



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**UM ESTUDO DE ESTADOS QUÂNTICOS DE
INTERESSE À INFORMAÇÃO QUÂNTICA
ATRAVÉS DA FUNÇÃO DE WIGNER: UM
TRATAMENTO VIA DINÂMICA DE CAMPOS
TÉRMICOS.**

Oswaldo Luiz Vianna Rocha

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

UM ESTUDO DE ESTADOS QUÂNTICOS DE
INTERESSE À INFORMAÇÃO QUÂNTICA
ATRAVÉS DA FUNÇÃO DE WIGNER: UM
TRATAMENTO VIA DINÂMICA DE CAMPOS
TÉRMICOS.

Oswaldo Luiz Vianna Rocha

Orientador: Prof. Dr. José David Manguiera Vianna

Tese apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal da Bahia para a
obtenção do título de Doutor em Física.

- 2016

Rocha, Osvaldo Luiz Vianna

Um Estudo de Estados Quânticos de Interesse à Informação Quântica Através da Função de Wigner: Um Tratamento Via Dinâmica de Campos Térmicos. /Osvaldo Luiz Vianna Rocha. – 2016.

216 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. José David Manguiera Vianna.

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física, 2016.

1.Dinâmica de Campos Térmicos 2. Informação Quântica 3. Função de Wigner. I. Vianna, José David M. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física. IV. Título.

CDD - 530.12

CDU - 530.145

Dedico esta Tese
às mulheres da minha vida,
minha mãe, minhas avós e minha esposa.

Agradecimentos

Agradecer é entender que nada se constrói sozinho, e que só se faz algo importante em comunhão. Entender que o caminho até aqui não foi fácil, e que nos momentos mais difíceis conheci os melhores.

Agradecer ao meu Deus pela força que sempre me deu, a fim de buscar o melhor para mim e minha família, não permitindo que o caminho fosse desviado.

Agradeço, em forma de grande admiração, ao Prof. José David M. Vianna por todos os ensinamentos ao longo desses 7 anos de convívio, exemplo de profissionalismo e dedicação ao que faz; e à Professora Graça, por prover todo apoio e incentivo que se pode dar a um estudante, vocês são exemplos que seguirei.

À minha amada e querida mãe, que me ensinou em todos os nossos momentos compartilhados, que nada é mais prazeroso do que ser guerreiro, te dar orgulho me faz feliz.

À minha amada esposa Bianca por todo carinho, união e amor, como é bom estar ao seu lado minha princesa.

Agradecer aos homens da minha vida, meu pai (il mio consigliere) por todos os ensinamentos que recebi diante das diversas situações da vida. Ao meu irmão, amigo, sangue do meu sangue, Bernardo, do qual tenho muito orgulho, dou minha vida por você, Força e Honra.

Aos meus familiares pelo convívio e admiração, Nazaré, Fátima, Nena, Bruno, Dimas, Sr. Zevaldo, D. Auristela, Vana e Eduardo Braga, Chris e Alexandre Fraga, Dai e Murat Yukisellir, Lipe, Lara e Gui.

Gratidão ao casal de amigos Ricardo Macêdo e Edite Muniz, que lá atrás me mostraram um possível caminho, com a paciência e carinho de grandiosos educadores que são.

Agradecer aos irmãos que a vida me deu, Tiagão B. Lôra, João Popó, Lucas Lubi, Tanaka, Eider Foguinho, Thiala, Jorge Gitirana, Rodrigão, assim como a toda família do Jiu-Jitsu ZMT, acredite que sem vocês nada disso seria possível.

Aos meus amigos do IF-UFBA, Vinícius Ani, João Cláudio, Leandro Cerqueira, muito obrigado pelo empenho em ajudar a qualquer momento.

Agradeço aqueles que não mais estão presentes, mas que durante a passagem por minha vida sempre me dedicaram todo amor e respeito, minha vó Abigail, minha vó Terezinha, meu avô Luiz, meu tio Toinho e meu padrinho João, obrigado.

Todos os verdadeiros sabem o quanto sou grato, mesmo o seu nome não estando aqui, você sabe!

"Ainda que um exército se acampe contra mim,
o meu coração não temerá; ainda que a guerra
se levante contra mim, estarei confiante"Sl, 27.3.
O General de Guerra é por mim.

Resumo

Este trabalho versa sobre o estudo de estados quânticos sob influência da temperatura em que, para tal análise utilizamos elementos matemáticos da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) assim como o formalismo de Wigner da mecânica quântica no espaço de fase. Em um primeiro momento investigamos os efeitos da temperatura sobre estados quânticos emaranhados do tipo Bell, cuja realização física está associada à representação duplo-trilho de Chuang-Yamamoto. Foi contruído um estado termalizado com base no formalismo da DCT, e determinados o Operador Densidade, o Fator de Mandel, a Fidelidade Quântica e a função de Wigner a fim de definir faixas de temperaturas adequadas a realização das portas lógicas quânticas sobre o estado de interesse. Observando que a representação duplo-trilho tem sido proposta na literatura para implementação de um computador quântico, nossos resultados podem ser úteis nesse contexto. Na segunda parte deste trabalho, fizemos um estudo dos efeitos da temperatura sobre um estado de superposição $|\alpha_n\rangle$, composto de estados coerentes $|\alpha\rangle$ e estados de Fock $|n\rangle$. No protocolo de termalização escolhemos fazer a duplicação da maneira mais geral, i.é, duplicamos os graus de liberdade do sistema através do produto tensorial do estado por seu dual $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}_n\rangle$. O estudo do citado estado de superposição visa a determinação de faixas de temperatura nas quais o estado mantém as propriedades características de sistemas quânticos, uma vez que o estado em estudo é utilizado no escopo da Ótica Quântica. Para a determinação do comportamento do estado sob efeito da temperatura, utilizamos o operador Densidade e a função de quase probabilidade de Wigner. Casos particulares da superposição são apresentados.

Abstract

This work is about the study of quantum states under temperature influence. The chosen quantum states are important to Quantum Computation and Quantum Optics, and for this analysis, we use mathematical elements of the Thermal Fields Dynamics (TFD) as well as the Wigner formalism of Quantum Mechanics in Phase Space. First we investigate the temperature effects on Bell states, whose physical realization is associated to the double-rail representation of Chuang-Yamamoto; in this part a thermos quantum state is built based on the formalism of the TFD, and we determine the Density Operator, Mandel Factor, Quantum Fidelity and the Wigner Function in order to obtain the appropriate temperatures to realization of quantum logic gates . In the second part of this work , we study the temperatures effects over a superposition state $|\alpha_n\rangle$ composed by coherent states $|\alpha\rangle$ and Fock states $|n\rangle$. We choose to duplicate the Hilbert space the more general procedure, that is , we double the freedom degrees of the system by considering the tensorial product of the state $|\alpha_n\rangle$ by its dual state $|\tilde{\alpha}_n\rangle$, i. e. $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}_n\rangle$. Since the state in study is used in the scope of Quantum Optics we determine the temperature ranges for which the quantum proprieties of a system by them described are maintained. The analysis and determination of the behavior of this state for different values of n and temperature are realized by using the Density Operator and Wigner's function.

Conteúdo

Lista de Tabelas	iii
Lista de Figuras	iv
1 Introdução	1
2 Formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos	9
2.1 Introdução ao formalismo da DCT	9
2.2 Osciladores Bosônicos	13
2.2.1 Termalização de osciladores bosônicos via transformação de Bogoliubov	16
2.2.2 Operadores termalizados para bósons	18
2.3 Osciladores fermiônicos	21
2.3.1 Operadores termalizados para férmions	23
2.4 Operador Densidade	25
3 Formalismo da Função de Wigner	29
3.1 Definição da Função de Wigner	30
3.2 Propriedades da Função de Wigner	34
4 Dinâmica de Campos Térmicos aplicada a estados de Bell.	38
4.1 Estado de Bell termalizado	39
4.2 Cálculo do Operador Densidade	40
4.3 Obtenção da Fidelidade Quântica	48
4.4 Fator de Mandel	59
4.5 Função de Wigner para o estado de Bell Termalizado $ \psi(\beta)\rangle$	68
4.6 Determinação da faixa de temperatura para atuação de portas lógicas sobre o estado $ \psi(\beta)\rangle$	81
5 Estudo da termalização do estado $\alpha_n\rangle = \alpha\rangle + n\rangle$, via Dinâmica de Campos Térmicos	85
5.1 Termalização do estado $ \alpha_n\rangle = \alpha\rangle + n\rangle$	85

5.1.1	Preliminares	85
5.1.2	Obtenção do Operador Densidade para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle$. . .	87
5.1.3	Valor esperado do operador \hat{A} no estado $ \alpha_n(\beta)\rangle$	91
6	Cálculo da Função de Wigner para a Superposição de Estados Coerente e Número Termalizados	125
6.1	Cálculo da distribuição de probabilidade de Wigner para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle$	126
7	Resultados para o estado de superposição termalizado	176
7.1	Função de Wigner para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle$ com $n=0$ e $T=\{1K, 10K, 30K, 300K\}$	177
7.2	Função de Wigner para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle$ com $n=1$ e $T=\{1K, 10K, 30K, 300K\}$	181
7.3	Função de Wigner para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle$ com $n=3$ e $T=\{1K, 10K, 30K, 300K\}$	184
8	Conclusões e Perspectivas	189
	Bibliografia	194

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

4.1	Fidelidade Quântica	59
4.2	Fator de Mandel	67
4.3	Função de Wigner para o estado $ \psi(\beta)\rangle$ para dois valores de $\bar{n}(\beta)$: (a) 0,18 and (b) 0,25.	80
4.4	Função de Wigner para o estado $ \psi(\beta)\rangle$ para $\bar{n}(\beta) = 0, 3$	80
4.5	Fidelidade Quântica	81
4.6	Fator de Mandel	82
4.7	Função de Wigner para o estado $ \psi(\beta)\rangle$ para dois valores de $\bar{n}(\beta)$: (a) 0,18 and (b) 0,25.	82
4.8	Função de Wigner para o estado $ \psi(\beta)\rangle$ para $\bar{n}(\beta) = 0, 3$	82
4.9	Tabela de valores de Fidelidade, fator de Mandel e função de Wigner em função de $\bar{n}(\beta)$	83
7.1	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ para $n=0$ e temperatura de 1 K.	177
7.2	Gráfico da parcela $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k',\beta}$ para $T=1K$	178
7.3	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ para $n=0$ e temperatura de 10K.	179
7.4	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ para $n=0$ e temperatura de 30K.	179
7.5	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=0$ e temperatura de 300K.	180
7.6	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 1K.	181
7.7	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 10K.	182
7.8	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 30K.	182
7.9	Parcela $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k',\beta}$ para $T=300K$	183
7.10	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 300K.	184
7.11	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=3$ e temperatura de 1K.	185
7.12	Parcela $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,n,n,\beta}(q, p)$ $n=3$ com temperatura de 1K.	185
7.13	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=3$ e temperatura de 10K.	186
7.14	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=3$ e temperatura de 30K.	186
7.15	Função de Wigner $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=3$ e temperatura de 300K.	187
7.16	Parcela $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,n,n,\beta}(q, p)$ $n=3$ com temperatura de 300K.	187
7.17	Parcela $W_{ \alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',n,k',\beta}(q, p)$ $n=3$ com temperatura de 300K.	188

Capítulo 1

Introdução

Em teoria da Informação Quântica os estados quânticos são os entes físicos detentores de toda a informação do sistema [1]. A escolha do estado a se trabalhar assim como a capacidade de preservar certas características quânticas intrínsecas ao sistema constituem um desafio à teoria, haja vista que o sistema sempre estará suscetível à perturbações externas do meio como, por exemplo, a variação da temperatura.

Hoje no campo da informação quântica é uma necessidade real o estudo dos efeitos térmicos sobre estados de interesse, uma vez que o estudo desses entes nos leva à possibilidade de criar estratégias que visem a proteção dos sistemas e com isso a manutenção das propriedades que possibilitam ações no mundo quântico.

Neste trabalho assumiremos a temperatura como fator externo de influência sobre o sistema, idealizado pelo contato com um banho térmico. Estudaremos estratégias de proteção a dois estados de interesse à informação quântica: o estado de Bell na representação duplo-trilho, e o estado de superposição entre estados coerentes e estado de Fock. Em ambos os casos será necessário realizar a construção de um estado que seja função de temperatura; uma forma de avaliar as consequências da temperatura sobre os sistemas quânticos que adotaremos é a Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), que tem como uma de suas características a duplicação do espaço de Hilbert original do sistema, de modo a estabelecer uma igualdade entre médias de

um observável via mecânica estatística do equilíbrio e via mecânica quântica usual no espaço de Hilbert [2].

A estratégia que visa a análise das propriedades quânticas dos sistemas será a do mapeamento das regiões de classicalidade e não-classicalidade associadas ao formalismo da função de quasi probabilidade de Wigner. O modelo teórico proposto por Wigner [3] atraiu a atenção de pesquisadores das mais variadas áreas da Física, tais como matéria condensada, física de plasma, computação quântica e ainda geometria não-comutativa; tal função tem como principal característica a admisão de valores negativos e por esse motivo, é chamada função de quase probabilidade [4]. Os valores negativos da Função de Wigner estão associados à possibilidade dos sistemas apresentarem fatos quânticos enquanto os valores positivos da função de Wigner estão relacionados a fatos clássicos sendo assim possível identificar como a temperatura influencia na determinação de tais regiões características o que constitui o objetivo central deste trabalho.

Iniciaremos estudando o estado de Bell, que tem como propriedade o emaranhamento quântico, sendo esse um dos principais recursos no processamento da informação quântica [1]; fenômenos tais como o teletransporte quântico e a criptografia quântica estão alicerçados na não separabilidade dos estados quânticos de sistemas compostos. A temperatura pode afetar estados emaranhados, em consequência o estado final de um sistema com essa propriedade, colocado em um banho térmico, pode muito diferir do estado inicial não-térmico, alterando assim as propriedades não clássicas do sistema tais como fator de Mandel e Fidelidade Quântica [2]. A visão de emaranhamento como um recurso computacional tem motivado o crescente interesse no estudo de estados emaranhados, tanto do ponto de vista experimental como do ponto de vista teórico. Neste contexto, Chuang e Yamamoto [1] introduziram o conceito de representação duplo-trilho a fim de descrever um computador quântico usando um meio Kerr não-linear. Para a implementação de um computador quântico há necessidade de representar os q-bits, assim como determinar a existência de uma

família de transformações unitárias¹, obter a preparação correta dos estados iniciais dos q-bits e a medida do estado final destes. Existem na literatura [5, 6] diversos exemplos de modelos físicos para computadores quânticos sendo alguns realizáveis e outros não. Chuang e Yamamoto, usando em lugar de uma cavidade contendo uma superposição de zero e um fóton de energia $\hbar\omega$ que resulta no estado de um q-bit $C_0|0\rangle + C_1|1\rangle$, consideraram duas cavidades com energia total $\hbar\omega$ e dois estados de um q-bit correspondendo nessa representação à possibilidade de ter ou um fóton em uma das cavidades dando lugar ao estado $|01\rangle$, ou um fóton na outra cavidade dando origem ao estado $|10\rangle$, o que resulta no estado físico superposição $C_0|01\rangle + C_1|10\rangle$; a essa construção dá-se o nome de representação duplo-trilho. Com essa representação, usando dois estados duplo-trilho, foi demonstrado ser possível construir uma porta lógica quântica CNOT² a partir de um meio Kerr e operações de um q-bit obtidas com divisores de feixes e deslocadores de fase [1]. Esse fato, associado ao aparato experimental realizável capaz de permitir a obtenção de fótons isolados para estado inicial e sua detecção para leitura indica que, em princípio, um computador quântico com esses dispositivos pode ser construído. É dentro deste contexto que ocorreu a motivação de estudarmos como a temperatura pode influenciar estados emaranhados do tipo Bell na representação duplo-trilho, tendo escolhido para esse objetivo o estado lógico $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_L + |11\rangle_L)$ que, na representação duplo-trilho, resulta em $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0101\rangle + |1010\rangle]$. A importância dos estados emaranhados é sabidamente reconhecida na teoria de informação quântica por serem esses estados eficazes no processamento da informação. Com efeito, alguns destes processos requerem que as partes do sistema em questão estejam com um alto grau de correlação, ou seja, que os estados do sistema estejam maximamente emaranhados, sendo esse o caso dos estados do tipo Bell. Os estudos envolvendo esses estados na representação duplo-trilho, que tem forte interesse experimental e teórico, não foram ainda realizados em sua

¹Denomina-se portas lógicas

²Do inglês Controlled Not

completicidade sendo o efeito de temperatura um dos aspectos a serem analisados.

Como objetivos deste trabalho no que diz respeito ao estudo da termalização do estado de Bell usando a DCT, estão obter o estado termalizado, definir o operador densidade, fazer o estudo da fidelidade quântica e do fator de Mandel como função da temperatura, além de determinar as faixas térmicas para as quais a função de Wigner mantém-se negativa. A partir desses resultados buscaremos definir qual a faixa térmica ideal para a realização das portas lógicas quânticas sobre o estado de Bell termalizado.

Neste trabalho trataremos, em um segundo momento, do estudo da superposição entre o estado corente e o estado de Fock, estados amplamente utilizados na Ótica Quântica [7][8]. Os fenômenos óticos, conhecidos até meados da década de 50 do século passado, tais como, o efeito Compton [9], o efeito fotoelétrico [10], o deslocamento Lamb [11], podiam ser explicados utilizando a descrição clássica da luz. Um ponto a destacar no escopo da descrição clássica da natureza da luz deu-se na realização de experimentos de medida de correlação, realizados por Hanbury Brown e Twiss (HBT). O fenômeno HBT foi observado quando os cientistas construíam um interferômetro de intensidade com o intuito de determinar o diâmetro angular de estrelas [12]. Quando o aparato experimental foi testado, utilizou-se uma luz de baixa intensidade (proviniente de um arco de mercúrio), que ao passar por um espelho semitransparente dividiu a luz em duas componentes; após a divisão as componentes foram detectadas separadamente. Hanbury e Twiss notaram que o tempo de chegada dos fótons estava correlacionados, i.é, os fótons foram detectados simultaneamente por detectores separados[13]. A resposta para esse efeito veio da contribuição do físico Belga, Léon Rosenfeld [12], levando Twiss a expressar que a explicação mais plausível para o fenômeno era devido aos efeitos das flutuações do campo eletromagnético clássico, ou seja, seria possível através da descrição de Maxwell, assumir que diferentes pontos do campo eletromagnético estivessem correlacionados [13]; o efeito HBT é também conhecido como agrupamento de fótons [14].

Com o advento do laser em 1960, uma fonte de luz radicalmente nova, iniciou uma série de trabalhos sobre a interação da matéria com o campo eletromagnético [12]. Diante dessa nova fonte de luz, que apresentava características próprias tais como, monocromaticidade, alta intensidade, mínima dispersão e a coerência; o físico norte-americano Roy J. Glauber (prêmio Nobel 2005), tinha como objetivo principal apresentar uma descrição consistente para a teoria quântica da coerência do laser, levantando o seguinte questionamento: "Como os resultados de HBT e o aspecto de completa coerência da luz laser poderiam ser incorporados em uma estrutura estritamente quântica"[15]. Na sua construção teórica, Glauber consolidou a ideia de que os autoestados quânticos de um campo de radiação são exatamente os autoestados do operador de aniquilação dos quanta do campo eletromagnético (fótons) [7]. Glauber mostrou que existe uma classe de estados que podem ser obtidos pela atuação de um operador deslocamento sobre o vácuo do campo eletromagnético livre; ainda, através de suas análises, foi possível entender que essas definições estão em equivalência com os estados de incerteza mínima descobertos por Schrödinger [16]. Esses estados quânticos foram denominados por Glauber, de Estados Coerentes; tais estados são hoje de grande uso na área da Ótica Quântica. As particularidades da luz laser torna a teoria quântica para a luz indispensável, dado o surgimento de novos fenômenos e resultados [17].

Em 1974 J. Clauser, construiu o primeiro experimento que evidenciou a necessidade de uma abordagem quântica para luz [18]. O seu objetivo era confrontar experimentalmente a predição da teoria quântica de campos com a teoria clássica de campos para o caso do efeito fotoelétrico[17]. Uma cascata atômica foi utilizada como fonte de luz, pares de fótons atravessavam um espelho semitransparente e eram posteriormente detectados. Clássicamente, esperava-se que o resultado fosse positivo quanto as taxas de coincidências de detecção, enquanto que a predição quântica dizia o contrário. Após as análises dos dados experimentais, Clauser não observou tais taxas de coincidências e concluiu que é necessária a quantização do campo eletromagnético

para o efeito fotoelétrico [12].

Novos fenômenos foram observados, como por exemplo, o anti-agrupamento de fótons, que é o primeiro efeito ótico não-clássico, obtido por Kimble, Dagenais e Mandel [19], em 1977. Utilizou-se para a realização desse experimento, uma fonte de luz atenuada (florescente) predita teoricamente em 1975 [14], por Carmichael e Walls, constatando que para esse tipo de luz a probabilidade de detecção de um segundo fóton após a detecção do primeiro era menor, quando comparado aos valores de detecção obtidos quando da utilização da luz laser para esse mesmo experimento. O efeito foi denominado de anti-agrupamento de fótons, contrário ao agrupamento de fótons no efeito HBT. Esse novo fenômeno é uma assinatura do comportamento quântico da luz. Um fato interessante é que o anti-agrupamento implica que uma certa função de probabilidade deva assumir valores negativos. O efeito do anti-agrupamento de fótons inaugurou uma nova era na Ótica [17].

Um segundo efeito não-clássico observado foi a estatística sub-Poissoniana, considerando que $\Delta\hat{n}^2 = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2$ dá a flutuação do número de fótons no sistema [2]. Para a luz coerente produzida por lasers, essa flutuação iguala-se ao valor esperado, ou seja, o laser não tem dispersão de fótons $\Delta\hat{n}^2 = \langle\hat{n}\rangle$; como a luz coerente obedece a uma estatística de Poisson, diz-se que a estatística é Poissoniana. A luz comum (térmica) apresenta a flutuação do número de fótons $\Delta\hat{n}^2$ maior do que o valor esperado de fótons $\langle\hat{n}\rangle$, i.e, $\Delta\hat{n}^2 > \langle\hat{n}\rangle$, sendo assim define-se para esse caso uma estatística superior à de Poisson; diz-se então que a luz comum tem estatística super-Poissoniana. Para a luz de baixa intensidade (florescente) predita por Carmichael e Walls, que apresentou o efeito de anti-agrupamento, a flutuação do número de fótons é menor do que o valor esperado do número de fótons naquele estado ($\Delta\hat{n}^2 < \langle\hat{n}\rangle$), os feixes luminosos com esse comportamento apresentam estatística abaixo dos valores previstos para o laser. Sendo assim, diz-se tratar de uma estatística sub-Poissoniana [17]. Assim como no anti-agrupamento de fótons, a estatística sub-Poissoniana requer que uma certa função de probabilidade assumam valores negativos. Na contramão dessa

tendência estão os estados de Fock, em que a flutuação do número de fótons é nula, uma vez que não há dúvidas quanto ao número de partículas no sistema.

Outros fenômenos óticos foram observados e explicados dentro de uma abordagem quântica, tais como: a luz comprimida, a inibição de foto-contagem, colapso e resurgimento de oscilações, espalhamento da matéria por campos luminosos[17]. Alguns desses fatos trazem uma marca em comum: uma função de probabilidade admitir valores negativos. Entender como os estados quânticos de interesse na Ótica Quântica, tais como, os estados coerentes e o estado de Fock e sua superposição se comportam sob efeito de temperatura, faz parte dos temas importantes para o desenvolvimento da área.

Faremos um estudo do estado de superposição para estados coerentes e estados de Fock sob efeito da temperatura; para tal construiremos o estado térmico via DCT, e obteremos o operador densidade. Nosso estudo analisa o comportamento de sistemas descritos pela superposição para diferentes faixas de influência térmica e de população de fótons, buscando através da obtenção da função de Wigner estabelecer as regiões para os quais o sistema se mantém com características quânticas, i.e, com valores negativos da função de Wigner[4]. Uma vez estabelecida tais regiões, buscaremos discutir quais as contribuições de cada tipo de estado para determinado arranjo, de maneira que possamos determinar como cada tipo de estado influenciou no comportamento do sistema.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 2, realizaremos uma introdução à Dinâmica de Campos Térmicos, descrevendo os sistemas de osciladores fermiônicos e bosônicos com as respectivas transformações de Bogoliubov e operadores térmicos associados.

No Capítulo 3, serão introduzidos os conceitos básicos acerca do formalismo da função de Wigner tais como sua definição e as principais propriedades características da função.

O Capítulo 4 está destinado à apresentação e análise dos resultados referentes

ao estado de Bell na representação duplo-trilho, onde explicitaremos os cálculos referentes à obtenção dos entes necessários à análise do efeito da temperatura sobre o sistema quântico; obteremos então o operador densidade associada ao estado termalizado, bem como a fidelidade quântica em função da temperatura. Apresentaremos o fator de Mandel, determinando o grau de não-classicalidade do sistema sob efeito da temperatura e por último a determinação da função de Wigner para tal estado. De posse desses resultados, faremos um cruzamento de informações a fim de definir uma faixa de temperatura segura à realização das portas lógicas quânticas.

Os Capítulos 5, 6 e 7, estão destinados ao estudo do estado de superposição entre o estado coerente e o estado de Fock, uma vez que no Capítulo 5 realizaremos a termalização do estado via Dinâmica de Campos Térmicos, obtendo em seguida o ente responsável pela informação do estado termalizado: o operador densidade. Ainda nesse Capítulo 5 determinaremos o valor esperado do operador \hat{A} no estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$

No Capítulo 6 encontra-se o desenvolvimento dos cálculos necessários à obtenção da função de Wigner em função de temperatura, para o estado de superposição.

O Capítulo 7 está destinado à obtenção dos gráficos relativos à função de Wigner, em que fixamos as temperaturas em $T = \{1K, 10K, 30K, 300K\}$ assumindo para cada uma dessas, uma população de fótons de $n = \{0, 1, 3\}$. De posse dos gráficos, ainda nesse capítulo, analisaremos o comportamento do sistema para as devidas faixas de temperatura, explicitando as principais contribuições que fazem o sistema assumir características de classicalidade ou de não-classicalidade.

No Capítulo 8, finalmente apresentaremos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos

Geralmente não encontramos na natureza sistemas completamente isolados, mas em contato com outros sistemas ou um meio como um banho térmico, por exemplo. Neste último caso surge a necessidade de formular uma teoria à temperatura finita para descrever tais sistemas. Existem vários desenvolvimentos para introduzir a temperatura na teoria quântica. Uma dessas formulações denomina-se dinâmica de campos térmicos (DCT) e foi desenvolvida por Umezawa e Takahashi em 1975 [20]. A idéia central da DCT é expressar as médias estatísticas de uma variável representada por um operador hermitiano A , como o valor esperado deste operador em um estado de vácuo dependente da temperatura.

2.1 Introdução ao formalismo da DCT

O primeiro passo para introduzirmos a dinâmica de campos térmicos é entender que em mecânica estatística do equilíbrio, a média de qualquer operador A no ensemble canônico é obtida através da expressão:

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H} A), \quad (2.1)$$

onde o Tr representa o traço, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal do operador $e^{-\beta H} A$, $Z(\beta)$ é a função de partição e H é o hamiltoniano do sistema. Sendo assim, podemos escrever.

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_r e^{-\beta E_r} \langle r | A | r \rangle, \quad (2.2)$$

em que estamos assumindo que os autovalores E_r do hamiltoniano são discretos e que os autoestados são não degenerados, ou seja:

$$\begin{aligned} H|r\rangle &= E_r|r\rangle; r = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \langle r|s\rangle &= \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A função de partição tem a forma

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}). \quad (2.4)$$

Nós podemos sintetizar a idéia básica da teoria de campos térmicos (DCT) procurando expressar a média estatística de qualquer operador A como o valor esperado deste no vácuo termalizado. Logo, definindo o estado de vácuo térmico como $|0(\beta)\rangle$, escrevemos

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_r e^{-\beta E_r} \langle r | A | r \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle. \quad (2.5)$$

Desta forma o formalismo à temperatura finita terá um desenvolvimento completamente paralelo ao utilizado na teoria quântica à temperatura nula. Supondo que o estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ possa ser escrito como uma superposição linear de estados do espaço de Hilbert, temos

$$|0(\beta)\rangle = \sum_r |r\rangle \langle r | 0(\beta) \rangle = \sum_r f_r(\beta) |r\rangle; \quad (2.6)$$

onde usamos a relação de completeza para estados no espaço de Hilbert.

Então,

$$\langle 0(\beta) | = \sum_r f_r^*(\beta) \langle r | \quad (2.7)$$

e

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \sum_{r,s} f_r^*(\beta) f_s(\beta) \langle r | A | s \rangle. \quad (2.8)$$

Fazendo uma comparação com a equação (2.5) nós temos que

$$f_r^*(\beta) f_s(\beta) = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_r} \delta_{r,s}. \quad (2.9)$$

Um problema surge nesse momento, a equação (2.8) indica que os $f_n(\beta)$ são números ordinários, enquanto a equação (2.8) tem a forma de uma relação de ortogonalidade. Isso indica como consequência que, com apenas nosso original espaço de Hilbert, não é possível definir um vácuo à temperatura finita que satisfaça tal equação. A maneira de resolver este problema foi proposta por Umezawa [21] e a idéia utilizada foi a duplicação do sistema original, introduzindo um segundo sistema idêntico ao inicial, chamado de sistema fictício ou mesmo "sistema fantasma" e que iremos designar neste trabalho por sistema til.

A relação entre os observáveis do sistema original e do sistema til também chamado de sistema dual, é dada por:

$$\begin{aligned} (A_i A_j)^\sim &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j \\ (c A_i + A_j)^\sim &= c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j \\ (A_k)^\sim &= \tilde{A}_k^\dagger \\ (\tilde{A}_k)^\sim &= \tilde{A}_k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

O sistema til tem assim um Hamiltoniano \tilde{H} com autoestados $|\tilde{r}\rangle$, tal que

$$\tilde{H} |\tilde{r}\rangle = E_r |\tilde{r}\rangle, \quad (2.11)$$

com

$$\langle \tilde{r} | \tilde{s} \rangle = \delta_{rs} \quad (2.12)$$

e autovalores iguais aos de H.

Vamos então considerar o produto direto entre dois estados desses sistemas, i.é.

$$|r, \tilde{s}\rangle = |r\rangle \otimes |\tilde{s}\rangle, \quad (2.13)$$

que irá expandir o vácuo térmico, ou seja,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_r f_r(\beta) |r, \tilde{r}\rangle = \sum_r f_r(\beta) |r\rangle \otimes |\tilde{r}\rangle. \quad (2.14)$$

Ao calcularmos o valor esperado de um operador hermitiano A no estado de vácuo duplicado, teremos¹

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{r,s} f_r^*(\beta) f_s(\beta) \langle r, \tilde{r} | A | s, \tilde{s} \rangle \\ &= \sum_{r,s} f_r^*(\beta) f_s(\beta) \langle r | A | r \rangle \delta_{rs} \\ &= \sum_r f_r^*(\beta) f_r(\beta) \langle r | A | r \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

De um modo geral, usando a ortonormalidade dos estados, escreve-se

$$\langle r, \tilde{s} | A | r', \tilde{s}' \rangle = \langle r | A | r' \rangle \langle \tilde{s} | \tilde{s}' \rangle = \delta_{ss'} \langle r | A | r' \rangle \quad (2.16)$$

e para o operador do sistema til

$$\langle r, \tilde{s} | \tilde{A} | r', \tilde{s}' \rangle = \langle r | r' \rangle \langle \tilde{s} | \tilde{A} | \tilde{s}' \rangle = \delta_{rr'} \langle \tilde{s} | \tilde{A} | \tilde{s}' \rangle. \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.15) na expressão dada na equação (2.5) obtemos

$$f_r^*(\beta) f_r(\beta) = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_r}, \quad (2.18)$$

que, para uma solução real, resulta em:

$$f_r^*(\beta) = f_r(\beta) = Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_r/2}. \quad (2.19)$$

¹Nós utilizamos o argumento do operador do sistema físico original não atuar sobre os autoestados do sistema til e vice-versa.

Este resultado nos mostra que é possível criar um estado de menor energia dependente da temperatura, desde que utilizemos para isso o artifício da duplicação dos graus de liberdade do sistema. Vale salientar que o novo espaço gerado após esta duplicação pode ser escrito via um produto direto entre os espaços de Hilbert do sistema original e o seu dual $\tilde{\mathcal{H}}$, isto é $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$; o valor esperado de um operador arbitrário A no estado $|0(\beta)\rangle$ neste espaço tem valor equivalente à média estatística de A .

Para elucidar a forma de criação do estado $|0(\beta)\rangle$ consideremos sistemas de osciladores. Primeiramente trataremos dos osciladores bosônicos e posteriormente dos osciladores fermiônicos.

2.2 Osciladores Bosônicos

Nesta seção e na próxima iremos apresentar dois exemplos de construção do formalismo da dinâmica de campos térmicos. Começaremos considerando um oscilador bosônico de frequência ω que é descrito pelo Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega a^\dagger a. \quad (2.20)$$

Sabemos que os operadores de criação a^\dagger e aniquilação a obedecem às regras de comutação dadas por (iremos considerar $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1 \\ [a, a] &= 0 \\ [a^\dagger, a^\dagger] &= 0; \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $[A, B] = AB - BA$.

A cada autoestado está associado um autovalor de energia descrito pela equação

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle. \quad (2.22)$$

Se nos limitarmos, por simplicidade, a um sistema com um só modo, um estado

de Fock² representa-se por $|n\rangle$, onde n é um valor inteiro. Assim o estado $|0\rangle$ é definido como o estado de menor energia do sistema sendo a , no caso do campo eletromagnético, capaz de aniquilar um fóton, e a^\dagger de criar um fóton em um modo específico. Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ a|0\rangle &= 0 \\ |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

e para fazer a contagem dos fótons em um modo específico do campo eletromagnético, utiliza-se o operador número N que é definido por,

$$N = a^\dagger a \quad (2.24)$$

e satisfaz, usando as relações (2.23),

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.25)$$

Como expusemos na secção (2.4), para a construção do formalismo da DCT se faz indispensável a duplicação dos graus de liberdade do sistema, através da criação do espaço dual(til); assim, atuando neste espaço, teremos o operador hamiltoniano \tilde{H} dado por

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \quad (2.26)$$

onde no espaço $\tilde{\mathcal{H}}$ os operadores \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} têm álgebra de comutação definida por,

$$\begin{aligned} [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] &= 1 \\ [\tilde{a}, \tilde{a}] &= 0 \\ [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

²O nome se deve ao físico soviético Vladimir Fock (1898-1974)

e comutam com os operadores a e a^\dagger . Além disso temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}|\tilde{n}\rangle &= \sqrt{n}|\tilde{n}-1\rangle \\
\tilde{a}^\dagger|\tilde{n}\rangle &= \sqrt{n+1}|\tilde{n}+1\rangle \\
\tilde{a}|\tilde{0}\rangle &= 0 \\
|\tilde{n}\rangle &= \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\tilde{0}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Considerando então o espaço $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ para o oscilador bosônico, o estado termalizado $|0(\beta)\rangle$ pode ser escrito na forma,

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta\omega n)/2} |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta\omega n)/2} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Em busca da função de partição, ou seja, da quantidade física que codifica as propriedades estatísticas de um sistema em equilíbrio termodinâmico [22], deve-se utilizar a relação de normalização associada ao estado $|0(\beta)\rangle$,

$$\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1. \tag{2.30}$$

Então, usando a eq.(2.29), segue que

$$\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta\omega n/2} \sum_n Z^{-1/2}(\beta) \sum_m e^{-\beta\omega m/2} \langle \tilde{m}, m | n, \tilde{n} \rangle \tag{2.31}$$

ou

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta\omega n/2} \sum_n Z^{-1/2}(\beta) \sum_m e^{-\beta\omega m/2} \langle \tilde{m}, \tilde{n} | n, m \rangle \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_{n,m} e^{-\beta\omega(n+m)/2} \delta_{nm} \delta_{mn} \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_n e^{-\beta\omega n}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Sabendo que o somatório $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, encontramos das equações (2.30) e (2.32), que a função partição [2], nesse caso, é dada por

$$Z(\beta) = [1 - e^{-\beta\omega}]^{-1}. \quad (2.33)$$

E assim usando a equação (2.29) podemos escrever o estado de vácuo térmico como

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\beta\omega n)/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.34)$$

2.2.1 Termalização de osciladores bosônicos via transformação de Bogoliubov

A transformação de Bogoliubov é um dos elementos básicos da dinâmica de campos térmicos. Trata-se de uma transformação unitária pela qual através da ação dos operadores de criação e aniquilação, é possível termalizar o vácuo *a priori* duplicado. Ao observarmos a equação (2.34), que descreve o vácuo térmico, notamos que os cálculos poderiam ser minorados se pudéssemos escrever $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle$. Com esse objetivo observamos que a equação (2.34) pode ser escrita como

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} e^{-(\beta\omega)(a^\dagger)(\tilde{a}^\dagger)/2} |0, \tilde{0}\rangle \quad (2.35)$$

e procuramos escrevê-la como uma única exponencial; para isso, efetuaremos um mapeamento das exponenciais utilizando a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff [2].

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh(\alpha)B} e^{\operatorname{ln} \cosh(\alpha)C} e^{\tanh(\alpha)A}, \quad (2.36)$$

onde $C = [A, B]$.

Definindo as funções hiperbólicas

$$\cosh\theta(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} = u(\beta), \quad (2.37)$$

$$\sinh\theta(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} = \nu(\beta), \quad (2.38)$$

$$\tanh\theta(\beta) = e^{-\beta\omega/2} \quad (2.39)$$

e usando a relação (2.36) podemos escrever(2.34)da seguinte forma

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1}\theta(\beta)e^{\tanh\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger}|0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger} e^{\ln(\cosh^{-1}\theta(\beta))} e^{-\ln(\cosh\theta(\beta)(\tilde{a}^\dagger\tilde{a}))}|0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger} e^{-\ln\cosh\theta(\beta)} e^{-\ln\cosh\theta(\beta)(\tilde{a}^\dagger\tilde{a})} e^{-\ln\cosh\theta(\beta)(a^\dagger a)}|0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger} e^{-\ln\cosh\theta(\beta)(\tilde{a}^\dagger\tilde{a}+a^\dagger a+1)}|0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger} e^{-\ln\cosh\theta(\beta)(\tilde{a}\tilde{a}^\dagger+a^\dagger a)} e^{\tanh\theta(\beta)(-\tilde{a}a)}|0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde utilizamos as relações de comutação para os bósons e o resultado

$$e^{f(\theta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a}}|0, \tilde{0}\rangle = e^0|0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle, \quad (2.41)$$

com $f(\theta)$ uma função arbitrária de θ . Para usarmos a relação (2.36) de Baker-Campbell-Hausdorff na equação (2.40) identifiquemos

$$\begin{aligned} A &= -\tilde{a}a \\ B &= a^\dagger\tilde{a}^\dagger \\ C &= [A, B] = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a \\ \alpha &= \theta(\beta) \end{aligned} \quad (2.42)$$

o que possibilita escrever a equação (2.40) como:

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle, \quad (2.43)$$

onde

$$G(\beta) = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \quad (2.44)$$

Temos então definido o operador $U(\beta)$ e este será responsável pela transformação unitária capaz de dar conta dos efeitos térmicos nos estados duplicados, ou seja, este operador que é denominado transformação de Bogoliubov, mostra que o vácuo térmico

e o vácuo do espaço duplicado são relacionados formalmente por uma transformação unitária

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.45)$$

2.2.2 Operadores termalizados para bósons

Uma importante consequência de definirmos o operador $U(\beta)$ é que este não ficará restrito a termalização dos estados. Na realidade, os operadores de aniquilação e criação para estados termalizados são obtidos usando a transformação de Bogoliubov haja vista que os operadores a, a^\dagger, \tilde{a} e \tilde{a}^\dagger atuam em estados não térmicos e os operadores termalizados $a(\beta), a^\dagger(\beta), \tilde{a}(\beta)$, e $\tilde{a}^\dagger(\beta)$ atuarão em estados que levam em conta efeitos térmicos. Com efeito, da relação de similaridade

$$A(\beta) = U(\beta)AU^\dagger(\beta), \quad (2.46)$$

válida para qualquer operador A, obtém-se para os operadores de criação e aniquilação,

$$a(\beta) = U(\beta)aU^\dagger(\beta) \quad (2.47)$$

$$a^\dagger(\beta) = U(\beta)a^\dagger U^\dagger(\beta) \quad (2.48)$$

$$\tilde{a}(\beta) = U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta) \quad (2.49)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta)\tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta). \quad (2.50)$$

A partir destas relações podemos constatar que

$$\begin{aligned} a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)aU^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \\ &= U(\beta)aU^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)a|0, \tilde{0}\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

e similarmente

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0|0(\beta)\rangle. \quad (2.52)$$

As equações (2.51,2.52) mostram que o estado de vácuo térmico é o estado de vácuo para os operadores de criação e aniquilação termalizados. Esta conclusão não é válida com relação aos operadores não-termalizados pois estes operam sobre esse estado de vácuo em diferentes formas. Para os operadores térmicos o vácuo térmico se apresenta como um estado puro, enquanto que para os operadores não-termalizados ele se mostra um estado misto (térmico).

Sendo assim, a partir do estado de vácuo térmico e dos operadores de criação térmico pode-se construir o espaço de Hilbert térmico que é formado pelos estados

$$|0(\beta)\rangle; a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle; \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle; a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle\dots \quad (2.53)$$

Vale notar que encontramos os operadores térmicos por uma transformação de similaridade por $U(\beta)$ que é um operador unitário; assim, as regras de comutação permanecem invariantes, i.é.

$$[a(\beta), a^\dagger(\beta)] = 1; [\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] = 1, \quad (2.54)$$

com as demais sendo nulas. Para fins de aplicação é interessante obter uma relação direta entre os operadores termalizados e não-termalizados. De fato, usando a equação (2.46), a identidade

$$e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2}[B, [B, A]] + \dots \quad (2.55)$$

e as relações de comutação

$$\begin{aligned} [G, a] &= -i\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger \\ [G, \tilde{a}] &= -i\theta(\beta)a^\dagger \\ [G, a^\dagger] &= -i\theta(\beta)\tilde{a} \\ [G, \tilde{a}^\dagger] &= -i\theta(\beta)a \end{aligned} \quad (2.56)$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
a(\beta) &= U(\beta)aU(\beta)^\dagger \\
&= a(-i)[G, a] + \frac{(-i)^2}{2}[G, [G, a]] - \frac{(i)^3}{3}[G, [G, [G, a]]] + \frac{(i)^4}{4}[G, [G, [G, [G, a]]]] + \dots \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}(\beta)}{(2n)!}\right)a - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!}\right)\tilde{a}^\dagger \\
&= \cosh\theta(\beta)a - \sinh\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger \\
&= u(\beta)a - \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger
\end{aligned} \tag{2.57}$$

E com desenvolvimento similar para os outros operadores tem-se as relações entre os operadores não térmicos e termalizados dadas por :

$$a(\beta) = a\cosh\theta(\beta) - \tilde{a}^\dagger\sinh\theta(\beta) = u(\beta)a - \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger \tag{2.58}$$

$$\tilde{a}(\beta) = \tilde{a}\cosh\theta(\beta) + a^\dagger\sinh\theta(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - \nu(\beta)a^\dagger \tag{2.59}$$

$$a^\dagger(\beta) = a^\dagger\cosh\theta(\beta) - \tilde{a}\sinh\theta(\beta) = u(\beta)a^\dagger - \nu(\beta)\tilde{a} \tag{2.60}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = \tilde{a}^\dagger\cosh\theta(\beta) + a\sinh\theta(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - \nu(\beta)a. \tag{2.61}$$

Os operadores não-térmicos em função dos térmicos são obtidos invertendo as equações (2.58-2.61) em que se usa a relação entre \cosh e \sinh , ou seja, $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Logo

$$a = u(\beta)a(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \tag{2.62}$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + \nu(\beta)a^\dagger(\beta) \tag{2.63}$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}(\beta) \tag{2.64}$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \nu(\beta)a(\beta). \tag{2.65}$$

Os resultados (2.58-2.61) e (2.62-2.65) são importantes na execução de cálculos. Neste contexto um exemplo interessante é o cálculo da média estatística $\langle N \rangle_\beta$ do operador

número $N = a^\dagger a$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \langle N \rangle_\beta &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\
 &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\
 &= \nu^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

que é a função de distribuição de Max Planck para os bósons.

2.3 Osciladores fermiônicos

Seja um oscilador fermiônico descrito pelo Hamiltoniano ($\hbar = 1$)

$$H = \omega a^\dagger a, \tag{2.67}$$

com os operadores de criação e aniquilação obedecendo a álgebra de anticomutação

$$\begin{aligned}
 (aa^\dagger + a^\dagger a) &= \{a, a^\dagger\} = 1, \\
 (aa + aa) &= \{a, a\} = 0, \\
 (a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a^\dagger) &= \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Os autoestados e autovalores de energia se relacionam através de:

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle. \tag{2.69}$$

De forma idêntica ao caso do oscilador bosônico tem-se o operador número $N = a^\dagger a$ e a equação de autovalor

$$N|n\rangle = n|n\rangle; n = 1, 2, \dots \tag{2.70}$$

Entretanto, devido às relações de anticomutação (2.68) e à ortonormalidade entre os autoestados segue que $n=0,1$. Então o espaço de Hilbert é composto por apenas dois vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ tais que:

$$a|0\rangle = 0; a|1\rangle = |0\rangle; a^\dagger|0\rangle = |1\rangle; a^\dagger|1\rangle = 0. \tag{2.71}$$

Efetuando-se a duplicação dos graus de liberdade, o produto dos estados do sistema de dois níveis leva a uma base quadridimensional gerada por

$$|0, \tilde{0}\rangle, |0, \tilde{1}\rangle, |1, \tilde{0}\rangle, |1, \tilde{1}\rangle, \quad (2.72)$$

em que

$$\tilde{a}|\tilde{0}\rangle = 0; \tilde{a}|\tilde{1}\rangle = |\tilde{0}\rangle; \tilde{a}^\dagger|\tilde{0}\rangle = |\tilde{1}\rangle; \tilde{a}^\dagger|\tilde{1}\rangle = 0, \quad (2.73)$$

com $\tilde{H} = \omega\tilde{a}^\dagger\tilde{a}$, $\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1$, e as demais relações de anticomutação nulas. Desta forma, expandindo o vácuo térmico, obtém-se

$$|0(\beta)\rangle = f_0(\beta)|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle + f_1(\beta)|1\rangle \otimes |\tilde{1}\rangle. \quad (2.74)$$

Por outro lado, a expressão geral de $|0(\beta)\rangle$ nos dá

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n=0}^1 e^{-\beta\omega n/2} |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle. \quad (2.75)$$

Da normalização do estado $|0(\beta)\rangle$, obtemos para os coeficientes da expansão

$$\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = |f_0(\beta)|^2 + |f_1(\beta)|^2 = 1. \quad (2.76)$$

Relacionando a eq.(2.76) com a eq.(2.75), segue que

$$\begin{aligned} f_0(\beta) &= f_0^*(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} \\ f_1(\beta) &= f_1^*(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

o que possibilita definir

$$\begin{aligned} \cos\theta(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} \\ \sen\theta(\beta) &= \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Novamente podemos obter o estado $|0(\beta)\rangle$ do sistema por uma transformação unitária $U(\beta)$ de Bogoliubov, isto é

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.79)$$

Devemos observar que neste caso pelas regras de anticomutação dos operadores, teremos,

$$\begin{aligned}(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^{2n}|0, \tilde{0}\rangle &= (1)^n|0, \tilde{0}\rangle \\(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^{2n+1}|0, \tilde{0}\rangle &= (1)^{n+1}|1, \tilde{1}\rangle.\end{aligned}\tag{2.80}$$

Desta forma, por um desenvolvimento similar ao caso bosônico, pode-se mostrar que o operador $G(\theta)$ tem a seguinte forma:

$$G(\beta) = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger),\tag{2.81}$$

onde $\theta(\beta)$ é um parâmetro real nos dando para $U(\beta)$

$$U(\beta) = e^{-iG(\theta)}\tag{2.82}$$

Logo, pelas relações (2.74), (2.77) e (2.78), o vácuo térmico para o oscilador fermiônico pode ser obtido a partir do estado de vácuo duplicado ($T=0$) pelas relações

$$U(\theta)|0, \tilde{0}\rangle = |0(\beta)\rangle = \cos\theta(\beta)|0, \tilde{0}\rangle + \sin\theta(\beta)|1, \tilde{1}\rangle.\tag{2.83}$$

2.3.1 Operadores termalizados para férmions

Através da operação unitária $U(\beta)$ de Bogoliubov podemos escrever os operadores térmicos como:

$$a(\beta) = U(\beta)aU(\beta)^\dagger\tag{2.84}$$

$$a^\dagger(\beta) = U(\beta)a^\dagger U(\beta)^\dagger\tag{2.85}$$

$$\tilde{a}(\beta) = U(\beta)\tilde{a}U(\beta)^\dagger\tag{2.86}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta)\tilde{a}^\dagger U(\beta)^\dagger.\tag{2.87}$$

Então levando em consideração a identidade

$$A = e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2}[B, [B, A]] + \dots\tag{2.88}$$

e as relações de comutação

$$\begin{aligned}
[G, a] &= -i\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger, \\
[G, \tilde{a}] &= -i\theta(\beta)a^\dagger, \\
[G, a^\dagger] &= -i\theta(\beta)\tilde{a}, \\
[G, \tilde{a}^\dagger] &= +i\theta(\beta)a,
\end{aligned} \tag{2.89}$$

temos

$$a(\beta) = u(\beta)a - \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger. \tag{2.90}$$

Similarmente, obtemos

$$a(\beta) = u(\beta)a - \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger \tag{2.91}$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + \nu(\beta)a^\dagger, \tag{2.92}$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - \nu(\beta)\tilde{a}, \tag{2.93}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger + \nu(\beta)a, \tag{2.94}$$

onde estamos usando a notação

$$\begin{aligned}
u(\beta) &= \cos\theta(\beta) = (1 + e^{-\beta\omega})^{-1/2} \\
\nu(\beta) &= \sin\theta(\beta) = e^{-\beta\omega/2}(1 + e^{-\beta\omega})^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

As relações inversas são dadas

$$a = u(\beta)a(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \tag{2.96}$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) - \nu(\beta)a^\dagger(\beta), \tag{2.97}$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}(\beta), \tag{2.98}$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - \nu(\beta)a(\beta). \tag{2.99}$$

Com essas relações o valor médio do operador número N para o estado de vácuo térmico, considerando osciladores férmionicos, é calculado como:

$$\begin{aligned}
 \langle N \rangle_\beta &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\
 &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + \nu(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\
 &= \nu^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}, \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

que resulta na distribuição de Fermi-Dirac .

2.4 Operador Densidade

O operador densidade é importante tanto na Mecânica Quântica quanto na Mecânica Estatística Quântica. Ele reflete aspectos estatísticos inerentes à teoria como aqueles decorrentes do conhecimento incompleto de sistemas associados a *ensembles* não puros[23]. Foi para lidar com sistemas abertos que Landau usou o conceito de operador densidade, enquanto von-Neumann [24] utilizou este conceito para descrever de forma unificada situações físicas com *ensembles* puros e com *ensembles* mistos.

Vale salientar que, na formulação usual, o espaço de Hilbert não contém nenhum grau de liberdade associado à temperatura, ou seja, não temos condições de escolher um *ket* em especial deste espaço para representar o sistema físico, incluindo temperatura e com isso surge a necessidade de encontrarmos um ente que contenha toda a informação sobre o *ensemble*. Ele é definido como sendo o operador densidade ρ e os efeitos térmicos aparecerão nesta representação dos estados. Nesta seção iremos em busca da representação do operador densidade, a matriz densidade , associada a um estado térmico $|\psi(\beta)\rangle$.

Relembremos que o vácuo termalizado, é descrito por:

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta E_n)/2} |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta H)/2} |n, \tilde{n}\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) e^{(-\beta H)/2} \sum_{n=0}^{\infty} |n, \tilde{n}\rangle \\
&= \rho^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle |\tilde{n}\rangle,
\end{aligned} \tag{2.101}$$

onde

$$\rho = Z^{-1}(\beta) e^{(-\beta H)} \tag{2.102}$$

Definindo $|\Upsilon\rangle = \sum_n |n\rangle |\tilde{n}\rangle$, temos

$$|0(\beta)\rangle = \rho^{1/2} |\Upsilon\rangle, \tag{2.103}$$

e então a média térmica de um operador A no espaço de Hilbert fica:

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \langle \Upsilon | \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} | \Upsilon \rangle \\
&= \sum_{m,n} \langle m, \tilde{m} | \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} | n, \tilde{n} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \langle m | \rho^{1/2 \dagger} A \rho^{1/2} | n \rangle \delta_{nm} \\
&= \sum_m \langle m | \rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2} | m \rangle \\
&= Tr(\rho^{\dagger 1/2} A \rho^{1/2}) \\
&= Tr(\rho A).
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Outra importante observação é que teremos para um sistema com um único modo bosônico,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= Tr\{Z^{-1}(\beta) e^{(-\beta \omega a^\dagger a)} A\} \\
&= Tr\{Z^{-1}(\beta) e^{(-\beta \omega a^\dagger a)} A\}
\end{aligned} \tag{2.105}$$

onde

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta\omega n)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}, \quad (2.106)$$

é a função de partição para o sistema bosônico. Então, comparando a relação (2.104) com (2.105), tem-se que o operador densidade associado ao vácuo térmico, neste caso é:

$$\begin{aligned} \rho_{|0(\beta)\rangle} \equiv \rho_{\beta} &= Z^{-1}(\beta) e^{-\beta\omega a^{\dagger}a} \\ &= \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^n |n\rangle\langle n| \end{aligned} \quad (2.107)$$

com

$$\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{-\beta\omega} - 1}. \quad (2.108)$$

De forma similar, para um estado termalizado $|\psi(\beta)\rangle$ arbitrário, tem-se:

$$\langle\psi(\beta)|A|\psi(\beta)\rangle = \text{Tr}(\rho_{|\psi(\beta)\rangle}A). \quad (2.109)$$

Escrevendo o estado termalizado $|\psi(\beta)\rangle$ a partir da atuação de uma função dos operadores de criação e aniquilação, ou seja,

$$|\psi(\beta) = f(a, a^{\dagger}; \beta)|0(\beta)\rangle, \quad (2.110)$$

a equação(2.109) nos dá

$$\begin{aligned} \langle\psi(\beta)|A|\psi(\beta) &= \langle 0(\beta)|f^{\dagger}(a, a^{\dagger}; \beta)Af(a, a^{\dagger}; \beta)|0(\beta)\rangle \\ &= \text{Tr}[\rho_{\beta}f^{\dagger}(a, a^{\dagger}; \beta)Af(a, a^{\dagger}; \beta)] \\ &= \text{Tr}[f(a, a^{\dagger}; \beta)\rho_{\beta}f^{\dagger}(a, a^{\dagger}; \beta)A] \end{aligned} \quad (2.111)$$

onde podemos identificar uma simples e direta relação para a construção do operador densidade:

$$\rho_{|\psi(\beta)\rangle} = f(a, a^{\dagger}; \beta)\rho_{\beta}f^{\dagger}(a, a^{\dagger}; \beta), \quad (2.112)$$

relação que será de grande valia e explorada no Capítulo 4. Concluindo essa seção, citamos que, das equações (2.47) e (2.48) é possível obter as relações

$$\begin{aligned}\tilde{a}|0(\beta)\rangle &= \frac{\nu(\beta)}{u(\beta)}a^\dagger|0(\beta)\rangle \\ a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{u(\beta)}a^\dagger|0(\beta)\rangle.\end{aligned}\tag{2.113}$$

Capítulo 3

Formalismo da Função de Wigner

Neste capítulo faremos um estudo das propriedades da função introduzida por E.P. Wigner em 1932, que consiste em uma função real de distribuição, definida no espaço de fase (p, q) , chamada atualmente de Função de Distribuição de Quasi Probabilidade de Wigner.

O propósito de Wigner, em seu trabalho, era efetuar correções quânticas à mecânica estatística, sem abandonar o conceito de espaço de fase, que é a variedade natural na qual uma teoria cinética é escrita. Cabe ressaltar, entretanto, que antes de Wigner, Dirac em 1930 [25] motivado pelo estudo da distribuição de elétrons em átomos em regime semiclássico, havia introduzido uma representação da mecânica quântica no espaço de fase, através de uma transformada de Fourier da matriz densidade. Dirac estudava em particular a representação de operadores no espaço de fase e também escreveu a equação de evolução para a densidade de elétrons que veio a ser conhecida como equação de Liouville von Neumann [4]. E.P. Wigner nota que, para faixas de altas temperaturas, as probabilidades descritas pela teoria de Boltzmann eram compatíveis com a teoria quântica [3]; tal análise não era igualmente possível ao tratar de baixas temperaturas, onde fez-se necessário uma correção, que se deu através da introdução de uma função capaz de calcular probabilidades tanto nas coordenadas quanto nos momenta. Tal função é conhecida hoje como função de Wigner que, es-

taticamente, representa uma função de quasi-probabilidade no espaço de fase [4]. A função de Wigner fornece um formalismo alternativo da mecânica quântica para a função de onda na representação de Schrödinger e Heisenberg, sendo capaz de identificar importantes propriedades estatísticas de estados quânticos, que coaduna com o nosso objeto de pesquisa. A função de Wigner, ao relacionar as incertezas em um par de observáveis conjugados, se mostra de grande relevância, fornecendo uma base para comparação com a descrição da mecânica clássica.

O formalismo proposto por Wigner tem sido utilizado em diversas áreas a exemplo da ótica quântica e física da matéria condensada, tendo inclusive sua medição sendo realizada em experimentos de cavidade quântica [26]. Esse capítulo é dedicado à revisão desse formalismo, definindo a função de Wigner através da matriz densidade e explorando suas propriedades. Nos capítulos seguintes, aplicaremos tal formalismo na obtenção de propriedades estatísticas de estados quânticos através do operador densidade dos estados de Bell termalizado, assim como do estado de superposição entre estados de Fock e estados coerentes.

3.1 Definição da Função de Wigner

Na mecânica quântica usual os operadores correspondentes aos observáveis posição e momento p obedecem às conhecidas relações de comutação ¹

$$[\widehat{Q}; \widehat{Q}] = [\widehat{P}; \widehat{P}] = 0 \quad \text{e} \quad [\widehat{Q}; \widehat{P}] = i\hbar \mathbf{1} \quad (3.1)$$

e às equações de autovalores

¹por simplicidade, consideramos no desenvolvimento o caso do espaço das coordenadas unidimensional.

$$\begin{aligned}\widehat{P}|p\rangle &= p|p\rangle \\ \text{e} \\ \widehat{Q}|q\rangle &= q|q\rangle\end{aligned}\tag{3.2}$$

Considera-se que os autovetores dos operadores posição \widehat{Q} e momentum \widehat{P} formam um conjunto ortonormal completo no espaço de Hilbert, o que permite escrever as relações de completudeza

$$\begin{aligned}\int |q\rangle\langle q| &= \mathbf{1} \\ \int |p\rangle\langle p| &= \mathbf{1}\end{aligned}\tag{3.3}$$

e a relação de ortonormalização, i.é;

$$\begin{aligned}\langle q|q'\rangle &= \delta(q - q') \\ \langle p|p'\rangle &= \delta(p - p')\end{aligned}$$

Então, um operador arbitrário \widehat{A} que atua nos autovetores do espaço de Hilbert, poderá ser escrito da seguinte maneira,

$$\widehat{A} \equiv \int |q''\rangle\langle q''||p''\rangle\langle p''|\widehat{A}|p'\rangle\langle p' ||q'\rangle\langle q'|dq'dq''dp'dp''\tag{3.5}$$

Assumindo a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned}2p &= p' + p'' \\ 2q &= q' + q''\end{aligned}\tag{3.6}$$

assim como,

$$\begin{aligned} k &= p'' - p' \\ z &= q'' - q' \end{aligned} \quad (3.7)$$

e utilizando a função de onda associada ao autovetor do momento na representação da posição, ou seja,

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{\frac{ipq}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (3.8)$$

tem-se que o operador \hat{A} (3.5), pode ser escrito como

$$\hat{A} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{iqk}{\hbar}} \langle p + \frac{k}{2} | \hat{A} | p - \frac{k}{2} \rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}} | q + \frac{z}{2} \rangle \langle q - \frac{z}{2} | dq dp dz dk. \quad (3.9)$$

De forma equivalente, definindo

$$\begin{aligned} a_\omega(p, q) &\equiv \int e^{\frac{iqk}{\hbar}} \langle p + \frac{k}{2} | \hat{A} | p - \frac{k}{2} \rangle dk \\ \Delta(p, q) &\equiv \int e^{\frac{iqz}{\hbar}} | q + \frac{z}{2} \rangle \langle q - \frac{z}{2} | dz \end{aligned} \quad (3.10)$$

a integral (3.9) pode ser escrita como

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int a_\omega(p, q) \Delta(p, q) dq dp. \quad (3.11)$$

As relações obtidas em (3.10) guardam relações de simetria, ou seja, também podemos escrever

$$\begin{aligned} a_\omega(p, q) &\equiv \int e^{\frac{-ipz}{\hbar}} \langle q + \frac{z}{2} | \hat{A} | q - \frac{z}{2} \rangle dz \\ \Delta(p, q) &\equiv \int e^{\frac{-ipk}{\hbar}} | p + \frac{k}{2} \rangle \langle p - \frac{k}{2} | dk \end{aligned} \quad (3.12)$$

A função $a_\omega(q; p)$, em suas duas formas, é chamada de transformada de Weyl do operador \hat{A} . Se esse operador for hermitiano, o operador $\Delta(q; p)$ também o será e a função $a_\omega(q; p)$, será real [27].

Nesse sentido, a função de Wigner, $f_\omega(q, p)$, é definida como uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade, isto é,

$$f_\omega(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q + \frac{z}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{z}{2} \rangle dz \quad (3.13)$$

ou de forma equivalente

$$f_\omega(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \langle p + \frac{k}{2} | \hat{\rho} | p - \frac{k}{2} \rangle dk. \quad (3.14)$$

No caso de o sistema quântico ser descrito por um estado puro, a função de Wigner pode ser escrita como,

$$f_\omega(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{ipz}{\hbar}} \Psi^\dagger(q + z/2) \Psi(q - z/2) dz. \quad (3.15)$$

Uma forma sucinta de escrever a função de Wigner é

$$f_\omega(p, q) = Tr \rho \Delta(q, p) \quad (3.16)$$

onde ρ é o operador densidade. Esse fato evidencia que a formulação utilizada por Weyl guarda relação com o método da função de Wigner.

Pode-se mostrar que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade, pois pode assumir valores positivos e negativos. Este e outros aspectos da Função de Wigner são interpretados a partir da análise de suas propriedades.

3.2 Propriedades da Função de Wigner

O fato da função de Wigner assumir valores negativos é motivo de muita discussão na literatura [28]. Essas regiões são associadas a não classicidade de um sistema, e nos força a não aceitar a função de Wigner como uma distribuição de probabilidades, porém, densidades de probabilidades são obtidas se a integrarmos.

A função de Wigner possui certas propriedades inerentes à interpretação física de um sistema e este fato já constitui uma propriedade da função de Wigner.

•Propriedade 1

$$\int f_{\omega}(p, q) dp = |\Psi(q)|^2 = \langle q | \rho | q \rangle. \quad (3.17)$$

Essa propriedade mostra que, a partir da função de Wigner, podemos obter a densidade de probabilidade associada a se encontrar uma partícula entre q e $q + dq$

•Demonstração.

Para demonstrar tal propriedade, o ponto de partida é a definição da função de Wigner. Substituindo a eq. (3.13) na eq. (3.17), obtemos

$$\int f_{\omega}(p, q) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle. \quad (3.18)$$

Integrando na variável p , temos

$$\int f_{\omega}(p, q) dp = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}} \right) \quad (3.19)$$

onde o termo entre parênteses é a função delta de Dirac, $\delta(z)$. Assim

$$\int f_{\omega}(p, q) dp = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z). \quad (3.20)$$

Utilizando a propriedade da função delta, $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$, temos,

$$\int f_{\omega}(p, q) dp = \langle q | \rho | q \rangle = |\Psi(q)|^2 \quad (3.21)$$

que descreve a densidade de probabilidade no espaço de configurações.

•**Propriedade 2**

Podemos expressar que a densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula entre p e $p + dp$ é dada por,

$$\int f_{\omega}(p, q) dq = |\tilde{\Psi}(p)|^2 = \langle p | \rho | p \rangle \quad (3.22)$$

ou seja, podemos expressar que a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula com momentum entre p e $p + dp$ pode ser obtida a partir da função de Wigner.

•**Demonstração**

Substituindo a eq. (3.14) na (3.22), temos

$$\int f_{\omega}(p, q) dq = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \quad (3.23)$$

Integrando em q , segue

$$\int f_{\omega}(p, q) dq = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \right) \quad (3.24)$$

onde o termo entre parênteses é a função delta de Dirac, $\delta(k)$. Assim,

$$\int f_{\omega}(p, q) dq = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \delta(k). \quad (3.25)$$

Isto leva a,

$$\int f_{\omega}(p, q) dq = \langle p | \rho | p \rangle = |\Psi(p)|^2. \quad (3.26)$$

•**Propriedade 3**

A função de Wigner é normalizada, ou seja,

$$\int f_{\omega}(p, q) dq dp = \text{Tr} \rho = 1. \quad (3.27)$$

•**Demonstração**

Substituindo a eq. (3.13) na eq. (3.27), obtém-se

$$\int f_{\omega}(p, q) dq dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle. \quad (3.28)$$

Calculando a integral na variável p , temos,

$$\int f_{\omega}(p, q) dq dp = \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipz}{\hbar}} \right). \quad (3.29)$$

O termo entre parênteses é a função delta de Dirac. Com isso, encontramos

$$\begin{aligned} \int f_{\omega}(p, q) dq dp &= \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z) \\ &= \int dq \langle q | \rho | q \rangle = \text{Tr} \rho = 1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

que expressa a normalização da função de Wigner, uma condição de consistência com a normalização com a matriz densidade.

•**Propriedade 4**

A função de Wigner não é positiva definida.

•**Demonstração**

Esta propriedade é importante para estabelecer a natureza estatística da função de Wigner. Considerando que f_a e f_b são duas funções de Wigner associadas, respectivamente, aos estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, então:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int f_a(q,p) f_b(q,p) dq dp. \quad (3.31)$$

O lado esquerdo dessa equação é positivo ou nulo, uma vez que os kets sejam ortogonais. No último caso, temos como consequência, a integral de f_a , f_b nula. Como f_a e f_b não são necessariamente nulas, resulta que f_a e f_b podem assumir valores negativos e positivos, de tal modo a anular a referida integral. Considerando que qualquer probabilidade deve ser positiva, fica justificada a afirmação de que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade no espaço de fase. Entretanto, devido às Propriedades 1 a 3, a função de Wigner é chamada de quasi densidade de probabilidade.

A parte negativa da função de Wigner pode ser vista como um fator de não clasicidade de um estado pois, para interpretá-la como uma distribuição clássica de probabilidades seria necessária sua não-negatividade; porém, isso só acontece com os estados coerentes e com os estados de vácuo comprimido, pois possuem comportamento análogo ao clássico. A negatividade da função de Wigner será interpretada neste trabalho como uma assinatura do nível quântico do sistema.

Capítulo 4

Dinâmica de Campos Térmicos aplicada a estados de Bell.

Como já discutido anteriormente, o emaranhamento quântico que ocorre entre sistemas é o recurso fundamental da informação quântica e para a sua implementação, a utilização de fótons emaranhados é particularmente atrativa, devido à pouca interação com o meio e à facilidade com que podem ser obtidos e manipulados. Fótons emaranhados são rotineiramente produzidos por efeitos ópticos lineares. Um dos desafios da informação quântica é o de controlar as interações entre fótons, necessário para a realização de portas lógicas quânticas.

Entre as propostas de implementação da computação quântica, Chuang e Yamamoto [1] consideraram duas cavidades com energia total $\hbar\omega$ e dois estados de um q-bit correspondendo, nessa representação à possibilidade de um fóton povoar uma das cavidades dando lugar ao estado $|01\rangle$ ou mesmo um fóton na outra cavidade dando origem ao estado representado por $|10\rangle$; logo, este estado físico de superposição resulta em $C_0|01\rangle + C_1|10\rangle$ e a essa construção dá-se o nome de representação duplo-trilho. O uso dessa representação usando dois estados duplo-trilho mostrou-se, então, associado a outros fatos experimentais realizáveis, capaz de propiciar a construção de um computador quântico. Essa possibilidade de construção, apesar das dificuldades ainda

existentes, tem tornado a formulação teórica, incluindo a representação duplo-trilho, de interesse para outras possíveis realizações. Neste contexto, um dos aspectos a ser analisado é a influência da temperatura sobre esses estados em geral e sobre estados emaranhados do tipo Bell nesta representação.

Esse é o objetivo dos cálculos desse capítulo que constituem os nossos resultados. Na realidade nós consideramos o estado de Bell $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_L + |11\rangle_L)$ que, na representação duplo-trilho, resulta no estado físico $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0101\rangle + |1010\rangle]$.

4.1 Estado de Bell termalizado

Seja o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0101\rangle + |1010\rangle], \quad (4.1)$$

que pode ser interpretado fisicamente como um estado de quatro osciladores bosônicos desacoplados ou ainda como quatro modos eletromagnéticos. Afim de termalizar este sistema devemos de acordo com o formalismo da DCT, aplicar uma duplicação no espaço de Hilbert usual. Para este novo espaço o estado correspondente é caracterizado por:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\widetilde{0101}\rangle + |\widetilde{1010}\rangle]. \quad (4.2)$$

O espaço dos q-bits será definido a partir do produto direto dos espaços, ou seja, $|\psi\rangle \otimes |\tilde{\psi}\rangle$, gerando:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \otimes |\tilde{\psi}\rangle &= \frac{1}{2} \left\{ |0101\rangle + |1010\rangle \right\} \otimes \left\{ |\widetilde{0101}\rangle + |\widetilde{1010}\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ |0101, \widetilde{0101}\rangle + |0101, \widetilde{1010}\rangle + |1010, \widetilde{0101}\rangle + |1010, \widetilde{1010}\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Via transformação unitária $U(\beta)$ de Bogoliubov, eq.(2.45), introduziremos entes térmicos a partir do estado previamente duplicado, i.e.

$$|\psi(\beta)\rangle = U(\beta)|\psi, \tilde{\psi}\rangle \quad (4.4)$$

e podemos escrever o estado,

$$|\psi(\beta)\rangle = \frac{1}{2} \left\{ |\beta; 0101, \widetilde{0101}\rangle + |\beta; 0101, \widetilde{1010}\rangle + |\beta; 1010, \widetilde{0101}\rangle + |\beta; 1010, \widetilde{1010}\rangle \right\}. \quad (4.5)$$

Este é o estado para o qual iremos avaliar as propriedades não-clássicas do sistema. Primeiramente buscaremos definir o operador densidade associado a este estado com o intuito de determinar as características físicas do sistema termalizado.

4.2 Cálculo do Operador Densidade

O operador densidade ρ_β conterà, na sua estrutura, toda a informação sobre o ensemble estatístico. Vale salientar que o sistema estando em contato com o banho térmico é definido como um sistema aberto, ou seja, teremos um estado de mistura. Prontamente o operador densidade será de grande valia na obtenção de informações sobre o nosso sistema.

Dado o estado

$$|\psi(\beta)\rangle = \frac{1}{2} \left\{ |(\beta); 0101, \widetilde{0101}\rangle + |(\beta); 0101, \widetilde{1010}\rangle + |(\beta); 1010, \widetilde{0101}\rangle + |(\beta); 1010, \widetilde{1010}\rangle \right\} \quad (4.6)$$

e assumindo as relações (2.110), onde $|\psi(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger; \beta)|0(\beta)\rangle$, tem-se

$$\rho_{|\psi(\beta)\rangle} = f(a, a^\dagger; \beta)\rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; \beta), \quad (4.7)$$

onde $\rho_\beta = \rho_{|0(\beta)\rangle}$

Para uma melhor compreensão, designaremos os estados da superposição por termos: termo I, termo II, termo III e termo IV, ou seja,

$$|\psi(\beta)\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{|(\beta); 0101, \widetilde{0101}\rangle}_I + \underbrace{|(\beta); 1010, \widetilde{1010}\rangle}_II + \underbrace{|(\beta); 0101, \widetilde{1010}\rangle}_III + \underbrace{|(\beta); 1010, \widetilde{0101}\rangle}_IV \right\}. \quad (4.7)$$

O termo (I) será obtido pela atuação dos operadores de criação e aniquilação, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |(\beta); 0101, \widetilde{0101}\rangle &= a_2^\dagger(\beta)a_4^\dagger(\beta)\widetilde{a}_2^\dagger(\beta)\widetilde{a}_4^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \\ &= a_2^\dagger(\beta)a_4^\dagger(\beta)\frac{a_2(\beta)}{\nu(\beta)}\frac{a_4(\beta)}{\nu(\beta)}|0(\beta)\rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Utilizando $a^\dagger(\beta)a = aa^\dagger(\beta) - u(\beta)$, temos:

$$\begin{aligned} |(\beta); 0101, \widetilde{0101}\rangle &= \frac{1}{\nu^2(\beta)}[(a_2a_2^\dagger(\beta) - u(\beta))(a_4a_4^\dagger(\beta) - u(\beta))]|0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{\nu^2(\beta)}[a_2a_2^\dagger(\beta)a_4a_4^\dagger(\beta) - u(\beta)a_2a_2^\dagger(\beta) - u(\beta)a_4a_4^\dagger(\beta) + u^2(\beta)]|0(\beta)\rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde, para o operador $a^\dagger(\beta)$ é válida a relação $a^\dagger(\beta) = \frac{a^\dagger}{u(\beta)}$; então

$$\begin{aligned} |(\beta); 0101, \widetilde{0101}\rangle &= \frac{1}{\nu^2(\beta)}\left[\frac{a_2a_2^\dagger a_4a_4^\dagger}{u^2(\beta)} - a_2a_2^\dagger - a_4a_4^\dagger + u^2(\beta)\right]|0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{\nu^2(\beta)u^2(\beta)}[a_2a_2^\dagger a_4a_4^\dagger - u^2(\beta)a_2a_2^\dagger - u^2(\beta)a_4a_4^\dagger + u^4(\beta)]|0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{\nu^2(\beta)u^2(\beta)}[(a_2a_2^\dagger + 1)(a_4a_4^\dagger + 1) - u^2(\beta)(a_2a_2^\dagger + 1) + \\ &\quad - u^2(\beta)(a_4a_4^\dagger + 1) + u^4(\beta)]|0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{\nu^2(\beta)u^2(\beta)}\left\{[a_2a_2^\dagger a_4a_4^\dagger + a_2a_2^\dagger + a_4a_4^\dagger + 1][-(1 + \nu^2(\beta))\right. \\ &\quad \left.(a_2a_2^\dagger + 1) - (1 + \nu^2(\beta))(a_4a_4^\dagger + 1) + (1 + \nu^2(\beta))^2]\right\}|0(\beta)\rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

e finalmente o termo(I) pode ser escrito em termos dos operadores de aniquilação e criação da seguinte forma

$$\begin{aligned} |(\beta); 0101, \widetilde{0101}\rangle &= \frac{1}{\nu^2(\beta)u^2(\beta)}[a_2a_2^\dagger a_4a_4^\dagger - \nu^2(\beta)(a_2a_2^\dagger + a_4a_4^\dagger) + \nu^4(\beta)]|0(\beta)\rangle \\ &= f_1|0(\beta)\rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Agora, para o segundo estado da soma representado pelo termo (II), temos

$$\begin{aligned}
|(\beta); 1010, \widetilde{1010}\rangle &= a_1^\dagger(\beta)a_3^\dagger(\beta)\widetilde{a}_1^\dagger(\beta)\widetilde{a}_3^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \\
&= a_1^\dagger(\beta)a_3^\dagger(\beta)\left\{\frac{a_1(\beta)}{\nu(\beta)}\frac{a_3(\beta)}{\nu(\beta)}\right\}|0(\beta)\rangle \\
&= \frac{a_1^\dagger(\beta)a_1(\beta)a_3^\dagger(\beta)a_3(\beta)}{\nu^2(\beta)}|0(\beta)\rangle \\
&= \frac{1}{\nu^2(\beta)}\left\{[(a_1a_1^\dagger - u(\beta))(a_3a_3^\dagger - u(\beta))]\right\}|0(\beta)\rangle \\
&= (u^2(\beta)\nu^2(\beta))^{-1}\left\{(a_1a_1^\dagger - u^2(\beta))(a_3a_3^\dagger - u^2(\beta))\right\}|0(\beta)\rangle = f_2|0(\beta)\rangle.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
&(u^2(\beta)\nu^2(\beta))^{-1}[(a_1a_1^\dagger a_3a_3^\dagger) - (a_1a_1^\dagger u^2(\beta) - a_3a_3^\dagger u^2(\beta) + u^4(\beta))]|0(\beta)\rangle = \\
&(u^2(\beta)\nu^2(\beta))^{-1}[(1 + a_1a_1^\dagger)(1 + a_3a_3^\dagger) - u^2(\beta)(1 + a_1a_1^\dagger) - u^2(\beta)(1 + a_3a_3^\dagger) + u^4(\beta)]|0(\beta)\rangle,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

obtendo finalmente para o termo II:

$$\begin{aligned}
|(\beta); 1010, \widetilde{1010}\rangle &= ((u^2(\beta)\nu^2(\beta))^{-1}[a_1a_1^\dagger a_3a_3^\dagger - \nu^2(\beta)(a_1a_1^\dagger + a_3a_3^\dagger) + \nu^4(\beta)]|0(\beta)\rangle \\
&= f_2|0(\beta)\rangle
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Partindo para identificar as funções que geram o III e IV termos, temos

$$\begin{aligned}
|(\beta); 0101, \widetilde{1010}\rangle &= a_2^\dagger(\beta)a_4^\dagger(\beta)\widetilde{a}_1^\dagger(\beta)\widetilde{a}_3^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \\
&= a_2^\dagger(\beta)a_4^\dagger(\beta)\frac{a_1a_3}{\nu^2(\beta)}|0(\beta)\rangle \\
&= \frac{a_2^\dagger(\beta)a_4^\dagger(\beta)a_1a_3}{\nu^2(\beta)}|0(\beta)\rangle
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e usando as relações de comutação:

$$[a^\dagger(\beta)_i, a_j] = -u(\beta)\delta_{ij}, \tag{4.16}$$

nota-se que os operadores comutam, possibilitando escrever o termo (III) como

$$\begin{aligned} |(\beta); 0101, \widetilde{1010}\rangle &= \frac{a_1 a_3 a_2^\dagger(\beta) a_4^\dagger(\beta)}{\nu^2(\beta)} |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{a_1 a_3 a_2^\dagger a_4^\dagger}{\nu^2(\beta) u^2(\beta)} |0(\beta)\rangle, \end{aligned} \quad (4.17)$$

obtendo assim para o termo III a função

$$|(\beta); 0101, \widetilde{1010}\rangle = \frac{a_1 a_3 a_2^\dagger a_4^\dagger}{\nu^2(\beta) u^2(\beta)} |0(\beta)\rangle = f_3 |0(\beta)\rangle. \quad (4.18)$$

Considerando o último estado da superposição, representado pelo termo IV, vem

$$\begin{aligned} |(\beta); 1010, \widetilde{0101}\rangle &= a_1^\dagger(\beta) a_3^\dagger(\beta) \widetilde{a}_2^\dagger(\beta) \widetilde{a}_4^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle \\ &= a_1^\dagger(\beta) a_3^\dagger(\beta) \frac{a_2 a_4}{\nu^2(\beta)} |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{a_1^\dagger a_3^\dagger a_2 a_4}{\nu^2(\beta) u^2(\beta)} |0(\beta)\rangle, \end{aligned} \quad (4.19)$$

que terá como resultado

$$|(\beta); 1010, \widetilde{0101}\rangle = \frac{a_2 a_4 a_1^\dagger a_3^\dagger}{\nu^2(\beta) u^2(\beta)} |0(\beta)\rangle = f_4 |0(\beta)\rangle. \quad (4.20)$$

Reescrevendo o estado $|\psi(\beta)\rangle$ em função dos operadores a e a^\dagger , obtemos

$$\begin{aligned} |\psi(\beta)\rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\nu^2(\beta) u^2(\beta)} [a_2 a_2^\dagger a_4 a_4^\dagger - \nu^2(\beta) (a_2 a_2^\dagger + a_4 a_4^\dagger) + \nu^4(\beta)] |0(\beta)\rangle + \right. \\ &\quad [(u^2(\beta) \nu^2(\beta))^{-1} [a_1 a_1^\dagger a_3 a_3^\dagger - \nu^2(\beta) (a_1 a_1^\dagger + a_3 a_3^\dagger) + \nu^4(\beta)] |0(\beta)\rangle + \\ &\quad \left. \left[\frac{a_1 a_3 a_2^\dagger a_4^\dagger}{\nu^2(\beta) u^2(\beta)} |0(\beta)\rangle + \frac{a_2 a_4 a_1^\dagger a_3^\dagger}{\nu^2(\beta) u^2(\beta)} |0(\beta)\rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Em posse das funções f_1, f_2, f_3, f_4 assumindo a relação (4.7) e considerando somente as partes que dão contribuições diferentes de zero, teremos

$$\rho_{|\psi(\beta)\rangle} = f_1 \rho_\beta f_1^\dagger + f_2 \rho_\beta f_2^\dagger + f_3 \rho_\beta f_3^\dagger + f_4 \rho_\beta f_4^\dagger. \quad (4.22)$$

Calculemos então

$$f_1 \rho_\beta f_1^\dagger = \frac{1}{2} (u^4(\beta) \nu^4(\beta))^{-1} [a_2^\dagger a_2 a_4^\dagger a_4 - \nu^2(\beta) (a_2^\dagger a_2 + a_4^\dagger a_4) + \nu^4(\beta)] \rho_{(\beta)} \\ [a_2^\dagger a_2 a_4^\dagger a_4 - \nu^2(\beta) (a_2^\dagger a_2 + a_4^\dagger a_4)]^\dagger + \nu^4(\beta)], \quad (4.23)$$

o que dá [veja eq.(2.107)]

$$f_1 \rho_\beta f_1^\dagger = \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\ \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \\ [a_2^\dagger a_2 a_4^\dagger a_4 - \nu^2(\beta) (a_2^\dagger a_2 + a_4^\dagger a_4) + \nu^4(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \\ \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | [a_2^\dagger a_2 a_4^\dagger a_4 - \nu^2(\beta) (a_2^\dagger a_2 + a_4^\dagger a_4) + \nu^4(\beta)]^\dagger \\ = \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\ \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \\ (n_2 n_4) - \nu^2(\beta) (n_2 + n_4) + \nu^4(\beta) |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | \\ (n_2 n_4) - \nu^2(\beta) (n_2 + n_4) + \nu^4(\beta) \\ = \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} (n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta) \\ (n_2 n_4) (n_2 + n_4) + \nu^4 (n_2 n_4) - \nu^2 (n_2 n_4) (n_2 + n_4) + \nu^4 (n_2 + n_4)^2 + \\ - \nu^6 (n_2 + n_4) + \nu^4 (n_2 n_4) - \nu^6 (n_2 + n_4) + \nu^8 (|n_1, n_2, n_3, n_4\rangle, \quad (4.24)$$

resultando por fim,

$$f_1 \rho_\beta f_1^\dagger = \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\ \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \\ [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta) (n_2 n_4) (n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta) (n_2 n_4) + \nu^4(\beta) (n_2 + n_4)^2 \\ - 2\nu^6(\beta) (n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4|. \quad (4.25)$$

onde $\bar{n}_i(\beta) = [e^{-\beta \omega_i} - 1]^{-1}$.

Prosseguindo com os cálculos determinemos $f_2\rho_\beta f_2^\dagger$:

$$\begin{aligned}
f_2\rho_\beta f_2^\dagger &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}\right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1}] \\
&\quad [a^\dagger_1 a_1 a^\dagger_3 a_3 - \nu^2(\beta)(a^\dagger_1 a_1 + a^\dagger_3 a_3) + \nu^4(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \\
&\quad \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | [a^\dagger_1 a_1 a^\dagger_3 a_3 - \nu^2(\beta)(a^\dagger_1 a_1 + a^\dagger_3 a_3) + \nu^4(\beta)]^\dagger \\
&= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}\right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1}] \\
&\quad (n_1 n_3) - \nu^2(\beta)(n_1 + n_3)\nu^4(\beta) |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | \\
&\quad (n_1 n_3) - \nu^2(\beta)(n_1 + n_3)\nu^4(\beta) \\
&= \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}\right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1}] \\
&\quad (n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + \nu^4(n_1 n_3) - \nu^2(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + \\
&\quad \nu^4(n_1 + n_3)^2 - \nu^6(n_1 + n_3) + \nu^4(n_1 n_3) - \nu^6(n_1 + n_3) + \nu^8(|n_1, n_2, n_3, n_4\rangle, \\
\end{aligned} \tag{4.26}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
f_2\rho_\beta f_2^\dagger &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}\right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}\right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1}] \\
&\quad [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 \\
&\quad + 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4|. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Cálculo de $f_3 \rho_\beta f_3^\dagger$:

$$\begin{aligned}
f_3 \rho_\beta f_3^\dagger &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [(u^4(\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1}] \\
&\quad [a_1 a_3 a_2^\dagger a_4^\dagger] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| [a_1 a_3 a_2^\dagger a_4^\dagger]^\dagger \\
&= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) (u^4(\beta)) \nu^4(\beta)^{-1} \\
&\quad (\sqrt{n_1} \sqrt{n_3} \sqrt{n_2 + 1} \sqrt{n_4 + 1}) |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1\rangle \\
&\quad \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1| (\sqrt{n_1} \sqrt{n_3} \sqrt{n_2 + 1} \sqrt{n_4 + 1}) \\
&= [n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1)] |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1\rangle \\
&\quad \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1|, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

gerando

$$\begin{aligned}
f_3 \rho_\beta f_3^\dagger &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1}] \\
&\quad n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1) |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1\rangle \\
&\quad \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1|. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Partindo para o cálculo do último termo da expressão (4.22), temos

$$\begin{aligned}
f_4 \rho_\beta f_4^\dagger &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [(u^4(\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \\
&\quad [a_2 a_4 a_1^\dagger a_3^\dagger | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | [a_2 a_4 a_1^\dagger a_3^\dagger]^\dagger \\
&= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \\
&\quad [\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2} \sqrt{n_3 + 1} \sqrt{n_4}] | n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1 \rangle \\
&\quad \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1 | [\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2} \sqrt{n_3 + 1} \sqrt{n_4}] \\
&= (n_1 + 1) n_2 (n_3 + 1) n_4 | n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 \rangle \\
&\quad \langle n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 |,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

finalizando assim os cálculos dos termos da equação (4.24)

$$\begin{aligned}
f_4 \rho_\beta f_4^\dagger &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \\
&\quad (n_1 + 1) n_2 (n_3 + 1) n_4 | n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 \rangle \\
&\quad \langle n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 |.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por fim o operador densidade, escrito na forma completa, é dado por:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\psi(\beta)\rangle} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta)\nu^4(\beta)]^{-1} \right. \\
& [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 \\
& - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| \\
& [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 \\
& - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| \\
& n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1) |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1\rangle \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1| \\
& \left. (n_1 + 1)n_2(n_3 + 1)n_4 |n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1\rangle \langle n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1| \right\}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

A obtenção do operador densidade se faz de grande valia pois através dele, seremos capazes de analisar as propriedades quânticas do nosso sistema, levando em conta o efeito da temperatura.

4.3 Obtenção da Fidelidade Quântica

Suponha que nosso sistema sofra uma perturbação proveniente de um banho térmico; a idéia central desta seção é definir a fidelidade para traçarmos um perfil de como a temperatura está influenciando na transmissão da informação quântica, ou seja, a consequência do banho térmico sobre possíveis ações de interesse como, por exemplo, portas lógicas. Dada a fidelidade

$$F = \sqrt{\langle \psi | \rho_{|\psi(\beta)\rangle} | \psi \rangle}, \tag{4.33}$$

esta grandeza definirá a "distância" entre o estado de origem

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1010\rangle + |0101\rangle) \tag{4.34}$$

e o estado após a perturbação térmica, e utilizaremos para o seu cálculo o operador densidade $\rho_{|\psi(\beta)\rangle}$ dado pela expressão (4.93).

Determinemos então

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \rho_{|\psi(\beta)\rangle} | \psi \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ (\langle 1010 | + \langle 0101 |) [\rho_{|\beta;0101,\widehat{0101}\rangle} + \rho_{|\beta;0101,\widehat{1010}\rangle} + \right. \\
&\quad \left. \rho_{|\beta;1010,\widehat{0101}\rangle} + \rho_{|\beta;1010,\widehat{1010}\rangle} (|1010\rangle + |0101\rangle) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ (\langle 1010 | + \langle 0101 |) \rho_{|\beta;0101,\widehat{0101}\rangle} (|1010\rangle + |0101\rangle) + \right. \\
&\quad (\langle 1010 | + \langle 0101 |) \rho_{|\beta;0101,\widehat{1010}\rangle} (|1010\rangle + |0101\rangle) + \\
&\quad (\langle 1010 | + \langle 0101 |) \rho_{|\beta;1010,\widehat{0101}\rangle} (|1010\rangle + |0101\rangle) + \\
&\quad \left. (\langle 1010 | + \langle 0101 |) \rho_{|\beta;1010,\widehat{1010}\rangle} (|1010\rangle + |0101\rangle) \right\}, \quad (4.35)
\end{aligned}$$

onde os cálculos serão efetuados na seguinte ordem.

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \rho_{|\psi(\beta)\rangle} | \psi \rangle &= \langle 1010 | \rho(\beta) | 1010 \rangle + \longrightarrow F.I, \\
&\quad \langle 1010 | \rho(\beta) | 0101 \rangle + \longrightarrow F.II, \\
&\quad \langle 0101 | \rho(\beta) | 1010 \rangle + \longrightarrow F.III, \\
&\quad \langle 0101 | \rho(\beta) | 0101 \rangle + \longrightarrow F.IV, \quad (4.36)
\end{aligned}$$

com $\rho(\beta) = \rho_{|\beta;0101,\widehat{0101}\rangle} + \rho_{|\beta;0101,\widehat{1010}\rangle} + \rho_{|\beta;1010,\widehat{0101}\rangle} + \rho_{|\beta;1010,\widehat{1010}\rangle}$.

Calculemos primeiramente F.I,

$$\begin{aligned}
\langle 1010 | \rho_{|\beta;0101,\widehat{0101}\rangle} | 1010 \rangle &= \\
\langle 1010 | &\left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
&\left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\
&[(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 + \\
&\left. - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| | 1010 \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \right. \\
&\quad \left. [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 + \right. \\
&\quad \left. - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] \langle 1010 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | 1010 \rangle, \right. \\
&= \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \right. \\
&\quad \left. [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 + \right. \\
&\quad \left. - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] \langle 1010 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle^2 \right. \\
&= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 = n_3 = 1; n_2 = n_4 = 0} \\
&\quad \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \\
&\quad [\nu^8(\beta)] \langle 1010 | 1010 \rangle^2. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Definindo

$$K = \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \tag{4.38}$$

e introduzindo a notação $S_{n_i, n_k}^{n_i, n_j}$ para os termos com somatório, tem-se para (4.36)

$$S_{n_1 = n_3 = 1}^{n_2 = n_4 = 0} = \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 = n_3 = 1}^{n_2 = n_4 = 0}; \tag{4.39}$$

e podemos escrever

$$\langle 1010 | \rho_{|\beta; 0101, \widehat{0101}} | 1010 \rangle = S_{n_1 = n_3 = 1}^{n_2 = n_4 = 0} K [\nu^8(\beta)]. \tag{4.40}$$

Calculando o segundo termo de F.I, teremos

$$\begin{aligned}
& \langle 1010 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{1010}} | 1010 \rangle = \\
& \langle 1010 | [\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \\
& (\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}) (\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}) (\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}) (\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1}] \\
& [n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1)] |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1 \rangle \\
& \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1 | | 1010 \rangle \\
& = [\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 = n_3 = 2, n_2 = n_4 = -1}^{\infty} \\
& (\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}) (\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}) (\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}) (\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1}] \\
& (2)(-1 + 1)(2)(-1 + 1) | \langle 1010 | 2 - 1, -1 + 1, 2 - 1, -1 + 1 \rangle |^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Prosseguindo no cálculo para F.I

$$\begin{aligned}
& \langle 1010 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{0101}} | 1010 \rangle = \\
& \langle 1010 | [\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \\
& (\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}) (\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}) (\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}) (\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1}] \\
& [(n_1 + 1)n_2(n_3 + 1)n_4] |n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 \rangle \\
& \langle n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 | | 1010 \rangle \\
& = [\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 = n_3 = 0, n_2 = n_4 = 1}^{\infty} \\
& (\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)}) (\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)}) (\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)}) (\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)}) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1}] \\
& (1)(0 + 1)(1)(0 + 1) | \langle 1010 | 0 + 1, 1 - 1, 0 + 1, 1 - 1 \rangle |^2,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

gerando

$$\langle 1010 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{0101}} | 1010 \rangle = S_{n_1 = n_3 = 0}^{n_2 = n_4 = 1} K \tag{4.43}$$

e para finalizarmos o cálculo de F.I

$$\begin{aligned}
& \langle 1010 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{1010}} | 1010 \rangle = \\
& \langle 1010 | \left[\frac{1}{(1 + \overline{n_1(\beta)})(1 + \overline{n_2(\beta)})(1 + \overline{n_3(\beta)})(1 + \overline{n_4(\beta)})} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\frac{\overline{n_1}}{1 + \overline{n_1}} \right) \left(\frac{\overline{n_2}}{1 + \overline{n_2}} \right) \left(\frac{\overline{n_3}}{1 + \overline{n_3}} \right) \left(\frac{\overline{n_4}}{1 + \overline{n_4}} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \right. \\
& \left. [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 \right. \\
& \left. - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| \right] | 1010 \rangle \\
& = \left[\frac{1}{(1 + \overline{n_1(\beta)})(1 + \overline{n_2(\beta)})(1 + \overline{n_3(\beta)})(1 + \overline{n_4(\beta)})} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\frac{\overline{n_1}}{1 + \overline{n_1}} \right) \left(\frac{\overline{n_2}}{1 + \overline{n_2}} \right) \left(\frac{\overline{n_3}}{1 + \overline{n_3}} \right) \left(\frac{\overline{n_4}}{1 + \overline{n_4}} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \right. \\
& \left. [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 \right. \\
& \left. - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] \langle 1010 | |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| \right] | 1010 \rangle \\
& = \left[\frac{1}{(1 + \overline{n_1(\beta)})(1 + \overline{n_2(\beta)})(1 + \overline{n_3(\beta)})(1 + \overline{n_4(\beta)})} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\frac{\overline{n_1}}{1 + \overline{n_1}} \right) \left(\frac{\overline{n_2}}{1 + \overline{n_2}} \right) \left(\frac{\overline{n_3}}{1 + \overline{n_3}} \right) \left(\frac{\overline{n_4}}{1 + \overline{n_4}} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \right. \\
& \left. [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 \right. \\
& \left. - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] \right] |\langle 1010 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle|^2; \tag{4.44}
\end{aligned}$$

concluindo

$$\begin{aligned}
& \langle 1010 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{1010}} | 1010 \rangle = \\
& \frac{1}{(1 + \overline{n_1(\beta)})(1 + \overline{n_2(\beta)})(1 + \overline{n_3(\beta)})(1 + \overline{n_4(\beta)})} \sum_{n_1 = n_3 = 1; n_2 = n_4 = 0}^{\infty} \\
& \left(\frac{\overline{n_1}}{1 + \overline{n_1}} \right) \left(\frac{\overline{n_2}}{1 + \overline{n_2}} \right) \left(\frac{\overline{n_3}}{1 + \overline{n_3}} \right) \left(\frac{\overline{n_4}}{1 + \overline{n_4}} \right) [u^4(\beta) \nu^4(\beta)]^{-1} \\
& [1 - 2\nu^2(\beta) + 2\nu^4(\beta) + 4\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + \nu^8(\beta)] |\langle 1010 | 1010 \rangle|^2, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

ou seja:

$$\langle 1010 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{1010}} | 1010 \rangle = S_{n_1 = n_3 = 1}^{n_2 = n_4 = 0} K [1 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + \nu^8(\beta)]. \tag{4.46}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\langle 1010|\rho(\beta)|1010\rangle &= S_{n_1=n_3=1}^{n_2=n_4=0}K[1 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + \nu^8(\beta)] \\
&\quad + S_{n_1=n_3=0}^{n_2=n_4=1}K + S_{n_1=n_3=1}^{n_2=n_4=0}K[\nu^8(\beta)] \\
&= S_{n_1=n_3=0}^{n_2=n_4=1}K + S_{n_1=n_3=1}^{n_2=n_4=0}K[1 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) \\
&\quad - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)].
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Passemos ao cálculo de F.II, ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle 1010|\rho(\beta)|0101\rangle &= \langle 1010|\rho_{|\beta;0101,\widetilde{0101}}|0101\rangle + \langle 1010|\rho_{|\beta;0101,\widetilde{1010}}|0101\rangle + \\
&\quad \langle 1010|\rho_{|\beta;1010,\widetilde{0101}}|0101\rangle + \langle 1010|\rho_{|\beta;1010,\widetilde{1010}}|0101\rangle.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Calculando termo a termo, temos para a primeira parcela

$$\begin{aligned}
\langle 1010|\rho_{|\beta;0101,\widetilde{0101}}|0101\rangle &= \\
\langle 1010| &\left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \right. \\
&\left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\
&[(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 \\
&+ 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4|0101\rangle,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

gerando

$$\begin{aligned}
\langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{0101}} | 0101 \rangle = & \\
\langle 1010 | [& \frac{1}{(1 + \overline{n_1(\beta)})(1 + \overline{n_2(\beta)})(1 + \overline{n_3(\beta)})(1 + \overline{n_4(\beta)})} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \\
& (\frac{\overline{n_1(\beta)}}{1 + \overline{n_1(\beta)}})(\frac{\overline{n_2(\beta)}}{1 + \overline{n_2(\beta)}})(\frac{\overline{n_3(\beta)}}{1 + \overline{n_3(\beta)}})(\frac{\overline{n_4(\beta)}}{1 + \overline{n_4(\beta)}}) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1}] \\
& [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 + \\
& 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] \langle 1010 | n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4 | 0101 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Observando a equação (4.50) notamos que não será possível atribuir valores a n_1, n_2, n_3 ou n_4 capazes de gerar uma configuração diferente de $\langle 1010 | 0101 \rangle \langle 1010 | 0101 \rangle$, e como $\langle i | j \rangle = 0$ (estados ortogonais) e termos de comportamento similar aparecem nas demais parcelas de F.II e em F.III, segue que tanto F.II como F.III não contribuirão para o cálculo da fidelidade.

Resta então o cálculo de F.IV

$$\begin{aligned}
\langle 0101 | \rho(\beta) | 0101 \rangle = & \langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{0101}} | 0101 \rangle + \langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{1010}} | 0101 \rangle + \\
& \langle 0101 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{0101}} | 0101 \rangle + \langle 0101 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{1010}} | 0101 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

A primeira parcela nos dá

$$\begin{aligned}
& \langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{0101}} | 0101 \rangle = \\
& \langle 0101 | \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\
& [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 \\
& - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| | 0101 \rangle \\
& = \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 = n_3 = 0, n_2 = n_4 = 1} \right. \\
& \left. \left(\frac{\bar{n}_1}{1 + \bar{n}_1} \right) \left(\frac{\bar{n}_2}{1 + \bar{n}_2} \right) \left(\frac{\bar{n}_3}{1 + \bar{n}_3} \right) \left(\frac{\bar{n}_4}{1 + \bar{n}_4} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\
& [1 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + \nu^8(\beta)] | \langle 0101 | | 0101 \rangle |^2,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

resultando em

$$\langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{0101}} | 0101 \rangle = S_{n_1 = n_3 = 0}^{n_2 = n_4 = 1} K [1 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + \nu^8(\beta)]; \tag{4.53}$$

a segunda parcela conduz a

$$\begin{aligned}
& \langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{1010}} | 0101 \rangle = \\
& \langle 0101 | \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\
& [n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1)] |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1\rangle \\
& \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1 | | 0101 \rangle,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{10\overline{10}}} | 0101 \rangle = \\ \left[\frac{1}{(1 + \overline{n_1}(\beta))(1 + \overline{n_2}(\beta))(1 + \overline{n_3}(\beta))(1 + \overline{n_4}(\beta))} \sum_{n_1=n_3=1}^{n_2=n_4=0} \right. \\ \left. \left(\frac{\overline{n_1}(\beta)}{1 + \overline{n_1}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_2}(\beta)}{1 + \overline{n_2}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_3}(\beta)}{1 + \overline{n_3}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_4}(\beta)}{1 + \overline{n_4}(\beta)} \right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\ |\langle 0101 || 0101 \rangle|^2 \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{10\overline{10}}} | 0101 \rangle = S_{n_2=n_4=0}^{n_1=n_3=1} K. \quad (4.55)$$

A parcela seguinte é

$$\begin{aligned} \langle 0101 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{0\overline{10\overline{1}}}} | 0101 \rangle = \\ \langle 0101 | \left[\frac{1}{(1 + \overline{n_1}(\beta))(1 + \overline{n_2}(\beta))(1 + \overline{n_3}(\beta))(1 + \overline{n_4}(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4=0}^{\infty} \right. \\ \left. \left(\frac{\overline{n_1}(\beta)}{1 + \overline{n_1}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_2}(\beta)}{1 + \overline{n_2}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_3}(\beta)}{1 + \overline{n_3}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_4}(\beta)}{1 + \overline{n_4}(\beta)} \right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\ [(n_1 + 1)n_2(n_3 + 1)n_4] |n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 \rangle \\ \langle n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1 | | 0101 \rangle \\ = \left[\frac{1}{(1 + \overline{n_1}(\beta))(1 + \overline{n_2}(\beta))(1 + \overline{n_3}(\beta))(1 + \overline{n_4}(\beta))} \sum_{n_2=n_4=2}^{n_1=n_3=-1} \right. \\ \left. \left(\frac{\overline{n_1}(\beta)}{1 + \overline{n_1}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_2}(\beta)}{1 + \overline{n_2}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_3}(\beta)}{1 + \overline{n_3}(\beta)} \right) \left(\frac{\overline{n_4}(\beta)}{1 + \overline{n_4}(\beta)} \right) [u^4((\beta))\nu^4(\beta)]^{-1} \right] \langle 0101 | 0101 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Por fim, o último termo de F.IV, ou seja,

$$\begin{aligned}
& \langle 0101 | \rho_{|\beta; 1010, \widetilde{1010}} | 0101 \rangle = \\
& \langle 0101 | \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\
& [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 + \\
& - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| | 0101 \rangle \\
& = \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_2 = n_4 = 1}^{n_1 = n_3 = 0} \right. \\
& \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4((\beta)) \nu^4(\beta)]^{-1} \right] \\
& [\nu^8(\beta)] |\langle 0101 | 0101 \rangle|^2,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

pode ser escrito sob a forma:

$$\langle 0101 | \rho_{|\beta; 0101, \widetilde{0101}} | 0101 \rangle = S_{n_2 = n_4 = 0}^{n_1 = n_3 = 0} K [\nu^8(\beta)]. \tag{4.58}$$

Usando os resultados (4.52), (4.54), (4.55) e (4.57) em (4.50) temos

$$\begin{aligned}
\langle 0101 | \rho(\beta) | 0101 \rangle &= S_{n_2 = n_4 = 0}^{n_1 = n_3 = 1} K + \\
& S_{n_2 = n_4 = 1}^{n_1 = n_3 = 0} K [1 - 4\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)].
\end{aligned} \tag{4.59}$$

De posse dos termos F.I, F.II, F.III e F.IV, podemos escrever o termo que define a Fidelidade:

$$\begin{aligned}
F &= \sqrt{\frac{1}{4} \langle \psi | \rho_{|\psi(\beta)} | \psi \rangle} \\
&= \left\{ \frac{1}{4} S_{n_1 = n_3 = 0}^{n_2 = n_4 = 1} K + S_{n_1 = n_3 = 1}^{n_2 = n_4 = 0} K + \right. \\
& \left. [1 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] S_{n_1 = n_3 = 1}^{n_2 = n_4 = 0} K + \right. \\
& \left. S_{n_2 = n_4 = 1}^{n_1 = n_3 = 0} K [1 - 4\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \frac{1}{4} S_{n_1=n_3=1}^{n_2=n_4=0} K [2 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] + \right. \\
&\quad \left. S_{n_2=n_4=1}^{n_1=n_3=0} K [2 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \frac{1}{4} S_{n_2=n_4=0}^{n_1=n_3=1} K [2 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] \right. \\
&\quad \left. S_{n_2=n_4=1}^{n_1=n_3=0} K [2 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{(\nu^4(\beta)u^4)(\beta)} \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \frac{\bar{n}_2(\beta)}{(1 + \bar{n}_2(\beta))} \frac{\bar{n}_4(\beta)}{(1 + \bar{n}_4(\beta))} \right] \right. \\
&\quad [2 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] + \\
&\quad \left. \left[\frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))} \frac{\bar{n}_1(\beta)}{(1 + \bar{n}_1(\beta))} \frac{\bar{n}_3(\beta)}{(1 + \bar{n}_3(\beta))} \right] \right. \\
&\quad \left. [2 - 2\nu^2(\beta) + 6\nu^4(\beta) - 4\nu^6(\beta) + 2\nu^8(\beta)] \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

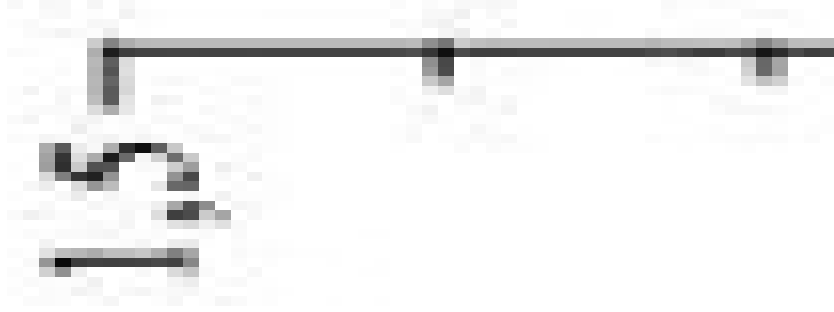
Assumindo as frequências, nos modos de vibração do campo eletromagnético, iguais, teremos da equação (4.60) $\bar{n}_1(\beta) = \bar{n}_2(\beta) = \bar{n}_3(\beta) = \bar{n}_4(\beta) = \bar{n}(\beta)$ o que resulta

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(\nu^4(\beta)u^4)(\beta)} \frac{1}{(1 + \bar{n}(\beta))^2} \frac{\bar{n}^2(\beta)}{(1 + \bar{n}(\beta))^2} \right. \\
&\quad \left. [4 - 4\nu^2(\beta) + 12\nu^4(\beta) - 8\nu^6(\beta) + 4\nu^8(\beta)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\bar{n}(\beta)^2(1 + \bar{n}(\beta))^2} \frac{1}{(1 + \bar{n}(\beta))^2} \frac{\bar{n}^2(\beta)}{(1 + \bar{n}(\beta))^2} \right. \\
&\quad \left. [4 - 4\nu^2(\beta) + 12\nu^4(\beta) - 8\nu^6(\beta) + 4\nu^8(\beta)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \frac{1 - \nu^2(\beta) + 3\nu^4(\beta) - 2\nu^6(\beta) + \nu^8(\beta)}{(1 + \nu^2(\beta))^6} \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

que, em termos do $\bar{n}(\beta)$, é escrita como

$$F = \left\{ \frac{1 - \bar{n}(\beta) + 3\bar{n}^2(\beta) - 2\bar{n}^3(\beta) + \bar{n}^4(\beta)}{(1 + \bar{n}(\beta))^6} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.61}$$

A expressão (4.61) é invariante sob a transformação $t \rightarrow -t$, o que mostra que a fidelidade é a mesma para tempos positivos e negativos.



devido o contato com o banho térmico. O intervalo de temperatura entre $\bar{n}(\beta) = 0$ e $\bar{n}(\beta) = 0,2$ determina a região onde a implantação das portas lógicas quânticas ocorre de forma mais segura.

4.4 Fator de Mandel

O fator de Mandel é um importante parâmetro para caracterizar as propriedades estatísticas dos sistemas, sendo definido por:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle}{\langle \hat{N} \rangle} \\
 &= \frac{\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2}{\langle \hat{N} \rangle} - 1.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

A depender do valor definido pelo fator de Mandel teremos um tipo de estatística associada ao sistema. Dizemos que a estatística do estado é sub-Poissoniana se $Q < 0$, se $Q = 0$ temos a estatística Poissoniana e, para valores de $Q > 0$, a estatística super-Poissoniana. Calculemos os termos que aparecem em (4.62).

•Cálculo do valor esperado do operador número N

Como o nosso sistema tem múltiplos modos, o operador número será escrito da forma,

$$\hat{N} = \sum_{k=1}^4 a_k^\dagger a_k = \sum_{k=1}^4 \hat{N}_k. \quad (4.63)$$

O operador número será capaz de fazer a contagem dos fótons nos modos do campo eletromagnético. Um passo importante para determinar Q é encontrar o valor esperado do operador número para o estado termalizado $|\psi(\beta)\rangle$; desta forma

$$\begin{aligned} \langle \psi(\beta) | \hat{N} | \psi(\beta) \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ [\langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | + \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | + \langle \widetilde{0101}, 1010; \beta | \right. \\ &\quad \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta |] \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ &\quad \left. + | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle + | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Os termos que compõem este produto são escritos como:

$$\begin{aligned} \langle \psi(\beta) | \hat{N} | \psi(\beta) \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \right. \\ &+ \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ &+ \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ &+ \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ &+ \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ &+ \langle \widetilde{0101}, 1010; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{0101}, 1010; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ &+ \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \hat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ &\left. + \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle + \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \hat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Para facilitar o entendimento dos cálculos, denominaremos as parcelas de N_i , ou

seja,

$$\begin{aligned} \langle \psi(\beta) | \widehat{N} | \psi(\beta) \rangle &= \frac{1}{4} \{ N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 \\ &+ N_9 + N_{10} + N_{11} + N_{12} + N_{13} + N_{14} + N_{15} + N_{16} \}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle; \\ N_2 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_3 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle; \\ N_4 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ N_5 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\ N_6 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_7 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle \\ N_8 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ N_9 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{10} = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_{11} = \langle \widetilde{0101}, 1010; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{12} = \langle \widetilde{0101}, 1010; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ N_{13} = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{14} = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N} | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_{15} = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{16} = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N} | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle. \end{array} \right.$$

Devemos lembrar que os operadores de aniquilação e criação não termalizados podem ser escritos em função dos operadores termalizados com o uso das eqs. (2.62-2.65); podemos então escrever o nosso operador número,

$$\begin{aligned} \widehat{N} &= \sum_k (u^2(\beta) a_k^\dagger(\beta) a_k(\beta) + u(\beta) \nu(\beta) a_k^\dagger(\beta) \widetilde{a}_k(\beta) + \\ &u(\beta) \nu(\beta) \widetilde{a}_k(\beta) a_k(\beta) + \nu^2(\beta) \widetilde{a}_k(\beta) \widetilde{a}_k^\dagger(\beta)). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Substituindo a relação(4.67) em N_1 , teremos

$$\sum_k (\langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (u^2(\beta)a_k^\dagger(\beta)a_k(\beta) + u(\beta)\nu(\beta)a_k^\dagger(\beta)\tilde{a}_k(\beta) + u(\beta)\nu(\beta)\tilde{a}_k(\beta)a_k(\beta) + \nu^2(\beta)\tilde{a}_k(\beta)\tilde{a}_k^\dagger(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle) = \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_k (\langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (u^2(\beta)a_k^\dagger(\beta)a_k(\beta)) | \beta; 0101, 0101 \rangle + \\ &\quad \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | u(\beta)\nu(\beta)a_k^\dagger(\beta)\tilde{a}_k(\beta) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + \\ &\quad \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (u(\beta)\nu(\beta)\tilde{a}_k(\beta)a_k(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + \\ &\quad \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (\nu^2(\beta)\tilde{a}_k(\beta)\tilde{a}_k^\dagger(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Calculando separadamente cada termo da expressão (4.69)

$$\begin{aligned} &\langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (u^2(\beta) \sum_{k=1}^4 a_k^\dagger(\beta)\tilde{a}_k(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = \\ &u^2(\beta) \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (U(\beta) \sum_{k=1}^4 (a_k^\dagger(\beta)U^\dagger(\beta)U(\beta)a_k(\beta)U^\dagger(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle + \\ &u^2(\beta) \langle 0101, \widetilde{0101}; \beta | (a_1^\dagger(\beta)a_1(\beta) + a_2^\dagger(\beta)a_2(\beta) + a_3^\dagger(\beta)a_3(\beta) + \\ &a_4^\dagger(\beta)a_4(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = \\ &2u^2(\beta) + 3\nu^2(\beta); \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} &\langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (u(\beta)\nu(\beta) \sum_{k=1}^4 a_k^\dagger(\beta)\tilde{a}_k(\beta)^\dagger) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = \\ &u(\beta)\nu(\beta) \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_1^\dagger(\beta) + \\ &a_2^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) + a_3^\dagger(\beta)\tilde{a}_3^\dagger(\beta) + a_4^\dagger(\beta)\tilde{a}_4^\dagger(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = \\ &6u(\beta)\nu(\beta) \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \beta; 1212, \widetilde{1212} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

De forma similar, obtemos que:

$$u(\beta)\nu(\beta) \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \sum_{k=1}^4 \tilde{a}_k(\beta)a_k | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = 0 \quad (4.72)$$

e

$$\begin{aligned}
& \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \nu^2(\beta) \sum_{k=1}^4 \widetilde{a}_k(\beta) \widetilde{a}_k(\beta) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = \\
& \nu^2(\beta) \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \sum_{k=1}^4 (1 + a_k^\dagger(\beta) a_k(\beta)) | \beta; \widetilde{0101}, 0101 \rangle = \\
& \nu^2(\beta) + \nu^2(\beta) \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | (a_1^\dagger(\beta) a_1(\beta) + a_2^\dagger(\beta) a_2(\beta) + \\
& a_3^\dagger(\beta) a_3(\beta) + a_4^\dagger(\beta) a_4(\beta)) | \beta; \widetilde{0101}, 0101 \rangle = 3\nu^2(\beta).
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Fazendo esse desenvolvimento para os dezesseis termos da eq.(4.78) e assumindo a ortogonalidade entre os estados obtemos que $N_1 = N_6 = N_{11} = N_{16}$, sendo que os outros termos não trarão contribuição. Logo

$$\langle \psi(\beta) | \sum_k \widehat{N}_k | \psi(\beta) \rangle = \frac{1}{4} [8u^2(\beta) + 12\nu^2(\beta)]. \tag{4.74}$$

• **Cálculo do valor esperado do operador número quadrático**

O operador número quadrático em termos dos operadores termalizados é dado pela forma

$$\begin{aligned}
\widehat{N}^2 = & u^4(\beta) \widehat{N}^2(\beta) + \nu^4(\beta) (\widetilde{N}(\beta) + 1)^2 + u^2(\beta) \nu^2(\beta) (3\widetilde{N}(\beta) + 1) + \\
& (\widehat{N}(\beta) + 1) \widetilde{N}(\beta) + [\sum_k a_k^2(\beta) \widetilde{a}_k^2(\beta)] + [\sum_k a_k^{\dagger 2}(\beta) \widetilde{a}_k^{\dagger 2}(\beta)] + 1 + \\
& u^3(\beta) \nu(\beta) (\widehat{N}(\beta) + 1) [\sum_k a_k(\beta) \widetilde{a}_k(\beta)] + (2\widehat{N}(\beta) - 1) [\sum_k a_k^\dagger(\beta) \widetilde{a}_k^\dagger(\beta)] + \\
& u(\beta) \nu^3(\beta) (2\widetilde{N}(\beta) + 3) + [\sum_k a_k(\beta) \widetilde{a}_k(\beta)] + (2\widetilde{N}(\beta) + 1) [\sum_k a_k^\dagger(\beta) \widetilde{a}_k^\dagger(\beta)],
\end{aligned} \tag{4.75}$$

onde $\widehat{N}(\beta) = \sum_k a_k^\dagger(\beta) a_k(\beta)$ e $\widetilde{N}(\beta) = \sum_k \widetilde{a}_k(\beta) \widetilde{a}_k^\dagger(\beta)$. A partir da experiência com o operador número \widehat{N} , percebemos que não precisamos tratar os termos com os operadores "cruzados" pois ao final da operação, teremos um braket de estados ortogonais e vale notar que $\langle n' | n \rangle = \delta_{n', n}$. Reavaliando assim o operador número

quadrático, trabalharemos com :

$$\widehat{N}^2 = u^4(\beta)\widehat{N}^2(\beta) + \nu^4(\beta)(\widetilde{N}(\beta) + 1)^2 + u^2\nu^2[3(\widetilde{N}(\beta) + 1) + (\widehat{N}(\beta) + 1)\widetilde{N}(\beta)]. \quad (4.76)$$

O valor médio do operador número ao quadrado, \widehat{N}^2 , no estado termalizado $|\psi(\beta)\rangle$ é

$$\begin{aligned} \langle\psi(\beta)|\widehat{N}^2|\psi(\beta)\rangle &= \frac{1}{4}(\langle\widetilde{0101}, 0101; \beta| + \langle\widetilde{1010}, 0101; \beta| + \\ &\quad \langle\widetilde{0101}, 1010; \beta| + \langle\widetilde{1010}, 1010; \beta|)\widehat{N}^2(|\beta; 0101, \widetilde{0101}\rangle + \\ &\quad |\beta; 0101, \widetilde{1010}\rangle + |\beta; 1010, \widetilde{0101}\rangle + |\beta; 1010, \widetilde{1010}\rangle), \end{aligned} \quad (4.77)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle\psi(\beta)|\widehat{N}^2|\psi(\beta)\rangle &= \langle\widetilde{0101}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{0101}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{1010}\rangle \\ &+ \langle\widetilde{0101}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{0101}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{1010}\rangle \\ &+ \langle\widetilde{1010}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{1010}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{1010}\rangle \\ &+ \langle\widetilde{1010}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{1010}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{1010}\rangle \\ &+ \langle\widetilde{1010}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{1010}, 0101; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{1010}\rangle \\ &+ \langle\widetilde{0101}, 1010; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{0101}, 1010; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{1010}\rangle \\ &+ \langle\widetilde{1010}, 1010; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{1010}, 1010; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 0101, \widetilde{1010}\rangle \\ &+ \langle\widetilde{1010}, 1010; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{0101}\rangle + \langle\widetilde{1010}, 1010; \beta|\widehat{N}^2|\beta; 1010, \widetilde{1010}\rangle. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Novamente no intuito de facilitar na compreensão dos cálculos, adotaremos a seguinte nomenclatura

$$\begin{aligned} \langle\psi(\beta)|\widehat{N}^2|\psi(\beta)\rangle &= N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2 + N_5^2 + N_6^2 + N_7^2 + N_8^2 \\ &+ N_9^2 + N_{10}^2 + N_{11}^2 + N_{12}^2 + N_{13}^2 + N_{14}^2 + N_{15}^2 + N_{16}^2; \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1^2 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle; \\ N_2^2 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_3^2 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle; \\ N_4^2 = \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ N_5^2 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\ N_6^2 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_7^2 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle \\ N_8^2 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ N_9^2 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{10}^2 = \langle \widetilde{1010}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_{11}^2 = \langle \widetilde{0101}, 1010; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{12}^2 = \langle \widetilde{0101}, 1010; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle \\ N_{13}^2 = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{14}^2 = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{1010} \rangle \\ N_{15}^2 = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{0101} \rangle \\ N_{16}^2 = \langle \widetilde{1010}, 1010; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 1010, \widetilde{1010} \rangle. \end{array} \right.$$

Sendo assim, calculemos como exemplo o termo N_1^2 :

$$\begin{aligned} & \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = \\ & \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | [u^4(\beta) \widehat{N}^2(\beta) + \nu^4(\beta) (\widetilde{N}(\beta) + 1)^2 + \\ & u^2(\beta) \nu^2(\beta) (3(\widetilde{N}(\beta) + 1) + (\widehat{N}(\beta) + 1) \widetilde{N}(\beta))] | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle. \end{aligned}$$

(4.80)

Considerando como exemplo a primeira parcela da equação (4.79), temos:

$$\begin{aligned}
& \langle \widetilde{0101}, 0101; \beta | u^4(\beta) \widehat{N}^2(\beta) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = \\
& u^4(\beta) \langle \widetilde{0101}; 0101 | \sum_{k=1}^4 [(a(\beta)_k^\dagger (a_k(\beta)) (a(\beta)_k^\dagger a(\beta)_k)] | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\
& = \langle \widetilde{0101}; 0101; \beta | (a(\beta)_1^\dagger a_1(\beta)) + (a(\beta)_2^\dagger a_2(\beta)) + (a(\beta)_3^\dagger a_3(\beta)) + (a(\beta)_4^\dagger a_4(\beta)) | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle \\
& = 4u^4(\beta).
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Com cálculo similar obtemos os valores das demais parcelas o que resulta para o termo N_1^2 da média do operador quadrático

$$\langle \widetilde{0101}; 0101; \beta | \widehat{N}^2 | \beta; 0101, \widetilde{0101} \rangle = 4u^4(\beta) + 9\nu^4(\beta) + 24u^2(\beta)\nu^2(\beta). \tag{4.82}$$

De forma similar ao operador número, teremos para o operador número quadrático as seguintes igualdades $N_1^2 = N_6^2 = N_{11}^2 = N_{16}^2$ e as demais parcelas nulas. Então

$$\langle \psi(\beta) | \widehat{N}^2 | \psi(\beta) \rangle = \frac{1}{4} [16u^4(\beta) + 36\nu^4(\beta) + 96u^2(\beta)\nu^2(\beta)]. \tag{4.83}$$

De posse de $\langle \widehat{N} \rangle_{|\psi(\beta)\rangle} e \langle \widehat{N}^2 \rangle_{|\psi(\beta)\rangle}$ o fator de Mandel, eq.(4.62), para o estado térmico $|\psi(\beta)\rangle$ é

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{4u^4(\beta) + 9\nu^4(\beta) + 24u^2(\beta)\nu^2(\beta) - 4u^4(\beta) - 9\nu^4(\beta) - 12u^2(\beta)\nu^2(\beta)}{2u^2(\beta) + 3\nu^2(\beta)} - 1 \\
&= \frac{12u^2(\beta)\nu^2(\beta) - 2u^2(\beta) - 3\nu^2(\beta)}{2u^2(\beta) + 3\nu^2(\beta)}.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

E fazendo $u^2(\beta) = 1 + \nu^2(\beta)$, temos

$$Q = \frac{12\nu^4(\beta) + 7\nu^2(\beta) - 2}{5\nu^2(\beta) + 2}. \tag{4.85}$$

Por fim, assumindo a relação $\nu^2(\beta) = \bar{n}(\beta)$, temos:

$$Q = \frac{12\bar{n}^2(\beta) + 7\bar{n}(\beta) - 2}{5\bar{n}(\beta) + 2}, \tag{4.86}$$

que possibilita analisar Q em função da temperatura. A figura (4.2) mostra o comportamento de Q .

Figura 4.2: Fator de Mandel

Analisando o gráfico de Q observa-se que as operações lógicas da computação quântica, para o estado termalizado de Bell na representação duplo-trilho, ocorreriam com o seu maior potencial para a região entre $\bar{n}(\beta) = 0$ e $\bar{n}(\beta) \approx 0,2$ onde a estatística é sub-Poissoniana.

Para comparação, vale a pena calcularmos o fator de Mandel para o estado $|\psi\rangle$ não-termalizado, que é escrito como $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |1010\rangle)$; temos então

$$\begin{aligned} \langle(\hat{N})\rangle_{|\psi\rangle} = & \frac{1}{2}\langle 0101|\hat{N}|0101\rangle + \langle 0101|\hat{N}|1010\rangle + \\ & \langle 1010|\hat{N}|0101\rangle + \langle 1010|\hat{N}|1010\rangle. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Ressaltando que, como

$$\langle 0101|\hat{N}|1010\rangle = \langle 1010|\hat{N}|0101\rangle = 0, \quad (4.88)$$

então

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{N} \rangle_{|\psi\rangle} &= \langle 0101 | \widehat{N} | 0101 \rangle + \langle 1010 | \widehat{N} | 1010 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle 0101 | (a^\dagger_1 a_1 + a^\dagger_2 a_2 + a^\dagger_3 a_3 + a^\dagger_4 a_4) | 0101 \rangle + \\
&\quad \langle 1010 | (a^\dagger_1 a_1 + a^\dagger_2 a_2 + a^\dagger_3 a_3 + a^\dagger_4 a_4) | 1010 \rangle \\
&= \frac{1}{2} (1 + 1) = 1.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Para o operador número quadrado teremos

$$\begin{aligned}
\langle (\widehat{N})^2 \rangle_{|\psi\rangle} &= \\
&= \langle 0101 | \widehat{N}^2 | 0101 \rangle + \langle 1010 | \widehat{N}^2 | 1010 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle 0101 | (a^\dagger_1 a_1 + a^\dagger_2 a_2 + a^\dagger_3 a_3 + a^\dagger_4 a_4)^2 | 0101 \rangle + \\
&\quad \langle 1010 | (a^\dagger_1 a_1 + a^\dagger_2 a_2 + a^\dagger_3 a_3 + a^\dagger_4 a_4)^2 | 1010 \rangle \\
&= \frac{1}{2} (1 + 1) = 1.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Segue então que o fator de Mandel assume o valor:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\langle (\widehat{N}^2) \rangle - \langle (\widehat{N}) \rangle^2 - \langle (\widehat{N}) \rangle}{\langle (\widehat{N}) \rangle} \\
&= \frac{1 - (1)^2 - 1}{1} \\
&= -1.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Este resultado nos revela que o estado $|\psi(\beta)\rangle$, como era de se esperar, tem uma estatística sub-poissoniana, característica de estados quânticos.

4.5 Função de Wigner para o estado de Bell Terma- lizado $|\psi(\beta)\rangle$

A importância dos estados emaranhados é sabidamente reconhecida na teoria da informação quântica por serem estados eficazes no processamento da informação, e

dentro deste contexto o estado $|\psi(\beta)\rangle$ consiste em um sistema de interesse à formação quântica. O emaranhamento quântico, como propriedade fundamental do sistema, deve ser mantido a qualquer custo. Portanto é razoável conhecer os limites de classicalidade do sistema e como o fator temperatura pode influenciá-lo.

A função de Wigner $W(p, q)$ descreve estados quânticos no espaço de fase pq , e é uma forma de "aproximar" a mecânica quântica de uma descrição clássica. Essa quasi-distribuição de probabilidade, por sua vez, tem por principal característica a admissão de valores negativos, que é um indicativo de comportamento não-clássico do sistema.

No presente caso para o estado $|\psi(\beta)\rangle$, temos a função de Wigner definida por:

$$W(q, p; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle \frac{q-v}{2} \left| \rho_{|\psi(\beta)\rangle} \right| \frac{q+v}{2} \right\rangle \quad (4.92)$$

onde $\rho_{|\psi(\beta)\rangle}$ é o operador densidade relacionado ao estado $|\psi(\beta)\rangle$ e descrito por:

$$\begin{aligned} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4 = 0}^{\infty} \right. \\ & \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) [u^4(\beta)\nu^4(\beta)]^{-1} \\ & [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 \\ & - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| \\ & [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 \\ & - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] |n_1, n_2, n_3, n_4\rangle \langle n_1, n_2, n_3, n_4| \\ & n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1) |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1\rangle \langle n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4 + 1| \\ & (n_1 + 1)n_2(n_3 + 1)n_4 |n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1\rangle \langle n_1 + 1, n_2 - 1, n_3 + 1, n_4 - 1| \} . \end{aligned} \quad (4.93)$$

Ao analisarmos a expressão (4.93), observa-se que esta é composta por estados descritos de formas distintas, a exemplo das parcelas 1, 2 e 3 do operador que possuem estados do tipo $|n + M\rangle \langle n + M|$ $M = 0$, e da parcela 4 que apresenta contribuição

do tipo $|n + M\rangle\langle n + M|$ $M = 1$ e $|n - M\rangle\langle n - M|$. Uma vez que estamos interessados na determinação da função de Wigner, o cálculo dessas quantidades é essencial. Considerando termos do tipo $|n + M_i\rangle\langle n + M_i|$, ao serem substituídos em (4.92), temos

$$\omega(q, p; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle \frac{q-v}{2} | n + M \right\rangle \left\langle n + M | \frac{q-v}{2} \right\rangle \quad (4.94)$$

sendo pertinente calcularmos o fator

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{q-v}{2} | n + M \right\rangle &= \Psi_{n+M}\left(q - \frac{v}{2}\right) \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{(q-\frac{v}{2})^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+M)}(n+M)!}b} H_{(n+M)}\left[\frac{(q-\frac{v}{2})}{b}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+M)}(n+M)!}b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} + \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n+M)}\left[\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

onde $H_{(n+M)}(x)$ é relativo ao polinômio de Hermite $b^2 = \hbar/m\omega$. Ainda da expressão (4.94) devemos calcular

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{q+v}{2} | n + M \right\rangle &= \Psi_{n+M}\left(q + \frac{v}{2}\right) \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{(q+\frac{v}{2})^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+M)}(n+M)!}b} H_{(n+M)}\left[\frac{(q+\frac{v}{2})}{b}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+M)}(n+M)!}b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} - \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n+M)}\left[\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

Substituindo (4.95) e (4.96) em (4.94) obtemos, para cada n_j ,

$$\begin{aligned} \omega(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}} 2^{(n+M)} (n+M)! b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{4b^2} + \frac{i}{\hbar} pv\right) \\ &\quad H_{(n+M)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n+M)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right), \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde G_i ($i = 1, 2$) é o fator multiplicativo da parcela no operador densidade (4.93).
Escrevendo o expoente da exponencial como

$$-\left(\frac{q^2}{2b^2} + \frac{v^2}{4b^2} - \frac{ipv}{\hbar}\right) = -\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) - \left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 \quad (4.98)$$

a função $\omega(p, q; \beta)$ ganha o seguinte contorno:

$$\begin{aligned} \omega(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}} 2^{(n+M)} (n+M)! b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left[-\left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2\right] \\ &\quad H_{(n+M)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n+M)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Realizando a seguinte mudança de variável,

$$x = \frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar} \rightarrow dx = \frac{1}{2b} dv \quad (4.100)$$

segue que

$$\frac{v}{2b} = x + \frac{ipb}{\hbar} \quad (4.101)$$

e então

$$\begin{aligned}
W(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i \frac{2b \exp[-(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2})]}{b\sqrt{\pi}2^{n+M}(n+M)!} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp^{-x^2} \\
&\quad H_{(n+M)}(x - \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}) H_{(n+M)}(x + \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}).
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Posto que os polinômios de Hermite guardam a seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) dx = \left\{ \sqrt{\pi} 2^n m! z^{n-m} L_m^{n-m}[-2yz] \right\} \quad \text{para } n \geq m \tag{4.103}$$

com L_m^{n-m} as funções especiais de Laguerre, obtemos:

$$\begin{aligned}
\omega(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i \frac{2 \exp[-(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2})] z^0 \sqrt{\pi} 2^{n+M} (n+M)!}{\sqrt{\pi} 2^{n+M} (n+M)!} \\
&\quad L_{(n+M)} \left[-2 \left(\frac{-q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) \left(\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) \right] \\
\omega(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i(n) 2(-1)^{n+M} \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] L_{(n+M)} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.104}$$

onde o índice em G refere-se à posição do termo na expansão (4.93). Logo, todas as vezes que calcularmos a função de Wigner para contribuições do tipo $|n+M\rangle\langle n+M|$ nos reportaremos à equação (4.104) o que ocorre, por exemplo, no cálculo da primeira e segunda parcelas do operador densidade, dado pela equação (4.93). Observando para estas parcelas que $M=0$, obtemos,

$$\omega(q, p; \beta) = \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} G_i(n) 2(-1)^n \right] L_n \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \tag{4.105}$$

ou seja, para a primeira parcela do operador densidade, a respectiva contribuição $W_1(p, q; \beta)$ função de Wigner $W(p, q; \beta)$, é dada por:

$$\begin{aligned}
W_1(q, p; \beta) &= \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} G_1(n) \left\{ 2(-1)^{n_1} L_{n_1} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \right. \\
& 2(-1)^{n_2} L_{n_2} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] 2(-1)^{n_3} L_{n_3} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& \left. 2(-1)^{n_4} L_{n_4} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.106}$$

e substituindo o valor de G_i ,

$$\begin{aligned}
W_1(q, p; \beta) &= \frac{16}{[u^4(\beta)\nu^4(\beta)]} \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right]^4 \\
& \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \right. \\
& \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) \\
& [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) \\
& + \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] \\
& \left[(-1)^{n_1} L_{n_1} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_2} L_{n_2} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
& \left[(-1)^{n_3} L_{n_3} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_4} L_{n_4} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.107}$$

De modo semelhante operamos com a segunda parcela do operador densidade, encontrando com isso a contribuição $\omega(p, q; \beta)$ a função de Wigner $W(p, q; \beta)$, ou seja:

$$\begin{aligned}
\omega_2(q, p; \beta) &= \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} G_2(n) \left\{ 2(-1)^{n_1} L_{n_1} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \right. \\
& 2(-1)^{n_2} L_{n_2} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] 2(-1)^{n_3} L_{n_3} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& \left. 2(-1)^{n_4} L_{n_4} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \right\} \quad (4.108)
\end{aligned}$$

resultando assim, após substituir o fator G_2 ,

$$\begin{aligned}
W_2(q, p; \beta) &= \frac{1}{[u^4(\beta)\nu^4(\beta)]} \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right]^4 \\
& \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \right. \\
& \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) \\
& [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) \\
& + \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] \\
& \left[(-1)^{n_1} L_{n_1} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_2} L_{n_2} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
& \left[(-1)^{n_3} L_{n_3} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_4} L_{n_4} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \cdot (4.109)
\end{aligned}$$

Prosseguindo à obtenção da função de Wigner referente ao estado de Bell termalizado, é necessário o cálculo do terceiro e quarto termos do operador densidade $|\rho_{\psi(\beta)}\rangle$ evidenciado através da expressão (4.93). Essas parcelas trazem em seu escopo estados do tipo $|n-Z\rangle\langle n-Z|$ que, de acordo com (4.92), escrevemos para distinguir a função de Wigner completa,

$$\omega'(q, p; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle \frac{q-v}{2} | n-Z \right\rangle \left\langle n-Z | \frac{q-v}{2} \right\rangle \quad (4.110)$$

onde

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{q-v}{2} \middle| n-Z \right\rangle &= \Psi_{n-Z}\left(q - \frac{v}{2}\right) \\
&= \frac{\exp\left[-\frac{(q-\frac{v}{2})^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}}2^{(n-Z)}(n-Z)!b} H_{(n-Z)}\left[\frac{(q-\frac{v}{2})}{b}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}2^{(n-Z)}(n-Z)!b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} + \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n-Z)}\left[\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right],
\end{aligned} \tag{4.111}$$

estando $H_{(n-Z)}(x)$ relacionado ao polinômio de Hermite.

Ainda da expressão (4.94), temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{q+v}{2} \middle| n-Z \right\rangle &= \Psi_{n-Z}\left(q + \frac{v}{2}\right) \\
&= \frac{\exp\left[-\frac{(q+\frac{v}{2})^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}}2^{(n-Z)}(n-Z)!b} H_{(n-Z)}\left[\frac{(q+\frac{v}{2})}{b}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}2^{(n-Z)}(n-Z)!b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} - \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n-Z)}\left[\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right]
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Segue assim que, para o cálculo da função $W(p, q; \beta)$ que tenha em sua estrutura o operador do tipo $|n-Z\rangle\langle n-Z|$, haverá uma contribuição da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\omega'(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}2^{(n-Z)}(n-Z)!b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{4b^2} + \frac{i}{\hbar}pv\right) \\
&\quad H_{(n-Z)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n-Z)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right)
\end{aligned} \tag{4.113}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\omega'(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{(n-Z)} (n-Z)! b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp \left[-\left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar} \right) \right] \\ &\quad H_{(n-Z)} \left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b} \right) H_{(n-Z)} \left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b} \right),\end{aligned}\tag{4.114}$$

e realizando as mudanças de variáveis estabelecidas em (4.100) e (4.101) obtemos:

$$\begin{aligned}\omega'(q, p; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_i \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp^{-x^2} \\ &\quad H_{(n-Z)} \left(x - \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) H_{(n-Z)} \left(x + \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right),\end{aligned}\tag{4.115}$$

com G_i ($i = 3, 4$) sendo o fator multiplicativo da parcela em (4.93), usando a relação,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) dx = \left\{ \sqrt{\pi} 2^n m! z^{n-m} L_m^{n-m}[-2yz] \right\} \quad \text{para } n \geq m\tag{4.116}$$

em que L_m^{n-m} são as funções associadas de Laguerre, a (4.115) torna-se:

$$\omega'(q, p; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_i(n) 2(-1)^{n-Z} \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] L_{(n-Z)} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right].\tag{4.117}$$

A equação (4.117) nos mostra a forma adequada de trabalhar com as parcelas G_3 e G_4 do operador densidade (4.93). Com efeito, temos a contribuição:

$$\begin{aligned}
\omega'_3(q, p; \beta) &= \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right]^4 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} G_3(n) \left\{ \left[2(-1)^{n_1-1} L_{(n_1-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left[2(-1)^{n_2+1} L_{(n_2+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \left[2(-1)^{n_3-1} L_{(n_3-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \\
&\quad \left. \left[2(-1)^{n_4+1} L_{(n_4+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right\} \tag{4.118}
\end{aligned}$$

de sorte que após substituir G_3 obtemos,

$$\begin{aligned}
W_3(q, p; \beta) &= \frac{16}{[u^4(\beta)\nu^4(\beta)]} \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right]^4 \\
&\quad \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) \right. \\
&\quad \left. [n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1)] \left[(-1)^{n_1-1} L_{(n_1-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left[(-1)^{n_2+1} L_{(n_2+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \left[(-1)^{n_3-1} L_{(n_3-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \\
&\quad \left. \left[(-1)^{n_4+1} L_{(n_4+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right\} \tag{4.119}
\end{aligned}$$

De forma similar para $W'_4(p, q; \beta)$, associada a quarta parcela, de $\rho_{\psi(\beta)}$ temos

$$\begin{aligned}
\omega'_4(q, p; \beta) &= \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right]^4 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} G_4(n) \left\{ \left[2(-1)^{n_1+1} L_{(n_1+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left[2(-1)^{n_2-1} L_{(n_2-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \left[2(-1)^{n_3+1} L_{(n_3+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \\
&\quad \left. \left[2(-1)^{n_4-1} L_{(n_4-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right\} \tag{4.120}
\end{aligned}$$

que com o uso de G_4 resulta em:

$$\begin{aligned}
W_4(q, p; \beta) &= \frac{16}{[u^4(\beta)\nu^4(\beta)]} \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right]^4 \\
&\sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \right. \\
&\left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) \right. \\
&\left. [n_2(n_1 + 1)n_4(n_3 + 1)] \left[(-1)^{n_1+1} L_{(n_1+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right. \\
&\left. \left[(-1)^{n_2-1} L_{(n_2-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \left[(-1)^{n_3+1} L_{(n_3+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right. \\
&\left. \left[(-1)^{n_4-1} L_{(n_4-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right) \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.121}$$

A função de Wigner associada a $|\psi(\beta)\rangle$ é escrita como a soma de cada uma das contribuições obtidas, $W_1(p, q; \beta)$, $W_2(p, q; \beta)$, $W_3(p, q; \beta)$ e $W_4(p, q; \beta)$, de modo que

$$W(p, q; \beta) = W_1(p, q; \beta) + W_2(p, q; \beta) + W_3(p, q; \beta) + W_4(p, q; \beta). \tag{4.122}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
W_{|\psi_n(\beta)\rangle}(q, p; \beta) &= W_1(p, q; \beta) + W_2(p, q; \beta) + W_3(p, q; \beta) + W_4(p, q; \beta) \\
&= \frac{16}{[u^4(\beta)\nu^4(\beta)]} \exp \left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right]^4 \\
&\quad \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))(1 + \bar{n}_3(\beta))(1 + \bar{n}_4(\beta))} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_3(\beta)}{1 + \bar{n}_3(\beta)} \right) \left(\frac{\bar{n}_4(\beta)}{1 + \bar{n}_4(\beta)} \right) \right. \\
&\quad \left. [(n_2 n_4)^2 - \nu^2(\beta)(n_2 n_4)(n_2 + n_4) + 2\nu^4(\beta)(n_2 n_4) \right. \\
&+ \nu^4(\beta)(n_2 + n_4)^2 - 2\nu^6(\beta)(n_2 + n_4) + \nu^8(\beta)] \\
&\quad \left[(-1)^{n_1} L_{n_1} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_2} L_{n_2} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \left[(-1)^{n_3} L_{n_3} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_4} L_{n_4} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \left. [(n_1 n_3)^2 - \nu^2(\beta)(n_1 n_3)(n_1 + n_3) + 2\nu^4(\beta)(n_1 n_3) \right. \\
&+ \nu^4(\beta)(n_1 + n_3)^2 - 2\nu^6(\beta)(n_1 + n_3) + \nu^8(\beta)] \\
&\quad \left[(-1)^{n_1} L_{n_1} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_2} L_{n_2} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \left[(-1)^{n_3} L_{n_3} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) (-1)^{n_4} L_{n_4} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&+ [n_1(n_2 + 1)n_3(n_4 + 1)] \left[(-1)^{n_1-1} L_{(n_1-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \left[(-1)^{n_2+1} L_{(n_2+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \left[(-1)^{n_3-1} L_{(n_3-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \left[(-1)^{n_4+1} L_{(n_4+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \left. \right\} \\
&+ [n_2(n_1 + 1)n_4(n_3 + 1)] \left[(-1)^{n_1+1} L_{(n_1+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \left[(-1)^{n_2-1} L_{(n_2-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \left[(-1)^{n_3+1} L_{(n_3+1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \\
&\quad \left[(-1)^{n_4-1} L_{(n_4-1)} \left(2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right) \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{4.123}$$

A expressão (4.123) expressa de forma completa a função de Wigner para o estado

de Bell termalizado. Para uma análise gráfica da função de Wigner (4.123) obtivemos os gráficos mostrados nas figuras (4.3) e (4.4) para três temperaturas distintas. Em (a) fixamos a temperatura em $\bar{n}(\beta) = 0,18$, (b) $\bar{n}(\beta) = 0,25$ e (c) $\bar{n}(\beta) = 0,3$. Sendo $\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{-\beta\omega}-1}$ e $\beta = 1/KT$.

Figura 4.3: Função de Wigner para o estado $|\psi(\beta)\rangle$ para dois valores de $\bar{n}(\beta)$: (a) 0,18 and (b) 0,25.

Figura 4.4: Função de Wigner para o estado $|\psi(\beta)\rangle$ para $\bar{n}(\beta) = 0,3$.

Através das Figuras (4.7) e (4.9) é possível constatar que a função $W(p, q; \beta)$ assume tanto valores positivos quanto negativos, estando portanto de acordo com o comportamento esperado de uma função de Wigner que, em virtude dessa propriedade, é chamada de quasi densidade de probabilidade [4]. Os valores de probabilidade negativos são indicativos de que o sistema, pelo domínio de definição, possui características não-clássicas, i.é, esse aspecto, pode ser interpretado como uma assinatura do nível quântico do sistema. No presente caso é possível observar que o incremento da temperatura faz a função de Wigner ir de valores negativos, característicos de estados não-clássicos, a valores positivos, típicos de estados clássicos, ou seja, o banho térmico ocasiona uma perda de não-classicalidade do sistema, situação pouco interessante do ponto de vista da informação quântica.

4.6 Determinação da faixa de temperatura para atuação de portas lógicas sobre o estado $|\psi(\beta)\rangle$

De posse dos resultados da Fidelidade Quântica, do fator de Mandel e da função de Wigner obtidas para o estado $|\psi(\beta)\rangle$, se mostra interessante cruzarmos os dados dessas informações a fim de determinar uma faixa de temperatura adequada à realização de operações que preservem as características quânticas do estado em análise.

Inicialmente obtivemos as informações acerca da Fidelidade Quântica, quando procuramos determinar, para qual faixa de temperatura o sistema sob influência térmica mantém uma Fidelidade nas suas operações, superior a 0,6.

Figura 4.5: Fidelidade Quântica

O resultado nos evidencia que isto se dá quando os valores de $\bar{n}(\beta)$ se encontram entre $\bar{n}(\beta) = 0$ e $\bar{n}(\beta) = 0,2$. A análise de como os efeitos térmicos modificam a "distância" entre o estado quântico não termalizado e o estado $|\psi(\beta)\rangle$ é dado pela Fidelidade, e o seu conhecimento é imprescindível, uma vez que as operações sobre o estado devem preservar a qualidade da informação. Busca-se realizar operações de modo controlado a fim de que a informação obtida seja o mais fiel possível à que foi emitida.

Demandamos que as operações mantenham um grau de fidelidade; contudo, não devemos esquecer que a manutenção das propriedades quânticas do estado é o protocolo mais importante a ser seguido, e para tal conhecimento procuramos obter o fator de Mandel (Q). Através do Fator de Mandel somos capazes de determinar qual estatística está sendo seguida pelo estado; dentre as possibilidades temos que, para $Q \in [-1, 0[$ a estatística é dita sub-Poissoniana, e isto é uma característica essencialmente quântica do sistema. Tal aspecto ficou evidenciado através do resultado expresso abaixo:

Figura 4.6: Fator de Mandel

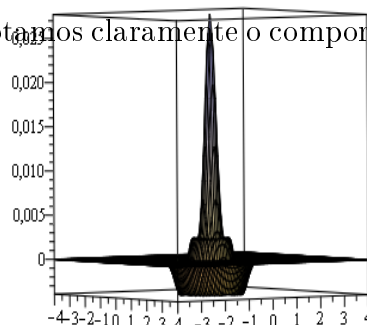
Especificamente, o fator de Mandel determina que a estatística sub-poissoniana para o sistema em análise é definida para a faixa de temperatura entre $\bar{n}(\beta) = 0$ e $\bar{n}(\beta) = 0,2$. Tal resultado é de grande interesse uma vez que para essa faixa de temperatura o estado térmico opera com Fidelidade Quântica em valores aceitáveis; pontualmente em $\bar{n}(\beta) = 0,1$, tem-se uma fidelidade de $F = 0,8$, valor consideravelmente alto.

Por fim, buscamos na função de quasi probabilidade de Wigner $W(q,p)$, cujos valores negativos estão associados a propriedades não clássicas do sistema, uma forma de aferir o comportamento do estado de Bell sob influência de temperatura. Na Seção 4.5 observamos que à medida que a temperatura do banho térmico aumentou o sistema teve o volume da parte negativa da função de Wigner diminuído, i.é, o incremento de temperatura levou o sistema a um maior grau de classicalidade.

Figura 4.7: Função de Wigner para o estado $|\psi(\beta)\rangle$ para dois valores de $\bar{n}(\beta)$: (a) 0,18 and (b) 0,25.

Figura 4.8: Função de Wigner para o estado $|\psi(\beta)\rangle$ para $\bar{n}(\beta) = 0,3$.

Através das figuras notamos claramente o comportamento do sistema: para $\bar{n}(\beta) =$



0,18 o sistema apresenta somente valores negativos para a função de Wigner $W(q, p) \leq 0$, enquanto para $\bar{n}(\beta) = 0,25$ o sistema mantém, em sua maior parte, valores de $W(q, p)$ negativos; contudo, já aparecem regiões de valores positivos $W(q, p) > 0$, i.é, à medida que se incrementa a temperatura o sistema vai perdendo não-classicalidade. Tal comportamento indica que deve haver um controle sistemático da temperatura do banho térmico, uma vez que corremos o risco de ter um sistema com perda das características quânticas; isto fica evidente quando extrapolamos a temperatura ao valor de $\bar{n}(\beta) = 0,3$, mostrando para tal situação que existe uma maior probabilidade do sistema operar de forma clássica, exatamente o que não buscamos.

Figura 4.9: Tabela de valores de Fidelidade, fator de Mandel e função de Wigner em função de $\bar{n}(\beta)$.

A fim de organizar os dados, apresentamos a tabela acima, onde a legenda verde indica o sistema com aspectos ideais, ou seja, características de não-classicalidade (estatística sub-Poissoniana e fator de Wigner negativo) além de valor de fidelidade quântica satisfatório ($F > 0,6$). A legenda amarela define que o sistema pode apresentar aspectos quânticos mas também carrega a probabilidade de estar operando como um estado clássico. Finalmente, a legenda vermelha determina uma situação não aconselhável à realização de operações quânticas, a exemplo das portas lógicas da computação quântica.

Com base nos resultados aqui explanados, mostra-se segura a realização de operações sobre o estado de Bell na representação duplo-trilho termalizado $|\psi(\beta)\rangle$ na faixa de $\bar{n}(\beta) = 0$ à $\bar{n}(\beta) = 0,18$, uma vez que nesta faixa as temperaturas possíveis para o banho térmico definem estados que obedecem a uma estatística sub-Poissoniana operando com fidelidade acima de 60% ($F > 0,6$), tais propriedades são confirmadas pela negatividade da função de Wigner ao longo de toda faixa.

Pontualmente, podemos determinar que um valor mais apropriado de $\bar{n}(\beta)$ para a realização das portas lógicas quânticas sobre o estado $|\psi(\beta)\rangle$, é para $\bar{n}(\beta) = 0,1$ haja

vista que, neste valor, todos os aspectos da não-classicalidade são garantidos e a fidelidade quântica assume valores próximos a $F \approx 0,8$, que é um valor consideravelmente alto para a realização das operações sobre estados quânticos.

Capítulo 5

Estudo da termalização do estado

$|\alpha_n\rangle = |\alpha\rangle + |n\rangle$, via Dinâmica de Campos Térmicos

5.1 Termalização do estado $|\alpha_n\rangle = |\alpha\rangle + |n\rangle$

5.1.1 Preliminares

Neste capítulo estudaremos a superposição entre estados coerentes e estados número do campo eletromagnético, expresso do seguinte modo

$$|\alpha_n\rangle = |\alpha\rangle + |n\rangle. \quad (5.1)$$

Como faz-se necessário a duplicação do estado, escolhomemos realizar tal tarefa da forma mais geral possível, i.é, $|\alpha_n\rangle \otimes |\widetilde{\alpha}_n\rangle$. Uma vez que o estado é descrito por:

$$|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}}[\sigma|\alpha\rangle + \delta|n\rangle] \quad (5.2)$$

e o estado coerente representado por

$$|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha^2/2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle, \quad (5.3)$$

sendo o estado $|\tilde{\alpha}_n\rangle$ referente ao estado dual e o estado coerente dado por:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{m'=0}^{\infty} e^{-\alpha^2/2} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} |\tilde{m}'\rangle. \quad (5.4)$$

segue que o espaço de Hilbert duplicado é definido pelo produto tensorial, i.é:

$$\begin{aligned} |\alpha_n, \tilde{\alpha}_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle + \delta |n\rangle \right] \otimes \\ &\frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\alpha^2/2} \sum_{\tilde{m}'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} |\tilde{m}'\rangle + \delta |\tilde{n}\rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Obtém-se assim um espaço duplicado contendo quatro termos em superposição,

$$\begin{aligned} |\alpha_n\rangle = |\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}_n\rangle &= \frac{1}{\eta} \left[\sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} |m, \tilde{m}'\rangle + \right. \\ &\sigma \delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m, \tilde{n}\rangle + \\ &\left. \sigma \delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} |n, \tilde{m}'\rangle + \delta^2 |n, \tilde{n}\rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tendo o estado duplicado, podemos conhecer a contrapartida térmica para esse estado $|\alpha_n\rangle$, com a aplicação da transformação de Bogoliubov. Ao aplicarmos tal transformação, obtemos

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\beta)\rangle &= U(\beta) |\alpha_n\rangle = \frac{1}{\eta} \left[\sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} |\beta; m, \tilde{m}'\rangle + \right. \\ &\sigma \delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |\beta; m, \tilde{n}\rangle + \\ &\left. \sigma \delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} |\beta; n, \tilde{m}'\rangle + \delta^2 |\beta; n, \tilde{n}\rangle \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

que é assim o estado termalizado. A partir deste momento as devidas análises serão feitas tendo em vista o estado descrito por eq.(5.7), contudo, quando não dispomos da informação completa sobre um sistema, recorreremos ao conceito de probabilidade a fim de tirarmos as devidas informações deste. Sendo assim, se mostra prudente determinarmos o operador densidade, que tem papel fundamental neste tipo de abordagem.

5.1.2 Obtenção do Operador Densidade para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$

O operador densidade contém em sua estrutura as informações estatísticas a serem obtidas do sistema. Para obtermos o operador densidade observa-se:

$$|\alpha_n(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger; \beta)|0(\beta)\rangle \quad (5.8)$$

e daí,

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle} = f(a, a^\dagger; \beta)\rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) \quad (5.9)$$

onde o termo $\rho_\beta = \rho_{|0(\beta)\rangle}$ é o operador densidade relacionado ao termo do vácuo termalizado.

Visando uma maior organização na obtenção do operador densidade, calcularemos separadamente cada parcela do estado definido pela equação (5.7). Assim para a primeira parcela, temos:

$$\begin{aligned} \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}} \quad & |\beta; m, \tilde{m}'\rangle = \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}} \frac{[a^\dagger(\beta)]^m}{\sqrt{m}} \frac{[a^\dagger(\beta)]^{m'}}{\sqrt{m'}} |0(\beta)\rangle \\ & = \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}} \left[\frac{[a^\dagger(\beta)]^m}{\sqrt{m}} \frac{[a]^{m'}}{v(\beta)^{m'}\sqrt{m'}} \right] |0(\beta)\rangle, \end{aligned}$$

onde faz-se necessário a utilização das regras de comutação para os operadores de criação e aniquilação [1]. Neste contexto, lembrando que

$$\begin{aligned}
a^\dagger(\beta)^n |0(\beta)\rangle &= \frac{a^{\dagger n}}{u(\beta)^n} |0(\beta)\rangle \\
\tilde{a}^\dagger(\beta)^n |0(\beta)\rangle &= \frac{a^n}{v(\beta)^n} |0(\beta)\rangle,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

e que se $[A, B] = -\gamma$, tem-se:

$$\begin{aligned}
A^n B^m &= \sum_{i=0}^{\min(m,n)} C_i^{n,m} B^{m-i} A^{n-i} \gamma^i \\
\text{com} \\
C_i^{\mu,\nu} &= \frac{(-1)^i \mu! \nu!}{i! (\mu-i)! (\nu-i)!},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} |\beta; m, \tilde{m}'\rangle = \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} \left[\frac{1}{[v(\beta)^{m'}] \sqrt{m!} \sqrt{m'!}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} a^{m'-i} [a^\dagger(\beta)]^{m-i} [u(\beta)] \right] |0(\beta)\rangle \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} \left[\sum_{i=0}^{\min(m,m')} C_i^{m,m'} a^{m'-i} a^\dagger(\beta)^{m-i} u(\beta)^i \right] |0(\beta)\rangle
\end{aligned} \tag{5.12}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} |\beta; m, \tilde{m}'\rangle &= \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} \\
&\left[\sum_{i=0}^{\min(m,m')} C_i^{m,m'} \frac{1}{[u(\beta)^{m-2i}] v(\beta)^{m'}} \frac{a^{m'-i} a^{\dagger m-i}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} \right] |0(\beta)\rangle.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Para o cálculo da segunda parcela da equação (5.7) devemos atuar da mesma maneira, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m}} |\beta; m, \tilde{n}\rangle &= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m}} \frac{[a^\dagger(\beta)]^m}{\sqrt{m!}} \frac{[\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \\
&= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m}} \left[\frac{[a^\dagger(\beta)]^m}{\sqrt{m!}} \frac{[a]^n}{[v(\beta)]^n \sqrt{n!}} \right] |0(\beta)\rangle \\
&= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m}} \frac{1}{[v(\beta)]^n \sqrt{m!} \sqrt{n!}} \sum_{i=0}^{\min(n,m)} C_i^{n,m} [a^\dagger(\beta)]^{m-i} u(\beta) \\
&\quad \times |0(\beta)\rangle \\
&= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^{\min(n,m)} C_i^{n,m} \left[\frac{u(\beta)}{v(\beta)^n} \frac{a^{n-i} [a^\dagger(\beta)]^{m-i}}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} \right] |0(\beta)\rangle
\end{aligned} \tag{5.14}$$

de modo que o segundo termo de (5.7), que tem como estado $|\beta; m, \tilde{n}\rangle$, em termos de a^\dagger e a , nos dá:

$$\sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m}} |\beta; m, \tilde{n}\rangle = \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} C_i^{m,m'} \left[\frac{a^{n-i} [a^\dagger]^{m-i}}{\sqrt{m!} \sqrt{n!} u(\beta)^{m-2i} v(\beta)^n} \right] |0(\beta)\rangle. \tag{5.15}$$

Para a terceira parcela teremos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'}} |\beta; n, \tilde{m}'\rangle &= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'}} \frac{[a^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} \frac{[\tilde{a}^\dagger(\beta)]^{m'}}{\sqrt{m'!}} |0(\beta)\rangle \\
&= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'}} \left[\frac{[a^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} \frac{[a]^{m'}}{[v(\beta)]^{m'} \sqrt{m'!}} \right] |0(\beta)\rangle \\
&= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \frac{1}{[v(\beta)]^n \sqrt{m'!} \sqrt{n!}} \\
&\quad \sum_{i=0}^{\min(n,m')} C_i^{n,m'} [a^{m'-i} [a^\dagger(\beta)]^{n-i} u(\beta)] |0(\beta)\rangle \\
&= \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} C_i^{n,m'} \left[\frac{u(\beta)}{v(\beta)^{m'}} \frac{a^{m'-i} [a^\dagger(\beta)]^{n-i}}{[u(\beta)]^{n-i} \sqrt{m'!} \sqrt{n!}} \right] |0(\beta)\rangle \tag{5.16}
\end{aligned}$$

obtendo como resultado a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma \delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'}} |\beta; n, \widetilde{m}'\rangle &= \sigma \delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'}} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} C_i^{n, m'} \left[\frac{a^{m'-i} [a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{m'}! \sqrt{n!} u(\beta)^{n-2i} v(\beta)^{m'}} \right] \\ &\times |0(\beta)\rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

Finalmente, a quarta e última parcela pode também ser obtida como função dos operadores de criação e aniquilação, sobre o estado de vácuo termalizado $|0(\beta)\rangle$, nos dando:

$$\begin{aligned} \delta^2 |\beta; n, \widetilde{n}\rangle &= \delta^2 \left[\frac{[a^\dagger(\beta)]^n [\widetilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!} \sqrt{n!}} \right] |0(\beta)\rangle \\ &= \delta^2 \left[\frac{[a^\dagger(\beta)]^n [a]^n}{\sqrt{n!} [v(\beta)]^n \sqrt{n!}} \right] |0(\beta)\rangle \\ &= \delta^2 \sum_{i=0}^{\min(n, n)} C_i^{n, n} \left[a^{n-i} [a^\dagger(\beta)]^{n-i} \frac{u(\beta)}{n! [v(\beta)]^n} \right] |0(\beta)\rangle \\ &= \delta^2 \sum_{i=0}^{\min(n, n)} C_i^{n, n} \left[\frac{u(\beta)}{v(\beta)^n} \frac{a^{n-i} [a^\dagger(\beta)]^{n-i}}{n! [u(\beta)]^{n-i}} \right] |0(\beta)\rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

ou seja,

$$\delta^2 |\beta; n, \widetilde{n}\rangle = \delta^2 \sum_{i=0}^{\min(n, n)} C_i^{n, n} \left[\frac{a^{n-i} [a^\dagger]^{n-i}}{n! u(\beta)^{n-2i} v(\beta)^n} \right] |0(\beta)\rangle. \quad (5.19)$$

Sendo assim só nos resta expressar de maneira completa o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$ como função dos operadores de criação e aniquilação atuando sobre o estado de vácuo térmico, i.é,

$$\begin{aligned}
|\alpha_n(\beta)\rangle &= \frac{1}{\eta} \left\{ \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}} \times \right. \\
&\quad \left[\sum_{i=0}^{\min(m,m')} C_i^{m,m'} \frac{1}{[u(\beta)^{m-2i}v(\beta)^{m'}]} \frac{a^{m'-i}a^{\dagger m-i}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}} \right] |0(\beta)\rangle + \\
&\quad \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} C_i^{m,n} \left[\frac{a^{n-i}[a^\dagger]^{m-i}}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}u(\beta)^{m-2i}v(\beta)^n} \right] |0(\beta)\rangle + \\
&\quad \sigma\delta e^{-\alpha^2/2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} C_i^{n,m'} \left[\frac{a^{m'-i}[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{m'!}\sqrt{n!}u(\beta)^{n-2i}v(\beta)^{m'}} \right] |0(\beta)\rangle + \\
&\quad \delta^2 \sum_{i=0}^{\min(n,n)} C_i^{n,n} \left[\frac{a^{n-i}[a^\dagger]^{n-i}}{n!u(\beta)^{n-2i}v(\beta)^n} \right] |0(\beta)\rangle.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

5.1.3 Valor esperado do operador \widehat{A} no estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$

A idéia central da DCT é expressar as médias estatísticas de uma variável representada por um operador hermitiano \widehat{A} , como o valor esperado deste operador em um estado expresso em termos do vácuo dependente da temperatura. Sendo assim, para o nosso estudo teremos, usando o estado (5.7)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_n(\beta) | \widehat{A} | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta^2} \left\{ \left[D^{m,\tilde{m}'} \langle \tilde{m}', m; \beta | + D^{n,\tilde{m}'} \langle \tilde{m}', n; \beta | + D^{m,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, m; \beta | + D^{n,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, n; \beta | \right] \right. \\
&\quad \left. A \left[D^{k,\tilde{k}'} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle + D^{k,\tilde{n}} | \beta; k, \tilde{n} \rangle + D^{n,\tilde{k}'} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle + D^{n,\tilde{n}} | \beta; n, \tilde{n} \rangle \right] \right\} \tag{5.21}
\end{aligned}$$

com os coeficientes relacionados a cada estado da superposição,

$$\begin{aligned}
D^{m,\tilde{m}'} &= \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}} \\
D^{m,\tilde{n}} &= \sigma e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \\
D^{n,\tilde{m}'} &= \sigma e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \\
D^{n,\tilde{n}} &= \delta^2
\end{aligned} \tag{5.22}$$

além de,

$$\begin{aligned}
D^{k,\tilde{k}'} &= \sigma^2 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+k'}}{\sqrt{k!}\sqrt{k'!}} \\
D^{k,\tilde{n}} &= \sigma e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \\
D^{n,\tilde{k}'} &= \sigma e^{-\alpha^2} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} \\
D^{n,\tilde{n}} &= \delta^2
\end{aligned} \tag{5.23}$$

de maneira tal que o produto da equação (5.21) é,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_n(\beta) | \hat{A} | \alpha_n(\beta) \rangle &= \frac{1}{\eta^2} [D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{k}'} \langle \tilde{m}', m; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle + D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{m}', m; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle + \\
&D^{m,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{k}'} \langle \tilde{m}', m; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle + D^{m,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{n}} \langle \tilde{m}', m; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{n} \rangle + \\
&D^{n,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{k}'} \langle \tilde{m}', n; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle + D^{n,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{m}', n; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle + \\
&D^{n,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{k}'} \langle \tilde{m}', n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle + D^{n,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{n}} \langle \tilde{m}', n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{n} \rangle + \\
&D^{m,\tilde{n}} D^{k,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, m; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle + D^{m,\tilde{n}} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, m; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle + \\
&D^{m,\tilde{n}} D^{n,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, m; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle + D^{m,\tilde{n}} D^{n,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, m; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{n} \rangle + \\
&D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle + D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle + \\
&D^{n,\tilde{n}} D^{n,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle + (D^{n,\tilde{n}})^2 \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{n} \rangle].
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Ao todo são dezesseis parcelas correspondendo a valores esperados do operador \widehat{A} , em termos de todas as possíveis combinações de estados coerentes e número, de maneira que ao final do cálculo de cada uma dessas parcelas teremos o operador densidade do estado de interesse escrito como a soma dos operadores relacionados a cada um dos termos.

Buscando a expressão geral, realiza-se os cálculos da equação (5.24), parcela a parcela. A cada uma das parcelas, daremos o nome de Termo, sendo a primeira parcela correspondente ao Termo 1 a segunda ao Termo 2, e assim por diante.

Logo, para o **Termo 1** da equação (5.24), que gera o elemento $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)}$, obtemos:

★Cálculo do Termo 1

$$\begin{aligned}
& D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{k}'} \langle \tilde{m}', m; \beta | \widehat{A} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle = \\
& = D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} C_i^{m,m'} C_j^{k,k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i}]^\dagger}{\sqrt{m!}\sqrt{m'}!u(\beta)^{m-2i}v(\beta)^{m'}} | A | \\
& \quad \frac{[a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!}\sqrt{k'}!u(\beta)^{k-2j}v(\beta)^{k'}} | 0(\beta) \rangle
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
& = D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{C_i^{m,m'} C_j^{k,k'}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'}!\sqrt{k!}\sqrt{k'}![u(\beta)^{m+k-2(i+j)}v(\beta)^{m'+k'}]} \\
& \quad \left[(a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
& = F^{(m,m',k,k',\beta)} \left[(a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j} \right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

obtendo a soma dos elementos da diagonal,

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left\{ F^{(m,m',k,k',\beta)} \left[(a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i})^\dagger |A| a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ F^{(m,m',k,k',\beta)} \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{m-i} (a^\dagger)^{m-i} \right] A \right\}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

e, uma vez que $\rho_\beta = \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r |r\rangle\langle r|$, temos

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)} &= F^{(m,m',k,k',\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} |r\rangle\langle r| a^{m-i} (a^\dagger)^{m-i} \right].
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Recorrendo à seguinte relação [29],

$$a^P (a^\dagger)^Q |r\rangle\langle r| a^R (a^\dagger)^S = \frac{(r+Q)!(r+R)!}{r! \sqrt{(r+Q-P)!(r+R-S)!}} |r+Q-P\rangle\langle r+R-S| \tag{5.29}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)} &= F^{(m,m',k,k',\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r+m-m')!}} |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'| \\
&= \sigma^4 e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m+m'}} \frac{\alpha^{k+k'}}{\sqrt{k+k'}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \\
&= \frac{C_i^{m,m'} C_j^{k,k'}}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!m'!\sqrt{k!k'}!}} \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r+m-m')!}} |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'| \\
&= \sigma^4 e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m+m'}} \frac{\alpha^{k+k'}}{\sqrt{k+k'}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} m!m'!k!k'!}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{i!j!(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\quad \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{1}{\sqrt{m!m'!\sqrt{k!k'}!}} \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r+m-m')!}} \\
&\quad |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'|,
\end{aligned} \tag{5.30}$$

resultando no **Termo 1** do operador densidade escrito como uma superposição de estados coerentes, ou seja,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)} &= \sigma^4 e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+m'} \alpha^{k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \\
&\quad \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m-m')!}} \\
&\quad |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{5.31}$$

★Cálculo do Termo 2

Dando prosseguimento ao cálculo do operador densidade devemos obter o **Termo 2** da equação (5.24), que dá origem ao elemento $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,n,\beta)}$. Temos:

$$\begin{aligned}
& D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{m}', m; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle = \\
& = D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k)} C_i^{m,m'} C_j^k \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i}]^\dagger}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}u(\beta)^{m-2i}v(\beta)^{m'}} | \hat{A} | \\
& \quad \frac{[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!}\sqrt{n!}u(\beta)^{k-2j}v(\beta)^n} | 0(\beta) \rangle \\
& = D^{m,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k)} \frac{C_i^{m,m'} C_j^{k,n}}{\sqrt{m!}\sqrt{m'!}\sqrt{k!}\sqrt{n!}[u(\beta)^{m+k-2(i+j)}v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \quad \left[(a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
& = F^{(m,m',k,n,\beta)} \left[(a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
& = Tr \left\{ F^{(m,m',k,n,\beta)} \left[(a^{m'-i}(a^\dagger)^{m-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
& = Tr \left\{ F^{(m,m',k,n,\beta)} \left[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{m-i}(a^\dagger)^{m'-i} \right] \hat{A} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,n,\beta)} & = F^{(m,m',k,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \quad \left[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} | r \rangle \langle r | a^{m-i}(a^\dagger)^{m'-i} \right] \\
& = F^{(m,m',k,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \quad \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+m-m')!}} | r+k-n \rangle \langle r+m-m' |
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m+m'}} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \\
&\quad \frac{C_i^{m,m'} C_j^{k,n}}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!m'!}\sqrt{k!}} \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+m-m')!}} |r+k-n\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m+m'}} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} m!m'!k!n!}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n} i!j!(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!m'!}\sqrt{k!}} \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+m-m')!}} |r+k-n\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{5.35}$$

concluindo assim o cálculo do **Termo 2**, definido por:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,n,\beta)} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+m'+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{n^{1/2}}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \\
&\quad \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+m-m')!}} \\
&\quad |r+k-n\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{5.36}$$

*Cálculo do Termo 3

Calculemos o **Termo 3** da equação (5.24), obtendo conseqüentemente o elemento

$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,n,\beta)}$. Temos:

$$\begin{aligned}
& D^{m, \tilde{m}'} D^{n, \tilde{k}'} \langle \tilde{m}', m; \beta | A | \beta; n, \tilde{k}' \rangle = \\
= & D^{m, \tilde{m}'} D^{n, \tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(k')} C_i^{m, m'} C_j^{k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i}]^\dagger}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!} u(\beta)^{m-2i} v(\beta)^{m'}} | A | \\
& \frac{[a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j}]}{\sqrt{n!} \sqrt{k'!} u(\beta)^{n-2j} v(\beta)^{k'}} | 0(\beta) \rangle \\
= & D^{m, \tilde{m}'} D^{n, \tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(k')} \frac{C_i^{m, m'} C_j^{n, k'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!} \sqrt{n!} \sqrt{k'!} [u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
& \left[(a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i})^\dagger | A | a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & F^{(m, m', n, k', \beta)} \left[(a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i})^\dagger | A | a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & Tr \left\{ F^{(m, m', n, k', \beta)} \left[(a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i})^\dagger | A | a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
= & Tr \left\{ F^{(m, m', n, k', \beta)} \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{m-i} (a^\dagger)^{m'-i} \right] A \right\}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Segue após o cálculo do Traço que,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m, m', n, k', \beta)} & = F^{(m, m', n, k', \beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} | r \rangle \langle r | a^{m-i} (a^\dagger)^{m'-i} \right] \\
= & F^{(m, m', n, k', \beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{(r + n - j)! (r + m - i)!}{r! \sqrt{(r + n - k')!} \sqrt{(r + m - m')!}} | r + n - k' \rangle \langle r + m - m' |
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m+m'}} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \\
&\quad \frac{C_i^{m,m'} C_j^{n,k'}}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!m'}\sqrt{n!k'} r!} \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m-m')!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'}} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} m!m'n!k'!}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'} i!j!(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(k'-j)!} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!m'}\sqrt{n!k'} r!} \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m-m')!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{5.40}$$

como resultado:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,k',\beta)} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m+m'+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(k'-j)! u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \\
&\quad \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m-m')!}} \\
&\quad |r+n-k'\rangle \langle r+m-m'|.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

★Cálculo Termo 4

Em busca do elemento, $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,n,\beta)}$, relacionado ao cálculo do **Termo 4**, temos:

$$\begin{aligned}
& D^{m, \tilde{m}'} D^{n, \tilde{n}} \langle \tilde{m}', m; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle = \\
= & D^{m, \tilde{m}'} D^{n, \tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} C_i^{m, m'} C_j^{n, n} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i}]^\dagger}{\sqrt{m!} \sqrt{m'}! u(\beta)^{m-2i} v(\beta)^{m'}} | \hat{A} | \\
& \frac{[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j}]}{\sqrt{n!} \sqrt{n'}! u(\beta)^{n-2j} v(\beta)^n} | 0(\beta) \rangle
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
= & D^{m, \tilde{m}'} D^{n, \tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{C_i^{m, m'} C_j^{n, n}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'}! \sqrt{n!} \sqrt{n'}! [u(\beta)^{m+n-2(i+j)v(\beta)^{m'+n}}]} \\
& \left[(a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i})^\dagger | A | a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & F^{(m, m', n, n, \beta)} \left[(a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & Tr \left\{ F^{(m, m', n, n, \beta)} \left[(a^{m'-i} (a^\dagger)^{m-i})^\dagger | A | a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
= & Tr \left\{ F^{(m, m', n, n, \beta)} \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{m-i} (a^\dagger)^{m-i} \right] \hat{A} \right\}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

seguindo então pelo desenvolvimento que:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m, m', n, n, \beta)} & = F^{(m, m', n, n, \beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} | r \rangle \langle r | a^{m-i} (a^\dagger)^{m-i} \right] \\
= & F^{(m, m', n, n, \beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+m-m')!}} | r \rangle \langle r+m-m' |
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m+m'}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \\
&\quad \frac{C_i^{m,m'} C_j^{n,n}}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!m'}\sqrt{n!n!}} \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+m-m')!}} |r\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'}} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} m!m'!n!n!}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n} i!j!(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(n-j)!} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!m'}\sqrt{n!n!}} \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+m-m')!}} |r\rangle \langle r+m-m'|.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

obtemos assim o elemento relacionado ao **Termo 4**,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^{m+m'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{[n!(m!m')^{1/2}]}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r)!(r+m-m')!}} |r\rangle \langle r+m-m'|.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

★Cálculo Termo 5

Agora obteremos $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,k',\beta)}$ a partir do desenvolvimento do **Termo 5**. Temos:

$$\begin{aligned}
& D^{n, \tilde{m}'} D^{k, \tilde{k}'} \langle \tilde{m}', n; \beta | A | \beta; k, \tilde{k}' \rangle = \\
= & D^{n, \tilde{m}'} D^{k, \tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} \sum_{j=0}^{\min(k, k')} C_i^{n, m'} C_j^{k, k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i}]^\dagger}{\sqrt{n!} \sqrt{m'!} u(\beta)^{n-2i} v(\beta)^{m'}} | A | \\
& \frac{[a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!} \sqrt{k'!} u(\beta)^{k-2j} v(\beta)^{k'}} | 0(\beta) \rangle
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
= & D^{n, \tilde{m}'} D^{k, \tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} \sum_{j=0}^{\min(k, k')} \frac{C_i^{n, m'} C_j^{k, k'}}{\sqrt{n!} \sqrt{m'!} \sqrt{k!} \sqrt{k'!} [u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
& \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger | A | a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \\
= & F^{(n, m', k, k', \beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger | A | a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \\
= & Tr \left\{ F^{(n, m', k, k', \beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger | A | a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
= & Tr \left\{ F^{(n, m', k, k', \beta)} \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{m'-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] A \right\}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

que pelas substituições indicadas anteriormente, resulta em

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n, m', k, k', \beta)} & = F^{(n, m', k, k', \beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j} | r \rangle \langle r | a^{m'-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] \\
= & F^{(n, m', k, k', \beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!} (r+m'-n)!} | r+k-k' \rangle \langle r+m'-n |
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'}} \frac{\alpha^{k+k'}}{\sqrt{k!k'}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \\
&\quad \frac{C_i^{n,m'} C_j^{k,k'}}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!m'!}\sqrt{k!k'!}} \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r+m'-n)!}} |r+k-k'\rangle \langle r+n-m'|
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m!m'}} \frac{\alpha^{k+k'}}{\sqrt{k!k'}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n!m'!k!k'!}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{i!j!(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!m'!}\sqrt{k!k'!}} \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r+m'-n)!}} |r+k-k'\rangle \langle r+m'-n|
\end{aligned} \tag{5.52}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,k',\beta)} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \\
&\quad \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m'-n)!}} |r+k-k'\rangle \langle r+m'-n|
\end{aligned} \tag{5.53}$$

★Cálculo Termo 6

Calcular o **Termo 6** permitirá o conhecimento do elemento $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,n,\beta)}$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
& D^{n,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{m}', n; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle = \\
& = D^{n,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} C_i^{n,m'} C_j^{k,n} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i}(a^\dagger)^{m'-i}]^\dagger}{\sqrt{n!}\sqrt{m'!}u(\beta)^{n-2i}v(\beta)^{m'}} | A | \\
& \quad \frac{[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!}\sqrt{n!}u(\beta)^{k-2j}v(\beta)^n | 0(\beta) \rangle}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
& = D^{n,\tilde{m}'} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{C_i^{n,m'} C_j^{k,n}}{\sqrt{n!}\sqrt{m'!}\sqrt{k!}\sqrt{n!}[u(\beta)^{n+k-2(i+j)}v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \quad \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{m'-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
& = F^{(n,m',k,n,\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{m'-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
& = Tr \left\{ F^{(n,m',k,n,\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{m'-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
& = Tr \left\{ F^{(n,m',k,n,\beta)} \left[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{n-i}(a^\dagger)^{m'-i} \right] A \right\}
\end{aligned} \tag{5.55}$$

e com o desenvolvimento similar aos casos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,n,\beta)} & = F^{(n,m',k,n,\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \quad \left[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} | r \rangle \langle r | a^{m'-i}(a^\dagger)^{n-i} \right] \\
& = F^{(n,m',k,n,\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \quad \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+m'-n)!}} | r+k-n \rangle \langle r+m'-n | \tag{5.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n! m'! k! n!}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n} i! j! (n-i)! (m'-i)! (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n! m'!} \sqrt{k! n!}} \frac{(r+k-j)! (r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)! (r+m'-n)!}} |r+k-n\rangle \langle r+m'-n| \quad (5.57)
\end{aligned}$$

concluindo que o elemento referente ao **Termo 6** é:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\quad \frac{1}{n} \frac{1}{(n-i)! (m'-i)! (k-j)! (n-j)! u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \\
&\quad \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)! (r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-n)! (r+m'-n)!}} \\
&\quad |r+k-n\rangle \langle r+m'-n| \quad (5.58)
\end{aligned}$$

*Cálculo Termo 7

Para o **Termo 7**, afim de obtermos $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)}$, temos o desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
&D^{n,\tilde{m}} D^{n,\tilde{k}'} \langle \tilde{m}', n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle = \\
&= D^{n,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} C_i^{n,m'} C_j^{n,k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i}]^\dagger}{\sqrt{n! \sqrt{m'!} u(\beta)^{n-2i} v(\beta)^{m'}}} | \hat{A} | \\
&\quad \frac{[a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j}]}{\sqrt{n! \sqrt{k'!} u(\beta)^{n-2j} v(\beta)^{k'}}} | 0(\beta) \rangle \quad (5.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D^{n,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{C_i^{n,m'} C_j^{n,k'}}{\sqrt{n!} \sqrt{m'!} \sqrt{n!} \sqrt{k'!} [u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
&\quad \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger |\widehat{A}| a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
&= F^{(n,m',n,k',\beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger |\widehat{A}| a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
&= Tr \left\{ F^{(n,m',n,k',\beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger |\widehat{A}| a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
&= Tr \left\{ F^{(n,m',n,k',\beta)} \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{m'-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] A \right\} \tag{5.60}
\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)} &= F^{(n,m',n,k',\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \left[a^{k'-j} (a^\dagger)^{n-j} |r\rangle \langle r| a^{m'-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] \tag{5.61} \\
&= F^{(n,m',n,k',\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')!(r+m'-n)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m'-n| \\
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sum_{i=0}^{\min(m')} \sum_{j=0}^{\min(k)} \\
&\quad \frac{C_i^{n,m'} C_j^{n,k'}}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!m'!} \sqrt{n!k'!}} \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')!(r+m'-n)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m'-n| \tag{5.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n! m'! n! k'!}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'} i! j! (n-i)! (m'-i)! (n-j)! (k'-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n! m'!} \sqrt{n! k'!}} \frac{(r+n-j)! (r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')! (r+m'-n)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m'-n|,
\end{aligned} \tag{5.63}$$

resultando em,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m'+k'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\quad \frac{(n)!}{(n-i)! (m'-i)! (k'-j)! (n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \\
&\quad \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+n-j)! (r+m'-i)!}{\sqrt{(r+n-k')! (r+m'-n)!}} \\
&\quad |r+n-k'\rangle \langle r+m'-n|
\end{aligned} \tag{5.64}$$

★Cálculo do Termo 8

Calculemos o **Termo 8** da equação (5.24) em busca de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,n,\beta)}$. Temos neste caso,

$$\begin{aligned}
&D^{n,\tilde{m}} D^{n,\tilde{n}} \langle \tilde{m}', n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{n} \rangle = \\
&= D^{n,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} C_i^{n,m'} C_j^{n,n} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i}]^\dagger}{\sqrt{n!} \sqrt{m'!} u(\beta)^{n-2i} v(\beta)^{m'}} | \hat{A} | \\
&\quad \frac{[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j}]}{\sqrt{n!} \sqrt{n!} u(\beta)^{n-2j} v(\beta)^n | 0(\beta) \rangle}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
&= D^{n,\tilde{m}'} D^{n,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,n)} \frac{C_i^{n,m'} C_j^{n,n}}{\sqrt{n!} \sqrt{m'!} \sqrt{n!} \sqrt{n!} [u(\beta)^{2n-2(i+j)v(\beta)^{m'+n}}]} \\
&\quad \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger |\widehat{A}\rangle a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
&= F^{(n,m',n,n,\beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger |\widehat{A}\rangle a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
&= Tr \left\{ F^{(n,m',n,n,\beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{m'-i})^\dagger |\widehat{A}\rangle a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
&= Tr \left\{ F^{(n,m',n,n,\beta)} \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{m'-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] A \right\} \tag{5.66}
\end{aligned}$$

construindo o elemento de interesse, i.é,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,n,\beta)} &= F^{(n,m',n,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} |r\rangle \langle r| a^{m'-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] \\
&= F^{(n,m',n,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \tag{5.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+m'-n)!}} |r\rangle \langle r+m'-n| \\
&= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,n)} \\
&\quad \frac{C_i^{n,m'} C_j^{n,n}}{u(\beta)^{2n-2(i+j)v(\beta)^{m'+n}}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!m'!} \sqrt{n!n!}} \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+m'-n)!}} |r\rangle \langle r+m'-n| \tag{5.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n! m'! n! n!}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n} i! j! (n-i)! (m'-i)! (n-j)! (n-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n! m'!} \sqrt{n! n!}} \frac{(r+n-j)! (r+m'-i)!}{r! \sqrt{(r)! (r+m'-n)!}} |r\rangle \langle r+m'-n| \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Obtemos então para o oitavo termo da equação (5.24), a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,n,\beta)} &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^{m'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\quad \frac{(n!)^3/2}{(n-i)! (m'-i)! (n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)! (r+m'-i)!}{\sqrt{(r)! (r+m'-n)!}} |r\rangle \langle r+m'-n| \tag{5.70}
\end{aligned}$$

★Cálculo do Termo 9

A fim de desenvolver o **Termo 9** da equação (5.24) em busca de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,k',\beta)}$ temos,

$$\begin{aligned}
&D^{m,\tilde{n}} D^{k,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, m; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle = \\
&= D^{m,\tilde{n}'} D^{k,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} C_i^{m,n} C_j^{k,k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{m!} \sqrt{n!} u(\beta)^{m-2i} v(\beta)^n} | \hat{A} | \\
&\quad \frac{[a^{k'-j} (a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!} \sqrt{k'!} u(\beta)^{k-2j} v(\beta)^{k'}} | 0(\beta) \rangle \tag{5.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D^{m, \tilde{n}'} D^{k, \tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m, n)} \sum_{j=0}^{\min(k, k')} \frac{C_i^{m, n} C_j^{k, k'}}{\sqrt{m!} \sqrt{n!} \sqrt{k!} \sqrt{k'!} [u(\beta)^{m+k-2(i+j)v(\beta)^{n+k'}}]} \\
&\quad \left[(a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger |\widehat{A}\rangle a^{k-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \\
&= F^{(m, n, k, k', \beta)} \left[(a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger |\widehat{A}\rangle a^{k-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \\
&= Tr \left\{ F^{(m, n, k, k', \beta)} \left[(a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger |\widehat{A}\rangle a^{k-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
&= Tr \left\{ F^{(m, n, k, k', \beta)} \left[a^{k-j} (a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{n-i} (a^\dagger)^{m-i} \right] \widehat{A} \right\}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m, n, k, k', \beta)} &= F^{(m, n, k, k', \beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r+n-m)!}} |r+k-k'\rangle \langle r+n-m| \\
&= \sigma^3 \delta e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sum_{k, k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+k'}}{\sqrt{k!k'!}} \sum_{i=0}^{\min(m, n)} \sum_{j=0}^{\min(k, k')} \\
&\quad \frac{C_i^{m, n} C_j^{k, k'}}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)v(\beta)^{n+k'}}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!n!} \sqrt{k!k'!}} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r+n-m)!}} |r+k-k'\rangle \langle r+n-m|
\end{aligned} \tag{5.73}$$

E finalmente teremos, relacionado ao **Termo 9**, a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,k',\beta)} &= \sigma^3 \delta e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{(n!^{1/2})}{(m-i)!(n-i)!(k-j)!(k'-j)! u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \\
&\quad \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+n-m)!}} |r+k-k'\rangle \langle r+n-m|
\end{aligned} \tag{5.74}$$

★Cálculo do Termo 10

O cálculo do **Termo 10** da equação (5.24) definirá $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,n,\beta)}$; Obtemos

$$\begin{aligned}
&D^{m,\tilde{n}} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, m; \beta | \hat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle = \\
&= D^{m,\tilde{n}'} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} C_i^{m,n} C_j^{k,n} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{m!} \sqrt{n!} u(\beta)^{m-2i} v(\beta)^n} | \hat{A} \rangle \\
&\quad \frac{[a^{n-j} (a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!} \sqrt{n!}} u(\beta)^{k-2j} v(\beta)^n | 0(\beta) \rangle
\end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\begin{aligned}
&= D^{m,\tilde{n}'} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{C_i^{m,n} C_j^{k,n}}{\sqrt{m!} \sqrt{n!} \sqrt{k!} \sqrt{n!} [u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}]} \\
&\quad \left[(a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \\
&= F^{(m,n,k,n,\beta)} \left[(a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \\
&= Tr \left\{ F^{(m,n,k,n,\beta)} \left[(a^{m-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j} (a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
&= Tr \left\{ F^{(m,n,k,n,\beta)} \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{n-i} (a^\dagger)^{m-i} \right] \hat{A} \right\}
\end{aligned} \tag{5.76}$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,n,\beta)} &= F^{(m,n,k,n,\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{k-j} | r \rangle \langle r | a^{n-i} (a^\dagger)^{m-i} \right]
\end{aligned} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}
&= F^{(m,n,k,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+n-m)!}} |r+k-n\rangle \langle r+n-m| \\
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \\
&\quad \frac{C_i^{m,n} C_j^{k,n}}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!n!}\sqrt{k!n!}} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+n-m)!}} |r+k-n\rangle \langle r+n-m| \quad (5.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} m!n!k!n!}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n} i!j!(m-i)!(n-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!n!}\sqrt{k!n!}} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r+n-m)!}} |r+k-n\rangle \langle r+n-m| \quad (5.79)
\end{aligned}$$

finalmente obtemos que:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{(n!)}{(m-i)!(n-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!(r+n-m)!}} |r+k-n\rangle \langle r+n-m| \quad (5.80)
\end{aligned}$$

★Cálculo do Termo 11

Em busca de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,k',\beta)}$, desenvolvemos o **Termo 11**, obtendo

$$\begin{aligned}
& D^{m,\tilde{n}} D^{n,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, m; \beta | A | \beta; n, \tilde{k}' \rangle = \\
= & D^{m,\tilde{n}'} D^{n,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} C_i^{m,n} C_j^{n,k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}u(\beta)^{m-2i}v(\beta)^n} |\widehat{A}| \\
& \frac{[a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j}]}{\sqrt{n!}\sqrt{k'!}u(\beta)^{n-2j}v(\beta)^{k'}} |0(\beta)\rangle \quad (5.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & D^{m,\tilde{n}'} D^{n,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{C_i^{m,n} C_j^{n,k'}}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}\sqrt{n!}\sqrt{k'!}[u(\beta)^{m+n-2(i+j)}v(\beta)^{n+k'}]} \\
& \left[(a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger |\widehat{A}| a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & F^{(m,n,n,k',\beta)} \left[(a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger |\widehat{A}| a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & Tr \left\{ F^{(m,n,n,k',\beta)} \left[(a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger |\widehat{A}| a^{n-j}(a^\dagger)^{k'-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
= & Tr \left\{ F^{(m,n,n,k',\beta)} \left[a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{n-i}(a^\dagger)^{m-i} \right] \widehat{A} \right\}. \quad (5.82)
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,k',\beta)} &= F^{(m,n,n,k',\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \left[a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} |r\rangle \langle r| a^{n-i}(a^\dagger)^{m-i} \right] \quad (5.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & F^{(m,n,n,k',\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')!(r+n-m)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+n-m| \\
= & \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \\
& \frac{(-1)^{i+j} m! n! n! k'!}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{i! j! (m-i)! (n-i)! (n-j)! (k'-j)!} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{1}{\sqrt{m! n!} \sqrt{n! k'!}} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')!(r+n-m)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+n-m|, \quad (5.84)
\end{aligned}$$

finalizando o cálculo do décimo primeiro termo da equação (5.24), que nos dá

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{1}{(n!)} \frac{1}{(m-i)!(n-i)!(n-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \\
&\quad \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+n-m)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+n-m|.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

★Cálculo do Termo 12

Dando prosseguimento aos cálculos, devemos desenvolver o **Termo 12**. Logo,

$$\begin{aligned}
&D^{m,\tilde{n}} D^{n,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, m; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{n} \rangle = \\
&= D^{m,\tilde{n}} D^{n,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,n)} C_i^{m,n} C_j^m \langle 0(\beta) | \frac{[a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}u(\beta)^{m-2i}v(\beta)^n} | \hat{A} | \\
&\quad \frac{[a^{n-j}(a^\dagger)^{n-j}]}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}u(\beta)^{n-2j}v(\beta)^n} | 0(\beta) \rangle
\end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
&= D^{m,\tilde{n}'} D^{n,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,n)} \frac{C_i^{m,n} C_j^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}\sqrt{n!}\sqrt{n!} [u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}]} \\
&\quad \left[(a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \\
&= F^{(m,n,n,n,\beta)} \left[(a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \\
&= Tr \left\{ F^{(m,n,n,n,\beta)} \left[(a^{m-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
&= Tr \left\{ F^{(m,n,n,n,\beta)} \left[a^{n-j}(a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{n-i}(a^\dagger)^{m-i} \right] \hat{A} \right\}
\end{aligned} \tag{5.87}$$

que nos dá,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,n,\beta)} &= F^{(m,n,n,n,\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad [a^{n-j}(a^\dagger)^{n-j} | r \rangle \langle r | a^{n-i}(a^\dagger)^{m-i}]
\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}
&= F^{(m,n,n,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+n-m)!}} |r\rangle \langle r+n-m| \\
&= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \\
&\quad \frac{C_i^{m,n} C_j^n}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!n!} \sqrt{n!n!}} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+n-m)!}} |r\rangle \langle r+n-m|
\end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} m!n!n!n!}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n} i!j!(m-i)!(n-i)!(n-j)!(n-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{m!n!} \sqrt{n!n!}} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r)!(r+n-m)!}} |r\rangle \langle r+n-m|,
\end{aligned} \tag{5.90}$$

obtendo com isso o elemento $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,n,\beta)}$,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,n,\beta)} &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^m (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{(n^{1/2}!)^2}{(m-i)!(n-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r)!(r+n-m)!}} |r\rangle \langle r+n-m|
\end{aligned} \tag{5.91}$$

★Cálculo do Termo 13

É necessário o cálculo do **Termo 13**, a fim de determinarmos o elemento $\rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,k,k',\beta)}$; de fato, temos:

$$\begin{aligned}
& D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, n; \beta | \widehat{A} | \beta; k, \tilde{k}' \rangle = \\
& = D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} C_i^n C_j^{k,k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}u(\beta)^{n-2i}v(\beta)^n} | \widehat{A} | \\
& \quad \frac{[a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!}\sqrt{k'}!u(\beta)^{k-2j}v(\beta)^{k'}} | 0(\beta) \rangle
\end{aligned} \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}
& = D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{C_i^n C_j^{k,k'}}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}\sqrt{k!}\sqrt{k'}![u(\beta)^{k+n-2(i+j)v(\beta)^{n+k'}}]} \\
& \quad \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
& = F^{(n,n,k,k',\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
& = Tr \left\{ F^{(n,n,k,k',\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
& = Tr \left\{ F^{(n,n,k,k',\beta)} \left[a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i} \right] \widehat{A} \right\}
\end{aligned} \tag{5.93}$$

gerando,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,k,k',\beta)} & = F^{(n,n,k,k',\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \quad \left[a^{k'-j}(a^\dagger)^{k-j} | r \rangle \langle r | a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i} \right]
\end{aligned} \tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}
&= F^{(n,n,k,k',\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r)!}} |r+k-k'\rangle \langle r| \\
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \\
&\quad \frac{C_i^{n,n} C_j^{k,k'}}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!n! \sqrt{k!k'!}}} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r)!}} |r+k-k'\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n! n! k! k'!}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{i! j! (n-i)! (n-i)! (k-j)! (k'-j)!} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!n! \sqrt{k!k'!}}} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-k')!(r)!}} |r+k-k'\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{5.96}$$

resultado que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{k+k'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\quad \frac{(n)!}{(n-i)!^2 (k-j)! (k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r)!}} |r+k-k'\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{5.97}$$

★Cálculo do Termo 14

Procedendo de maneira similar obtemos do **Termo 14** o elemento $\rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,k,n,\beta)}$; temos de

$$\begin{aligned}
 & D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, n; \beta | \widehat{A} | \beta; k, \tilde{n} \rangle = \\
 = & D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} C_i^n C_j^{k,n} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}u(\beta)^{n-2i}v(\beta)^n} | \widehat{A} | \\
 & \frac{[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j}]}{\sqrt{k!}\sqrt{n!}u(\beta)^{k-2j}v(\beta)^n} | 0(\beta) \rangle
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

$$\begin{aligned}
 = & D^{n,\tilde{n}} D^{k,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{C_i^n C_j^{k,n}}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}\sqrt{k!}\sqrt{n!}[u(\beta)^{n+k-2(i+j)}v(\beta)^{2n}]} \\
 & \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
 = & F^{(n,n,k,n,\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \\
 = & Tr \left\{ F^{(n,n,k,n,\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \widehat{A} | a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
 = & Tr \left\{ F^{(n,n,k,n,\beta)} \left[a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} (\rho_\beta) a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i} \right] \widehat{A} \right\}
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

segundo dessa forma que,

$$\begin{aligned}
 \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,k,n,\beta)} = & F^{(n,n,k,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
 & [a^{n-j}(a^\dagger)^{k-j} | r \rangle \langle r | a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i}]
 \end{aligned} \tag{5.100}$$

$$\begin{aligned}
&= F^{(n,n,k,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r)!}} |r+k-n\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n! k! n!}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n} i! j! (n-i)! (n-i)! (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n! n! \sqrt{k! n!}}} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)!(r)!}} |r+k-n\rangle \langle r|,
\end{aligned} \tag{5.102}$$

e como consequência que,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,n,\beta)} &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^k (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\quad \frac{n^{3/2}!}{(n-i)^2! (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!(r)!}} |r+k-n\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{5.103}$$

★Cálculo do Termo 15

Seguindo o mesmo protocolo, realizaremos o cálculo do **Termo 15**, que nos trará como resultado o operador densidade associado ao termo $\langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{k}' \rangle$. Partindo de

$$\begin{aligned}
& D^{n,\tilde{n}} D^{n,\tilde{k}'} \langle \tilde{n}, n; \beta | A | \beta; n, \tilde{k}' \rangle = \\
= & D^{n,\tilde{n}} D^{n,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} C_i^n C_j^{n,k'} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}u(\beta)^{n-2i}v(\beta)^n} | A | \\
& \frac{a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j}}{\sqrt{n!}\sqrt{k'!}u(\beta)^{n-2j}v(\beta)^{k'}} | 0(\beta) \rangle
\end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\begin{aligned}
= & D^{n,\tilde{n}} D^{n,\tilde{k}'} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{C_i^n C_j^{n,k'}}{\sqrt{n!}\sqrt{n!}\sqrt{n!}\sqrt{k'!}[u(\beta)^{2n-2(i+j)v(\beta)^{n+k'}}]} \\
& \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & F^{(n,n,n,k',\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & Tr \left\{ F^{(n,n,n,k',\beta)} \left[(a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
= & Tr \left\{ F^{(n,n,n,k',\beta)} \left[a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i} \right] \hat{A} \right\}
\end{aligned} \tag{5.105}$$

e utilizando a mesma sistemática, chegamos à relação:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,k',\beta)} &= F^{(n,n,n,k',\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \left[a^{k'-j}(a^\dagger)^{n-j} | r \rangle \langle r | a^{n-i}(a^\dagger)^{n-i} \right]
\end{aligned} \tag{5.106}$$

$$\begin{aligned}
&= F^{(n,n,n,k',\beta)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')!(r)!}} |r+n-k'\rangle \langle r| \\
&= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \\
&\quad \frac{C_i^{n,n} C_j^{n,k'}}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!n!}\sqrt{n!k'!}} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')!(r)!}} |r+n-k'\rangle \langle r| \quad (5.107) \\
&= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sqrt{k!} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k'}}{\sqrt{k'!}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n!n!k'!}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'} i!j!(n-i)!(n-i)!(n-j)!(k'-j)!} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!n!}\sqrt{n!k'!}} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r+n-k')!(r)!}} |r+n-k'\rangle \langle r|, \quad (5.108)
\end{aligned}$$

e finalmente a,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,k',\beta)} &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{(n^{3/2})!}{(n-i)^2!(n-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r)!}} |r+n-k'\rangle \langle r| \quad (5.109)
\end{aligned}$$

★Cálculo do Termo 16

O cálculo do **Termo 16** se mostra peculiar, pois é o cálculo do valor esperado do operador \widehat{A} , para estados do tipo número, semelhante o **Termo 1** que faz este mesmo

cálculo para estados do tipo coerente. Neste contexto deve-se observar que todos os outros quatorze termos têm em sua estrutura tanto estados coerentes quanto estados número. No presente caso, temos:

$$\begin{aligned}
& D^{n,\tilde{n}} D^{n,\tilde{n}} \langle \tilde{n}, n; \beta | \hat{A} | \beta; n, \tilde{n} \rangle = \\
= & D^{n,\tilde{n}} D^{n,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} C_i^{n,n} C_j^{n,n} \langle 0(\beta) | \frac{[a^{n-i} (a^\dagger)^{n-i}]^\dagger}{\sqrt{n!} \sqrt{n!} u(\beta)^{n-2i} v(\beta)^n} | \hat{A} | \\
& \frac{a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j}}{\sqrt{n!} \sqrt{n!} u(\beta)^{n-2j} v(\beta)^n} | 0(\beta) \rangle \quad (5.110)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & D^{n,\tilde{n}} D^{n,\tilde{n}} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{C_i^{n,n} C_j^{n,n}}{\sqrt{n!} \sqrt{n!} \sqrt{n!} \sqrt{n!} [u(\beta)^{2n-2(i+j)v(\beta)^{2n}}]} \\
& \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & F^{(n,n,n,n,\beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \\
= & Tr \left\{ F^{(n,n,n,n,\beta)} \left[(a^{n-i} (a^\dagger)^{n-i})^\dagger | \hat{A} | a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} \right] \rho_\beta \right\} \\
= & Tr \left\{ F^{(n,n,n,n,\beta)} \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} (\rho_\beta) a^{n-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] \hat{A} \right\} \quad (5.111)
\end{aligned}$$

de maneira que,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,n,\beta)} & = F^{(n,n,n,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \left[a^{n-j} (a^\dagger)^{n-j} | r \rangle \langle r | a^{n-i} (a^\dagger)^{n-i} \right] \quad (5.112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F^{(n,n,n,n,\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r)!} (r)!} |r\rangle \langle r| \\
&= \delta^4 e^{-\alpha^2} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \\
&\quad \frac{C_i^{n,n} C_j^{n,n}}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!n!} \sqrt{n!n!}} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r)!} (r)!} |r\rangle \langle r| \tag{5.113}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^4 e^{-\alpha^2} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j} n!n!n!n!}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{i!j!(n-i)!(n-i)!(n-j)!(n-j)!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{n!n!} \sqrt{n!n!}} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{r! \sqrt{(r)!} (r)!} |r\rangle \langle r| \tag{5.114}
\end{aligned}$$

determinando-se assim o último termo do operador densidade associado ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,n,\beta)} &= \delta^4 e^{-\alpha^2} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{(-1)^{i+j}}{r^2! i! j!} \\
&\quad \frac{n^2!}{[(n-i)!]^2 [(n-j)!]^2} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad (r+n-j)!(r+n-i)! |r+k-n\rangle \langle r|. \tag{5.115}
\end{aligned}$$

De posse dos elementos que calculamos nesta seção e lembrando que o operador densidade é dado pela soma de cada um destes elementos, segue que:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)} = & \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,m',k,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,m',k,n,\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,m',n,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,m',n,n,\beta)} + \\
& \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,m',k,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,m',k,n,\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,m',n,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,m',n,n,\beta)} + \\
& \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,n,k,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,n,k,n,\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,n,n,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,n,n,n,\beta)} + \\
& \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,k,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,k,n,\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,n,k',\beta)} + \rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,n,n,\beta)}. \quad (5.116)
\end{aligned}$$

Logo, a equação (5.116) determina o operador densidade relacionado ao estado de interesse $|\alpha_n(\beta)\rangle$; este operador traz em sua estrutura todas as informações que podemos obter a respeito do sistema, formado pela superposição de estados termalizados via Dinâmica de Campos Térmicos. Considerando que nosso processo de duplicação é o mais geral, i.é, o processo de duplicar o estado usando o seu dual, temos com (5.116) um ganho de informações, pois temos operadores densidades relacionados a cada um dos termos do produto tensorial, além de possuímos uma matriz densidade completa como resultado da soma de todos esses elementos. Em consequência da posse deste operador, buscaremos encontrar informações pertinentes a vários tipos de superposição de estados coerentes e estados de Fock para o que determinamos no próximo capítulo a função de Wigner.

Capítulo 6

Cálculo da Função de Wigner para a Superposição de Estados Coerente e Número Termalizados

Neste capítulo investigaremos, levando em conta os efeitos de temperatura, a superposição de estados coerentes e estados de Fock, estados esses que são de interesse à computação e informação quântica. Com esse objetivo determinaremos a função de Wigner $W(p, q)$, que tem a vantagem de ser uma função de valores reais e possibilitar a ilustração no espaço de fase (p, q) . Porém, como se sabe, não se trata de uma distribuição de probabilidade já que apresenta também valores negativos; fala-se então em "distribuição de quase-probabilidade"[30]. Para o cálculo de $W(p, q)$ usaremos sua definição e a matriz densidade equação (5.116) obtida no capítulo anterior que traz as informações físicas pertinentes ao sistema e que serão explicitadas com o uso de $W(p, q)$, ao final deste capítulo, em expressões literais e figurativas.

6.1 Cálculo da distribuição de probabilidade de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$

Considerando a função de Wigner definida por:

$$W_n(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle} | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ, \quad (6.1)$$

como conhecemos o operador densidade $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ definido pela expressão (5.116), teremos em nosso estudo uma função de Wigner $W_{\alpha_n(\beta)}(p, q)$ dada por uma soma sistemática de termos, i.é,

$$\begin{aligned} W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(p, q) &= \\ &W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,n,\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,n,\beta)}(p, q) \\ &+ W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,n,\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,n,\beta)}(p, q) \\ &+ W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,n,\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,n,\beta)}(p, q) \\ &+ W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,n,\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,k',\beta)}(p, q) + W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,n,\beta)}(p, q). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Com a finalidade de melhor realizar os cálculos, desenvolveremos cada uma das parcelas da expressão (6.2), separadamente:

★i) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)}(p, q)$.

Relativo a este cálculo, temos que a parcela do operador densidade que trará alguma contribuição será,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)} &= \sigma^4 e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+m'} \alpha^{k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m-m')!}} |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \tag{6.3}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k';\beta} &= \sigma^4 e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+m'} \alpha^{k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m-m')!}} \Omega^{m,m',k,k';\beta}(p, q).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

onde, levando em conta a equação (6.1),

$$\Omega^{m,m',k,k';\beta}(p, q) = \frac{1}{2\phi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-k' \rangle \langle r+m-m' | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \tag{6.5}$$

Para realizarmos a integração acima, observamos que para o n -ésimo estado de um oscilador harmônico unidimensional de frequências ω e massa m tem-se, em termos dos polinômios de Hermite $H_n(x)$, que (4.21) $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{[\phi b^2]^{1/4}} \frac{1}{[2^n n!]^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} H_n\left(\frac{x}{b}\right)$ com $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Segue então que:

$$\begin{aligned}
\langle q-y|n\rangle\langle q+y| &= \langle q-y|n\rangle\langle q+y|n\rangle^* \\
&= \frac{1}{[\phi b^2]^{1/4}} \frac{1}{[2^n n!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_n \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[\phi b^2]^{1/4}} \frac{1}{[2^n n!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_n \left[\frac{q+y}{b} \right] \\
&= \frac{1}{[\phi b^2]^{1/2}} \frac{1}{[2^n n!]} e^{-\frac{(q^2-y^2)}{b^2}} H_n \left[\frac{q-y}{b} \right] H_n \left[\frac{q+y}{b} \right]
\end{aligned} \tag{6.6}$$

e assim, para a equação (6.5), temos:

$$\begin{aligned}
\langle q + \frac{Q}{2} | r+k-k' \rangle \langle r+m-m' | q - \frac{Q}{2} \rangle &= \langle q-y | r+k-k' \rangle \langle r+m-m' | q+y \rangle \\
= \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \frac{1}{[2^{r+k-k'} (r+k-k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[2^{r+m-m'} (r+m-m')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] \\
= \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-k'+m-m'} (r+k-k')!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right];
\end{aligned} \tag{6.7}$$

que, ao ser substituído em (6.5) e usando a mudança de variável $y = \frac{-Q}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{-2}{[\pi b^2]^{1/2}} \frac{1}{[2^{2r+k-k'+m-m'} (r+k-k')!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]} e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}}}{[2^{2r+k-k'+m-m'} (r+k-k')!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}} e^{\frac{2ipy}{\hbar}} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy
\end{aligned} \tag{6.8}$$

onde foi usada a propriedade dos polinômios de Hermite, que:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \quad (6.9)$$

Escrevendo o expoente da exponencial como:

$$\frac{-y^2}{b^2} + \frac{2ipy}{\hbar} = \frac{-1}{b^2} \left(y - \frac{ipb^2}{\hbar} \right)^2 - \frac{p^2 b^2}{\hbar^2} \quad (6.10)$$

e introduzindo as variáveis,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb^2}{\hbar} \right) \\ \tau &= \frac{ipb}{\hbar} \end{aligned} \quad (6.11)$$

teremos,

$$\begin{aligned} \Omega^{m,m',k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-k'+m-m'} (r+k-k')! (r+m-m')!]^{1/2}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+k-k'+m-m'} (r+k-k')! (r+m-m')!]^{1/2}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m-m')} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] d\mu \end{aligned} \quad (6.12)$$

Assumindo a importante relação (4.21),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) dx = \begin{cases} \sqrt{\pi} 2^n m! z^{n-m} L_m^{n-m}[-2yz] & \text{para } n \geq m \\ \sqrt{\pi} 2^m n! y^{*(m-n)} L_n^{m-n}[-2yz] & \text{para } n < m \end{cases} \quad (6.13)$$

onde L_m^{n-m} e L_n^{m-n} são as funções associadas de Laguerre, a relação (6.5) torna-se:

$$\begin{aligned} \Omega^{m,m',k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+k-k'+m-m'}(r+k-k')!(r+m-m')!]^{1/2}} \\ \times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r+k+k')!(\tau+\frac{q}{b})^{r+m-m'-r-k-k'} L_{r+k-k'}^{r+m-m'-r-k+k'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \\ 2^{r+k+k'}(r+m-m')!(\tau^*+\frac{q}{b})^{r+k+k'-r-m+m'} L_{r+m-m'}^{r+k-k'-r-m+m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \end{cases} \end{aligned} \quad (6.14)$$

para $m-m' \geq k-k'$ e $k-k' < m-m'$, respectivamente. Introduzindo a variável,

$$\gamma = \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} = \frac{q}{b} + \tau \quad (6.15)$$

de modo que,

$$|\gamma|^2 = \frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \quad (6.16)$$

a primeira parcela da função de Wigner, ou seja,

$$\begin{aligned} W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k';\beta}(p,q) &= \sigma^4 e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+m'+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\ &\frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)}\right)^r \\ &\frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m-m')!}} X \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+k-k'+m-m'}(r+k-k')!(r+m-m')!]^{1/2}} \\ \times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r+k+k')!(\tau+\frac{q}{b})^{r+m-m'-r-k-k'} L_{r+k-k'}^{r+m-m'-r-k+k'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \\ 2^{r+k+k'}(r+m-m')!(\tau^*+\frac{q}{b})^{r+k+k'-r-m+m'} L_{r+m-m'}^{r+k-k'-r-m+m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \end{cases} \end{aligned} \quad (6.17)$$

torna-se:

$$\begin{aligned}
W^{m,m',k,k';\beta}(p,q) &= \frac{\sigma^4 e^{-2\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{\alpha^{m+m'+k+k'} (-1)^{i+j+r+k-k'}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+m-i)!}{[(m-i)! (m'-i)! (k-j)! (k'-j)!]} \frac{1}{[u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
&\frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-k'+m-m'})^{1/2} (r+k-k')! (r+m-m')!]} \\
\times &\begin{cases} 2^{r+m-m'} (r+k+k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m-m'-k-k'} L_{r+k-k'}^{m-m'-k+k'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m-m' \geq k-k' \\ 2^{r+k+k'} (r+m-m')! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k+k'-m+m'} L_{r+m-m'}^{k-k'-m+m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } k-k' < m-m' \end{cases} \quad (6.18)
\end{aligned}$$

que guarda a característica de ser o único elemento da função de Wigner oriundo somente de estados coerentes.

★*ii*) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,n,\beta)}(p,q)$.

Em relação ao cálculo deste elemento a parcela do operador densidade (5.116) de interesse é:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,n,\beta)} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+m'+k} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(m-i)! (m'-i)! (k-j)! (n-j)! u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \\
&\frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)! (r+m-i)!}{r! \sqrt{(r+k-n)! (r+m-m')!}} \\
&|r+k-n\rangle \langle r+m-m'|
\end{aligned} \quad (6.19)$$

de maneira que a função de Wigner pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
W^{m,m',k,n;\beta} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+m'+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(n-j)! u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \\
&\quad \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \Omega^{m,m',k,n;\beta}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

com

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',k,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-n \rangle \langle r+m-m' | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+k-n} (r+k-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[2^{r+m-m'} (r+m-m')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-n+m-m'} (r+k-n)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

onde $y = -\frac{Q}{2}$. Então:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',k,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-n+m-m'} (r+k-n)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+k-n+m-m'} (r+k-n)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m-m')} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.22}$$

e dai

$$\begin{aligned} \Omega^{m,m',k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+k-n+m-m'}(r+k-n)!(r+m-m')]^{1/2}} \\ \times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r+k-n)!(\tau+\frac{q}{b})^{m-m'-k+n} L_{r+k-n}^{r+m-m'-r-k+n} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m \geq m' \\ 2^{r+k-n}(k-n-m+m')!(\tau^*+\frac{q}{b})^{k-n-m+m'} L_{r+m-m'}^{k-n-m+m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m < m' \end{cases} \end{aligned} \quad (6.23)$$

logo,

$$\begin{aligned} W^{m,m',k,n;\beta} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+m'+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\ &\frac{n^{1/2}}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)}v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)}\right)^r \\ &\frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{r!\sqrt{(r+k-n)!(r+m-m')!}} \frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+k-n+m-m'}(r+k-n)!(r+m-m')]^{1/2}} \\ \times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r+k-n)!(\tau+\frac{q}{b})^{m-m'-k+n} L_{r+k-n}^{r+m-m'-r-k+n} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m \geq m' \\ 2^{r+k-n}(k-n-m+m')!(\tau^*+\frac{q}{b})^{k-n-m+m'} L_{r+m-m'}^{k-n-m+m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m < m' \end{cases} \end{aligned} \quad (6.24)$$

finalmente,

$$\begin{aligned} W^{m,m',k,n;\beta}(p,q) &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)}\right)^r \\ &\frac{\alpha^{k+m+m'} (-1)^{i+j+r}}{r!i!j!} \frac{(r+k-j)!(r+m-i)!}{[(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(k-j)! [u(\beta)^{m+k-2(i+j)}v(\beta)^{m'+n}]} \\ &\frac{n!k!(m!m')^{1/2}}{e^{-|\gamma^2|}} \\ &\frac{1}{[(2^{2r+k-n+m-m'})^{1/2}(r+k-n)!(r+m-m')!]} \\ \times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r+k-n)!(\tau+\frac{q}{b})^{m-m'-k+n} L_{r+k-n}^{r+m-m'-r-k+n} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m \geq m' \\ 2^{r+k-n}(k-n-m+m')!(\tau^*+\frac{q}{b})^{k-n-m+m'} L_{r+m-m'}^{k-n-m+m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m < m' \end{cases} \end{aligned} \quad (6.25)$$

★iii) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,k',\beta)}(p, q)$.

Para o cálculo deste elemento, a parcela do operador densidade (5.116) de interesse é:

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',n,k',\beta)} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{\alpha^{m+m'+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\ &\quad \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(k'-j)! u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \left[\frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \right] \\ &\quad \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m-m')!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m-m'| \end{aligned} \quad (6.26)$$

de maneira que a função de Wigner pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} W^{m,m',n,k';\beta} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{\alpha^{m+m'+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\ &\quad \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(k'-j)! u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\ &\quad \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m-m')!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m-m'| \Omega^{m,m',n,k';\beta}(p, q) \end{aligned} \quad (6.27)$$

e a integração da função estabelecida por,

$$\Omega^{m,m',n,k';\beta}(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+n-k' \rangle \langle r+m-m' | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{\frac{-ipQ}{\hbar}} dQ \quad (6.28)$$

com,

$$\begin{aligned}
& q + \frac{Q}{2} |r + n - k'\rangle \langle r + m - m' | q - \frac{Q}{2} \rangle = \\
&= \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \frac{1}{[2^{r+n-k'} (r + n - k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
& \frac{1}{[2^{r+m-m'} (r + m - m')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] \\
&= \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+n-k'+m-m'} (r + n - k')! (r + m - m')!]^{1/2}} \\
& H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right]
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',n,k';\beta}(p, q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}}}{[2^{2r+n-k'+m-m'} (r + n - k')! (r + m - m')!]^{1/2}} \\
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}} e^{\frac{2ipy}{\hbar}} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+n-k'+m-m'} (r + n - k')! (r + m - m')!]^{1/2}} \\
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2} - \tau^2}}{[2^{2r+n-k'+m-m'} (r + n - k')! (r + m - m')!]^{1/2}} \\
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m-m')} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.30}$$

resultando em,

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+n-k'+m-m'}(r+n-k')!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
\times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r+n+k')!(\tau+\frac{q}{b})^{r+m-m'-r-n-k'} L_{r+n-k'}^{r+m-m'-r-n+k'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \\ 2^{r+n+k'}(r+m-m')!(\tau^*+\frac{q}{b})^{r+n+k'-r-m+m'} L_{r+m-m'}^{r+n-k'-r-m+m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

para $m - m' \geq n - k'$ e para $n - k' < m - m'$, respectivamente. Substituindo o resultado acima na equação (6.27) referente a $W_{\alpha_n(\beta)}^{m,m',n,k';\beta}$, temos:

$$\begin{aligned}
W^{m,m',n,k';\beta} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)}\right)^r \frac{\alpha^{m+m'+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{n^{1/2}}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \left[\frac{1}{1+\bar{n}(\beta)}\right] \times
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m-m')!}} \\
&\frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+n-k'+m-m'}(r+n-k')!(r+m-m')!]^{1/2}} \times \\
\times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r+n+k')!(\tau+\frac{q}{b})^{r+m-m'-r-n-k'} L_{r+n-k'}^{r+m-m'-r-n+k'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \\ 2^{r+n+k'}(r+m-m')!(\tau^*+\frac{q}{b})^{r+n+k'-r-m+m'} L_{r+m-m'}^{r+n-k'-r-m+m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.33}$$

para $m - m' \geq n - k'$ e para $n - k' < m - m'$. Conseqüentemente, temos:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_n(\beta)}^{m,m',n,k';\beta}(p,q) &= \frac{\sigma^3 e^{-3/2\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{\alpha^{m+m'+k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r!i!j!} \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{[(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(k'-j)!]} \frac{1}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
&\frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+n-k'+m-m'})^{1/2} (r+n-k')!(r+m-m')!]} \\
\times &\begin{cases} 2^{r+m-m'} (r+n+k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m-m'-n+k'} L_{r+k-k'}^{m-m'-n+k'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m-m' \geq n-k' \\ 2^{r+n+k'} (r+m-m')! (\tau^* + \frac{q}{b})^{n+k'-m+m'} L_{r+m-m'}^{n-k'-m+m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } n-k' < m-m' \end{cases} \\
&\cdot \tag{6.34}
\end{aligned}$$

★iv) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,m',n,n,\beta)}(p,q)$.

A fim de calcularmos esse elemento da função de Wigner, consideremos:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)}^{(m,m',n,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^{m+m'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{[n!(m!m')^{1/2}]}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r)!(r+m-m')!}} |r\rangle \langle r+m-m'| \\
&\tag{6.35}
\end{aligned}$$

Então podemos escrever a função de Wigner como:

$$\begin{aligned}
W^{m,m',n,n;\beta} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^{m+m'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{[n!(m!m')^{1/2}]}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r)!(r+m-m')!}} \Omega^{m,m',n,n;\beta}(p,q). \\
&\tag{6.36}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r \rangle \langle r + m - m' | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^r(r)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r)} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[2^{r+m-m'}(r+m-m')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+m-m'}(r)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ
\end{aligned} \tag{6.37}$$

e usando as variáveis estabelecidas em (6.11), assim como a relação de Hermite em (6.9), tem-se:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+m-m'}(r)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m-m')} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^r e^{[-\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+m-m'}(r)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m-m')} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.38}$$

de onde obtemos o resultado,

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,m',n,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^r e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+m-m'}(r)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
\times \begin{cases} 2^{r+m-m'}(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{m-m'} L_r^{m-m'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m \geq m' \\ 2^r(r+m-m')!(\tau^* + \frac{q}{b})^{m+m'} L_{r+m-m'}^{m'-m} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m < m' \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Segue, assim, de (6.36), que:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_n(\beta)}^{m,m',n,n;\beta} &= \sigma^3 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^{m+m'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{n!(m!m')^{1/2}}{(m-i)!(m'-i)![(n-j)!]^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{\sqrt{(r)!(r+m-m')!}} |r\rangle \langle r+m-m'| \frac{(-1)^r e^{-|\gamma|^2}}{[2^{2r+m-m'} (r)!(r+m-m')!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+m-m'} (r)!(\tau + \frac{q}{b})^{m-m'} L_r^{m-m'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m \geq m' \\ 2^r (r+m-m')!(\tau^* + \frac{q}{b})^{r+n+k'-r-m+m'} L_{r+m-m'}^{m'-m} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m < m' \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

onde $\gamma = \frac{q^2}{b^2} - \tau^2$.

E finalmente:

$$\begin{aligned}
W^{m,m',n,n;\beta}(p,q) &= \frac{\sigma^3 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{\alpha^{m+m'} (-1)^{i+j+r}}{r!i!j!} \frac{(r+n-j)!(r+m-i)!}{[(m-i)!(m'-i)![(n-j)!]^2]} \frac{n!(m!m')^{1/2}}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}]} \\
&\quad \frac{e^{-|\gamma|^2}}{[(2^{2r+m-m'})^{1/2} (r)!(r+m-m')!]} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+m-m'} (r)!(\tau + \frac{q}{b})^{m-m'} L_r^{m-m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m \geq m' \\ 2^r (r+m-m')!(\tau^* + \frac{q}{b})^{m'-m} L_{r+m-m'}^{m'-m} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' < m \end{cases} .
\end{aligned} \tag{6.41}$$

★v) **Cálculo da parcela** $W_{\alpha_n(\beta)}^{(n,m',k,k',\beta)}(p,q)$.

Escrevamos (5.116) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,k',\beta)} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)! u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m'-n)!}} |r+k-k'\rangle \langle r+m'-n|
\end{aligned} \tag{6.42}$$

de maneira que podemos definir $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,k',\beta)}(p, q)$ por:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,k',\beta)} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)! u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m'-n)!}} \Omega^{n,m',k,k';\beta}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.43}$$

onde $\Omega^{n,m',k,k';\beta}(p, q)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',k,k';\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-k' \rangle \langle r+m'-n | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+k-k'}(r+k-k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\frac{1}{[2^{r+m'-n}(r+m'-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-k'+m'-n}(r+k-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ
\end{aligned} \tag{6.44}$$

onde $y = \frac{Q}{2}$

Desenvolvendo as autofunções do oscilador harmônico e usando as devidas trocas de variáveis, podemos reescrever (6.44) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-k'+m'-n}(r+k-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+k-k'+m'-n}(r+k-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m'-n)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.45}$$

onde o fator $(-1)^{r+k-k'}$ resulta da relação do polinômio de Hermite apresentado em (6.9), obtendo

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+k-k'+m'-n}(r+k-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
\times \begin{cases} 2^{r+m'-n}(r+k-k')!(\tau + \frac{q}{b})^{m'-n-k+k'} L_{r+k-k'}^{m'-n-k+k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m'-n \geq k-k' \\ 2^{r+k-k'}(r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-k'-m'+n} L_{r+m'-n}^{k-k'-m'+n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m'-n < k-k' \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.46}$$

que, ao ser substituída em (6.43), nos dá:

$$\begin{aligned}
W^{n,m',k,k';\beta} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\quad \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+m'-n)!}} \frac{1}{\pi^{1/3} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+k-k'+m'-n} (r+k-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-n-k+k'} L_{r+k-k'}^{m'-n-k+k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] \\ 2^{r+k-k'} (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-k'-m'+n} L_{r+m'-n}^{k-k'-m'+n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

para $m' - n \geq k - k'$ e $m' - n < k - k'$, respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned}
W^{n,m',k,k';\beta} &= \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{\alpha^{m'+k+k'} (-1)^{i+j+r+k+k'}}{r!i!j!} \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{[(m'-i)!(n-i)!(k-j)!(k'-j)!]} \\
&\quad \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{e^{-|\gamma^2|}} \\
&\quad \frac{1}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \frac{1}{[(2^{2r+k-k'+m'-n})]^{1/2} (r+k-k')!(r+m'-n)!} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-n-k+k'} L_{r+k-k'}^{m'-n-k+k'} [2|\gamma|^2] \\ 2^{r+k-k'} (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-k'-m'+n} L_{r+m'-n}^{k-k'-m'+n} [2|\gamma|^2] \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.48}$$

para $m' - n \geq k - k'$ e $m' - n < k - k'$.

★vi) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,n,\beta)}(p, q)$.

Para calcular a função de Wigner referente a essa parcela, temos de considerar na matriz densidade, o termo:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k)} \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{1}{n} \frac{1}{(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!(r+m'-n)!}} |r+k-n\rangle \langle r+m'-n|
\end{aligned} \tag{6.49}$$

o que, usando a definição da função de Wigner, nos dá:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',k,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k)} \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{1}{n} \frac{1}{(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!(r+m'-n)!}} \Omega^{n,m',k,n;\beta}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.50}$$

onde definimos,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-n \rangle \langle r+m'-n | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+k-n}(r+k-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[2^{r+m'-n}(r+m'-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-n+m'-n}(r+k-n)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-n+m'-n}(r+k-n)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+k-n+m'-n}(r+k-n)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m'-n)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.51}$$

resultando em,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{1/3} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+k-n+m'-n}(r+k-n)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
\times &\begin{cases} 2^{r+m'-n}(r+k-n)!(\tau + \frac{q}{b})^{m'-k} L_{r+k-n}^{m'-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m' \geq k \\ 2^{r+k-n}(r+m'-n)!(\tau + \frac{q}{b})^{k-m'} L_{r+m'-n}^{k-m'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k < m' \end{cases} \tag{6.52}
\end{aligned}$$

onde $\mu = \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb}{\hbar} \right)$ e $\tau = \frac{ipb}{\hbar}$. E substituindo (6.52) em (6.50) vem,

$$\begin{aligned}
W^{n,m',k,n;\beta} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k)} \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\quad \frac{n}{(n-i)!(m'-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!(r+m'-n)!}} \frac{1}{\pi^{1/3} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+k-n+m'-n} (r+k-n)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-k} L_{r+k-n}^{m'-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m' \geq k \\ 2^{r+k-n} (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-m'} L_{r+m'-n}^{k-m'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k < m' \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.53}$$

o que determina como resultado o seguinte elemento da função de Wigner:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,m',k,n;\beta} &= \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j+r+k-n}}{r!i!j!} \frac{(r+k-j)!(r+m'-i)!}{[(m'-i)!(n-i)!(k-j)!(n-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}]} \\
&\quad \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r-2n+k+m'})]^{1/2} (r+k-n)!(r+m'-n)!} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-k} L_{r+k-n}^{m'-k} [2|\gamma|^2] & \text{para } m' \geq k \\ 2^{r+k-n} (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-m'} L_{r+m'-n}^{k-m'} [2|\gamma|^2] & \text{para } m' < k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

com $\gamma = \frac{q^2}{b^2} - \tau^2$.

★vii) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)}(p, q)$.

Considerando $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)}$, que é obtida em conformidade com a equação (5.116):

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\quad \frac{(n)!}{(n-i)!(m'-i)!(k'-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m'-n)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+m'-n|,
\end{aligned} \tag{6.55}$$

então $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)}$ será:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\quad \frac{(n)!}{(n-i)!(m'-i)!(k'-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m'-n)!}} \Omega^{n,m',n,k';\beta}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.56}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',n,k';\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+n-k'\rangle \langle r+m'-n | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+n-k'} (r+n-k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[2^{r+m'-n} (r+m'-n)]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ
\end{aligned} \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+m'-k'}(r+n-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+m'-k'}(r+n-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+m'-k'}(r+n-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m'-n)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.58}$$

com $y = \frac{Q}{2}$, $\mu = \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb}{\hbar} \right)$ e $\tau = \frac{ipb}{\hbar}$.

Segue que:

$$\begin{aligned}
&\Omega^{n,m',n,k';\beta}(p,q) = \frac{1}{\pi^{1/3} b \hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+m'-k'}(r+n-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+n-k')! \left(\tau + \frac{q}{b} \right)^{m'-2n+k'} L_{r+n-k'}^{m'-2n+k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m-m' \geq n-k' \\ 2^{r+n-k'} (r+m'-n)! \left(\tau^* + \frac{q}{b} \right)^{2n-k'-m'} L_{r+m'-n}^{2n-k'-m'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m-m' < n-k' \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.59}$$

onde se usou propriedades dos polinômios de Hermite. Ao substituir (6.59) em (6.56), expressamos $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,m',n,k';\beta}$ por:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,m',n,k';\beta} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\quad \frac{(n)!}{(n-i)!(m'-i)!(k'-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r
\end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+m'-n)!}} \frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+m'-k'}(r+n-k')!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
\times & \begin{cases} 2^{r+m'-n}(r+n-k')!(\tau+\frac{q}{b})^{m'-2n+k'} L_{r+n-k'}^{m'-2n+k'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m-m' \geq n-k' \\ 2^{r+n-k'}(r+m'-n)!(\tau^*+\frac{q}{b})^{2n-k'-m'} L_{r+m'-n}^{2n-k'-m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right) \right] & \text{para } m-m' < n-k' \end{cases} \\
& \tag{6.61}
\end{aligned}$$

obtendo como resultado final:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,m',n,k';\beta} &= \frac{\sigma^2\delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{1/3}b\hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m'+k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r!i!j!} \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{[(m'-i)!(n-i)!(k'-j)!(n-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)}v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+m'-k'})]^{1/2}(r+n-k')!(r+m'-n)!} \\
\times & \begin{cases} 2^{r+m'-n}(r+n-k')!(\tau+\frac{q}{b})^{m'-2n+k'} L_{r+n-k'}^{m'-2n+k'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m-m' \geq n-k' \\ 2^{r+n-k'}(r+m'-n)!(\tau^*+\frac{q}{b})^{2n-k'-m'} L_{r+m'-n}^{2n-k'-m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m-m' < n-k' \end{cases} \\
& \tag{6.62}
\end{aligned}$$

com $\gamma = \frac{q^2}{b^2} - \tau^2$.

★viii) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,k',\beta)}_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(p,q)$.

A fim de calcularmos a parcela da função de Wigner relacionada ao **Termo 8** da equação (5.116), aqui expresso por:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,n,\beta)} &= \sigma\delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^{m'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
& \frac{(n!)^{3/2}}{(n-i)!(m'-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)}v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r)!(r+m'-n)!}} |r\rangle \langle r+m'-n|, \\
& \tag{6.63}
\end{aligned}$$

usando a definição da função de Wigner, temos

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,m',n,n,\beta)} &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^{m'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\frac{(n!)^{3/2}}{(n-i)!(m'-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{\sqrt{(r)!(r+m'-n)!}} \Omega^{n,m',n,n;\beta}(p,q)
\end{aligned} \tag{6.64}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',n,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r \rangle \langle r + m' - n | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^r (r)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r)} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\frac{1}{[2^{r+m'-n} (r+m'-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2} [q^2+y^2]}}{[2^{2r+m'-n} (r)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&H_{(r)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Com $y = \frac{Q}{2}$, e introduzindo as variáveis $\mu = \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb}{\hbar} \right)$ e $\tau = \frac{ipb}{\hbar}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,m',n,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+m'-n} (r)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+m'-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+m'-n} (r)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+m'-n)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.66}$$

após as devidas substituições,

$$\begin{aligned} \Omega^{n,m',n,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{1/3}b\hbar} \frac{(-1)^r e^{[-\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+m'-n}(r)!(r+m'-n)!]^{1/2}} \\ &\times \begin{cases} 2^{r+m'-n}(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{m'-n} L_r^{m'-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m' \geq n \\ 2^r (r+m'-n)!(\tau^* + \frac{q}{b})^{n-m'} L_{r+m'-n}^{n-m'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m' < n \end{cases} \end{aligned} \quad (6.67)$$

obtemos a expressão da função de Wigner, referente ao **Termo 8** do operador densidade,

$$\begin{aligned} W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,m',n,n;\beta} &= \frac{\sigma \delta^3 e^{-\alpha^2}}{\pi^{1/3}b\hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\ &\frac{\alpha^{m'} (-1)^{i+j+r}}{r!i!j!} \frac{(r+n-j)!(r+m'-i)!}{[(m'-i)!(n-i)![(n-j)!]^2]} \frac{n^{3/2}}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)}v(\beta)^{m'+n}]} \\ &\frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+m'-n})^{1/2}(r)!(r+m'-n)!]} \\ &\times \begin{cases} 2^{r+m'-n}(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{m'-n} L_r^{m'-n} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' \geq n \\ 2^r (r+m'-n)!(\tau^* + \frac{q}{b})^{n-m'} L_{r+m'-n}^{n-m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' < n \end{cases} \end{aligned} \quad (6.68)$$

★ix) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,k',\beta)}(p,q)$.

A parcela da função de Wigner referente ao estado do tipo $|r+k-k'\rangle\langle r+n-m|$ foi calculada, tomando a seguinte parcela da equação (5.116),

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,k',\beta)} &= \sigma^3 \delta e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\ &\frac{1}{(n!^{1/2})} \frac{1}{(m-i)!(n-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)}v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\ &\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+n-m)!}} |r+k-k'\rangle\langle r+n-m| \end{aligned} \quad (6.69)$$

a fim de escrever a função de Wigner associada,

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,k',\beta)} &= \sigma^3 \delta e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{1}{(n!^{1/2})} \frac{1}{(m-i)!(n-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+n-m)!}} \Omega^{m,n,k,k';\beta}(p,q)
\end{aligned} \tag{6.70}$$

que tem para $\Omega^{m,n,k,k';\beta}(p,q)$ a seguinte integral:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-k' \rangle \langle r+n-m | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+k-k'} (r+k-k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\frac{1}{[2^{r+n-m} (r+n-m)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-k'+n-m} (r+k-k')!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ
\end{aligned} \tag{6.71}$$

ou, com as variáveis $\mu = \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb}{\hbar} \right)$ e $\tau = \frac{ipb}{\hbar}$,

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-k'+n-m} (r+k-k')!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2} - \tau^2}}{[2^{2r+k-k'+n-m} (r+k-k')!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+n-m)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] (d\tilde{y}2)
\end{aligned}$$

que, de acordo com propriedades dos polinômios de Hermite, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Omega^{m,n,k,k';\beta}(p, q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-k'+n-m} (r+k-k')! (r+n-m)!]^{1/2}} \\ \times \begin{cases} 2^{r+n-m} (r+k-k')! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{n-m-k+k'} L_{r+k-k'}^{n-m-k+k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right] & \text{para } n-m \geq k-k' \\ 2^{r+k-k'} (r+n-m)! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{k-k'-n+m} L_{r+n-m}^{k-k'-n+m} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right] & \text{para } n-m < k-k' \end{cases} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Segue assim, ao ser substituída em (6.70), que

$$\begin{aligned} W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,k,k';\beta} &= \sigma^3 \delta e^{-\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)}\right)^r \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\ &\frac{\sqrt{n!}}{(m-i)!(n-i)!(k-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\ &\frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-k')!(r+n-m)!}} \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-k'+n-m} (r+k-k')! (r+n-m)!]^{1/2}} \\ \times \begin{cases} 2^{r+n-m} (r+k-k')! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{n-m-k+k'} L_{r+k-k'}^{n-m-k+k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right] & \text{para } n-m \geq k-k' \\ 2^{r+k-k'} (r+n-m)! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{k-k'-n+m} L_{r+n-m}^{k-k'-n+m} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right] & \text{para } n-m < k-k' \end{cases} \end{aligned} \quad (6.74)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,k,k';\beta} &= \frac{\sigma^3 \delta e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n,m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j+r+k-k'}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{[(m-i)! (n-i)! (k-j)! (k'-j)!]} \frac{\sqrt{n!}}{[u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}]} \\
&\frac{e^{-|\gamma|^2}}{[(2^{2r+k-k'+n-m})]^{1/2} (r+k-k')! (r+n-m)!} \\
\times &\begin{cases} 2^{r+n-m} (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{n-m-k+k'} L_{r+k-k'}^{n-m-k+k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } n-m \geq k-k' \\ 2^{r+k-k'} (r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-k'-n+m} L_{r+n-m}^{k-k'-n+m} [2|\gamma|^2] & \text{para } n-m < k-k' \end{cases} \quad (6.75)
\end{aligned}$$

★x) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,n,\beta)}(p, q)$.

Verificaremos agora as relações envolvendo o **Termo 10** e a função de Wigner.

Observando:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+k} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\frac{(n!)}{(m-i)! (n-i)! (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)! (r+n-m)!}} |r+k-n\rangle \langle r+n-m|, \quad (6.76)
\end{aligned}$$

a esse termo, corresponde a função de Wigner,

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,k,n,\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+k} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\frac{(n!)}{(m-i)! (n-i)! (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)! (r+n-m)!}} \Omega^{m,n,k,n;\beta}(p, q) \quad (6.77)
\end{aligned}$$

com,

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-n \rangle \langle r+n-m | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+k-n}(r+k-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[2^{r+n-m}(r+n-m)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-m}(r+k-n)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \tag{6.78}
\end{aligned}$$

e usando que $y = \frac{Q}{2}$, assim como a propriedade do polinômio de Hermite eq.(6.9), vem:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-m}(r+k-n)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2} - \tau^2}}{[2^{2r+k-m}(r+k-n)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+n-m)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy \tag{6.79}
\end{aligned}$$

resultando que:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-m}(r+k-n)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
\times \begin{cases} 2^{r+n-m}(r+k-n)!(\tau + \frac{q}{b})^{-m-k} L_{r+k-n}^{2n-m-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } 2n \geq -m-k \\ 2^{r+k-n}(r+n-m)!(\tau + \frac{q}{b})^{k+m-2n} L_{r+n-m}^{k+m-2n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } 2n < -m-k \end{cases} \tag{6.80}
\end{aligned}$$

que deve ser substituído em (6.77), nos dando:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,k,n;\beta} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^{m+k} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{(n!)}{(m-i)!(n-i)!(k-j)!(n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!(r+n-m)!}} \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-m} (r+k-n)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
\times &\begin{cases} 2^{r+n-m} (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{-m-k} L_{r+k-n}^{2n-m-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } 2n \geq -m-k \\ 2^{r+k-n} (r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k+m-2n} L_{r+n-m}^{k+m-2n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } 2n < -m-k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Então, a função de Wigner para o termo dado por (6.76) deve ser escrita como:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,k,n;\beta} &= \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
\times &\frac{\alpha^{m+k+n} (-1)^{i+j+r+k-n}}{r!i!j!} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{[(m-i)!(n-i)!(k-j)!(n-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}]} \\
&\frac{e^{-|\gamma|^2}}{[(2^{2r+k-m})]^{1/2} (r+k-n)!(r+n-m)!} \\
\times &\begin{cases} 2^{r+n-m} (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{2n-m-k} L_{r+k-n}^{2n-m-k} [2|\gamma|^2] & \text{para } 2n \geq -m-k \\ 2^{r+k-n} (r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k+m-2n} L_{r+n-m}^{k+m-2n} [2|\gamma|^2] & \text{para } 2n < -m-k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.82}$$

★xi) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,k',\beta)}(p, q)$.

Para o termo do operador densidade dado por

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\times \frac{(n!)}{(m-i)!(n-i)!(n-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\times \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+n-m)!}} |r+n-k'\rangle \langle r+n-m|
\end{aligned} \tag{6.83}$$

a função de Wigner é escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{m+k'} (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{(n!)}{(m-i)!(n-i)!(n-j)!(k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r+n-m)!}} \Omega^{m,n,n,k';\beta}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.84}$$

Em (6.84) $\Omega^{m,n,n,k';\beta}(p, q)$ é dado por

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,n,k';\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+n-k' \rangle \langle r+n-m | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+n-k'} (r+n-k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\frac{1}{[2^{r+n-m} (r+n-m)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+2n-k'-m} (r+n-k')!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ
\end{aligned} \tag{6.85}$$

e com $y = \frac{Q}{2}$, tem-se, com $\mu = \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb}{\hbar} \right)$ e $\tau = \frac{ipb}{\hbar}$, que:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+2n-k'-m}(r+n-k')!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{[-\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+2n-k'-m}(r+n-k')!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+n-m)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.86}$$

E daí, usando propriedades dos polinômios de Hermite, obtem-se

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+2n-k'-m}(r+n-k')!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+n-m}(r+n-k')!(\tau + \frac{q}{b})^{k'-m} L_{r+n-k'}^{k'-m} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' \geq m \\ 2^{r+n-k'}(r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{m-k'} L_{r+n-m}^{m-k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' < m \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.87}$$

que substituindo em (6.84), resulta:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,n,k';\beta} &= \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2}b\hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{\alpha^{m+k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r!i!j!} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{[(m-i)!(n-i)!(n-j)!(k'-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}]} \\
&\quad \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+2n-k'-m})]^{1/2} (r+n-k')!(r+n-m)!} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^{r+n-m}(r+n-k')!(\tau + \frac{q}{b})^{k'-m} L_{r+n-k'}^{k'-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq m \\ 2^{r+n-k'}(r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{m-k'} L_{r+n-m}^{m-k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < m \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.88}$$

para contribuição do **Termo 11**.

★*xii*) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,n,\beta)}(p, q)$.

Prosseguindo com os cálculos, uma vez que buscamos definir $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(p, q)$ que é a função de Wigner relacionada ao operador densidade (5.116), devemos calcular o elemento de $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(p, q)$ correspondente ao **Termo 12** de $\rho_{\alpha_n(\beta)}$, i.é,

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,n,\beta)} &= \sigma\delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^m (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\ &\quad \frac{(n^{1/2}!)^2}{(m-i)!(n-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)}v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\ &\quad \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r)!(r+n-m)!}} |r\rangle\langle r+n-m| \end{aligned} \quad (6.89)$$

Conseqüentemente a expressão da função de Wigner é dada por:

$$\begin{aligned} W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,n,n,n,\beta)} &= \sigma\delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^m (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\ &\quad \frac{(n^{1/2}!)^2}{(m-i)!(n-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)}v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\ &\quad \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r)!(r+n-m)!}} \Omega^{m,n,n,n;\beta}(p, q), \end{aligned} \quad (6.90)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega^{m,n,n,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r \rangle \langle r+n-m | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^r(r)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r)} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\ &\quad \frac{1}{[2^{r+n-m}(r+n-m)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \end{aligned} \quad (6.91)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,n,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+n-m}(r)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+n-m}(r)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r+n-m)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+n-m}(r)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r+n-m)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{6.92}$$

Utilizando propriedades dos polinômios de Hermite, a equação (6.92), torna-se:

$$\begin{aligned}
\Omega^{m,n,n,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+n-m}(r)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\times \begin{cases} 2^{r+n-m}(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{n-m} L_r^{n-m} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n \geq m \\ 2^r (r+n-m)! (\tau + \frac{q}{b})^{m-n} L_{r+n-m}^{m-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n < m \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.93}$$

que ao ser substituído em (6.90), resulta em:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,n,n;\beta}(p,q) &= \sigma\delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{\alpha^m (-1)^{i+j}}{r!i!j!} \\
&\frac{\sqrt{n!}}{(m-i)!(n-i)!(n-j)!^2} \frac{1}{u(\beta)^{m+n-2(i+j)}v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)}\right)^r \\
&\frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r)!(r+n-m)!}} \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+n-m}(r)!(r+n-m)!]^{1/2}} \\
&\times \begin{cases} 2^{r+n-m}(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{n-m} L_r^{n-m} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right] & \text{para } n \geq m \\ 2^r (r+n-m)!(\tau^* + \frac{q}{b})^{m-n} L_{r+n-m}^{m-n} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right] & \text{para } n < m \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.94}$$

ou, ainda, introduzindo a variável $\gamma = \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} = \frac{q}{b} + \tau$,

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,n,n;\beta}(p,q) &= \frac{\sigma\delta^3 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2}b\hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)}\right)^r \\
&\frac{\alpha^m (-1)^{i+j+r}}{r!^2 i! j!} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{[(m-i)!(n-i)!(n-j)!^2]} \frac{\sqrt{n!}}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)}v(\beta)^{2n}]} \\
&\frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+n-m})]^{1/2}(r+n-m)!} \\
&\times \begin{cases} 2^{r+n-m}(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{n-m} L_r^{n-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } n \geq m \\ 2^r (r+n-m)!(\tau^* + \frac{q}{b})^{m-n} L_{r+n-m}^{m-n} [2|\gamma|^2] & \text{para } n < m \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.95}$$

★*xiii*) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,k',\beta)}(p,q)$.

Uma vez que, para essa parcela, temos:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,k',\beta)} &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{k+k'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\frac{(n)!}{(n-i)^2! (k-j)! (k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-k')! (r)!}} |r+k-k'\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{6.96}$$

o correspondente termo $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,k',\beta)}(p, q)$, será:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,k',\beta)}(p, q) &= \sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{\alpha^{k+k'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\frac{(n)!}{(n-i)^2! (k-j)! (k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-k')! (r)!}} \Omega^{n,n,k,k';\beta}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.97}$$

com

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,k,k';\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-k' \rangle \langle r | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+k-k'} (r+k-k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\frac{1}{[2^r (r)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2} [q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-k'} (r+k-k')! (r)!]^{1/2}} \\
&H_{(r+k-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ
\end{aligned} \tag{6.98}$$

utilizando (6.9), temos

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-k'}(r+k-k')!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{[-\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+k-k'}(r+k-k')!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] d\mu \quad (6.99)
\end{aligned}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,k,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-k'}(r+k-k')!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^r (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{k'-k} L_{r+k-k'}^{k'-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' \geq k \\ 2^{r+k-k'} (r)! (\tau + \frac{q}{b})^{k-k'} L_r^{k-k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' < k \end{cases} \\
&\hspace{15em} (6.100)
\end{aligned}$$

a parcela da função de Wigner relacionada ao **Termo 13** do operador densidade, como:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)}^{n,n,k,k';\beta}(p,q) &= \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2}b\hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{\alpha^{k+k'} (-1)^{i+j+r+k-k'}}{r!^2 i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{[(n-i)!(n-i)!(k-j)!(k'-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}]} \\
&\quad \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-k'})]^{1/2} (r+k-k')!} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^r (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{k'-k} L_{r+k-k'}^{k'-k} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq k \\ 2^{r+k-k'} (r)! (\tau + \frac{q}{b})^{k-k'} L_r^{k-k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < k \end{cases} \\
&\hspace{15em} (6.101)
\end{aligned}$$

*xiv) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)}^{(n,n,k,n,\beta)}(p,q)$.

Verificaremos agora as relações envolvendo o **Termo 14** do operador densidade e a função de Wigner. Neste caso,

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,n,\beta)} &= \sigma\delta^3 e^{-\alpha^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^k (-1)^{i+j}}{r!^2 i! j!} \\ &\quad \frac{n! \sqrt{n!}}{(n-i)!^2 (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\ &\quad \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!} r!} |r+k-n\rangle \langle r| \end{aligned} \quad (6.102)$$

resultando como correspondente função de quasi-probabilidade,

$$\begin{aligned} W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,k,n,\beta)}(p, q) &= \sigma\delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^k (-1)^{i+j}}{r!^2 i! j!} \\ &\quad \frac{n! \sqrt{n!}}{(n-i)!^2 (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\ &\quad \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)!}} \Omega^{n,n,k,k';\beta}(p, q) \end{aligned} \quad (6.103)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega^{n,n,k,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r+k-n \rangle \langle r | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{-\frac{ipQ}{\hbar}} dQ \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+k-n} (r+k-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\ &\quad \frac{1}{[2^r (r)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+k-n} (r+k-n)! (r)!]^{1/2}} \\ &\quad H_{(r+k-n)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \end{aligned} \quad (6.104)$$

Introduzindo mais uma vez as variáveis $\mu = \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb}{\hbar} \right)$ e $\tau = \frac{ipb}{\hbar}$, lembrando que $y = \frac{Q}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-n}(r+k-n)!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r+k-n}(r+k-n)!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+k-n)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy.
\end{aligned} \tag{6.105}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,k,n;\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-n}(r+k-n)!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^r (r+k-n)! \left(\tau + \frac{q}{b} \right)^{n-k} L_{r+k-n}^{n-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n \geq k \\ 2^{r+k-n} (r)! \left(\tau + \frac{q}{b} \right)^{k-n} L_r^{k-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n < k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.106}$$

que, ao substituirmos em (6.103), nos dá:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,k,n;\beta}(p,q) &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{\alpha^k (-1)^{i+j}}{r!^2 i! j!} \\
&\quad \frac{n! \sqrt{n!}}{(n-i)! (k-j)! (n-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{k+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{\sqrt{(r+k-n)! r!}} \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+k-n} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+k-n}(r+k-n)!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^r (r+k-n)! \left(\tau + \frac{q}{b} \right)^{n-k} L_{r+k-n}^{n-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n \geq k \\ 2^{r+k-n} (r)! \left(\tau + \frac{q}{b} \right)^{k-n} L_r^{k-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n < k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.107}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,k,n;\beta}(p,q) &= \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2/2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{\alpha^k (-1)^{i+j+r+k-n}}{r!^2 i! j!} \frac{(r+k-j)!(r+n-i)!}{[(n-i)!(n-i)!(k-j)!(n-j)!]} \frac{n!^{3/2}}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}]} \\
&\frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-n})]^{1/2} (r+k-n)!} \\
&\times \begin{cases} 2^r (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{n-k} L_{r+k-n}^{n-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n \geq k \\ 2^{r+k-n} (r)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-n} L_r^{k-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n < k \end{cases} .
\end{aligned} \tag{6.108}$$

$\star xv)$ **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,k',\beta)}(p,q)$.

Para o cálculo dessa parcela, consideremos em (5.116):

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,k',\beta)} &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2/2} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{k'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \\
&\frac{n! \sqrt{n!}}{(n-i)^2! (n-j)! (k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r)!}} |r+n-k'\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{6.109}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(p,q)^{(n,n,n,k',\beta)} &= \sigma \delta^3 e^{-\alpha^2/2} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{\alpha^{k'} (-1)^{i+j}}{r! i! j!} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\frac{(n^{3/2})!}{(n-i)^2! (n-j)! (k'-j)!} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{\sqrt{(r+n-k')!(r)!}} \Omega^{n,n,n,k';\beta}(p,q)
\end{aligned} \tag{6.110}$$

Calculemos,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r + n - k' \rangle \langle r | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{\frac{-ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[2^{r+n-k'}(r+n-k')!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] \\
&\quad \frac{1}{[2^r(r)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r+n-k'}(r+n-k')!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r+n-k')} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \tag{6.111}
\end{aligned}$$

e de acordo com as propriedades do polinômio de Hermite, segue:

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+n-k'}(r+n-k')!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{[-\frac{q^2}{b^2}-\tau^2]}}{[2^{2r+n-k'}(r+n-k')!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r+n-k')} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy \tag{6.112}
\end{aligned}$$

obtendo,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,n,k';\beta}(p,q) &= \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^{r+n-k'} e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r+n-k'}(r+n-k')!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^r(r+n-k')!(\tau + \frac{q}{b})^{k'-n} L_{r+n-k'}^{k'-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' \geq n \\ 2^{r+n-k'}(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{n-k'} L_r^{n-k'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' < n \end{cases} \tag{6.113}
\end{aligned}$$

que após as devidas substituições resulta em:

$$\begin{aligned}
W^{n,n,n,k';\beta} &= \frac{\sigma\delta^3 e^{-\alpha^2/2}}{\pi^{1/3} b\hbar} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\times \frac{\alpha^{k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r!2^i j!} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{[(n-i)!(n-i)!(n-j)!(k'-j)!]} \frac{n!\sqrt{n!}}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)}v(\beta)^{n+k'}]} \\
&\times \frac{e^{-|\gamma|^2}}{[(2^{2r+n-k'})^{1/2}(r+n-k')!]} \\
&\times \begin{cases} 2^r (r+n-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{k'-n} L_{r+n-k'}^{k'-n} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq n \\ 2^{r+n-k'} (r)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{n-k'} L_r^{n-k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < n \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.114}$$

Em (6.113) e (6.114), $\mu = \frac{1}{b} (y - \frac{ipb}{\hbar})$ e $\tau = \frac{ipb}{\hbar}$ e $\gamma = \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} = \frac{q}{b} + \tau$.

★xvi) **Cálculo da parcela** $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,n,\beta)}(p,q)$

Finalmente obtemos a última parcela da função de Wigner ($W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(p,q)^{(n,n,n,n,\beta)}$) que apresenta em si uma característica diferenciada, em concordância ao ocorrido com o cálculo de $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(m,m',k,k',\beta)}(p,q)$: aqui, essa parcela refere-se a uma função de Wigner para estados do tipo número apenas, i.é, $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,n,\beta)}(p,q)$. Para seu desenvolvimento, consideremos da expressão (5.116) o termo:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,n,\beta)} &= \delta^4 e^{-\alpha^2} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{(-1)^{i+j}}{r^2! i! j!} \\
&\frac{n^2!}{[(n-i)!]^2 [(n-j)!]^2} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&(r+n-j)!(r+n-i)! |r+k-n\rangle \langle r|
\end{aligned} \tag{6.115}$$

e, seguindo a definição de função de Wigner, temos:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{(n,n,n,n,\beta)}(p, q) &= \delta^4 e^{-\alpha^2} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{(-1)^{i+j}}{r^2! i! j!} \\
&\frac{(n!)^2}{[(n-i)!]^2 [(n-j)!]^2} \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&(r+n-j)! (r+n-i)! |\Omega^{n,n,n,n;\beta}(p, q)| \tag{6.116}
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,n,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + \frac{Q}{2} | r \rangle \langle r | q - \frac{Q}{2} \rangle e^{\frac{-ipQ}{\hbar}} dQ \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]}}{[2^{2r}(r)!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad H_{(r)} \left[\frac{q-y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dQ \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r}(r)!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] H_{(r)} \left[\frac{q+y}{b} \right] dy \\
&= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2]}}{[2^{2r}(r)!(r)!]^{1/2}} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{(r)} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] dy. \tag{6.117}
\end{aligned}$$

Portanto, com $\gamma = \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} = \frac{q}{b} + \tau$, temos:

$$\begin{aligned}
\Omega^{n,n,n,n;\beta}(p, q) &= \frac{1}{\pi^{3/2} b \hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r}(r!)^2]^{1/2}} \\
&\times \begin{cases} 2^r (r)! (\tau + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq n \\ 2^r (r)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < n \end{cases} \tag{6.118}
\end{aligned}$$

que ao substituírmos em (6.116), nos conduz a:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,n,n;\beta}(p,q) &= \delta^4 e^{-\alpha^2} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{(-1)^{i+j}}{r^2!i!j!} \frac{(n!)^2}{[(n-i)!]^2[(n-j)!]^2} \\
&\quad \frac{1}{u(\beta)^{2n-2(i+j)}v(\beta)^{2n}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad (r+n-j)!(r+n-i)! \frac{1}{\pi^{3/2}b\hbar} \frac{(-1)^r e^{-\frac{q^2}{b^2}} e^{\tau^2}}{[2^{2r}(r!)^2]^{1/2}} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^r(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq n \\ 2^r(r)!(\tau^* + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < n \end{cases} .
\end{aligned} \tag{6.119}$$

obtendo por resultado que:

$$\begin{aligned}
W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,n,n;\beta}(p,q) &= \frac{\delta^4}{2\pi^{3/2}b\hbar} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
&\quad \frac{(-1)^{i+j+r}}{r!^3i!j!} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{[(n-i)!(n-i)!(n-j)!(n-j)!]} \frac{(n!)^2}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)}v(\beta)^{2n}]} \frac{e^{-|\gamma|^2}}{[2^r]} \\
&\quad \times \begin{cases} 2^r(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' \geq n \\ 2^r(r)!(\tau^* + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' < n \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.120}$$

Obtivemos com $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,n,n;\beta}(p,q)$ a última contribuição para a função de Wigner associada ao operador densidade $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$.

Cada uma das parcelas calculada apresenta por sua estrutura, através da função de Wigner, informações sobre, por exemplo, a estatística do sistema. Contudo, devemos lembrar que a expressão que contempla de maneira geral o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$ é dada pela soma das parcelas acima calculadas, em acordo com (6.2). Então, podemos expressar (6.2) por:

$$\begin{aligned}
& W_{|\alpha_n(\beta)}(p, q) = \\
& \frac{\sigma^4 e^{-2\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(k, k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m+m'+k+k'} (-1)^{i+j+r+k-k'}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+m-i)!}{[(m-i)! (m'-i)! (k-j)! (k'-j)!]} \frac{1}{[u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-k'+m-m'})^{1/2} (r+k-k')! (r+m-m')!]} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m-m'} (r+k+k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m-m'-k-k'} L_{r+k-k'}^{m-m'-k+k'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m-m' \geq k-k' \\ 2^{r+k+k'} (r+m-m')! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k+k'-m+m'} L_{r+m-m'}^{k-k'-m+m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } k-k' < m-m' \end{cases} \\
& + \frac{\sigma^3 e^{-3/2\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(k, n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{k+m+m'} (-1)^{i+j+r}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+m-i)!}{[(m-i)! (m'-i)! (n-j)! (k-j)!]} \frac{n! k \sqrt{m! m'}}{[u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-n+m-m'})^{1/2} (r+k-n)! (r+m-m')!]} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m-m'} (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{m-m'-k+n} L_{r+k-n}^{r+m-m'-r-k+n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m \geq m' \\ 2^{r+k-n} (k-n-m+m')! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-n-m+m'} L_{r+m-m'}^{k-n-m+m'} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } m < m' \end{cases} \\
& + \frac{\sigma^3 e^{-3/2\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(n, k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m+m'+k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r! i! j!} \frac{(r+n-j)! (r+m-i)!}{[(m-i)! (m'-i)! (n-j)! (k'-j)!]} \frac{1}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+n-k'+m-m'})^{1/2} (r+n-k')! (r+m-m')!]} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m-m'} (r+n+k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m-m'-n+k'} L_{r+k-k'}^{m-m'-n+k'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m-m' \geq n-k' \\ 2^{r+n+k'} (r+m-m')! (\tau^* + \frac{q}{b})^{n+k'-m+m'} L_{r+m-m'}^{n-k'-m+m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } n-k' < m-m' \end{cases} \\
& \tag{6.121}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^3 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m, m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m+m'} (-1)^{i+j+r}}{r! i! j!} \frac{(r+n-j)! (r+m-i)!}{[(m-i)! (m'-i)! [(n-j)!]^2]} \frac{n! \sqrt{m! m'}}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+m-m'})]^{1/2} (r)! (r+m-m')!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m-m'} (r)! (\tau + \frac{q}{b})^{m-m'} L_r^{m-m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m \geq m' \\ 2^r (r+m-m')! (\tau^* + \frac{q}{b})^{m'-m} L_{r+m-m'}^{m'-m} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' < m \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.122}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma^3 e^{-3/2\alpha^2} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} \sum_{j=0}^{\min(k, k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m'+k+k'} (-1)^{i+j+r+k+k'}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+m'-i)!}{[(m'-i)! (n-i)! (k-j)! (k'-j)!]} \frac{\sqrt{n!}}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+k'}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-k'+m'-n})]^{1/2} (r+k-k')! (r+m'-n)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-n-k+k'} L_{r+k-k'}^{m'-n-k+k'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m'-n \geq k-k' \\ 2^{r+k-k'} (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-k'-m'+n} L_{r+m'-n}^{k-k'-m'+n} [2|\gamma^2|] & \text{para } m'-n < k-k' \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.123}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} \sum_{j=0}^{\min(k, n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m'+k} (-1)^{i+j+r+k-n}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+m'-i)!}{[(m'-i)! (n-i)! (k-j)! (n-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r-2n+k+m'})]^{1/2} (r+k-n)! (r+m'-n)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-k} L_{r+k-n}^{m'-k} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' \geq k \\ 2^{r+k-n} (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-m'} L_{r+m'-n}^{k-m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' < k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.124}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\phi^{1/3} b \hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} \sum_{j=0}^{\min(n, k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m'+k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r! i! j!} \frac{(r+n-j)! (r+m'-i)!}{[(m'-i)! (n-i)! (k'-j)! (n-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+m'-k'})]^{1/2} (r+n-k')! (r+m'-n)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r+n-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-2n+k'} L_{r+n-k'}^{m'-2n+k'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m - m' \geq n - k' \\ 2^{r+n-k'} (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{2n-k'-m'} L_{r+m'-n}^{2n-k'-m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m - m' < n - k' \end{cases} \quad (6.125)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma \delta^3 e^{-\alpha^2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m'} (-1)^{i+j+r}}{r! i! j!} \frac{(r+n-j)! (r+m'-i)!}{[(m'-i)! (n-i)! [(n-j)!]^2]} \frac{n! \sqrt{n!}}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{m'+n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+m'-n})]^{1/2} (r)! (r+m'-n)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+m'-n} (r)! (\tau + \frac{q}{b})^{m'-n} L_r^{m'-n} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' \geq n \\ 2^r (r+m'-n)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{n-m'} L_{r+m'-n}^{n-m'} [2|\gamma^2|] & \text{para } m' < n \end{cases} \quad (6.126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^3 \delta e^{-\alpha^2}}{\phi^{3/2} b \hbar} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n, m')} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m+k+k'} (-1)^{i+j+r+k-k'}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{[(m-i)! (n-i)! (k-j)! (k'-j)!]} \frac{\sqrt{n!}}{[u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-k'+n-m})]^{1/2} (r+k-k')! (r+n-m)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+n-m} (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{n-m-k+k'} L_{r+k-k'}^{n-m-k+k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } n - m \geq k - k' \\ 2^{r+k-k'} (r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-k'-n+m} L_{r+n-m}^{k-k'-n+m} [2|\gamma|^2] & \text{para } n - m < k - k' \end{cases} \quad (6.127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(k,n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m+k+n} (-1)^{i+j+r+k-n}}{r! i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{[(m-i)! (n-i)! (k-j)! (n-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{m+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-m})]^{1/2} (r+k-n)! (r+n-m)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+n-m} (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{2n-m-k} L_{r+k-n}^{2n-m-k} [2|\gamma|^2] & \text{para } 2n \geq -m-k \\ 2^{r+k-n} (r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k+m-2n} L_{r+n-m}^{k+m-2n} [2|\gamma|^2] & \text{para } 2n < -m-k \end{cases} \quad (6.128)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n,k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{m+k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r! i! j!} \frac{(r+n-j)! (r+n-i)!}{[(m-i)! (n-i)! (n-j)! (k'-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+2n-k'-m})]^{1/2} (r+n-k')! (r+n-m)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+n-m} (r+n-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{k'-m} L_{r+n-k'}^{k'-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq m \\ 2^{r+n-k'} (r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{m-k'} L_{r+n-m}^{m-k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < m \end{cases} \quad (6.129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma \delta^3 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^m (-1)^{i+j+r}}{r!^2 i! j!} \frac{(r+n-j)! (r+n-i)!}{[(m-i)! (n-i)! (n-j)!^2]} \frac{\sqrt{n!}}{[u(\beta)^{m+n-2(i+j)} v(\beta)^{2n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+n-m})]^{1/2} (r+n-m)!} \\
& \times \begin{cases} 2^{r+n-m} (r)! (\tau + \frac{q}{b})^{n-m} L_r^{n-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } n \geq m \\ 2^r (r+n-m)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{m-n} L_{r+n-m}^{m-n} [2|\gamma|^2] & \text{para } n < m \end{cases} \quad (6.130)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k, k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{k+k'} (-1)^{i+j+r+k-k'}}{r!^2 i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{[(n-i)! (n-i)! (k-j)! (k'-j)!]} \frac{n!}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-k'})]^{1/2} (r+k-k')!} \\
& \times \begin{cases} 2^r (r+k-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{k'-k} L_{r+k-k'}^{k'-k} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq k \\ 2^{r+k-k'} (r)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-k'} L_r^{k-k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.131}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^2 \delta^2 e^{-\alpha^2/2}}{\pi^{3/2} b \hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(k, n)} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^k (-1)^{i+j+r+k-n}}{r!^2 i! j!} \frac{(r+k-j)! (r+n-i)!}{[(n-i)! (n-i)! (k-j)! (n-j)!]} \frac{n! \sqrt{n!}}{[u(\beta)^{n+k-2(i+j)} v(\beta)^{2n}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+k-n})]^{1/2} (r+k-n)!} \\
& \times \begin{cases} 2^r (r+k-n)! (\tau + \frac{q}{b})^{n-k} L_{r+k-n}^{n-k} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n \geq k \\ 2^{r+k-n} (r)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{k-n} L_r^{k-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } n < k \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.132}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma \delta^3 e^{-\alpha^2/2}}{\pi^{1/3} b \hbar} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n, k')} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{\alpha^{k'} (-1)^{i+j+r+n-k'}}{r!^2 i! j!} \frac{(r+n-j)! (r+n-i)!}{[(n-i)! (n-i)! (n-j)! (k'-j)!]} \frac{n! \sqrt{n!}}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)} v(\beta)^{n+k'}]} \\
& \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[(2^{2r+n-k'})]^{1/2} (r+n-k')!} \\
& \times \begin{cases} 2^r (r+n-k')! (\tau + \frac{q}{b})^{k'-n} L_{r+n-k'}^{k'-n} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' \geq n \\ 2^{r+n-k'} (r)! (\tau^* + \frac{q}{b})^{n-k'} L_r^{n-k'} [2|\gamma|^2] & \text{para } k' < n \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.133}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta^4}{2\pi^{3/2}b\hbar} \sum_{i=0}^{\min(n)} \sum_{j=0}^{\min(n)} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^r \\
& \frac{(-1)^{i+j+r}}{r!^3 i! j!} \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{[(n-i)!(n-i)!(n-j)!(n-j)!]} \frac{(n!)^2}{[u(\beta)^{2n-2(i+j)}v(\beta)^{2n}]} \frac{e^{-|\gamma^2|}}{[2^r]} \\
& \times \begin{cases} 2^r(r)!(\tau + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' \geq n \\ 2^r(r)!(\tau^* + \frac{q}{b})^{r-r} L_r^{r-r} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right] & \text{para } k' < n \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.134}$$

Capítulo 7

Resultados para o estado de superposição termalizado

Neste trabalho, a análise da função de Wigner será realizada mediante a observação dos gráficos gerados a partir do programa computacional, por nós desenvolvido, que utiliza a linguagem de programação do Fortran 90. O programa realiza uma varredura nas variáveis $\frac{q}{b}$ e $\frac{pb}{\hbar}$ correspondentes as partes reais e imaginárias de γ , com o objetivo de gerar uma série de imagens tridimensionais para as temperaturas de $T = \{1K, 10K, 30K, 300K\}$ e número de fótons $n = \{0, 1, 3\}$.

Como parâmetros utilizados para a obtenção dos gráficos, adotamos $\alpha = \sigma = \delta = 1$. Tem-se que $\frac{\hbar\omega}{K_b} = 3,5K$, K_b é a constante de Boltzmann, correspondente a faixa de microondas do espectro eletromagnético. Os valores de $\frac{q}{b}$ e $\frac{pb}{\hbar}$ são usados como coordenadas xy , variando de -3 a 3 em intervalos de 0,1. Os somatórios referentes ao estado coerente têm como limite 5 e os somatórios relativos ao estado de vácuo térmico têm como limite 10.

A análise dos gráficos baseia-se na observação da imagem tridimensional gerada, no qual é possível a identificação de vales e picos; assim como da observação da projeção sobre o eixo xy , em que uma escala de cinza é disponível, tal que tons mais claros são associados a maiores valores da função, e tons mais escuros de cinza

estão relacionados a menores valores. À direita de cada gráfico existe uma legenda indicativa dos valores assumidos pela função de Wigner, relacionando as cores das projeções a valores da função.

7.1 Função de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$ com $n=0$ e $T=\{1K, 10K, 30K, 300K\}$

Para a situação do vácuo térmico a uma temperatura de $1K$ observa-se, através da figura (7.1), regiões bem delimitadas de classicalidade (áreas claras das projeções) e de não-classicalidade (áreas escuras das projeções) reunidas em $x \in [-2, 2]$ e $y \in [-2, 2]$. Dentre o conjunto de baixas temperaturas ($1K, 10K, 30K$) este é o estado que assume maiores amplitudes de valores para a Função de Wigner. Sendo a função de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$, $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ descrita por (6.121), i.é, uma soma de parcelas, cabe aqui ressaltar que a contribuição à função, do termo $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k',\beta}$, está em acordo com o encontrado por [29].

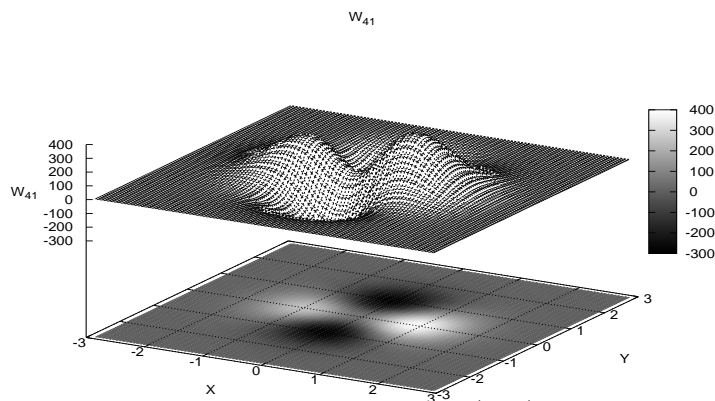


Figura 7.1: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ para $n=0$ e temperatura de 1 K.

A parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k',\beta}$, representada graficamente pela figura (7.2), tem como principal característica ser descrita somente em termos dos estados coerentes; nesta não

aparecem contribuições do estado de Fock levando a entender que, independente do número de bósons no sistema, a contribuição desta parcela apenas será modificada pela temperatura na qual o sistema se encontre.

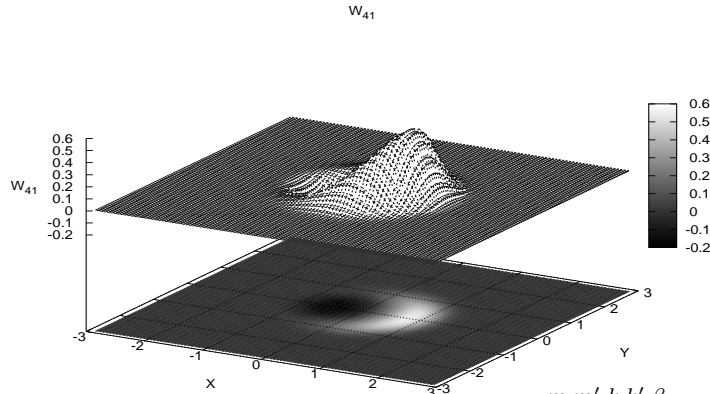


Figura 7.2: Gráfico da parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k',\beta}$ para $T=1K$.

Para o estado com $n = 0$ à temperatura $T = 1K$, a maior contribuição vem do termo $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,m',k,k',\beta}$ com valores definidos em $-300 \leq W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,m',k,k',\beta} \leq 300$, dado que a principal explicação para a expressiva contribuição desta parcela é conter em seu escopo uma quantidade significativa de somatórios, relacionados ao estado coerente, tendendo a infinito, aliado ao fato do sistema não ter contribuições relativas ao estado de Fock, pois $n = 0$.

Na proposição do aumento de temperatura do sistema, a fim de observarmos o seu comportamento para o valor de $T = 10K$, a função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ identificada através da figura (7.3) evidencia, através de suas projeções, que as regiões de $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p) > 0$ e $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p) < 0$ ainda estão bem estabelecidas; contudo, podemos observar também o aparecimento de regiões difusas, i.é., onde a classicalidade e não-classicalidade não estão bem identificadas. Uma possibilidade a se inferir é que, para este estado, a temperatura de $T = 10K$ indique um limite para a possibilidade de distinguir claramente um sistema com comportamento quântico de um clássico.

uma vez que, quando o sistema alcança a temperatura de $T = 30K$, através da

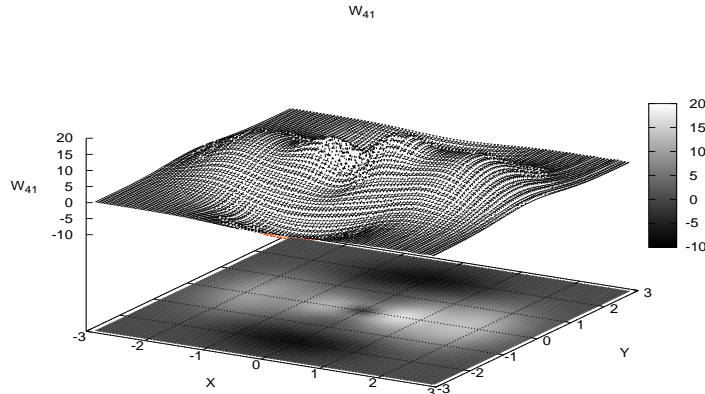


Figura 7.3: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ para $n=0$ e temperatura de 10K.

figura (7.4) constata-se a predominância de região de classicalidade; bem ao centro do eixo xy , o pico da figura tridimensional também deixa claro o comportamento do sistema para esta temperatura.

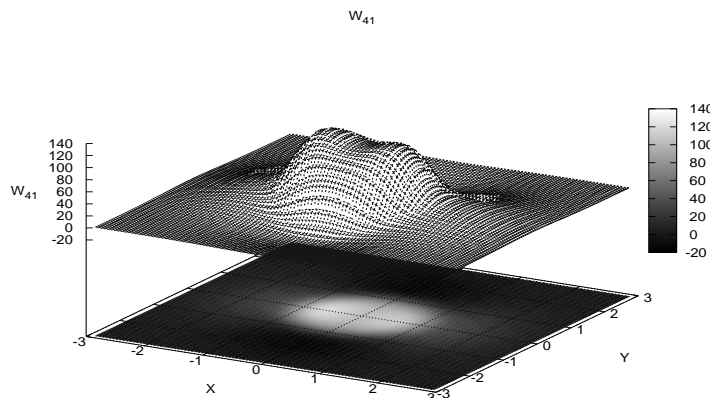


Figura 7.4: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ para $n=0$ e temperatura de 30K.

Ao extrapolar a temperatura do sistema até a temperatura ambiente, figura (7.5), o comportamento se mantém muito parecido ao de $T = 30K$, a menos da função assumir maiores valores positivos e negativos, devido unicamente ao maior valor de temperatura usada no cálculo da função. Com efeito, é para a temperatura de $T =$

300K que se tem os maiores valores da função de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$ com $n = 0$.

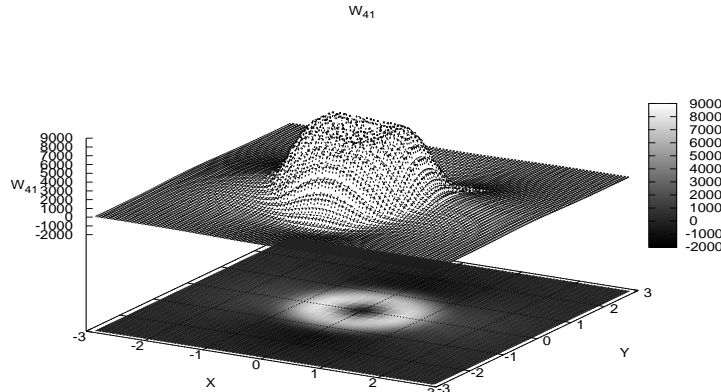


Figura 7.5: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=0$ e temperatura de 300K.

Devemos sempre ter em mente que o estado em estudo é dado pela superposição do estado coerente e o estado de Fock, duplicado da forma geral, e que, das dezesseis parcelas contidas na função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$, apenas duas são livres de um dos tipos de estado, a parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',k,k',\beta}(q, p)$ escrita puramente em termos de estados coerentes, e a parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,n,\beta}(q, p)$ definida exclusivamente em termos do estado número; todas as outras quatorze trazem contribuições de ambos os tipos de estados. O fato de estarmos assumindo o sistema $|\alpha_n(\beta)\rangle$ com $n = 0$, faz com que o estado tenha a atuação esperada de um estado semi-clássico, constatando-se que a probabilidade de encontrar o sistema com comportamento quântico se dá mais efetivamente para a temperatura de 1K e que em $T=10K$ já se tem dificuldade na definição de tais regiões (clássicas e quânticas), um comportamento típico de estados semi-clássicos.

Um passo interessante para analisarmos o estado de superposição é permitir ao sistema que haja contribuições do estado de Fock, ou seja, devemos povoar o sistema e analisar o seu comportamento para essas mesmas temperaturas, uma vez que nessa seção observamos o comportamento exclusivo do estado coerente.

7.2 Função de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$ com $n=1$ e $T=\{1K, 10K, 30K, 300K\}$

Analisaremos nessa seção a função de Wigner com menor contribuição possível para o estado de Fock, ou seja para $n = 1$. Por ser a menor colaboração, essa pode nos trazer importantes informações acerca da atuação desse tipo de estado, nos auxiliando no entendimento de como os estados de Fock atuam no sistema descrito pela superposição sob efeito da temperatura. Todas as informações serão explicitadas com base nos gráficos para as temperaturas $T = \{1K, 10K, 30K, 300K\}$, construídos a partir da função de quasi probabilidade de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$.

Iniciamos a análise do comportamento do sistema considerando $T=1K$, figura (7.6), mais uma vez, para esta temperatura, ficam bem definidas as regiões para $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p) < 0$ e $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p) > 0$, em que a amplitude negativa é maior que a positiva indicando que para esta composição, tanto os estados de Fock quanto os coerentes, colaboram para um comportamento quântico do sistema.

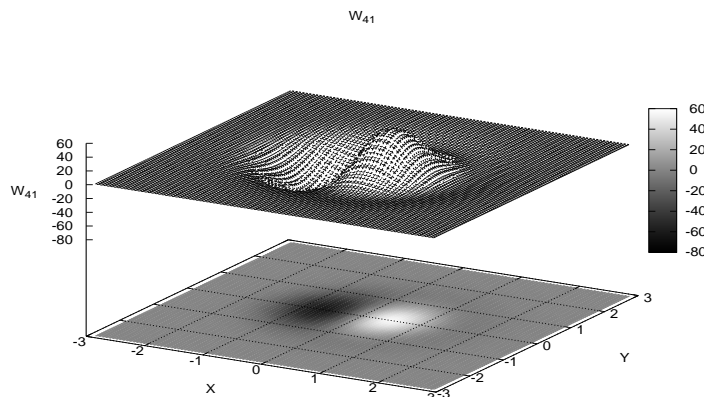


Figura 7.6: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 1K.

Já para $T = 10K$, figura (7.7), é possível notar precisamente como a presença do fóton altera o conjunto pois, para essa temperatura, ainda é possível detetar de forma clara a conduta do conjunto indo em oposição ao ocorrido para $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$

com $n = 0$ e $T = 10k$ Fig.(7.3), onde a projeção apresentou um aspecto difuso.

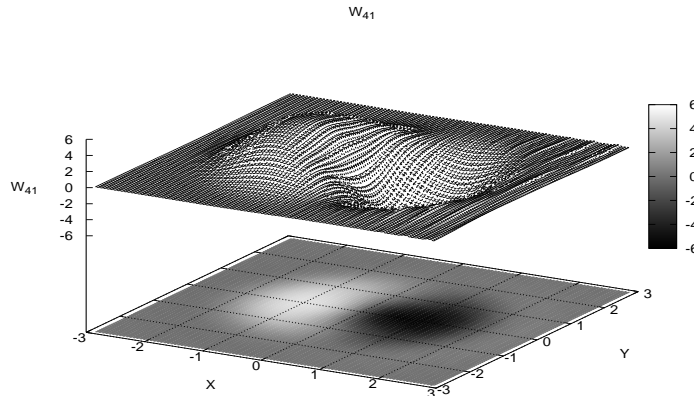


Figura 7.7: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 10K.

Um fato interessante de ser destacado aqui ocorre ao estabelecermos uma comparação entre $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$, à $T = 30k$, com $n = 0$, e quando o sistema encontra-se na mesma temperatura mas com presença de fóton $T = 30K$ e $n = 1$, figura (7.8).

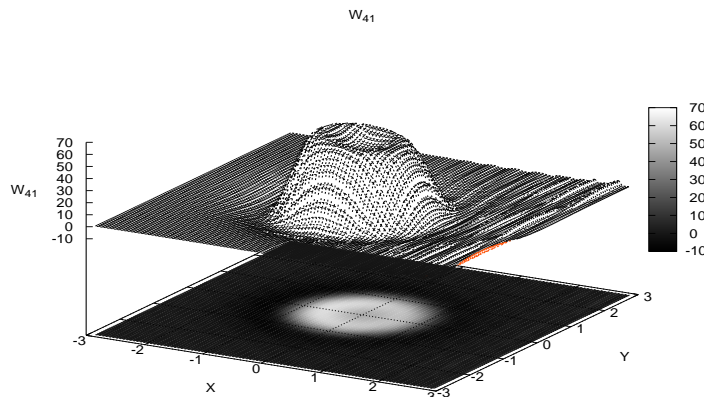


Figura 7.8: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 30K.

As regiões positivas de ambos guardam uma proporcionalidade em relação aos valores de suas amplitudes com as amplitudes negativas, ambos assumindo exatamente sete vezes o montante alcançado na região negativa. As duas funções mantêm

a característica de pico central indicando uma forte tendência à classicalidade porém, mesmo com essas similaridades, a função de Wigner tem a capacidade de nos mostrar que se tratam de sistemas distintos pois, uma vez que, pela análise da projeção no eixo (x, y) notamos que para o sistema que contém um fóton existe uma região de não-classicalidade (escura) bem definida que envolve completamente a região de classicalidade $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p) > 0 \in x, y[-1, 1]$, numa espécie de halo. Desta vez a função mostra que pode acontecer a passagem de uma característica a outra de forma repentina, haja vista a existência de limites bem definidos.

O sistema quando levado à temperatura de $T = 300K$, fig. (7.10), mantém as informações de classicalidade apresentadas para $T = 30K$, conservando o halo característico; contudo, o halo escuro já não tem a mesma intensidade, mostrando que para essa faixa de temperatura as contribuições das parcelas para um comportamento quântico se dá de maneira atenuada. Por exemplo, a parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m, m', k, k', \beta}$ com características de superposição coerente, fig. (7.9), para essa situação, caracteriza-se por classicalidade total trazendo tal aspecto a toda função; nessas expressões a parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m, m', k, k', \beta}$ mantém uma forte influência sobre a função, o que pode ser observado na fig. (7.10).

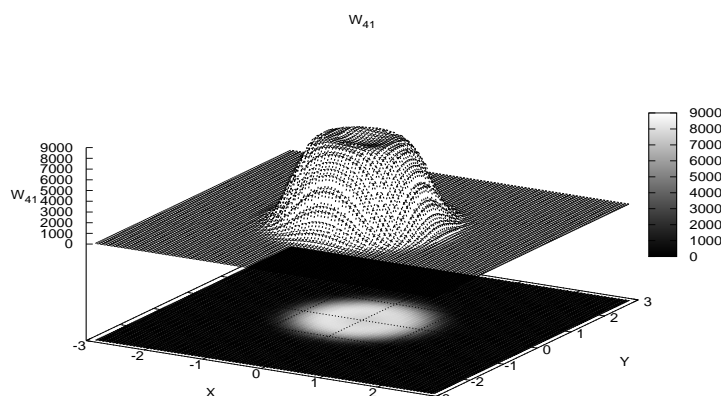


Figura 7.9: Parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m, m', k, k', \beta}$ para $T=300K$.

Percebemos, concluindo, que a menor contribuição possível ao estado número já

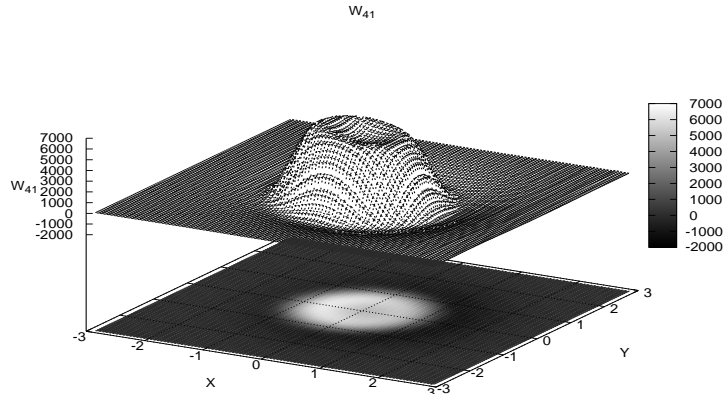


Figura 7.10: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=1$ e temperatura de 300K.

faz alterar o comportamento do sistema, i.é, modifica a distribuição de probabilidade, inclusive no que se refere à alteração dos valores assumidos pela função de Wigner.

7.3 Função de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle$ com $n=3$ e $T=\{1K, 10K, 30K, 300K\}$

Nesta seção iremos analisar como se comporta o sistema para um maior número de bósons $n = 3$ e o sistemático aumento da temperatura.

Quanto à função $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $T = 1K$ e $n = 3$ fig.(7.11), essa assume o menor valor negativo deste trabalho e tem regiões de não-classicalidade bem definidas mantendo assim o mesmo aspecto das outras combinações para esse valor de temperatura.

Para essa situação ($T = 1K; n = 3$), o termo $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,n,n,\beta}(q,p)$, fig. (7.12), aqui obtido está em plena concordância com o referencial teórico [2], lembrando que esse termo traz em sua estrutura somente aspectos de estados número.

Quando o sistema passa a uma temperatura de $T = 10K$, fig. (7.13), temos uma região de classicalidade definida em $x \in [-3,0]$ e $y \in [-1,1]$ com uma margem, em um dos lados, de características quânticas.

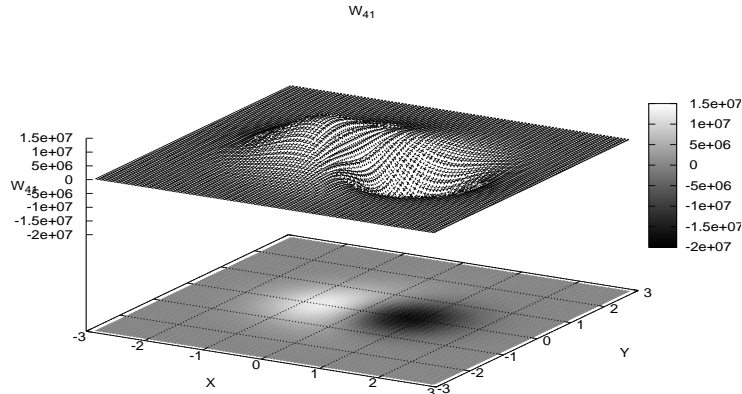


Figura 7.11: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=3$ e temperatura de 1K.

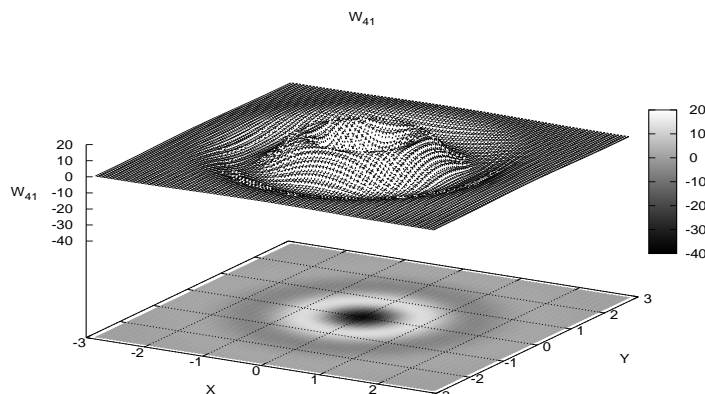


Figura 7.12: Parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{n,n,n,n,\beta}(q,p)$ $n=3$ com temperatura de 1K.

Para a temperatura de $30K$, fig. (7.14), com o aumento da população de bósons $n = 3$, observa-se uma modificação com relação aos estados de $n = 0$ e $n = 1$; esses estados apresentam uma região circular de classicalidade cercada por um halo bem definido de não-classicalidade. Diferentemente, ocorre para a situação tratada aqui nesta seção, uma região clara bem delimitada margeada por uma mancha escura difusa, nos indicando que agora a passagem entre um sistema descrito por características quânticas para um de aspecto clássico não se dá de forma abrupta. Podemos inferir que, com o aumento populacional, as contribuições estão mais uniformes, tanto

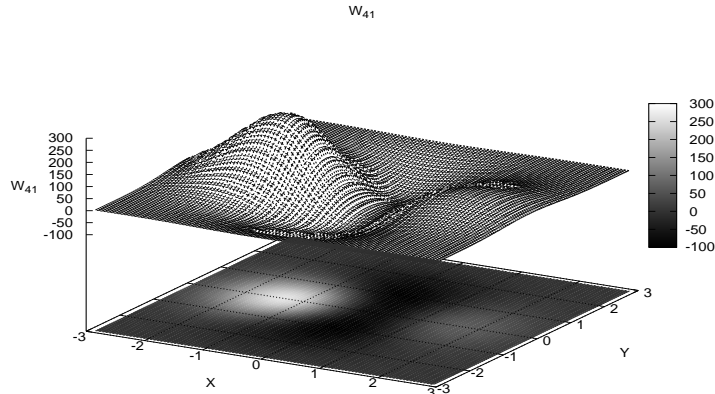


Figura 7.13: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=3$ e temperatura de 10K.

estados de Fock quanto estados quasi clássicos interferem na construção da identidade do sistema.

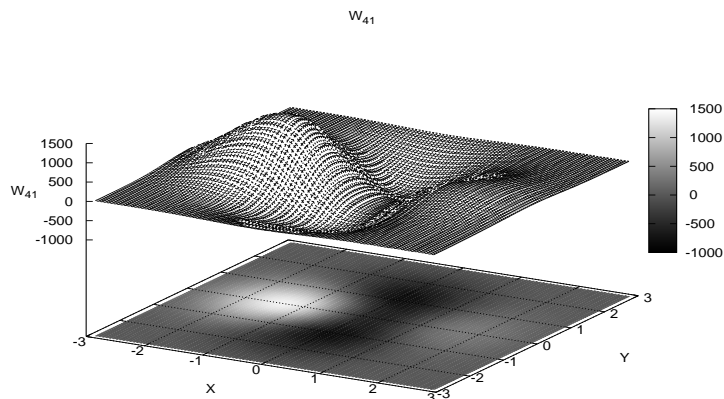


Figura 7.14: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}$ para $n=3$ e temperatura de 30K.

Para a temperatura de $T = 300K$, a função de Wigner nos mostra através da fig. (7.15) que as contribuições são intensas, tanto através das parcelas que trazem uma evidência maior do estado de Fock, a exemplo da parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,n,\beta}(q,p)$, fig (7.16), quanto da parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,m',n,k',\beta}(q,p)$, fig. (7.17), que carrega em si maior contribuição coerente.

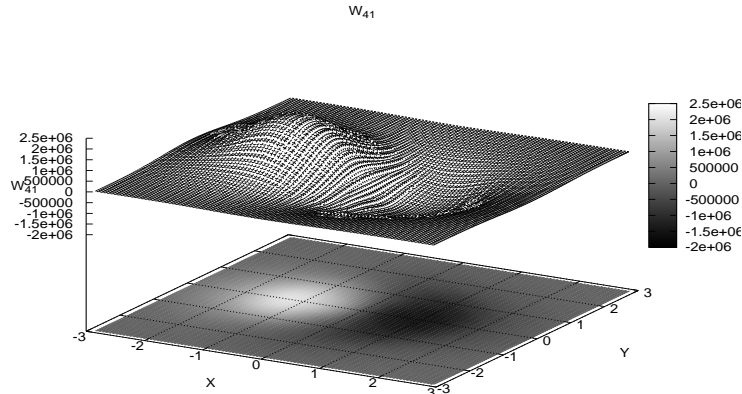


Figura 7.15: Função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,n,n,\beta}$ para $n=3$ e temperatura de 300K.

É interessante que na análise desse estado de superposição espera-se haver regiões de picos e vales, uma vez que abarca todas as possíveis contribuições de um arranjo formado entre o estado de Fock e os estados coerentes. Apesar da função de Wigner só ter pleno significado quando leva em conta todas as informações trazidas pelo operador densidade, fica evidente através das nossas análises que avaliar as contribuições de cada uma das parcelas que a constituem pode ajudar na compreensão do processo em estudo. Concluindo, a função de Wigner obtida com o uso da DCT mos-

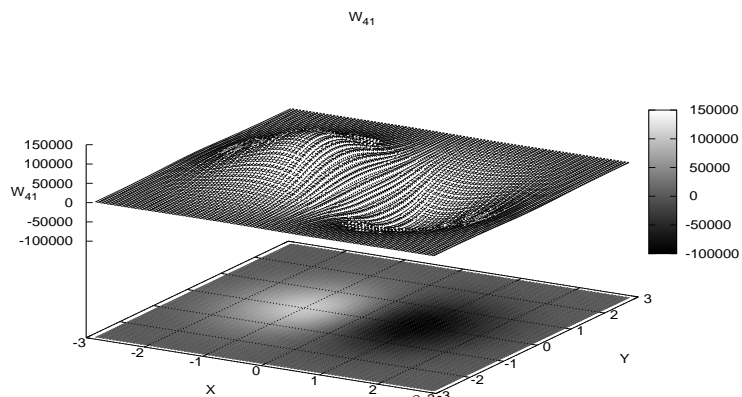


Figura 7.16: Parcela $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}^{m,n,n,n,\beta}(q,p)$ $n=3$ com temperatura de 300K.

tra ser uma ferramenta poderosa para indicar como a temperatura afeta os estados superpostos; em particular, nossa análise mostra que a contribuição das parcelas que "carregam" uma maior informação coerente se dá de maneira mais intensa. O paralelo traçado com a teoria e os resultados de outros trabalhos nos fornece uma segurança quanto aos obtidos aqui.

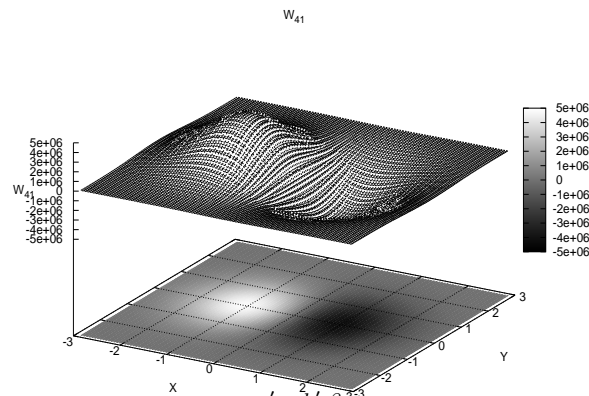


Figura 7.17: Parcela $W_{|\alpha_n(\beta)}^{m,m',n,k',\beta}(q,p)$ $n=3$ com temperatura de 300K.

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas

Ao trabalharmos com a Teoria da Informação Quântica, a escolha do estado de estudo é de vital importância. O embasamento teórico e a viabilidade experimental do estado em questão podem determinar o sucesso procurado ao desenvolvimento científico. Estabelecer o comportamento dos estados quânticos, talvez seja um dos mais importantes protocolos a ser realizado, haja vista que propriedades quânticas de certos sistemas precisam ser mantidas a todo custo, como o emaranhamento quântico. Entender como fatores físicos, a exemplo da temperatura, interferem sobre o sistema e, a partir daí, determinar as faixas térmicas para as quais o sistema mantém as propriedades quânticas, faz-se necessário.

Neste trabalho apresentamos o comportamento de dois importantes estados quânticos de interesse à Informação Quântica: o estado de Bell na representação duplo-trilho, que tem forte motivação experimental e teórica na implementação do computador quântico [5][31][32][33]; o sistema descrito pela superposição de estados coerentes e estados de Fock, utilizados na Ótica Quântica [34][35][36][37].

Nosso desenvolvimento indica que a utilização da Dinâmica de Campos Térmicos permite uma análise sistemática, eficaz e econômica do ponto de vista operacional no que diz respeito aos efeitos de temperatura. Com a finalidade de obtermos as informações acerca dos estados, lançamos mão de determinar o operador densidade

associado a esses sistemas.

Outro destaque obtido na realização deste trabalho deve ser dado ao formalismo da Função de Wigner, haja vista que, quando de posse dos estados termalizados, essa função teve papel crucial no mapeamento das regiões com características de classicalidade e não-classicalidade como função da temperatura. A Função de Wigner foi fundamental na determinação da faixa térmica ideal à realização de portas lógicas quânticas, no caso duplo-trilho, e da determinação das contribuições dos estados coerente e de Fock, indicando ainda as alterações trazidas ao sistema quando do povoamento por bósons, para o caso do estado de superposição aqui estudado.

Em um primeiro momento determinamos o comportamento do estado de Bell $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle_L + |11\rangle_L$, que na representação duplo-trilho, resulta em $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0101\rangle + |1010\rangle$; termalizamos o estado via DCT, obtendo o operador $|\rho_{\psi(\beta)}\rangle$ associado ao estado termalizado. De posse de $|\rho_{\psi(\beta)}\rangle$, obtivemos a Fidelidade Quântica como função da temperatura, que nos indica como a distância entre o estado original e o termalizado aumenta à medida que aumenta a temperatura do banho térmico. A fim de estabelecer o comportamento estatístico do estado termalizado $|\psi(\beta)\rangle$ determinamos, através dos nossos cálculos, o Fator de Mandel, que possibilita definir para quais faixas térmicas o sistema poderá assumir estatísticas sub-Poissoniana, Poissoniana ou super-Poissoniana. A determinação da função de Wigner para este estado apresentou-se como uma forma de verificar o comportamento quântico do estado, através da análise dos valores negativos assumidos pela função.

Os nossos resultados mostram que a realização de operações, como as portas lógicas quânticas, sobre o estado de Bell na representação duplo-trilho termalizado $|\psi(\beta)\rangle$, se dá de forma segura na faixa térmica de $\bar{n}(\beta) = 0$ a $\bar{n}(\beta) = 0,18$ uma vez que, nesse intervalo o sistema obedece a uma estatística típica de estados quânticos (sub-Poissoniana), com Fidelidade Quântica de $F > 0,6$, além da função de probabilidade de Wigner assumir valor negativo ao longo de toda faixa analisada. Estabelecemos, ainda, um valor térmico ideal para atuação das portas lógicas que é de $\bar{n}(\beta) = 0,1$

pois, para esse valor, estão garantidos todos os aspectos de não classicalidade com um valor de Fidelidade de $F \approx 0,8$, referendado pela negatividade da função de Wigner $W(q, p)$.

Na segunda parte da Tese, ao trabalharmos com o estado de superposição entre estados coerente e de Fock $|\alpha_n(\beta)\rangle$, realizamos como protocolo da termalização de estados a duplicação de forma generalizada, i.é, $|\alpha_n(\beta)\rangle \otimes |\tilde{\alpha}_n(\beta)\rangle$, encerrando assim um projeto do nosso grupo de pesquisa, iniciado pelo estudo do estado coerente em duplicação com o estado coerente e a duplicação com o estado número [29]. Através do operador densidade obtido para esse estado, determinamos a função de Wigner para o estado que é expresso por dezesseis parcelas, na qual somente duas destas são descritas unicamente em termos de estados coerentes ou número. De posse da função de quasi probabilidade de Wigner buscamos realizar a análise gráfica da função, e para isso, fez-se necessário construir e implementar um programa computacional na sintaxe do Fortran 90. Tais gráficos foram realizados visando a obtenção de informações sobre a conduta do estado quanto à variação da temperatura, assim como do aumento do número de fótons no sistema. Sendo assim, os gráficos foram gerados para o número de bósons de $n = 0$, $n = 1$ e $n = 3$, na faixa de microondas do espectro eletromagnético, para as temperaturas de $T = 1K$, $T = 10K$, $T = 30K$ e $T = 300K$.

Através da análise dos gráficos foi possível concluir que e como o estado de superposição é sensível ao aumento de temperatura; nessa análise verificamos como as mudanças de características têm relação com a combinação usada na composição do estado (número de fótons e variação da temperatura). Os estados coerentes agem de modo a aumentar os valores (valor absoluto) assumidos pela função de Wigner à medida que há incremento de temperatura. Isso ficou evidente quando assumimos $n = 0$, anulando assim as contribuições de Fock, observando-se então que com o incremento de temperatura o sistema foi levado a uma situação bem definida de classicalidade. Quando optamos por $n = 1$, caso de menor contribuição possível ao estado de Fock, para as temperaturas de $T = \{1K, 10K, 30K, 300K\}$ notou-se que o estado número

foi responsável por assegurar um comportamento quântico mais duradouro à medida que se aumentou a temperatura do conjunto. Quando levamos o número de fótons a $n = 3$ os valores da função de Wigner continuaram crescentes indicando que para esse arranjo tanto os estados coerente quanto os de Fock contribuem ativamente para o comportamento do sistema.

Os resultados aqui obtidos partiram de uma forma geral de duplicar o espaço de Hilbert e assim por se tratar de uma generalização, são capazes de traçar um paralelo com resultados anteriores e previsões teóricas. Na realidade a função de Wigner $W_{|\alpha_n(\beta)\rangle}(q, p)$ por nós obtida, apresenta-se com muita propriedade na análise do sistema pois, além de ser capaz de sugerir o comportamento geral para o estado de superposição termalizado como função da temperatura, também é capaz de sugerir como cada uma das parcelas está contribuindo para o estado como um todo, mostrando a importância da análise da função de Wigner realizada conjuntamente com a análise das parcelas da função.

Como perspectiva, temos a utilização dos resultados obtidos neste trabalho como suporte teórico à implementação experimental. Nessa direção componentes do nosso grupo Física Atômica, Molecular e Matemática (FAMMA-UFBA) vêm interagindo com componentes do grupo de pesquisa em informação quântica da UFCG visando a implementação de processos experimentais que envolvam a obtenção de sistemas de interesse à informação quântica. Outra perspectiva, que surge após a realização deste trabalho, é o estudo de outras formas de superposição de estados envolvendo estados coerentes e estados de Fock, tal como a superposição de dois estados número, a superposição de estados comprimidos com os estados de Fock, a partir da duplicação generalizada utilizando a DCT e a função de Wigner para análise do comportamento do sistema sob efeito de temperatura.

Ainda temos como possibilidade, o desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos explorando a formulação covariante Galileana no espaço $4 + 1$, o que possibilita que vários aspectos da Teoria de Campos relativística sejam abordados no contexto

da Teoria Quântica de Campos não relativística covariante por Galilei (TGQ-CG) havendo no entanto ainda aspectos que precisam por completeza e análise de seus limites ser estendidos a esta teoria; entre esses encontra-se o desenvolvimento da teoria do espalhamento à temperatura finita.

Bibliografia

- [1] Chuang, I. L; Yamamoto, Y. Phys. Rev. A **52** (1995)3489.
- [2] Khanna, F. C; Malbouisson,A. P; Malbouisson, J. M; Santana,A.E. *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications*. World Scientific Publishing Co. (2009).
- [3] Wigner, E. P. Phys. Rev. **40**, (1932) 749 .
- [4] Amorim, R. G. G; Fernades, M. C. B; Queiroz, A. R; Santana, A. E; Vianna, J. D. M. *Wigner function at 80 years and the origins of noncommutative geometry*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol.35, no.3 (2013) 3604 .
- [5] Vincenzo, D. P. Fortsc. der Phys. **48** (2000) 771.
- [6] Imamoglu, A; Awschalom, G; Vincenzo,D.P. Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4204.
- [7] Rodrigues, R. L. *Coherent States in Quantum Mechanics*. CBPF-NF-068/01 (2011).
- [8] Klauder, J. R. Ann. Phys. **11**, (1960) 123.
- [9] Kllin, O; Nishina, D. *The Compton Effect: a classical treatment*. Europh, J. Phys. **4**, (1983) 205.
- [10] Sculy, M. O; Sargent, M. *The concept of photon* Physics Today, **90** (1927) 828.
- [11] Crisp, M.D; Jaynes, E. T. Phys. Rev. **179**, (1969)1253.

- [12] Silva, I. *Uma nova luz sobre o conceito de fóton: Para além de imagens esquiso-frênicas*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. **37**, n. 4 (2015) 4204.
- [13] Freire, O; Silva, I. *Historial studies in the Nature Sciences* **43**, (2013), 470-471.
- [14] Maia, L. P. A. *Superposição assimétrica de estados coerentes circulares*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás. Goiania (2002).
- [15] Glauber, R.J. *Phys. Rev.* **130**, (1963) 2529.
- [16] Schrodinger, E. *The fundamental idea of wave mechanics*. Elsevier Publishing Company, (1965) 305-316.
- [17] Baseia, B. *Sobre a real necessidade de uma teoria quântica para a luz: ótica quântica*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. **17**, n.1 (1995) 1-10.
- [18] Clauser, J. F. *Coherence and Quantum Optics*. Plenum Press. New York (1973).
- [19] Mandel, L; Kimble, H.J; Dagenais, M. *Photon antibunching in resonance fluorescence*. *Phys. Rev. Lett.* **39**, (1977) 691.
- [20] Takahashi, Y.; Umezawa, H. *Collective Phenomena* **1** (1975) 1.
- [21] Takahashi, Y; Umezawa, H. *Collective Phenomena* **2** (1975) 55.
- [22] Salinas, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. EDUSP, São Paulo, (1997).
- [23] Fano, U. *Phys. Rev. Lett.* **29** (1957) 74.
- [24] von-Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1955).
- [25] Dirac, P. A. M. *Proc. Camb. Phil. Mag.* **26**, (1930) 376.
- [26] Lutterbach, L. G; Davidovich, L. *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2547.

- [27] Farias, H. D. *Função de Wigner, quasi-amplitudes de probabilidades e sistemas dissipativos*. Dissertação de Mestrado, UNB. Brasília (2014).
- [28] Feymann, R. *Int. J. Theor. Phys.* **21** (1982) 467.
- [29] Rocha, V. N. A. L. *Dinâmica de Campos Térmicos: uma análise da superposição de estados coerentes e estados de Fock usando função de Wigner*. Dissertação de Mestrado. Instituto de Física, UFBA. Salvador (2013).
- [30] Bracken, A; Melloy, G. F. *J. Phys. A.* **27** (1994) 2197.
- [31] Ralph, T. C; Pryde, G. J. *Optical Quantum Computation*. arXiv:1103.6071v1 [quant-ph] Março (2011). Acesso em 30 de janeiro de 2016.
- [32] Trindade, M. A. *Estruturas Álgebricas em Informação Quântica e Dinâmica de Campos Térmicos*. Tese de Doutorado, Instituto de Física, UFBA. Salvador (2010).
- [33] Jozsa, R. *J. Mod Opt.* **41** (1994) 2315.
- [34] Baseia, B. Granja, S. C; Marques, G. C. *Phys. Scripta*, **55**, (1997) 719.
- [35] Zaheer, K; Wahiddin, M.R. *J. Mod. Opt.* **41**, (1994) 151.
- [36] Wodkiewicz, K. *Phys. Rev. A* **35**, (1987) 2567.
- [37] Baseia, B; Dantas, C; Moussa, M.H. *Physica A* **256**, (1998) 203.
- [38] Fetter, A. J; Walecka, J. D. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill, New York, (1971).
- [39] Wen-Fa Lu. *A general type of a coherent state with thermal effects*. *Phys. Rev.* **130**, (2008) 2529.
- [40] Bellac, M. L. *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation*. Cambridge University Press, Cambridge, (2006).

- [41] Umezawa, H; Matsumoto, H; Tachiki, M. *Thermo Field Dynamics and Condensed States*. Elsevier Science Ltd, New York, (1982).
- [42] ter Haar, B.Rep. Prog. Phys. **24** (1961) 304.
- [43] Nielsen, M. A; Chuang,I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [44] Xin, Z.Z; Hirayama, M; Matumoto, K. Phys. Rev. A **50**, (1994) 2865.
- [45] Mann, A; Revzen, M; Umezawa, H; Yamanaka, Y. *Relation between quantum and thermal fluctuations*. Phys. Lett. A, **140** (1989) 475.
- [46] Baseia, B; Duarte, B; Malbouisson, J. M. C. *Interpolation from number states to chaotic states of the electromagnetic field*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **3**, (2001) 152.
- [47] Baseia, B; Lima, A. F. Marques, G. *Unifield Approach to Superposition State of the Quantized Radiation Field* Nuovo Cimento, D **18** (1996) 425.
- [48] Zhou, J; Wang, S; Song, J; Fan, H.Y. *Photon-Number distribution and Wigner function of generalized photon-modulated coherent state*. M. Phys. Lett. A, **27** (6), (2012) 1250013.
- [49] Shor, P. 35th Ann. Symp. Found. Comp. Science (1994) 124.
- [50] Bennet, C; IBM J. Res. Dev. **17** (1973) 525.
- [51] Einstein, A; Podolsky, B; Rosen,N. Phys. Rev. **47**, (1935) 777.
- [52] Greiner, W; Muller, B. *Quantum Mechanics: Symmetries*. Springer, Berlin, (1989).
- [53] Bennett, H; DiVincenzo, D. P. Phys. Rev.A, **54** (1996) 3824.

- [54] Stachel, J(Org.). *O Ano Miraculoso de Einstein: Cinco Artigos que Mudaram a Face da Física*. Editora UFRJ, Rio de Janeiro,(2005).
- [55] Galetti, D. *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*. Notas do Curso Apresentado na III Escola Mário Schenberg de Pós-Graduação, João Pessoa, (1996).
- [56] Sanders, B.C. Phys. Rev. A **39**, (1989) 4284.
- [57] Isar, A. *Wigner distribution function and entropy of the damped harmonic oscillator within the theory of open quantum systems*, [hep-th/9404129] (1994). Acesso em 4 de julho de 2015.
- [58] Tsukino, R. C; Dantas, C. M. A. *Mecânica Quântica no Espaço de Fase: A Função de Wigner*. Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica, Goiânia: UFG, 2006.
- [59] Pereira, N. S. *Dinâmica de Campos Térmicos Aplicada à Análise de Distribuições de Estados de Fock*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade de Brasília (2008).
- [60] Weber, P. E. R; Silva, L. M; Rocha, V. N. A. L; Pereira, J. C. C; Santana, A. E; Vianna, J. D. M. *Non-classical proprieties of superposition thermal quantum states*, artigo a ser publicado.
- [61] Hillery, M; O'SConnell, R. F; Scully, M. O; Wigner, E. P. *Distribution Functions In Physics: Fundamentals*. Physics Reports, **106**, n.3, (1984) 121-167.
- [62] Mandel, L; Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge Uni. Press, NY(1995).
- [63] Schleich, W. P. *Quantum Optics In Phase Space* . Wiley-VCH, Berlin (2001).
- [64] Cohen-Tannoudji, C; Diu, B; Laloé, F. *Quantum Mechanics*. vol.1. John Wiley, New York (1991).

- [65] Sales, S. F. *Informação Quântica: Efeitos da Temperatura Utilizando a Dinâmica de Campos Térmicos*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, (2011).
- [66] Marchioli, M. A. *Mecânica Quântica no espaço de Fase: I. Formulação de Weyl-Wigner*. Revista Brasileira de Ensino de Física, Scielo, **24**, n.4 (2002) 421.
- [67] Nussenzveig, H. M. *Introduction to Quantum Optics*. Gordon Breach, New York (1972).
- [68] Schleich, W; Walls, D.F; Wheeler, J.A. Phys. Rev. A, **38** (1988) 1177.
- [69] Malkin, I.A; Man'ko, V.I. *Dynamical Symmetries and Coherent States*. Nauka, Moscow (1979).
- [70] Gerry, C.C; Hach, E.E. III, Phys. Lett. A **174** (1993) 185-189.
- [71] Baseia, B; Granja, S. C; Marques, G.C. Phys. Scripta, **55** (1997) 719.
- [72] Dantas, C.M; Baseia, B. Physica A **265** (1999) 176.
- [73] Baseia, B; Dias, B; Brito, A. L; Marques, G.A., N. Cim. D **20** (1998) 1609.
- [74] Meekhof, D. M; Monroe, C; King, B. E; Itano, W. M; Wineland, D. J. Phys. Rev. Lett., **76** (1996) 1796.
- [75] Messiah, A. *Quantum Mechanics*. Jonh Wiley, New York, (1961).
- [76] Merzbacher, E. *Quantum Mechanics*, 3 Ed. Jonh Wiley, New York, (1977).
- [77] Sakurai, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, New York, (1994).
- [78] Bachor, H. A; Ralph, T. C. *A guide to experiments in quantum optics*. Wiley-VCH, Weinheim, (2004).
- [79] Grover, L. Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 325.

- [80] Gershenfeld, N; Chuang,I.L. Science **275** (1997) 350.
- [81] Dorai, K; Kumar,L. Phys. Rev. A **61** (2000)042306.
- [82] Jones, J. A; Mosca, M; Hansen, R. H. Nature **393** (1998) 344.
- [83] Brassard, G; Braunstein, S. L; Cleve,R. Physica D **120** (1998) 43.
- [84] Vandersypen, L. M. K.; Steffen, M.; Breyta, G.; Chuang, I, L. Nature **414** (2001) 883.
- [85] Khitrin, A. K.; Fung, B. M. Phys. Rev. A **64** (2001)032306.
- [86] Tseng, C. H; Somaroo, S; Sharf,Y. Phys. Rev. A **61** (1999) 012302.
- [87] Weinstein, Y. S; Pravia, M. A; Fortunato, E. M; Lloyd, S;Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 1889.