, \quad (4.88)$$

onde o traço fica definido com $\delta T_k^k \equiv \delta P$ e o tensor Σ_j^i (simétrico e sem traço) é chamado de *stress anisotrópico*, uma vez que representa a anisotropia da pressão do fluido⁸. As componentes de base e perturbadas do tensor energia-momentum ficam

$$\begin{cases} T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho) & (4.89) \\ T_0^i = (\bar{\rho} + \bar{P})(v_i - B_i) & (4.90) \\ T_i^0 = -(\bar{\rho} + \bar{P})v_i & (4.91) \\ T_j^i = (\bar{P} + \delta P)\delta_j^i + \Sigma_j^i. & (4.92) \end{cases}$$

Segue-se agora para a análise das equações de Einstein, no contexto das perturbações escalares (utilizando o gauge Newtoniano).

4.2.4 Equações de Einstein e Conservação da Energia-Momentum

As equações de Einstein são dadas pela relação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{3}T_{\mu\nu}. \quad (4.93)$$

Uma vez que já se têm as relações perturbadas para a métrica e para o tensor energia-momentum, o procedimento para obter as equações de Einstein perturbadas deve ser direto. Do lado esquerdo, é preciso calcular os *símbolos de Christoffel* ($\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$), destes se obtém o *tensor de Ricci* ($R_{\mu\nu}$) para em seguida calcular o *escalar de Ricci*.

Os símbolos de Christoffel são dados em função do tensor métrico, através de

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right), \quad (4.94)$$

enquanto o tensor de Ricci fica dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta, \quad (4.95)$$

após a computação de cada um dos termos acima, calcula-se o escalar de Ricci por

⁸Para o fluido perfeito, tem-se $\Sigma_j^i = 0$.

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.96)$$

Antes de prosseguir, é conveniente introduzir as equações no espaço de Fourier. Para isso, pode-se fazer em uma variável perturbativa qualquer, a expansão

$$A(\tau, \mathbf{x}) = \int dk^3 A_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.97)$$

onde \mathbf{x} é a coordenada comóvel. O vetor \mathbf{k} é, assim, o vetor de onda comóvel ($\mathbf{k} = a\mathbf{k}_{fis}$). Antes de expressar as equações, é preciso estabelecer também algumas definições,

$$(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \equiv ik^j \delta T_j^0, \quad (4.98)$$

onde $\theta = ik^j v_j$ é o divergente da velocidade no espaço de Fourier⁹.

$$(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma \equiv -(\hat{\mathbf{k}}^i \cdot \hat{\mathbf{k}}^i - \frac{1}{3}\delta_{ij})\Sigma_j^i, \quad (4.99)$$

assim o termo σ , representa agora o stress anisotrópico redefinido no espaço de Fourier.

Com cada componente calculada [76] [96], pode-se agora igualar o lado esquerdo $G_{\mu\nu}$ e lado direito $T_{\mu\nu}$, usando os resultados obtidos na seção (4.2.3). Em primeira ordem, ao calcular as componentes (0-0), (0-i), (i-i) e (i-j) no espaço de Fourier, obtém-se respectivamente¹⁰¹¹

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 \phi + 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\psi) = -\frac{3}{2}a^2 \delta\rho \end{array} \right. \quad (4.100)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2(\phi' + \mathcal{H}\psi) = \frac{3}{2}a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \end{array} \right. \quad (4.101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi'' + \mathcal{H}(\psi' + 2\phi') + (2\frac{a''}{a} - \mathcal{H}^2)\psi + \frac{k^2}{3}(\phi - \psi) = \frac{1}{2}a^2 \delta P \end{array} \right. \quad (4.102)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2(\phi - \psi) = \frac{9}{2}a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma, \end{array} \right. \quad (4.103)$$

onde $\mathcal{H} = a'/a$ e a linha representa a derivada em relação ao tempo conforme¹².

Tendo em vista que as equações de Einstein nos fornecem mais equações que o necessário para os cálculos, duas destas equações serão suficientes para determinar as soluções. O

⁹Observe que nenhum símbolo será usado para representar as funções no espaço de Fourier, estas podem ser identificadas com sua dependência de \mathbf{k} e não de \mathbf{x} .

¹⁰Lembre-se que foi usado o gauge Newtoniano.

¹¹Lembre-se também que foi feito $8\pi G/3 \equiv 1$.

¹²Lembre-se que $\psi = \psi(\tau, \mathbf{k})$, $\delta\rho = \delta\rho(\tau, \mathbf{k})$ são as variáveis perturbadas no espaço de Fourier

código numérico a ser empregado [97], utiliza duas destas (equações (4.103) e (4.101)). Cabe lembrar aqui que, por vezes, encontra-se a notação de Kodama e Sasaki [98] [87], ao fazer o stress anisotrópico na forma

$$\sigma \equiv \frac{2\bar{P}}{(\bar{\rho} + \bar{P})}\Pi. \quad (4.104)$$

Um outro ponto a ser observado é a decomposição do fluido total. Nas equações de Einstein (4.100), (4.101), (4.102) e (4.103), pode-se decompor o fluido total como a soma dos fluidos componentes do universo. Desta forma pode-se fazer

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\rho = \sum_i \bar{\rho}_i \delta_i \\ \theta = \sum_i \theta_i \\ \sigma = \sum_i \sigma_i, \end{array} \right. \quad (4.105)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \sum_i \theta_i \\ \sigma = \sum_i \sigma_i, \end{array} \right. \quad (4.106)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sum_i \sigma_i, \end{array} \right. \quad (4.107)$$

onde i representa cada uma das componentes (bárions, matéria escura, fótons, etc.).

Da equação (4.100) é possível recuperar a equação de Poisson, ao fazer o limite de pequenas escalas (*escalas sub-Hubble*, i.e., escalas menores que o comprimento de Hubble). Para isso, é preciso fazer o limite de sub-horizonte (ou *sub-Hubble*), neste caso, válido para comprimentos de onda menores que a distância de Hubble ($\lambda < R_H$). Neste limite, o termo proporcional a k^2 domina a equação (4.100), tem-se então a aproximação

$$-\frac{k^2}{a^2}\phi \cong \frac{3}{2}\delta\rho, \quad (4.108)$$

tendo neste caso o termo $-k^2/a^2$ representando a transformada de Fourier do operador de Laplace. O fator a^{-2} aparece porque se usa k como a magnitude do vetor de onda comóvel. Deve-se observar, ainda que pode-se tomar o stress anisotrópico σ como nulo e a partir disto, e também utilizando a equação (4.103), obter

$$\phi = \psi, \quad (4.109)$$

no limite de sub-horizonte. Desta forma, obtém-se a equação de Poisson e, assim, o potencial ψ pode ser tomado como o potencial gravitacional, neste limite.

Além das equações de Einstein, pode-se obter uma equação usando diretamente a conservação do tensor energia-momentum. Com a ajuda das relações de primeira ordem para

os símbolos de Christoffel, é possível calcular a relação tensorial da conservação, através de

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^{\nu\beta} = 0, \quad (4.110)$$

e, desta, obtém-se no espaço de Fourier [96], as componentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta' + 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \omega\right)\delta + (1 + \omega)(\theta - 3\phi') = 0 \end{array} \right. \quad (4.111)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta' + 3\mathcal{H}(1 - 3\omega)\theta + \frac{\omega'}{1 + \omega}\theta - k^2\psi + k^2\sigma - k^2\left(\frac{\delta P/\delta\rho}{1 + \omega}\right)\delta = 0, \end{array} \right. \quad (4.112)$$

onde $\omega \equiv P/\rho$. As equações (4.111) e (4.112) representam a evolução da perturbação na densidade de energia e na velocidade (equação de Euler), respectivamente. Neste trabalho, as equações acima somente poderão ser utilizadas no contexto do modelo Λ CDM. A descrição da matéria escura do modelo $\Lambda(t)$ CDM não admite um fluido perfeito conservado de forma independente para esta componente. Na próxima secção, será obtida a equação de conservação válida para este contexto.

No contexto do modelo padrão, a matéria escura interage com outras partículas somente via gravidade, por isso sua descrição pode ser tomada como a de um fluido perfeito. Usando as equações (4.111) e (4.112), pode-se escrevê-las para cada componente. Para a matéria escura ficamos com

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta'_{cdm} = -\theta_{cdm} + 3\phi' \end{array} \right. \quad (4.113)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_{cdm} = -\mathcal{H}\theta_{cdm} + k^2\psi, \end{array} \right. \quad (4.114)$$

onde usa-se $c_s^2 \equiv \delta P_b/\delta\rho_b = 0$ e $\omega \equiv 0$ para a matéria escura (CDM).

4.2.5 Conservação da Energia-Momentum para o $\Lambda(t)$

Como foi visto, o modelo de decaimento de vácuo $\Lambda(t)$ CDM modifica as equações da matéria e da energia escura, fazendo com que estas se conservem como um único fluido interagente (matéria escura + energia escura). Desta forma, não se pode utilizar as mesmas equações perturbadas do fluido perfeito para descrever o fluido de matéria escura neste modelo.

Para reescrever as equações de conservação para o modelo $\Lambda(t)$ CDM, será necessário obter a equação do fluido perfeito perturbado, não mais para o caso onde este se conserva, mas agora levando em conta o termo de interação com a energia escura.

No espaço de Fourier, o fluido de matéria escura interagente, fica

$$\begin{cases} \delta'_{cdm} = -\theta_{cdm} + 3\phi' + a \left(\frac{\rho_m}{\rho_{cdm}} \right) \frac{\sigma}{2} [\psi - \delta_{cdm}] \\ \theta'_{cdm} = -\mathcal{H}\theta_{cdm} + k^2\psi, \end{cases} \quad (4.115)$$

$$(4.116)$$

onde $\sigma = H_0\Omega_{\Lambda,0}$ e a matéria escura (CDM) não apresenta modificações em sua equação da velocidade, i.e., sua trajetória segue geodésicas. Ao comparar com (4.113) a única modificação entre o modelo Λ CDM e o modelo de decaimento de energia escura $\Lambda(t)$ CDM, é o termo adicional presente na equação (4.115). Este termo representa a criação homogênea de matéria escura.

4.3 A teia cósmica de Larga Escala e o Universo Real

Para finalizar este capítulo e já introduzir o seguinte, é interessante analisar as estruturas cosmológicas e o padrão de distribuição destas. O crescimento e a evolução destas estruturas são consequências diretas do colapso esférico em conjunto com a dinâmica cósmica. Esta evolução é descrita justamente com as perturbações relativísticas escalares, vistas neste capítulo. As formas geométricas de distribuição das inhomogeneidades cosmológicas pouco se aproximam de uma forma esférica [99]. O colapso efetivo se dá de forma anisotrópica, isto porque as estruturas irão evoluir submetidas às perturbações do fluido de matéria escura e bárions, somadas ao fluxo de Hubble tridimensional [77], onde a perturbação em certa direção é amplificada, enquanto outras sofrem supressão.

A forma geométrica das estruturas de larga escala possui características variadas, dependentes de escala. Como se sabe, os planetas os sistemas de planetas se distribuem, geralmente, em forma de discos, devido a diferenças de densidade e velocidade em diferentes direções, durante sua formação. Assim, pequenas perturbações iniciais se tornam estruturas anisotrópicas. As estruturas de galáxias apresentam comportamento similar. As galáxias satélites (com distâncias médias em torno das centenas de Kpc) da via Láctea apresentam distribuição esférica, semelhantes a discos/panquecas [101]. Em maiores escalas, estas estruturas se aglomeram, ainda, em estruturas filamentosas, formando aglomerados tridimensionais que, em larguíssima escala, se unem numa teia cósmica de filamentos conectados [102], tendo grandes vazios entres eles. A figura 4.5 mostra recortes de larga escala da teia cósmica, obtida da simulação Millenium-II [103] e analisada em [104].

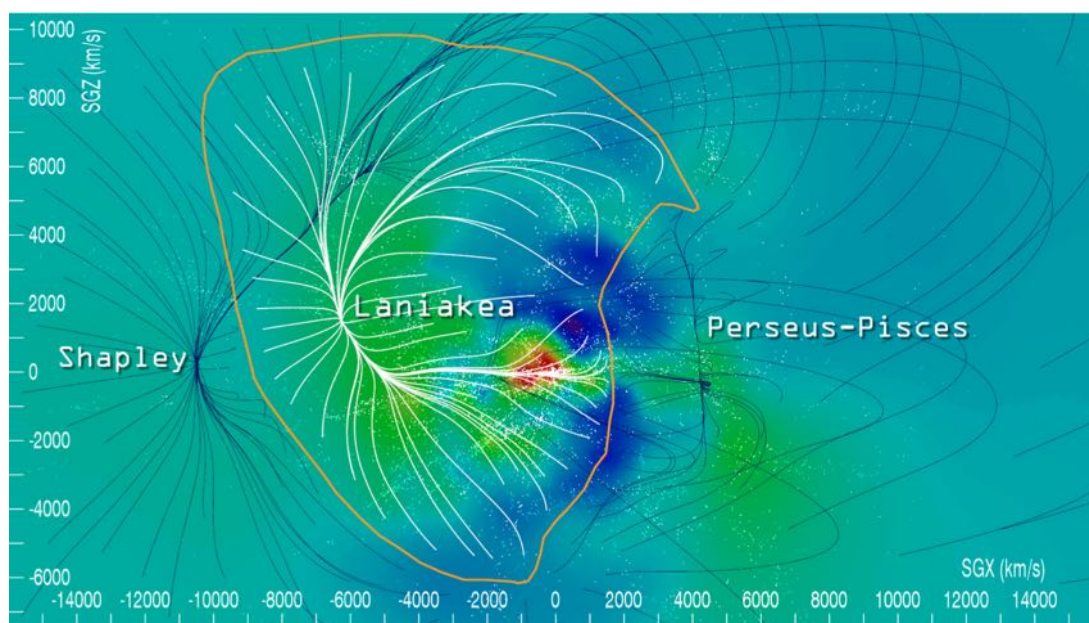


Figura 4.4: Os limites do super-aglomerado local (*Laniakea*). A ilustração indica as linhas de fluxo de velocidade e os contornos de densidade que determinam as bases de atração das estruturas [100].

O super-aglomerado local, com sua estrutura de filamentos, centros de atração e grandes vazios, está apresentado na figura 4.4. Uma destas estruturas mais impressionantes foi revelada recentemente [100] e denominada de *Laniakea*. Algumas das estruturas da teia cósmica também podem ser vislumbradas nos dados observacionais, já apresentados, na figura 4.1. O estudo deste tema representa uma grande área da cosmologia observacional e uma descrição mais ampla destes objetos e fenômenos foge ao escopo deste trabalho.

Ao pensar agora em como conciliar os efeitos das estruturas não homogêneas sobre a Radiação Cósmica de Fundo, deve-se entender que um fóton emitido na época do desacoplamento, ao experimentar um redshift da ordem de $z \approx 1100$, além de sofrer variados fenômenos no momento de sua emissão, deve, ainda, atravessar toda a teia cósmica para atingir um observador na Terra. Ao estudarmos a CMB, será preciso descrever também os efeitos provocados por estas estruturas de larga escala.

Antes de tornar viável a descrição, é preciso um formalismo capaz de descrever toda a complexidade de fenômenos envolvidos na observação da CMB, i.e., é necessário, ainda, determinar a descrição matemática das interações entre os diversos fluidos presentes no universo primordial. As descrições apresentadas neste capítulo, em especial aquelas apresentadas para o fluido perfeito, na seção 4.2.4, não são válidas para descrever o fluido interagente de bárions

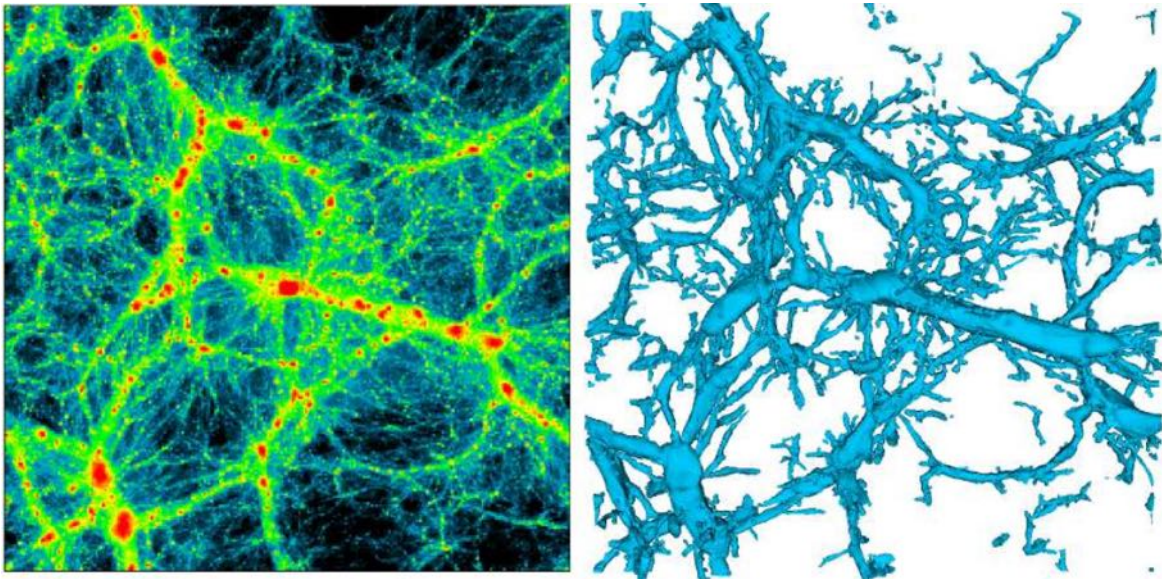


Figura 4.5: A teia cósmica e sua complexidade em escalas de $100 \times 100 \times 10 h^{-1}$ Mpc (dados da simulação Millenium-II). Mostra o campo de densidades (esquerda) e os filamentos (direita) [104].

e fótons. Para melhor inferir os efeitos da interação física entre as diversas componentes, é preciso evocar o formalismo estatístico de Boltzmann. Para tanto, será preciso reescrever as equações de cada um dos fluidos e considerar os termos que representam a interação vigente em cada caso. O universo, descrito por variados fluidos, em princípio tem sua descrição feita por um fluido total. Este é matematicamente descrito pela equação $\rho_T = \sum \rho_i$, explicitamente dada por

$$\rho_T = \rho_\nu + \rho_\gamma + \rho_b + \rho_{cdm} + \rho_{DE} \quad (4.117)$$

onde ρ_ν representa a densidade de energia dos neutrinos, ρ_γ dos fótons, ρ_{cdm} da matéria escura, ρ_b dos bárions e ρ_{DE} da energia escura. Precisaremos introduzir algumas modificações na equação da continuidade e/ou na equação de Euler, (4.111) e (4.112), respectivamente.

No que tange a interação com outros fluidos, a matéria escura será descrita como um fluido perfeito minimamente acoplado, no caso do Λ CDM, e como um fluido perfeito interagente com a energia escura, no caso do modelo $\Lambda(t)$ CDM. Para os bárions e os fótons, será preciso acrescentar termos matemáticos que representem os processos de colisão, especificamente representando a interação de Coulomb e o espalhamento Compton. Isso será atingido ao reformularmos as equações de continuidade com o formalismo de Boltzmann. Os termos específicos destas modificações e os efeitos destas, serão estudados no próximo capítulo.

Nesta tese, se assumirá que os neutrinos se encontram desacoplados e que a energia escura não apresenta perturbações. A primeira hipótese se justifica a partir do interesse aqui pretendido, em todas as épocas de estudo (desde a emissão à recepção da CMB) os efeitos da interação dos neutrinos podem ser desprezados. Assumir uma energia escura não perturbada é uma hipótese *ad-hoc*, admitida no recorte desta tese. A questão foi analisada em [76] [50]. No próximo capítulo, a discussão será aprofundada na Radiação Cósmica de Fundo, sua origem teórica e sua determinação numérica, e alguns dos principais experimentos e observações.

Capítulo 5

A Radiação Cósmica de Fundo

A observação da Radiação Cósmica de Fundo é uma consequência direta do fato de que o universo atravessou um processo expansão, partindo de um estado de equilíbrio térmico entre a radiação e seus outros constituintes. A descoberta de Penzias e Wilson em 1965 [11] em conjunção com a descrição teórica de Dicke-Peebles-Roll-Wilkinson [105], estabeleceu um marco para as observações cosmológicas. Em resumo, podemos citar alguns dos trabalhos mais importantes na área. O trabalho de Sachs-Wolf [106] determinou os diferentes efeitos que a CMB fica submetida ao viajar desde sua emissão, no último espalhamento, até a sua observação no universo atual. As estatísticas das flutuações foram tratadas em detalhes, no trabalho seminal de Bond e Efstathiou [107]. A formulação dos mecanismos de inflação [108] [109] e a técnica de integração de linha de visada, feita por Seljak, em [110]. Grandes avanços no entendimento da física das interações cósmicas é associada aos fenômenos da observados com a CMB [111] [112] e também com o trabalho de Sunyaev e Zeldovich [113]. Estes trabalhos são marcos fundamentais no desenvolvimento do estudo da Radiação Cósmica de Fundo.

Do ponto de vista experimental, as missões discutidas no capítulo de introdução (COBE e WMAP) estão entre as mais importantes e conhecidas. Uma missão posterior, chamada de Planck [114], foi lançada em maio de 2009 e nos anos seguintes foi capaz de obter mapas da radiação cósmica com precisão ainda maior ue as missões anteriores. Além de tratarem-se de experimentos com alto investimento financeiro e humano, ao longo de vários anos, estes conseguiram estabelecer alto grau de delimitação dos parâmetros cosmológicos. Além de fornecer dados para orientar a pesquisa teórica, estas missões foram fundamentais para o desenvolvimento de técnicas de medição e de tratamento e de dados. Variados grupos

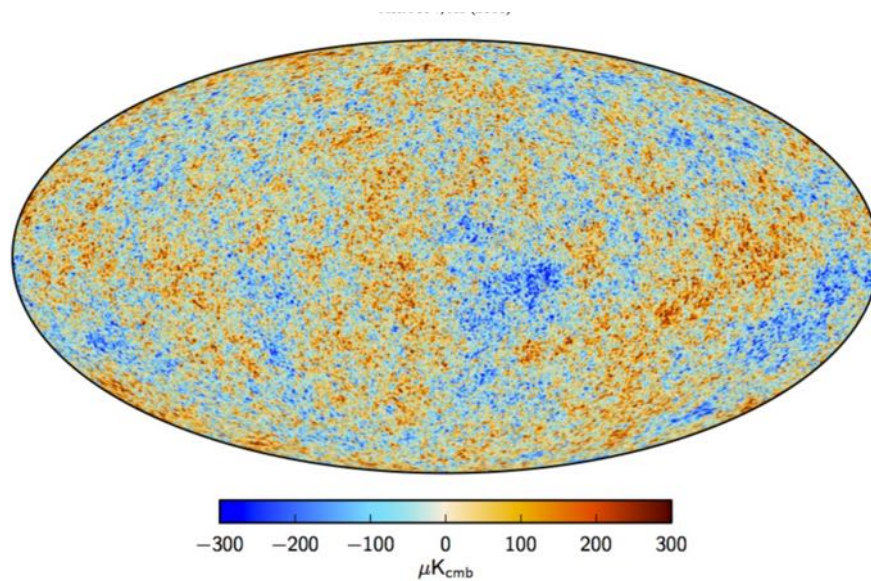


Figura 5.1: Mapa de intensidade para a CMB, com alta resolução, obtida de análise combinada do WMAP e Planck [116].

de pesquisadores realizaram uma grande quantidade de experimentos que viabilizaram o desenvolvimento de experimentos em satélites altamente especializados. Com o lançamento, em 1989 do satélite COBE [14] foi possível a determinação da radiação cósmica de fundo como um corpo negro, com precisão da ordem de 10^{-5} . Em [115] tem-se uma revisão extensa das contribuições dos nove anos da missão WMAP. As figuras 5.1 e 5.2¹ indicam resultados chave obtidos pela missão Planck. Para referências futuras, os dados da missão Planck serão as principais fontes deste trabalho.

Neste capítulo, serão analisadas as equações que descrevem as anisotropias da CMB. Para chegar neste ponto, serão estudadas em mais detalhes as equações de evolução para as perturbações, a partir da inclusão dos termos de interação, advindos do formalismo estatístico de Boltzmann. Serão analisados, também, os resultados para as funções de transferência dos fluidos e o espectro de potência de matéria, tanto no modelo Λ CDM como no $\Lambda(t)$ CDM. As descrições físicas dos fenômenos neste capítulo serão limitadas àquelas com relação direta com a determinação e a compreensão do espectro de anisotropia da temperatura da CMB. As diversas conexões com outras aplicações serão apenas apresentadas, por outro lado uma grande quantidade de temas correlacionados serão negligenciados com o propósito de sustentar foco no recorte deste trabalho.

¹(Compare com a figura 1.6)

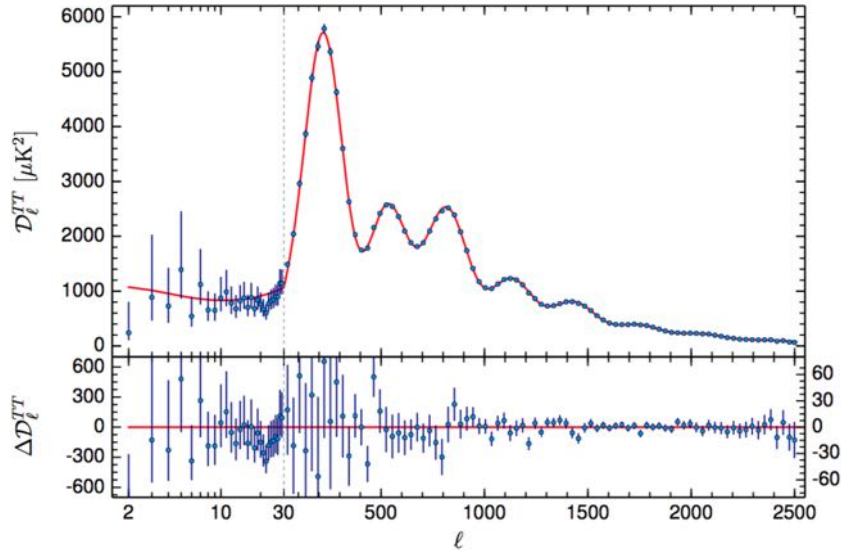


Figura 5.2: Planck 2015, espectro de temperatura da CMB [116].

5.1 Equações de Boltzmann

O formalismo de Boltzmann é uma poderosa ferramenta em toda a física. As diversas aplicações² desta teoria se estendem muito além de seu uso para a descrição dos fluidos cosmológicos [117]. As equações de transporte de Boltzmann descrevem a evolução estatística de um fluido - geralmente - fora do equilíbrio a partir de sua função de distribuição $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ [118] [119]. No contexto cosmológico, pode-se usar este formalismo para descrever os fluidos de bárions e fótons, quando estes interagem no universo primordial.

Um fluido em determinado momento possui sua função de distribuição dada pela equação

$$f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (5.1)$$

onde f nos provê uma descrição completa do estado macroscópico de um gás de partículas (ou moléculas) a partir de seus graus de liberdade microscópicos. O termo $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$ fornece o número médio de partículas em certo volume diferencial entre \mathbf{r} e $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Com esta descrição estatística, o número total de partículas em certo volume, pode ser calculado com

²O formalismo de Boltzmann é fundamental para calcular viscosidade, condutividade térmica e elétrica de materiais, dinâmica galáctica etc.

$$n(\mathbf{r}, t) = \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (5.2)$$

onde são integrados em todos os valores possíveis de velocidades³. A média de uma variável física qualquer A pode ser escrita com

$$\langle A(\mathbf{r}, t) \rangle = \bar{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) A, \quad (5.3)$$

onde $\bar{n}(\mathbf{r}, t)$ é o número médio de partículas entre \mathbf{r} e $d\mathbf{r}$.

Considerando, agora, um fluido submetido a uma força externa F que, em determinado tempo t , possui partículas com posições e velocidade entre $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ e velocidades entre \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Em um tempo $t' = t + dt$, infinitesimalmente posterior a t , as partículas do fluido estarão submetidas a uma variação de sua posição e velocidade, dada por

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}dt \\ \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{F}/m dt, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

onde $a = F/m$ é a aceleração causada pela força externa em cada partícula. Neste situação, todas as partículas irão se deslocar no espaço de fase, para os novos valores \mathbf{r}' e \mathbf{v}' , desta forma, pode-se escrever

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{v}' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}, \quad (5.6)$$

ou seja, o Jacobiano da transformação acima é igual a um em primeira ordem de aproximação. Como consequência, tem-se

$$f(\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}dt, \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}dt, t + dt) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (5.7)$$

e

$$\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{dt} = 0, \quad (5.8)$$

ou mesmo, em termos das derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.9)$$

³A formulação aqui pode ser feita em função do momento \mathbf{p} .

que é a equação de Boltzmann sem colisões, conhecida como equação de *Liouville*. Neste caso, a ausência de colisões implica em um movimento de partículas (no espaço de fases), sob a influência única da força externa. Se as colisões entre as partículas também forem levadas em conta, o número de partículas em determinado volume do espaço de fase, também irá mudar. Ao incluir estas colisões, tem-se

$$f(\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}dt, \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}dt, t + dt) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + D_c f \quad (5.10)$$

e a forma geral da equação de Boltzmann com colisões, fica

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = D_c f, \quad (5.11)$$

onde D_c indica termo de colisão entre partículas. A equação de Boltzmann (5.11) esconde na verdade, uma forma ainda mais complexa. Toda a física que representa determinado fenômeno está embutida em: i) nos termos de derivadas parciais do lado esquerdo; ii) na função de distribuição f das partículas envolvidas; iii) no termo de colisão D_c , específico para cada fenômeno de espalhamento.

É possível ainda, expressar o lado direito da equação (5.11), ao expandir o lado direito como $D_c = D_c^+ - D_c^-$ [118] [119], representando as colisões que arremessam as partículas para dentro do volume considerado (D_c^+) ou para fora (D_c^-). Considerando estes termos, a integral de colisão fica agora

$$D_c f = \int_{v'} \int_{\Omega'} (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) V \sigma_{Col} d\Omega' d^3 v_1, \quad (5.12)$$

onde V é a velocidade relativa das partículas em colisão e Ω' é o ângulo sólido em torno deste vetor. Os termos f_i e f'_i indicam a função de distribuição antes e após a o processo de espalhamento, enquanto σ_{Col} é a seção de choque da colisão. Pode-se expressar, por conveniência, os termos de (5.11) em função do momentum e decompor $\mathbf{p} = p\hat{p}^i$. Agora a equação de Boltzmann com a notação de Einstein e em sua forma completa, fica escrita com

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{dp^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p^i} = \int_{v'} \int_{\Omega'} (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) V \sigma d\Omega' d^3 v_1, \quad (5.13)$$

ou em sua forma reduzida, simplesmente por

$$\frac{df}{dt} = C[f] \quad (5.14)$$

onde a integral de colisão ficou definida com o termo $C[f]$, um funcional que depende da função de distribuição f .

Para expressar a equação de Boltzmann para cada componente do fluido cósmico, precisa-se calcular as derivadas parciais do lado esquerdo de (5.13) de forma a considerar o espaço-tempo em expansão e o comportamento físico de cada sistema de partículas. A integral do lado direito é a forma genérica da integral de colisão. Um bom texto para a derivação das equações de Boltzmann é descrito em [25]. Um tratamento amplo, com a derivação das equações de Boltzmann, incluindo detalhes dos termos de polarização, pode ser encontrado em [120] [121], enquanto [122] apresenta um extenso tratamento sobre a parte tensorial. Na próxima seção serão apresentados os termos de colisão para o espalhamento Compton.

O espalhamento Compton é a principal interação e mecanismo de termalização da CMB. Esta reação é caracterizada pela modificação do momentum do elétron $e^-(\mathbf{q})$, a partir de uma radiação incidente $\gamma(\mathbf{p})$. Esta reação é caracterizada por

$$\gamma(\mathbf{p}) + e^-(\mathbf{q}) \longleftrightarrow \gamma(\mathbf{p}') + e^-(\mathbf{q}'). \quad (5.15)$$

Este espalhamento modifica a energia dos elétrons e é o principal responsável pela evolução das inomogeneidades dos fótons antes do último espalhamento. Em princípio, seria também necessário estudar o fator gerado pelo espalhamento dos prótons pelos fótons, porém, a seção de choque desta colisão é muito inferior à dos elétrons e, por isso, pode ser negligenciado. A obtenção da integral de colisão é uma tarefa laboriosa e pode ser encontrada de forma compreensível em [112] [123].

5.1.1 Equação de Boltzmann para fótons

Antes de calcular os termos para as derivadas parciais no espaço-tempo em expansão, é preciso lembrar que a função de distribuição dos fótons já é conhecida em ordem zero de perturbação. Na base, esta função é distribuição de Bose-Einstein, dada por

$$\bar{f}(\mathbf{x}, p, \hat{p}, t) \equiv \frac{1}{e^{p/T} - 1}, \quad (5.16)$$

onde T é a temperatura e p é o momentum do fóton. Precisa-se, agora, expandir esta função até a primeira ordem de perturbação. Para isso, deve-se fazer a expansão perturbativa na forma

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{p}, t) = \frac{1}{e^{p/T(1+\Theta)} - 1}, \quad (5.17)$$

onde $\Theta \equiv \Theta(\mathbf{x}, \hat{p}, t)$ e $T \equiv T(t)$. A função Θ à perturbação, definida por

$$\Theta \equiv \frac{\delta T}{T}. \quad (5.18)$$

A expansão (5.17) é equivalente a fazer

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{p}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}, p, \hat{p}, t) - p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \Theta. \quad (5.19)$$

Com a expansão da função de distribuição, será necessário calcular o lado esquerdo da equação de Boltzmann (5.13) e expressar as derivadas parciais de forma explícita. Em seguida será preciso explicitar, também, o lado direito de (5.13), calculando diretamente os termos de colisão de Compton.

Usando a definição do quadri-momentum

$$P^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (5.20)$$

pode-se calcular suas componentes (P^0, p) , usando o produto escalar

$$P^2 \equiv g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0, \quad (5.21)$$

para fótons. Com ajuda da equação geodésica

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^0 P^\alpha P^\beta, \quad (5.22)$$

pode-se calcular os termos do lado esquerdo da (5.13) e, utilizando as componentes da métrica perturbada (4.73), (4.74) e (4.75), obtêm-se os termos

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\hat{p}^i}{a} (1 + \phi + \psi) \\ \frac{1}{p} \frac{dp^i}{dt} = -H - \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi}{\partial t}. \end{cases} \quad (5.23)$$

$$(5.24)$$

Finalmente, pode-se escrever o lado esquerdo completo da equação de Boltzmann (equivalente a zero, no caso sem colisões), como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (1 + \phi + \psi) \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \left(-H - \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) p \frac{\partial f}{\partial p} = C[f], \quad (5.25)$$

onde os dois últimos termos, dependentes de ψ e ϕ representam os efeitos da gravidade, enquanto os termos dependentes de Θ respondem pelos termos de *free streaming*. Este termos serão interpretados em mais detalhes quando analisarmos o comportamento dos fótons (da CMB) em livre propagação, na sub-seção 5.1.3.

Usando (5.19) em (5.25), pode-se expandir os termos de Boltzmann até primeira ordem. A equação de ordem zero, nos fornece simplesmente a relação para a temperatura no espaço-tempo em expansão, com $T \propto a^{-1}$. Os termos de primeira ordem, após alguma álgebra, podem ser colocados na forma

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right], \quad (5.26)$$

onde $df^{(1)}/dt$ indica o termo de primeira ordem. Ao expandirmos a anisotropia de temperatura em termos de multipolos, tem-se

$$\Theta = \sum_l (-i)^l (2l + 1) \Theta_l P_l, \quad (5.27)$$

com termo de colisão para os fótons [25], descrito por

$$C[f] = p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} [\Theta - \Theta_0 - \hat{p} \cdot \mathbf{v}_b], \quad (5.28)$$

com Θ_0 sendo o monopolo, descrito por

$$\Theta_0(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{p}', \mathbf{x}, \tau). \quad (5.29)$$

Pode-se expressar o termo de colisão e coletar as derivadas parciais do lado esquerdo de (5.13), neste caso, no espaço das posições tem-se

$$\Theta' + \hat{p} \cdot \nabla \Theta - \phi' + \hat{p} \cdot \nabla \psi = -\Gamma(\Theta - \Theta_0 - \hat{p} \cdot \mathbf{v}_b), \quad (5.30)$$

onde $\mathbf{v}_e \mathbf{v}_b$. \mathbf{v}_e a velocidade do fluido de elétrons e \mathbf{v}_b dos bárions, Γ é a taxa de espalhamento de Thompson conforme, dado por

$$\Gamma \equiv an_e x_e \sigma_T, \quad (5.31)$$

onde n_e é o número de elétrons livres e σ_T a seção de choque de Thompson⁴.

A (5.30) é uma relação chave para a descrição das anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo. Observa-se que Θ_0 representa o monopolo, ou seja, a temperatura média em todas as direções. Fica claro que para uma velocidade não nula do fluido de elétrons (bárions), a distribuição de fótons $\Theta(\mathbf{p})$ tenderá ao monopolo Θ_0 . É possível observar, também que quanto mais eficiente for o efeito Compton Γ , mais próximo do monopolo será a distribuição de fótons, por este motivo a distribuição observada da CMB possui alto grau de homogeneidade. No momento do desacoplamento, o espalhamento Thompson já não era eficiente o suficiente (observe que $\Gamma \propto a^{-2}$) para eliminar todos os modos e, portanto, a distribuição observada possuirá outros momentos além do monopolo.

No espaço de Fourier, pode-se sumarizar as equações de Boltzmann para os fótons, através de cada um de seus momentos com

$$\begin{cases} \delta'_\gamma = -\theta_b + 3\phi' & (5.32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta'_\gamma = -\mathcal{H}\theta_b - \tau'_{opt}(\tau)(\theta_\gamma - \theta_b) & (5.33) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_{\gamma 2} = \frac{8}{15} - \frac{3}{5}kF_{\gamma 3} + \tau'_{opt}\sigma_\gamma - \frac{1}{10}\tau'_{opt}(G_{\gamma 0} + G_{\gamma 2}), & (5.34) \end{cases}$$

onde omitimos os termos de ordem superior de polarização. Definimos δ_γ , como a densidade, θ_γ é a velocidade potencial e σ_γ é o tensor de anisotropia dos fótons, enquanto $F_{\gamma i}$ e $G_{\gamma i}$ são os momentos de ordem superiores.

5.1.2 Equação de Boltzmann para a matéria bariônica

As componentes cósmicas sem pressão, caso da matéria escura e dos bárions, possuem uma descrição estatística semelhante. Há uma divergência fundamental entre elas, enquanto a matéria escura somente interage via gravidade, os bárions são afetados pelas inúmeras colisões. Mas, o interesse do estudo é nas interações que acontecem no universo primordial.

Devido ao acoplamento Coulombiano entre prótons e elétrons, no universo primordial, a descrição do fluido cósmico antes do desacoplamento pode ser tomada como uma única componente. Os componentes cosmológicos denominados bárions (prótons e elétrons)⁵ podem ser considerados um único fluido.

⁴O espalhamento Thompson é a denominação do espalhamento Compton para baixas energias.

⁵Na verdade, é preciso lembrar que elétrons são léptons e não bárions. Devido a sua pequena massa e seu acoplamento com os prótons, é usual tratar ambos como bárions.

Para a descrição de partículas não relativísticas, destacam-se duas características físicas importantes para a obtenção da equação de Boltzmann, características estas que diferem daquelas usadas no caso dos fótons. A primeira será a modificação da relação de energia, que agora fica

$$P^\mu P_\mu = -m^2, \quad (5.35)$$

onde lembramos que $E^2 \equiv p^2 + m_0^2$. Para as componentes de bárions e matéria escura não é necessário conhecer de antemão a função de distribuição das partículas. Como não é conhecida de antemão esta distribuição, a outra modificação importante será a necessidade de coletar os diferentes momentos na equação de Boltzmann. Em termos da função de distribuição, a densidade é dada por

$$n_i = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i, \quad (5.36)$$

onde i é a componente da distribuição. A velocidade fica dada por

$$v_i \equiv \int \frac{1}{n_i} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i \left(\frac{p}{E} \right) \hat{p}^i. \quad (5.37)$$

Definindo também a função profundidade óptica (*Optical Depth*), como

$$\tau_{opt}(\tau) \equiv \int_\tau^{\tau_0} d\tau \Gamma(\tau), \quad (5.38)$$

onde é fácil verificar que

$$\tau'_{opt} = -\Gamma(\tau). \quad (5.39)$$

Ao seguir os passos para a obtenção das derivadas parciais da equação de Boltzmann (5.13), pode-se coletar os termos da matéria escura, em primeira ordem de aproximação. Neste caso obtêm-se as mesmas equações do fluido perfeito, (4.113) e (4.114). É preciso lembrar que, no caso do modelo de decaimento de energia escura, a descrição do fluido escuro traz consigo uma interação entre suas componentes. Esta interação é modelada a partir de hipóteses fenomenológicas. Uma descrição em termos físicos microscópicos traria a necessidade de uso do formalismo de Boltzmann ou um outro formalismo capaz de descrever as interações específicas destas partículas, entretanto, nenhuma microfísica destas partículas é conhecida.

Para os bárions, haverá um termo de colisão não nulo, devido ao espalhamento Compton. Ao expressar este termo [25] [124], as equações de Boltzmann para os bárions ficam dadas por

$$\begin{cases} \delta'_b = -\theta_b + 3\phi' & (5.40) \\ \theta'_b = -\mathcal{H}\theta_b + k^2\psi + k^2c_b^2(\delta_b + \delta_T) + R\tau'_{opt}(\tau)(\theta_\gamma - \theta_b), & (5.41) \end{cases}$$

onde $\tau_{opt}(\tau)$ é a função *profundidade óptica*⁶ e $R \equiv (4/3)(\rho_\gamma/\rho_b)$. As equações de Boltzmann (5.40) e (5.41), generalizam as equações do fluido perfeito, ao incluir os termos de interação destas partículas.

5.1.3 Anisotropia da temperatura em uma direção

Ao detectar a CMB nos tempos atuais, observam-se fótons que foram emitidos numa época em que o fator de escala $a(t)$ era muito menor e o universo substancialmente mais quente. Um fóton emitido do gás primordial na época do desacoplamento, se desloca livremente sem sofrer novos espalhamentos (*free streaming*). Estas partículas atravessam as inhomogeneidades das grandes estruturas cósmicas, ao mesmo tempo em que são submetidas às variações energéticas deste universo em expansão.

O método de integração da linha de visada (*line of sight*) nos fornece a possibilidade de analisar a anisotropia de temperatura em uma dada direção. Com isso, pode-se, entender os diferentes efeitos que o fóton sofre, desde a sua emissão. Este método foi estudado inicialmente em [106], em seguida aprofundado em [110].

Ao observar uma radiação emitida no último espalhamento e observada hoje nesta localização cósmica ($\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0$), a radiação observada possui um contraste $\delta T/\bar{T}(\hat{n})$ ⁷ que depende somente da direção observada. Este fóton observado, se relaciona com o contraste de fótons teórico Θ , onde $\Theta = \Theta(-\hat{n}, \mathbf{x}_0, \tau)$. Para estas variáveis, tem-se a relação matemática

$$\frac{\delta T(\hat{n})}{\bar{T}} = \Theta(-\hat{n}, \mathbf{x}_0, \tau), \quad (5.42)$$

onde a direção de observação \hat{n} é oposta ao deslocamento do fóton. Será utilizada equação de Boltzmann para fótons, mas antes, será feita a seguinte derivada total

⁶Geralmente definida com notação usando o próprio τ .

⁷Geralmente usa-se $\hat{p} \equiv \hat{n}$.

$$\frac{d}{d\tau} [e^{-\tau_{opt}}(\Theta + \psi)] = e^{-\tau_{opt}} [(-\tau'_{opt})(\Theta + \psi) + (\Theta' + \psi') + \hat{n} \cdot \nabla\phi + \hat{n} \cdot \nabla\phi], \quad (5.43)$$

e definindo a função de visibilidade (*visibility function*)⁸ com

$$g(\tau) \equiv -\tau'_{opt} e^{-\tau_{opt}}, \quad (5.44)$$

pode-se escrever

$$\frac{d}{d\tau} [e^{-\tau_{opt}}(\Theta + \psi)] = g(\tau)(\Theta + \psi) + e^{-\tau_{opt}} [(\Theta' + \psi') + \hat{n} \cdot \nabla\phi + \hat{n} \cdot \nabla\phi]. \quad (5.45)$$

onde pode-se eliminar os últimos termos da equação acima, pois estes são de segunda ordem, uma vez que cada parcela é de primeira ordem de perturbação. Em ordem zero de perturbação, da relação do elemento de linha $ds^2 = d\mathbf{x}^2$, tem-se

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \hat{n}_i. \quad (5.46)$$

Agora, da equação de Boltzmann (5.30), usando (5.39) e fazendo $\hat{p} \equiv \hat{n}$, pode-se isolar os termos

$$\Theta' + \hat{n} \cdot \nabla\Theta + \hat{n} \cdot \nabla\psi = +\phi' + \tau'_{opt}(\Theta - \Theta_0 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}_b), \quad (5.47)$$

e usá-los na equação (5.45), de forma a ficar com

$$\frac{d}{d\tau} [e^{-\tau_{opt}}(\Theta + \psi)] = g(\tau)(\Theta + \psi) + e^{-\tau_{opt}} [\phi' + \psi' + \tau'_{opt}(\Theta - \Theta_0 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}_b)], \quad (5.48)$$

que, agora, pode ser integrada no tempo conforme, desde o instante do último espalhamento τ_{dec} , até o tempo atual τ_0 , assim, fica-se com

$$\int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \frac{d}{d\tau} [e^{-\tau_{opt}}(\Theta + \psi)] d\tau = \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} e^{-\tau_{opt}} (\phi' + \psi') d\tau + \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} g(\tau)(\Theta - \Theta_0 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}_b) d\tau. \quad (5.49)$$

⁸Será discutida, logo mais, a importância da função de visibilidade.

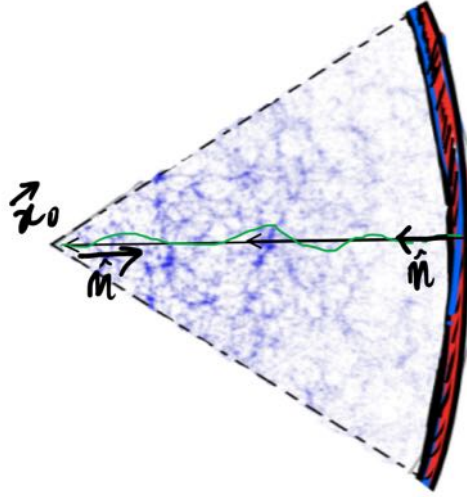


Figura 5.3: Ilustração para a superfície de último espalhamento e o caminho percorrido por um fóton originado na Radiação Cósmica de fundo.

Observa-se que um desacoplamento instantâneo implica na possibilidade de fazer a aproximação

$$\begin{cases} g \rightarrow \delta_D(\tau - \tau_{dec}) \\ e^{-\tau_{opt}} \rightarrow H(\tau - \tau_{dec}), \end{cases} \quad (5.50)$$

$$(5.51)$$

i.e, a função de visibilidade g , podem ser tomada como a delta de Dirac, enquanto a exponencial $e^{-\tau_{opt}}$ pode ser tomada como a função de Heaviside. Do lado esquerdo, fica-se com

$$[e^{-\tau_{opt}}(\Theta + \psi)]\Big|_{\tau_0} = (\Theta + \psi)\Big|_{\tau_0} \equiv (\Theta + \psi)\Big|_{OBS}. \quad (5.52)$$

A integração da linha de visada, agora, fica

$$(\Theta + \psi)\Big|_{OBS} = [\Theta - \Theta_0 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}_b]\Big|_{\tau_{dec}} + \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} [e^{-\tau_{opt}}(\phi' + \psi')] d\tau, \quad (5.53)$$

onde, o termo $\psi\Big|_{OBS}$, pode ser colocado ao lado direito, para isso, deve-se admitir $\psi\Big|_{OBS} \approx \psi\Big|_{Dec}$, o que é uma aproximação que corresponde a uma correção na temperatura da ordem de $10^{-5}\bar{T}$. Neste caso, pode-se fazer

$$\Theta\Big|_{OBS} \cong (\Theta_0 + \psi)\Big|_{dec} + \hat{n} \cdot \mathbf{v}_b\Big|_{\tau_{dec}} + \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} (\phi' + \psi') d\tau, \quad (5.54)$$

A equação (5.54) explicita os termos associados ao efeito Sachs-Wolf, efeito Doppler e o efeito Sachs-Wolf integrado, respectivamente ao primeiro, segundo e terceiro termo da equação. Nas seções seguintes serão analisados estes efeitos sobre o espectro de anisotropia da CMB. Por hora, na seção seguinte, serão analisados os códigos numéricos capazes de integrar o sistema de equações apresentado.

5.2 Códigos de Boltzmann

As equações de Boltzmann, descritas nas seções anteriores, necessitam ser integradas. Os softwares numéricos capazes de fazer isso, são em geral, denominados de códigos de Boltzmann. Nesta seção, será apresentada uma breve história do desenvolvimento destes códigos. O primeiro código numérico capaz de realizar esta tarefa foi desenvolvido por Bertschinger, em 1995 [125], com o código COSMICS⁹, escrito em Fortran 77. O código segue as equações, aproximações e o método de truncagem, realizados em [96]. Em 1996, no trabalho de Seljak e Zaldarriaga [110], foi proposto um novo formalismo (integração da linha de visada), que reduziu drasticamente o tempo da integração das anisotropias. Este autores realizaram também a modificação do código, que foi lançado com o nome de CMBFAST¹⁰, que logo ganhou extensões e foi renomeado para RECFAST. Em seguida o código foi reorganizado em linguagem C++ e denominado agora de CMBEASY¹¹.

Os códigos de Boltzmann se desenvolveram rapidamente. Em novembro de 1999, uma nova versão foi reorganizada e publicada em Fortran 90. Este novo código, denominado CAMB¹² [126], apresentava expressões melhoradas e uma maior facilidade na leitura do código. O código CAMB é largamente adotado nos projetos da NASA e mantido por seus autores e uma rede de usuários colaboradores. Com a falta de manutenção, os códigos que o precederam se tornaram-se obsoletos.

O código CLASS¹³ (*Cosmic Linear Anisotropy Solving System*) foi proposto em 2011 [127] [97]. É expresso em código C e foi escrito com a organização em módulos, separados de acordo com a física envolvida. Este código tem a vantagem estratégica de ter sido desenvolvido já com o conhecimento adquirido, por mais de uma década, com seus predecessores. Estes últimos fatores enumeram questões fundamentais em prol de sua flexibilidade. Uma

⁹Os weblinks apontados em [125] não se encontram mais - publicamente - acessíveis.

¹⁰Códigos e interface disponíveis em: https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_cmbfast_ov.cfm.

¹¹Disponível em diretório de códigos: <https://github.com/EdoardoCarlesi/cmbeasy/>.

¹²Disponível em: <http://camb.info/>.

¹³Disponível em: <http://www.class-code.net/>.

comparação foi realizada pelos autores deste código e em alguns casos, a velocidade de computação do CLASS chega a ser 2,5 vezes mais rápido que o CAMB [128]. Entretanto, em geral, ambos os códigos fornecem precisão e tempo de computação semelhantes.

Nas próximas seções, o código CLASS será utilizado para obter soluções das variáveis perturbadas para o modelo $\Lambda(t)$ CDM e Λ CDM. Desta forma será determinada a função de transferência para estas variáveis, o espectro de potência de matéria e o espectro de anisotropia de temperatura da CMB.

5.3 Espectro de potência

De acordo com a análise de Fourier, é possível decompor um sinal em suas frequências fundamentais discretas, ou em um espectro de frequências sobre um determinado conjunto de variáveis. Para isso, é preciso expandir a função em termos de ondas planas. Estamos interessados em variáveis perturbadas, desta forma no caso discreto, têm-se

$$\delta A(\tau, \mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta A_n(\tau, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (5.55)$$

onde $\delta A(\tau, \mathbf{k})$ é a transformada da função $\delta A(\tau, \mathbf{x})$.

A teoria de perturbações cosmológicas possui estrutura estatística, logo, a flutuação de certas quantidades físicas deve obedecer uma distribuição de probabilidade. No contexto linear, estas probabilidades mantêm sua distribuição estatística, ao evoluírem de um certo tempo inicial t_0 , para outro tempo final t . É possível determinar a função de correlação de determinada variável $A(\tau, \mathbf{x})$, utilizando a definição

$$\langle \delta A(\tau, \mathbf{x}) \delta A(\tau, \mathbf{x}') \rangle \equiv \zeta(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \zeta(\tau, |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|), \quad (5.56)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{x}' são pontos distintos, o termo $\langle \dots \rangle$ representa a média em certo volume. A última igualdade é válida em um universo isotrópico. Se expressamos no espaço de Fourier, usando a relação para a isotropia, tem-se

$$\langle \delta A(\tau, \mathbf{k}) \delta A(\tau, \mathbf{k}') \rangle = \delta_D^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) |A(k)|^2 = \delta_D^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) P_A(k), \quad (5.57)$$

onde δ_D é a função de Dirac e a função escalar P_A é comumente chamada de *espectro de potência* de A .

Inicialmente estamos interessados no espectro de potência da matéria (de sua função de correlação), que é constituída de matéria escura e matéria bariônica. Nas seções seguintes, apresentaremos o espectro da matéria total e também o espectro de cada componente da matéria. Após esta análise, faremos o espectro de potência da CMB, porém, neste caso o espectro será ainda decomposto em esféricos harmônicos

5.3.1 Espectro de potência de matéria

O espectro de potência da distribuição de matéria é uma observação cosmológica fundamental. A matéria luminosa, em forma de galáxias, tende a distribuir-se de acordo com as flutuações da densidade de matéria [129]. Façamos então a definição da perturbação da matéria total, na forma

$$\delta\rho_m \equiv \delta\rho_b + \delta\rho_{cdm}, \quad (5.58)$$

onde $\delta\rho_m$ é o contraste da total da matéria. Desta forma o espectro de potência da matéria, fica

$$P(z, k) \equiv P_0 \frac{2\pi^2}{k^3} \delta_m^2(z, k), \quad (5.59)$$

onde usamos agora o redshift como variável temporal.

Definimos agora o *espectro primordial*, através da relação

$$P_0 \equiv A_s \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n_s - 1} \quad (5.60)$$

onde A_s é a amplitude e n_s é chamado de *tilt* ou *índice espectral*. k_p é a escala pivotal, fixada arbitrariamente. O fator $n_s - 1$, é escolhido desta forma para preservar a definição histórica, na qual, o espectro invariante de escala fica equivalente ao caso $n_s \equiv 1$. O espectro da matéria, pode ser decomposto, agora, na forma

$$P(z, k) \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} A_s \left(\frac{k}{k_s} \right)^{n_s - 1} \delta_m^2(z, k). \quad (5.61)$$

A função δ_m é chamada de função de transferência, associada ao espectro de potência da matéria total.

A literatura, em geral, inclusive as definições adotadas pelo CLASS, utilizam o espectro de potência da matéria total, porém, as componentes realmente observadas são bárions (matéria

luminosa). Este fator de enviesamento (*bias factor*) exige certo cuidado nas análises [130] [131], é preciso cautela adicional ao utilizar certas hipóteses em modelos de decaimento, uma vez que parte da evolução se dá com certo conteúdo de matéria, havendo somente produção de matéria escura em eras mais recentes. Na próxima seção, pretende-se fazer algumas observações sobre estes pontos, quando apresentarmos as funções de transferência para a matéria escura e os bárions, serão mostrados os gráficos de evolução destas variáveis. Apesar de estar fora do escopo deste trabalho, a apresentação destas funções, servem aqui ao propósito de fornecer uma janela em favor da compreensão dos fenômenos destes modelos e também de seus efeitos sobre a Radiação Cósmica de Fundo.

Argumentamos antes, que o modelo $\Lambda(t)$ CDM possui evolução semelhante ao modelo Λ CDM, esta correlação é válida quando os parâmetros do primeiro são calculadas com

$$[\tilde{\Omega}_{cdm}]^2 \Big|_{\Lambda(t)CDM} \iff \Omega_{cdm} \Big|_{\Lambda CDM}. \quad (5.62)$$

Para este caso, as discrepâncias somente se tornam relevantes em tempos tardios. Fisicamente, isto sugere que os dados de concordância devem incorrer, para o $\Lambda(t)$ CDM, em parâmetros próximos aos dos valores desta relação. Um vez que não foram adotados critérios de concordância de modelos neste trabalho, será inicialmente utilizada esta semelhança como parâmetro de comparação entre os modelos teóricos. A figura 5.4, mostra o espectro de potência para a matéria total, onde encontramos o $P(k)$ para três conjuntos de parâmetros.

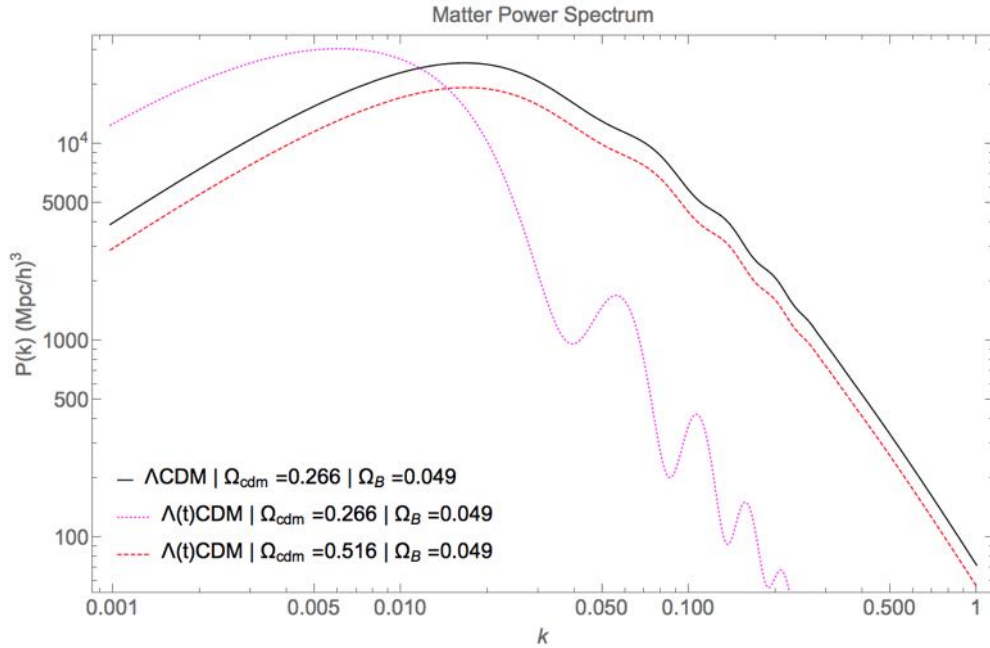


Figura 5.4: Espectro de potência de matéria total para o modelo Λ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ Best-fit do Planck [38] e $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$, respectivamente. O parâmetro de Hubble foi fixado em $h \equiv 0.678$ para ambos os modelos.

5.4 Evolução das perturbações e as funções de Transferência

O conhecimento adquirido nas seções anteriores pode ser usado para obter a evolução das diferentes componentes perturbadas. Matematicamente, podemos compilar estas informações a partir de três conjuntos de equações diferenciais acopladas, que são: i) Continuidade para os fluidos perfeitos; ii) Equações de Boltzmann; iii) Equações de Einstein. Estas equações são a chave para encontrar soluções para as variáveis cosmológicas necessárias a obtenção do espectro da CMB, em nível perturbativo de primeira ordem. Para os fótons tem-se as equações (5.32), (5.33) e (5.34). A matéria escura, no modelo Λ CDM, é descrita pelas equações (4.113) e (4.114), enquanto no $\Lambda(t)$ CDM, a matéria escura é descrita por (4.115) e (4.116).

A compreensão da evolução física das diferentes funções perturbadas é fundamental para o entendimento de variados fenômenos e características da CMB. Com o objetivo de aprimorar o conhecimento físico sobre os fenômenos relacionados a Radiação Cósmica de Fundo, serão apresentadas e discutidas, abaixo, a evolução destas funções. Nas figuras deste capítulo, a evolução será mostrada para o número de onda com escala comóvel $k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$. No

Tabela 5.1: Parâmetros para os modelos teóricos.

Parâmetros fixados	Modelos		
	Λ CDM	L(t)CDM	L(t)CDM
Parâmetro de Hubble (h)	0.678	0.678	0.678
Densidade de bárions ¹⁴ (ω_b)	0.024	0.024	0.024
Amplitude do espectro primordial (A_s)	2.1955E-9	2.1955E-9	2.1955E-9
Índice espectral (n_s)	0.9655	0.9655	0.9655
Densidade de matéria escura ¹⁵ (ω_{cdm})	0.1223	0.2372	0.1223
Parâmetros Calculados			
Idade (Ganos)	13.8041	12.7041	16.3029
Recombinação (z_{dec})	1088.9957	1089.1183	1081.0081
Variância (σ_8)	0.8366	0.7343	0.1812

momento do desacoplamento dos fótons, esta escala está dentro do horizonte de Hubble (escala sub-horizonte). Gráficos com outro número de onda k (neste caso escolhemos escalas de super-horizonte), são mostrados no apêndice A.

5.4.1 Contraste da matéria escura

Os modelos cosmológicos (modelos teóricos com parâmetros especificados) analisados são:

(A) Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ ($\omega_{cdm} = 0.1223$),

(B) $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ ($\omega_{cdm} = 0.2372$),

(C) $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ ($\omega_{cdm} = 0.1223$).

Estes modelos estão especificados na tabela 5.1, em conjunto com um código de cores¹⁶ para os gráficos seguintes.

O modelo (C), $\Lambda(t)$ CDM com o parâmetro de densidade de matéria $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ ¹⁷, apresenta comportamento acentuadamente distinto dos modelos (A) e (B). Para o $\Lambda(t)$ CDM com este parâmetro, a evolução cósmica se dá com uma matéria escura reduzida (equivalente a $0.266^2 = 0.07$) para o universo antes do desacoplamento. Após o período de produção de

¹⁴ $\omega_b \equiv \Omega_b h^2$

¹⁵ $\omega_{cdm} \equiv \Omega_{cdm} h^2$

¹⁶Observe que as cores dos gráficos seguem o mesmo padrão das cores utilizadas na tabela 5.1.

¹⁷Neste capítulo, utilizamos $\Omega_{cdm} \equiv \Omega_{cdm,0}$ como o parâmetro de densidade atual.

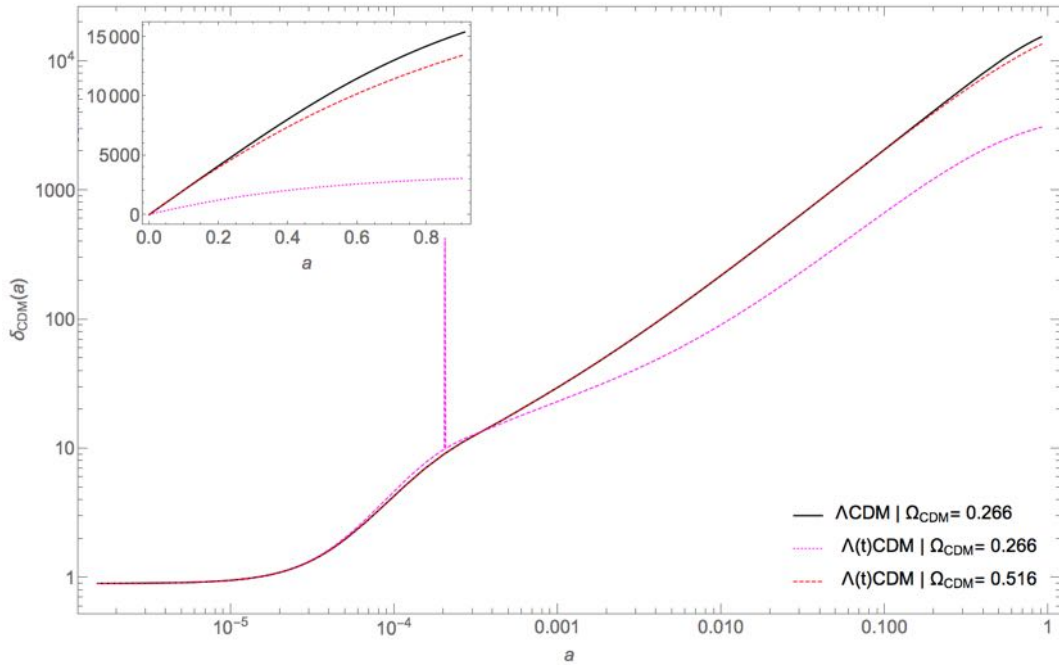


Figura 5.5: Contraste para a matéria escura. Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).

matéria, somente, este parâmetro irá atingir o valor determinado em tempos atuais, ou seja, uma densidade de matéria escura de $\Omega_{cdm,0} \equiv 0.266$. Devido à baixa energia da matéria total (em respeito àquela do Λ CDM), durante a maior parte de sua evolução, o horizonte acústico é fortemente deslocado para menores escalas, o que também induz oscilações acústicas mais intensas, possivelmente manifestando-se na formação de estruturas em variadas escalas.

Com o estudo das variáveis e funções de transferência nesta seção, o comportamento do espectro de potência de matéria apresentado da seção anterior, se torna melhor compreendido. A supressão apresentada no modelo (C) $\Lambda(t)$ CDM ($\Omega_{cdm} \equiv 0.266$) é previsível, devido à baixa densidade de matéria escura apresentada. As oscilações ficam amplificadas neste caso (ver 5.4), uma vez que a proporção de bárions para matéria escura é alta no universo primordial e durante a formação das estruturas. Aqui, todas as escalas apresentam baixa aglomeração, tendo a variância da massa, obtida com valor $\sigma_8 = 0.18$. Neste trabalho, o modelo $\Lambda(t)$ CDM com este parâmetro, serve aqui, como referencial comparativo.

Na figura 5.5, é mostrado o contraste para os diferentes modelos estudados ao escolher-se uma escala comóvel para o número de onda. O modelo $\Lambda(t)$ CDM segue o comportamento do modelo Λ CDM até atingir um fator de escala de $a \approx 0.1$ (equivalente a um redshift de $z \approx 10$). Em torno desta escala, os modelos iniciam uma divergência mais acentuada. Ao

compararmos os modelos (B) versus (A), é possível observar que a produção de matéria escura se torna acentuada, a partir da escala $a \approx 0.1$ ($z \approx 10$), fazendo com que as respectivas curvas de contraste sejam diferenciadas. Na escala considerada, onde o número de onda comóvel foi fixado em $k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$, é possível observar leves oscilações devido aos bárions (bárions e matéria escura, são observacionalmente indistinguíveis nesta época), uma vez que este modo se encontrava dentro do horizonte acústico.

Para o modelo (B), ou seja, o caso $\Lambda(t)$ CDM, com $\Omega_{cdm,0} \equiv 0.516$, além dos efeitos diretos da produção de matéria escura, esta produção também implica em uma aglomeração mais lenta em eras recentes (em comparação ao Λ CDM) do modelo (A). A produção de matéria, tende a amplificar a inércia de aglomeração (desacelerar a aglomeração), fazendo com que as estruturas sejam formadas de forma atrasada, em relação à formação apresentada no modelo padrão. Estes fenômenos serão analisados na próxima seção.

5.4.2 Velocidade e Potenciais ψ e ϕ

O comportamento dos fluidos de matéria em eras mais recentes (quando a produção de matéria escura se torna relevante) altera significativamente os poços de potenciais que os fótons ficam submetidos durante sua viagem até a observação. Antes do desacoplamento, o movimento peculiar destes fluidos, em especial dos bárions, estabelece efeitos característicos na Radiação Cósmica de Fundo. No momento em que os fótons são emitidos, o movimento do fluido e suas oscilações implicam num efeito Doppler para radiação irradiante. Em determinadas regiões as oscilações criam sobre-densidades, em outras padrões de rarefação, criando um distinto padrão na CMB em cada uma destas escalas. Após o desacoplamento, as diferentes regiões¹⁸ entram em colapso hierarquicamente, seguindo escalas crescentes de aglomeração¹⁹. Todos estes fatores implicam em efeitos relevantes para a Radiação Cósmica de fundo.

A evolução para os potenciais ψ e ϕ , são mostrados nas figuras A.4 e A.5, respectivamente. Ao comparar os modelos, nota-se que o comportamento dos mesmos são semelhantes, destoando somente até o que a produção de matéria se torne proeminente. Vemos que seu comportamento diverge em baixo z , para as curvas do Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM, quando os parâmetros de matéria escura correspondem a $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$, respectivamente. Para o $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$, há mais uma vez, forte discrepância com os resultados

¹⁸Nesta seção foi fixado $k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$

¹⁹Os gráficos para o número de onda $k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$ estão disponíveis no anexo.

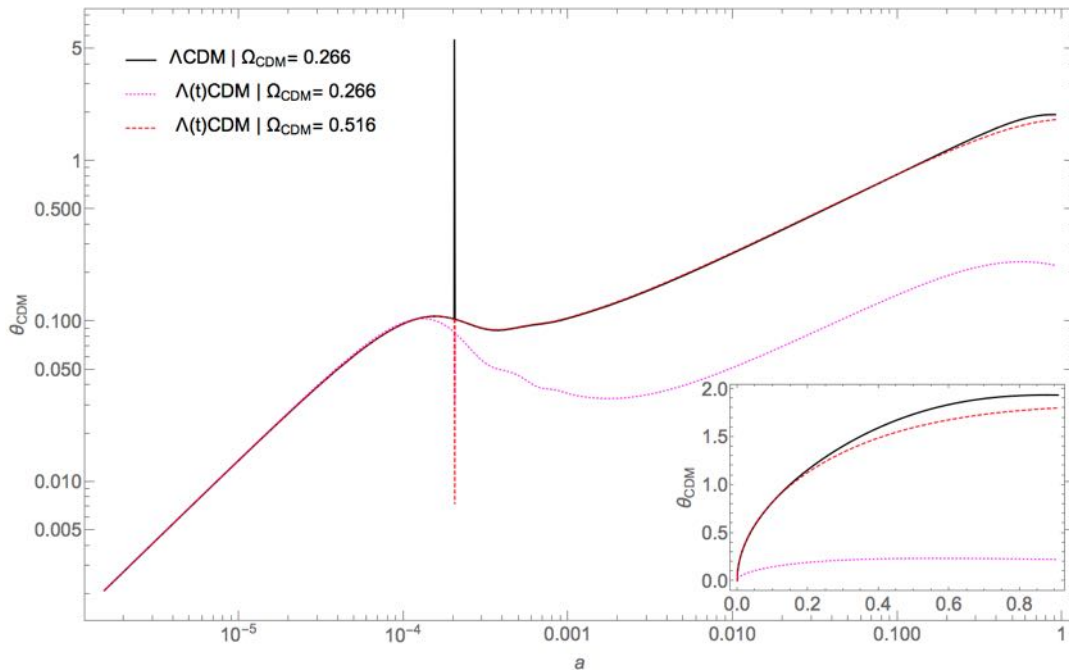


Figura 5.6: Velocidade potencial da matéria escura para o Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).

das duas curvas precedentes.

Será visto na próxima seção, que a produção de matéria escura implicará numa redução do efeito Sachs-Wolf integrado (ISW, do inglês *Integrated Sachs-Wolf effect*)²⁰. Na próxima seção iremos discutir especificamente o espectro de potência da temperatura, obtido a partir da Radiação Cósmica de Fundo e também confrontar estes com alguns resultados experimentais. O entendimento proveniente do estudo das variadas funções perturbadas, feito nesta seção, será fundamental para entender as características apresentadas pela CMB.

²⁰Na próxima seção argumentaremos que este efeito deve ser típico para qualquer modelo com criação homogênea de matéria. Denominaremos de ISW fraco (ou *weak-ISW*)

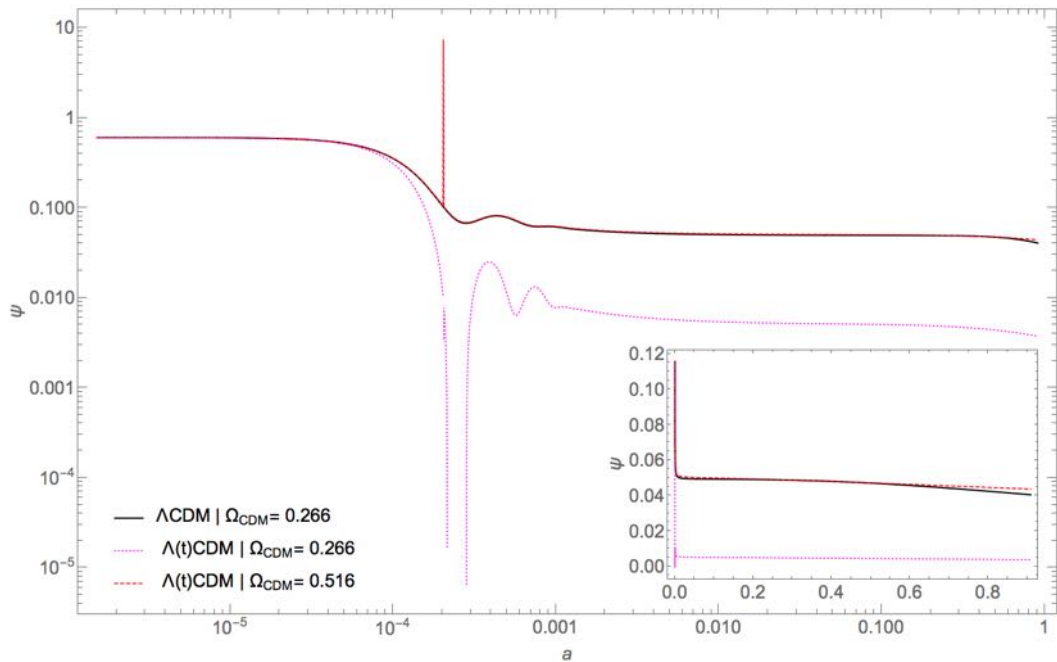


Figura 5.7: Potencial ψ para o modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).

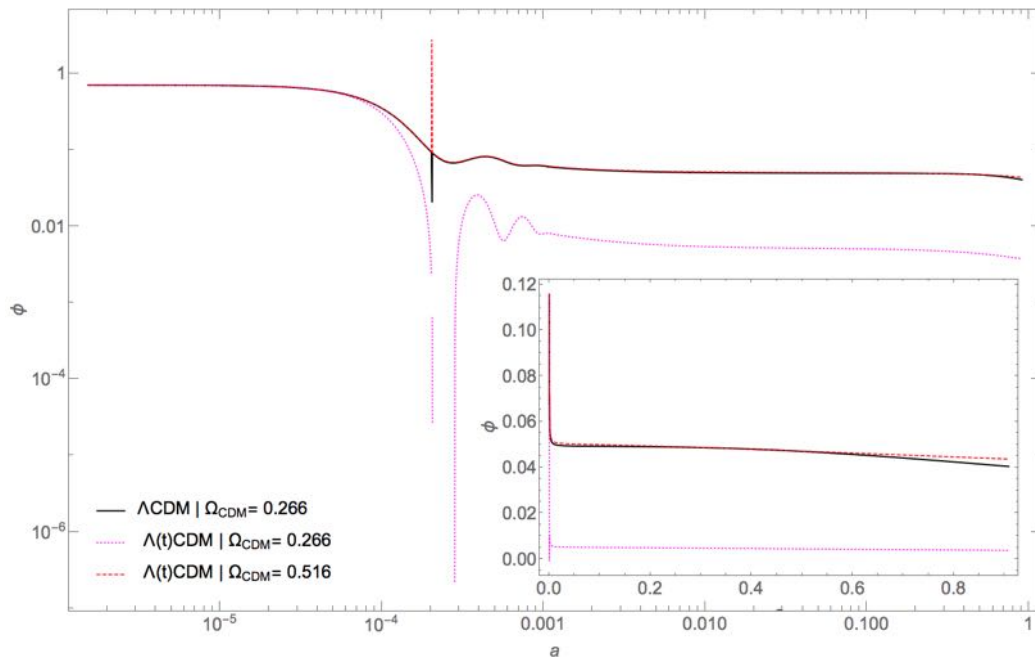


Figura 5.8: Potencial ϕ para o modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$).

5.5 Espectro de Anisotropia de Temperatura

O contraste da temperatura da radiação teórica é dado por $\Theta(\tau_0, \mathbf{x}_0, -\hat{n})$. Pode-se expandir a função Θ em harmônicos esféricos, na forma

$$\Theta(\tau_0, \mathbf{x}_0, \hat{n}) = \sum_l \sum_m a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (5.63)$$

agora, utilizando a expansão de Legendre

$$\Theta(\tau, \mathbf{k}, \theta) = \sum_l (-i)^l (2l+1) \Theta_l(\tau, \mathbf{k}) P_l(\cos\theta), \quad (5.64)$$

pode-se expressar os coeficientes a_{lm} , na forma

$$a_{lm} = (-i)^l \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\pi^2} Y_{lm}(\hat{k}) \Theta_l(\tau_0, \mathbf{k}). \quad (5.65)$$

A partir disto, utilizando a relação de ortogonalidade, é possível obter a função de correlação de dois pontos para os a_{lm} , com a equação

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'}^k \delta_{mm'}^k \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k} \Theta_l(\tau_0, \mathbf{k}) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \quad (5.66)$$

onde o $\delta_{ll'}^k$ é o delta de Kronecker²¹. $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é o espectro primordial, como previsto pela inflação²². A média feita do lado esquerdo de (5.66), representa a média de variadas realizações do universo. O termo do lado esquerdo depende somente de cada l , por isso é definido como C_l , assim, ficamos com

$$C_l \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k} \Theta_l(\tau_0, \mathbf{k}) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \quad (5.67)$$

onde o C_l representa o espectro de potência da temperatura. A medição da anisotropia de temperatura observada fica dada com $\delta T/\bar{T}(\hat{n})$, através dos diferentes a_{lm} . Em um universo isotrópico, a dependência com a orientação da observação é suprimida²³, logo, resta apenas os diferentes l 's, que representam as diferentes escalas. O termo C_l codifica as informações do comportamento térmico dos fótons para um particular modelo cosmológico. A obtenção destes coeficientes, em princípio, necessita de inúmeras realizações do universo, de tal forma

²¹O índice k denota a função no espaço de Fourier

²²O espectro primordial funciona como um fator de normalização do espectro.

²³Matematicamente, através do delta de Kronecker

que a média dada acima, tenha relevância estatística.

É possível agora, melhorar a compreensão acerca dos mapas de anisotropia e o espectro de temperatura, já introduzidos no capítulo 1. A figura ?? exibe dados experimentais recentes para o mapa de desvios da temperatura absoluta, já retiradas todas as influências de movimentos locais e também de objetos astrofísicos conhecidos. A figura ?? exibe dados experimentais e uma curva ajustada (best-fit) para o espectro de potência de temperatura da CMB.

Nas próximas sub-seções serão apresentados os respectivos espectros para os modelos discutidos. Para ganhar uma maior intuição sobre os fenômenos envolvidos, assim como, obter uma maior previsibilidade dos fenômenos envolvidos, é possível escrever a função $\Theta(\tau, k)$, em termos dos multipolos [110] [25] [96], de forma a ficarmos com

$$\Theta_l(\tau_0, k) = \int_0^{\tau_0} S_T(\tau, k, k) J_l[k(\tau_0 - \tau)], \quad (5.68)$$

onde as funções $S_T = S_T(\tau, k, k)$ são denominadas de funções fonte de temperatura. Estas, são obtidas por convolução com as funções de Bessel $J_l(x)$. Ao adotar algumas hipóteses simplificadoras, primeiramente desenvolvidas em [110], pode-se colocar os termos da função S_T na forma

$$S_T(\tau, k) = g(\tau)(\Theta_0 + \psi) + [g(\tau)(k^{-2}\theta_b)]' + e^{-\tau_{opt}}(\phi' + \psi'), \quad (5.69)$$

onde os termos de polarização foram negligenciados e $g(\tau)$ é a função de visibilidade (definida em 5.1.3). O efeito Sachs-Wolf (TSW), Doppler (DOP) e Sachs-Wolf integrado (ISW), estão mais uma vez explicitados nos respectivos termos da equação (5.69). Os últimos termos, referentes ao efeito ISW, são efeitos não conservativos, i.e., dependentes da variação dos potenciais relativísticos ψ e ϕ . Este efeito se apresentará de forma discrepante para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. Vamos analisar estes efeitos, em maiores detalhes, nas próximas seções.

5.5.1 Espectro de temperatura para o modelo de interação

Nesta seção serão analisados os diferentes espectros produzidos pelo modelo $\Lambda(t)$ CDM e Λ CDM com diferentes parâmetros. Inicialmente são utilizados os mesmos parâmetros adotados anteriormente neste capítulo, a saber, $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ para o modelo padrão, $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ para o modelo com interação entre energia e matéria escura. Nas

figuras 5.9 5.10 são observados os gráficos para o espectro de anisotropia de temperatura para cada um dos modelos discutidos.

Dois fatores chave governam os fenômenos físicos que representam a discrepância entre o modelo padrão e o modelo $\Lambda(t)$ CDM. O primeiro destes efeitos, é a mudança na posição dos picos da CMB, estes sofrem um deslocamento devido aos diferentes conteúdos energéticos característicos em cada modelo, causando impacto sobre a distancia diâmetro angular e no horizonte acústico, no momento do desacoplamento. O segundo fator é o comportamento dinâmico dos potenciais relativísticos ψ e ϕ . Enquanto no modelo padrão, é observado uma variação mais intensa destes, durante a transição da era de matéria para a era de energia escura, no modelo $\Lambda(t)$ CDM, a produção de matéria implica uma variação mais suave destes potenciais. Isso acontece porque a produção de matéria implica em uma inércia maior na dinâmica cósmica, atrasando a transição destas fases. Isso equivale a dizer que a curvatura do espaço-tempo fica menos acentuada quando a produção de matéria homogênea se inicia.

É possível demonstrar que a posição dos picos de compressão e rarefação, mostrados na CMB, dependem da distância diâmetro angular e do horizonte sonoro no momento do desacoplamento [132]. Com pouca matéria no universo primordial, o desacoplamento será levemente adiantado, em comparação ao Λ CDM, (B) vs (A). (equivalentemente, a igualdade radiação-matéria também será mais cedo). Nesta época, a distância diâmetro angular é fator chave que relaciona as perturbações em diferentes posições do céu. Já foi observado que, no modelo $\Lambda(t)$ CDM, a matéria escura será produzida somente em tempos tardios, sendo significativa a partir de redshift da ordem de $z \approx 10$.

Nos gráficos, 5.13, 5.14 foram explicitados os termos de Sachs-Wolf (TSW), Doppler (DOP). Em todos estes é possível verificar um deslocamento horizontal dos picos acústicos, tanto no modelo (B) quanto (C), mais uma vez utilizando o modelo (A) como referencial. Uma variação dos potenciais gravitacionais durante a transição radiação-matéria (se iniciando antes do desacoplamento), se manifesta gerando o efeito característico, neste caso denominado, Sachs-Wolf Integrado precoce (EISW). A figura 5.15 mostra a contribuição para o espectro de anisotropia deste efeito.

5.5.2 O efeito Sachs-Wolf integrado tardio (LISW)

A natureza do efeito Sachs-Wolf integrado tardio se manifesta proeminentemente em largas escalas. Este efeito reflete o fato de que há substancial variação²⁴ dos potenciais ψ e ϕ

²⁴Afirmção válida no contexto do modelo Λ CDM

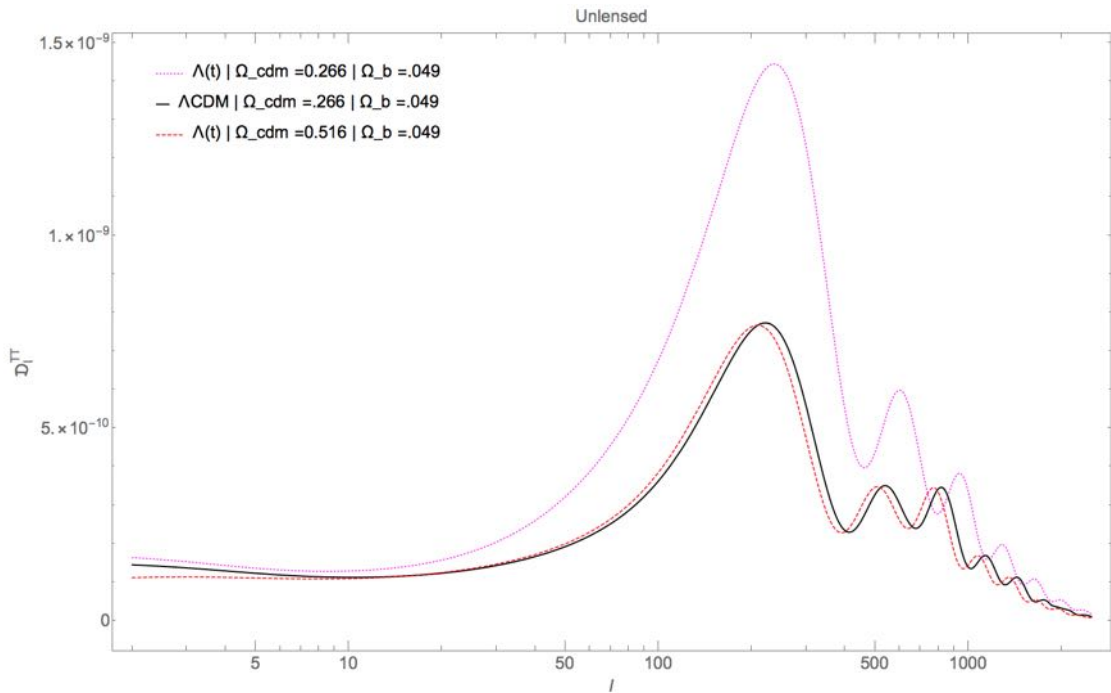


Figura 5.9: Espectro de anisotropia de temperatura para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado) .

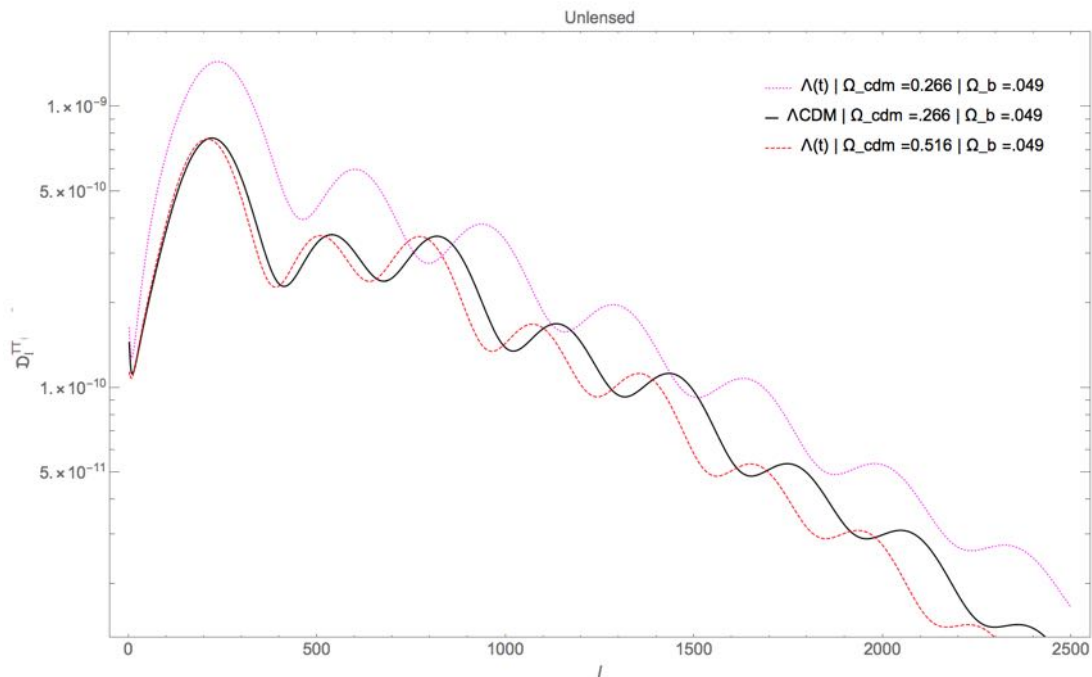


Figura 5.10: Espectro de anisotropia de temperatura para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado) .

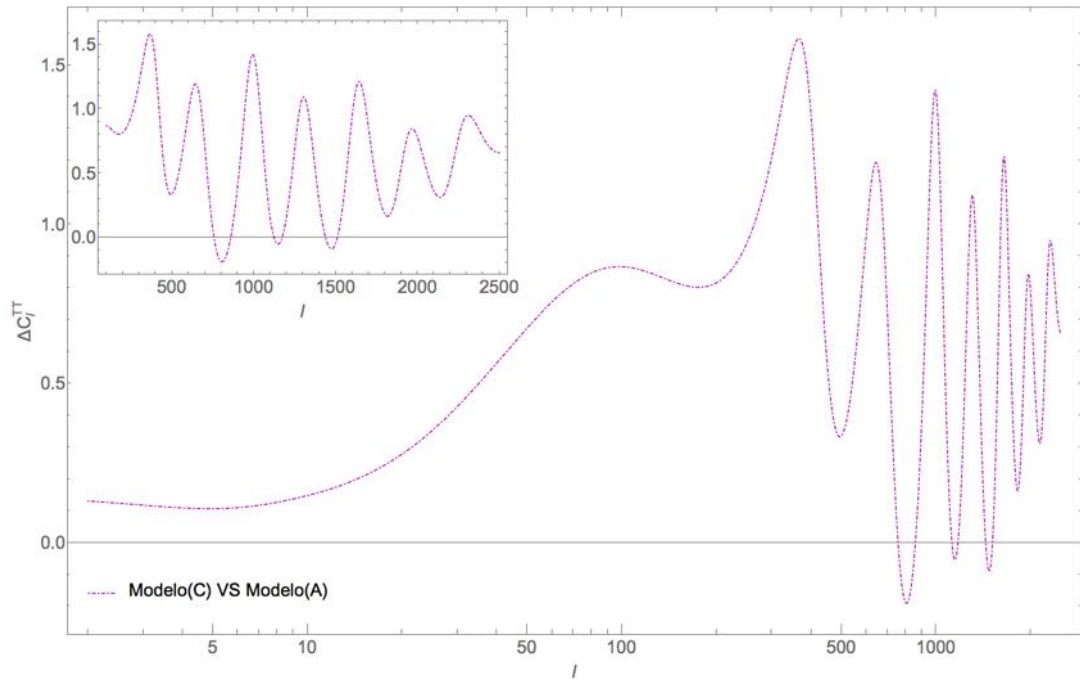


Figura 5.11: Discrepância entre o espectro de anisotropia para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$.

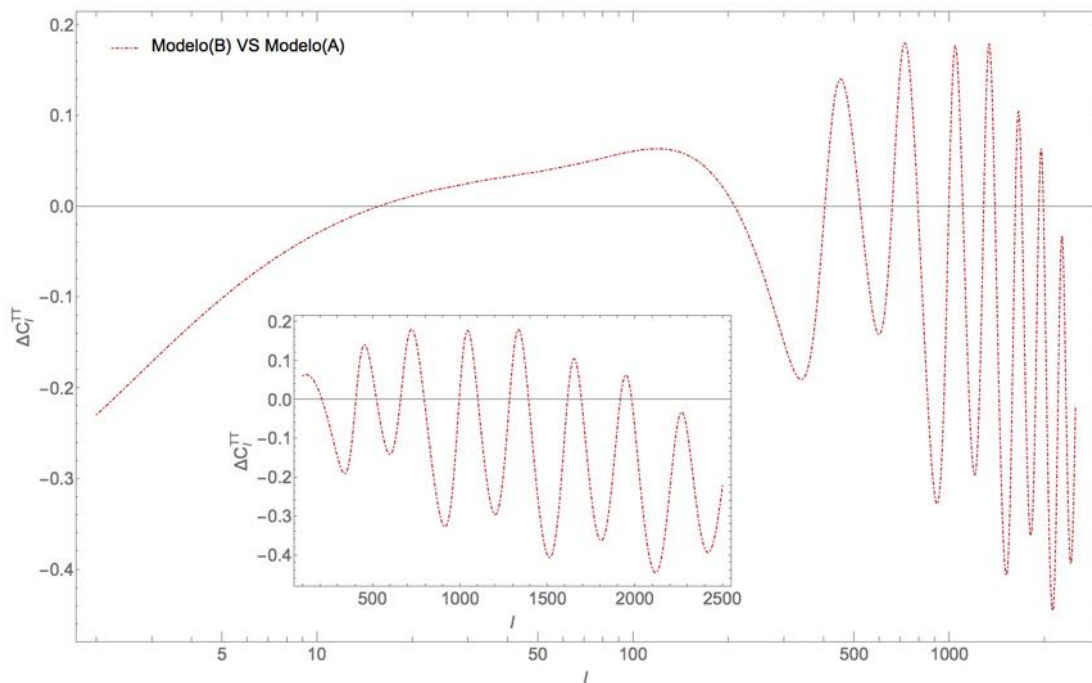


Figura 5.12: Discrepância entre o espectro de anisotropia para os modelos teóricos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ e (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$.

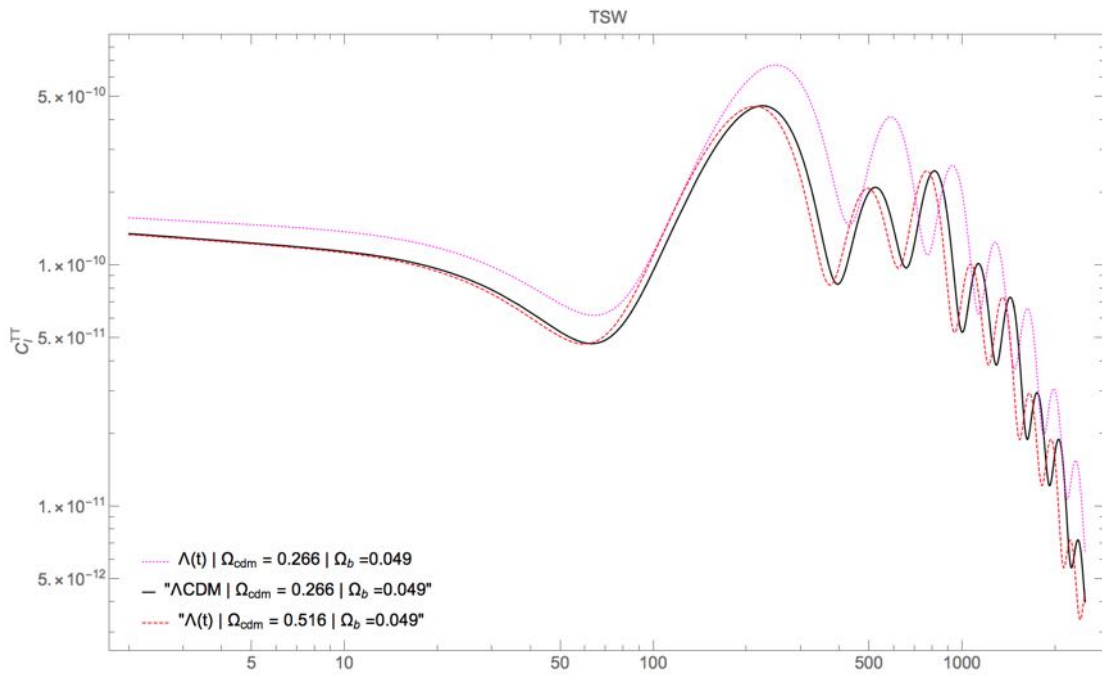


Figura 5.13: Espectro de temperatura para a contribuição referente ao efeito Sachs-Wolf de Temperatura para os modelos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).

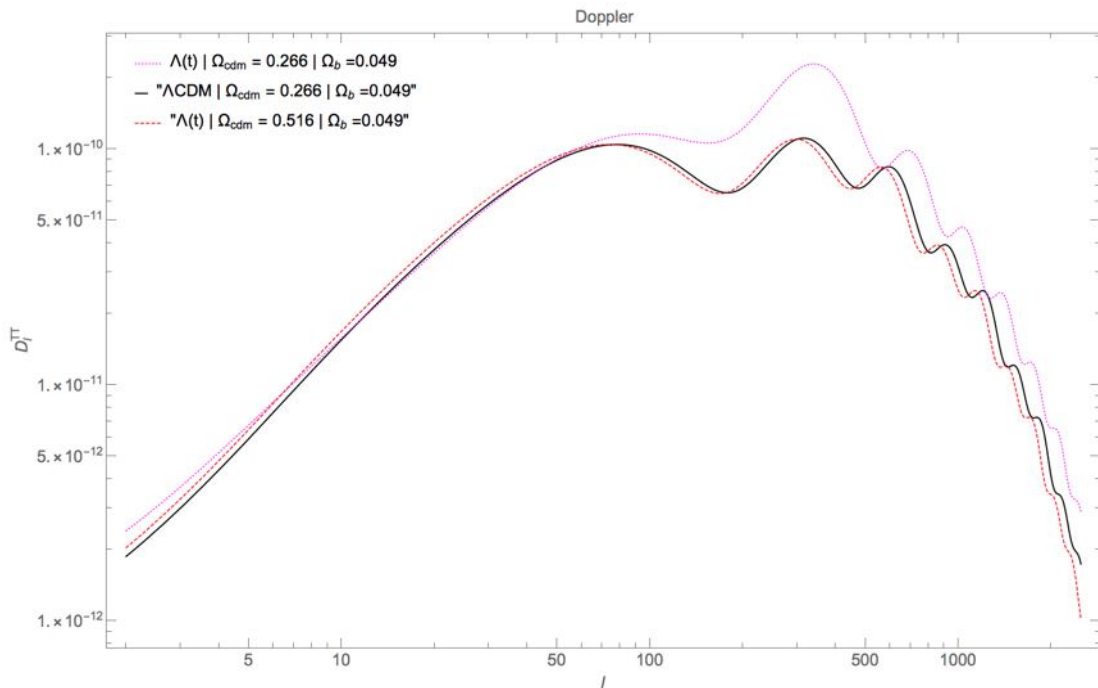


Figura 5.14: Efeito Doppler no espectro de temperatura. Modelos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).

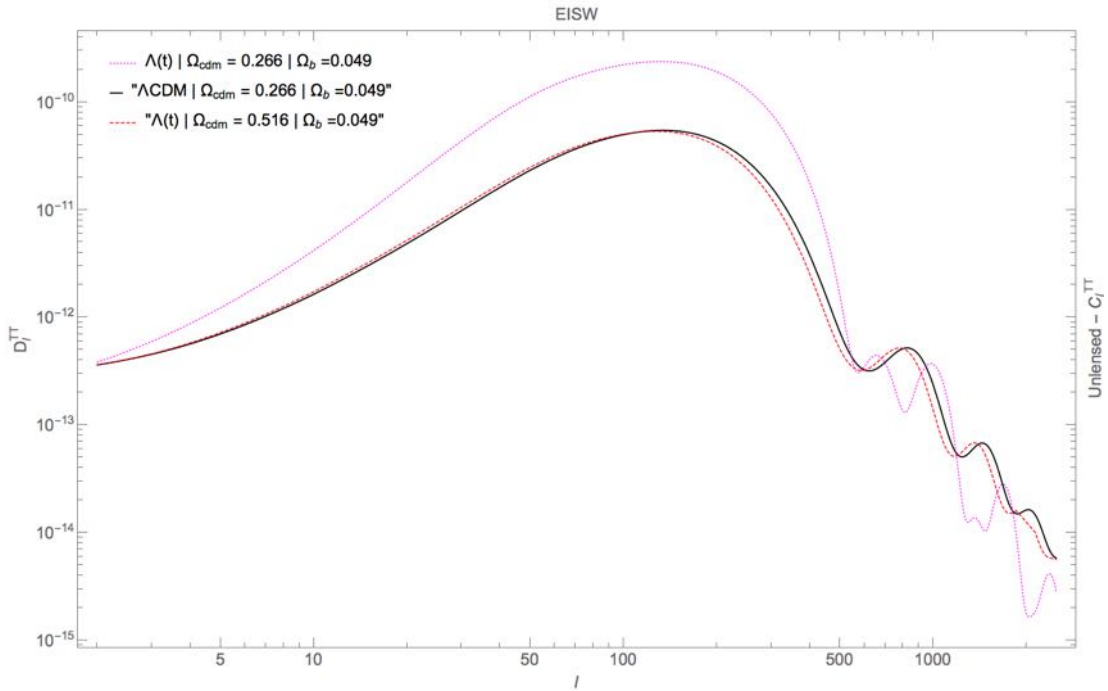


Figura 5.15: Efeito Sachs-Wolf integrado precoce (EISW, do inglês *Early Integrated Sachs-Wolf*) no espectro de temperatura. Modelos (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado) e (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).

em eras recentes, caracterizando justamente o efeito Sachs-Wolf tardio (LISW). Nas escalas da ordem do primeiro pico e superiores, ou seja, para $l > 100$, o efeito Sachs-Wolf integrado tardio já não tem a mesma magnitude, decaindo várias ordens de grandeza ao seguir-se grandes l 's.

Em tempos tardios, o modelo de interação $\Lambda(t)$ CDM, ao produzir matéria escura homogeneamente, suaviza o espaço-tempo. Isto garante uma interação gravitacional menos intensa que a do modelo Λ CDM, em largas escalas. O efeito disto na CMB, é justamente um *efeito Sachs-Wolf integrado fraco*, menos intenso que o apresentado no modelo Λ CDM. A figura 5.16 apresenta o termo do LISW para os diferentes modelos estudados. Este efeito foi previsto em [67].

A discrepância entre os modelos é mostrada em 5.17, que explicita o efeito para grandes escalas. Há, entretanto, um limite superior para este efeitos. Em torno do primeiro pico, em $l \approx 200$, a diferença passa a ser consideravelmente menor. Em largas escalas esta diferença é proporcional a escala, decaindo ao aproximar-se do primeiro pico da CMB. Sendo o efeito predominante em largas escalas, a discrepância para os diferentes modelos, é exacerbada justamente nestas escalas, perfazendo aqui um claro efeito para o modelo de interação. Este

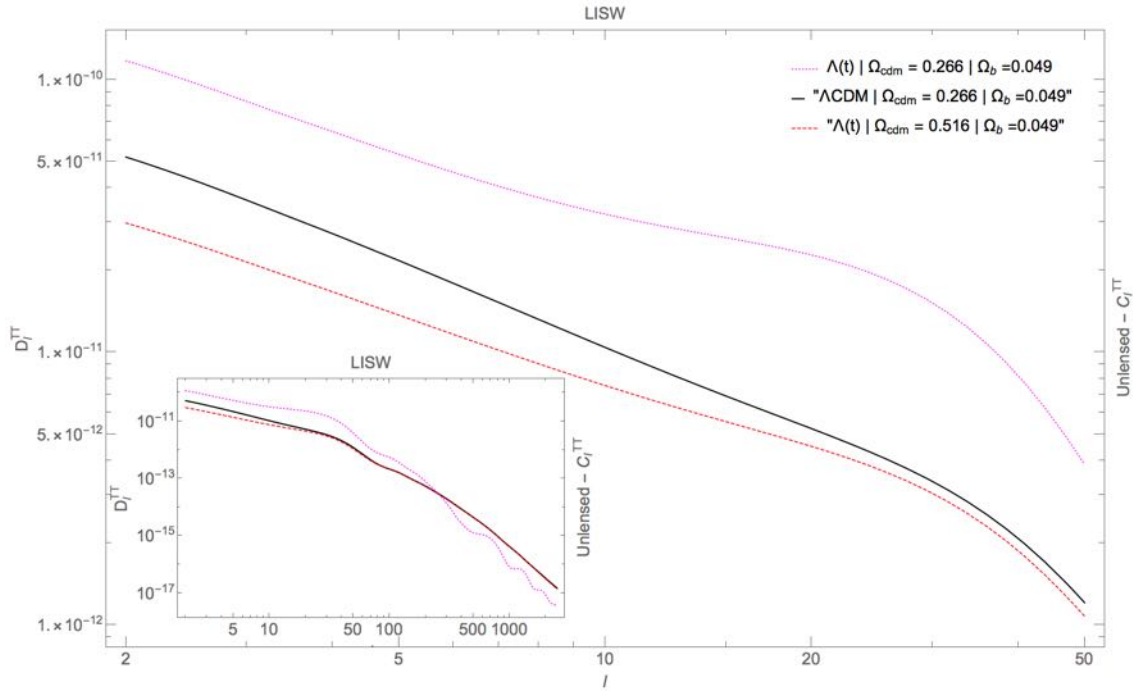


Figura 5.16: Efeito Sachs-Wolf integrado tardio (LISW, do inglês *Late Integrated Sachs-Wolf*). Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado).

efeito é atribuído à produção de matéria homogênea em tempos recentes.

5.5.3 Caminhos para a obtenção dos parâmetros de concordância

Em todos os gráficos mostrados acima, observa-se um deslocamento horizontal dos picos acústicos. Este deslocamento é consistente e proporcional a densidade de matéria escura. É possível realizar uma previsão simples para o valor de concordância para a posição do pico i , se utilizarmos uma interpolação linear (previsão mais simples possível), ao definirmos a função $\Omega_{m,0}^{prev}(l)$, através de

$$\Omega_{m,0}^{prev}(l) \equiv y(l) = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{l_1 - l_0} \right) (l - l_0), \quad (5.70)$$

onde utilizaremos os pontos (l_i, y_i) para a interpolação. Para prever qual será a densidade de matéria escura necessária, é possível extrair o valor correspondente ao máximo (picos) do C_l , obtém-se os pontos $(l_1^{(A)}, l_1^{(B)}, l_1^{(C)}) = (226.5, 246.5, 212.6)$, a interpolação para o primeiro pico (226.5) no $\Lambda(t)$ CDM equivale a $\Omega_{cdm,0}^{prev} \cong 0.41$. Fazendo o mesmo para os 5 primeiros picos, e fazendo uma média aritmética entre os valores interpolados, encontramos $\Omega_{cdm,0}^{prev} \cong 0.44$

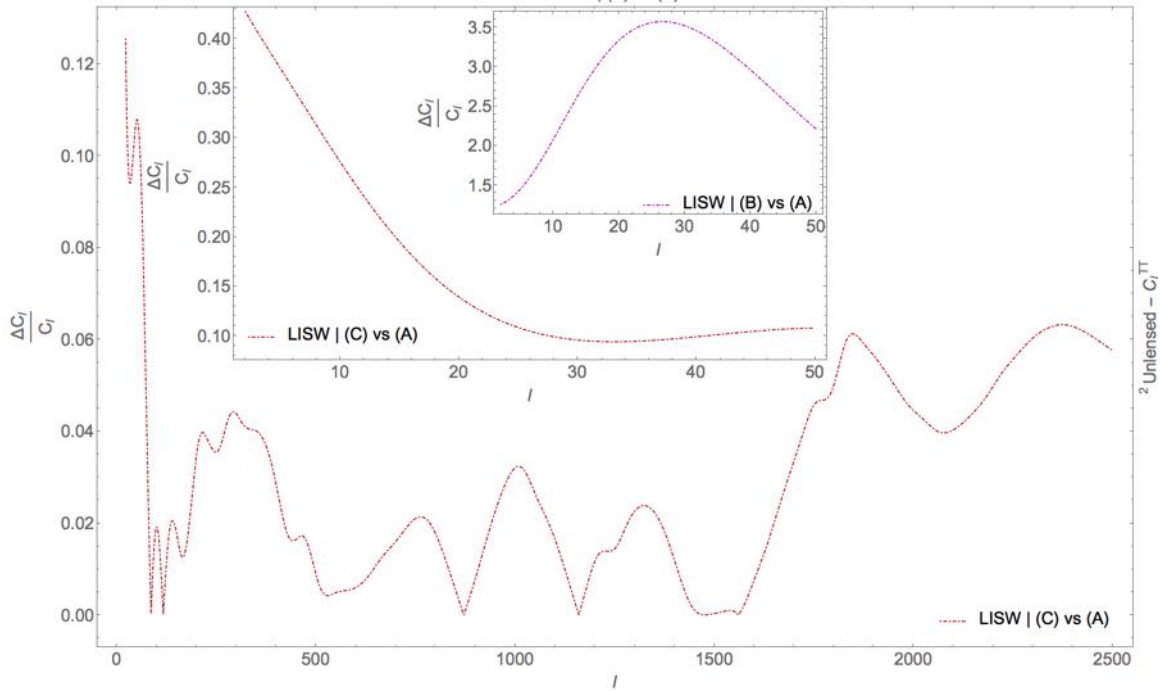


Figura 5.17: Discrepâncias $((C_l^i - C_l^A)/C_l^A)$ para o efeito Sachs-Wolf integrado tardio para os diferentes modelos. (B)-(A) (magenta-ponto-tracejado); (C)-(A)(Vermelho-ponto-tracejado).

para a média dos 5 primeiros picos, com valores interpolados, para o modelo $\Lambda(t)$ CDM. Os valores $\Omega_{cdm,0} = 0.41$ e $\Omega_{cdm,0} = 0.44$, são aqui, as estimativas mais simples possíveis. Neste caso, para o ajuste de concordância da posição do primeiro pico e dos primeiros 5 picos, respectivamente. Foram usados, como base, os parâmetros especificados para o modelo padrão, aqui definido como (A). Vamos testar este ajuste inicial, logo abaixo.

Ao analisar os resultados de trabalhos anteriores, acerca dos parâmetros de melhor ajuste para o modelo $\Lambda(t)$ CDM, é possível encontrar testes de concordância em baixo redshift, com supernovas do tipo Ia, em [56], [66], [67]. Estimativas conjuntas em [67] apontam para uma matéria total de $\Omega_{m,0} = 0.45$, com $0.44 < \Omega_{m,0} < 0.46$ (2σ). Observe que o ajuste é para a matéria total, neste caso, ao fazer $\Omega_b = 0.049$, equivale a $\Omega_{cdm,0} \approx 0.41$ para a matéria escura. No trabalho citado, não houve a inclusão dos bárions, o que já foi indicado como fator importante de aproximação adotado nesta referência. Vamos testar agora o comportamento do espectro da CMB, com os parâmetros discutidos.

Na figura 5.18 são mostrados os gráficos para o espectro de anisotropia da temperatura da CMB. O gráfico mostra claramente uma natural adequação da posição dos picos acústicos. Há contudo, um deslocamento da altura destes picos. Na figura 5.19 é mostrado a discrepância para os modelos de interação, ao compararmos com o modelo (A). Enquanto o

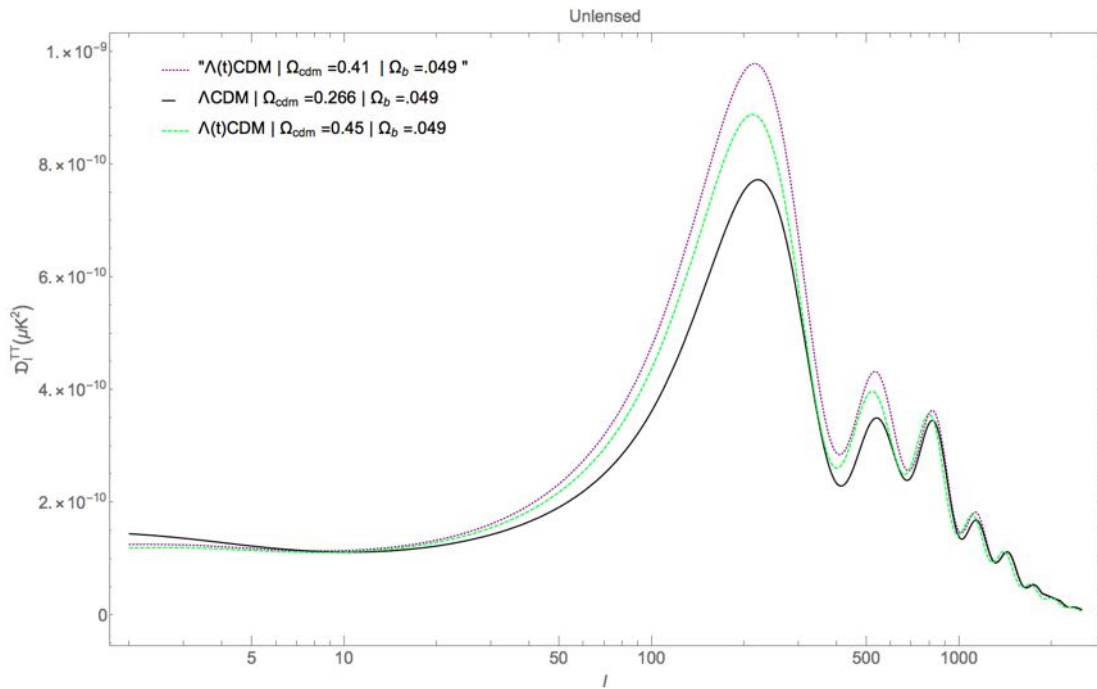


Figura 5.18: Espectro de anisotropia de temperatura para o modelo padrão com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo), e o modelo $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.41$ (roxo-pontilhado) e também $\Omega_{cdm} \equiv 0.45$ (verde-tracejado).

modelo (B), com $\Omega_{cdm,0} = 0.516$, produz um primeiro pico com discrepância inferior a 10%. Já nos picos com escalas menores, esta diferença sobe para cerca de 20%, devido ao defasamento mais agudo dos picos. O modelo com $\Omega_{cdm,0} = 0.41$, foi capaz de atingir discrepância menor que 10% a partir do segundo pico, porém o primeiro pico fica com cerca de 30% de discrepância em relação ao Λ CDM estudado.

Uma análise em maiores detalhes desta degenerescência deve ser realizada, afim de esclarecer a possibilidade de um ajuste de concordância para o modelo de interação. Em [133], é descrito um código Monte Carlo (Monte Python²⁵) em linguagem Python, capaz de realizar a marginalização e variação dos parâmetros, e assim, determinar os parâmetros de concordância para o modelo. Este código foi construído de forma a se relacionar com o código de Boltzmann CLASS.

²⁵Código disponível em: https://github.com/audren/montepython_public

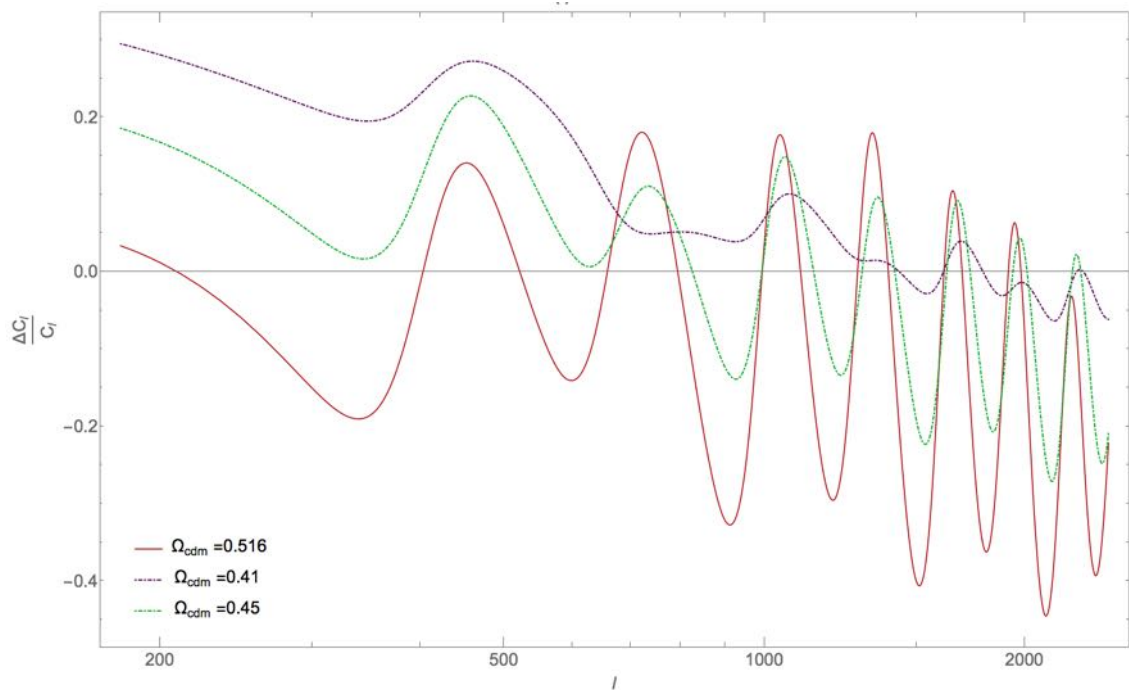


Figura 5.19: Discrepância para o espectro de anisotropia de temperatura. Foi usado o modelo padrão como valor comparativo, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$. Os modelos estudados são $\Lambda(t)$ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.41$ (roxo-pontilhado), $\Omega_{cdm} \equiv 0.45$ (verde-ponto-tracejado) e $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (vermelho-contínuo).

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, discutimos aspectos iniciais para o desenvolvimento das teorias cosmológicas que revelam a complexidade de fenômenos físicos envolvendo a emissão da Radiação Cósmica de Fundo. O capítulo 2 tratou de revisar o contexto da relatividade geral e a determinação de um universo homogêneo, assim como discutiu as equações de Einstein, fornecendo o alicerce teórico para o restante da pesquisa. No capítulo 3, fizemos uma revisão dos modelos cosmológicos, do Λ CDM e do $\Lambda(t)$ CDM, estes são aqui utilizados como base de nossa análise.

Ao longo deste trabalho foi mostrado que é possível utilizar uma função analítica aproximada para descrever com precisão as equações de base para o modelo de interação entre energia e matéria escura. Foi possível elucidar que as discrepâncias entre estes modelos se revelam apenas em baixo *redshift*, a partir da acentuação da produção de matéria, característica do segundo modelo. Observa-se que uma discrepância entre os modelos se situa em cerca de 5% para um redshift equivalente a $z = 10$. Esta escala foi adotada, como escala temporal aproximada para referência e comparações entre os modelos teóricos.

No capítulo 4, fizemos uma revisão das perturbações e do universo inhomogêneo, elucidando as equações que diferem entre os modelos estudados. Já no capítulo 5, foi tratado o alicerce teórico da CMB e os aspectos de maior relevância para esta pesquisa: Equações de Boltzmann, os códigos numéricos que possibilitam a integração das equações de Boltzmann-Einstein, o espectro de potência de matéria dos modelos estudados e o espectro de anisotropia da CMB. Foi apresentado o espectro de potência da matéria e sua supressão, quando se considera a matéria total do universo. É importante notar que ao observar-se a formação de estruturas, é necessário analisar o espectro de potência dos bárions, tema que ultrapassa o

recorte desta tese e será feito em trabalho subsequente.

Com o estudo da evolução das perturbações foi possível elucidar alguns dos aspectos que se manifestam no espectro de anisotropia da temperatura do $\Lambda(t)$ CDM e Λ CDM. Diversos aspectos originais foram elucidados, a partir do conhecimento das funções de transferência para o modelo de decaimento de energia escura. Os efeitos da produção de matéria do modelo de interação foram determinados para o espectro de temperatura da CMB. Os principais resultados originais desta tese estão distribuídos ao longo de 5.3, 5.4 e 5.5.

Na análise feita no capítulo anterior 5.5.3, para a CMB, foi levada em conta apenas a dependência com a densidade de matéria escura. Por outro lado, é largamente sabido que existe vasta degenerescência entre os parâmetros dos modelos cosmológicos. No trabalho [134], uma extensa análise foi realizada para diferentes parâmetros α do gás (ver 3.2.1). Em sua análise, ao especificar o espectro para o modelo com parâmetro $\alpha = -0.5$, o modelo foi considerado descartado, diante dos dados de anisotropia do Planck. É possível, no entanto que conclusão tenha sido prematura, uma vez que, como citado, a degenerescência entre os parâmetros é extensa, logo, a exploração aprofundada do espaço de parâmetros poderá levar a resultados mais concordantes com as observações. Abaixo, podemos tecer ainda, alguns outros pontos para esta ideia.

Dois exemplos podem ser evocados neste argumento, o primeiro deles é o fato de serem observadas somente anisotropias já submetidas às lentes gravitacionais [135] [136], o que por sua vez gera uma amplificação dos picos acústicos, em relação ao espectro sem-lentes. Este efeito é, entretanto, obtido de uma análise de segunda ordem em perturbação e depende de efeitos em pequenas escalas. Uma análise deste efeito, até o momento, não foi realizada e uma elucidação deste aspecto do modelo seria um dos pontos necessários para dissipar a degenerescência de parâmetros.

Um segundo argumento é a dependência da normalização do espectro com o espectro primordial. É fácil mostrar que a amplitude primordial A_s e o índice espectral n_s (tilt) alteram significativamente a altura relativa dos picos. Neste caso, porém, é preciso uma análise conjunta com as estruturas de larga escala e o espectro de matéria, uma vez que o espectro de potência de matéria é também normalizado ao utilizar a mesma parametrização do espectro primordial. Um outro ponto que é preciso levar em conta é que, em geral, adota-se uma interpretação dos parâmetros típica do Λ CDM. O contexto teórico do modelo padrão estabelece um paradigma fortemente enraizado na comunidade científica. Neste trabalho, foi demonstrado, entretanto, que o esquema de dependência dos parâmetros não é idêntico ao do

modelo $\Lambda(t)$ CDM, mas se relaciona com aqueles do Λ CDM através de uma relação quadrática entre a densidade de matéria escura destes modelos. Ambas as questões levam à busca de uma análise mais detalhada, de forma a elucidar de forma contundente a possibilidade de um ajuste de concordância para o modelo de interação aqui estudado.

Por fim, é preciso ponderar a complexidade do tema tratado nesta pesquisa. A física envolvida nos diversos fenômenos desta área de investigação fundamental é extensa e há inúmeras conexões com outras observações cosmológicas. Um entendimento completo dos fenômenos relacionados à temática é digno de décadas de pesquisa. Por outro lado, as diversas áreas da física englobadas no entendimento deste fenômeno trazem consigo um aspecto gratificante. O estudo fornece um panorama amplo - e profundo - de variadas técnicas da física, aplicadas tanto as escalas micro como às largas escalas da cosmologia.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Peebles, 50 Years of the Cosmic Microwave Background Radiation: What We Have Learned, What Questions Remain., <https://youtu.be/d3iZyGuiz6k>, (May 2015).
- [2] A. Einstein (1905).
- [3] A. Einstein, Annalen Phys. 49 (1916) 769, [Annalen Phys.14,517(2005)].
- [4] C. M. Will, Living Rev. Rel. 17 (2014) 4.
- [5] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 15 (1929) 168.
- [6] S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. 517 (1999) 565.
- [7] A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. 607 (2004) 665.
- [8] W. Miranda, S. Carneiro and C. Pigozzo, JCAP 1407 (2014) 043.
- [9] G. Gamow, Physical Review 70 (Oct. 1946) 572.
- [10] R. A. Alpher, H. Bethe and G. Gamow, Phys. Rev. 73 (Apr 1948) 803.
- [11] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. 142 (1965) 419.
- [12] H. P. Gush, M. Halpern and E. H. Wishnow, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 537.
- [13] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer and E. L. Wright, Astrophys. J. 473 (1996) 576.
- [14] J. C. Mather *et al.*, Astrophys. J. 354 (1990) L37.
- [15] R. Durrer, Classical and Quantum Gravity 32 (Jun. 2015) 124007.
- [16] M. Lachièze-Rey, E. Gunzig and J. Simmons, The Cosmological Background Radiation (1999).
- [17] E. K. Conklin, 222 (Jun. 1969) 971.
- [18] A. Kogut *et al.*, Astrophys. J. 419 (1993) 1.
- [19] D. N. Spergel *et al.*, Astrophys. J. Suppl. 148 (2003) 175.
- [20] D. Larson *et al.*, Astrophys. J. Suppl. 192 (2011) 16.

- [21] C. L. Reichardt *et al.*, *Astrophys. J.* 694 (2009) 1200.
- [22] M. L. Brown *et al.*, *Astrophys. J.* 705 (2009) 978.
- [23] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 148 (2003) 1.
- [24] P. A. R. Ade *et al.*, *Astron. Astrophys.* 571 (2014) A1.
- [25] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, 2003).
- [26] A. M. Boesgaard and G. Steigman, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 23 (1985) 319.
- [27] M. Rauch, J. Miralda-Escude, W. L. W. Sargent, T. A. Barlow, D. H. Weinberg, L. Hernquist, N. Katz, R. Cen and J. P. Ostriker, *Astrophys. J.* 489 (1997) 7.
- [28] D. N. Schramm and M. S. Turner, *Rev. Mod. Phys.* 70 (1998) 303.
- [29] S. Burles, K. M. Nollett, J. W. Truran and M. S. Turner, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 4176.
- [30] S. Burles, K. M. Nollett and M. S. Turner, *Nucl. Phys. A* 663 (2000) 861c.
- [31] F. Zwicky, *Helvetica Physica Acta* 6 (1933) 110.
- [32] F. Zwicky, 86 (Oct. 1937) 217.
- [33] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., *Astrophys. J.* 159 (1970) 379.
- [34] V. C. Rubin, D. Burstein, W. K. Ford, Jr. and N. Thonnard, *Astrophys. J.* 289 (1985) 81.
- [35] K. G. Begeman, A. H. Broeils and R. H. Sanders, 249 (Apr. 1991) 523.
- [36] S. Trippe, *Z. Naturforsch.* 69 (2014) 173.
- [37] J. C. Mather, D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier and D. T. Wilkinson, 512 (Feb. 1999) 511.
- [38] P. A. R. Ade *et al.*, *Astron. Astrophys.* 594 (2016) A13.
- [39] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* 116 (1998) 1009.
- [40] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* 15 (2006) 1753.
- [41] W. de Sitter, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 78 (1917) 3.
- [42] S. W. Hawking, *Phys. Lett.* B134 (1984) 403.
- [43] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* 380 (2003) 235.
- [44] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989) 1.
- [45] I. Zlatev, L.-M. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 896.

- [46] B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Phys. Rev. D* 37 (1988) 3406.
- [47] W. Miranda, *Testes observacionais em Modelos de Quintessência com Métrica Anisotrópica*, Dissertação de Mestrado, IF-UFBA, (2011).
- [48] H. A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* 37 (2005) 1385.
- [49] S. Carneiro and C. Pigozzo, *JCAP* 1410 (2014) 060.
- [50] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris and C. Pigozzo, *Phys. Rev. D* 77 (2008) 043513.
- [51] H. Velten, H. A. Borges, S. Carneiro, R. Fazolo and S. Gomes, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 452 (2015) 2220.
- [52] C. Pigozzo, S. Carneiro, J. S. Alcaniz, H. A. Borges and J. C. Fabris, *JCAP* 1605 (2016) 022.
- [53] A. Friedmann, *Zeitschrift fur Physik* 10 (1922) 377.
- [54] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, 1972).
- [55] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Benjamin Cummings, 2003).
- [56] C. B. M. Pigozzo, *Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com interação no Setor Escuro*, Tese de Doutorado, IF-UFBA, (2010).
- [57] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003) 559.
- [58] V. Sahni and A. A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D* 9 (2000) 373.
- [59] M. Tegmark, M. Zaldarriaga and A. J. S. Hamilton, *Phys. Rev. D* 63 (2001) 043007.
- [60] M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev. D* 69 (2004) 103501.
- [61] S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* 71 (2005) 063513.
- [62] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *eConf C0602061* (2006) 06, [*Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4,115(2007)].
- [63] I. L. Shapiro and J. Sola, *arXiv: astro-ph/040115* (2004).
- [64] K. Freese, F. C. Adams, J. A. Frieman and E. Mottola, *Nucl. Phys. B* 287 (1987) 797.
- [65] O. Bertolami, *Nuovo Cim. B* 93 (1986) 36.
- [66] C. Pigozzo, M. A. Dantas, S. Carneiro and J. S. Alcaniz, *JCAP* 8 (Aug. 2011) 022.
- [67] J. S. Alcaniz, H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, C. Pigozzo and W. Zimdahl, *Phys. Lett. B* 716 (2012) 165.
- [68] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris and W. Zimdahl, *Phys. Lett. B* 727 (2013) 37.

- [69] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *Phys. Lett.* B511 (2001) 265.
- [70] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, *Gen. Rel. Grav.* 35 (2003) 2063.
- [71] H. B. Benaoum (2002).
- [72] H. B. Benaoum, *Adv. High Energy Phys.* 2012 (2012) 357802.
- [73] H. A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* 37 (2005) 1385.
- [74] C. Pigozzo, M. A. Dantas, S. Carneiro and J. S. Alcaniz, arXiv: astro-ph/1007.5290 (2010).
- [75] M. Colless, G. Dalton, S. Maddox, W. Sutherland, P. Norberg, S. Cole, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, C. A. Collins and et al., *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 328 (2001) 1039.
- [76] H. A. Borges, *Perturbações em um modelo cosmológico com interação no setor escuro*, Tese de Doutorado, IF-UFBA, (2010).
- [77] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005).
- [78] V. Mukhanov and R. H. Brandenberger (Jan. 1992) 1.
- [79] C. G. Boehmer and G. Caldera-Cabral (2010).
- [80] P. Meszaros, 37 (Dec. 1974) 225.
- [81] P. J. E. Peebles, *The large-scale structure of the universe* (1980).
- [82] E. Lifshitz, *J. Phys.(USSR)* 10 (1946) 116, [*Gen. Rel. Grav.*49,no.2,18(2017)].
- [83] E. M. Lifshitz and I. M. Khalatnikov, *Adv. Phys.* 12 (1963) 185.
- [84] S. W. Hawking, *Astrophys. J.* 145 (1966) 544.
- [85] P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *Astrophys. J.* 162 (1970) 815.
- [86] J. Silk and M. L. Wilson, *Phys. Scripta* 21 (1980) 708.
- [87] H. Kodama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 78 (1984) 1.
- [88] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D*22 (1980) 1882.
- [89] M. J. White, D. Scott and J. Silk, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 32 (1994) 319.
- [90] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, *Phys. Rept.* 215 (1992) 203.
- [91] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Background* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008).
- [92] R. Durrer, *Fund. Cosmic Phys.* 15 (1994) 209.

- [93] M. Bojowald and G. M. Hossain, *Class. Quant. Grav.* 24 (2007) 4801.
- [94] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).
- [95] R. H. Brandenberger, R. Kahn and W. H. Press, *Phys. Rev. D* 28 (1983) 1809.
- [96] C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* 455 (1995) 7.
- [97] D. Blas, J. Lesgourgues and T. Tram, *JCAP* 1107 (2011) 034.
- [98] H. Kodama and M. Sasaki, *Progress of Theoretical Physics Supplement* 78 (1984) 1.
- [99] M. A. Aragon-Calvo, R. van de Weygaert and B. J. T. Jones, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 408 (2010) 2163.
- [100] R. B. Tully, H. Courtois, Y. Hoffman and D. Pomarède, *Nature* 513 (2014) 71.
- [101] N. I. Libeskind, C. S. Frenk, S. Cole, J. C. Helly, A. Jenkins, J. F. Navarro and C. Power, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 363 (2005) 146.
- [102] J. R. Bond, L. Kofman and D. Pogosyan, *Nature* 380 (1996) 603.
- [103] M. Boylan-Kolchin, V. Springel, S. D. M. White, A. Jenkins and G. Lemson, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 398 (2009) 1150.
- [104] M. Cautun, R. van de Weygaert, B. J. T. Jones and C. S. Frenk, *IAU Symp.* 308 (2015), [IAU Symp.308,47(2016)].
- [105] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* 142 (1965) 414.
- [106] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* 147 (1967) 73, [Gen. Rel. Grav.39,1929(2007)].
- [107] J. R. Bond and G. Efstathiou, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 226 (1987) 655.
- [108] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 347.
- [109] A. H. Guth and S. Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1110.
- [110] U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* 469 (1996) 437.
- [111] W. Hu and N. Sugiyama, *Phys. Rev. D* 51 (1995) 2599.
- [112] W. T. Hu, *Wandering in the Background: A CMB Explorer*, Ph.D. thesis, UC, Berkeley, (1995).
- [113] R. A. Sunyaev and I. B. Zeldovich, *18* (1980) 537.
- [114] P. A. R. Ade *et al.*, *Astron. Astrophys.* 536 (2011) A1.
- [115] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 208 (2013) 20.

- [116] Planck Collaboration, R. Adam, P. A. R. Ade, N. Aghanim, Y. Akrami, M. I. R. Alves, F. Argüeso, M. Arnaud, F. Arroja, M. Ashdown and et al., 594 (Sep. 2016) A1.
- [117] S. Harris, An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation, Dover books on physics (Dover Publications, 2004).
- [118] F. Reif, Fundamentals of Statistical and Thermal Physics (McGraw Hill, Tokyo, 1965).
- [119] F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics (Waveland Press, 2009).
- [120] L. Pitaevskii and E. Lifshitz, Physical Kinetics, no. v. 10 (Elsevier Science, 2012).
- [121] A. Kosowsky, Annals Phys. 246 (1996) 49.
- [122] R. Crittenden, J. R. Bond, R. L. Davis, G. Efstathiou and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 324.
- [123] W. H. Hu, U. Seljak, M. White and M. Zaldarriaga, Physical Review D 57 (Mar. 1998) 3290.
- [124] R. Durrer, The cosmic microwave background (Cambridge University Press, 2008).
- [125] E. Bertschinger (1995).
- [126] A. Lewis, A. Challinor and A. Lasenby, Astrophys. J. 538 (2000) 473.
- [127] J. Lesgourgues, ArXiv e-prints (Apr. 2011), [The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview].
- [128] J. Lesgourgues, ArXiv e-prints (Apr. 2011), [The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) III: Comparison with CAMB for LambdaCDM].
- [129] D. J. Eisenstein and W. Hu, Astrophys. J. 496 (1998) 605.
- [130] R. K. Sheth and G. Tormen, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 308 (1999) 119.
- [131] D. J. Eisenstein *et al.*, Astrophys. J. 633 (2005) 560.
- [132] J. Lesgourgues, G. Marques-Tavares and M. Schmaltz, JCAP 1602 (2016) 037.
- [133] B. Audren, J. Lesgourgues, K. Benabed and S. Prunet, JCAP 1302 (2013) 001.
- [134] R. F. vom Marttens, L. Casarini, W. Zimdahl, W. S. Hipólito-Ricaldi and D. F. Mota, Phys. Dark Univ. 15 (2017) 114.
- [135] L. Amendola, M. Kunz and D. Sapone, JCAP 0804 (2008) 013.
- [136] M. Bartelmann and P. Schneider, Phys. Rept. 340 (2001) 291.

Apêndice A

Gráficos para as perturbações e as
funções de Transferência
(super-horizonte)

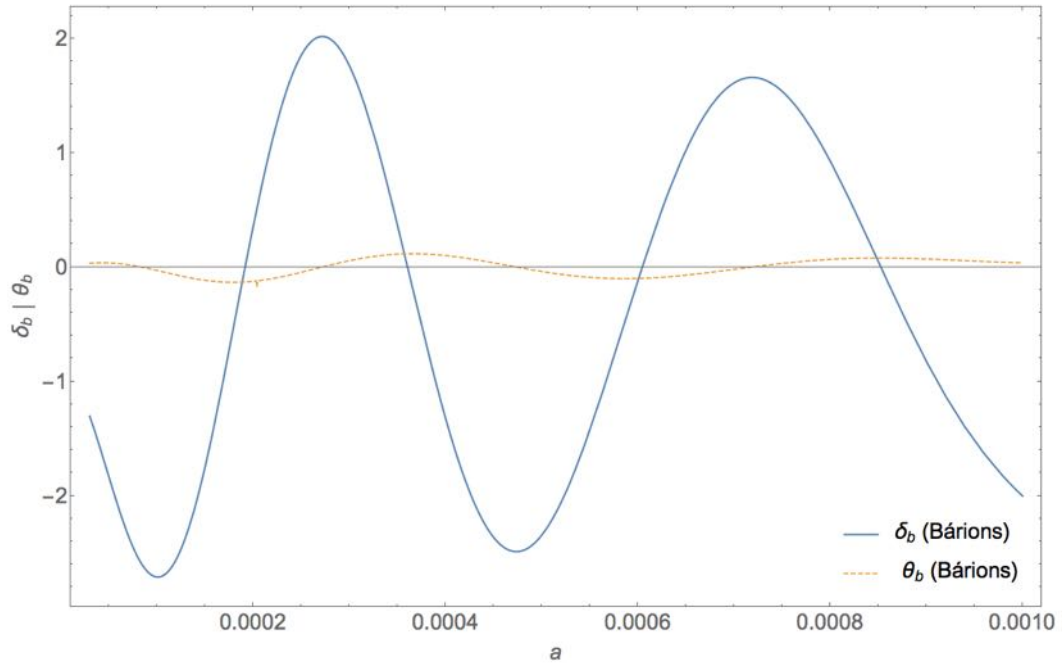


Figura A.1: Oscilações acústicas para a densidade de bárions e sua velocidade. Aqui, foi usado $k \equiv 10^{-1} Mpc^{-1}$

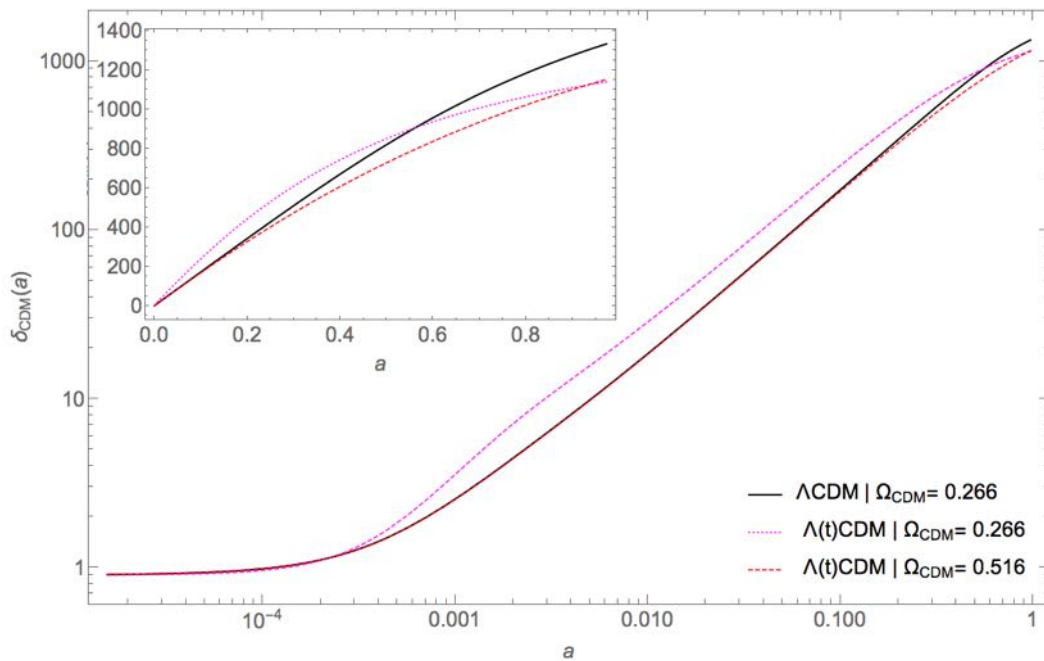


Figura A.2: Densidade de matéria escura. Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).

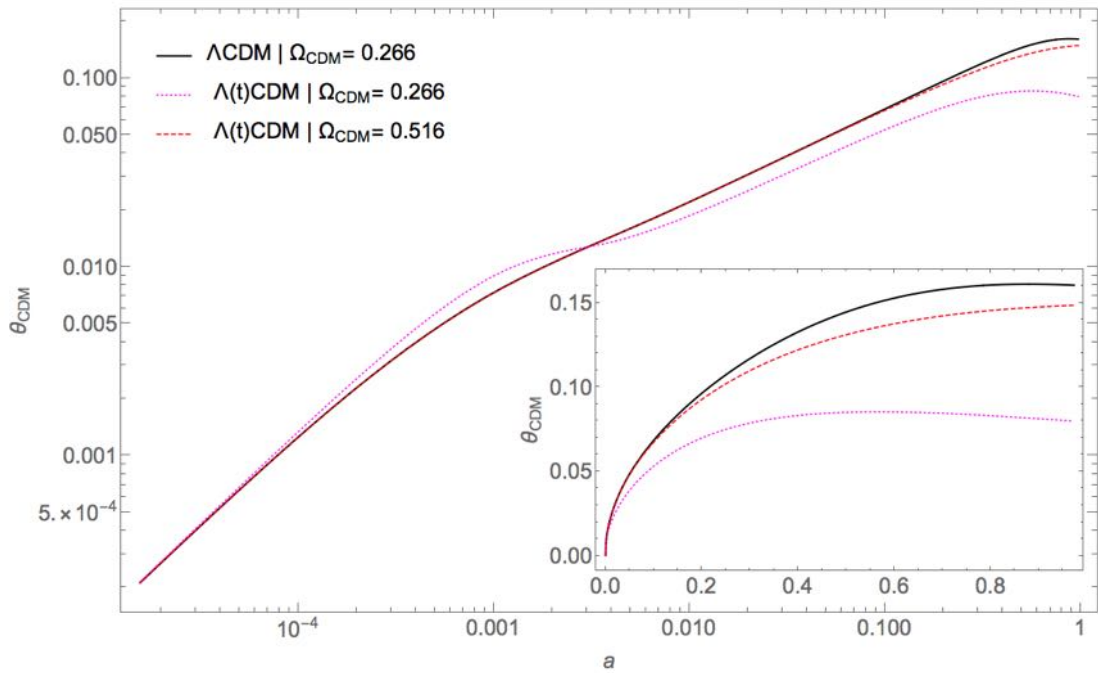


Figura A.3: Velocidade potencial da matéria escura para o Modelo (A): Λ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (magenta-pontilhado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado). ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).

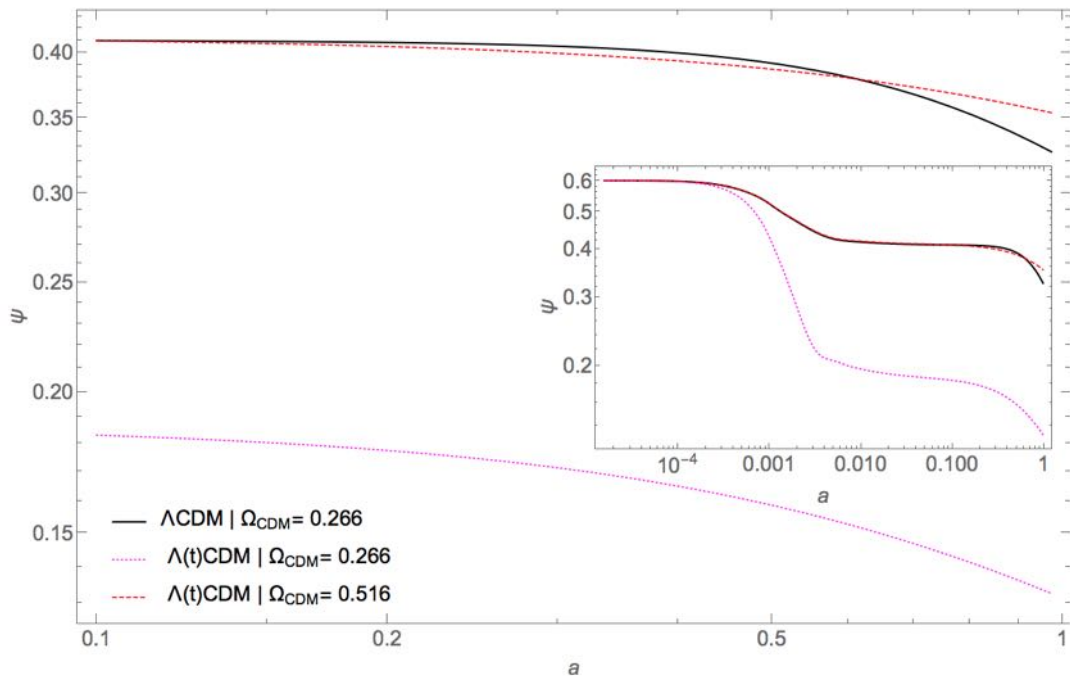


Figura A.4: Potencial $\psi(a)$ em diferentes escalas para os modelos (A): Λ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (Magenta-pontuado). ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).

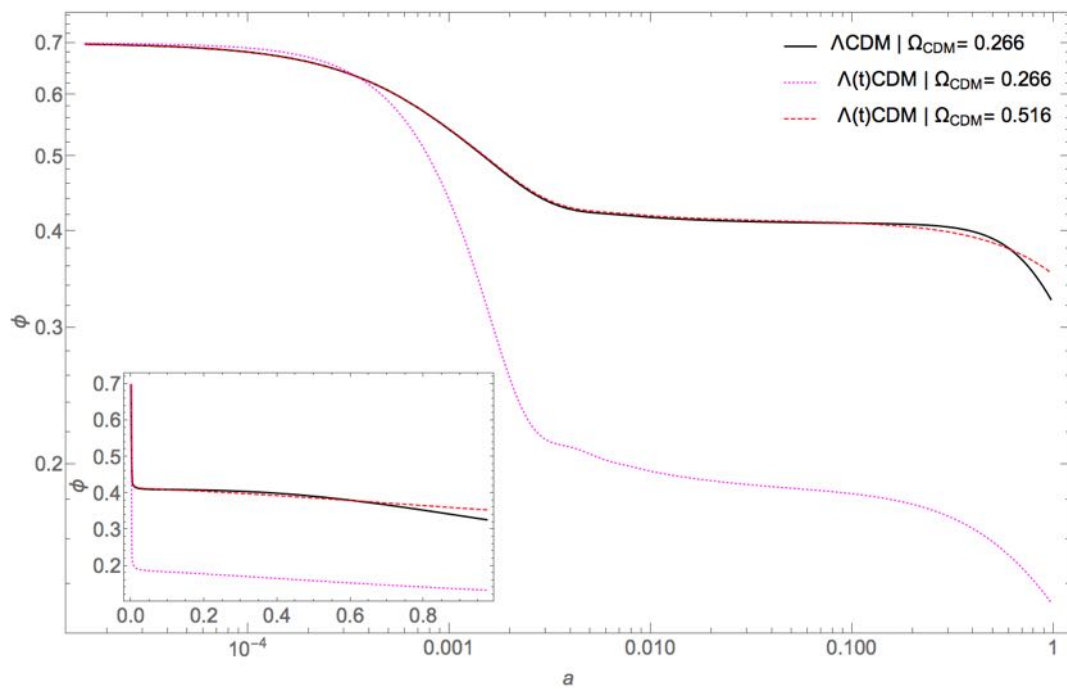


Figura A.5: Potencial $\phi(a)$ para os modelos (A): Λ CDM, com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (preto-contínuo); (B): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.516$ (Vermelho-tracejado); (C): $\Lambda(t)$ CDM com $\Omega_{cdm} \equiv 0.266$ (Magenta-pontuado); ($k \equiv 10^{-2} Mpc^{-1}$).