



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**Estudo das Transformações de Bäcklund para as
Hierarquias KdV e mKdV**

Balbino José da Silva Pomponet Filho

Salvador-Ba, abril de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Estudo das Transformações de Bäcklund para as
Hierarquias KdV e mKdV**

Balbino José da Silva Pomponet Filho

Orientador: Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo

Co-Orientador: Prof. Dr. Esdras Santana dos Santos

Tese a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Salvador-Ba, abril de 2019

AGRADECIMENTOS

Ao Deus criador agradeço pela vida.

Agradeço a minha família pela companhia e o cuidado constante.

Agradeço aos professores Genilson Melo e Esdras Santana pela orientação e paciência.

Agradeço ao professor Luiz Alberto Oliveira pelas discussões e sugestões que se mostraram muito relevantes a essa tese.

Agradeço aos colegas, professores e funcionários do IF-UFBa.

Agradeço aos colegas do CETEC-UFRB e a todos que me incentivaram e me apoiaram ao longo da realização do doutorado.

Agradeço à FAPESB e à CAPES pelo suporte financeiro.

*Dedico este trabalho a
minha filha Cibely, aos
meus pais e aos meus
irmãos*

RESUMO

Nesta tese apresentamos um estudo das transformações de Bäcklund para as hierarquias Korteweg - de Vries (KdV) e modificada Korteweg - de Vries (mKdV). Mostramos que é possível obter uma auto-transformação de Bäcklund válida para todas as equações que compõem as hierarquias KdV e mKdV. Para isso, usamos o sistema de Riccati associado a cada hierarquia e demonstramos, por indução matemática, que o mesmo se mantém invariante sob uma dada transformação. Além disso, usamos as auto-transformações de Bäcklund para obter as soluções sólitons e as fórmulas de superposição não linear de cada hierarquia.

Palavras-chave: Transformações de Bäcklund, Sólitons, Equações não lineares.

ABSTRACT

In this thesis we present a study of the Bäcklund transformations for the hierarchies Korteweg - de Vries (KdV) and modified Korteweg - de Vries (mKdV). We show that it is possible to obtain a auto-Bäcklund transformation valid for all the equations that make up the KdV and mKdV hierarchies. For this, we use the Riccati system associated with each hierarchy and demonstrate, by mathematical induction, that it remains invariant under a given transformation. In addition, we use the auto-Bäcklund transformation to obtain the soliton solutions and the non-linear superposition formulas of each hierarchy.

Keywords: Bäcklund Transformations, Sólitons, Nonlinear equations.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Transformações de Bäcklund	5
2.1	Soluções sólitons para a equação seno-Gordon	6
2.2	Soluções sólitons para a equação KdV	12
2.3	Soluções sólitons para a equação mKdV	18
3	Construção das Hierarquias	24
3.1	Hierarquia KdV	24
3.2	Hierarquia mKdV	27
4	Transformações de Bäcklund para as Hierarquias KdV e mKdV	33
4.1	O sistema de Riccati da hierarquia KdV	33
4.1.1	Auto-Transformações de Bäcklund para a Hierarquia KdV	39
4.2	O sistema de Riccati para a Hierarquia mKdV	40
4.2.1	Auto-Transformações de Bäcklund para a Hierarquia mKdV	45
5	Soluções sólitons	47
5.1	Hierarquia KdV	47

5.2 Hierarquia mKdV	50
6 Considerações Finais	54

Lista de Figuras

2.1	Gráfico de $w(x, t)$ (2.7), conhecida como Kink, em $t = -3, t = 0$ e $t = 3$ com $c = 1$ e $a = 1$	7
2.2	Diagrama representativo do teorema de Bianchi (principio da permutabilidade) para duas sucessivas transformações de Bäcklund com parâmetros a_1 e a_2	8
2.3	Gráfico de $w_{12}(x)$ (2.16), em $t = -15, t = 0$ e $t = 15$ com $c_1 = c_2 = 1, a_1 = 1$ e $a_2 = -2$	9
2.4	Diagrama representativo do teorema da permutabilidade para três sucessivas transformações de Bäcklund com parâmetros a_1, a_2 e a_3	10
2.5	Gráfico de $u(x)$ (2.34), em $t = -20, t = 0$ e $t = 20$ com $c_1 = c_2 = c_3 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$ e $a_3 = 1, 5$	13
2.6	Gráfico de $u_1(x)$ (2.41), com $k = 1$, em $t = -1, t = 0$ e $t = 1$, respectivamente	14
2.7	Gráfico de $u_{12}(x)$ (2.49), com $k_1 = 0, 8, k_2 = 0, 5$ em $t = -5, t = 0$ e $t = 5$, respectivamente	16
2.8	Gráfico de $u_{123}(x)$ (2.64), com $k_1 = 1, k_2 = 1, 8$ e $k_3 = 2, 5$ em $t = -0, 3, t = 0$ e $t = 0, 3$, respectivamente	18
2.9	Gráfico de $u(x)$ (2.72), em $t = -10, t = 0$ e $t = 10$ com $c = 0, 2$ e $a = 0, 5$	20
2.10	Gráfico de $u(x)$ (2.79), em $t = -10, t = 0$ e $t = 10$ com $c_1 = c_2 = 1, a_1 = 1$ e $a_2 = -0, 5$	21

Capítulo 1

Introdução

As transformações de Bäcklund foram introduzidas pelo físico-matemático A. V. Bäcklund no contexto da geometria diferencial [1–12]. Uma das primeiras transformações de Bäcklund encontradas foi associada à equação seno-Gordon, uma equação que, nesse contexto, descreve superfícies com curvatura gaussiana constante e negativa. Mais tarde, vários autores mostraram que uma vasta quantidade de equações de evolução admitem uma transformação de Bäcklund, tais como a equação Korteweg-de Vries (KdV), modificada KdV (mKdV), equação não linear de Schrödinger, senh-Gordon, entre outras [2, 13–28].

De forma geral, através de uma transformação de Bäcklund é possível relacionar duas equações diferenciais parciais (EDP's), de forma que, se conhecemos a solução de uma das equações pode-se obter a solução da outra. Nota-se que existem situações em que as transformações de Bäcklund relacionam duas soluções de uma mesma EDP, nesse caso a transformação é chamada de auto-transformação de Bäcklund. Uma vantagem do uso das transformações de Bäcklund é o teorema de Bianchi (princípio da permutabilidade), que permite a obtenção de um princípio de superposição não linear das soluções da equação em estudo. Esse princípio consiste de uma expressão puramente algébrica que possibilita a obtenção de novas soluções a partir de uma solução inicial conhecida. Dessa forma, usando auto-transformações de Bäcklund, é possível obter uma série de soluções da equação não linear, sem a necessidade de realizar um número excessivo de integrações. Vários autores mostram que se pode obter soluções sólitons usando as auto-transformações de Bäcklund

[14–16, 29–36].

O estudo das equações diferenciais parciais não lineares que possuem soluções tipo sóliton, como as já citadas KdV, mKdV, seno-Gordon, não linear de Schrödinger, etc, tem sido um tema de grande relevância e interesse tanto na área da física como na matemática, engenharia, biologia, etc [37–42]. Pelo fato de não obedecer o princípio de superposição linear, o processo de obtenção de soluções para as equações não lineares se torna mais complicado. Um método largamente usado para obter a solução de equações não lineares é o espalhamento inverso, que associa à equação não linear de interesse, um sistema linear auxiliar (ver em [1, 13, 15, 17, 24, 43–54]). Nesse contexto, as equações não lineares são expressas como a condição de compatibilidade de duas equações lineares que constituem um problema de autovalores e possuem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\psi_x(x, t) &= X\psi(x, t) \\ \psi_t(x, t) &= T\psi(x, t),\end{aligned}$$

onde usamos a notação $w_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} w$. $\psi(x, t)$ é um vetor e X e T são matrizes cujas entradas dependem da solução $u(x, t)$ da equação não linear associada. Da condição de compatibilidade das duas equações acima, ou seja, fazendo $\psi_{xt} = \psi_{tx}$, e com a escolha adequada dos operadores X e T é obtida a equação não linear em estudo.

Uma hierarquia integrável é composta por uma família de infinitas equações que possuem uma série de propriedades em comum, por exemplo, associado ao conceito de integrabilidade estão: existência de soluções sólitons, transformações de Bäcklund, estrutura bi-Hamiltoniana, infinitas leis de conservação, formulação via par de Lax, etc. Para mais detalhes ver [55–74]. Nesse contexto, a partir de um sistema linear associado, são construídas as hierarquias integráveis, que são compostas de infinitas equações de evolução, cada uma delas associada a um tempo t_n . Sendo que, a matriz X é comum a todas elas, já a matriz T , é escrita como uma expansão em série finita. Desse modo, o grau máximo da expansão em série definirá o grau da equação não linear obtida. Esses conceitos são válidos inclusive para tempos com índices negativos bem como para as chamadas hierarquias mistas, como foi mostrado em [75].

Na referência [3], Chern e Tenenblat introduziram uma maneira sistemática de estudar equações diferenciais descrevendo superfícies pseudo-esféricas e usando o problema linear associado a uma equação diferencial não linear. Neste contexto, as transformações de Bäcklund são apresentadas como transformações que deixam invariante o sistema de Riccati associado à equação diferencial em consideração. Na referência [76], usamos o fato de que as hierarquias KdV e mKdV descrevem superfícies pseudo-esféricas para fornecer explicitamente suas transformações de Bäcklund. Para isso, introduzimos uma transformação e mostramos, por indução matemática, que a mesma mantém invariante o sistema de Riccati da hierarquia. O sistema de Riccati é obtido a partir do par de Lax associado à equação não linear em estudo. Assim, por exemplo, no caso da equação KdV, o sistema de Riccati é constituído por duas equações: uma delas proveniente do operador espacial do par de Lax X , e outra que é obtida a partir do operador temporal T . Entretanto, é possível obter o sistema de Riccati de toda a hierarquia de equações. Nesse processo, obtemos um sistema de Riccati formado por um conjunto de n equações na parte temporal, uma vez que o operador temporal é escrito como uma expansão em série de potências com n termos. Para demonstrar a invariância da parte espacial do sistema de Riccati para um n qualquer, se faz necessário, então, o uso do método da indução matemática. Uma vez realizada essa etapa, mostramos que é possível obter uma transformação de Bäcklund que seja válida para todas as equações que compõem uma dada hierarquia. É importante observar que o sistema de Riccati associado à cada equação isoladamente é invariante por uma dada transformação, mas a demonstração dessa propriedade para uma hierarquia inteira, composta por infinitas equações, é o principal resultado que apresentamos nessa tese.

A presente tese está organizada como se segue: No capítulo 2 vamos apresentar o método de obtenção de soluções sólitons usando transformações de Bäcklund para as equações seno-Gordon, KdV e mKdV. No capítulo 3 vamos apresentar a construção das hierarquias KdV e mKdV a partir do problema de autovalores associado e do par de Lax de cada hierarquia. No capítulo 4 nós obtemos o Sistema de Riccati geral de cada hierarquia e mostramos, por indução matemática, que o mesmo é invariante mediante uma transformação proposta, o que nos permite obter as auto-Transformações de Bäcklund para cada hierarquia. No capítulo 5 usaremos as auto transformações de Bäcklund para obter as soluções sólitons e as

fórmulas de superposição não lineares de cada hierarquia. No capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Transformações de Bäcklund

Neste capítulo apresentaremos alguns aspectos básicos das transformações de Bäcklund e mostraremos como obter soluções sólitons para as equações seno-Gordon, KdV e mKdV (ver [1, 2, 55]). O princípio da permutabilidade das transformações de Bäcklund será usado para obter as soluções multi-sólitons.

Uma transformação de Bäcklund é um par de equações diferenciais acopladas do tipo:

$$B_i(u, v, u_x, v_x, u_t, v_t, \dots) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

onde duas funções $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são soluções das equações diferenciais $P(u(x, t)) = 0$ e $Q(v(x, t)) = 0$, respectivamente. De forma geral, através de uma transformação de Bäcklund é possível relacionar duas equações diferenciais de forma que, se conhecemos uma solução particular de uma das equações pode-se obter a solução da outra. Dessa maneira, encontramos $u(x, t)$ que é uma solução de $P(u(x, t)) = 0$ sem resolver a própria equação, simplesmente integrando a transformação de Bäcklund. Podemos observar, dessa forma, que o uso das transformações de Bäcklund é eficaz para obter soluções de uma certa equação diferencial a partir da solução de outra. Naturalmente, essa abordagem é útil se as transformações de Bäcklund forem, em algum sentido, mais simples que a equação original.

Nota-se que existem situações em que as transformações de Bäcklund podem rela-

cionar duas soluções de uma mesma EDP, de modo que u e v satisfazem a mesma equação, então (2.1) é chamada de auto transformação de Bäcklund, e isso permite a construção de uma forma recursiva de obter várias soluções a partir de uma solução trivial conhecida. Utilizaremos esse raciocínio para construir soluções multi-sólitons para os modelos que serão estudados.

2.1 Soluções sólitons para a equação seno-Gordon

A equação seno-Gordon pode ser escrita da forma:

$$w_{xt} = \sin(w), \quad (2.2)$$

onde $w \equiv w(x, t)$ e usamos a notação $w_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}w$ e $w_{xt} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}w$.

A transformação de Bäcklund para a equação seno-Gordon é dada por:

$$(w + v)_x = 2a \sin\left(\frac{w - v}{2}\right), \quad (2.3)$$

$$(w - v)_t = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{w + v}{2}\right), \quad (2.4)$$

onde a é um parâmetro constante.

Derivando (2.3) em relação à t e (2.4) em relação à x , após algumas manipulações, obtemos:

$$\begin{aligned} w_{xt} &= \sin(w), \\ v_{xt} &= \sin(v), \end{aligned} \quad (2.5)$$

nesse caso em que $w(x, t)$ e $v(x, t)$ satisfazem a mesma equação, dizemos que (2.3) e (2.4) constituem uma auto transformação de Bäcklund.

Observamos que $v(x, t) = 0$ é uma solução da segunda equação em (2.5), logo a solução da equação seno-Gordon (2.2) pode ser obtida fazendo $v = 0$ em (2.3) e em (2.4).

Teremos então:

$$\begin{aligned}w_x &= 2a \sin\left(\frac{w}{2}\right), \\w_t &= \frac{2}{a} \sin\left(\frac{w}{2}\right).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Integrando as equações de acima e após algumas manipulações, obtemos a seguinte solução:

$$w(x, t) = 4 \tan^{-1} \left[c e^{\left(ax + \frac{t}{a}\right)} \right].\tag{2.7}$$

Essa é a solução 1-sóliton da equação seno-Gordon, onde c é uma constante e a é a velocidade de propagação da onda. A figura 2.1 mostra o gráfico de $w(x, t)$.

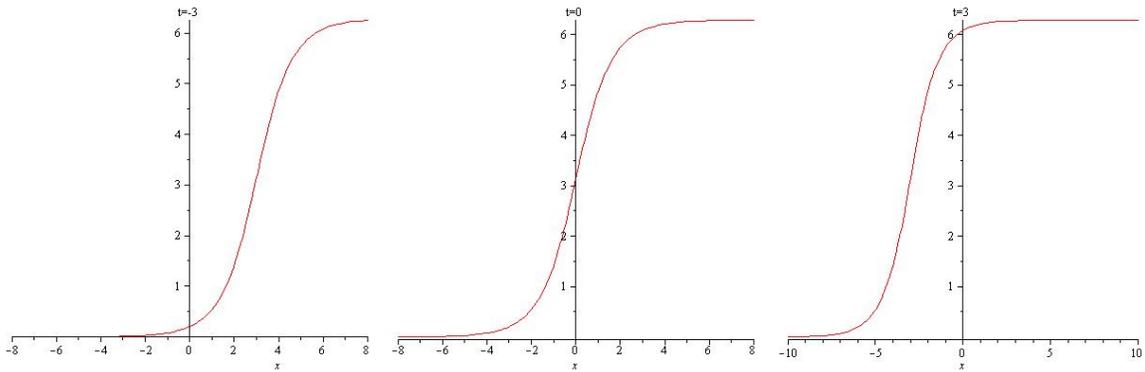


Figura 2.1: Gráfico de $w(x, t)$ (2.7), conhecida como Kink, em $t = -3$, $t = 0$ e $t = 3$ com $c = 1$ e $a = 1$

A solução 2-sólitons pode ser obtida também por meio da transformação de Bäcklund. Nesse caso vamos usar o teorema de Bianchi (princípio da permutabilidade) que diz que duas sucessivas transformações de Bäcklund são comutativas, ou seja, se duas transformações de Bäcklund com parâmetros distintos a_1 e a_2 , levam uma solução w_0 em outra solução w_{12} , então a ordem de aplicação das transformações é irrelevante. A figura 2.2 mostra uma representação desse teorema: a partir de uma solução w_0 é aplicada a transformação de Bäcklund com parâmetro a_1 para obter a solução w_1 , depois disso é aplicada a transformação de Bäcklund, agora com parâmetro a_2 para obter a solução w_{12} . Segundo o teorema da permutabilidade, quando partimos da solução w_0 , aplicamos primeiro a transformação com parâmetro a_2 e depois a transformação de parâmetro a_1 , é obtido o mesmo resultado w_{12} .

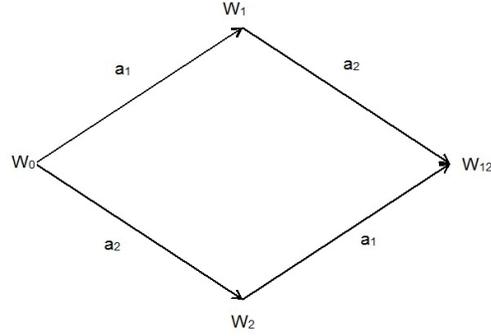


Figura 2.2: Diagrama representativo do teorema de Bianchi (princípio da permutabilidade) para duas sucessivas transformações de Bäcklund com parâmetros a_1 e a_2

Aplicando esse teorema à parte espacial da transformação de Bäcklund (2.3), obtemos:

$$(w_1 + w_0)_x = 2a_1 \sin\left(\frac{w_1 - w_0}{2}\right), \quad (2.8)$$

$$(w_{12} + w_1)_x = 2a_2 \sin\left(\frac{w_{12} - w_1}{2}\right), \quad (2.9)$$

$$(w_2 + w_0)_x = 2a_2 \sin\left(\frac{w_2 - w_0}{2}\right), \quad (2.10)$$

$$(w_{12} + w_2)_x = 2a_1 \sin\left(\frac{w_{12} - w_2}{2}\right), \quad (2.11)$$

subtraindo as equações (2.9) e (2.8), bem como subtraindo as equações (2.11) e (2.10), combinando os resultados e usando algumas propriedades trigonométricas, obtemos:

$$\begin{aligned} & a_1 \left[\sin\left(\frac{w_{12} - w_0}{4}\right) \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{4}\right) + \cos\left(\frac{w_{12} - w_0}{4}\right) \sin\left(\frac{w_1 - w_2}{4}\right) \right] = \\ & = a_2 \left[\sin\left(\frac{w_{12} - w_0}{4}\right) \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{4}\right) + \cos\left(\frac{w_{12} - w_0}{4}\right) \sin\left(\frac{w_2 - w_1}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

reorganizando, temos:

$$\tan\left(\frac{w_{12} - w_0}{4}\right) = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right) \tan\left(\frac{w_2 - w_1}{4}\right), \quad (2.13)$$

de onde obtemos w_{12} .

$$w_{12} = w_0 + 4 \tan^{-1} \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right) \tan \left(\frac{w_2 - w_1}{4} \right) \right], \quad (2.14)$$

esse é o princípio de superposição não linear, uma vez que essa expressão relaciona as soluções da equação seno-Gordon. Observamos que a partir de três soluções conhecidas $w_0 = 0$, w_1 e w_2 , que são duas soluções 1-sóliton dadas por (2.7), é possível obter uma nova solução w_{12} , por uma expressão algébrica (2.13). Sabendo que as soluções 1-sóliton, w_1 e w_2 , são dadas por (2.7), ou seja,

$$w_i = 4 \tan^{-1} \left[c_i e^{\left(a_i x + \frac{t}{a_i} \right)} \right], \quad (2.15)$$

onde $i = 1, 2$, c_i são duas constantes e a_i são as velocidades de cada onda. Substituindo (2.15) em (2.14) e usando a propriedade da tangente de uma soma, a saber, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, obtemos o seguinte resultado:

$$w_{12} = 4 \tan^{-1} \left[A_{12} \left(\frac{c_2 e^{\left(a_2 x + \frac{t}{a_2} \right)} - c_1 e^{\left(a_1 x + \frac{t}{a_1} \right)}}{1 + c_2 e^{\left(a_2 x + \frac{t}{a_2} \right)} c_1 e^{\left(a_1 x + \frac{t}{a_1} \right)}} \right) \right], \quad (2.16)$$

essa é a solução 2-sólitons da equação seno-Gordon, onde $A_{12} = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right)$. A figura 2.3 mostra o gráfico de $w_{12}(x, t)$.

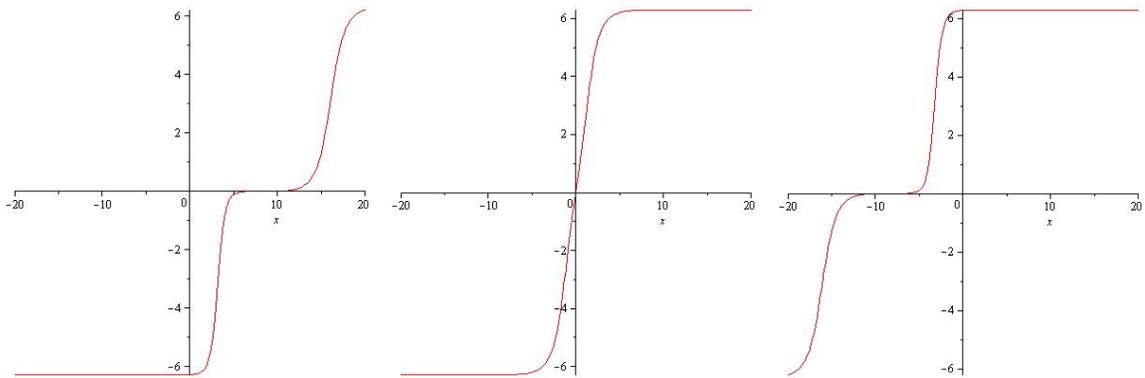


Figura 2.3: Gráfico de $w_{12}(x)$ (2.16), em $t = -15$, $t = 0$ e $t = 15$ com $c_1 = c_2 = 1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = -2$

A solução 3-sólitons pode ser obtida de forma semelhante. A figura 2.4, mostra uma

representação do teorema da permutabilidade para a aplicação sucessiva de três transformações de Bäcklund.

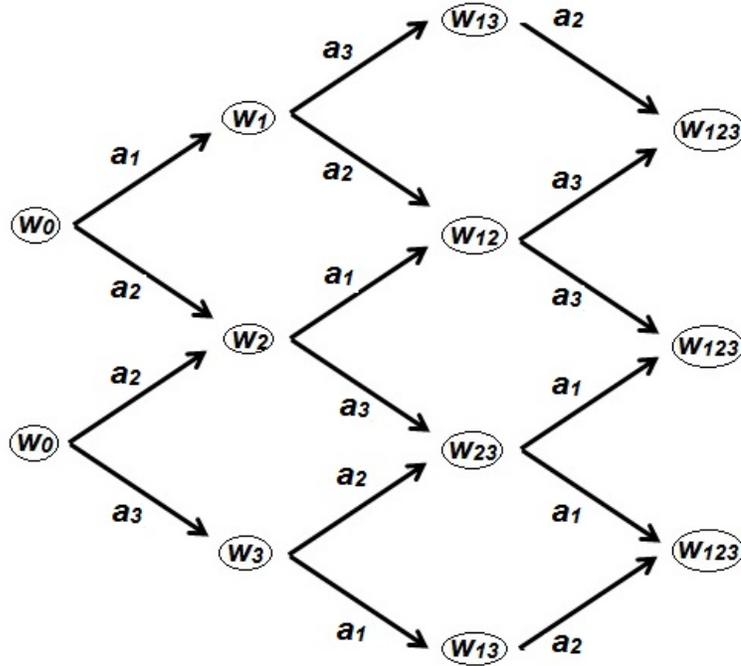


Figura 2.4: Diagrama representativo do teorema da permutabilidade para três sucessivas transformações de Bäcklund com parâmetros a_1 , a_2 e a_3 .

Usando o teorema da permutabilidade para três transformações de Bäcklund sucessivas obtemos as equações abaixo:

$$(w_1 + w_0)_x = 2a_1 \sin \left(\frac{w_1 - w_0}{2} \right), \quad (2.17)$$

$$(w_2 + w_0)_x = 2a_2 \sin \left(\frac{w_2 - w_0}{2} \right), \quad (2.18)$$

$$(w_3 + w_0)_x = 2a_3 \sin \left(\frac{w_3 - w_0}{2} \right), \quad (2.19)$$

$$(w_{12} + w_1)_x = 2a_2 \sin \left(\frac{w_{12} - w_1}{2} \right), \quad (2.20)$$

$$(w_{12} + w_2)_x = 2a_1 \sin \left(\frac{w_{12} - w_2}{2} \right), \quad (2.21)$$

$$(w_{13} + w_1)_x = 2a_3 \sin \left(\frac{w_{13} - w_1}{2} \right), \quad (2.22)$$

$$(w_{13} + w_3)_x = 2a_1 \sin \left(\frac{w_{13} - w_3}{2} \right), \quad (2.23)$$

$$(w_{23} + w_2)_x = 2a_3 \sin \left(\frac{w_{23} - w_2}{2} \right), \quad (2.24)$$

$$(w_{23} + w_3)_x = 2a_2 \sin \left(\frac{w_{23} - w_3}{2} \right), \quad (2.25)$$

$$(w_{123} + w_{12})_x = 2a_3 \sin \left(\frac{w_{123} - w_{12}}{2} \right), \quad (2.26)$$

$$(w_{123} + w_{13})_x = 2a_2 \sin \left(\frac{w_{123} - w_{13}}{2} \right), \quad (2.27)$$

$$(w_{123} + w_{23})_x = 2a_1 \sin \left(\frac{w_{123} - w_{23}}{2} \right), \quad (2.28)$$

onde w_0 é a solução inicial da seno-Gordon, e podemos escolher $w_0 = 0$, w_1 , w_2 e w_3 são soluções 1-sóliton dadas por (2.15), w_{12} , w_{13} e w_{23} são soluções 2-sólitons dadas por (2.16), ou seja,

$$w_{12} = 4 \tan^{-1} \left[A_{12} \left(\frac{c_2 e^{(a_2 x + \frac{t}{a_2})} - c_1 e^{(a_1 x + \frac{t}{a_1})}}{1 + c_1 e^{(a_1 x + \frac{t}{a_1})} c_1 e^{(a_1 x + \frac{t}{a_1})}} \right) \right], \quad (2.29)$$

$$w_{13} = 4 \tan^{-1} \left[A_{13} \left(\frac{c_3 e^{(a_3 x + \frac{t}{a_3})} - c_1 e^{(a_1 x + \frac{t}{a_1})}}{1 + c_3 e^{(a_3 x + \frac{t}{a_3})} c_1 e^{(a_1 x + \frac{t}{a_1})}} \right) \right], \quad (2.30)$$

$$w_{23} = 4 \tan^{-1} \left[A_{23} \left(\frac{c_3 e^{(a_3 x + \frac{t}{a_3})} - c_2 e^{(a_2 x + \frac{t}{a_2})}}{1 + c_3 e^{(a_3 x + \frac{t}{a_3})} c_2 e^{(a_2 x + \frac{t}{a_2})}} \right) \right], \quad (2.31)$$

onde $A_{ij} = \left(\frac{a_i + a_j}{a_i - a_j} \right)$, $i = 1, 2, 3$, c_i são constantes e a_i são as velocidades de cada onda.

Além disso, para obter $w_{123}(x, t)$, vamos subtrair as equações (2.20) e (2.26), bem como subtraindo as equações (2.22) e (2.27), combinando os resultados e usando algumas

propriedade trigonométricas, obtemos:

$$a_3 \left[\sin \left(\frac{w_{123} - w_{12}}{2} \right) - \sin \left(\frac{w_1 - w_{13}}{2} \right) \right] = a_2 \left[\sin \left(\frac{w_{123} - w_{13}}{2} \right) - \sin \left(\frac{w_1 - w_{12}}{2} \right) \right],$$

reorganizando, teremos:

$$w_{123} = w_1 + 4 \tan^{-1} \left[\left(\frac{a_2 + a_3}{a_2 - a_3} \right) \tan \left(\frac{w_{13} - w_{12}}{4} \right) \right], \quad (2.32)$$

mais uma vez temos o princípio de superposição não linear, que nesse caso permite obter a solução 3-sólitons a partir de uma solução 1-sóliton e duas soluções 2-sólitons. Sabendo que as soluções 1-sóliton são dadas por (2.7), e as soluções 2-sólitons são dados por (2.16), então (2.32) fica da seguinte forma:

$$w_{123} = 4 \tan^{-1} \eta_1 + 4 \tan^{-1} \left[A_{23} \frac{A_{13} (\eta_3 - \eta_1) - A_{12} (\eta_2 - \eta_1)}{(1 + \eta_3 \eta_1) (1 + \eta_2 \eta_1) + A_{13} A_{12} (\eta_3 - \eta_1) (\eta_2 - \eta_1)} \right], \quad (2.33)$$

onde: $\eta_i = c_i e^{\left(a_i x + \frac{t}{a_i} \right)}$, $i = 1, 2, 3$, podemos ainda usar a seguinte propriedade trigonométrica: $\tan^{-1}(A) + \tan^{-1}(B) = \tan^{-1} \left(\frac{A+B}{1-AB} \right)$, e obtemos o seguinte resultado:

$$w_{123} = 4 \tan^{-1} \left[\frac{\eta_1 (1 + \eta_3 \eta_1) (1 + \eta_2 \eta_1) + A_{13} A_{12} \eta_{31} \eta_{21} - A_{23} [A_{13} \eta_{31} - A_{12} \eta_{21}]}{(1 + \eta_3 \eta_1) (1 + \eta_2 \eta_1) + A_{13} A_{12} \eta_{31} \eta_{21} - \eta_1 A_{23} (A_{13} \eta_{31} - A_{12} \eta_{21})} \right], \quad (2.34)$$

onde $\eta_{ij} = \eta_i - \eta_j$. Essa é a solução 3-sólitons da equação seno-Gordon. A figura 2.5 mostra o gráfico de $w_{123}(x, t)$.

2.2 Soluções sólitons para a equação KdV

A equação KdV pode ser escrita da forma:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.35)$$

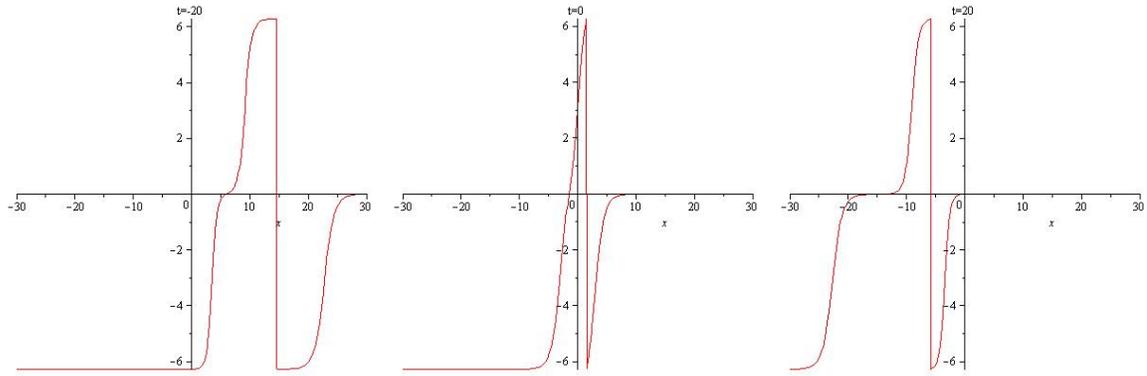


Figura 2.5: Gráfico de $u(x)$ (2.34), em $t = -20$, $t = 0$ e $t = 20$ com $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 1,5$

A transformação de Bäcklund para a equação KdV é dada por:

$$(w_1 + w_0)_x = 2a + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2, \quad (2.36)$$

$$(w_1 - w_0)_t = 3(w_{1x}^2 - w_{0x}^2) - (w_{1xxx} - w_{0xxx}), \quad (2.37)$$

onde a é um parâmetro constante e $u_i = w_{ix}$, $i = 0, 1$.

Derivando (2.36) em relação à t e (2.37) em relação à x , após algumas manipulações obtemos que:

$$\begin{aligned} u_{0t} + 6u_1u_{0x} + u_{0xxx} &= 0, \\ u_{1t} + 6u_2u_{1x} + u_{1xxx} &= 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

nesse caso em que $u_0(x, t)$ e $u_1(x, t)$ satisfazem a mesma equação, dizemos que (2.36) e (2.37) constituem uma auto transformação de Bäcklund.

A solução $u_1(x, t)$ da equação KdV (2.35), pode ser obtida usando $u_0 = 0$, que é solução trivial da equação KdV. Então, como $u_0 = w_{0x}$, faremos $w_0 = 0$, então de (2.36) e (2.37) teremos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} w_{1x} &= 2a + \frac{1}{2}w_1^2, \\ w_{1t} &= 4aw_{1x}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde usamos a primeira equação de (2.39) para calcular w_{1xxx} . Integrando as equações acima e após algumas manipulações, obtemos a seguinte solução:

$$w_1(x, t) = -2k \tanh(kx - 4k^3 t), \quad (2.40)$$

onde $a = -k^2$ é a velocidade da onda. Como $u_1 = w_{1x}$, então,

$$u_1(x, t) = -2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 4k^3 t). \quad (2.41)$$

Esta é a solução 1-sóliton da equação KdV. A figura 2.6 mostra o gráfico dessa solução.

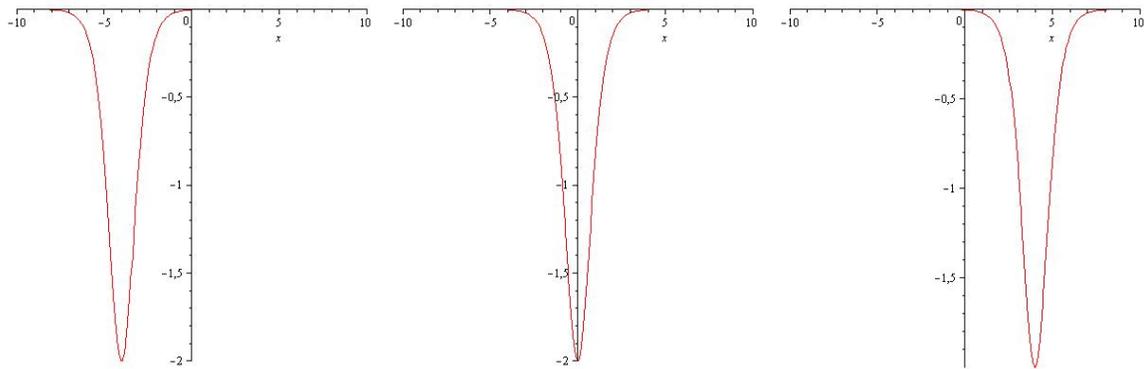


Figura 2.6: Gráfico de $u_1(x)$ (2.41), com $k = 1$, em $t = -1$, $t = 0$ e $t = 1$, respectivamente

A solução 2-sólitons pode ser obtida também por meio da transformação de Bäcklund, de modo semelhante ao usado na seção anterior. Aplicando o teorema da permutabilidade na parte espacial da transformação de Bäcklund (2.36), obtemos:

$$(w_1 + w_0)_x = 2a_1 + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2, \quad (2.42)$$

$$(w_{12} + w_1)_x = 2a_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2, \quad (2.43)$$

$$(w_2 + w_0)_x = 2a_2 + \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2, \quad (2.44)$$

$$(w_{12} + w_2)_x = 2a_1 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_2)^2. \quad (2.45)$$

Combinando o sistema de equações acima, teremos:

$$\begin{aligned} 4(a_1 - a_2) + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 - \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2 \\ - \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_2)^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

de onde podemos extrair w_{12} :

$$w_{12} = w_0 - \frac{4(a_2 - a_1)}{w_2 - w_1} \quad (2.47)$$

esse é o princípio de superposição não linear, uma vez que essa expressão relaciona as soluções da equação KdV. Observamos que a partir de três soluções conhecidas: $w_0 = 0$, e w_1 e w_2 dadas por (2.40), é possível obter uma nova solução w_{12} , por uma expressão algébrica (2.47). Dessa forma, como (2.41) pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= -2k_1 \tanh(\rho_1), \\ w_2(x, t) &= -2k_2 \tanh(\rho_2), \end{aligned}$$

onde $\rho_i = k_i x - 4k_i^3 t$, $a_i = -k_i^2$, $i = 1, 2$. Então (2.47), poderá ser escrito da seguinte forma:

$$w_{12} = \frac{2(k_2^2 - k_1^2)}{k_2 \tanh \rho_2 - k_1 \tanh \rho_1}. \quad (2.48)$$

Para obter a solução da equação KdV, vamos usar que $u = w_x$ no resultado acima, então:

$$u_{12}(x, t) = \frac{2(k_2^2 - k_1^2)[k_2^2(1 - \tanh^2 \rho_2) - k_1^2(1 - \tanh^2 \rho_1)]}{(k_2 \tanh \rho_2 - k_1 \tanh \rho_1)^2}, \quad (2.49)$$

Esta é a solução 2-sóliton da equação KdV. A figura 2.7 mostra o gráfico dessa solução.

A solução 3-sólitons pode ser obtida também por meio da transformação de Bäcklund, de modo semelhante ao usado na seção anterior.

Usando o teorema da permutabilidade para três transformações de Bäcklund suces-

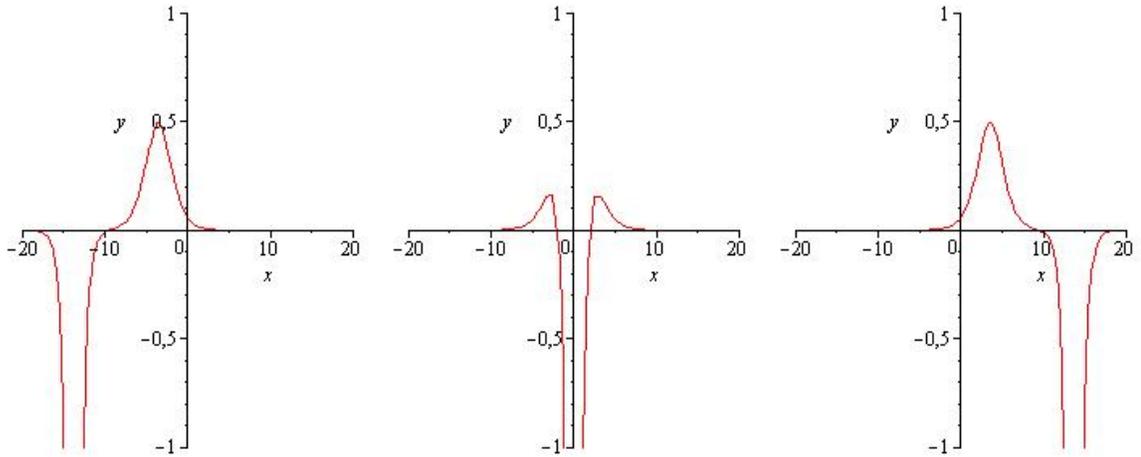


Figura 2.7: Gráfico de $u_{12}(x)$ (2.49), com $k_1 = 0,8$, $k_2 = 0,5$ em $t = -5$, $t = 0$ e $t = 5$, respectivamente

sivas obtemos as equações abaixo:

$$(w_1 + w_0)_x = 2a_1 + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2, \quad (2.50)$$

$$(w_2 + w_0)_x = 2a_2 + \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2, \quad (2.51)$$

$$(w_3 + w_0)_x = 2a_3 + \frac{1}{2}(w_3 - w_0)^2, \quad (2.52)$$

$$(w_{12} + w_1)_x = 2a_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2, \quad (2.53)$$

$$(w_{13} + w_1)_x = 2a_3 + \frac{1}{2}(w_{13} - w_1)^2, \quad (2.54)$$

$$(w_{12} + w_2)_x = 2a_1 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_2)^2, \quad (2.55)$$

$$(w_{13} + w_3)_x = 2a_1 + \frac{1}{2}(w_{13} - w_3)^2, \quad (2.56)$$

$$(w_{23} + w_2)_x = 2a_3 + \frac{1}{2}(w_{23} - w_2)^2, \quad (2.57)$$

$$(w_{23} + w_3)_x = 2a_2 + \frac{1}{2}(w_{23} - w_3)^2, \quad (2.58)$$

$$(w_{123} + w_{12})_x = 2a_3 + \frac{1}{2}(w_{123} - w_{12})^2, \quad (2.59)$$

$$(w_{123} + w_{13})_x = 2a_2 + \frac{1}{2}(w_{123} - w_{13})^2, \quad (2.60)$$

$$(w_{123} + w_{23})_x = 2a_1 + \frac{1}{2}(w_{123} - w_{23})^2, \quad (2.61)$$

Combinando as equações (2.53), (2.54), (2.59) e (2.60), obtemos:

$$4(a_2 - a_3) + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2 - \frac{1}{2}(w_{123} - w_{12})^2 - \frac{1}{2}(w_{13} - w_1)^2 + \frac{1}{2}(w_{123} - w_{13})^2 = 0,$$

logo,

$$w_{123} = w_1 - \frac{4(a_3 - a_2)}{w_{13} - w_{12}}, \quad (2.62)$$

onde w_1 é a solução 1-sóliton e w_{12} e w_{13} são duas soluções 2-sólitons.

Usando (2.47) para w_{12} e w_{13} , então (2.62) pode ser escrita da forma:

$$w_{123} = \frac{a_1 w_1 (w_2 - w_3) + a_2 w_2 (w_3 - w_1) + a_3 w_3 (w_1 - w_2)}{a_1 (w_2 - w_3) + a_2 (w_3 - w_1) + a_3 (w_1 - w_2)}, \quad (2.63)$$

como w_1 , w_2 e w_3 , são soluções 1-sóliton obtidas em (2.41), e podem ser escritas da forma:

$w_i(x, t) = -2k_i \gamma_i$, onde $\gamma_i = \tanh(\rho_i)$, então teremos:

$$w_{123} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)\gamma_1\gamma_2 + (k_1^2 - k_3^2)\gamma_1\gamma_3 + (k_2^2 - k_3^2)\gamma_2\gamma_3}{k_1(k_3^2 - k_2^2)\gamma_1 + k_2(k_1^2 - k_3^2)\gamma_2 - k_3(k_1^2 - k_2^2)\gamma_3},$$

Para obter a solução 3-sólitons da equação KdV, vamos usar que $u = w_x$ no resultado acima, então:

$$u_{123}(x, t) = \frac{b_{ijl}\gamma_i^2 + c_{ijl}\gamma_i\gamma_j + d_{ijl}\gamma_i^2\gamma_j\gamma_l + h_{ij}\gamma_i^2\gamma_j^2}{(k_1(k_3^2 - k_2^2)\gamma_1 + k_2(k_1^2 - k_3^2)\gamma_2 - k_3(k_1^2 - k_2^2)\gamma_3)^2}. \quad (2.64)$$

Essa é a solução 3-sólitons da equação KdV, onde,

$$b_{ijl} = -2k_i^2(k_j^2 - k_l^2)(-k_i^2 + k_j^2 + k_l^2),$$

$$c_{ijl} = 4k_i k_j k_l^2 (k_i^2 - k_l^2)(k_j^2 - k_l^2),$$

$$d_{ijl} = k_i^2 k_j k_l (k_i^2 - k_j^2)(k_i^2 - k_l^2),$$

$$h_{ij} = 2k_i^2 k_j^2 (k_i^2 - k_j^2)^2,$$

$$\gamma_i = \tanh(\rho_i),$$

$$\rho_i = k_i x - 4k_i^3 t,$$

$$(i, j, l) = 1, 2, 3;$$

e os índices permutam ciclicamente.

A figura 2.8 mostra o gráfico dessa solução.

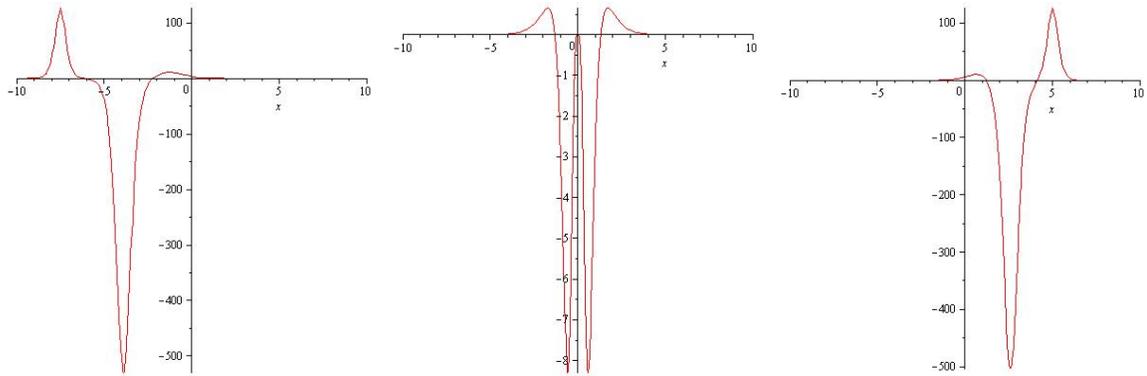


Figura 2.8: Gráfico de $u_{123}(x)$ (2.64), com $k_1 = 1$, $k_2 = 1,8$ e $k_3 = 2,5$ em $t = -0,3$, $t = 0$ e $t = 0,3$, respectivamente

2.3 Soluções sólitons para a equação mKdV

A equação mKdV pode ser escrita da forma:

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.65)$$

A transformação de Bäcklund para a equação mKdV é dada por:

$$(w_0 + w_1)_x = 2a \sin(w_1 - w_0), \quad (2.66)$$

$$(w_0 + w_1)_t = -2a [(u_{1x} - u_{0x}) \cos(w_1 - w_0) + (u_1^2 - u_0^2) \sin(w_1 - w_0)], \quad (2.67)$$

onde a é um parâmetro constante e $u_i = w_{ix}$, $i=0,1$.

Derivando (2.66) em relação à t e (2.67) em relação à x , obtemos que:

$$\begin{aligned}u_{0t} + 6u_0^2 u_{0x} + u_{0xxx} &= 0, \\u_{1t} + 6u_1^2 u_{1x} + u_{1xxx} &= 0,\end{aligned}\tag{2.68}$$

nesse caso em que $u_0(x, t)$ e $u_1(x, t)$ satisfazem a mesma equação, dizemos que (2.66) e (2.67) constituem uma auto transformação de Bäcklund.

A solução $u_1(x, t)$ da equação mKdV (2.65), pode ser obtida usando $u_0 = 0$, que é solução trivial da equação mKdV. Então, como $u_0 = w_{0x}$, faremos $w_0 = 0$, então de (2.66) e (2.67) teremos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}w_{1x} &= 2a \sin(w_1), \\w_{1t} &= -2a[u_{1x} \cos(w_1) + u_1^2 \sin(w_1)],\end{aligned}\tag{2.69}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}w_{1x} &= 2a \sin(w_1), \\w_{1t} &= -8a^3 \sin(w_1),\end{aligned}\tag{2.70}$$

que assume a seguinte solução:

$$w_1(x, t) = 2 \tan^{-1}[c e^{2a(x-4a^2t)}],\tag{2.71}$$

logo, a solução u_1 , será dada por:

$$u_1(x, t) = \frac{4c e^{2a(x-4a^2t)}}{1 + c^2 e^{2a(x-4a^2t)}},\tag{2.72}$$

esta é a solução 1-sóliton da equação mKdV. O gráfico dessa função é mostrado na figura 2.9.

A solução 2-sólitons pode ser obtida também por meio da transformação de Bäcklund usando o teorema da permutabilidade como na seção anterior. Aplicando esse teorema a

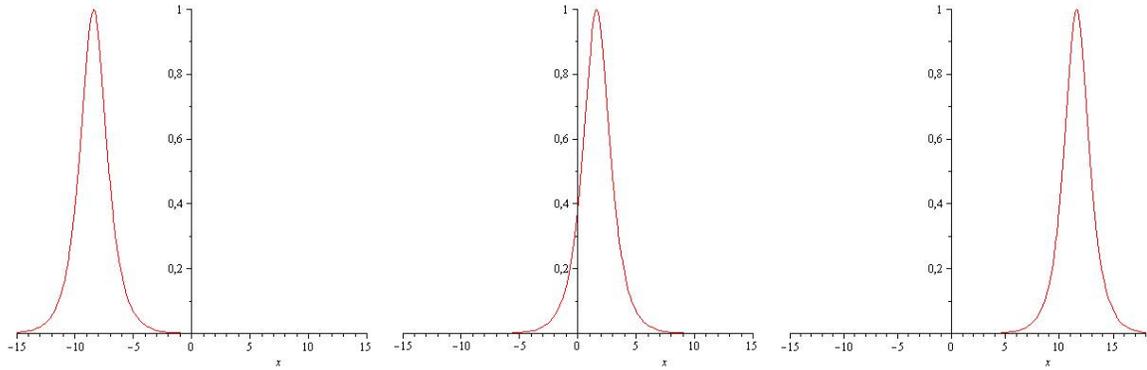


Figura 2.9: Gráfico de $u(x)$ (2.72), em $t = -10$, $t = 0$ e $t = 10$ com $c = 0,2$ e $a = 0,5$

equação mKdV em (2.66), obtemos:

$$(w_1 + w_0)_x = 2a_1 \sin(w_1 - w_0), \quad (2.73)$$

$$(w_{12} + w_1)_x = 2a_2 \sin(w_{12} - w_1), \quad (2.74)$$

$$(w_2 + w_0)_x = 2a_2 \sin(w_2 - w_0), \quad (2.75)$$

$$(w_{12} + w_2)_x = 2a_1 \sin(w_{21} - w_2), \quad (2.76)$$

Combinando as equações acima, obtemos w_{12} :

$$w_{12} = w_0 + 2 \tan^{-1} \left[\left(\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1} \right) \tan \left(\frac{w_2 - w_1}{2} \right) \right], \quad (2.77)$$

esse é o princípio de superposição não linear, uma vez que essa expressão relaciona as soluções da equação mKdV. Observamos que a partir de três soluções conhecidas: $w_0 = 0$, e w_1 e w_2 dadas por (2.71), é possível obter uma nova solução w_{12} , por uma expressão algébrica (2.77). Dessa forma, como (2.72) pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= 2 \tan^{-1} \left[c_1 e^{2a_1(x - 4a_1^2 t)} \right], \\ w_2(x, t) &= 2 \tan^{-1} \left[c_2 e^{2a_2(x - 4a_2^2 t)} \right], \end{aligned}$$

então (2.77) poderá ser escrita da seguinte forma:

$$w_{12} = w_0 + 2 \tan^{-1} \left(A_{12} \frac{\eta_2 - \eta_1}{1 + \eta_2 \eta_1} \right), \quad (2.78)$$

onde $\eta_i = c_i e^{2a_i(x - 4a_i^2 t)}$ e $A_{12} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}$. Dessa forma a solução da equação mKdV, será dada por:

$$u_{12}(x, t) = 4A_{12} \left[\frac{a_2 \eta_2 (1 + \eta_1^2) - a_1 \eta_1 (1 + \eta_2^2)}{(1 + \eta_1 \eta_2)^2 + A_{12}^2 (\eta_2 - \eta_1)^2} \right], \quad (2.79)$$

esta é a solução 2-sóliton da equação mKdV. O gráfico dessa função é mostrado na figura 2.10.

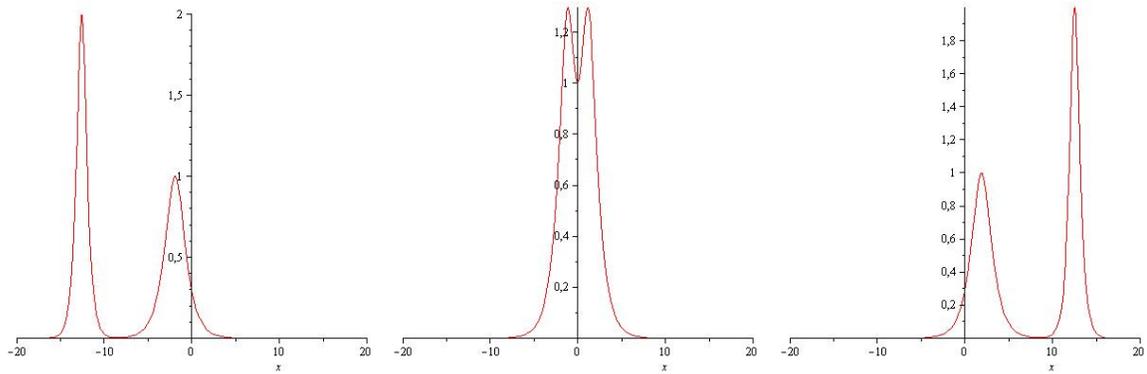


Figura 2.10: Gráfico de $u(x)$ (2.79), em $t = -10$, $t = 0$ e $t = 10$ com $c_1 = c_2 = 1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = -0,5$

A solução 3-sólitons pode ser obtida também por meio da transformação de Bäcklund, de modo semelhante ao usado na seção anterior. Usando o teorema da permutabilidade

para três transformações de Bäcklund sucessivas obtemos as equações abaixo:

$$(w_1 + w_0)_x = 2a_1 \sin(w_1 - w_0), \quad (2.80)$$

$$(w_2 + w_0)_x = 2a_2 \sin(w_2 - w_0), \quad (2.81)$$

$$(w_3 + w_0)_x = 2a_3 \sin(w_3 - w_0), \quad (2.82)$$

$$(w_{12} + w_1)_x = 2a_2 \sin(w_{12} - w_1), \quad (2.83)$$

$$(w_{13} + w_1)_x = 2a_3 \sin(w_{13} - w_1), \quad (2.84)$$

$$(w_{12} + w_2)_x = 2a_1 \sin(w_{12} - w_2), \quad (2.85)$$

$$(w_{13} + w_3)_x = 2a_1 \sin(w_{13} - w_3), \quad (2.86)$$

$$(w_{23} + w_2)_x = 2a_3 \sin(w_{23} - w_2), \quad (2.87)$$

$$(w_{23} + w_3)_x = 2a_2 \sin(w_{23} - w_3), \quad (2.88)$$

$$(w_{123} + w_{12})_x = 2a_3 \sin(w_{123} - w_{12}), \quad (2.89)$$

$$(w_{123} + w_{13})_x = 2a_2 \sin(w_{123} - w_{13}), \quad (2.90)$$

$$(w_{123} + w_{23})_x = 2a_1 \sin(w_{123} - w_{23}), \quad (2.91)$$

Do mesmo modo que encontramos a solução na seção anterior para 3-sólitons obtemos $w_{123}(x, t)$:

$$w_{123} = w_1 + 2 \tan^{-1} \left[\left(\frac{a_2 + a_3}{a_2 - a_3} \right) \tan \left(\frac{w_{13} - w_{12}}{2} \right) \right], \quad (2.92)$$

onde w_1 é a solução 1-sóliton como em (2.72) e w_{12} e w_{13} são duas soluções 2-sólitons como em (2.47). Assim, vemos que w_{123} pode ser escrito da forma:

$$w_{123} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{K_{123} \eta_1 \eta_2 \eta_3 + K_1 \eta_1 + K_2 \eta_2 + K_3 \eta_3}{K_{123} + K_1 \eta_2 \eta_3 + K_2 \eta_1 \eta_3 + K_3 \eta_1 \eta_2} \right), \quad (2.93)$$

onde,

$$\begin{aligned} K_{123} &= (a1 - a2)(a1 - a3)(a2 - a3), \\ K_1 &= (a1 + a2)(a1 + a3)(a2 - a3), \\ K_2 &= (a1 + a2)(a3 - a1)(a2 + a3), \\ K_3 &= (a1 - a2)(a1 + a3)(a2 - a3), \end{aligned}$$

logo, a solução da equação mKdV será dada por:

$$u_{123}(x, t) = \frac{A_{123}\eta_1\eta_2\eta_3 - \Omega + K_{123}(a_1K_1\eta_1 + a_2K_2\eta_2 + a_3K_3\eta_3)}{K_{123}(\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 + 1) + \Theta + \Upsilon}, \quad (2.94)$$

onde

$$A_{123} = 32a_1a_2a_3 [a_1^2(a_3^2 - a_1^2) + a_2^2(a_1^2 - a_2^2) + a_3^2(a_2^2 - a_3^2)],$$

$$\Omega = a_1K_2K_3\eta_1(\eta_2^2 + \eta_3^2) - a_2K_1K_3\eta_2(\eta_1^2 + \eta_3^2) - a_3K_1K_2\eta_3(\eta_1^2 + \eta_2^2),$$

$$\Theta = K_1^2(\eta_1^2 + \eta_2^2\eta_3^2) + K_2^2(\eta_2^2 + \eta_1^2\eta_3^2) + K_3^2(\eta_3^2 + \eta_1^2\eta_2^2),$$

$$\Upsilon = b_1\eta_2\eta_3(\eta_1^2 + 1) + b_2\eta_1\eta_3(\eta_2^2 + 1) + b_3\eta_1\eta_2(\eta_3^2 + 1),$$

$$b_1 = 8a_2a_3(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - a_3^2); b_2 = 8a_1a_3(a_1^2 - a_3^2)(a_2^2 - a_3^2); b_3 = 8a_1a_2(a_1^2 - a_3^2)(a_3^2 - a_2^2).$$

Nesse capítulo mostramos como obter as soluções sóliton por meio das transformações de Bäcklund para as equações seno-Gordon, KdV e mKdV. O princípio da permutabilidade das transformações de Bäcklund foi usado, o que nos permitiu obter as soluções multi-sólitons por meio de um princípio de superposição não linear, que consiste de uma combinação algébrica entre soluções conhecidas. Resultados semelhantes podem ser encontrados em algumas nas referencias citadas [1, 2, 55]).

Capítulo 3

Construção das Hierarquias

Nesse capítulo vamos apresentar uma construção sistemática das hierarquias KdV e mKdV a partir do problema de autovalores associado a cada hierarquia.

3.1 Hierarquia KdV

O problema de autovalores para a hierarquia KdV é dado por:

$$\begin{aligned}\psi_x(x, t) &= X\psi(x, t) \\ \psi_t(x, t) &= T\psi(x, t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde,

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_1(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ -2q(x, t) & -\lambda \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a(x, t) & b(x, t) \\ c(x, t) & -a(x, t) \end{pmatrix}.\tag{3.2}$$

Aplicando a condição de compatibilidade em (3.1), ou seja, fazendo $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ obtemos a equação:

$$\partial_t X - \partial_x T + [X, T] = 0,\tag{3.3}$$

onde $[X, T] = XT - TX$. Substituindo X e T em (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a_x & -b_x \\ -2q_{t_N} - c_x & a_x \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \lambda a + 2c & \lambda b - 2a \\ -2qa - \lambda c & -2qb + \lambda a \end{pmatrix} \\ - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a\lambda - 2bq & 2a - b\lambda \\ c\lambda + 2aq & 2c + a\lambda \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

de onde extraímos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}(\lambda b_x - b_{xx}) - bq, \\ a &= \frac{1}{2}(\lambda b - b_x), \\ q_t &= \frac{1}{4}b_{xxx} + qb_x + \frac{1}{2}q_x b - \frac{1}{4}\lambda^2 b_x, \end{aligned} \quad (3.5)$$

se nós escolhermos $b = 2\lambda^2 + 4q$, então de (3.5) vamos obter a equação KdV:

$$q_t = 6qq_x + q_{xxx},$$

assim, de (3.5) as equações de evolução da hierarquia. De modo geral, os coeficientes a , b e c da matriz T são escritos como uma expansão em série de potências no parâmetro λ . Como em (3.5) as equações estão escritas em termos de b , então vamos fazer a seguinte expansão polinomial:

$$b = \sum_{i=0}^N R_i \lambda^{2(N-i)}. \quad (3.6)$$

Observe que a soma está colocada em termos das potências pares de λ , isso decorre do fato de que a terceira equação de (3.5) depende de λ^2 . Substituindo (3.6) na terceira equação de (3.5), obtemos:

$$q_{t_N} = \sum_{i=0}^N \left[\left(\frac{1}{4}R_{ixxx} + qR_{ix} + \frac{1}{2}q_x R_i \right) \lambda^{2(N-i)} - \frac{1}{4}R_{ix} \lambda^{2(N-i+1)} \right],$$

observe que, de agora em diante, escrevemos o índice N na variável temporal, isso se dá pelo fato de que para cada valor de N teremos uma equação de evolução da hierarquia. Vamos reorganizar a equação acima para que possamos evidenciar cada potência de λ na somatória, para isso observamos que ela pode ser reescrita da forma:

$$q_{t_N} = \frac{1}{4}R_{Nxxx} + qR_{Nx} + \frac{1}{2}q_xR_N - \frac{1}{4}R_{0,x}\lambda^{2(N+1)} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{4}R_{ixxx} + qR_{ix} + \frac{1}{2}q_xR_i - \frac{1}{4}R_{i+1,x} \right) \lambda^{2(N-i)}, \quad (3.7)$$

assim, agrupando os coeficientes de cada potência de λ , obtemos:

$$\lambda^{2(N+1)} : R_{0,x} = 0 \Rightarrow R_0 = CTE; \quad (3.8)$$

$$\lambda^{2(N-i)} : R_{i+1,x} = R_{i,xxx} + 4qR_{i,x} + 2q_xR_i; \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.9)$$

$$\lambda^0 : q_{t_N} = \frac{1}{4}R_{N,xxx} + qR_{Nx} + \frac{1}{2}q_xR_N \quad (3.10)$$

Observamos então que, a partir do problema de autovalores dado em (3.1), é possível obter as equações da hierarquia usando (3.10). Pode-se notar que estamos usando a variável $q(x, t_1, t_2, \dots, t_N)$, logo, para cada N teremos uma equação do tipo:

$$\begin{aligned} q_{t_0} &= F(q, q_x) \\ q_{t_1} &= F(q, q_x, q_{xx}, q_{xxx}) \\ q_{t_2} &= F(q, q_x, q_{xx}, q_{xxx}, q_{xxxx}, q_{xxxxx}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

como a ordem de cada equação acima é ímpar, podemos deixar cada tempo t_N compatível com a ordem da equação de evolução associada fazendo $t_N \rightarrow t_{2N+1}$ e escrever a equação dinâmica:

$$q_{t_{2N+1}} = \frac{1}{4}R_{N,xxx} + qR_{Nx} + \frac{1}{2}q_xR_N, .$$

Com a expressão acima, e usando (3.8) e (3.9) podemos obter todas as equações da

hierarquia KdV. Se escolhermos, por exemplo, $N = 0, 1, 2$ e 3 , com $R_0 = 2$, teremos:

$$\begin{aligned}
 q_{t_1} &= q_x, \\
 q_{t_3} &= q_{xxx} + 6qq_x, \\
 q_{t_5} &= q_{xxxxx} + 30q^2q_x + 20q_xq_{xx} + 10qq_{xxx}, \\
 q_{t_7} &= q_{xxxxxx} + 140q^3q_x + 40q^2q_{xxx} + 280qq_xq_{xx} \\
 &\quad + 70q_x^3 + 14qq_{xxxx} + 42q_xq_{xxx} + 70q_{xx}q_{xx} + 130q_x^2q_{xxx},
 \end{aligned}$$

que são as primeiras equações da hierarquia KdV. Observamos que, a partir do problema de autovalores, escrevendo a matriz T como uma expansão no parâmetro λ (3.6), é possível obter uma fórmula de recorrência como em (3.9), de onde se obtêm as equações da hierarquia.

3.2 Hierarquia mKdV

O problema de autovalores para a hierarquia mKdV é dado por

$$\begin{aligned}
 \psi_x(x, t) &= X\psi(x, t) \\
 \psi_t(x, t) &= T\psi(x, t),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

com as seguintes matrizes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_1(x, t) \\ \phi_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & q(x, t) \\ q(x, t) & -\lambda \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a(x, t) & b(x, t) \\ c(x, t) & -a(x, t) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Aplicando a condição de compatibilidade em (3.11), ou seja, fazendo $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ obtemos a equação:

$$\partial_t X - \partial_x T + [X, T] = 0, \tag{3.13}$$

onde $[X, T] = XT - TX$. Substituindo X e T em (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a_x & q_{t_N} - b_x \\ q_{t_N} - c_x & a_x \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \lambda a + qc & \lambda b - qa \\ qa - \lambda c & qb + \lambda a \end{pmatrix} \\ - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a\lambda + bq & aq - b\lambda \\ c\lambda - aq & cq + a\lambda \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

de onde extraímos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{q}{2}(b - c), \\ q_{t_N} &= b_x + aq - b\lambda \\ q_{t_N} &= c_x - aq + c\lambda. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo as duas ultimas equações acima obtemos:

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{q}{2}(b - c), \\ (b - c)_x &= \lambda(b + c) - 2aq, \\ q_{t_N} &= \frac{1}{2}(b + c)_x - \frac{1}{2}\lambda(b - c), \end{aligned} \quad (3.15)$$

De (3.15) obtemos os $a(x, t)$, $b(x, t)$ e $c(x, t)$ bem como a equação de evolução associada a cada tempo da hierarquia. Vamos definir novas variáveis com o intuito de facilitar os cálculos:

$$\begin{aligned} Q &= (b + c), \\ \lambda P &= (b - c), \\ \lambda R &= a, \end{aligned} \quad (3.16)$$

então (3.15), fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_x &= -\frac{q}{2}P, \\ P_x &= Q - 2\lambda q, \\ q_{t_N} &= \frac{1}{2}Q_x - \frac{1}{2}\lambda^2 P. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Observamos que é possível escrever P e Q em função de R e q usando as duas primeiras equações de (3.17), dessa forma a última equação poderá ser escrita em termos apenas de q e R , como segue:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{2R_x}{q} \\ Q &= 2qR - 2\left(\frac{R_x}{q}\right)_x \\ q_{t_N} &= (qR)_x - \left(\frac{R_x}{q}\right)_{xx} + \lambda^2\left(\frac{R_x}{q}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

As variáveis a , b e c também podem ser escritas em termos de R usando (3.16) e (3.18), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a &= \lambda R \\ b &= \frac{1}{2}(Q + \lambda P) \\ &= qR - \lambda\frac{R_x}{q} - \left(\frac{R_x}{q}\right)_x \\ c &= \frac{1}{2}(Q - \lambda P) \\ &= qR + \lambda\frac{R_x}{q} - \left(\frac{R_x}{q}\right)_x. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De modo geral, para um tempo t_N qualquer, os coeficientes a , b e c são escritos como uma expansão em série de potências no parâmetro λ , mas nesse caso, o fato de a equação dinâmica (3.18) estar escrita em termos de R , nos permite escrever em termos de uma expansão polinomial em λ .

$$R = \sum_{i=0}^N R_i \lambda^{2(N-i)}. \quad (3.20)$$

Observe que a soma está colocada em termos das potências pares de λ , isso decorre do fato de que a equação dinâmica (3.18) depende de λ^2 . Substituindo (3.20) na terceira equação de

(3.18), obtemos:

$$q_{t_N} = \sum_{i=0}^N \left[(qR_i)_x \lambda^{2(N-i)} - \left(\frac{R_{ix}}{q} \right)_{xx} \lambda^{2(N-i)} + \left(\frac{R_{ix}}{q} \right) \lambda^{2(N+1-i)} \right], \quad (3.21)$$

vamos reorganizar essa equação para que possamos evidenciar cada potência de λ na soma-tória. Para isso observamos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \left[(qR_i)_x - \left(\frac{R_{ix}}{q} \right)_{xx} \right] \lambda^{2(N-i)} &= (qR_N)_x - \left(\frac{R_{Nx}}{q} \right)_{xx} \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left[(qR_i)_x - \left(\frac{R_{ix}}{q} \right)_{xx} \right] \lambda^{2(N-i)}, \\ \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_{ix}}{q} \right) \lambda^{2(N+1-i)} &= \frac{R_{0x}}{q} \lambda^{2(N+1)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{R_{ix}}{q} \right) \lambda^{2(N+1-i)} \\ &= \frac{R_{0x}}{q} \lambda^{2(N+1)} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{R_{i+1,x}}{q} \right) \lambda^{2(N-i)} \end{aligned}$$

Dessa forma, retornando à equação (3.21), fica da forma:

$$\begin{aligned} q_{t_N} &= \left[(qR_N)_x - \left(\frac{R_{Nx}}{q} \right)_{xx} \right] + \frac{R_{0x}}{q} \lambda^{2(N+1)} \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left[(qR_i)_x - \left(\frac{R_{ix}}{q} \right)_{xx} + \left(\frac{R_{i+1,x}}{q} \right) \right] \lambda^{2(N-i)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agrupando os coeficientes de cada potência de λ nessa equação obtemos:

$$\lambda^{2(N+1)} : \frac{R_{0x}}{q} = 0 \Rightarrow R_0 = CTE; \quad (3.23)$$

$$\lambda^{2(N-i)} : R_{i+1,x} = -q \left[(qR_i)_x - \left(\frac{R_{ix}}{q} \right)_{xx} \right]; i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

$$\lambda^0 : q_{t_N} = (qR_N)_x - \left(\frac{R_{Nx}}{q} \right)_{xx} \quad (3.25)$$

Observamos que, a partir do problema de autovalores, é possível obter as equações da hierarquia usando (3.23), (3.24) e (3.25). Pode-se observar que estamos usando a variável $q(x, t_1, t_2, \dots, t_N)$, pois vimos que

$$q_{t_N} = (qR_N)_x - \left(\frac{R_{Nx}}{q} \right)_{xx},$$

logo, para cada N teremos uma equação do tipo:

$$\begin{aligned} q_{t_0} &= F(q, q_x) \\ q_{t_1} &= F(q, q_x, q_{xx}, q_{xxx}) \\ q_{t_2} &= F(q, q_x, q_{xx}, q_{xxx}, q_{xxxx}, q_{xxxxx}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vemos que os tempos não se misturam sendo variáveis independentes entre si. Além disso, como a ordem de cada equação acima é ímpar, podemos deixar cada tempo t_N compatível com a ordem da equação de evolução associada fazendo $t_N \rightarrow t_{2N+1}$ e escrever a equação dinâmica da forma:

$$q_{t_{2N+1}} = (qR_N)_x - \left(\frac{R_{Nx}}{q} \right)_{xx}. \quad (3.26)$$

Com a expressão acima, e usando (3.23) (3.24) podemos obter todas as equações da hierarquia mKdV. Se escolhermos, por exemplo, $N = 0$, $N = 1$ e $N = 2$, com $R_0 = 1$, então de (3.26) e usando (3.24), teremos:

$$\begin{aligned} q_{t_1} &= q_x \\ q_{t_3} &= -\frac{3}{2}q^2q_x + q_{xxx} \\ q_{t_5} &= -30q^4q_x + 10q_x^3 - 40q_xq_{xx} - 10q^2q_{xxx} + q_{xxxxx} \end{aligned}$$

que são as três primeiras equações da hierarquia mKdV.

Nesse capítulo mostramos uma construção das hierarquias KdV e mKdV. Observamos que, a partir do problema de autovalores, escrevendo a matriz T como uma expansão no parâmetro λ (3.6) e (3.20), é possível obter uma fórmula de recorrência como em (3.9) e (3.24), de onde se obtêm as equações da hierarquia.

Capítulo 4

Transformações de Bäcklund para as Hierarquias KdV e mKdV

Mostraremos nesse capítulo que, de modo geral as transformações de Bäcklund surgem a partir do sistema de Riccati associado à hierarquia. Nesse sentido, obtemos o Sistema de Riccati geral de cada hierarquia e mostramos, por indução matemática, que o mesmo é invariante mediante uma transformação proposta, o que nos permite obter as auto-Transformações de Bäcklund para cada hierarquia.

De forma semelhante, em [13], Konno e Wadati mostraram um modo de encontrar as transformações de Bäcklund associadas às equações KdV, mKdV, seno-Gordon e não linear de Schrödinger a partir do problema de autovalores associado e da equação de Riccati.

4.1 O sistema de Riccati da hierarquia KdV

Como vimos no capítulo anterior, o problema de autovalores para a hierarquia KdV é dado por:

$$\begin{pmatrix} \phi_{1x} \\ \phi_{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ -2q & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{1t_{2N+1}} \\ \phi_{2t_{2N+1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

Para obter o sistema de Riccati associado à hierarquia KdV vamos introduzir a variável $\Gamma(x, t)$:

$$\Gamma = -\frac{\phi_2}{\phi_1} \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = -\Gamma\phi_1 \quad (4.3)$$

derivando (4.3) em relação a x e usando (4.1), obtemos:

$$\Gamma_x + \lambda\Gamma - \Gamma^2 - v_x = 0, \quad (4.4)$$

onde introduzimos a variável não local $v_x = q$. Essa é a parte espacial do Sistema de Riccati.

Para obter a parte temporal do sistema de Riccati, vamos derivar (4.3) em relação a t_{2N+1} e usar (4.2), obtemos:

$$\Gamma_{t_{2N+1}} + a\Gamma + \left(\frac{c - b\Gamma^2}{2}\right) = 0, \quad (4.5)$$

As equações (4.4) e (4.5) constituem o sistema de Riccati para a hierarquia KdV. Agora vamos mostra que existe uma transformação $\bar{\Gamma} = F(\Gamma)$, $\bar{v} = G(v, \Gamma)$, que mantém invariante o sistema de Riccati. Introduzindo a transformação

$$\bar{\Gamma} = \lambda - \Gamma, \quad \bar{v} = v - 2\Gamma. \quad (4.6)$$

Observamos que, substituindo (4.6) em (4.4), esta se mantém invariante, ou seja, obtemos o seguinte resultado:

$$\bar{\Gamma}_x + \lambda\bar{\Gamma} - \bar{\Gamma}^2 - \bar{v}_x = 0, \quad (4.7)$$

mostrando que a parte espacial do sistema de Riccati para a equação KdV (4.4) é invariante sob a transformação (4.6).

Mostraremos também que a parte temporal do sistema de Riccati (4.5) é invariante pela transformação (4.6). Vamos primeiramente resgatar os resultados obtidos capítulo anterior para a , b e c dados em (3.5) e (3.6):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\lambda b - b_x), \\ b &= \sum_{i=0}^N R_i \lambda^{2(N-i)}, \\ c &= \frac{1}{2}(\lambda b_x - b_{xx}) - bq. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Uma observação importante aqui é a possibilidade de reescrever as expressões acima em função da varável v , para isso vamos usaremos os resultados obtidos no capítulo anterior em (3.9) e em (3.10):

$$\begin{aligned} R_{i+1,x} &= R_{i,xxx} + 4qR_{i,x} + 2q_x R_i, \\ q_{t_N} &= \frac{1}{4}R_{N,xxx} + qR_{N,x} + \frac{1}{2}q_x R_N, \end{aligned}$$

podemos substituir a primeira equação na segunda para obter:

$$q_{t_{2N+1}} = \frac{R_{N+1,x}}{4},$$

se fizermos a mudança $N = i - 1$, teremos:

$$v_{xt_{2i-1}} = \frac{R_{i,x}}{4} \quad \Rightarrow \quad R_i = 4v_{t_{2i-1}}, \tag{4.9}$$

onde usamos $q = v_x$.

Vamos substituir (4.9) em (4.8), :

$$\begin{aligned}
 b &= \sum_{i=0}^N R_i \lambda^{2(N-i)} = 2\lambda^{2N} + 4 \sum_{i=1}^N (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}), \\
 a &= \lambda^{2N+1} + 2 \sum_{i=1}^N (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1} - v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)}), \\
 c &= -2\lambda^{2N} v_x + 2 \sum_{i=1}^N [v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1} - (v_{xxt_{2i-1}} + 2v_x v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)})], \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

onde usamos $R_0 = 2$. Substituindo a , b e c na parte temporal do sistema de Riccati (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{t_{2N+1}} &+ \Gamma \left[\lambda^{2N+1} + 2 \sum_{i=1}^N (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1} - v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)}) \right] \\
 &- \lambda^{2N} v_x + \sum_{i=1}^N [v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1} - (v_{xxt_{2i-1}} + 2v_x v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)})] \\
 &- \frac{\Gamma^2}{2} \left[2\lambda^{2N} + 4 \sum_{i=1}^N (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}) \right] = 0. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a transformação (4.6) mantém invariante a parte temporal do sistema de Riccati (4.11) para qualquer N .

Para essa demonstração utilizaremos o método da indução matemática. Esse método funciona da seguinte maneira: primeiro se prova que o enunciado é verdadeiro para um valor inicial $N = 1$ por exemplo. E depois mostra que, se o enunciado vale para $N = k$, então o mesmo enunciado vale para $N = k + 1$.

Seguindo esse método, primeiro mostraremos que a invariância é válida para $N = 1$, nesse caso (4.11) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{t_3} &+ \Gamma [\lambda^3 + 2(v_{t_1} \lambda - v_{xt_1})] \\
 &- \lambda^2 v_x + [v_{xt_1} \lambda - (v_{xxt_1} + 2v_x v_{t_1})] \\
 &- \frac{\Gamma^2}{2} [2\lambda^2 + 4(v_{t_1} \lambda)] = 0, \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

e pode ser reescrita como segue:

$$\Gamma_{t_3} + (\lambda^2 \Gamma + v_{xt_1}) (\lambda - \Gamma) + 2\lambda \Gamma v_{t_1} (\Gamma + 1) - \lambda^2 v_x - 2v_x v_{t_1} - v_{xxt_1} = 0.$$

Usando a transformação (4.6), na equação acima, teremos:

$$\begin{aligned} -\bar{\Gamma}_{t_3} &+ [\lambda^2 (\lambda - \bar{\Gamma}) + (\bar{v}_{xt_1} + 2\bar{\Gamma}_{xt_1})] \bar{\Gamma} \\ &+ 2\lambda \bar{\Gamma} (\bar{v}_{t_1} + 2\bar{\Gamma}_{t_1}) (1 - \bar{\Gamma}) - \lambda^2 (\bar{v}_x + 2\bar{\Gamma}_x) \\ &- 2 (\bar{v}_x + 2\bar{\Gamma}_x) (\bar{v}_{t_1} + 2\bar{\Gamma}_{t_1}) - (\bar{v}_{xxt_1} + 2\bar{\Gamma}_{xxt_1}) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

além disso vamos usar a parte espacial do sistema de Riccati (4.7) para obter:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_x &= \lambda \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}^2 + \bar{v}_x, \\ \bar{\Gamma}_{xt} &= \lambda \bar{\Gamma}_t + 2\bar{\Gamma} \bar{\Gamma}_t + \bar{v}_{xt}, \\ \bar{\Gamma}_{xxt} &= \left(6\bar{\Gamma}^2 - 6\lambda \bar{\Gamma} + \lambda^2 + 2\bar{v}_t\right) \bar{\Gamma}_t + 2(\bar{\Gamma} - \lambda) \bar{v}_{xt} + \bar{v}_{xxt}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

substituindo (4.14) em (4.13) e após alguma manipulações, obtemos:

$$\bar{\Gamma}_{t_3} + (\lambda^2 \bar{\Gamma} + \bar{v}_{xt_1}) (\lambda - \bar{\Gamma}) + 2\lambda \bar{\Gamma} \bar{v}_{t_1} (\bar{\Gamma} + 1) - \lambda^2 \bar{v}_x - 2\bar{v}_x \bar{v}_{t_1} - \bar{v}_{xxt_1} = 0,$$

que possui a mesma forma de (4.13). Esse fato mostra que, para $N = 1$, quando substituimos a transformação (4.6) em (4.11) essa equação preservará sua forma com as variáveis $\bar{\Gamma}$ e \bar{v} .

O próximo passo para o método da indução consiste em considerar que (4.11) é invariante sob as transformações (4.6) para um dado valor de N . Fazendo $N = k$ em (4.11)

e supondo que a mesma é invariante, vamos obter:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{t_{2k+1}} &+ \bar{\Gamma} \left[\lambda^{2K+1} + 2 \sum_{i=1}^k (\bar{v}_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+1} - \bar{v}_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)}) \right] \\
&- \lambda^{2k} \bar{v}_x + \sum_{i=1}^k [\bar{v}_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+1} - (\bar{v}_{xxt_{2i-1}} + 2\bar{v}_x \bar{v}_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)})] \\
&- \frac{\bar{\Gamma}^2}{2} \left[2\lambda^{2k} + 4 \sum_{i=1}^k (\bar{v}_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+1}) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Para completar a demonstração vamos provar que (4.11) é invariante sob as transformações (4.6) para $N = k + 1$. Fazendo $N = k + 1$ em (4.11), teremos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t_{2k+3}} &+ \Gamma \left[\lambda^{2k+3} + 2 \sum_{i=1}^{k+1} (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+3} - v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+2}) \right] \\
&- \lambda^{2k+2} v_x + \sum_{i=1}^{k+1} [v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+3} - (v_{xxt_{2i-1}} + 2v_x v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+2})] \\
&- \frac{\Gamma^2}{2} \left[2\lambda^{2k+2} + 4 \sum_{i=1}^{k+1} (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+3}) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

podemos aqui isolar todos os termos com $i = k + 1$ nas somatórias para obter o resultado:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t_{2k+3}} &+ \lambda^2 \Gamma_{t_{2k+1}} + [\lambda v_{xt_{2k+1}} - (v_{xxt_{2k+1}} + 2v_x v_{t_{2k+1}})] \\
&+ 2(\lambda v_{t_{2k+1}} - 2v_{xt_{2k+1}}) \Gamma - 2v_{t_{2k+1}} \Gamma^2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde usamos $\Gamma_{t_{2k+1}}$ de (4.11), com $N = k$.

Usando a transformação (4.6) em (4.17), vamos obter:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{t_{2k+3}} &+ \lambda^2 \bar{\Gamma}_{t_{2k+1}} + [\lambda \bar{v}_{xt_{2k+1}} - (\bar{v}_{xxt_{2k+1}} + 2\bar{v}_x \bar{v}_{t_{2k+1}})] \\
&+ 2(\lambda \bar{v}_{t_{2k+1}} - 2\bar{v}_{xt_{2k+1}}) \bar{\Gamma} - 2\bar{v}_{t_{2k+1}} \bar{\Gamma}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde novamente usamos (4.14).

Substituindo (4.15) em (4.18), teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{t_{2k+3}} &+ \bar{\Gamma} \left[\lambda^{2k+3} + 2 \sum_{i=1}^{k+1} (\bar{v}_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+3} - \bar{v}_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+2}) \right] \\ &- \lambda^{2k+2} \bar{v}_x + \sum_{i=1}^{k+1} [\bar{v}_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+3} - (\bar{v}_{xxt_{2i-1}} + 2\bar{v}_x \bar{v}_{t_{2i-1}}) \lambda^{2(k-i)+2}] \\ &- \frac{\bar{\Gamma} a^2}{2} \left[2\lambda^{2k+2} + 4 \sum_{i=1}^{k+1} (\bar{v}_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+3}) \right] = 0, \end{aligned}$$

observamos que essa equação é semelhante a (4.16) com as variáveis $\bar{\Gamma}$ e \bar{v} , provando que a equação é invariante para $N = k + 1$. Logo, está demonstrado que (4.11) é invariante sob a transformação (4.6) para qualquer valor de N .

4.1.1 Auto-Transformações de Bäcklund para a Hierarquia KdV

Uma vez mostrado que a transformação (4.6) mantém o sistema de Riccati associado à equação KdV invariante, vamos obter as transformações de Bäcklund. Para isso vamos reescrever (4.6) da seguinte forma:

$$\Gamma = \left(\frac{v - \bar{v}}{2} \right), \quad (4.19)$$

substituindo esse resultado na parte espacial do sistema de Riccati (4.4), obtemos:

$$\left(\frac{v - \bar{v}}{2} \right)_x + \lambda \left(\frac{v - \bar{v}}{2} \right) - \left(\frac{v - \bar{v}}{2} \right)^2 - v_x = 0,$$

que resulta em:

$$(v + \bar{v})_x = \lambda(v - \bar{v}) - \left(\frac{v - \bar{v}}{2} \right)^2. \quad (4.20)$$

Substituindo (4.19) na parte temporal do sistema de Riccati (4.5), obtemos:

$$(v - \bar{v})_{t_{N+1}} + a(v - \bar{v}) + c - \frac{b}{4}(v - \bar{v})^2 = 0, \quad (4.21)$$

onde $v_x = q$ e a, b e c são dados em (4.10). As equações (4.20) e (4.21) constituem uma auto-transformação de Bäcklund para a hierarquia KdV.

4.2 O sistema de Riccati para a Hierarquia mKdV

O sistema de Riccati da hierarquia mKdV pode ser obtido substituindo (3.2) em (3.1)

$$\begin{pmatrix} \phi_{1x} \\ \phi_{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & q \\ q & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{1t} \\ \phi_{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Agora, definimos Γ da seguinte forma:

$$\Gamma = -\frac{\phi_2}{\phi_1} \quad (4.24)$$

derivando (4.24) em relação a x e usando (4.22), obtemos:

$$\Gamma_x + \lambda\Gamma + \left(\frac{1 - \Gamma^2}{2}\right)v_x = 0, \quad (4.25)$$

onde introduzimos a variável não local $v_x = q$.

Derivando (4.24) em relação a t_N e usando (4.23), obtemos:

$$\Gamma_{t_N} + a\Gamma + \left(\frac{c - b\Gamma^2}{2}\right) = 0,$$

que também pode ser escrita da forma,

$$\Gamma_{t_N} + a\Gamma + \left(\frac{1 - \Gamma^2}{4}\right)(b + c) - \left(\frac{1 + \Gamma^2}{4}\right)(b - c) = 0 \quad (4.26)$$

As equações (4.25) e (4.26) constituem o sistema de Riccati para a hierarquia mKdV, logo essas equações devem permanecer invariantes sob a transformação de Bäcklund.

A transformação que usaremos será a seguinte:

$$\Gamma = \frac{1}{\bar{\Gamma}}, \quad v = -\bar{v} - 4 \tanh^{-1} \left(\frac{1}{\bar{\Gamma}} \right). \quad (4.27)$$

Observamos que substituindo (4.28) em (4.25) esta se mantém invariante.

Para mostrar que essa transformação mantém invariante a parte espacial do sistema de riccati (4.25), calculamos:

$$\Gamma_x = -\frac{\bar{\Gamma}_x}{\bar{\Gamma}^2}, \quad v_x = -\bar{v}_x - 4 \frac{\bar{\Gamma}_x}{1 - \bar{\Gamma}^2}, \quad (4.28)$$

além disso, faremos as seguintes considerações: Pode-se observar que estamos usando a variável $q(x, t_1, t_2, \dots, t_N)$, pois vimos que

$$q_{t_{2N+1}} = (qR_N)_x - \left(\frac{R_N x}{q} \right)_{xx}.$$

Logo, para cada N teremos uma equação do tipo:

$$\begin{aligned}
 q_{t_0} &= F(q, q_x) \\
 q_{t_1} &= F(q, q_x, q_{xx}, q_{xxx}) \\
 q_{t_2} &= F(q, q_x, q_{xx}, q_{xxx}, q_{xxxx}, q_{xxxxx}) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Vemos que os tempos não se misturam sendo variáveis independentes entre si. Por essa razão podemos escrever o sistema de Riccati em termos das derivadas de $q(x, t_1, t_2, \dots, t_N)$ com respeito a cada t_N . se fizermos a mudança $N = i - 1$, obteremos:

$$v_{xt_{2i-1}} = -\frac{R_{i,x}}{v_x} \Rightarrow R_i = -D_x^{-1}(v_x v_{xt_{2i-1}}) \tag{4.30}$$

Onde introduzimos a variável não local $v_x = q$.

Vemos também que (4.30) pode ser escrita em termos de v_x , da seguinte forma:

$$v_{t_{2N+1}} = (v_x R_N) - \left(\frac{R_{Nx}}{v_x} \right)_x, \tag{4.31}$$

onde integramos com respeito a x .

Agora vamos obter a , b e c em termos da variável v . A partir de (3.19), podemos usar (3.20), (4.30) e (4.31), para escrever:

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{i=0}^N R_i \lambda^{2(N-i)+1} = \lambda^{2N+1} + \sum_{i=1}^N R_i \lambda^{2(N-i)+1} \\
&= \lambda^{2N+1} - \sum_{i=1}^N D_x^{-1}(v_x v_{xt_{2i-1}}) \lambda^{2(N-i)+1} \\
b &= \sum_{i=0}^N \left\{ \left[v_x R_i - \left(\frac{R_{ix}}{v_x} \right)_x \right] \lambda^{2(N-i)} - \left(\frac{R_{ix}}{v_x} \right) \lambda^{2(N-i)+1} \right\} \\
&= \sum_{i=0}^N [v_{t_{2i+1}} \lambda^{2(N-i)} + v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}] \\
c &= \sum_{i=0}^N [v_{t_{2i+1}} \lambda^{2(N-i)} - v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}] \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Substituindo a , b e c na equação de Riccati (4.26), obtemos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t_{2N+1}} &+ \Gamma \left[\lambda^{2N+1} - \sum_{i=1}^N D_x^{-1}(v_x v_{xt_{2i-1}}) \right] \lambda^{2(N-i)+1} \\
&+ \left(\frac{1 - \Gamma^2}{2} \right) \sum_{i=0}^N (v_{t_{2i+1}} \lambda^{2(N-i)}) \\
&- \left(\frac{1 + \Gamma^2}{2} \right) \sum_{i=1}^N (v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}) = 0. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar a invariância da parte temporal do sistema de Riccati (4.33) para qualquer N , sob a transformação mostrada em (4.27). Para esse fim utilizaremos o método da indução matemática mostrando que quando substituirmos a transformação (4.27) em (4.33) essa equação preservará sua forma com as variáveis $\bar{\Gamma}$ e \bar{v} . O método da indução consiste nos seguintes passos: Primeiro consideramos que a equação (4.33) é invariante para $N = 1$, ou seja, quando aplicamos a transformação e fazemos $n=1$ na equação (4.33), vamos obter:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{t_3} &+ \bar{\Gamma} [\lambda^3 - D_x^{-1}(\bar{v}_x \bar{v}_{xt_1})] \lambda \\
&+ \left(\frac{1 - \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=0}^N (\bar{v}_{t_1} \lambda + \bar{v}_{t_3} \lambda^3) \\
&- \left(\frac{1 + \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=1}^N (\bar{v}_{t_1} \lambda^i) = 0.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Depois disso devemos considerar que (4.33), é invariante para um certo valor $N = k$, ou seja:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{t_{2k+1}} &+ \bar{\Gamma} \left[\lambda^{2k+1} - \sum_{i=1}^k D_x^{-1}(\bar{v}_x \bar{v}_{xt_{2i-1}}) \right] \lambda^{2(k-i)+1} \\
&+ \left(\frac{1 - \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=0}^k (\bar{v}_{t_{2i+1}} \lambda^{2k+1}) \\
&- \left(\frac{1 + \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=1}^k (\bar{v}_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

O último passo para essa prova por indução matemática é demonstrar que (4.33), é invariante para um certo valor $n = k + 1$, ou seja, precisamos mostrar que

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{t_{2k+3}} &+ \bar{\Gamma} \left[\lambda^{2k+3} - \sum_{i=1}^{k+1} D_x^{-1}(\bar{v}_x \bar{v}_{xt_{2i-1}}) \right] \lambda^{2(k-i)+3} \\
&+ \left(\frac{1 - \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=0}^{k+1} (\bar{v}_{t_{2i+1}} \lambda^{2k+3}) \\
&- \left(\frac{1 + \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=1}^{k+1} (\bar{v}_{t_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+3}) = 0,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

considerando que (4.35) é válida. Observamos que (4.36) pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{t_{2k+3}} &+ \lambda^2 \bar{\Gamma} \left[\lambda^{2k+1} - \sum_{i=1}^{k+1} D_x^{-1}(\bar{v}_x \bar{v}_{xt_{2i-1}}) \lambda^{2(k-i)+1} \right] \\
 &+ \lambda^2 \left[- \left(\frac{1 + \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=1}^k \bar{v}_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(k-i)+1} + \left(\frac{1 - \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \sum_{i=0}^{k+1} \bar{v}_{t_{2i+1}} \lambda^{2(k-i)} \right] \\
 &+ \lambda^2 \left[- \left(\frac{1 + \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \bar{v}_{xt_{2k+1}} \lambda^{-1} + \bar{\Gamma} D_x^{-1}(\bar{v}_x \bar{v}_{xt_{2k+1}}) \lambda^{-1} \right] \\
 &+ \lambda^2 \left(\frac{1 - \bar{\Gamma}^2}{2} \right) (\bar{v}_{t_{2k+3}} \lambda^{-2}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

aqui podemos usar (4.35), e reescrever a equação acima da forma:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{t_{2k+3}} &- \lambda^2 \bar{\Gamma}_{t_{2k+1}} \\
 &- \lambda \left[\left(\frac{1 + \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \bar{v}_{xt_{2k+1}} + \bar{\Gamma} D_x^{-1}(\bar{v}_x \bar{v}_{xt_{2k+1}}) \right] \\
 &+ \left(\frac{1 - \bar{\Gamma}^2}{2} \right) \bar{v}_{t_{2k+3}} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

demonstrando que a expressão (4.34) se mantém invariante sob a transformação (4.27).

4.2.1 Auto-Transformações de Bäcklund para a Hierarquia mKdV

Vimos também que a transformação (4.27) mantém o sistema de Riccati associado à equação mKdV invariante, vamos obter as transformações de Bäcklund. Para isso vamos reescrever (4.27) da seguinte forma:

$$\Gamma = -\tanh\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right), \tag{4.39}$$

substituindo esse resultado na parte espacial do sistema de Riccati (4.25), obtemos:

$$- \left(\frac{v + \bar{v}}{4} \right)_x \operatorname{sech}^2\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right) - \lambda \tanh\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right) + \frac{1}{2} v_x \operatorname{sech}^2\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right) = 0, \tag{4.40}$$

que resulta em:

$$(v - \bar{v})_x = 2\lambda \sinh\left(\frac{v + \bar{v}}{2}\right). \quad (4.41)$$

Substituindo (4.39) na parte temporal do sistema de Riccati (4.26), obtemos:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right)_{t_{2n+1}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right) - a \left[\operatorname{tanh}\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right)\right] \\ & + \left(\frac{b + c}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right) - \left(\frac{b - c}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tanh}^2\left(\frac{v + \bar{v}}{4}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

que resulta em:

$$\begin{aligned} (v + \bar{v})_{t_{2n+1}} &= (b + c) - (b - c) \cosh\left(\frac{v + \bar{v}}{2}\right) \\ & - 2a \sinh\left(\frac{v + \bar{v}}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde $v_x = q$ e a, b e c são dados em (4.32). As equações (4.41) e (4.42) constituem uma auto-transformação de Bäcklund para a hierarquia mKdV.

Nesse capítulo, mostramos que é possível obter uma transformação de Bäcklund que seja válida para todas as equações que compõem as hierarquias KdV e mKdV. Para isso, a partir do problema de autovalores associado, escrevemos uma forma geral do sistema de Riccati. Como vimos, a equação espacial do sistema de Riccati é única para toda hierarquia, o que permite uma simples demonstração de que ela se mantém invariante. Já para a parte temporal, por ser formada por um conjunto de n equações, necessitamos utilizar o método da indução matemática para demonstrar a invariância. Dessa forma foi possível obter a transformação de Bäcklund associada à hierarquia estudada.

Capítulo 5

Soluções sólitons

Nesse capítulo usaremos as auto transformações de Bäcklund, que foram deduzidas no capítulo anterior, para obter as soluções sólitons e as fórmulas de superposição não lineares de cada hierarquia.

5.1 Hierarquia KdV

Como vimos anteriormente, as soluções podem ser obtidas a partir das auto-transformações de Bäcklund. As equações (4.20) e (4.21) constituem uma auto-transformação de Bäcklund para a hierarquia KdV.

$$(v + \bar{v})_x = \lambda(v - \bar{v}) - \left(\frac{v - \bar{v}}{2}\right)^2.$$

$$(v - \bar{v})_{t_{N+1}} + a(v - \bar{v}) + c - \frac{b}{4}(v - \bar{v})^2 = 0,$$

onde $v_x = q$ e a , b e c são dados em (4.10):

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=0}^N R_i \lambda^{2(N-i)} = 2\lambda^{2N} + 4 \sum_{i=1}^N (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}), \\ a &= \lambda^{2N+1} + 2 \sum_{i=1}^N (v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1} - v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)}), \\ c &= -2\lambda^{2N} v_x + 2 \sum_{i=1}^N [v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1} - (v_{xxt_{2i-1}} + 2v_x v_{t_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)})], \end{aligned}$$

se usarmos a solução trivial da $v = 0$. Teremos então que:

$$\bar{v}_x = -\lambda \bar{v} - \bar{v}^2, \quad (5.1)$$

$$\bar{v}_{t_{N+1}} = -\frac{1}{2} \lambda^{2N} \bar{v}^2 + \lambda^{2N+1} \bar{v}. \quad (5.2)$$

Integrando as equações de acima e após algumas manipulações, obtemos a seguinte solução:

$$\bar{v}(x, t_{2N+1}) = \frac{2\lambda}{e^{-\lambda(x+\lambda^{2N}t_{2N+1})+k} - 1}, \quad (5.3)$$

onde k é uma constante. A solução $\bar{q}(x, t_{2N+1})$, é dada por:

$$\bar{q}(x, t_{2N+1}) = \bar{v}_x = \frac{2\lambda^2 e^{-\lambda(x+\lambda^{2N}t_{2N+1})+k}}{(e^{-\lambda(x+\lambda^{2N}t_{2N+1})+k} - 1)^2}. \quad (5.4)$$

Destacamos que essa solução vale para toda hierarquia KdV, sendo que, cada equação será identificada pelo N-ésimo tempo t_{2N+1} .

As soluções multi-sólitons podem ser obtidas como no capítulo 2, ou seja, a partir de um princípio de superposição não linear que é decorrente do teorema da permutabilidade das transformações de Bäcklund.

Aplicando esse teorema da permutabilidade na parte espacial da transformação de

Bäcklund da hierarquia KdV (4.41), obtemos:

$$\begin{aligned}(v_0 + v_1)_x &= \lambda_1 (v_0 - v_1) - \frac{1}{2} (v_0 + v_1)^2, \\(v_0 + v_2)_x &= \lambda_2 (v_0 - v_2) - \frac{1}{2} (v_0 + v_2)^2, \\(v_1 + v_{12})_x &= \lambda_2 (v_1 - v_{12}) - \frac{1}{2} (v_1 + v_{12})^2, \\(v_2 + v_{12})_x &= \lambda_1 (v_2 - v_{12}) - \frac{1}{2} (v_2 + v_{12})^2,\end{aligned}$$

combinando as equações acima, teremos:

$$v_{12} = v_0 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(v_1 - v_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1) + (v_2 - v_1)}, \quad (5.5)$$

onde v_0 é a solução inicial e podemos escolher $v_0 = 0$. Este é o princípio de superposição não linear de toda hierarquia KdV, visto que, a partir das soluções conhecidas v_0 , v_1 e v_2 , é possível obter uma nova solução por meio dessa expressão algébrica. Em (5.5) podemos substituir as soluções 1-sóliton, v_1 e v_2 , que são dadas por (5.3), ou seja,

$$v_i(x, t_{2N+1}) = \frac{2\lambda}{R_i - 1}, \quad (5.6)$$

onde $R_i = e^{[-\lambda_i(x + \lambda_i^{2N} t_{2N+1}) + k]}$ e $i, j = 1, 2$. Então, (5.5) pode ser escrita na seguinte forma:

$$v_{12}(x, t_{2N+1}) = 2 \frac{(\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_2 R_1 - \lambda_1 R_2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_i - \lambda_j)(R_1 R_2 - 1) - (\lambda_i + \lambda_j)(R_1 - R_2)}. \quad (5.7)$$

Para obter a solução 2-sólitons da equação KdV, vamos usar que $q = v_x$ no resultado acima, então:

$$q_{12}(x, t_{2N+1}) = \left[2 \frac{(\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_2 R_1 - \lambda_1 R_2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_i - \lambda_j)(R_1 R_2 - 1) - (\lambda_i + \lambda_j)(R_1 - R_2)} \right]_x. \quad (5.8)$$

A solução acima vale para toda hierarquia KdV, sendo que, cada equação será identificada pelo N-ésimo tempo t_{2N+1} .

5.2 Hierarquia mKdV

Como vimos anteriormente, as soluções podem ser obtidas a partir das auto-transformações de Bäcklund. como vimos anteriormente, as equações (4.41) e (4.42) constituem uma auto-transformação de Bäcklund para a hierarquia mKdV.

$$(v - \bar{v})_x = 2\lambda \sinh\left(\frac{v + \bar{v}}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} (v + \bar{v})_{t_{2n+1}} &= (b + c) - (b - c) \cosh\left(\frac{v + \bar{v}}{2}\right) \\ &\quad - 2a \sinh\left(\frac{v + \bar{v}}{2}\right), \end{aligned}$$

onde $v_x = q$ e a , b e c são dados em (4.10):

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=0}^N R_i \lambda^{2(N-i)+1} = \lambda^{2N+1} + \sum_{i=1}^N R_i \lambda^{2(N-i)+1} \\ &= \lambda^{2N+1} - \sum_{i=1}^N D_x^{-1}(v_x v_{xt_{2i-1}}) \lambda^{2(N-i)+1} \\ b &= \sum_{i=0}^N \left\{ \left[v_x R_i - \left(\frac{R_{ix}}{v_x} \right)_x \right] \lambda^{2(N-i)} - \left(\frac{R_{ix}}{v_x} \right) \lambda^{2(N-i)+1} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^N [v_{t_{2i+1}} \lambda^{2(N-i)} + v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}] \\ c &= \sum_{i=0}^N [v_{t_{2i+1}} \lambda^{2(N-i)} - v_{xt_{2i-1}} \lambda^{2(N-i)+1}] \end{aligned}$$

se usarmos a solução trivial da $v = 0$. Teremos então que:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= -2\lambda \sinh\left(\frac{\bar{v}}{2}\right), \\ \bar{v}_{t_{2N+1}} &= -2\lambda \sinh\left(\frac{\bar{v}}{2}\right). \end{aligned}$$

Integrando as equações de acima e após algumas manipulações, obtemos a seguinte solução:

$$\bar{v}(x, t_{2N+1}) = 2 \ln \left(\frac{R-1}{R+1} \right), \quad (5.9)$$

onde $R = e^{[-\lambda(x+\lambda^{2N}t_{2N+1})+k]}$. Destacamos que essa solução vale para toda hierarquia mKdV, sendo que, cada equação será identificada pelo N-ésimo tempo t_{2N+1} .

As soluções multi-sólitons podem ser obtidas como no capítulo 2, ou seja, a partir de um princípio de superposição não linear que é decorrente do teorema da permutabilidade das transformações de Bäcklund.

Aplicando o teorema da permutabilidade na parte espacial da transformação de Bäcklund (4.41), obtemos:

$$(v_0 - v_1)_x = 2\lambda_1 \sinh\left(\frac{v_0 + v_1}{2}\right), \quad (5.10)$$

$$(v_0 - v_2)_x = 2\lambda_2 \sinh\left(\frac{v_0 + v_2}{2}\right), \quad (5.11)$$

$$(v_1 - v_{12})_x = 2\lambda_2 \sinh\left(\frac{v_1 + v_{12}}{2}\right), \quad (5.12)$$

$$(v_2 - v_{12})_x = 2\lambda_1 \sinh\left(\frac{v_2 + v_{12}}{2}\right), \quad (5.13)$$

Subtraindo as equações (2.9) e (2.8), bem como subtraindo as equações (2.11) e (2.10), podemos somar os resultados e usar algumas propriedades trigonométricas para obter:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left[\sinh\left(\frac{v_0 - v_{12}}{4}\right) \cosh\left(\frac{v_1 - v_2}{4}\right) + \sinh\left(\frac{v_1 - v_2}{4}\right) \cosh\left(\frac{v_0 - v_{12}}{4}\right) \right] = \\ & = \lambda_2 \left[\sinh\left(\frac{v_0 - v_{12}}{4}\right) \cosh\left(\frac{v_1 - v_2}{4}\right) - \sinh\left(\frac{v_1 - v_2}{4}\right) \cosh\left(\frac{v_0 - v_{12}}{4}\right) \right], \quad (5.14) \end{aligned}$$

Reorganizando, temos:

$$\tanh\left(\frac{v_0 - v_{12}}{4}\right) = - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \tanh\left(\frac{v_1 - v_2}{4}\right)$$

de onde obtemos v_{12} :

$$v_{12} = v_0 + 4 \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \tanh \left(\frac{v_1 - v_2}{4} \right), \quad (5.15)$$

onde v_0 é a solução inicial e podemos escolher $v_0 = 0$. Este é o princípio de superposição não linear de toda hierarquia mKdV, visto que, a partir das soluções conhecidas v_0 , v_1 e v_2 , é possível obter uma nova solução por meio dessa expressão algébrica.

Em (5.15) podemos substituir as soluções 1-sóliton, v_1 e v_2 , que são dadas por (5.9), ou seja,

$$v_i(x, t_{2N+1}) = 2 \ln \left(\frac{R_i - 1}{R_i + 1} \right), \quad (5.16)$$

então a solução 2-sólitons, dada por (5.15), pode ser escrita na seguinte forma:

$$v_{12}(x, t_{2N+1}) = 2 \ln \left(\frac{\lambda_{12}(R_1 - R_2) + R_1 R_2 - 1}{\lambda_{12}(R_2 - R_1) + R_1 R_2 - 1} \right), \quad (5.17)$$

onde $\lambda_{ij} = \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$ e $R_i = e^{[-\lambda_i(x + \lambda_i^{2N} t_{2N+1}) + k]}$ e $i, j = 1, 2$.

Para obter a solução 2-sólitons da hierarquia mKdV basta usar que $q = v_x$ no resultado acima, então:

$$q_{12}(x, t_{2N+1}) = \left[2 \ln \left(\frac{\lambda_{12}(R_1 - R_2) + R_1 R_2 - 1}{\lambda_{12}(R_2 - R_1) + R_1 R_2 - 1} \right) \right]_x. \quad (5.18)$$

A solução acima vale para toda hierarquia KdV, sendo que, cada equação será identificada pelo N-ésimo tempo t_{2N+1} .

A solução 3-sólitons pode ser obtida de forma semelhante usando o princípio da superposição que, nesse caso, pode ser escrito da seguinte forma:

$$v_{123} = v_2 + 4 \tanh^{-1} \left[\lambda_{13} \tanh \left(\frac{v_{12} - v_{23}}{4} \right) \right]. \quad (5.19)$$

Sabendo que v_{12} e v_{23} são duas soluções 2-sólitons, dadas por (5.17) na forma:

$$v_{ij}(x, t_{2N+1}) = 2\ln \left(\frac{\lambda_{ij}(R_i - R_j) + R_i R_j - 1}{\lambda_{ij}(R_j - R_i) + R_i R_j - 1} \right), \quad (5.20)$$

então podemos substituir esse resultado em (5.19), obtendo o seguinte:

$$v_{123} = v_2 + 4 \tanh^{-1} \left[\lambda_{13} \left(\frac{B_{12} - B_{23}}{B_{12} + B_{23}} \right) \right],$$

onde $B_{ij} = \frac{\lambda_{ij}(R_i - R_j) + R_i R_j - 1}{\lambda_{ij}(R_j - R_i) + R_i R_j - 1}$.

Podemos escrever a solução v_{123} em termos da função logarítmica da seguinte forma:

$$v_{123} = 2\ln \left(\frac{R_1 - 1}{R_1 + 1} \right) + 2\ln \left[\frac{\lambda_{13}(B_{12} - B_{23}) + B_{12} + B_{23}}{\lambda_{13}(B_{23} - B_{12}) + B_{12} + B_{23}} \right],$$

logo,

$$v_{123} = 2\ln \left[\left(\frac{R_1 - 1}{R_1 + 1} \right) \frac{\lambda_{13}(B_{12} - B_{23}) + B_{12} + B_{23}}{\lambda_{13}(B_{23} - B_{12}) + B_{12} + B_{23}} \right].$$

Dessa forma, a solução 3-sólitons da hierarquia mKdV, é dada por:

$$q_{123} = \left\{ 2\ln \left[\left(\frac{R_1 - 1}{R_1 + 1} \right) \frac{\lambda_{13}(B_{12} - B_{23}) + B_{12} + B_{23}}{\lambda_{13}(B_{23} - B_{12}) + B_{12} + B_{23}} \right] \right\}_x.$$

A solução acima vale para toda hierarquia mKdV, sendo que, cada equação será identificada pelo N-ésimo tempo t_{2N+1} .

Nesse capítulo usamos as auto transformações de Bäcklund, que foram deduzidas no capítulo anterior, para obter as soluções sólitons e as fórmulas de superposição não lineares de cada hierarquia. Destacamos que as soluções valem para todas equações de cada hierarquia, sendo que, cada equação será identificada pelo N-ésimo tempo t_{2N+1} . As soluções multi-sólitons, que também são válidas para toas equações de cada hierarquia, foram obtidas como no capítulo 2, ou seja, a partir de um princípio de superposição não linear que é decorrente do teorema da permutabilidade das transformações de Bäcklund.

Capítulo 6

Considerações Finais

O estudo das equações diferenciais parciais não lineares que possuem soluções tipo sólitons tem sido um tema de grande relevância e interesse tanto na área da física como na matemática, engenharia, biologia, etc. Pelo fato de não obedecer o princípio de superposição linear, o processo de obtenção de soluções para as equações não lineares se torna mais complicado. Um método usado para obter a solução de equações não lineares é associar a equação não linear de interesse a um sistema linear auxiliar denominado equação de Lax ou "par de Lax".

Na presente tese mostramos que é possível obter uma transformação de Bäcklund que seja válida para todas as equações que compõem as hierarquias KdV e mKdV. Para isso, a partir do problema de autovalores associado, escrevemos uma forma geral do sistema de Riccati, que é formado por um conjunto de n equações, e demonstramos, por indução matemática, que a mesma se mantém invariante sob uma dada transformação. É importante observar que o sistema de Riccati associado à cada equação isoladamente é invariante por uma dada transformação, mas a demonstração dessa propriedade para uma hierarquia inteira é considerada uma contribuição importante para o tema das transformações de Bäcklund.

No capítulo 3 mostramos uma forma sistemática de obtenção das equações da hierarquia. Partindo do problema de autovalores associado, chegamos a uma fórmula de recorrência que nos permite obter todas equações da hierarquia. No capítulo 4, a partir de um par de

Lax geral, ou seja, com a matriz da parte temporal escrita como uma expansão em termos de potências positivas do parâmetro λ , é obtida forma geral do sistema de Riccati para cada hierarquia.

Para obter o par de Lax geral da hierarquia, nós mantemos a matriz da parte espacial inalterada, já que a mesma é comum a todas equações da hierarquia, e escrevemos a matriz da parte temporal como uma expansão em série de potências do parâmetro λ . Dessa forma, podemos obter cada equação a partir do grau mais alto escolhido para a expansão.

Por meio do método da indução matemática, mostramos então, o importante resultado da invariância do sistema de Riccati sob uma transformação proposta. Apresentamos, também, as soluções sóliton para cada hierarquia no capítulo 5,

Temos como perspectivas futuras o estudo das transformações de Bäcklund para outras hierarquias, tais como a hierarquia AKNS, hierarquias mistas [83, 84], modelos supersimétricos [77, 78, 81, 82], bem como estudar a extensão do método à parte negativa das hierarquias [61, 75].

Bibliografia

- [1] P.G. Drazin and R.S. Johnson. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1^a edition, (1989).
- [2] C. Rogers and W. K. Schief. *Bäcklund and Darboux Transformations, Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*. Cambridge University Press, 1^a edition, (2002).
- [3] S.S. Chern and K Tenenblat. Pseudo-spherical surfaces and evolutions equations. *Studies in Applied Mathematics*, 74(1):55–83, (1986).
- [4] R. Beals, M. Rabelo, and K. Tenenblat. Bäcklund transformations and inverse a scattering solutions for some pseudospherical surface equations. *Studies in Applied Mathematics*, 81(2):125–151, (1989).
- [5] N. Kamran and K. Tenenblat. On differential equations describing pseudospherical surfaces. *J. Differential Equations*, 115:75–98, (1995).
- [6] D. Catalano Ferraioli and L. A. De Oliveira Silva. Local isometric immersions of pseudospherical surfaces described by evolution equations in conservation law form. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, V.446:p. 1606–1631, (2016).
- [7] D. Catalano Ferraioli and L. A. De Oliveira Silva. Nontrivial 1-parameter families of zero-curvature representations obtained via symmetry actions. *Journal of Geometry and Physics*, 94:185–198, (2015).
- [8] D. Catalano Ferraioli and L. A. De Oliveira Silva. Second order evolution equations which describe pseudospherical surfaces. *Journal of Differential Equations*, 260:1606–1631, (2016).

-
- [9] V. P. Gomes Neto. Fifth-order evolution equations describing pseudospherical surfaces. *J. Diff. Equ.*, 249:2822–2865, (2010).
- [10] M. Rabelo. On equations which describe pseudospherical surfaces. *Studies in Applied Mathematics*, 81:221–248, (1989).
- [11] R. Sasaki. Soliton equations and pseudo-spherical surfaces. *Nuclear Physics B*, 154(2):343–357, (1979).
- [12] T. Castro Silva and K. Tenenblat. Third order differential equations describing pseudospherical surfaces. *Journal of Differential Equations*, 259(9):4897–4923, (2015).
- [13] M. Wadati and K. Konno. Simple derivation of Backlund transformation from Riccati form of inverse method. *Progress of Theoretical Physics*, 53(6):1652–1656, (1975).
- [14] B. G. Konopelchenko. Elementary Bäcklund transformations, nonlinear superposition principle and solutions of the integrable equations. *Physics Letteres*, 87A(9):445–448, (1982).
- [15] R. Miura ed. *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and their Applications, Lecture notes in mathematics, Vol. 515*. Springer, (1976).
- [16] F. Calogero and A. Degasperis. Elementary Bäcklund transformations, nonlinear superposition formulae and algebraic construction of solutions for the nonlinear evolution equations solvable by the Zakharov-Shabat spectral transform. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 14(1):103–116, (1984).
- [17] H. Wu. On Bäcklund transformations for nonlinear partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 192:151–179, (1995).
- [18] M. Boiti, B. G. Konopelchenko, and F. Pempinelli. Bäcklund transformations via gauge transformations in $2 + 1$ dimensions. *Inverse Problems*, 1(1):33–56, (1985).
- [19] H. H. Chen. General derivation of Bäcklund transformations from inverse scattering problems. *Physical Review Letters*, 33(15):925–928, (1974).

-
- [20] C. R. Gilson, M. Hamanaka, and J. J. C. Nimmo. Bäcklund transformations and the Atiyah–Ward ansatz for non-commutative anti-self-dual Yang–Mills equations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2108):2613–2632, (2009).
- [21] J. J. C. Nimmo and D. G. Crighton. Bäcklund transformations for nonlinear parabolic equations: The general results. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 384(1787):381–401, (1982).
- [22] S. Sakovich A. Sakovich. Solitary wave solutions of the short pulse equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:L361–L367, (2006).
- [23] A. S. Fokas. On a class of physically important integrable equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 87(1-4):145–150, (1995).
- [24] G. L. Lamb Jr. Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations. *Journal of Mathematical Physics*, 15(12):2157–2165, (1974).
- [25] B.G. Konopelchenko. Transformation properties of the integrable evolution equations. *Physics Letters*, 100B(3):254–260, (1981).
- [26] B.G. Konopelchenko. The group structure of Backlund transformations. *Physics Letters*, 74A:189–192, (1979).
- [27] O. H. El-Kalaawy. Bäcklund transformation, auto-Bäcklund transformation and exact solutions for KdV-type equations. *International Journal of Basic and Applied Sciences*, 3(4):466–478, (2014).
- [28] P. T. Campos and K. Tenenblat. Bäcklund transformations for a class of systems of differential equations. *Geometric and Functional Analysis*, 4(3):270–287, (1994).
- [29] T. Chou. Bäcklund transformation of nonlinear evolution equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2(1):87–94, (1985).

- [30] A. Dold and B. Eckmann. *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications (Lecture Notes in Mathematics, 515)*. Springer, 1st edition, (1976).
- [31] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXI:467–490, (1968).
- [32] A. M. Wazwaz. M-component nonlinear evolution equations: multiple soliton solutions. *Physica Scripta*, 81:7pp, (2010).
- [33] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6):240–243, (1965).
- [34] M. Wadati and M. Toda. The exact N-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 32(5), (1972).
- [35] A. R. Chowdhury. An extended Konno-Wadati formalism and some new Bäcklund transformations. *Physica Scripta*, 29:289–292, (1984).
- [36] A. A. Coley et al. *Bäcklund and Darboux Transformations: The Geometry of Solitons*. CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society, (2001).
- [37] M. Wadati. Introduction to solitons. *PRAMANA journal of physics, Indian Academy of Sciences*, 57(5):841–847, (2001).
- [38] A. H. Khater, D. K. Callebaut, W. Malfliet, and E. S. Kamel. Bäcklund transformations and exact solutions for some nonlinear evolution equations in solar magnetostatic models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 140:435–467, (2002).
- [39] A.H. Khater, D.K. Callebaut, and R.S. Ibrahim. Bäcklund transformations and Painlevé analysis: exact solutions for the nonlinear isothermal magnetostatic atmospheres. *Physics of Plasmas*, 4:2853, (1997).
- [40] K. Konno, W. Kameyama, and H. Sanuki. Effect of weak dislocation potential on nonlinear propagation in anharmonic crystal. *Journal of the Physical Society of Japan*, 37(1):171–176, (1974).

-
- [41] A. C. Scott, F. Y. F. CHU, and D. W. McLaughli. The Soliton: A new concept in applied science. *Proceedings of the IEEE*, 61(10):1443–1483, (1973).
- [42] E. M. do Nascimento, D. S. de Vasconcelos, J. F. M. Rocha, and A. Ribeiro Filho. Sistemas incomensuráveis e a equação de seno-gordon. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 20(1):12–18, (1998).
- [43] A. C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1^a edition, (1985).
- [44] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. Nonlinear-evolution equations of physical significance. *Physical Review Letters*, 31(2):125–127, (1973).
- [45] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Korteweg-de vries equation and generalization. vi. methods for exact solution. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 27:97–133, (1974).
- [46] M. Wadati, H. Sanuki, and K. Konno. Relationships among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation laws. *Progress of Theoretical Physics*, 53(2):419–436, (1975).
- [47] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. The inverse scattering transform-fourier analysis for nonlinear problems. *Studies in Applied Mathematics*, 53(4):249–315, (1974).
- [48] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 1 edition, (2003).
- [49] R. Beals and R. Coifman. Scattering and inverse scattering for first order systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37:39–90, (1984).
- [50] R. Beals and R. Coifman. Scattering and inverse scattering for first order systems II. *Inverse Problems*, 3:577–593, (1987).
- [51] F. Calogero and A. Degasperis. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform - i. *Nuovo Cimento*, 32B(2):201, (1976).

-
- [52] H. H. Chen, Y. C. Lee, and C. S. Liu. Integrability of nonlinear hamiltonian systems by inverse scattering method. *Physica Scripta*, 20(3-4):490–492, (1979).
- [53] M. Marvan. Scalar second-order evolution equations possessing an irreducible sl_2 valued zero-curvature representation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(44):9431–9439, (2002).
- [54] M. Marvan. On the spectral parameter problem. *Acta Applicandae Mathematicae*, 109(44):239–255, (2010).
- [55] A. Das. *Integrable Models*. Word Scientific, 1^a edition, (1989).
- [56] L. Debnath. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhauser, 1^a edition, (1997).
- [57] M. Remoissenet. *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*. Springer, second revised and enlarged edition edition, (2013).
- [58] E. Infield and G. Rowlands. *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Cambridge University Press, 1^a edition, (1990).
- [59] J. L. Cardoso Jr. Sólitons. *Revista Brasileira de Física*, 10(3):695–716, (1980).
- [60] C. H. GU and H. HU. A unified explicit form of bäcklund transformations for generalized hierarchies of kdv equations. *Letters in Mathematical Physics*, 11:325–335, (1986).
- [61] C. H. GU. On the bäcklund transformations for the generalized hierarchies of compound mkdv-sg equations. *Letters in Mathematical Physics*, 12:31–41, (1986).
- [62] S. S. Chern and C. Peng. Lie groups and KdV equations. *Manuscripta Mathematica*, 28(1-3):207–217, (1979).
- [63] J. F. Gomes, A. L. Retore, N. I. Spano, and A. H. Zimerman. Backlund transformation for integrable hierarchies: example - mKdV hierarchy. *Journal of Physics Conference Series*, 597(1), (2015).

-
- [64] J. F. Gomes, A. L. Retore, and A. H. Zimerman. Miura and generalized Bäcklund transformation for KdV hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49:19pp, (2016).
- [65] J. F. Gomes, A. L. Retore, and A. H. Zimerman. Construction of type-ii Bäcklund transformation for the mKdV hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48, (2015).
- [66] S. Carillo and C. Schiebold. Noncommutative Korteweg-de Vries and modified Korteweg-de Vries hierarchies via recursion methods. *Journal of Mathematical Physics*, 50:073510, (2009).
- [67] S. Carillo and C. Schiebold. Matrix Korteweg-de Vries and modified Korteweg-de Vries hierarchies: Noncommutative soliton solutions. *Journal of Mathematical Physics*, 52(5):053507, (2011).
- [68] S. Carrilo. A novel Bäcklund invariance of a nonlinear differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 252(2):828–839, (2000).
- [69] G. C. Santos. Integrability of the 2-d non-linear Schroedinger equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 58(8):2609–2611, (1989).
- [70] L. Chau, J. C. Shaw, and H. C. Yen. An alternative explicit construction of N-soliton solutions in 1+1 dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 32(7):1737–1743, (1991).
- [71] M. Crampin, F. A. E. Pirani, and D. C. Robinson. The soliton connection. *Letters in Mathematical Physics*, 2(1):15–19, (1977).
- [72] J.F. Gomes, L. A. Ferreira, J. L. Miramontes, and J. S. Guillén. Tau-functions and dressing transformations for zero-curvature affine integrable equations. *Journal of Mathematical Physics*, 38(882):630–637, (1997).
- [73] A. Karasu-Kalkanl, A. Karasu, A. Sakovich, S. Sakovich, and R. Turhan. A new integrable generalization of the Korteweg–de Vries equation. *Journal of Mathematical Physics*, 49, (2008).

- [74] R. Camassa and D. D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Physical Review Letters*, 71(11):1661–1664, (1993).
- [75] J. F. Gomes, G. Starvaggi França, G. R. de Melo, and A. H. Zimerman. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, pages 105–110, (2009).
- [76] B. J. S. Pomponet Filho, L. A. de O. Silva, and G. R. de Melo. Self-Bäcklund transformation for mKdV and KdV hierarchies and their superposition formulas. (*a ser publicado*), (2019).
- [77] H. Aratyn, J. F. Gomes, and A. H. Zimerman. On negative flows of the akns hierarchy and a class of deformations of a bihamiltonian structure of hydrodynamic type. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(5):1099–1114, (2006).
- [78] H. Aratyn, J. F. Gomes, G. M. de Castro, M. B. Silka, and A. H. Zimerman. Supersymmetry for integrable hierarchies on loop superalgebras. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(42):9341–9357, (2005).
- [79] R. Beals and K. Tenenblat. *An intrinsic generalization for the wave and sine-Gordon equations*. B. Lawson et al (editors) *Differential Geometry, Pitman Monog. and Surv.*, (1991).
- [80] G. C. Santos. Application of finite expansion in elliptic functions to solve differential equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, 58(12):4301–4309, (1989).
- [81] H. Aratyn, J.F. Gomes, and A.H. Zimerman. Supersymmetry and the KdV equations for integrable hierarchies with a half-integer gradation. *Nuclear Physics B*, 676:537–571, (2004).
- [82] J.F. Gomes, L.H. Ymai, and A.H. Zimerman. Soliton solutions for the super mKdV and sinh-Gordon hierarchy. *Physics Letters A*, 359:630–637, (2006).
- [83] J. F. Gomes, G. R. de Melo, and A. H. Zimerman. A class of mixed integrable models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(27):275208, (2009).

-
- [84] R. Zhou. Mixed hierarchy of soliton equations. *Journal of Mathematical Physics*, 50(12):123502, (2009).