



Universidade Federal da Bahia

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**ÁLGEBRAS DE LIE, ESTADOS
COERENTES GENERALIZADOS E
PARÂMETROS DE COMPRESSÃO:
UMA ABORDAGEM VIA
DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS**

Sergio Floquet Sales

Dezembro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

**ÁLGEBRAS DE LIE, ESTADOS
COERENTES GENERALIZADOS E
PARÂMETROS DE COMPRESSÃO:
UMA ABORDAGEM VIA
DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS**

Sergio Floquet Sales

Orientador: Prof. Dr. José David Manguera Vianna

Co-orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Silva Trindade

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Salvador, Dezembro de 2015

S163a Sales, Sergio Floquet.

Álgebras de Lie, Estados Coerentes Generalizados e Parâmetros de Compressão:
Uma Abordagem Via Dinâmica de Campos Térmicos / Sergio Floquet Sales – 2015.
241 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. José David Manguiera Vianna.

Coorientador: Prof. Dr. Marco Antônio Silva Trindade.

Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física,
2015.

1. Estado Coerente. 2. Parâmetro de Compressão. 3. Dinâmica de Campos Térmicos.
I. Vianna, José David Manguiera. II. Trindade, Marco Antônio Silva. III. Universidade
Federal da Bahia. Instituto de Física. IV. Título.

CDD - 530.12

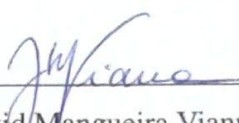
CDU - 530.145

ÁLGBRAS DE LIE, ESTADOS COERENTES
GENERALIZADOS E PARÂMETROS DE COMPRESSÃO:
UMA ABORDAGEM VIA DINÂMICA DE CAMPOS
TÉRMICOS

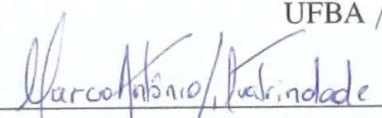
SERGIO FLOQUET SALES

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Física da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

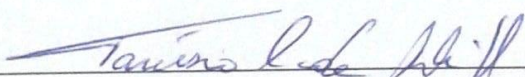
Banca examinadora:



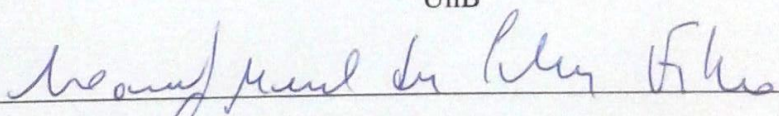
Prof. Dr. José David Manguiera Vianna (Orientador)
UFBA / UnB



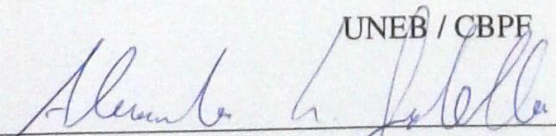
Prof. Dr. Marco Antônio Silva Trindade (Co-orientador)
UNEB



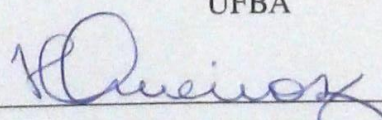
Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho
UnB



Prof. Dr. Lourival Manoel da Silva Filho
UNEB / CBPE



Prof. Dr. Alexandre Leite Gadelha
UFBA



Profa. Dra. Hebe Queiroz Plácido
UFBA

Dedico esta tese a

Catia, Luize,

Juliana e Isabela.

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível de ter sido feito devido à ajuda direta e indireta de muitas pessoas. Sendo assim, venho aqui manifestar os meus sinceros agradecimentos. Desde já peço desculpas àqueles cujos nomes não estão aqui, já que ter uma boa memória nunca foi uma das minhas qualidades.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Prof. José David Manguiera Vianna, pela sua orientação, paciência e por ter me acolhido nesses 10 anos de convívio. À Prof. Maria das Graças Reis Martins pelo apoio nos momentos difíceis. À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Prof. Marcos Antônio Silva Trindade pelas grandes discussões e pelo constante acompanhamento que deu nesse trabalho.

Agradeço aos meus amigos João Humberto, Wallas, Lafayette, Iuri, Mestre, Eric Pinto, Mabele, Cauê, Julia, Andreia, Miralvo, Cabelo, Tche, Kim, Anderson, Renato, Dunga, Edgar, Vinícius, Micael e Humberto. Sem eles, minha estada no Instituto de Física seria impossível.

Agradeço aos funcionários Valtério, Eraldina, Nelso, Conceição, Marli, Dal e todos os funcionários da extinta cantina.

Agradeço aos professores Luciano Abreu e Roberto Andrade pelo apoio nos momentos difíceis.

Agradeço a todos os amigos que fiz em São Raimundo Nonato, em especial a Reginaldo, Nane, Leandro, Mayane, Renê, Flora, Neto, Yariadner, Alex, Eulaliana, Major, Arnaldo, Jader-son, Franciné, Venício, Lucas e Francimário.

Agradeço aos meus amigos Binho, Rafa, Pisquilo, Acarajé, Negão, Gaby, Neto, Leozinho, Jomar, Ed, Lima, Coruja, Ia, Rodrigo, Emanuelle, Adriana, Mana, Nara, Luana, Quel e Marcel e aos meus sogros Mena e José Raimundo, pelo apoio e compreensão.

Agradeço as minhas irmãs Luize e Juliana, que estiveram sempre ao meu lado.

Agradeço a minha mãe; sem ela, nada disso existiria.

E, por fim, agradeço a minha carinhosa mulher, Isabela, que trilhou esse difícil caminho comigo. Muito obrigado.

"Se você pode sonhar,
você pode fazer."
Anônimo.

Resumo

Neste trabalho utilizamos a Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) para apresentar uma formulação térmica para a generalização dos Estados Coerentes de uma álgebra de Lie arbitrária. Mostramos a compatibilidade entre as duas construções e observamos que o Vácuo Térmico, elemento principal da DCT, é um Estado Coerente onde o caso Fermiônico é representado pela álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ e o caso Bosônico por $\mathfrak{su}(1,1)$, além de observar que para altas temperaturas obtemos um estado EPR (Einstein, Podolsky e Rosen). Construimos o estado coerente termalizado para a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ e calculamos o Operador Densidade, a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner, todos termalizados, explorando como os efeitos térmicos alteram as propriedades destas funções para diferentes valores do momento angular j . Ainda dentro do formalismo da DCT, calculamos as médias e variâncias térmicas para o Estado Coerente, o Estado Gaussiano e o Estado *Atomic-Cat*, no contexto da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ do Momento Angular. Apresentamos as versões térmicas dos parâmetros de Compressão de Wine-land, Sorensen e Tóth, calculando-os para esses estados, mais uma vez explorando a ação dos efeitos térmicos. O formalismo da DCT permite introduzir o conceito de Limite Térmico de Compressão, isto é, a temperatura em que acima dela não encontramos mais compressão sobre o estado. Calculamos os Limites Térmicos de Compressão para os estados Coerente, Gaussiano e *Atomic-Cat*, para diversos valores do momento angular j .

Palavras-chave: Estado Coerente. Parâmetro de Compressão. Dinâmica de Campos Térmicos.

Abstract

In this work we use the Thermal Field Dynamics (TFD) to present a thermal formulation for the generalization of the Coherent States for an arbitrary Lie algebra. We show the compatibility between TFD and the Perelomov and Gilmore construction of these Coherent States. In this context we present that the Thermal Vacuum, the main component of TFD, is a Coherent State where the Fermionic case is represented by the Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ and the Bosonic case by $\mathfrak{su}(1,1)$; besides we observe that for high temperatures we get an EPR (Einstein, Podolsky and Rosen) state. We built the thermalized Coherent State to Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ and calculate the Density Operator, Quantum Fidelity, Mandel Factor and the Wigner Function, all thermalized; we analyze how the thermal effects change the properties of these functions for different values of the angular momentum j . Still inside the TFD formalism, we calculate the averages and thermal variances for the Coherent State, the Gaussian State and the Atomic-Cat State, in the context of the Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ of the angular momentum. We present the thermal versions of Wineland, Sorensen and Tóth compression parameters, measuring them for these states, once again exploring the action of thermal effects. The TFD formalism allows to introduce the concept of Compression Thermal Limit, that is, the temperature at which above it compression on the state is not found. We calculate the Compression Thermal Limits for the Coherent, Gaussian and Atomic-Cat states, for different values of the angular momentum j .

Keywords: Coherent State. Compression Parameter. Thermal Field Dynamics.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 1
2	Dinâmica de Campos Térmicos	p. 5
2.1	Introdução ao Formalismo	p. 5
2.2	Oscilador Harmônico Bosônico Termalizado	p. 8
2.2.1	Operadores Termalizados	p. 11
2.3	Oscilador Harmônico Fermiônico Termalizado	p. 15
2.3.1	Operadores Termalizados	p. 17
2.4	Operador Densidade Termalizado	p. 19
3	Estado Coerente	p. 21
3.1	Estado Coerente do Oscilador Harmônico	p. 21
3.2	Estados do Momento Angular	p. 24
3.3	Estado Coerente do Momento Angular	p. 27
3.4	Estados Gaussianos	p. 38
3.5	Estados <i>Atomic-Cat</i>	p. 42
4	Estados Comprimidos e Parâmetros de Compressão	p. 49
4.1	Relação de Incerteza	p. 49
4.2	Média e Variância do Estado Coerente	p. 50

4.3	Parâmetro de Compressão de Kitagawa e Ueda	p. 58
4.4	Parâmetro de Compressão Definido por Wineland	p. 60
4.5	Outros Critérios de Compressão	p. 62
4.6	Desigualdades para Valores Arbitrários de j	p. 64
4.7	Operadores de Compressão	p. 66
5	Álgebras de Lie e o Estado Coerente Termalizado Generalizado	p. 68
5.1	Formulação para uma Álgebra de Lie Arbitrária	p. 68
5.2	Caso de $SU(2)$	p. 74
5.3	Caso de $SU(1,1)$	p. 77
5.4	Vácuo Térmico e o Estado Coerente	p. 79
6	Termalização do Estado Coerente do Momento Angular	p. 85
6.1	Estado Coerente do Momento Angular	p. 85
6.2	Termalizando o estado $ z\rangle$	p. 87
6.3	Operador Densidade Térmico	p. 88
6.4	Fidelidade	p. 90
6.5	Fator de Mandel	p. 99
6.6	Função de Wigner	p. 103
7	Estado Coerente Termalizado e os Parâmetros de Compressão	p. 119
7.1	Médias e Variâncias Térmicas do Estado Coerente	p. 119
7.2	Parâmetro de Wineland Térmico do Estado Coerente	p. 127
7.3	Parâmetro de Sorensen Térmico do Estado Coerente	p. 131
7.4	Desigualdades de Tóth Térmicas do Estado Coerente	p. 134
7.5	Parâmetro ξ_E Térmico do Estado Coerente	p. 136
8	Estado Gaussiano Termalizado e os Parâmetros de Compressão	p. 139

8.1	Médias e Variâncias Térmicas do Estado Gaussiano	p. 139
8.2	Parâmetro de Wineland e Sorensen Térmico do Estado Gaussiano	p. 145
8.3	Desigualdades de Tóth Térmicas do Estado Gaussiano	p. 153
9	Estado <i>Atomic-Cat</i> Termalizado e os Parâmetros de Compressão	p. 156
9.1	Médias e Variâncias Térmicas do Estado <i>Atomic-Cat</i>	p. 156
9.2	Parâmetro de Wineland Térmico do Estado <i>Atomic-Cat</i>	p. 161
9.3	Parâmetro de Sorensen Térmico do Estado <i>Atomic-Cat</i>	p. 166
9.4	Desigualdade de Tóth Térmica do Estado <i>Atomic-Cat</i>	p. 178
10	Conclusões e Perspectivas	p. 181
	Apêndice A – Cálculo de Séries	p. 185
	Apêndice B – Grupos e Álgebras de Lie	p. 189
	Apêndice C – Médias e Variâncias Térmicas	p. 203
	Referências Bibliográficas	p. 213

Lista de Figuras

3.1	Autoestados do Momento Angular.	p. 26
3.2	Rotação pelos ângulos ϕ e θ	p. 28
3.3	Estado Coerente do Momento Angular.	p. 30
3.4	Probabilidade $P_{j,m}(z)$ com $j = 10$ e $\theta = \{0.1\pi, 0.3\pi, 0.4\pi, 0.5\pi, 0.7\pi, 0.9\pi\}$. . .	p. 32
3.5	Distribuição de Probabilidade para $j=10$, $m_x = \{0, 2, 4\}$	p. 36
3.6	Distribuição de Probabilidade para $j=10$, $m_x = \{6, 8, 10\}$	p. 37
3.7	Probabilidade $P_{j,m}(\sigma)$ com $j = 10$ e $\sigma = \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, 5\}$	p. 40
3.8	Probabilidade $P_{j,m_x}(\sigma)$ com $j = 10$ e $\sigma = \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, 5\}$	p. 41
3.9	Probabilidade $P_{j,m}(\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\alpha = \pi$ e para $\theta = \{0.2\pi, 0.3\pi,$ $0.5\pi, 0.6\pi, 0.7\pi, 0.8\pi\}$	p. 44
3.10	Probabilidade $P_{j,m}(\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$	p. 45
3.11	Probabilidade $P_{j,m_x}(\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\alpha = \pi$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e para $\theta = \{0.1\pi,$ $0.3\pi, 0.5\pi, 0.6\pi, 0.7\pi, 0.9\pi\}$	p. 47
3.12	Probabilidade $P_{j,m_x}(\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\theta = 0.1\pi$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e para $\alpha =$ $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$	p. 48
6.1	Gráfico de $F_0 \times \frac{k_b T}{\omega}$ para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$	p. 94
6.2	Gráfico de $\Phi_{\frac{\pi}{2}} \times \theta$ com $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$	p. 95
6.3	Gráfico de $\Phi_{\pi} \times \theta$ para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$	p. 96
6.4	$F_{\frac{\pi}{2}} \times \frac{k_b T}{\omega} \times \theta$ para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$	p. 97
6.5	$F_{\pi} \times \frac{k_b T}{\omega} \times \theta$ para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$	p. 98
6.6	Gráfico Fator de Mandel $\times \frac{k_b T}{\omega}$ sendo $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$	p. 101
6.7	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$, $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ e $\phi = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$	p. 108

6.8	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$, $j = \left\{2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ e $\phi = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$	p. 109
6.9	$f_W \times x_2 \times x_1$ com $\phi = 0$, $z = 0.1$, $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$	p. 110
6.10	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = \frac{1}{2}$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$	p. 111
6.11	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = 1$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$	p. 112
6.12	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = \frac{3}{2}$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$	p. 113
6.13	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = 2$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$	p. 114
6.14	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = \frac{5}{2}$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$	p. 115
6.15	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = 3$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$	p. 116
6.16	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = \frac{5}{2}$, com $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $\theta = \{0.01\pi, 0.3\pi, 0.6\pi, 0.99\pi\}$	p. 117
6.17	$f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = 3$, com $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $\theta = \{0.01\pi, 0.3\pi, 0.6\pi, 0.99\pi\}$	p. 118
7.1	Gráfico do parâmetro de Wineland térmico para $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$	p. 131
7.2	Gráfico do parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ para $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$, com $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$	p. 133
7.3	Parâmetro de Compressão $\xi_{T'}$ com $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$	p. 135
7.4	Parâmetro de Compressão ξ_T com $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$	p. 135
7.5	Gráfico do parâmetro ξ_E para $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$	p. 137
8.1	Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{R_y} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$	p. 148
8.2	Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{R_y} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \{1, 2, 3\}$	p. 149
8.3	Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{R_z} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$	p. 150
8.4	Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{R_z} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \{1, 2, 3\}$	p. 151
8.5	Parâmetro de Compressão ξ_T com $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.2, 0.3,$ $0.4, 0.5, 1.0\}$	p. 155
9.1	Parâmetro de Wineland ξ_{R_x} para $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $\alpha = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$	p. 164
9.2	Parâmetro de Wineland ξ_{R_x} para $\frac{k_b T}{\omega} = 1.0$ e $\alpha = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$	p. 165

9.3	Parâmetro de Sorensen na direção x , $\xi_{R'_x}$, com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\phi = \{0, \frac{\pi}{2}\}$. . .	p. 168
9.4	Parâmetro de Sorensen na direção y , $\xi_{R'_y}$, com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\phi = \{0, \frac{\pi}{2}\}$. . .	p. 169
9.5	Parâmetro de Sorensen na direção z , $\xi_{R'_z}$, com $\alpha = \{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{8}\}$	p. 170
9.6	Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ à temperatura nula, com $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. . .	p. 173
9.7	Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ com $\alpha = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.5, 0.7, 0.9\}$	p. 175
9.8	Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ com $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.3, 0.5, 0.7\}$	p. 176
9.9	Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ com $\alpha = \pi$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.4, 0.6, 0.8\}$	p. 177
9.10	Parâmetro de Compressão ξ_T do Estado <i>Atomic-Cat</i> com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$	p. 179
9.11	Parâmetro de Compressão ξ_T do Estado <i>Atomic-Cat</i> com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.2, 1.0\}$	p. 180

Lista de Tabelas

- 6.1 Limites térmicos para a estatística Poissoniana. p. 102
- 7.1 Valores limites do parâmetro ξ_E para altas temperaturas do Estado Coerente Térmico. p. 138
- 8.1 Valores limites de σ , para o parâmetro de Wineland, em que há compressão com $T \rightarrow 0$ p. 152
- 8.2 Limites térmicos para o parâmetro de Wineland nas direções y e z , determinando as menores temperaturas em que há compressão do estado, independente do valor de σ p. 153
- 9.1 Regiões de compressão do parâmetro de Sorensen à temperatura nula, para $\xi_{R'_x}$ com $\phi = \frac{\pi}{2}$ p. 171
- 9.2 Limites térmicos de compressão para o parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ com $\phi = \frac{\pi}{2}$. p. 172

1 *Introdução*

Em 1926 Schrödinger [1], além de postular a equação diferencial que governa a evolução temporal na Mecânica Quântica, investigou funções de onda gaussianas para descrever a evolução do Oscilador Harmônico. Ele observou que o centro da distribuição destes estados do Oscilador Harmônico segue uma evolução clássica, não alterando a forma com a evolução temporal, sendo denominados de estados quasi-clássicos. Alguns anos depois von Neumann [2] utilizou esses estados para investigar a medida da posição e do momento num sistema unidimensional, mas pouco desenvolvimento foi feito nessa linha.

Com o surgimento do laser em dezembro de 1960, surgiram vários trabalhos analisando a interação da radiação com a matéria [3]. Foi em 1963 que Glauber [4–6] mostrou que o campo eletromagnético livre pode ser descrito como uma superposição de modos clássicos, onde cada um deles é governado pela equação de um oscilador harmônico simples. Os trabalhos semanais de Glauber cunharam o termo Estado Coerente, além de dar início a nova área de pesquisa conhecida como Óptica Quântica. No mesmo ano Sudarshan [7] e Klauder [8–10] deram importantes contribuições na formulação desses estados.

As propriedades dos Estados Coerentes foram exploradas em livros e artigos de revisão [11–13]. Esses estados foram utilizados para descrever ondas de spin [14], ferromagnetismo no modelo de Heisenberg [15], nuvens de *soft-photons* em volta de uma partícula carregada, na Eletrodinâmica Quântica [16–19] e na teoria dos sólitons [20, 21], como representação das soluções.

Na década de 70 Atkins [22] e Arecchi [23] introduziram o conceito de Estado Coerente associado ao Momento Angular, que pode ser denominado Estado Coerente do Spin [24, 25], se o contexto for o operador de Spin S , Estado Coerente Atômico [26, 27], se parametrizarmos em termos dos ângulos θ, ϕ e Estado Coerente do Momento Angular [22, 28], se estivermos tratando do momento angular total J .

Em 1972 Perelomov [29, 30] e Gilmore [31], independentemente, apresentaram uma construção completa para o estado coerente a partir do grupo de simetria G do Hamiltoniano. Sendo

G um grupo de Lie, eles demonstraram que ao determinar o quociente de G pelo subgrupo de isotropia para o estado de referência $|\psi_0\rangle$, obtém-se uma generalização do operador deslocamento. Uma boa revisão desse desenvolvimento pode ser encontrada em [32, 33].

Desde então, as propriedades desses estados foram extensivamente trabalhadas [30, 34]. Recentemente surgiram importantes trabalhos que analisaram o emaranhamento [35–38], a clonagem [39] e o limite clássico [40, 41] dos Estados Coerentes do Momento Angular. Esses importantes resultados reforçam a implementação desses estados na Computação Quântica e na Teoria da Informação Quântica [42–44].

O princípio da incerteza fornece um limite inferior para o produto da variância de duas observáveis. Para o Oscilador Harmônico, o estado é dito ser comprimido, com respeito à observável A , se a sua variância é menor que esse limite. Os estados comprimidos foram analisados nas referências [45–50], sendo o livro de Drummond e Ficek [51] uma ótima referência para iniciar estudos na área.

No caso do momento angular, a noção de compressão proporciona diferentes definições, já que a álgebra $\mathfrak{su}(2)$ possui três geradores. Kitagawa e Ueda [52] propuseram o parâmetro de compressão ξ_S , inspirado na compressão dos fótons; Wineland [53, 54] propôs ξ_R , baseado na variação da fase na espectroscopia Ramsey; Sorensen [55] apresentou $\xi_{R'}$, a partir da análise do emaranhamento multipartite num sistema de N spins $\frac{1}{2}$; Raghavan [56] sugeriu ξ_D , que é capaz de detectar emaranhamento nos estados de Dicke; Tóth *et al* [57, 58] generalizaram os parâmetros de compressão e apresentaram um conjunto completo de desigualdades capazes de detectar emaranhamento num sistema com spin arbitrário.

O conceito de compressão do estado é empregado principalmente em Informação Quântica e Computação Quântica, na análise do emaranhamento [59–63] e, em Metrologia Quântica, no aprimoramento da precisão das medidas em experimentos [64–68]. A compressão é implementada em condensado Bose-Einstein [69–71], via ressonância magnética nuclear [72, 73], e em conjunto de átomos [74–76]. Uma excelente revisão pode ser encontrada no artigo de Ma *et al* [77].

Condensado Bose-Einstein com dois poços de potencial é utilizado como interferômetro [78, 79], possibilitando diversas aplicações tanto em Computação Quântica e Informação Quântica, quanto em Metrologia Quântica. O condensado Bose-Einstein pode ser modelado pelo Hamiltoniano de Bose-Hubbard [80], cuja aproximação para o estado fundamental consiste no Estado Gaussiano [81]. Tal estado foi explorado em diversos trabalhos [82–85], explicitando a sua relevância.

Similar aos estados de Yurke-Stole [86, 87], outro estado relevante é o Estado *Atomic-Cat*, definido como uma superposição de dois estados coerentes do momento angular com diferença de fase de 180° . Esse estado foi analisado em [35, 88–90], explorando diversas propriedades, tais como o emaranhamento.

Os efeitos térmicos são capazes de alterar completamente as características de um sistema, mas nem sempre são incorporados nas análises devido à dificuldade em introduzir a temperatura em diversas formulações. No contexto da Teoria Quântica de Campos (TQC), os efeitos térmicos foram introduzidos de forma satisfatória por: Matsubara [91, 92] em 1955, que desenvolveu o que passou a ser conhecido como formalismo de tempo imaginário, generalizado por Ezawa [93] para a TQC relativística; por Schwinger [94] e Keldysh [95], que introduziram o formalismo a tempo real [96]; por Takahashi e Umezawa [97], que propuseram o formalismo denominado de Dinâmica de Campos Térmicos (DCT).

A introdução da temperatura via DCT [98–100] consiste na duplicação do espaço de Hilbert seguida da aplicação da transformação de Bogoliubov, o que constitui uma prescrição geral para definir estados termalizados com base nas representações das álgebras de Lie [101, 102]. A DCT é aplicada na Óptica Quântica [103–106], na Cosmologia e Teoria de Cordas [107–111], na Teoria de *Gauge* [112], no Efeito Casimir [113, 114], na análise do Emaranhamento [115] e na Informação Quântica [116–121].

Motivados pelas aplicações da DCT, apresentamos neste trabalho uma formulação térmica para a generalização dos estados coerentes de uma álgebra de Lie arbitrária; introduzimos o estado coerente termalizado para a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, calculando a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner; mostramos que o vácuo térmico, elemento fundamental da DCT, pode ser visto como um estado coerente do momento angular; apresentamos as versões térmicas dos parâmetros de Compressão de Wineland, Sorensen, Tóth; avaliamos a compressão sobre o Estado Coerente do Momento Angular, o Estado Gaussiano e o Estado *Atomic-Cat*, todos termalizados; introduzimos o conceito de Limite Térmico de Compressão, calculando-o para esses estados.

O processo de medida consiste na preparação do estado, na evolução quântica e por fim na medida de uma observável. Dependendo de como o estado é preparado, podemos aprimorar as medidas feitas obtendo resultados mais precisos. Pretendemos, a partir dos parâmetros de compressão, obter as regiões de compressão, que determinam os melhores parâmetros que devem ser utilizados na preparação do estado, levando em conta a ação dos efeitos térmicos.

Os quatro capítulos iniciais contém os elementos e formalismo necessários para o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 2 apresentamos o formalismo da DCT descrevendo oscilado-

res bosônicos e fermiônicos com dois modos, juntamente com a transformação de Bogoliubov. Dentro deste formalismo obtivemos a versão termalizada dos operadores que atuam sobre o espaço de Hilbert, finalizando com o operador densidade termalizado.

No capítulo 3 apresentamos uma revisão sobre o Estado Coerente do Oscilador Harmônico e suas principais propriedades. Introduzimos o operador de deslocamento para o caso do Momento Angular, associando o estado coerente a uma rotação. Exploramos também as propriedades do estado Gaussiano e do estado *Atomic-Cat*.

No capítulo 4, considerando o Princípio de Incerteza, mostramos que a noção de compressão do Oscilador Harmônico não se aplica no caso do Momento Angular, usando o cálculo das médias e das variâncias. Apresentamos então o parâmetro de compressão proposto por Kitagawa e Ueda, em seguida o parâmetro de Wineland, além dos parâmetros de Sorensen, Rghavan e as desigualdades de Tóth.

Nos capítulos de 5 a 9 expomos os resultados obtidos nesta tese. No capítulo 5 utilizamos a DCT para introduzir a temperatura num Estado Coerente arbitrário, mostrando a compatibilidade desse formalismo com a construção de Perelomov e Gilmore do Estado Coerente para uma álgebra de Lie arbitrária. Como exemplo apresentamos o caso para as álgebras $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{su}(1, 1)$.

Introduzimos o Estado Coerente do Momento Angular Termalizado no capítulo 6, a partir da representação de Schwinger. Obtivemos o operador densidade térmico e calculamos a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner, todos termalizados, para diversos valores do momento angular j .

Nos capítulos 7, 8 e 9 calculamos as médias e as variâncias térmicas dos estados coerentes do momento angular, do estado Gaussiano e do estado *Atomic-Cat* respectivamente, aplicando-as no cálculo das versões termalizadas dos parâmetros de compressão de Wineland, Sorensen e Tóth, além das suas desigualdades. Observamos como os efeitos térmicos influenciam a compressão, nos motivando a introduzir o conceito de Limite Térmico de Compressão e calculando-o para esses estados.

No capítulo 10 apresentamos as nossas conclusões e perspectivas acerca deste trabalho. Por fim, temos o apêndice A, que apresenta as séries importantes para o cálculo das médias e variâncias do estado coerente, o apêndice B, que generaliza o cálculo das médias e variâncias térmicas para um estado arbitrário do momento angular e o apêndice C, que faz uma revisão sobre os grupos e álgebras de Lie. Em seguida apresentamos as referências bibliográficas utilizadas para a realização desta tese.

2 *Dinâmica de Campos Térmicos*

Existem diversos formalismos para introduzir a temperatura em sistemas quânticos [92, 98, 100]. Há, por exemplo, o formalismo de tempo imaginário, introduzido por Matsubara [91] em 1955, que explora a semelhança entre o operador densidade e o operador evolução temporal a partir da associação $\beta \leftrightarrow \frac{i\tau}{\hbar}$, implicando no tempo ser um número imaginário puro, e o formalismo de Schwinger [94] a tempo real, que utiliza as integrais de trajetória para contornos temporalmente fechados, sendo muito útil na descrição de sistemas fora do equilíbrio.

Uma outra formulação, que adotaremos ao longo desta tese, é a Dinâmica de Campos Térmicos (DCT). Desenvolvida por Umezawa e Takahashi [97] em 1975, a DCT é uma formulação a tempo real, equivalente à formulação de Matsubara, em que o espaço de Hilbert é duplicado quando o sistema entra em contato com um reservatório térmico, estabelecendo uma duplicação nos graus de liberdade do sistema.

2.1 Introdução ao Formalismo

Para um dado sistema em equilíbrio com um reservatório térmico, a Mecânica Estatística fornece que a média de um observável é

$$\langle A \rangle = \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H})}{Z(\beta)}, \quad (2.1)$$

sendo Tr o traço, H o Hamiltoniano do sistema, $\beta = \frac{1}{k_b T}$, k_b a constante de Boltzmann, T a temperatura e $Z(\beta)$ a função de partição, que é $Z(\beta) = \text{Tr}e^{-\beta H}$. Em termos dos autoestados do Hamiltoniano $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H})}{Z(\beta)} \\ &= \sum_n \frac{e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle}{Z(\beta)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A motivação da DCT é encontrar um estado $|0(\beta)\rangle$ em que a média estatística de um operador qualquer seja igual a seu valor esperado no estado $|0(\beta)\rangle$, que será chamado futuramente de vácuo térmico. Queremos que

$$\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle := \langle A \rangle. \quad (2.3)$$

Primeiro escreve-se $|0(\beta)\rangle$ em função dos autoestados de energia pertencentes ao espaço de Hilbert \mathcal{H} ,

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n|0(\beta)\rangle \\ &= \sum_n g_n(\beta) |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $g_n(\beta) = \langle n|0(\beta)\rangle$. Então

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle &= \sum_{n,m} g_n^*(\beta) \langle n|A|m\rangle g_m(\beta) \\ &= \sum_n \frac{e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle}{Z(\beta)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

o que implica na seguinte igualdade

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{e^{-\beta E_n} \delta_{nm}}{Z(\beta)}, \quad (2.6)$$

isto é, a condição necessária para que $|0(\beta)\rangle$ possa ser escrito como combinação linear dos autoestados do hamiltoniano ¹ é que as funções $g_n(\beta)$ satisfaçam uma condição de ortogonalidade, que é um absurdo já que o espaço das funções, munido do produto usual de funções², não tem como satisfazer uma relação de ortogonalidade. Portanto, $|0(\beta)\rangle \notin \mathcal{H}$.

Para que a equação (2.6) seja satisfeita, uma possibilidade é que $g_n(\beta)$ seja um vetor de um espaço de Hilbert. Consequentemente, definimos

$$g_n(\beta) = \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |\tilde{n}\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad (2.7)$$

o que resulta em,

¹e consequentemente pertença a \mathcal{H} .

²o produto ponto a ponto.

$$\begin{aligned}
g_n^*(\beta)g_m(\beta) &= \langle \tilde{n} | \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} \frac{e^{-\frac{\beta E_m}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} | \tilde{m} \rangle \\
&= \frac{e^{-\beta E_n} \delta_{nm}}{Z(\beta)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

O estado térmico, com relação ao qual o valor esperado resulta na média estatística, deve ter a forma

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n, \tilde{n}\rangle \in \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}, \tag{2.9}$$

satisfazendo a condição de normalização $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$, resultante das normalizações $\langle n|n\rangle = 1$ e $\langle \tilde{n}|\tilde{n}\rangle = 1$.

Desse modo, a construção do estado térmico requer a duplicação dos graus de liberdade do sistema, isto é, a criação de um segundo espaço de Hilbert, com as mesmas propriedades do espaço original, que denotaremos por espaço til ($\tilde{}$). Existem várias interpretações para a existência desse espaço til, sendo de particular interesse a argumentação de Araki e Woods [122] que, a partir da Teoria Quântica de Campos (TQC) axiomática de Wightman, prevê que numa TQC à temperatura finita seria necessário a duplicação dos graus de liberdade. A interpretação de cada espaço de Hilbert pode ser encontrada em [100] que explora a relação entre observáveis e grandezas conservadas.

Como $\tilde{\mathcal{H}}$ é uma réplica de \mathcal{H} , as álgebras A_i de operadores sobre esses dois espaços são isomorfas, de modo que podemos definir um mapeamento entre essas álgebras, dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{} : C^*(\mathcal{H}) &\rightarrow C^*(\tilde{\mathcal{H}}), \\
\widetilde{(A_i A_j)} &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \\
\widetilde{(c_i A_i + A_j)} &= c_i^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \\
\widetilde{(A_i^\dagger)} &= (\tilde{A}_i)^\dagger
\end{aligned} \tag{2.10}$$

e

$$[A_i, \tilde{A}_k] = 0, \tag{2.11}$$

onde $C^*(\mathcal{H})$ é a C^* -Álgebra definida sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} .

No espaço duplicado, $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$, o estado de vácuo é o estado de menor energia associado a cada espaço, ou seja, $|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$. Nesse contexto, a transformação de Bogoliubov pode ser

definida como sendo a transformação que leva o estado $|0, \tilde{0}\rangle$ ao estado termalizado $|0(\beta)\rangle$, isto é,

$$U(\beta) : \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}, \quad (2.12)$$

ou, especificamente,

$$U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle = |0(\beta)\rangle. \quad (2.13)$$

Tendo os elementos básicos necessários para introduzir o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos, trataremos agora dos osciladores harmônicos Bosônico e Fermiônico.

2.2 Oscilador Harmônico Bosônico Termalizado

O Hamiltoniano do Oscilador Harmônico Unidimensional é dado por

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 m x^2}{2} \\ &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right)$ é o operador de aniquilação, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$ é o operador de criação, $N = a^\dagger a$ é o operador número e notaremos o comutador por $[\cdot, \cdot]$. Como $[q, p] = i\hbar$, fazendo $\hbar = 1$ e redefinindo a energia de ponto zero, temos que

$$\begin{aligned} H &= \omega N = \omega a^\dagger a, \\ [a, a] &= 0 = [a^\dagger, a^\dagger], \\ [a, a^\dagger] &= 1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

e para os estados $|n\rangle$ segue

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ a|0\rangle &= 0, \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ N|n\rangle &= a^\dagger a|n\rangle \\ &= n|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para dois modos desacoplados do oscilador harmônico, teremos que

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{\omega_1^2 m x_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{\omega_2^2 m x_2^2}{2}, \quad (2.17)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} H &= \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 \\ &= \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

em que $a_1, a_1^\dagger, a_2, a_2^\dagger, N_1$ e N_2 são os operadores de aniquilação e criação do primeiro modo, de aniquilação e criação do segundo modo e os operadores número do primeiro modo e do segundo modo, respectivamente. Como não há acoplamento entre os osciladores, teremos a quantização usual, que acarreta em

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= 0, & i \neq j \\ [a_i, a_j] &= 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger], & i, j = \{1, 2\} \\ [a_i, a_i^\dagger] &= 1 & i = \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned} a_1 |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_1} |n_1 - 1, n_2\rangle, \\ a_1 |0, n_2\rangle &= 0, \\ a_2 |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_2} |n_1, n_2 - 1\rangle, \\ a_2 |n_1, 0\rangle &= 0, \\ a_1^\dagger |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_1 + 1} |n_1 + 1, n_2\rangle, \\ a_2^\dagger |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_2 + 1} |n_1, n_2 + 1\rangle, \\ N_1 |n_1, n_2\rangle &= n_1 |n_1, n_2\rangle, \\ N_2 |n_1, n_2\rangle &= n_2 |n_1, n_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para o oscilador harmônico com dois modos, o espaço de Hilbert é $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Por construção, o estado térmico $|0(\beta)\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \widetilde{\mathcal{H}_1} \otimes \widetilde{\mathcal{H}_2}$, então é dado por

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\beta E_{n_1, n_2}}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

com os operadores til satisfazendo relações de comutação similares às da equação (2.15), além de comutar com qualquer operador sem o til.

Pela condição de normalização $\langle 0(\beta)|0(\beta) \rangle = 1$, segue que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|0(\beta) \rangle &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \frac{e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}}{Z(\beta)} \\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} e^{-\beta\omega_1 n_1} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{+\infty} e^{-\beta\omega_2 n_2} \right) \frac{1}{Z(\beta)} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

que é o produto de duas séries geométricas. Consequentemente,

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_1}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_2}}, \quad (2.23)$$

e o estado térmico é

$$\begin{aligned} |0(\beta) \rangle &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_1}} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_2}} e^{-\frac{\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}{2}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2 \rangle \\ &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_1}} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_2}} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}{2}} \frac{a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger}{n_1!} \frac{a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger}{n_2!} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle \\ &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_1}} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_2}} e \left(e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger \right) e \left(e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger \right) |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle. \end{aligned} \quad (2.24)$$

É possível reescrever $e^{-\frac{\beta\omega_i}{2}} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger$ com $i, j = \{1, 2\}$ na forma $U_i = e^{-iG_i(\beta)}$, em que $G_i(\beta)$ é um operador hermitiano de β . Definindo as funções hiperbólicas

$$\begin{aligned} \cosh\theta_i(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}}} = u_i(\beta), \\ \sinh\theta_i(\beta) &= \frac{e^{-\frac{\beta\omega_i}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}}} = v_i(\beta), \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde $\theta(\beta)$ é uma função real de β , temos

$$\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}} e \left(e^{-\frac{\beta\omega_i}{2}} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger \right) |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle = (\cosh\theta_i(\beta))^{-1} e^{\tanh\theta_i(\beta) a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle; \quad (2.26)$$

utilizando $e^{\tanh\alpha B} e^{\ln\cosh\alpha[A, B]} e^{\tanh\alpha A} = e^{\alpha(A+B)}$, notando que $e^{f(\beta; a_i, a_i^\dagger, \tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger) a_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle = 0$ e que $e^{f(\beta; a_i, a_i^\dagger, \tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger) \tilde{a}_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle = 0$, a equação (2.26) fica da forma

$$\begin{aligned}
& e^{\tanh\theta_i(\beta)a_i^\dagger\tilde{a}_i^\dagger} e^{\ln(\cosh^{-1}\theta_i(\beta))} e^{-\ln(\cosh\theta_i(\beta))\tilde{a}_i^\dagger\tilde{a}_i} e^{-\ln(\cosh\theta_i(\beta))a_i^\dagger a_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > \\
= & e^{\tanh\theta_i(\beta)a_i^\dagger\tilde{a}_i^\dagger} e^{-\ln(\cosh\theta_i(\beta))} [1 + \tilde{a}_i^\dagger\tilde{a}_i + a_i^\dagger a_i] |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > \\
= & e^{\tanh\theta_i(\beta)a_i^\dagger\tilde{a}_i^\dagger} e^{-\ln(\cosh\theta_i(\beta))} [\tilde{a}_i^\dagger\tilde{a}_i + a_i^\dagger a_i] |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > \\
= & e^{\tanh\theta_i(\beta)a_i^\dagger\tilde{a}_i^\dagger} e^{-\ln(\cosh\theta_i(\beta))} [\tilde{a}_i^\dagger\tilde{a}_i + a_i^\dagger a_i] e^{-\tanh\theta_i(\beta)\tilde{a}_i a_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle . \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Fazendo a associação

$$\begin{aligned}
A &= -\tilde{a}_i a_i, \\
B &= a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger, \\
[A, B] &= -\tilde{a}_i \tilde{a}_i^\dagger - a_i^\dagger a_i, \\
\alpha &= \theta_i(\beta),
\end{aligned}$$

e então encontramos que a equação (2.27) torna-se

$$e^{-\theta_i(\beta)(\tilde{a}_i a_i - \tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle = e^{-iG_i(\beta)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle ,$$

sendo $G_i(\beta) = -i\theta_i(\beta)(\tilde{a}_i a_i - \tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger)$ hermitiano. Assim podemos reescrever a equação (2.24) como

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= e^{-iG_1(\beta)} e^{-iG_2(\beta)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\
&= e^{-iG(\beta)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle , \tag{2.28}
\end{aligned}$$

com $G(\beta) = -i\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger) - i\theta_2(\beta)(\tilde{a}_2 a_2 - \tilde{a}_2^\dagger a_2^\dagger)$, já que $e^A e^B = e^{A+B}$ quando $[A, B] = 0$.

Por construção, $U(\beta) = e^{-iG(\beta)}$ é a transformação de Bogoliubov que leva o vácuo duplicado não térmico no estado térmico $|0(\beta)\rangle$.

2.2.1 Operadores Termalizados

A partir da construção do estado termalizado $|0(\beta)\rangle$, obtivemos a forma explícita da transformação de Bogoliubov. Podemos, de forma natural³, introduzir o conceito de operadores termalizados como sendo aqueles obtidos pela transformação de similaridade

³Consistente com a Teoria de Representações de Grupos.

$$F(\beta) = U(\beta)FU^\dagger(\beta), \quad (2.29)$$

em que F é um operador não-termalizado.

Sendo assim, os operadores de criação e aniquilação térmicos são

$$\begin{aligned} a_i^\dagger(\beta) &= U(\beta)a_i^\dagger U^\dagger(\beta), \\ a_i(\beta) &= U(\beta)a_i U^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i^\dagger(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}_i^\dagger U^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}_i U^\dagger(\beta), \end{aligned} \quad (2.30)$$

com

$$\begin{aligned} a_i(\beta)|0(\beta) \rangle &= U(\beta)a_i U^\dagger(\beta)U(\beta)|0,0,\tilde{0},\tilde{0} \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

e similarmente,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i(\beta)|0(\beta) \rangle &= U(\beta)\tilde{a}_i U^\dagger(\beta)U(\beta)|0,0,\tilde{0},\tilde{0} \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

o que corrobora com a ideia de que $a_i(\beta)$ e $\tilde{a}_i(\beta)$ são operadores de destruição térmicos e o estado térmico $|0(\beta) \rangle$ é justamente o Vácuo Térmico.

Utilizando a relação $e^{-iB}Ae^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots$, lembrando que $G(\beta) = -i\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger) - i\theta_2(\beta)(\tilde{a}_2 a_2 - \tilde{a}_2^\dagger a_2^\dagger)$ e os resultados

$$\begin{aligned}
[G, a_i] &= -i\theta_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger, \\
[G, \tilde{a}_i^\dagger] &= -i\theta_i(\beta)a_i, \\
[G, [G, a_i]] &= -\theta_i(\beta)^2 a_i, \\
[G, \tilde{a}_i] &= -i\theta_i(\beta)a_i^\dagger, \\
[G, a_i^\dagger] &= -i\theta_i(\beta)\tilde{a}_i, \\
[G, [G, \tilde{a}_i]] &= -\theta_i(\beta)^2 \tilde{a}_i,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

podemos escrever, das relações (2.30), que

$$\begin{aligned}
a_i(\beta) &= U(\beta)a_iU^\dagger(\beta) \\
&= e^{-iG}a_ie^{iG} \\
&= a_i + (-i)[G, a_i] + \frac{(-i)^2}{2!}[G, [G, a_i]] + \frac{(-i)^3}{3!}[G, [G, [G, a_i]]] + \dots, \\
&= \cosh\theta_i(\beta)a_i - \sinh\theta_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger \\
&= u_i(\beta)a_i - v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

E com um desenvolvimento similar, encontramos as seguintes relações:

$$\tilde{a}_i^\dagger(\beta) = \cosh\theta_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger - \sinh\theta_i(\beta)a_i = u_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger - v_i(\beta)a_i, \tag{2.35}$$

$$a_i^\dagger(\beta) = \cosh\theta_i(\beta)a_i^\dagger - \sinh\theta_i(\beta)\tilde{a}_i = u_i(\beta)a_i^\dagger - v_i(\beta)\tilde{a}_i, \tag{2.36}$$

e

$$\tilde{a}_i(\beta) = \cosh\theta_i(\beta)\tilde{a}_i - \sinh\theta_i(\beta)a_i^\dagger = u_i(\beta)\tilde{a}_i - v_i(\beta)a_i^\dagger. \tag{2.37}$$

Consequentemente, podemos escrever os operadores não térmicos em termos dos operadores térmicos, multiplicando convenientemente por $u_i(\beta)$ ou por $v_i(\beta)$ e lembrando que $u_i^2(\beta) - v_i^2(\beta) = \cosh^2\theta_i(\beta) - \sinh^2\theta_i(\beta) = 1$. Assim,

$$a_i = u_i(\beta)a_i(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta), \tag{2.38}$$

$$\tilde{a}_i^\dagger = u_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)a_i(\beta), \tag{2.39}$$

$$a_i^\dagger = u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta) \quad (2.40)$$

e

$$\tilde{a}_i = u_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta) + v_i(\beta)a_i^\dagger(\beta). \quad (2.41)$$

A partir da análise das equações (2.35), (2.37), (2.39) e (2.41) temos que a aplicação de duas transformações til é compatível com $\widetilde{(\tilde{a}_i)} = a_i$.

Uma propriedade interessante, que será útil futuramente, surge da equação (2.31)

$$\begin{aligned} a_i(\beta)|0(\beta)\rangle &= (u_i(\beta)a_i - v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger)|0(\beta)\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica em

$$u_i(\beta)a_i|0(\beta)\rangle = v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger|0(\beta)\rangle \quad (2.42)$$

e similarmente para $\tilde{a}_i(\beta)$:

$$u_i(\beta)\tilde{a}_i|0(\beta)\rangle = v_i(\beta)a_i^\dagger|0(\beta)\rangle. \quad (2.43)$$

Para os operadores de criação térmicos, por outro lado,

$$\begin{aligned} a_i^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= (u_i(\beta)a_i^\dagger - v_i(\beta)\tilde{a}_i)|0(\beta)\rangle \\ &= (u_i(\beta)a_i^\dagger - v_i(\beta)\frac{v_i(\beta)a_i^\dagger}{u_i(\beta)})|0(\beta)\rangle, \end{aligned} \quad (2.44)$$

que, sendo $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$, pode ser escrito como

$$a_i^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{a_i^\dagger}{u_i(\beta)}|0(\beta)\rangle; \quad (2.45)$$

e, usando a relação de comutação $[a_i^\dagger(\beta), a_i^\dagger] = 0$, obtemos

$$(a_i^\dagger(\beta))^n|0(\beta)\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^n}{u_i^n(\beta)}|0(\beta)\rangle. \quad (2.46)$$

Concluiremos essa seção calculando o valor médio do operador número de ocupação⁴,

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle_\beta &= \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \sum_{i=1}^2 (u_i(\beta) a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta) \tilde{a}_i(\beta)) (u_i(\beta) a_i(\beta) + v_i(\beta) \tilde{a}_i^\dagger(\beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^2 v_i(\beta)^2 \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1}, \tag{2.47}
\end{aligned}$$

em que $N = \sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i$ e usamos a relação (2.25). O valor médio do operador número é justamente a distribuição de Bose-Einstein associada a cada modo do oscilador harmônico.

2.3 Oscilador Harmônico Fermiônico Termalizado

Partindo da mesma equação (2.17) do oscilador harmônico bosônico, agora considerando a relação de anticomutação $\{\cdot, \cdot\}$ para as observáveis, o Hamiltoniano é

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2,$$

com os operadores de criação e aniquilação satisfazendo as relações

$$\begin{aligned}
\{a_i, a_i^\dagger\} &= 1, \quad i \in \{1, 2\}, \\
\{a_i, a_j\} &= \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = \{a_2^\dagger, a_1\} = \{a_1^\dagger, a_2\} = 0, \quad i, j \in \{1, 2\}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Já que $(a_i^\dagger)^2 = 0$, o espaço de Fock é composto por apenas 4 estados, $|0, 0\rangle$, $|0, 1\rangle$, $|1, 0\rangle$ e $|1, 1\rangle$, em que

$$H|n_i, n_j\rangle = (\omega_i n_i + \omega_j n_j)|n_i, n_j\rangle.$$

Portanto, o vácuo termalizado é dado por

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \sum_{n_1, n_2} \frac{e^{-\frac{\beta E_{n_1, n_2}}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \{1 + e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger + e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger + e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger\} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \{1 + e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger\} \{1 + e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger\} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle, \tag{2.49}
\end{aligned}$$

⁴que, por construção, é o valor esperado no estado de vácuo térmico.

onde

$$\begin{aligned} |1, 0, \tilde{1}, \tilde{0}\rangle &= a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\ &= -\tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |1, 1, \tilde{1}, \tilde{1}\rangle &= a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\ &= \tilde{a}_2^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle. \end{aligned}$$

Pela condição de normalização de $|0(\beta)\rangle$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= Z^{-1}(\beta)(1 + e^{-\beta\omega_1})(1 + e^{-\beta\omega_2}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

obtemos

$$Z(\beta) = (1 + e^{-\beta\omega_1})(1 + e^{-\beta\omega_2}). \quad (2.50)$$

Então a equação (2.49) torna-se

$$|0(\beta)\rangle = (1 + e^{-\beta\omega_1})^{-1/2} (1 + e^{-\beta\omega_2})^{-1/2} \left(1 + e^{-\beta\omega_1/2} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger\right) \left(1 + e^{-\beta\omega_2/2} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger\right) |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle. \quad (2.51)$$

Podemos introduzir a transformação de Bogoliubov definindo

$$\begin{aligned} u_i(\beta) = \cos \theta_i(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega_i}}}, \\ v_i(\beta) = \sin \theta_i(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega_i}}}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

a partir das relações (2.48), vemos que

$$(\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)^{2n} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle = (-1)^n |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle$$

e

$$(\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)^{2n+1} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle = (-1)^{n+1} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle. \quad (2.53)$$

A equação (2.51) para o vácuo térmico pode então ser escrita como

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \prod_{i=1}^2 \{\cos\theta_i(\beta) + \sin\theta_i(\beta)a_i^\dagger\tilde{a}_i^\dagger\}|0,0,\tilde{0},\tilde{0}\rangle \\
&= \prod_{i=1}^2 \left\{1 - \theta_i(\beta)(\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger) + \frac{\theta_i(\beta)}{2!}(\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)^2 + \dots\right\}|0,0,\tilde{0},\tilde{0}\rangle \\
&= \prod_{i=1}^2 e^{-\theta_i(\beta)(\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)}|0,0,\tilde{0},\tilde{0}\rangle \\
&= e^{-iG(\beta)}|0,0,\tilde{0},\tilde{0}\rangle,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

onde $G = -i\theta_i(\beta) \sum_{i=1}^2 (\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)$ define uma transformação de Bogoliubov semelhante à do oscilador bosônico, apesar das diferentes relações de comutação e anticomutação.

2.3.1 Operadores Termalizados

Através da transformação de Bogoliubov encontrada podemos também, para o caso fermiônico, introduzir os operadores térmicos a partir de uma transformação de similaridade

$$\begin{aligned}
a(\beta) &= U(\beta)aU(\beta)^\dagger, \\
a^\dagger(\beta) &= U(\beta)a^\dagger U(\beta)^\dagger, \\
\tilde{a}(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}U(\beta)^\dagger
\end{aligned}$$

e

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta)\tilde{a}^\dagger U(\beta)^\dagger. \tag{2.55}$$

Utilizando que

$$\begin{aligned}
[\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger]^{2n} &= (-1)^n [1 - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + 2a^\dagger a \tilde{a}^\dagger \tilde{a}] \\
[\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger]^{2n+1} &= (-1)^n [\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger],
\end{aligned} \tag{2.56}$$

podemos expandir o operador unitário $U(\beta)$, reescrevendo as equações 2.55 como

$$a_i(\beta) = u(\beta)a_i - v(\beta)\tilde{a}_i^\dagger, \tag{2.57}$$

$$\tilde{a}_i^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}_i^\dagger + v(\beta)a_i, \tag{2.58}$$

$$a_i^\dagger(\beta) = u(\beta)a_i^\dagger - v(\beta)\tilde{a}_i \tag{2.59}$$

e

$$\tilde{a}_i(\beta) = u(\beta)\tilde{a}_i + v(\beta)a_i^\dagger. \quad (2.60)$$

Diferente do caso bosônico, a partir das equações (2.58) e (2.60), temos que a aplicação de duas transformações til é compatível com $\widetilde{(\tilde{a})}_i = -a_i$. Com isso, as regras de conjugação til dão um resultado consistente. As relações inversas são

$$a_i = u(\beta)a_i(\beta) + v(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta),$$

$$\tilde{a}_i^\dagger = u_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta) - v_i(\beta)a_i(\beta),$$

$$a_i^\dagger = u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta),$$

e

$$\tilde{a}_i = u(\beta)\tilde{a}_i(\beta) - v(\beta)a_i^\dagger(\beta), \quad (2.61)$$

com

$$u(\beta)a_i|0(\beta)\rangle = v(\beta)\tilde{a}_i^\dagger|0(\beta)\rangle > \quad (2.62)$$

e

$$a_i^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{a_i^\dagger}{u(\beta)}|0(\beta)\rangle. \quad (2.63)$$

Por fim, calcularemos o valor médio do operador número de ocupação,

$$\begin{aligned} \langle N \rangle_\beta &= \langle 0(\beta) | \left(\sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i \right) | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | \left(\sum_{i=1}^2 (u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta)) (u_i(\beta)a_i(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta)) \right) | 0(\beta) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 v_i(\beta)^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{e^{\beta\omega_i} + 1} \end{aligned} \quad (2.64)$$

que é a distribuição de Fermi-Dirac para cada modo do oscilador fermiônico.

2.4 Operador Densidade Termalizado

O operador densidade, introduzido por Landau [123], é muito utilizado na Teoria Quântica por refletir aspectos inerentes à teoria. Von-Neumann [2] utilizou-se do conceito de operador densidade para descrever ensembles puros e mistos.

Nesta seção vamos escrever o vácuo térmico em função do operador densidade e introduzir o conceito de operador densidade termalizado associado a um estado térmico $|\Psi(\beta)\rangle$. Pela definição de vácuo térmico (veja equação (2.9)), temos que

$$\begin{aligned}
 |0(\beta)\rangle &= \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta H}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}} \sum_n |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \sqrt{\rho} \sum_n |n, \tilde{n}\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

onde

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}. \tag{2.66}$$

A média térmica de um observável O assume a forma

$$\begin{aligned}
 \langle 0(\beta)|O|0(\beta)\rangle &= \sum_{n,m} \langle n, \tilde{n}|\sqrt{\rho}O\sqrt{\rho}|m, \tilde{m}\rangle \\
 &= \sum_{n,m} \langle n|\sqrt{\rho}O\sqrt{\rho}|m\rangle \delta_{n,m} \\
 &= \sum_n \langle n|\sqrt{\rho}O\sqrt{\rho}|n\rangle \\
 &= \text{Tr}(\sqrt{\rho}O\sqrt{\rho}) \\
 &= \text{Tr}(\rho O).
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Considerando um estado térmico qualquer $|\Psi(\beta)\rangle = f(a(\beta), a^\dagger(\beta))|0(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger; \beta)|0(\beta)\rangle$, temos que a média de um observável sobre esse estado térmico será dada pelo traço do operador densidade térmico associado a esse estado, isto é,

$$\langle \Psi(\beta)|O|\Psi(\beta)\rangle = \text{Tr}(\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} O). \tag{2.68}$$

Logo, o operador densidade térmico é obtido considerando que

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) O f(a, a^\dagger; \beta) | 0(\beta) \rangle \\
&= \text{Tr}(f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) O f(a, a^\dagger; \beta) \rho) \\
&= \text{Tr}(O f(a, a^\dagger; \beta) \rho f^\dagger(a, a^\dagger; \beta)),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} = f(a, a^\dagger; \beta) \rho f^\dagger(a, a^\dagger; \beta). \quad (2.69)$$

Finalizamos essa seção escrevendo o operador densidade ρ para o oscilador harmônico bosônico com dois modos. Neste caso, usando (2.18) e (2.23)

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} = e^{-\beta(\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2)} (1 - e^{-\beta\omega_1}) (1 - e^{-\beta\omega_2}), \quad (2.70)$$

e pela relação de completeza $\sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| = 1$ e ortogonalidade dos autoestados do hamiltoniano, temos

$$\rho = (1 - e^{-\beta\omega_1}) (1 - e^{-\beta\omega_2}) \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2|. \quad (2.71)$$

Podemos escrever esse operador densidade em termos do número de ocupação $\bar{n}_i(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1}$, já que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + \bar{n}_i(\beta)} &= \frac{1}{\frac{e^{\beta\omega_i}}{e^{\beta\omega_i} - 1}} \\
&= 1 - e^{-\beta\omega_i}
\end{aligned} \quad (2.72)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{n}_i(\beta)}{1 + \bar{n}_i(\beta)} &= \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1} \frac{e^{\beta\omega_i} - 1}{e^{\beta\omega_i}} \\
&= e^{-\beta\omega_i}
\end{aligned} \quad (2.73)$$

resultando então, para o operador densidade (2.66) a expressão

$$\rho = \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right)^{n_1} \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right)^{n_2} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2|. \quad (2.74)$$

3 *Estado Coerente*

O estado coerente, conhecido também como estado quasi-clássico, foi proposto por Schrödinger [1] em 1926, para o Oscilador Harmônico, e explorado por Glauber [4–6], Sudarshan [7] e Klauder [8–10] na década de sessenta. No início da década de 70, Atkins [22] e Arecchi [23] introduziram o conceito de Estado Coerente do Momento Angular, generalizado para uma álgebra de Lie arbitrária por Perelomov [29, 30] e Gilmore [31], independentemente.

Neste capítulo resumiremos aspectos do estado coerente do Oscilador Harmônico, depois definiremos o estado coerente para a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, a partir de uma rotação arbitrária sobre o estado com menor autovalor [30]. Também exploraremos o estado Gaussiano, que é uma boa aproximação para o estado fundamental do Hamiltoniano de Bose-Hubbard [81], e o estado *Atomic-cat*, que é a superposição de dois estados coerentes com diferença de fase de 180° .

3.1 Estado Coerente do Oscilador Harmônico

O estado coerente do oscilador harmônico foi primeiramente analisado por Schrodinger, recebendo notoriedade a partir da década de 60 devido aos trabalhos de Glauber [4–6], que o relacionou com os autoestados do campo de radiação, dando origem à área atualmente conhecida como Óptica Quântica.

O Hamiltoniano do Oscilador Harmônico é dado por

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (3.1)$$

tomando $\hbar = 1$. Os operadores a^\dagger e a são conhecidos como operadores de criação e destruição, respectivamente, satisfazendo a relação de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.2)$$

O estado coerente associado à álgebra do Oscilador Harmônico, também conhecida como álgebra de Weyl, é dado por

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle, \quad (3.3)$$

sendo α um número complexo qualquer e $|0\rangle$ o estado de menor energia do oscilador harmônico. O termo $D(\alpha) := e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ é conhecido como operador de Deslocamento, que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

utilizando que $e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$, quando $[A, [A, B]] = 0$. Logo,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.5)$$

O estado coerente do Oscilador Harmônico possui diversas propriedades, tais como

- São autoestados dos operadores de destruição,

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= \alpha|\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

- A evolução temporal é uma rotação de $\omega\tau$ sobre o parâmetro α , multiplicado por um fator de fase,

$$\begin{aligned} e^{-iH\tau}|\alpha\rangle &= e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (e^{-i\omega\tau})^n}{\sqrt{(n)!}} |n\rangle \\ &= e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} |\alpha e^{-i\omega\tau}\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Esses estados não são ortogonais,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \beta \rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \beta^m}{\sqrt{(n)!} \sqrt{(m)!}} \langle n | m \rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

então

$$\begin{aligned}
|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha \beta^*} \\
&= e^{-|\alpha - \beta|^2}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

- O estado coerente possui supercompleteza,

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} |m\rangle \langle n| \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\phi}{\pi \sqrt{n!m!}} r^{m+n} e^{-r^2} e^{i(m-n)\phi} |m\rangle \langle n| \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dr^2}{2\pi \sqrt{n!m!}} r^{m+n} e^{-r^2} 2\pi \delta_{m,n} |m\rangle \langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} |n\rangle \langle n| \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde foi feita a mudança de variável $\alpha = r e^{-i\phi}$. Essa propriedade é conhecida como supercompleteza pois caso retiremos um número finito de estados coerentes, ainda preservamos a completeza.

- Mínimo de incerteza,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | (a + a^\dagger) | \alpha \rangle &= \alpha + \alpha^*, \\
\langle \alpha | (a - a^\dagger) | \alpha \rangle &= \alpha - \alpha^*, \\
\langle \alpha | (a + a^\dagger)(a + a^\dagger) | \alpha \rangle &= (\alpha + \alpha^*)^2 + 1, \\
\langle \alpha | (a - a^\dagger)(a - a^\dagger) | \alpha \rangle &= (\alpha - \alpha^*)^2 - 1,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

e como $x = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2m\omega}}$ e $p = \frac{(a-a^\dagger)\sqrt{m\omega}}{i\sqrt{2}}$ segundo as definições de a e a^\dagger da equação (2.14),

encontramos as variâncias

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta x)^2 \rangle_\alpha &= \langle x^2 \rangle_\alpha - (\langle x \rangle_\alpha)^2 \\
 &= \frac{1}{2\omega} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1 - (\alpha + \alpha^*)^2] \\
 &= \frac{1}{2\omega}, \\
 \langle (\Delta p)^2 \rangle_\alpha &= \langle p^2 \rangle_\alpha - (\langle p \rangle_\alpha)^2 \\
 &= \frac{\omega}{2} [-(\alpha - \alpha^*)^2 + 1 + (\alpha - \alpha^*)^2] \\
 &= \frac{\omega}{2},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde denotamos $\langle A \rangle_\alpha = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$. Portanto,

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_\alpha \langle (\Delta p)^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{4}, \tag{3.13}$$

que é o mínimo de incerteza possível pelo Princípio de Heisenberg, reforçando a ideia de estados quase clássicos. Essa propriedade do estado coerente é extremamente útil e simboliza que tais estados estão no limiar dos aspectos quânticos.

3.2 Estados do Momento Angular

No contexto da Mecânica Quântica podemos descrever a Teoria do Momento Angular a partir da relação de quantização usual $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Esta relação automaticamente impõe as condições de comutação sobre o operador momento angular orbital, que é definido como $l = q \times p$. Para isso basta fazer a decomposição nas 3 componentes como

$$\begin{aligned}
 l_x &= q_y p_z - q_z p_y, \\
 l_y &= q_z p_x - q_x p_z, \\
 l_z &= q_x p_y - q_y p_x,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
[l_x, l_y] &= [q_y p_z - q_z p_y, q_z p_x - q_x p_z] \\
&= q_y [p_z, q_z] p_x + q_x [q_z, p_z] p_y \\
&= -i q_y p_x + i q_x p_y \\
&= i l_z, \\
[l_y, l_z] &= i l_x, \\
[l_z, l_x] &= i l_y,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde continuamos a considerar $\hbar = 1$ ao longo de todo o trabalho.

Definindo $l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$ como o momento angular orbital total,

$$[l^2, l_i] = 0, \quad (i = x, y, z), \tag{3.16}$$

o que indica que o momento angular orbital total pode ser determinado simultaneamente a uma das componentes cartesianas, sem nenhuma incerteza quântica.

Para tratar de situações mais gerais introduziremos o operador J que é o momento angular total do sistema, formado pelo momento angular orbital mais a contribuição do spin. Esses operadores satisfazem as mesmas relações de comutação

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k, \tag{3.17}$$

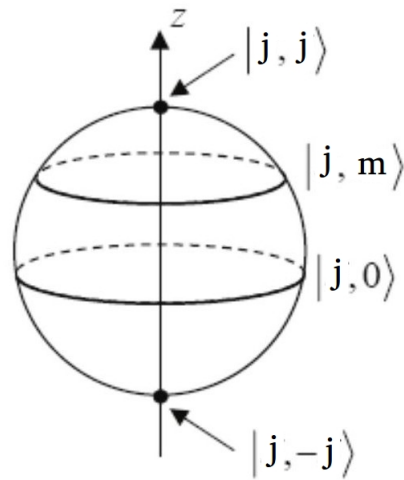
com ϵ_{ijk} sendo o símbolo de Levi-Civita.

Definindo $|j, m\rangle$ como os autoestados dos operadores J^2 e J_z , conhecidos como estados de Dicke, temos que

$$\begin{aligned}
J_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \\
J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde a dimensão do espaço de Hilbert é igual a $2j + 1$ sendo gerada pelos autoestados $\{|j, -j\rangle, |j, -j+1\rangle, \dots, |j, j-1\rangle, |j, j\rangle\}$, como representado na figura (Fig. 3.1).

Figura 3.1: Autoestados do Momento Angular.



Introduzindo os operadores $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$, obtemos

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2J_z, \\ [J_z, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

tendo que

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+). \quad (3.20)$$

Também é válido

$$\begin{aligned} J_+J_- &= J^2 - J_z^2 + J_z, \\ J_-J_+ &= J^2 - J_z^2 - J_z. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Esses operadores atuam no estado $|j, m\rangle$ resultando em

$$\begin{aligned}
J_+|j, m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}|j, m+1\rangle, \\
J_-|j, m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle, \\
J_x|j, m\rangle &= \frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}{2}|j, m+1\rangle + \frac{\sqrt{(j-m+1)(j+m)}}{2}|j, m-1\rangle, \\
J_y|j, m\rangle &= \frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}{2i}|j, m+1\rangle - \frac{\sqrt{(j-m+1)(j+m)}}{2i}|j, m-1\rangle, \\
J_x^2|j, m\rangle &= \frac{\sqrt{(j+m+2)(j+m+1)(j-m)(j-m-1)}}{4}|j, m+2\rangle + \frac{j(j+1)-m^2}{2}|j, m\rangle \\
&\quad + \frac{\sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)}}{4}|j, m-2\rangle \\
J_y^2|j, m\rangle &= -\frac{\sqrt{(j+m+2)(j+m+1)(j-m)(j-m-1)}}{4}|j, m+2\rangle + \frac{j(j+1)-m^2}{2}|j, m\rangle \\
&\quad - \frac{\sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)}}{4}|j, m-2\rangle. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

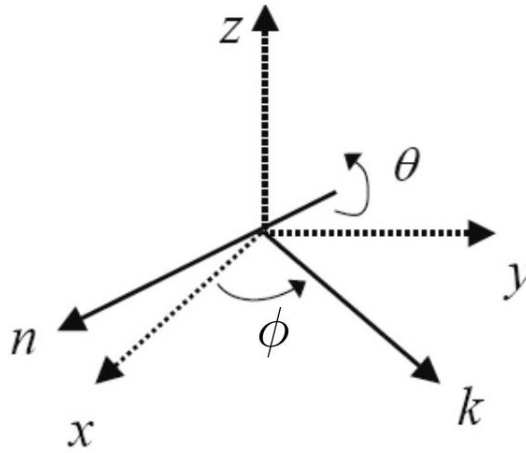
O estado com a menor componente z do momento angular é $|j, -j\rangle$, podendo-se encontrar qualquer outro estado de Dicke a partir da aplicação sucessiva do operador J_+ . De maneira recursiva, podemos encontrar que

$$|j, m\rangle = \frac{1}{(j+m)!} \left[\sqrt{\binom{2j}{j+m}} \right]^{-1} J_+^{j+m}|j, -j\rangle, \tag{3.23}$$

valendo que $J_+|j, j\rangle = 0$, $J_-|j, -j\rangle = 0$ e com $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sendo o Binômio de Newton.

3.3 Estado Coerente do Momento Angular

Uma forma interessante de introduzir o estado coerente do momento angular é imaginá-lo como resultado de uma rotação arbitrária sobre o estado $|j, -j\rangle$ [23]. A ideia consiste em introduzir uma visão pictórica de rotação, tentando obter quais seriam os ângulos θ, ϕ tais que uma rotação sobre eles resulte no Estado Coerente do Momento Angular. Iniciaremos aplicando uma rotação em torno do eixo z de um ângulo ϕ , (vide figura)

Figura 3.2: Rotação pelos ângulos ϕ e θ .

os operadores J_x , J_y e J_z se transformam respectivamente em

$$\begin{aligned}
 J_k &= e^{-i\phi J_z} J_x e^{i\phi J_z} \\
 &= J_x \cos(\phi) + J_y \sin(\phi) \\
 &= \frac{1}{2} (J_+ e^{-i\phi} + J_- e^{i\phi}), \\
 J_n &= e^{-i(\phi - \frac{\pi}{2}) J_z} J_y e^{i(\phi - \frac{\pi}{2}) J_z} \\
 &= J_x \sin(\phi) - J_y \cos(\phi) \\
 &= \frac{i}{2} (J_+ e^{-i\phi} - J_- e^{i\phi}), \\
 J_z &= J_z,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
 J_- &= e^{-i\phi} (J_k + iJ_n), \\
 J_+ &= e^{i\phi} (J_k - iJ_n).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

O gerador de uma rotação de ângulo θ em torno do eixo n é dado por

$$\begin{aligned}
 R_{\theta\phi} &= e^{-i\theta J_n} \\
 &= e^{-i\theta (J_x \sin(\phi) - J_y \cos(\phi))} \\
 &= e^{\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} J_+ - \frac{\theta}{2} e^{i\phi} J_-} \\
 &= e^{\zeta J_+ - \zeta^* J_-},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

com $\zeta = \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$. Vale a pena ressaltar que a equação (3.26) é "equivalente" à encontrada no estudo do estado coerente do Oscilador Harmônico $|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle$.

Analisando os efeitos dessas rotações sobre os geradores encontramos que

$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi}J_nR_{\theta\phi}^{-1} &= J_n \\
R_{\theta\phi}J_kR_{\theta\phi}^{-1} &= J_k\cos(\theta) + J_z\text{sen}(\theta) \\
R_{\theta\phi}J_zR_{\theta\phi}^{-1} &= -J_k\text{sen}(\theta) + J_z\cos(\theta)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

onde, como a rotação está sendo efetuada em torno do eixo n , J_n não se altera. Por outro lado, considerando que a rotação no plano kz de um ângulo θ , dada pela equação (3.24), temos

$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi}J_-R_{\theta\phi}^{-1} &= R_{\theta\phi}e^{-i\phi}(J_k + iJ_n)R_{\theta\phi}^{-1} \\
&= e^{-i\phi}\left[\frac{1}{2}(J_+e^{-i\phi} + J_-e^{i\phi})\cos(\theta) + J_z\text{sen}(\theta) + \frac{1}{2}(J_+e^{-i\phi} - J_-e^{i\phi})\right] \\
&= e^{-i\phi}\left[J_+e^{-i\phi}\left(\frac{\cos(\theta) + 1}{2}\right) + J_z\text{sen}(\theta) + J_-e^{i\phi}\left(\frac{\cos(\theta) - 1}{2}\right)\right], \\
&= e^{-i\phi}\left[J_+e^{-i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + J_z\text{sen}(\theta) - J_-e^{i\phi}\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right];
\end{aligned} \tag{3.28}$$

analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi}J_+R_{\theta\phi}^{-1} &= R_{\theta\phi}e^{i\phi}(J_k - iJ_n)R_{\theta\phi}^{-1} \\
&= e^{i\phi}\left[\frac{1}{2}(J_+e^{-i\phi} + J_-e^{i\phi})\cos(\theta) + J_z\text{sen}(\theta) - \frac{1}{2}(J_+e^{-i\phi} - J_-e^{i\phi})\right] \\
&= e^{i\phi}\left[J_+e^{-i\phi}\left(\frac{\cos(\theta) - 1}{2}\right) + J_z\text{sen}(\theta) + J_-e^{i\phi}\left(\frac{\cos(\theta) + 1}{2}\right)\right], \\
&= e^{i\phi}\left[-J_+e^{-i\phi}\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + J_z\text{sen}(\theta) + J_-e^{i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{3.29}$$

e por fim

$$R_{\theta\phi}J_zR_{\theta\phi}^{-1} = J_z\cos(\theta) - \frac{1}{2}e^{i\phi}\text{sen}(\theta)J_- - \frac{1}{2}e^{-i\phi}\text{sen}(\theta)J_+. \tag{3.30}$$

Utilizando que $e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh\alpha B}e^{\text{ln}\cosh\alpha C}e^{\tanh\alpha A}$, com $C = [A, B]$ e denotando $\alpha = i\frac{\theta}{2}$, $A = ie^{i\phi}J_-$, $B = -ie^{-i\phi}J_+$ e $C = -2J_z$, encontramos

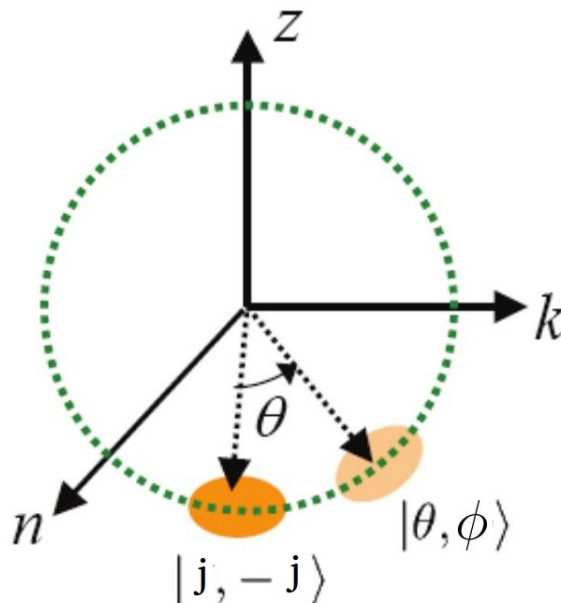
$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi} &= e^{\zeta J_+ - \zeta^* J_-} \\
&= e^{\tanh i \frac{\theta}{2} (-ie^{-i\phi} J_+)} e^{\ln \cosh i \frac{\theta}{2} (-2J_z)} e^{\tanh i \frac{\theta}{2} (ie^{i\phi} J_-)} \\
&= e^{\tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} J_+} e^{-2 \ln \cos \frac{\theta}{2} J_z} e^{-\tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi} J_-} \\
&= e^{z J_+} e^{\ln(1+|z|^2) J_z} e^{-z^* J_-},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

usando que $\tanh(ix) = i \tan(x)$, $\cosh(ix) = \cos(x)$ e $z = \tan(\frac{\theta}{2})e^{-i\phi}$. O Estado Coerente do Momento Angular é definido como [77]

$$\begin{aligned}
|z\rangle &= |\theta, \phi\rangle \\
&= R_{\theta\phi} |j, -j\rangle \\
&= e^{z J_+} e^{\ln(1+|z|^2) J_z} e^{-z^* J_-} |j, -j\rangle \\
&= e^{z J_+} e^{\ln(1+|z|^2) J_z} |j, -j\rangle \\
&= e^{z J_+} \frac{1}{(1+|z|^2)^j} |j, -j\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \frac{1}{(1+|z|^2)^j} \frac{z^{j+m}}{(j+m)!} J_+^{j+m} |j, -j\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \sqrt{\binom{2j}{j+m}} |j, m\rangle,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

que pode ser visualizado como uma rotação sobre o estado $|j, -j\rangle$ (vide figura).

Figura 3.3: Estado Coerente do Momento Angular.



Analisando a equação (3.28) atuando no estado coerente do momento angular, segue que

$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi}J_-R_{\theta\phi}^{-1}|\theta,\phi\rangle &= e^{-i\phi}\left[J_+e^{-i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+J_z\text{sen}(\theta)-J_-e^{i\phi}\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]|\theta,\phi\rangle \\
&= R_{\theta\phi}J_-R_{\theta\phi}^{-1}R_{\theta\phi}|j,-j\rangle \\
&= R_{\theta\phi}J_-|j,-j\rangle \\
&= 0;
\end{aligned} \tag{3.33}$$

logo

$$\left[J_+e^{-i\phi}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+J_z\text{sen}(\theta)-J_-e^{i\phi}\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]|\theta,\phi\rangle = 0, \tag{3.34}$$

que é a equação de autovalor do estado $|\theta,\phi\rangle$, sendo também válido que

$$J^2|\theta,\phi\rangle = j(j+1)|\theta,\phi\rangle. \tag{3.35}$$

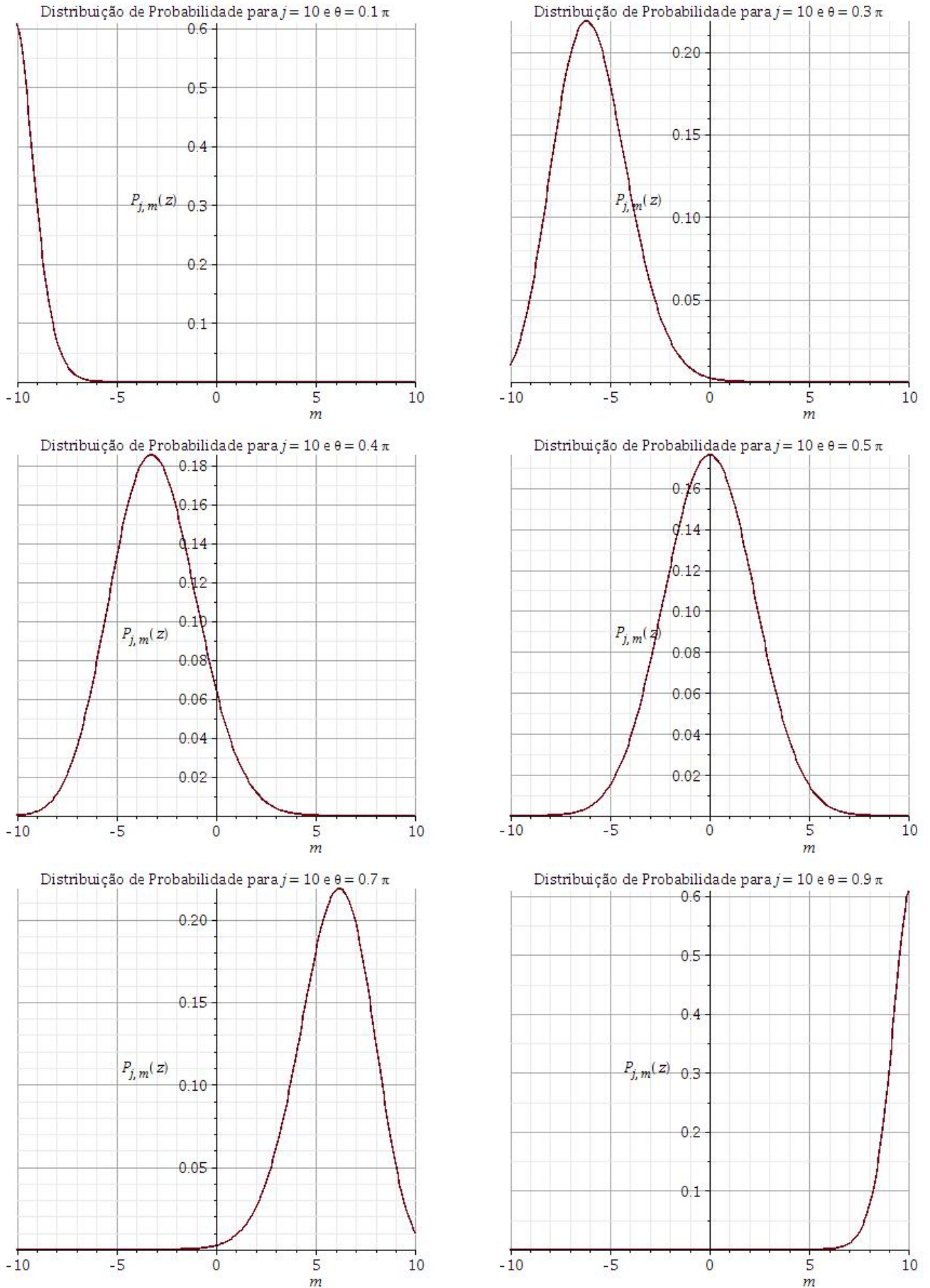
A distribuição de probabilidade de um estado coerente $|z\rangle$, em termos de um estado de Dicke $|j,m\rangle$, é dada por [77]

$$\begin{aligned}
P_{j,m}(z) &= |\langle j,m|z\rangle|^2 \\
&= \binom{2j}{j+m} \frac{|z|^{2j+2m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&= \binom{2j}{j+m} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2j-2m} \left(\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2j+2m}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

O gráfico (Fig.3.4) da distribuição de probabilidade reforça a ideia de que o estado coerente está relacionado à rotação, pois percebemos que variando θ há um deslocamento (rotacional) da distribuição de probabilidade, alterando assim o estado mais provável. Ao longo de todo o trabalho a notação decimal será feita utilizando o ponto, ao invés da vírgula, devido à compatibilidade com o software Maple 18.

Para $\theta \rightarrow 0$ vemos que o estado coerente do momento angular $|\theta,\phi\rangle$ se aproxima do estado $|j,-j\rangle$, enquanto que para $\theta \rightarrow \pi$ nos aproximamos de $|j,j\rangle$, ambos com probabilidade 1.

Figura 3.4: Probabilidade $P_{j,m}(z)$ com $j = 10$ e $\theta = \{0.1\pi, 0.3\pi, 0.4\pi, 0.5\pi, 0.7\pi, 0.9\pi\}$.



Para finalizar essa seção, mostraremos como obter os autoestados de J_x e J_y em termos de rotações de $|j, m\rangle$. Para isso usaremos a fórmula de Baker-Hausdorff

$$e^{i\alpha B} A e^{-i\alpha B} = A + i\alpha [B, A] + \left(\frac{i^2 \alpha^2}{2!}\right) [B, [B, A]] + \dots + \left(\frac{i^n \alpha^n}{n!}\right) [B, \dots [B, A]] + \dots \quad (3.37)$$

Efetuada uma rotação de ângulo θ em torno do eixo x , temos

$$\begin{aligned} e^{i\theta J_x} J_y e^{-i\theta J_x} &= J_y \cos(\theta) - J_z \sin(\theta), \\ e^{i\theta J_x} J_z e^{-i\theta J_x} &= J_z \cos(\theta) + J_y \sin(\theta), \end{aligned} \quad (3.38)$$

e de ângulo θ em torno do eixo y ,

$$\begin{aligned} e^{i\theta J_y} J_x e^{-i\theta J_y} &= J_x \cos(\theta) + J_z \sin(\theta), \\ e^{i\theta J_y} J_z e^{-i\theta J_y} &= J_z \cos(\theta) - J_x \sin(\theta), \end{aligned} \quad (3.39)$$

e, por fim, de ângulo θ em torno do eixo z ,

$$\begin{aligned} e^{i\theta J_z} J_x e^{-i\theta J_z} &= J_x \cos(\theta) - J_y \sin(\theta), \\ e^{i\theta J_z} J_y e^{-i\theta J_z} &= J_y \cos(\theta) + J_x \sin(\theta). \end{aligned} \quad (3.40)$$

A partir dessas expressões podemos definir os autoestados dos operadores J_x e J_y . Pelas equações (3.38) e (3.39), assumindo $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} J_y e^{i\frac{\pi}{2} J_x} &= e^{i\frac{\pi}{2} J_x} J_z, \\ J_x e^{-i\frac{\pi}{2} J_y} &= e^{-i\frac{\pi}{2} J_y} J_z, \end{aligned} \quad (3.41)$$

então, definindo

$$\begin{aligned} |j, m_y\rangle &= e^{i\frac{\pi}{2} J_x} |j, m\rangle, \\ |j, m_x\rangle &= e^{-i\frac{\pi}{2} J_y} |j, m\rangle, \end{aligned} \quad (3.42)$$

já que

$$\begin{aligned}
J_y|j, m_y\rangle &= J_y e^{i\frac{\pi}{2}J_x}|j, m\rangle \\
&= e^{i\frac{\pi}{2}J_x} J_z|j, m\rangle \\
&= m|j, m_y\rangle, \\
J_x|j, m_x\rangle &= J_x e^{-i\frac{\pi}{2}J_y}|j, m\rangle \\
&= e^{-i\frac{\pi}{2}J_y} J_z|j, m\rangle \\
&= m|j, m_x\rangle.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

De modo geral uma rotação qualquer pode ser realizada pelo operador [124]

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}, \tag{3.44}$$

sendo α, β, γ os ângulos de Euler. A *D-matrix* de Wigner é definida como

$$\begin{aligned}
D_{m',m}^j(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle j, m'|R(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle \\
&= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \langle j, m'|e^{-i\beta J_y}|j, m\rangle \\
&= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} d_{m',m}^j(\beta).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

A matriz $d_{m',m}^j(\beta)$ é uma matriz com dimensão $(2j+1)$ e denominada *d-matrix* de Wigner. A forma dos elementos dessa matriz é conhecida como fórmula de Wigner sendo dada por [124],

$$\begin{aligned}
d_{m',m}^j(\beta) &= \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k+m'-m)!} \\
&\quad \times \left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^{2k-m+m'},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde a soma em k é feita sobre os valores em que o fatorial não é negativo.

Para definir a rotação utilizamos a convenção z-y-z dos ângulos de Euler; caso utilizássemos a convenção z-x-z, parte dos elementos seria puramente imaginário, onde o fator $(-1)^{k-m+m'}$ na fórmula de Wigner seria substituído por $i^{m-m'}(-1)^k$ [125],

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{m',m}^j(\beta) &= \langle j, m' | e^{-i\beta J_x} | j, m \rangle \\
&= \sum_k i^{m-m'} (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k+m'-m)!} \\
&\quad \times \left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)^{2k-m+m'}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Portanto, teremos que

$$\begin{aligned}
\langle j, m' | j, m_y \rangle &= \bar{d}_{m',m}^j(-\pi/2), \\
\langle j, m' | j, m_x \rangle &= d_{m',m}^j(\pi/2).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Como exemplo calcularemos a distribuição de probabilidade do estado de Dicke $|j, m' \rangle$ na direção $|j, m_x \rangle$, ou seja,

$$\begin{aligned}
P_j(m', m) &= |\langle j, m' | j, m_x \rangle|^2 \\
&= |\langle j, m' | e^{-i\frac{\pi}{2} J_y} | j, m \rangle|^2 \\
&= |d_{m',m}^j\left(\frac{\pi}{2}\right)|^2,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

cujos gráficos (Fig. 3.5 e Fig. 3.6) corroboram com os resultados da referência [77], o que evidencia que ao mudarmos a direção analisada alteramos a distribuição de probabilidade do Estado Coerente do Momento Angular. Também analisamos o caso de valores negativos de m_x , ou seja, $-m_x$, resultando em gráficos similares aos obtidos para m_x positivo.

Figura 3.5: Distribuição de Probabilidade para $j=10$, $m_x = \{0, 2, 4\}$.

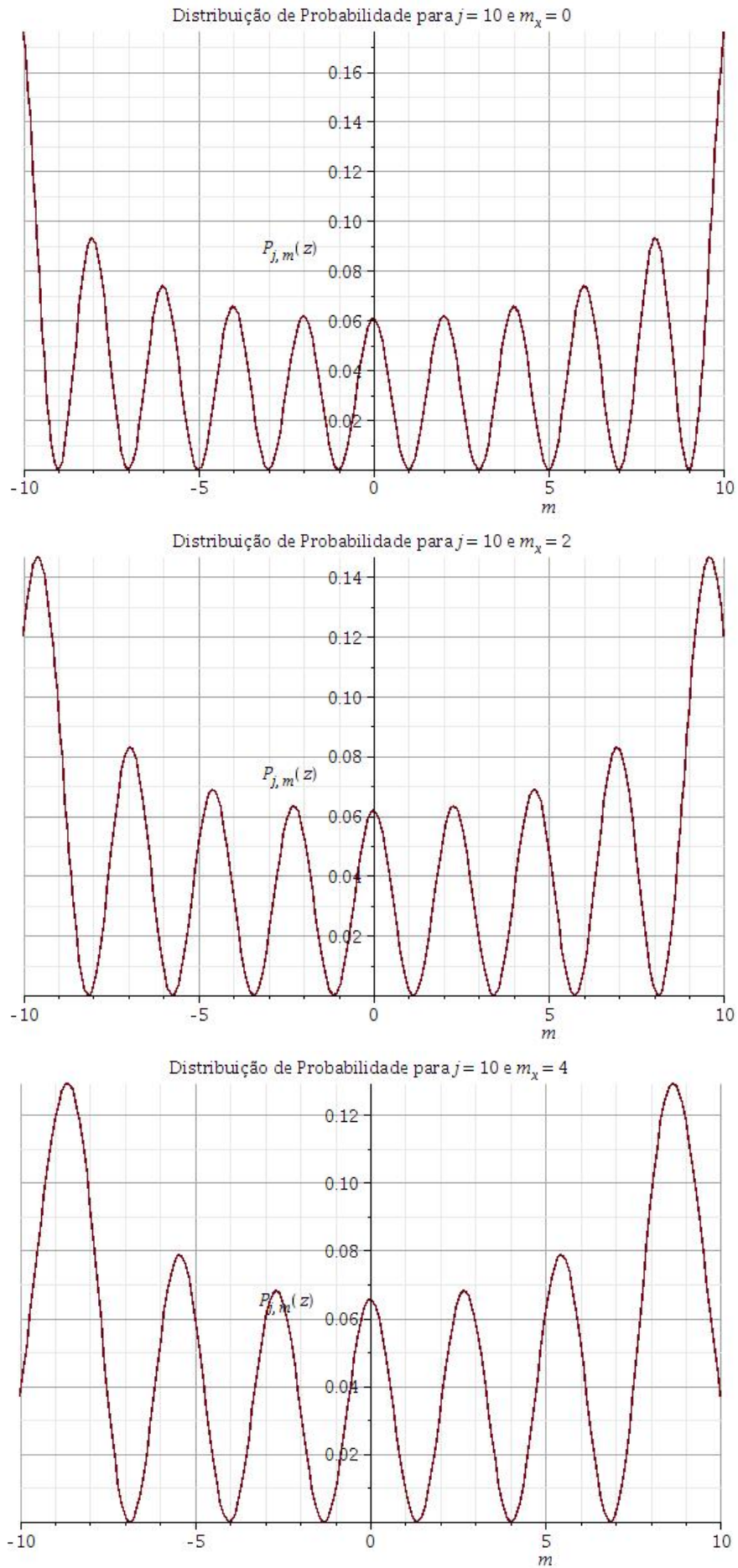
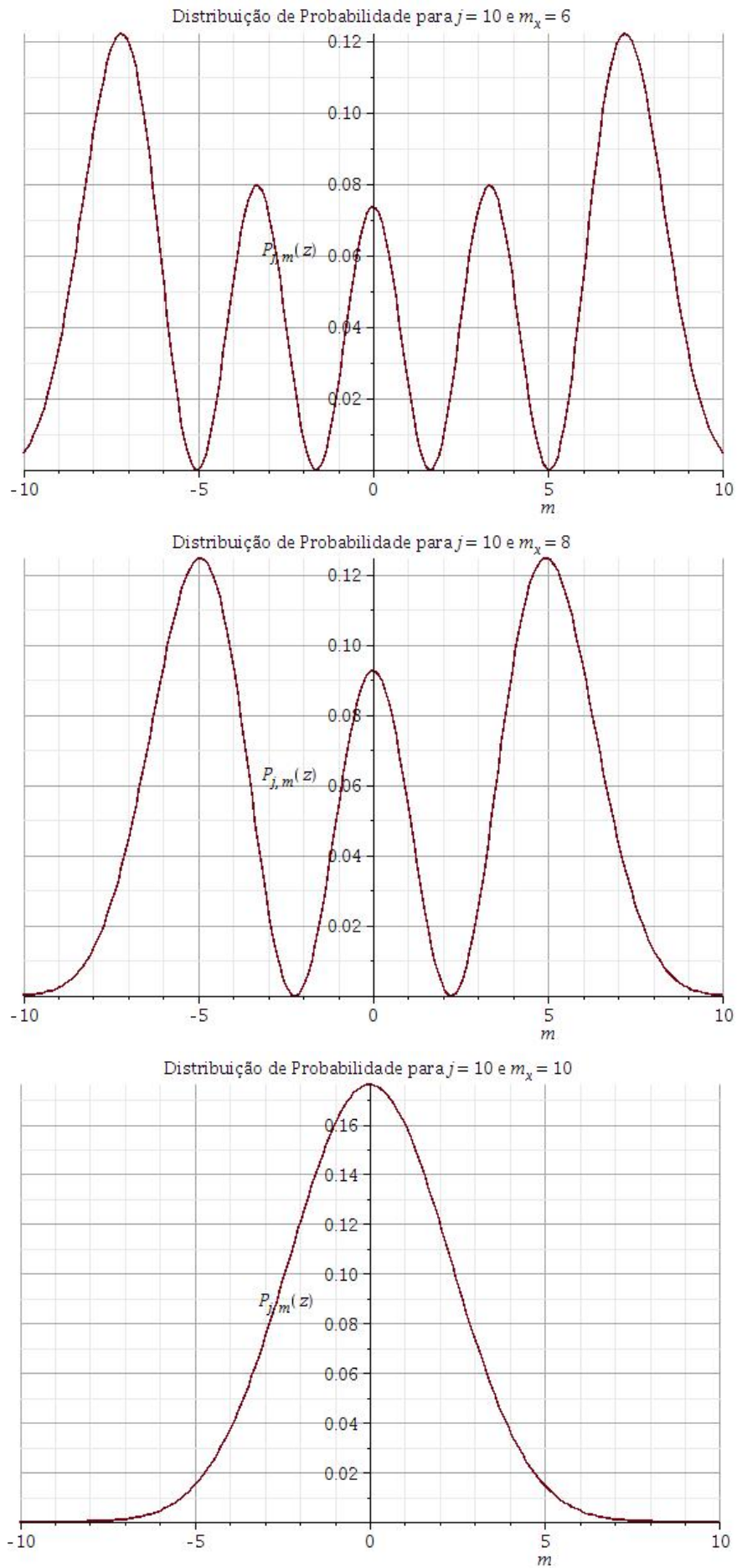


Figura 3.6: Distribuição de Probabilidade para $j=10$, $m_x = \{6, 8, 10\}$.



3.4 Estados Gaussianos

O Condensado Bose-Einstein desempenha um importante papel no contexto dos estados comprimidos, sendo vastamente utilizado na realização desses estados [32]. Uma aproximação do Hamiltoniano de interação do condensado Bose-Einstein com dois modos é [80, 84]:

$$H_{BH} = -KJ_x + \epsilon J_z + UJ_z^2, \quad (3.50)$$

conhecido como o Hamiltoniano de Bose-Hubbard, com $U > 0$ e $\epsilon \approx 0$. Nesse contexto, uma boa aproximação para o estado fundamental de H_{BH} [81, 84] é dada por

$$|\sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} |j, m\rangle, \quad (3.51)$$

com N_σ sendo a normalização,

$$\begin{aligned} N_\sigma &= \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \\ &\approx \sqrt{2\pi\sigma}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

e σ o desvio padrão da distribuição gaussiana.

Esse estado Gaussiano foi analisado considerando o Interferômetro de Mach-Zehnder em [82, 84] e utilizando oscilações de Rabi-Josephson em [85].

Para compreender melhor as propriedades do estado Gaussiano, calcularemos a distribuição de probabilidade projetada sobre $|j, m\rangle$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle j, m | \sigma \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m'=-j}^j e^{-\frac{(m')^2}{4\sigma^2}} \langle j, m | j, m' \rangle \\ &= \frac{e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt{\sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}}}; \end{aligned} \quad (3.53)$$

logo a probabilidade será dada por

$$\begin{aligned}
P_{j,m}(\sigma) &= |\langle j, m | \sigma \rangle|^2 \\
&= \frac{e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Os gráficos da equação (3.54) são encontrados na Figura 3.7 para alguns valores de σ . O peso do estado é dado por uma função gaussiana, portanto os gráficos da probabilidade têm a forma de uma curva gaussiana centrada no zero. O fator σ corresponde ao desvio padrão que determina a largura da curva de probabilidade.

Para análise do estado $|j, m_x \rangle$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \sigma | j, m_x \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m'=-j}^j e^{-\frac{(m')^2}{4\sigma^2}} \langle j, m' | j, m_x \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m'=-j}^j e^{-\frac{(m')^2}{4\sigma^2}} d_{m',m}^j\left(\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde foi usada a equação (3.48). Portanto,

$$\begin{aligned}
P_{j,m_x}(\sigma) &= |\langle \sigma | j, m_x \rangle|^2 \\
&= \frac{\left| \sum_{m'=-j}^j e^{-\frac{(m')^2}{4\sigma^2}} d_{m',m}^j\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|^2}{\sum_{m''=-j}^j e^{-\frac{(m'')^2}{2\sigma^2}}}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Os gráficos da equação (3.56) são apresentados na Figura 3.8. Para $\sigma = 0.1$, o estado se torna bem centrado no zero, concordando com o gráfico (Fig. 3.5), com $m_x = 0$. Variando σ de 0.1 até 5.0 percebemos a perda da forma gaussiana da distribuição de probabilidade; isso implica que ao mudarmos a direção observada alteramos significativamente as características do estado gaussiano.

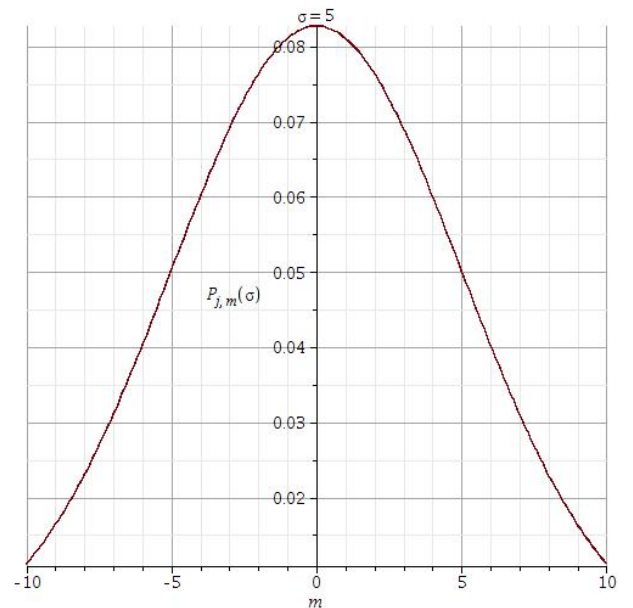
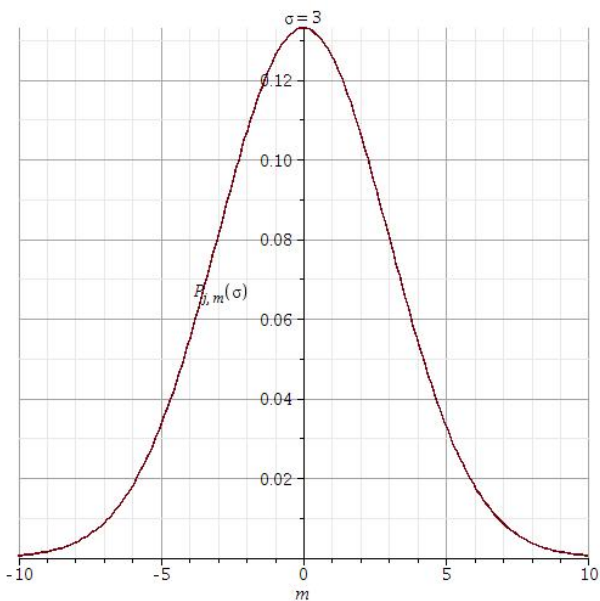
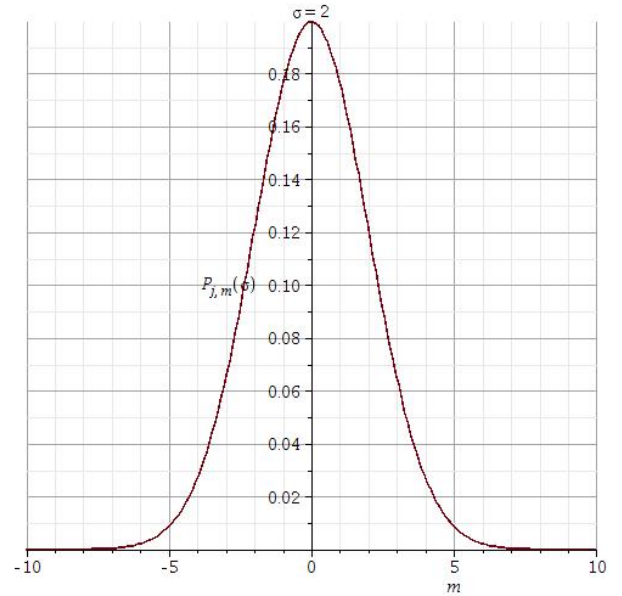
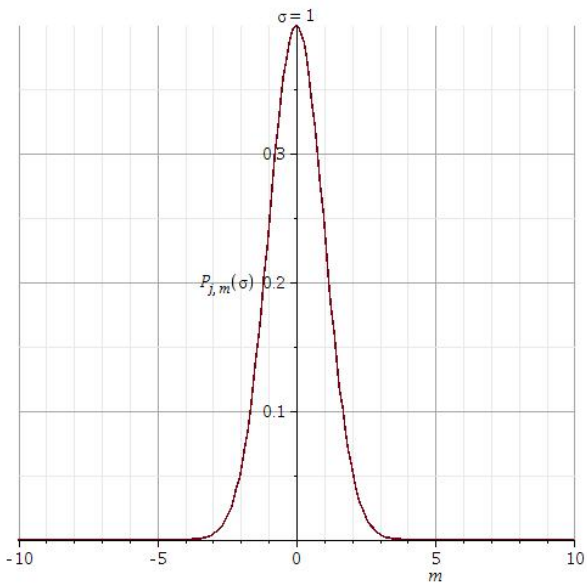
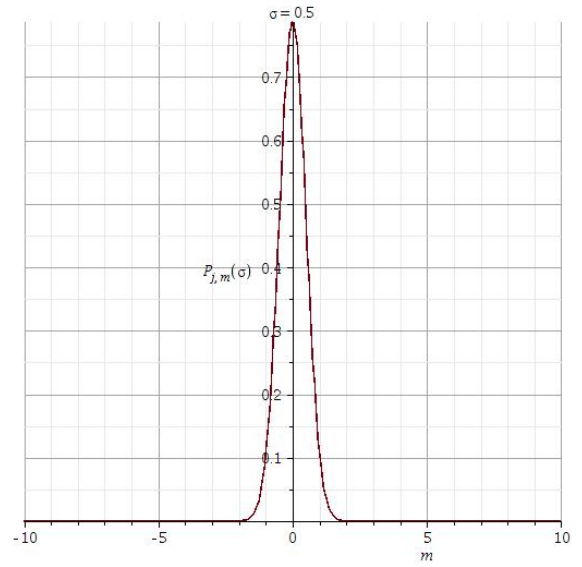
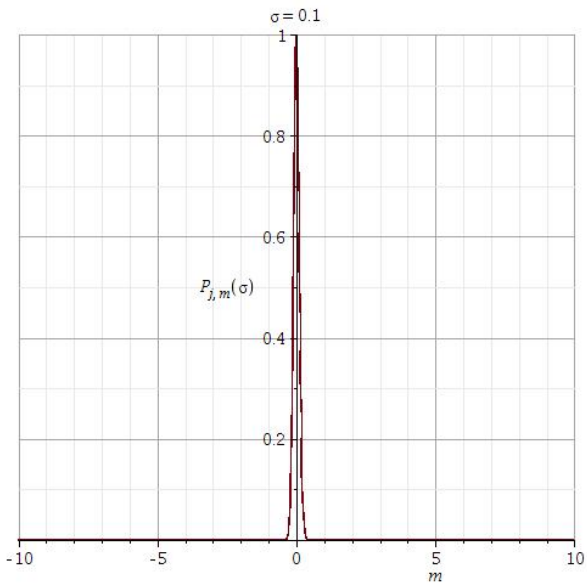
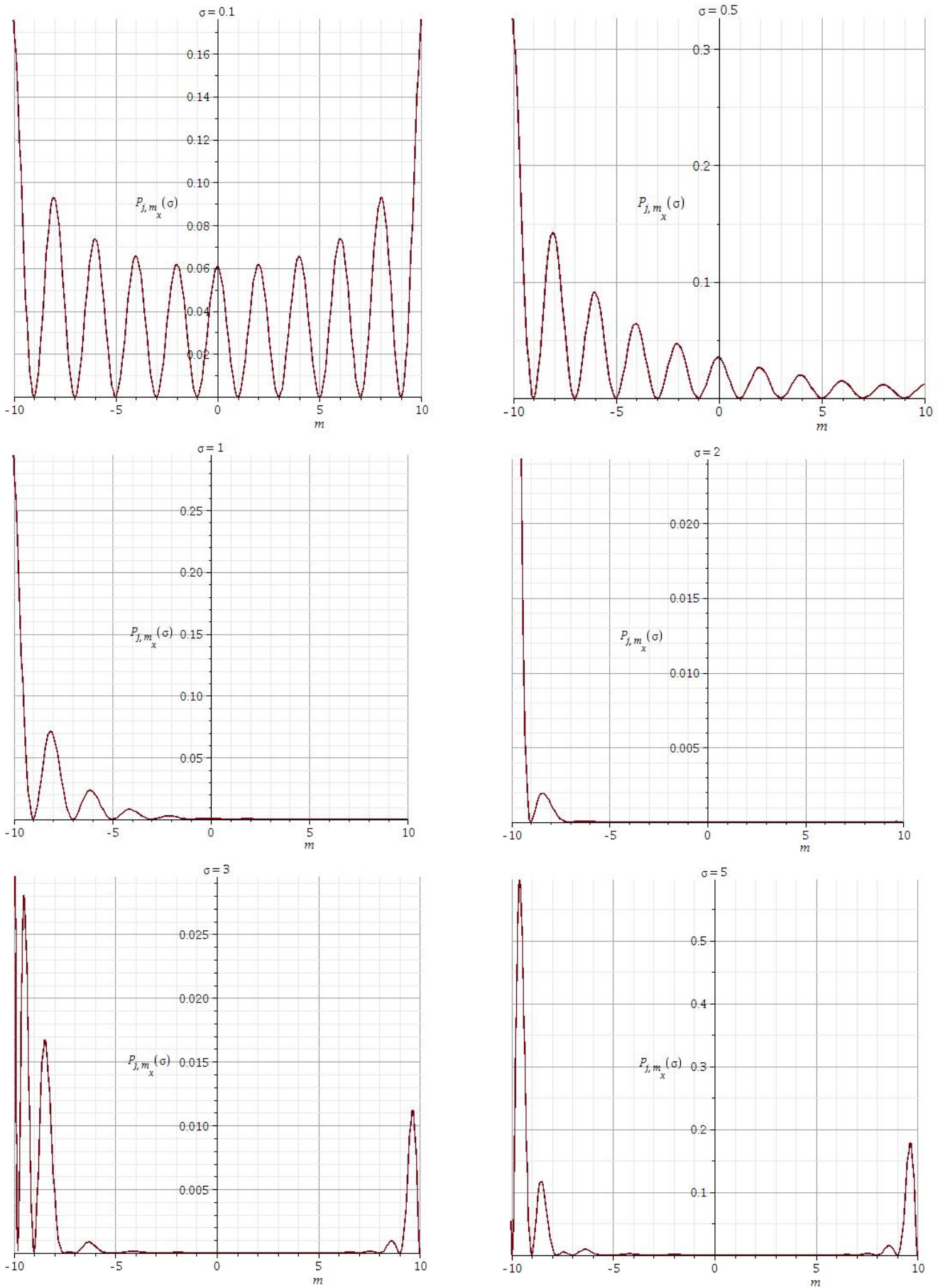
Figura 3.7: Probabilidade $P_{j,m}(\sigma)$ com $j = 10$ e $\sigma = \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, 5\}$.

Figura 3.8: Probabilidade $P_{j,m_x}(\sigma)$ com $j = 10$ e $\sigma = \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, 5\}$.



3.5 Estados *Atomic-Cat*

Similar aos estados de Yurke-Stole [86] para o oscilador harmônico, surgiram diversos estados definidos como superposições dos estados coerentes do momento angular, com diferença de fase de 180° ; são exemplos [82]

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= \frac{1}{N_1} [|z\rangle + |-z\rangle], \\
 |\psi_2\rangle &= \frac{1}{N_2} [|z\rangle - |-z\rangle], \\
 |\psi_3\rangle &= \frac{1}{N_3} [|z\rangle + i|-z\rangle], \\
 |\psi_4\rangle &= \frac{1}{N_4} [|z\rangle - i|-z\rangle];
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

com N_i sendo a normalização de cada estado $|\psi_i\rangle$. Outros como Gerry e Grobe [89] utilizaram estados da forma

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{N_+} [|z\rangle + e^{-i\pi j} |-z\rangle],$$

e

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{N_-} [|z\rangle - e^{-i\pi j} |-z\rangle]. \tag{3.58}$$

Neste trabalho consideraremos o estado *Schrödinger-Cat*, também conhecido como *Atomic-Cat*, representando-o genericamente por

$$|\psi_\alpha(z)\rangle = \frac{1}{N_\alpha} [|z\rangle + e^{i\alpha} |-z\rangle], \tag{3.59}$$

com N_α sendo a normalização do estado.

Com essa notação genérica podemos analisar os diversos tipos de estados descritos anteriormente. Tal notação também permite analisar como a paridade, definida pelo operador $P = (-1)^{J_z+j}$ [77], onde $(-1)^{J_z+j}|j, m\rangle = (-1)^{j+m}|j, m\rangle$, altera as características do estado.

Como, pela equação (3.32),

$$\begin{aligned}
\langle z | -z \rangle &= \langle -z | z \rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{(-|z|^2)^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&= \frac{(1-|z|^2)^{2j}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&= (\cos(\theta))^{2j},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

a normalização do estado $|\psi_\alpha(z)\rangle$, dado pela equação (3.59), é

$$N_\alpha = \sqrt{2 + 2\cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}}. \tag{3.61}$$

Dessa forma, também podemos escrever o estado (3.59) como

$$|\psi_\alpha(z)\rangle = \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m} + e^{i\alpha}(-z)^{j+m}}{\sqrt{2(1+|z|^2)^{2j} + 2\cos(\alpha)(1-|z|^2)^{2j}}} |j, m\rangle. \tag{3.62}$$

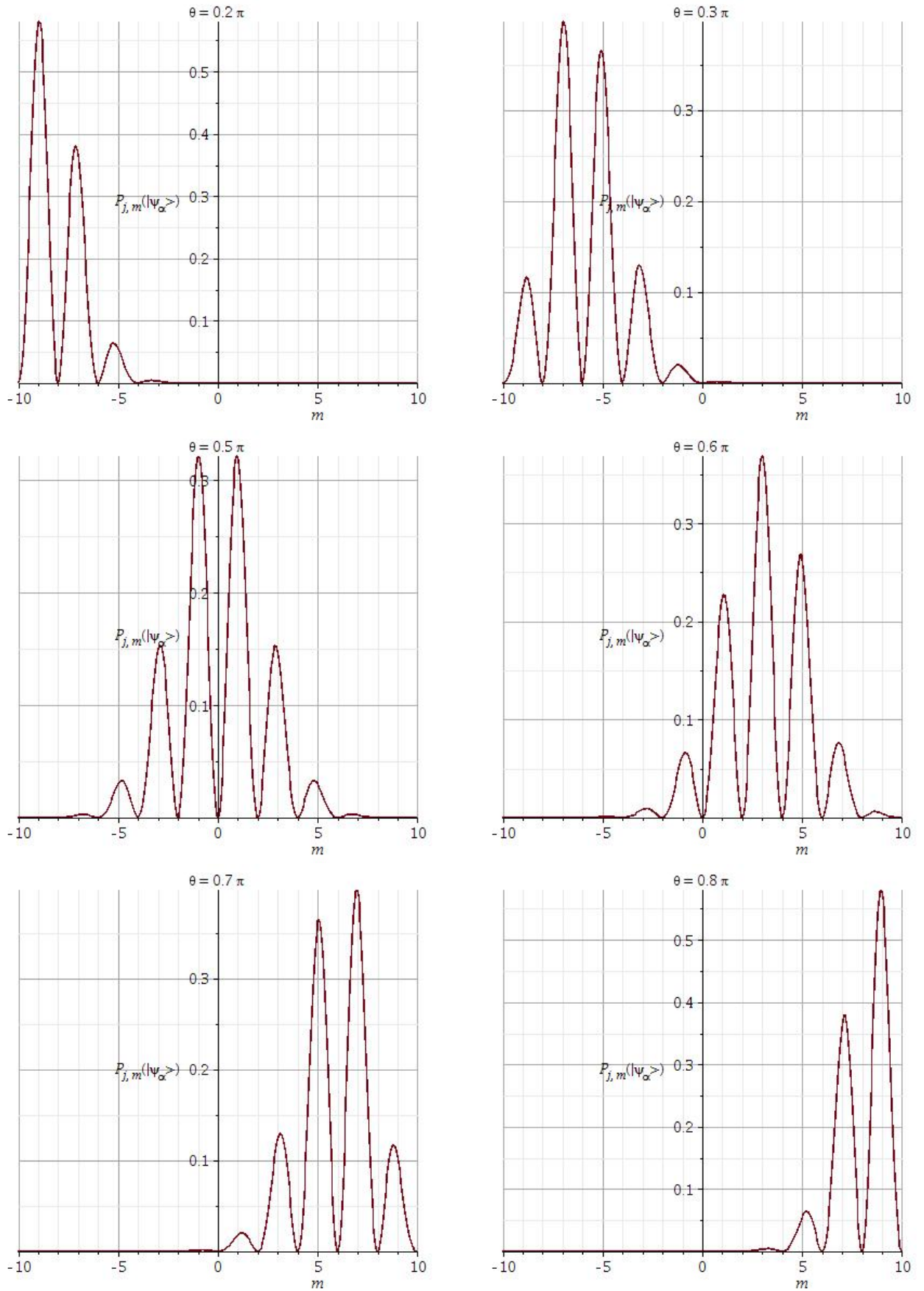
Inicialmente calcularemos a distribuição de probabilidade obtida para $|\psi_\alpha(z)\rangle$, projetando-o sobre um estado de Dicke $|j, m\rangle$; então

$$\begin{aligned}
\langle j, m | \psi_\alpha(z) \rangle &= \frac{1}{N_\alpha} [\langle j, m | z \rangle + e^{i\alpha} \langle j, m | -z \rangle] \\
&= \frac{1}{N_\alpha} \left[\sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} + e^{i\alpha} \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{(-z)^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \right] \\
&= \frac{1}{N_\alpha} \sqrt{\binom{2j}{j+m}} z^{j+m} \frac{[1 + e^{i\alpha}(-1)^{j+m}]}{(1+|z|^2)^j},
\end{aligned} \tag{3.63}$$

e, logo, a distribuição de probabilidade é

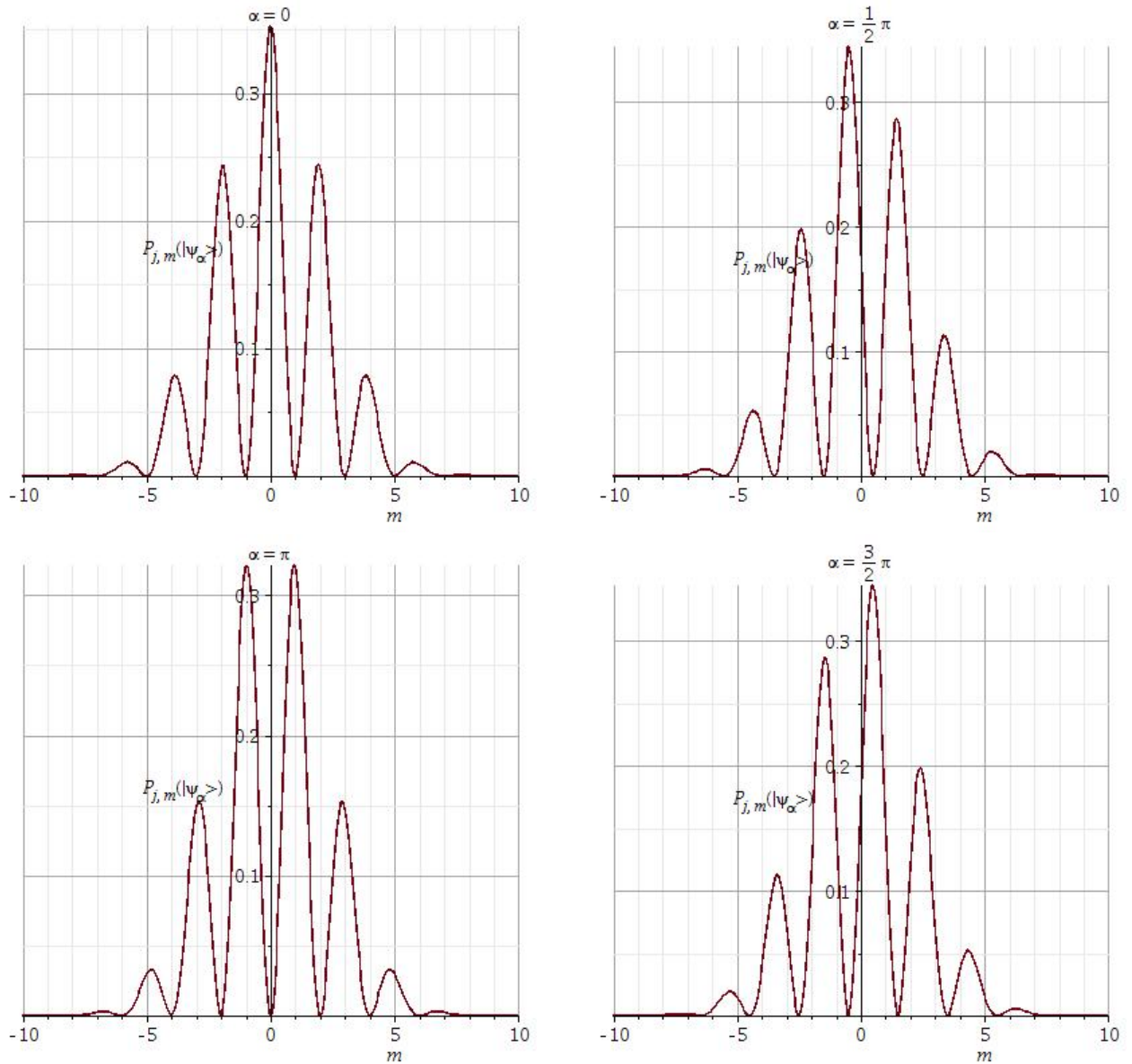
$$\begin{aligned}
P_{j,m}(|\psi_\alpha(z)\rangle) &= |\langle j, m | \psi_\alpha(z) \rangle|^2 \\
&= \binom{2j}{j+m} \frac{(\cos(\theta/2))^{2j-2m} (\sin(\theta/2))^{2j+2m}}{|2 + 2\cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}|} |1 + e^{i\alpha}(-1)^{j+m}|^2.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Figura 3.9: Probabilidade $P_{j,m}(|\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\alpha = \pi$ e para $\theta = \{0.2\pi, 0.3\pi, 0.5\pi, 0.6\pi, 0.7\pi, 0.8\pi\}$.



Os gráficos (Fig.3.9) da distribuição de probabilidade reforçam a ideia de rotação, sendo que, ao variar θ de 0 até π , obtemos um deslocamento da probabilidade de m de $-j$ até j , concordando com os resultados encontrados em [89].

Figura 3.10: Probabilidade $P_{j,m}(|\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$.



Já os gráficos (Fig.3.10) representam bem as propriedades de simetria, para $\alpha = 0$, e de antissimetria, para $\alpha = \pi$, que ocorrem quando variamos o valor de α .

Finalizando a análise desse estado, determinamos a distribuição de probabilidade considerando a direção $|j, m_x\rangle$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\alpha(z) | j, m_x \rangle &= \frac{1}{N_\alpha} \left[\langle z | j, m_x \rangle + e^{-i\alpha} \langle -z | j, m_x \rangle \right] \\
&= \frac{1}{N_\alpha} \sum_{m'=-j}^j \left[\sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} d_{m',m}^j(\frac{\pi}{2})}{(1+|z|^2)^j} \right. \\
&\quad \left. + e^{-i\alpha} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{(-z^*)^{j+m'} d_{m',m}^j(\frac{\pi}{2})}{(1+|z|^2)^j} \right] \\
&= \frac{1}{N_\alpha} \sum_{m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} (z^*)^{j+m'} d_{m',m}^j(\frac{\pi}{2}) \frac{[1 + e^{-i\alpha} (-1)^{j+m'}]}{(1+|z|^2)^j}; \quad (3.65)
\end{aligned}$$

logo, a distribuição de probabilidade é

$$\begin{aligned}
P_{j,m_x}(|\psi_\alpha(z)\rangle) &= |\langle \psi_\alpha(z) | j, m_x \rangle|^2 \\
&= \left| \frac{1}{N_\alpha} \sum_{m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} (z^*)^{j+m'} d_{m',m}^j(\frac{\pi}{2}) \frac{[1 + e^{-i\alpha} (-1)^{j+m'}]}{(1+|z|^2)^j} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2[(1+|z|^2)^{2j} + \cos(\alpha)(1-|z|^2)^{2j}]} \\
&\quad \times \left| \sum_{m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} (z^*)^{j+m'} d_{m',m}^j(\frac{\pi}{2}) [1 + e^{-i\alpha} (-1)^{j+m'}] \right|^2. \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Nos gráficos (Fig. 3.11) apresentamos alguns dos possíveis valores para o parâmetro θ , observando o comportamento da probabilidade P_{j,m_x} . Em seguida, no gráfico (Fig. 3.12), variamos os valores de α para $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ e $\{\pi, \frac{3\pi}{2}\}$ a fim de analisar as propriedades de simetria e antissimetria respectivamente. Para $\alpha = 0$ a propriedade de simetria do estado é refletida na distribuição de probabilidade, o que não ocorre para $\alpha = \frac{\pi}{2}$; já a distribuição de probabilidade para $\alpha = \pi$ é antissimétrica, oriunda da antissimetria do estado *Atomic-Cat*, enquanto que com $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ tal característica não é observada no gráfico da distribuição de probabilidade.

Portanto, percebemos que as características de simetria e antissimetria do estado $|\psi_\alpha(z)\rangle$ podem ou não ser refletidas na distribuição de probabilidade, influenciando diretamente nas suas características, a depender do valor de α .

Figura 3.11: Probabilidade $P_{j,m_x}(|\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\alpha = \pi$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e para $\theta = \{0.1\pi, 0.3\pi, 0.5\pi, 0.6\pi, 0.7\pi, 0.9\pi\}$.

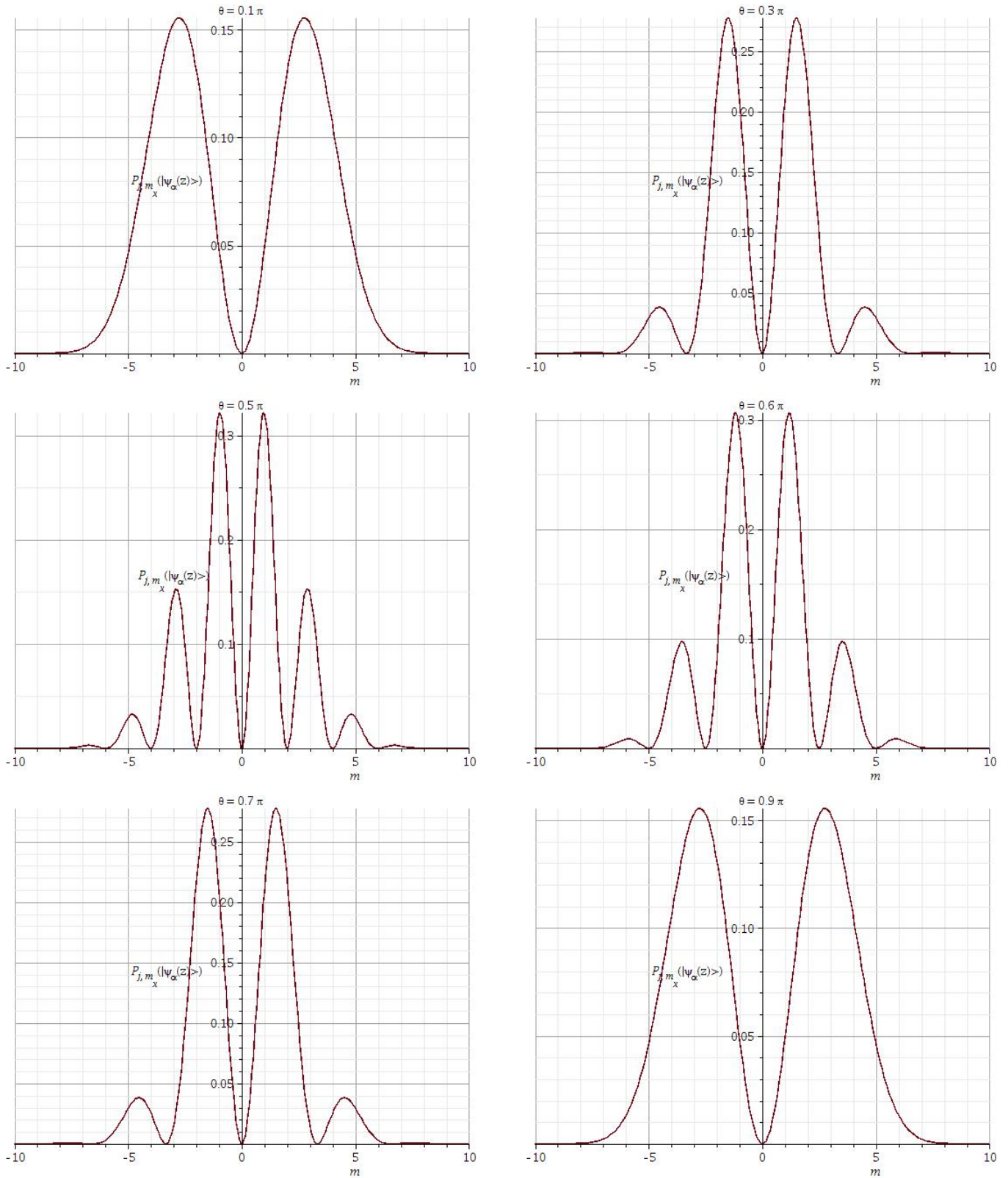
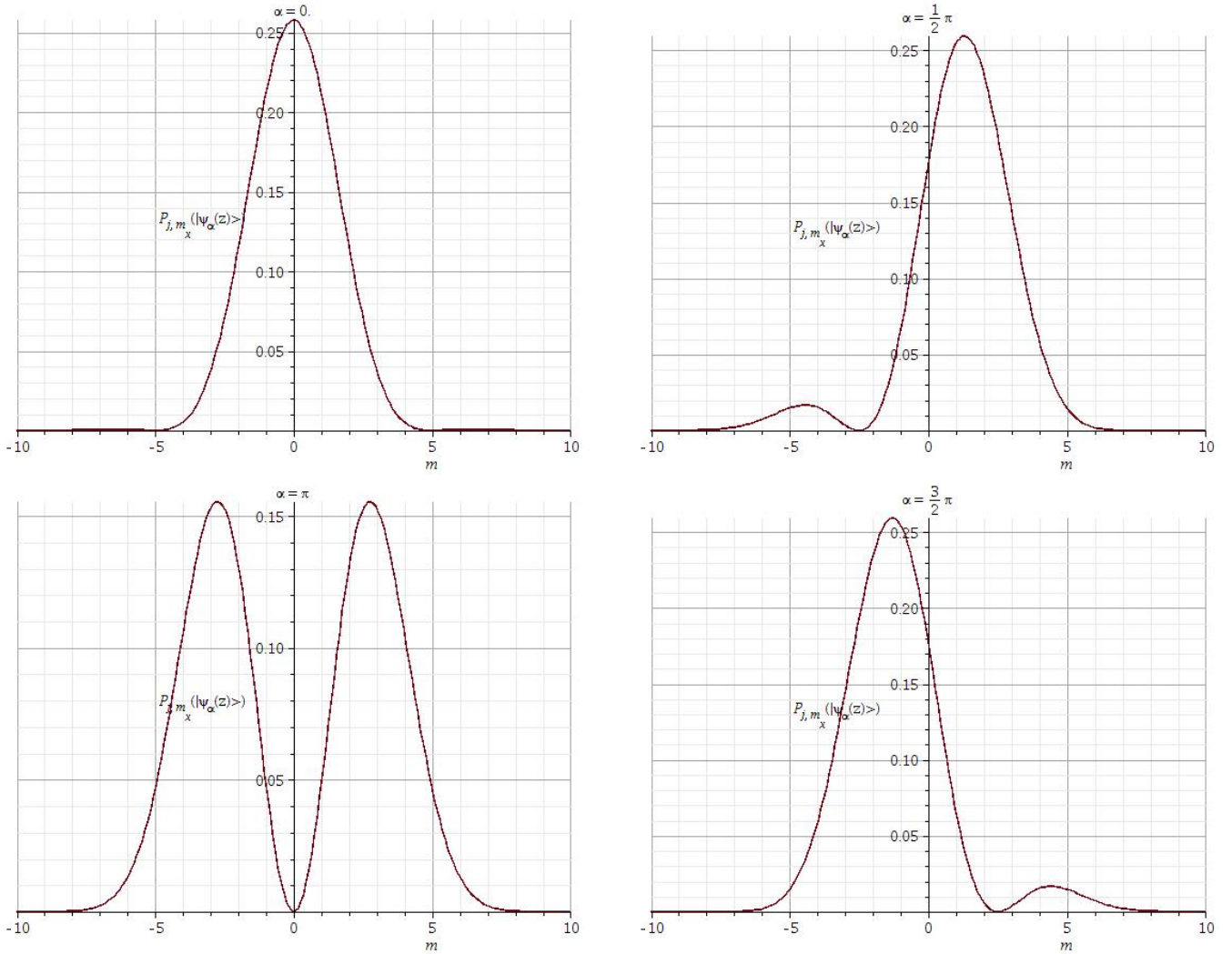


Figura 3.12: Probabilidade $P_{j,m_x}(|\psi_\alpha(z)\rangle)$ com $j = 10$, $\theta = 0.1\pi$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e para $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.



4 *Estados Comprimidos e Parâmetros de Compressão*

A compressão de um estado quântico foi analisada no caso do Oscilador Harmônico na década de 70 por Stole [45, 46], observando que alguns estados possuem, para uma dada observável, variância menor que a incerteza quântica. No contexto do momento angular, por termos uma álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, temos uma liberdade que permite várias definições para a compressão de um estado, cada uma motivada por um contexto diferente.

Em geral, uma definição para compressão é considerada adequada quando, para o estado coerente, vale 1. Mostraremos que, diferente do caso do Oscilador Harmônico, a desigualdade oriunda diretamente da relação de incerteza não vale um para o estado coerente do momento angular, não resultando num bom critério de compressão [77]. Apresentaremos os parâmetros de compressão propostos por Kitagawa e Ueda [52], Wineland [53, 54], Sorensen [55], Raghavan [56] e Tóth [58, 126]. Por fim, introduziremos alguns Hamiltonianos utilizados para gerar compressão sobre um estado.

4.1 **Relação de Incerteza**

A incerteza quântica é descrita pela desigualdade

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2, \quad (4.1)$$

válida para quaisquer dois operadores, com $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ sendo a variância do operador A .

O mínimo da incerteza ocorre quando temos a igualdade, ou seja, $(\Delta A)^2(\Delta B)^2 = \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$. Então a menor variância que os operadores podem satisfazer simultaneamente é

$$(\Delta A)^2 = (\Delta B)^2 = \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |, \quad (4.2)$$

respeitando a relação de incerteza. Portanto, a primeira ideia para introduzir o conceito de compressão de um estado é que se tenha

$$(\Delta A)^2 \leq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |, \quad (4.3)$$

para algum operador A em relação a B . A diminuição da variância da observável A representa um aumento na incerteza da observável B , mantendo a desigualdade satisfeita. Dessa forma podemos introduzir um parâmetro de compressão, o parâmetro de Heisenberg, baseado na relação de incerteza, isto é, o parâmetro de compressão para A em relação a B dado por

$$\xi_H = \frac{2(\Delta A)^2}{| \langle [A, B] \rangle |}, \quad (4.4)$$

com $\xi_H < 1$ representando a compressão do estado em relação à observável A .

4.2 Média e Variância do Estado Coerente

Considerando o estado $|j, m\rangle$ temos que

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle &= 0, & \langle J_y \rangle &= 0, & \langle J_z \rangle &= m, \\ \langle J_x^2 \rangle &= \frac{j(j+1)-m^2}{2}, & \langle J_y^2 \rangle &= \frac{j(j+1)-m^2}{2}, & \langle J_z^2 \rangle &= m^2, \\ (\Delta J_x)^2 &= \frac{j(j+1)-m^2}{2}, & (\Delta J_y)^2 &= \frac{j(j+1)-m^2}{2}, & (\Delta J_z)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A relação de incerteza fornece que

$$(\Delta J_x)^2 (\Delta J_y)^2 \geq \frac{1}{4} | \langle J_z \rangle |^2 \implies (j(j+1) - m^2)^2 \geq m^2, \quad (4.6)$$

e o parâmetro de compressão é dado por

$$\xi_H = \frac{j(j+1) - m^2}{|m|}, \quad (4.7)$$

sendo que $\xi_H \geq 1$, para qualquer valor de m .

Vamos agora analisar a média e a variância considerando o estado coerente; temos

$$\begin{aligned}
\langle J_x \rangle &= \langle z | J_x | z \rangle \\
&= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \langle j, m' | \left[\frac{J_+ + J_-}{2} \right] | j, m \rangle \\
&= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \\
&\quad \times \left[\frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}{2} \delta_{m', m+1} + \frac{\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}{2} \delta_{m, m'+1} \right] \\
&= \operatorname{Re}(z) \sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m) \\
&= \operatorname{Re}(z) \frac{2j}{1+|z|^2} \\
&= j \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi), \tag{4.8}
\end{aligned}$$

onde utilizamos $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$, que para um dado número complexo z sua parte real é $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2}$, $z = \tan(\frac{\theta}{2}) e^{-i\phi}$ e $\sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m) = \frac{2j}{1+|z|^2}$, cujo cálculo pode ser encontrado no Apêndice A. De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle J_y \rangle &= \langle z | J_y | z \rangle \\
&= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \langle j, m' | \left[\frac{J_+ - J_-}{2i} \right] | j, m \rangle \\
&= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \\
&\quad \times \left[\frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}{2i} \delta_{m', m+1} - \frac{\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}{2i} \delta_{m, m'+1} \right] \\
&= \operatorname{Im}(z) \sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m) \\
&= \operatorname{Im}(z) \frac{2j}{1+|z|^2} \\
&= j \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\langle J_z \rangle &= \langle z | J_z | z \rangle \\
&= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \langle j, m' | J_z | j, m \rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \frac{m |z|^{2j+2m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} \\
&= j \frac{(|z|^2 - 1)}{1 + |z|^2} \\
&= -j \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde utilizamos que $\sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+2m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m = \frac{j(|z|^2 - 1)}{1 + |z|^2}$, demonstrado no Apêndice A.

Para $\theta = 0$ nas equações (4.8), (4.9) e (4.10), obtemos os resultados da primeira linha da equação (4.5) com $m = -j$. Também temos

$$\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2 = j^2, \tag{4.11}$$

e definindo o vetor $\vec{J} = (\langle J_x \rangle, \langle J_y \rangle, \langle J_z \rangle)$, seu módulo é $|\vec{J}| = j$.

Calculando os segundos momentos de cada uma das componentes do operador J , obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle J_z^2 \rangle &= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \langle j, m' | J_z^2 | j, m \rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+2m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m^2 \\
&= \frac{j [j|z|^4 - 2j|z|^2 + 2|z|^2 + j]}{(1+|z|^2)^2} \\
&= \frac{j}{2} [2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1],
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde utilizamos que

$$\sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+2m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m^2 = \frac{j [j|z|^4 - 2j|z|^2 + 2|z|^2 + j]}{(1+|z|^2)^2}. \tag{4.13}$$

resultado apresentado no Apêndice A. Também temos

$$\begin{aligned}
\langle J_x^2 \rangle &= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \langle j, m' | \left[\frac{J_+ + J_-}{2} \right] \left[\frac{J_+ + J_-}{2} \right] | j, m \rangle \\
&= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m)(j+m+2)(j-m-1)}}{4} \delta_{m', m+2} + \frac{(j+m)(j-m+1)}{4} \delta_{m', m} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(j+m+1)(j-m)}{4} \delta_{m', m} + \frac{\sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)}}{4} \delta_{m'+2, m} \right\} \\
&= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m^2 \\
&\quad + \left[\frac{(z^*)^2 + z^2}{4} \right] \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m)(j-m-1) \\
&= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j [j|z|^4 - 2j|z|^2 + 2|z|^2 + j]}{2(1+|z|^2)^2} + \left[\frac{(z^*)^2 + z^2}{4} \right] \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2} \\
&= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] + \frac{j(2j-1) \operatorname{sen}^2(\theta) \cos 2\phi}{4}, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

observando que

$$\sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m)(j-m-1) = \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2}, \tag{4.15}$$

também calculada no Apêndice A.

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
\langle J_y^2 \rangle &= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \langle j, m' | \left[\frac{J_+ - J_-}{2i} \right] \left[\frac{J_+ - J_-}{2i} \right] | j, m \rangle \\
&= \sum_{m', m=-j}^j \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'} \binom{2j}{j+m}} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m)(j+m+2)(j-m-1)}}{4} \delta_{m', m+2} + \frac{(j+m)(j-m+1)}{4} \delta_{m', m} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(j+m+1)(j-m)}{4} \delta_{m', m} - \frac{\sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)}}{4} \delta_{m'+2, m} \right\} \\
&= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m^2 \\
&\quad - \left[\frac{(z^*)^2 + z^2}{4} \right] \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m)(j-m-1) \\
&= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j [j|z|^4 - 2j|z|^2 + 2|z|^2 + j]}{2(1+|z|^2)^2} - \left[\frac{(z^*)^2 + z^2}{4} \right] \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2} \\
&= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] - \frac{j(2j-1) \operatorname{sen}^2(\theta) \cos 2\phi}{4}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Analisando de forma geral os segundos momentos, resulta que:

$$\begin{aligned}
\langle z | J_x^2 | z \rangle &= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{1}{2} a_j(z) + \frac{z^2 + (z^*)^2}{4} b_j(z) \\
\langle z | J_y^2 | z \rangle &= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{1}{2} a_j(z) - \frac{z^2 + (z^*)^2}{4} b_j(z) \\
\langle z | J_z^2 | z \rangle &= a_j(z),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

com $a_j(z)$ sendo a série dada pela equação (4.13) e $b_j(z)$ a série dada pela equação (4.15). A partir das equações (4.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle z | J^2 | z \rangle &= \langle z | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | z \rangle \\
&= j(j+1).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Além disso, substituindo $\theta = 0$ nas equações (4.12), (4.14) e (4.16) retornamos à segunda linha das equações (4.5) para $m = -j$.

A variância para o estado coerente é então dada por

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x)^2 &= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] + \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4} - [j\text{sen}(\theta)\cos(\phi)]^2 \\
(\Delta J_y)^2 &= \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] - \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4} - [j\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)]^2, \\
(\Delta J_z)^2 &= \frac{j}{2} [2j\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] - [j\cos(\theta)]^2 \\
&= \frac{j\text{sen}^2(\theta)}{2},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

de onde se obtém que

$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 = j. \tag{4.20}$$

Analisando as equações (4.8) e (4.14), (4.9) e (4.16), (4.10) e (4.12), também podemos escrever a variância em termos da variável z

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x)^2 &= \frac{j}{2} \frac{|z|^4 - z^2 - (z^*)^2 + 1}{(1 + |z|^2)^2}, \\
(\Delta J_y)^2 &= \frac{j}{2} \frac{|z|^4 + z^2 + (z^*)^2 + 1}{(1 + |z|^2)^2}, \\
(\Delta J_z)^2 &= \frac{2j|z|^2}{(1 + |z|^2)^2}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Uma outra forma interessante de se escrever a variância do estado coerente é explicitando-a em termos das médias, i.e.

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x)^2 &= \frac{1}{2j} \left[j^2 \frac{|z|^4 - 2|z|^2 + 1}{(1 + |z|^2)^2} + j^2 \frac{-z^2 - (z^*)^2 + 2|z|^2}{(1 + |z|^2)^2} \right] \\
&= \frac{\langle J_y \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2}{2j},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta J_y)^2 &= \frac{1}{2j} \left[j^2 \frac{|z|^4 - 2|z|^2 + 1}{(1 + |z|^2)^2} + j^2 \frac{z^2 + (z^*)^2 + 2|z|^2}{(1 + |z|^2)^2} \right] \\
&= \frac{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2}{2j},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta J_z)^2 &= \frac{1}{2j} \left[j^2 \frac{z^2 + (z^*)^2 + 2|z|^2}{(1+|z|^2)^2} + j^2 \frac{-z^2 - (z^*)^2 + 2|z|^2}{(1+|z|^2)^2} \right] \\
&= \frac{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}{2j},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

onde se nota que, de modo geral, temos

$$(\Delta J_l)^2 = \frac{\langle J_m \rangle^2 + \langle J_n \rangle^2}{2j}, \quad (\text{ordem cíclica}). \tag{4.25}$$

Para finalizar essa seção, iremos analisar o parâmetro de compressão ξ_H para os pares de observáveis J_i, J_k ($i, k = x, y, z$). Temos:

$$\begin{aligned}
\xi_H(J_z, J_y) &= \frac{2(\Delta J_z)^2}{|\langle [J_z, J_y] \rangle|} \\
&= \frac{2j \text{sen}^2(\theta)}{2j \text{sen}(\theta) \text{cos}(\phi)} \\
&= \left| \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\phi)} \right|,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

coincidindo com o resultado das referências [52, 77]. Temos também

$$\begin{aligned}
\xi_H(J_z, J_x) &= \frac{2(\Delta J_z)^2}{|\langle [J_z, J_x] \rangle|} \\
&= \frac{2j \text{sen}^2(\theta)}{2j \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi)} \\
&= \left| \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\phi)} \right|.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Para os outros operadores, obtemos:

$$\begin{aligned}
\xi_H(J_x, J_y) &= \frac{2(\Delta J_x)^2}{|\langle [J_x, J_y] \rangle|} \\
&= \frac{\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j \text{cos}^2(\theta) - \text{cos}^2(\theta) + 1] + \frac{j(2j-1) \text{sen}^2(\theta) \text{cos} 2\phi}{4} - j^2 \text{sen}^2(\theta) \text{cos}^2(\phi)}{j \text{cos}(\theta)},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\xi_H(J_x, J_z) &= \frac{2(\Delta J_x)^2}{|\langle [J_x, J_z] \rangle|} \\
&= \frac{\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] + \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4} - j^2\text{sen}^2(\theta)\cos^2(\phi)}{j\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\xi_H(J_y, J_x) &= \frac{2(\Delta J_y)^2}{|\langle [J_y, J_x] \rangle|} \\
&= \frac{\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] - \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4} - j^2\text{sen}^2(\theta)\text{sen}^2(\phi)}{j\cos(\theta)},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\xi_H(J_y, J_z) &= \frac{2(\Delta J_y)^2}{|\langle [J_y, J_z] \rangle|} \\
&= \frac{\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] - \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4} - j^2\text{sen}^2(\theta)\text{sen}^2(\phi)}{j\text{sen}(\theta)\cos(\phi)}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Como os estados coerentes estão no limite da incerteza, era esperado que o parâmetro de compressão resultasse em 1, o que não ocorre. Isso mostra que o parâmetro de Heisenberg, ξ_H , apesar de ser bem intuitivo, não é a melhor opção para definirmos a compressão neste contexto.

Podemos generalizar o parâmetro dado pela equação (4.4) usando a expressão [77]

$$\xi_{H'}(J_l) = \frac{2(\Delta J_l)^2}{\sqrt{\langle J_m \rangle^2 + \langle J_n \rangle^2}}, \tag{4.32}$$

com l, m, n representando três direções possíveis. Então, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\xi_{H'}(J_z) &= \frac{2(\Delta J_z)^2}{\sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}} \\
&= 2 \frac{j\text{sen}^2(\theta)}{2\sqrt{j^2\text{sen}^2(\theta)\cos^2(\phi) + j^2\text{sen}^2(\theta)\text{sen}^2(\phi)}} \\
&= |\text{sen}(\theta)|,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

ainda não resultando em 1 para todos os valores de θ e ϕ .

4.3 Parâmetro de Compressão de Kitagawa e Ueda

Na literatura existem diversos parâmetros de compressão, cada um deles motivado por diferentes situações [77]. Uma importante definição foi proposta por Kitagawa e Ueda [52] utilizando o conceito de Direção Média de Spin (MSD¹), definido por

$$\hat{n}_0 = \frac{\langle \vec{J} \rangle}{|\langle \vec{J} \rangle|}. \quad (4.34)$$

Denotando \hat{n}_\perp uma direção ortogonal à MSD, foi demonstrado em [77] que para um Estado Coerente do Momento Angular tem-se $(\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2 = \frac{j}{2}$. Definindo o parâmetro de compressão por

$$\xi_S = \frac{\min(\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2}{j/2}, \quad (4.35)$$

obtemos um parâmetro que para o estado coerente resulta em 1. Dizemos então que um estado é comprimido, segundo Kitagawa e Ueda, se $\xi_S < 1$.

A partir das equações (4.8), (4.9), (4.10) temos que o MSD é

$$\hat{n}_0 = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), -\cos(\theta)), \quad (4.36)$$

com os vetores ortogonais, \hat{n}_\perp , dados por

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 &= (-\text{sen}(\phi), \cos(\phi), 0), \\ \hat{n}_2 &= (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\text{sen}(\phi), \text{sen}(\theta)). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para obter o mínimo da variância de $J_{\hat{n}_\perp} = \vec{J} \cdot \hat{n}_\perp$, começamos analisando as direções ortogonais

$$\begin{aligned} \hat{n}_\perp &= \hat{n}_1 O^T \\ &= \hat{n}_1 \cos(\varphi) + \hat{n}_2 \text{sen}(\varphi), \end{aligned} \quad (4.38)$$

¹A sigla é referente ao nome em inglês *Mean Spin Direction*.

onde O^T é o operador associado à rotação de φ no plano $\hat{n}_1\hat{n}_2$.

Como

$$\begin{aligned}
 \langle J_{\hat{n}_1} \rangle &= \langle \vec{J} \cdot \hat{n}_1 \rangle \\
 &= -\text{sen}(\phi) \langle J_x \rangle + \text{cos}(\phi) \langle J_y \rangle \\
 &= -\text{sen}(\phi) [j \text{sen}(\theta) \text{cos}(\phi)] + \text{cos}(\phi) [j \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi)] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle J_{\hat{n}_2} \rangle &= \langle \vec{J} \cdot \hat{n}_2 \rangle \\
 &= \text{cos}(\theta) \text{cos}(\phi) \langle J_x \rangle + \text{cos}(\theta) \text{sen}(\phi) \langle J_y \rangle + \text{sen}(\theta) \langle J_z \rangle \\
 &= \text{cos}(\theta) \text{cos}(\phi) [j \text{sen}(\theta) \text{cos}(\phi)] + \text{cos}(\theta) \text{sen}(\phi) [j \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi)] + \text{sen}(\theta) [-j \text{cos}(\theta)] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

então a variância de $J_{\hat{n}_\perp}$ só depende do segundo momento, cuja solução pode ser encontrada utilizando a notação matricial e calculando o menor autovalor.

$$\begin{aligned}
 (\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2 &= \langle [\vec{J} \cdot \hat{n}_1 \text{cos}(\varphi) + \vec{J} \cdot \hat{n}_2 \text{sen}(\varphi)]^2 \rangle \\
 &= \langle \vec{J}_{\hat{n}_1}^2 \rangle \text{cos}^2(\varphi) + \text{cos}(\varphi) \text{sen}(\varphi) [\langle \vec{J}_{\hat{n}_1} \vec{J}_{\hat{n}_2} \rangle + \langle \vec{J}_{\hat{n}_2} \vec{J}_{\hat{n}_1} \rangle] + \langle \vec{J}_{\hat{n}_2}^2 \rangle \text{sen}^2(\varphi) \\
 &= \begin{pmatrix} \text{cos}(\varphi) & \text{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \vec{J}_{\hat{n}_1}^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle [\vec{J}_{\hat{n}_1}, \vec{J}_{\hat{n}_2}]_+ \rangle \\ \frac{1}{2} \langle [\vec{J}_{\hat{n}_1}, \vec{J}_{\hat{n}_2}]_+ \rangle & \langle \vec{J}_{\hat{n}_2}^2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cos}(\varphi) \\ \text{sen}(\varphi) \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} \text{cos}(\varphi) & \text{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \vec{J}_{\hat{n}_1}^2 \rangle & \text{Cov}(J_{\hat{n}_1}, J_{\hat{n}_2}) \\ \text{Cov}(J_{\hat{n}_1}, J_{\hat{n}_2}) & \langle \vec{J}_{\hat{n}_2}^2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cos}(\varphi) \\ \text{sen}(\varphi) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

onde $[\cdot]_+$ representa o anticomutador e $\text{Cov}(J_{n_1}, J_{n_2})$ é definido como

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(J_{\hat{n}_1}, J_{\hat{n}_2}) &= \frac{1}{2} \langle [\vec{J}_{\hat{n}_1}, \vec{J}_{\hat{n}_2}]_+ \rangle - \langle \vec{J}_{\hat{n}_1} \rangle \langle \vec{J}_{\hat{n}_2} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \langle [\vec{J}_{\hat{n}_1}, \vec{J}_{\hat{n}_2}]_+ \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Os autovalores da matriz definida na equação (4.41) são

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\langle J_{\hat{n}_1}^2 + J_{\hat{n}_2}^2 \rangle \pm \sqrt{(\langle J_{\hat{n}_1}^2 - J_{\hat{n}_2}^2 \rangle)^2 + 4Cov(J_{\hat{n}_1}, J_{\hat{n}_2})^2} \right]. \quad (4.43)$$

Logo, o parâmetro de compressão de Kitagawa e Ueda pode ser escrito em termos do menor autovalor descrito pela equação (4.43), ou seja,

$$\xi_S = \frac{2\lambda_-}{j}. \quad (4.44)$$

4.4 Parâmetro de Compressão Definido por Wineland

Um outro parâmetro de compressão foi proposto por Wineland [53, 54] a partir de estudos sobre espectroscopia Ramsey e que denotaremos por ξ_R . Ao analisarmos um estado $|\psi\rangle$ com MSD na direção z , temos que $\langle z|J_x|z\rangle = \langle z|J_y|z\rangle = 0$. Se aplicarmos uma rotação de ângulo ϕ em torno do eixo x obtemos

$$\begin{aligned} J_y^{out} &= e^{i\phi J_x} J_y e^{-i\phi J_x} \\ &= \cos(\phi) J_y - \sin(\phi) J_z, \end{aligned} \quad (4.45)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \langle J_y^{out} \rangle &= -\sin(\phi) \langle J_z \rangle, \\ (\Delta J_y^{out})^2 &= \cos^2(\phi) (\Delta J_y)^2 + \sin^2(\phi) (\Delta J_z)^2 - \frac{1}{2} \sin(\phi) \langle [J_y, J_z]_+ \rangle. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A partir da fórmula de propagação de erros $\Delta f(x) = \Delta x \left| \frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial x} \right|$, temos

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\Delta J_y^{out}}{\left| \frac{\partial \langle J_y^{out} \rangle}{\partial \phi} \right|} \\ &= \frac{\Delta J_y^{out}}{|\cos(\phi) \langle J_z \rangle|}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para $\phi \sim 0$ temos que $\cos(\phi) \sim 1$, $\sin(\phi) \sim 0$ e que $(\Delta J_y^{out})^2 \sim (\Delta J_y)^2$. Nessa aproxima-

ção podemos reescrever a (4.47) na forma

$$\Delta\phi = \frac{\Delta J_y}{|\langle J_z \rangle|}, \quad (4.48)$$

o que permite conhecer a sensibilidade² da fase ϕ conhecendo a variância e a média. Para o caso geral, onde o MSD não está na direção z , obtemos

$$\Delta\phi = \frac{\Delta J_{\hat{n}_\perp}}{|\langle \vec{J} \rangle|}. \quad (4.49)$$

O parâmetro de compressão, ξ_R , proposto por Wineland, é a razão do quadrado da sensibilidade da fase do estado pela sensibilidade do estado coerente³, denotada por $(\Delta\phi)_{CSS}^2$, que é igual a $2j$

$$\begin{aligned} \xi_R &= \frac{(\Delta\phi)^2}{(\Delta\phi)_{CSS}^2} \\ &= 2j \frac{(\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2}{|\langle \vec{J} \rangle|^2}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Comparando as equações (4.50) e (4.35), podemos obter uma relação entre os parâmetros de compressão ξ_S e ξ_R . Pela definição (4.35) temos que para $\xi_S = 1$, ocorre que $\min(\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2 = \frac{j}{2}$ e pela equação (4.50), para $\xi_R = 1$, temos que $\frac{(\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2}{|\langle \vec{J} \rangle|^2} = \frac{1}{2j}$. Logo

$$\min\left(\frac{|\langle \vec{J} \rangle|^2}{j}\right) = j, \quad (4.51)$$

sendo que $|\langle \vec{J} \rangle| \leq j$, o que implica que $\xi_S \leq \xi_R$, onde a compressão ocorre sempre que o parâmetro de compressão é menor do que 1. A igualdade entre os parâmetros é obtida quando $|\langle \vec{J} \rangle| = j$, resultando em geral, na relação [77]

$$\xi_S = \left(\frac{|\langle \vec{J} \rangle|}{j}\right)^2 \xi_R. \quad (4.52)$$

²por sensibilidade de fase entende-se como o erro na estimação da fase ϕ .

³a sensibilidade de fase do estado coerente é o erro ao estimar a fase do estado coerente.

Na referência [53] foi proposto um outro parâmetro de compressão, baseado na relação de incerteza de Heisenberg para direções quaisquer

$$(\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2 (\Delta J_{\hat{n}'_\perp})^2 \geq \frac{1}{4} |\langle J_{\hat{n}} \rangle|^2, \quad (4.53)$$

com $\hat{n} \perp \hat{n}_\perp$ e $\hat{n} \perp \hat{n}'_\perp$, resultando em

$$\xi_{H''} = \frac{2(\Delta J_{\hat{n}_\perp})^2}{|\langle \vec{J}_{\hat{n}} \rangle|}. \quad (4.54)$$

O parâmetro de compressão tem valor $\xi_{H''} = 1$ para o estado coerente dado em [77], sendo então apropriado para indicar a compressão de um tal estado. Comparando a equação (4.35) com a equação (4.54) podemos obter uma relação entre os parâmetros, ou seja,

$$\xi_S = \frac{|\langle \vec{J} \rangle|}{j} \xi_{H''}. \quad (4.55)$$

Os parâmetros ξ_S , $\xi_{H''}$ e ξ_R são bons indicadores de compressão, satisfazendo uma relação de desigualdade [77]

$$\xi_S \leq \xi_{H''} \leq \xi_R, \quad (4.56)$$

já que $|\langle \vec{J} \rangle| \leq j$.

4.5 Outros Critérios de Compressão

Como já citamos, na literatura existem diversos critérios de compressão baseados em diferentes situações. Grande parte deles está associada a uma coleção de N sistemas com $j = \frac{1}{2}$, onde o momento angular total j é encontrado a partir da composição de N sistemas, resultando em $j = \frac{N}{2}$.

Sorensen [55] propôs um parâmetro de compressão, que denotaremos por $\xi_{R'}$ devido à proximidade com o parâmetro ξ_R , dado por

$$\xi_{R'} = N \frac{(\Delta J_{\hat{n}_1})^2}{\langle J_{\hat{n}_2} \rangle^2 + \langle J_{\hat{n}_3} \rangle^2}, \quad (4.57)$$

com \hat{n}_1 , \hat{n}_2 e \hat{n}_3 sendo três direções ortogonais.

Podemos considerar o parâmetro $\xi_{R'}$ como uma generalização do parâmetro proposto por Wineland ξ_R . Comparando o parâmetro $\xi_{R'}$ com a equação (4.25), percebemos que para o estado coerente o parâmetro de Sorensen vale 1, tomando $N = 2j$.

O parâmetro $\xi_{R'}$, além de indicar compressão, é também um critério de emaranhamento para sistema multipartite; com efeito, foi provado em [55] que, para um conjunto de partículas com $j = \frac{1}{2}$, se $\xi_{R'} < 1$ então o sistema é emaranhado. Apesar de não ser uma condição suficiente, ou seja, podemos ter estados emaranhados que não estejam comprimidos, este foi o primeiro critério a evidenciar a relação entre compressão e emaranhamento [127].

Outro parâmetro foi proposto por Rghavan [56], definido por

$$\xi_D = N \frac{(\Delta J_{\hat{n}})^2}{\frac{N^2}{4} - \langle J_{\hat{n}} \rangle^2}, \quad (4.58)$$

que surgiu com a análise dos estados de Dicke $|j, m\rangle$ realizados com condensado de Bose-Einstein.

O parâmetro ξ_D é capaz de detectar emaranhamento sobre os estados de Dicke, ou seja, se $\xi_D < 1$ o estado está comprimido na direção \hat{n} e, se o estado for de Dicke, além da compressão teremos também o emaranhamento.

Tóth *et al.* [126] desenvolveram um conjunto de desigualdades envolvendo somente as médias e os segundos momentos, ou equivalentemente as médias e as variâncias, capaz de detectar emaranhamento. Uma dessas desigualdades é dada por

$$(N-1)(\Delta J_{\hat{n}_1})^2 \geq \langle J_{\hat{n}_2}^2 \rangle + \langle J_{\hat{n}_3}^2 \rangle - \frac{N}{2}. \quad (4.59)$$

Reescrevendo a equação (4.59) como

$$N(\Delta J_{\hat{n}_1})^2 \geq \langle J^2 \rangle - \langle J_{\hat{n}_1} \rangle^2 - \frac{N}{2}, \quad (4.60)$$

obtem-se então mais um parâmetro de compressão

$$\xi_E = \frac{N(\Delta J_{\hat{n}_1})^2}{\langle J^2 \rangle - \langle J_{\hat{n}_1} \rangle^2 - \frac{N}{2}}, \quad (4.61)$$

também relacionado com o emaranhamento.

Por fim, por completeza, citamos outros parâmetros propostos por Tóth em [128], que se mantêm inalterados mesmo com os trabalhos mais atuais [58, 129],

$$\xi_T = \frac{(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2}{Nj}, \quad (4.62)$$

$$\xi_{T'} = \frac{Nj(Nj+1)}{\langle J_x^2 \rangle + \langle J_y^2 \rangle + \langle J_z^2 \rangle}, \quad (4.63)$$

sendo válidos para qualquer valor de j . Estes parâmetros também são relacionados ao emaranhamento, ou seja, $\xi_T < 1$ ou $\xi_{T'} < 1$ indica que o estado é emaranhado.

4.6 Desigualdades para Valores Arbitrários de j

Na seção anterior expressamos diversos parâmetros de compressão, cada um deles importante num certo contexto. Também de importância são as desigualdades propostas por Tóth [57, 126, 127]

$$\begin{aligned} \langle J_x^2 \rangle + \langle J_y^2 \rangle + \langle J_z^2 \rangle &\leq \frac{N(N+2)}{4}, \\ (\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 &\geq \frac{N}{2} \\ \langle J_k^2 \rangle + \langle J_l^2 \rangle - \frac{N}{2} &\leq (N-1)(\Delta J_m)^2 \\ (N-1) [(\Delta J_k)^2 + (\Delta J_l)^2] &\geq \langle J_m^2 \rangle + \frac{N(N-2)}{4}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde k, l, m são todas as possíveis permutações de x, y, z .

Essas desigualdades formam um conjunto completo⁴; a violação de qualquer uma das quatro equações indica emaranhamento [57]. Esses critérios, apesar de muito importantes, são

⁴As desigualdades formam um conjunto completo no sentido que, conhecendo somente as médias e os segundos momentos, ou equivalentemente as médias e as variâncias, nenhuma outra equação precisa ser introduzida.

válidos somente para uma coleção de N subsistemas com $j = \frac{1}{2}$, o que limita a aplicação.

Nos recentes trabalhos [58, 129], as desigualdades (4.64) foram generalizadas para um sistema com j arbitrário. Os autores perceberam que para estender as desigualdades, seria necessário modificar a definição do segundo momento e, conseqüentemente, a definição de variância. Seja um *ensemble* de N partículas com momento angular total j , temos

$$J_l = \sum_{n=1}^N j_l^{(n)}, \quad (4.65)$$

para $l = x, y, z$ e $j_l^{(n)}$ a componente l do momento angular da n^{th} partícula. Definindo o segundo momento e a variância como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}_l^2 \rangle &= \langle J_l^2 \rangle - \langle \sum_n (j_l^{(n)})^2 \rangle \\ &= \langle \sum_{n \neq m} j_l^{(n)} j_l^{(m)} \rangle, \\ (\tilde{\Delta} J_l)^2 &= \langle \tilde{J}_l^2 \rangle - \langle J_l \rangle^2 \\ &= (\Delta J_k)^2 - \langle \sum_n (j_l^{(n)})^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.66)$$

as desigualdades (4.64) podem ser estendidas para $j > \frac{1}{2}$, resultando em

$$\begin{aligned} \langle J_x^2 \rangle + \langle J_y^2 \rangle + \langle J_z^2 \rangle &\leq Nj(Nj+1), \\ (\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 &\geq Nj \\ \langle \tilde{J}_k^2 \rangle + \langle \tilde{J}_l^2 \rangle - N(N-1)j^2 &\leq (N-1)(\tilde{\Delta} J_m)^2 \\ (N-1) [(\tilde{\Delta} J_k)^2 + (\tilde{\Delta} J_l)^2] &\geq \langle \tilde{J}_m^2 \rangle - N(N-1)j^2. \end{aligned} \quad (4.67)$$

De modo geral, Vitaglino *et al* [58] mostraram que

$$(N-1) \sum_{l \in I} (\tilde{\Delta} J_l)^2 - \sum_{l \notin I} \langle J_l^2 \rangle \geq -N(N-1)j^2, \quad (4.68)$$

onde I é um subconjunto do conjunto $\{x, y, z\}$.

A partir desses resultados diversos parâmetros podem ser generalizados para um valor ar-

bitrário de j . Como exemplo podemos citar o parâmetro $\xi_{R',j}$ [58] generalizado para $j > \frac{1}{2}$ como

$$\xi_{R',j} = N \frac{(\widetilde{\Delta} J_x)^2 + N j^2}{\langle J_y \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2}, \quad (4.69)$$

e que resulta num parâmetro capaz de detectar emaranhamento em sistemas com N partículas e com valor de momento angular total arbitrário.

4.7 Operadores de Compressão

A compressão de um estado do momento angular pode ser gerada a partir da atuação de um Hamiltoniano não linear, similar ao que ocorre no caso do oscilador harmônico [77]. De modo geral, podemos dividir os Hamiltonianos em duas classes: um eixo de torção (OAT⁵) ou dois eixos de torção (TAT⁶).

A geração de estados comprimidos do momento angular [52] é implementada em Condensados de Bose-Einstein [55, 69–71] e, recentemente, utilizando ressonância magnética nuclear [72, 73].

O operador de compressão é definido como $U = e^{-i\tau H}$, sendo τ o tempo. Assim, a ação do Hamiltoniano sobre um estado por um determinado tempo irá gerar uma determinada compressão. Diversos Hamiltonianos são usados para gerar compressão sobre um estado quântico; citamos aqui alguns deles.

- Compressão em um Eixo.

O sistema evoluindo sob a ação do Hamiltoniano [52] não linear

$$H_{OAT} = \chi J_x^2, \quad (4.70)$$

com constante de acoplamento χ . Este é o Hamiltoniano mais comum na geração de estados comprimidos.

- Compressão num Eixo na presença de um Campo Transverso.

Law, Ng e Lueng, na referência [130], observaram que a compressão é mais eficiente na presença de um campo transverso controlado por um parâmetro B e propuseram

⁵Sigla vem do inglês, *One Axis Twisting*.

⁶Sigla vem do inglês, *Two Axis Twisting*.

$$H = \chi J_x^2 + B J_z. \quad (4.71)$$

O modelo, apesar de não possuir solução analítica para j arbitrário, tem resultados indicando que a presença do campo externo implica num aprimoramento dos graus de compressão por um maior período de tempo.

- Compressão de um Eixo no Condensado Bose-Einstein.

O Condensado Bose-Einstein tem sido extensivamente utilizado para a realização, geração e análise de estados comprimidos [131–135], podendo ser modelado pelo Hamiltoniano de Bose-Hubbard [80]

$$H_{BH} = \epsilon J_z + \chi J_z^2 - K J_x, \quad (4.72)$$

que tem como boa aproximação para o estado fundamental o estado Gaussiano [81].

- Compressão em dois Eixos.

A compressão em dois eixos permite alcançar um maior grau de compressão sobre o estado, apesar de não possuir solução analítica para j arbitrário. O seu Hamiltoniano foi proposto por Kitagawa e Ueda [52] e tem como expressão

$$\begin{aligned} H_{TAT} &= \chi (J_x J_y + J_y J_x) \\ &= \chi (J_+^2 - J_-^2), \end{aligned} \quad (4.73)$$

com χ regulando a compressão, tendo sido implementado por Jafarpour e Akhound [136].

5 *Álgebras de Lie e o Estado Coerente Termalizado Generalizado*

Seguindo a construção de Perelomov [29,30] e Gilmore [31] do Estado Coerente de uma álgebra de Lie arbitrária, introduziremos a versão térmica desta construção a partir do formalismo da DCT [92,98,100]. Ao duplicarmos a álgebra de Lie do sistema e aplicando a transformação de Bogoliubov, somos capazes de obter o Estado Coerente Térmico para uma álgebra de Lie arbitrária. Essa construção evidencia a compatibilidade da DCT com a construção de Estados Coerentes. Como exemplo analisamos o caso $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{su}(1,1)$.

5.1 **Formulação para uma Álgebra de Lie Arbitrária**

Dado um sistema físico descrito pelo Hamiltoniano H , cuja simetria é caracterizada pelo Grupo de Lie G , associada à álgebra de Lie \mathfrak{g} , Perelomov [29] e Gilmore [31] independentemente obtiveram um procedimento capaz de construir um estado coerente a partir da Teoria de Grupos. Uma revisão sobre Grupos e Álgebras de Lie pode ser encontrada no Apêndice B.

O processo consiste em, a partir de um estado de referência $|\psi_0\rangle$ pertencente a um espaço de Hilbert \mathcal{H} , determinar o subgrupo de isotropia máximo H , isto é,

$$h|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle e^{i\phi(h)}, \quad h \in H \subset G \quad (5.1)$$

sendo maximal com essa propriedade. Em seguida efetuamos o quociente G/H , resultando que qualquer elemento pode ser escrito da forma

$$g = \Omega h, \quad g \in G, \quad h \in H, \quad \Omega \in G/H. \quad (5.2)$$

A ação de um elemento arbitrário g no estado de referência¹ será

¹a rigor, g e h são representações dos elementos de um grupo em \mathcal{H} .

$$\begin{aligned}
g|\psi_0\rangle &= \Omega h|\psi_0\rangle \\
&= \Omega|\psi_0\rangle e^{i\phi(h)};
\end{aligned} \tag{5.3}$$

o estado $|\Lambda, \Omega\rangle = \Omega|\psi_0\rangle$ é denominado de Estado Coerente, segundo a construção de Perelomov [30] e Gilmore [31].

Para introduzir os efeitos térmicos utilizaremos o formalismo da DCT, cujo primeiro passo consiste na duplicação do grupo de Lie obtendo \tilde{G} , cuja álgebra de Lie será $\tilde{\mathfrak{g}}$. Seja $\Pi(g)$ uma representação irredutível de g , então também teremos $\tilde{\Pi}(\tilde{g})$ a representação duplicada, agindo nos espaços de Hilbert \mathcal{H} e $\tilde{\mathcal{H}}$, respectivamente.

Seja $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ e $|\tilde{\psi}_0\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}$ estados com os respectivos subgrupos de Isotropia $H = \{h\}$ e $\tilde{H} = \{\tilde{h}\}$ de G e \tilde{G} , respectivamente. As propriedades do subgrupo de Isotropia são passadas para a suas representações, resultando que

$$\Pi(h)|\psi_0\rangle = \exp[i\phi(h)]|\psi_0\rangle, \quad \tilde{\Pi}(\tilde{h})|\tilde{\psi}_0\rangle = \exp[i\tilde{\phi}(\tilde{h})]|\tilde{\psi}_0\rangle. \tag{5.4}$$

Para todo elemento $g \in G$ e $\tilde{g} \in \tilde{G}$, podemos obter uma decomposição única na forma

$$\begin{aligned}
g &= \Omega h, & g \in G, h \in H, \Omega \in G/H \\
\tilde{g} &= \tilde{\Omega} \tilde{h}, & \tilde{g} \in \tilde{G}, \tilde{h} \in \tilde{H}, \tilde{\Omega} \in \tilde{G}/\tilde{H}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Portanto, a ação de um elemento arbitrário $g \times \tilde{g} \in G \times \tilde{G}$ em $|\psi_0\rangle \otimes |\tilde{\psi}_0\rangle \in \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\Pi'(g \times \tilde{g})|\psi_0, \tilde{\psi}_0\rangle &= \Pi'(\Omega \times \tilde{\Omega})\Pi'(h \times \tilde{h})|\psi_0, \tilde{\psi}_0\rangle \\
&= \Pi(\Omega)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega})\Pi(h)\tilde{\Pi}(\tilde{h})|\psi_0, \tilde{\psi}_0\rangle \\
&= \Pi(\Omega)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega})\exp\left\{i\left[\phi(h) + \tilde{\phi}(\tilde{h})\right]\right\}|\psi_0, \tilde{\psi}_0\rangle \\
&= \Pi(\Omega)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega})\exp\left[i\phi(h, \tilde{h})\right]|\psi_0, \tilde{\psi}_0\rangle,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde $\Pi' \equiv \Pi \otimes \tilde{\Pi}$ é a representação irredutível do grupo $G \times \tilde{G}$ e $\phi(h, \tilde{h}) \equiv \phi(h) + \tilde{\phi}(\tilde{h})$.

Segue que, analogamente ao caso usual, o estado coerente do espaço duplicado é definido por

$$\begin{aligned}
|\Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle &= \Pi'(\Omega \times \tilde{\Omega})|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega})|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle .
\end{aligned} \tag{5.7}$$

A decomposição de um elemento arbitrário $g \in G$ é possível devido à correspondência unívoca que existe no espaço quociente [137]

$$(G \times \tilde{G})/(H \times \tilde{H}) \simeq G/H \times \tilde{G}/\tilde{H}. \tag{5.8}$$

Para termos o Estado Coerente Termalizado consideraremos a aplicação da transformação de Bogoliubov sobre a equação (5.7), ou seja,

$$\begin{aligned}
|\beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle &= U(\beta)\Pi(\Omega)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega})|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= U(\beta)|\Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle \\
&= U(\beta)\Pi(\Omega)U^\dagger(\beta)U(\beta)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega})U^\dagger(\beta)U(\beta)|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega, \beta)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega}, \beta)U(\beta)|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

onde $\Pi(\Omega, \beta) = U(\beta)\Pi(\Omega)U^\dagger(\beta)$ e $\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega}, \beta) = U(\beta)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega})U^\dagger(\beta)$.

Dados dois elementos $g_1 \times \tilde{g}_1 \in G \times \tilde{G}$ e $g_2 \times \tilde{g}_2 \in G \times \tilde{G}$ pertencentes ao mesmo quociente $\Omega \times \tilde{\Omega}$, ter-se-á:

$$|\beta; \psi(g_1), \tilde{\psi}(\tilde{g}_1) \rangle = \exp(i\alpha)|\beta; \psi(g_2), \tilde{\psi}(\tilde{g}_2) \rangle, \tag{5.10}$$

com $g_1 = \Omega h_1$, $\tilde{g}_1 = \tilde{\Omega} \tilde{h}_1$, $g_2 = \Omega h_2$ e $\tilde{g}_2 = \tilde{\Omega} \tilde{h}_2$. De fato, isso ocorre porque

$$\begin{aligned}
|\beta; \psi(g_1), \tilde{\psi}(\tilde{g}_1) \rangle &= \Pi(g_1, \beta)\tilde{\Pi}(\tilde{g}_1, \beta)|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= U(\beta)\Pi(g_1)U^\dagger(\beta)U(\beta)\tilde{\Pi}(\tilde{g}_1)U^\dagger(\beta)U(\beta)|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= U(\beta)\Pi(\Omega h_1)U^\dagger(\beta)U(\beta)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_1)U^\dagger(\beta)U(\beta)|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= U(\beta)\Pi(\Omega h_2)U^\dagger(\beta)U(\beta)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2 \tilde{h})U^\dagger(\beta)U(\beta)|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= U(\beta)\Pi(\Omega h_2)\Pi(h)U^\dagger(\beta)U(\beta)\tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2)\tilde{\Pi}(\tilde{h})U^\dagger(\beta) \\
&\quad \times U(\beta)|\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

onde usamos que $\Omega h_1 = \Omega h_2 h$, $\tilde{\Omega} \tilde{h}_1 = \tilde{\Omega} \tilde{h}_2 \tilde{h}$, pois pertencem ao mesmo quociente. Logo

$$\begin{aligned}
|\beta; \psi(g_1), \tilde{\psi}(g_1) \rangle &= U(\beta) \Pi(\Omega h_2) U^\dagger(\beta) U(\beta) \Pi(h) U^\dagger(\beta) \\
&\quad \times U(\beta) \tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2) U^\dagger(\beta) U(\beta) \tilde{\Pi}(\tilde{h}) U^\dagger(\beta) U(\beta) |\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega h_2, \beta) \Pi(h, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{h}, \beta) |\beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega h_2, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2, \beta) \Pi(h, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{h}, \beta) |\beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega h_2, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2, \beta) U(\beta) \Pi(h) U^\dagger(\beta) \\
&\quad \times U(\beta) \tilde{\Pi}(\tilde{h}) U^\dagger(\beta) |\beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega h_2, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2, \beta) U(\beta) \Pi(h) \tilde{\Pi}(\tilde{h}) |\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega h_2, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2, \beta) U(\beta) \exp \left\{ i \left[\phi(h) + \tilde{\phi}(\tilde{h}) \right] \right\} |\psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \Pi(\Omega h_2, \beta) \tilde{\Pi}(\tilde{\Omega} \tilde{h}_2, \beta) \exp(i\alpha) |\beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \exp(i\alpha) |\beta; \psi(g_2), \tilde{\psi}(\tilde{g}_2) \rangle, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

sendo $\alpha = \phi(h) + \tilde{\phi}(\tilde{h})$.

Sejam \mathfrak{g} e $\tilde{\mathfrak{g}}$ álgebras de Lie associadas aos grupos de Lie G e \tilde{G} respectivamente. Se \mathfrak{g} e $\tilde{\mathfrak{g}}$ forem álgebras semi-simples então, como discutido no Apêndice B, temos, com a notação usual, uma base de Cartan-Weyl dada por

$$\begin{aligned}
[H_i, H_j] &= 0, & [\tilde{H}_i, \tilde{H}_j] &= 0, \\
[H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha, & [\tilde{H}_i, \tilde{E}_\alpha] &= \tilde{\alpha}_i \tilde{E}_\alpha, \\
[E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \sum_i \alpha_i H_i, & [\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_{-\alpha}] &= \sum_i \tilde{\alpha}_i \tilde{H}_i, \\
[E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, & [\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\beta] &= \tilde{N}_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} \tilde{E}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

onde os operadores H_i compõem a subálgebra comutativa de Cartan; E_α e $E_{-\alpha}$ são chamados de operadores de levantamento e abaixamento, respectivamente, e as outras grandezas são números complexos.

Denotaremos por \mathfrak{g}^T a álgebra de Lie associada ao grupo $G \times \tilde{G}$, que é a soma direta das álgebras de Lie, isto é, $\mathfrak{g}^T = \mathfrak{g} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$. Vale a pena ressaltar que se \mathfrak{g} e $\tilde{\mathfrak{g}}$ forem álgebras semi-simples, \mathfrak{g}^T também será uma álgebra semi-simples [137], resultando na seguinte base de Cartan-Weyl

$$(H_i, \widetilde{H}_j), (H_i, \widetilde{E}_{\widetilde{\alpha}}), \dots (E_{\alpha}, \widetilde{E}_{\widetilde{\beta}}). \quad (5.14)$$

Definimos os colchetes de Lie como

$$[(x_i, \widetilde{x}_i), (y_i, \widetilde{y}_i)] = ([x_i, y_i], [\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i]), \quad (5.15)$$

com $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$ e $\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i \in \widetilde{\mathfrak{g}}$.

Portanto, seguindo a forma de definir os estados coerentes usando a base de Cartan, podemos expressar o Estado Coerente Térmico Generalizado (5.9) por

$$\begin{aligned} |\beta; \Lambda, \widetilde{\Lambda}, \Omega \times \widetilde{\Omega} \rangle &= U(\beta) \exp \left\{ \sum_{\alpha} [\eta_{\alpha} \Pi(E_{\alpha}) - \eta_{\alpha}^* \Pi(E_{-\alpha})] \right\} U^{\dagger}(\beta) \\ &\times U(\beta) \exp \left\{ \sum_{\widetilde{\alpha}} [\widetilde{\eta}_{\widetilde{\alpha}} \widetilde{\Pi}(\widetilde{E}_{\widetilde{\alpha}}) - \widetilde{\eta}_{\widetilde{\alpha}}^* \widetilde{\Pi}(\widetilde{E}_{-\widetilde{\alpha}})] \right\} U^{\dagger}(\beta) \\ &\times U(\beta) |\psi_0, \widetilde{\psi}_0 \rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

uma vez que se pode mostrar que $\Omega = \exp \left[\sum_{\alpha} (\eta_{\alpha} E_{\alpha} - \eta_{\alpha}^* E_{-\alpha}) \right]$ é uma representação do espaço quociente de $\Gamma = G/H$ para uma álgebra de Lie semi-simples [32]. Definindo as versões térmicas

$$\begin{aligned} \Pi(E_{\alpha}, \beta) &= U(\beta) \Pi(E_{\alpha}) U^{\dagger}(\beta), \\ \Pi(E_{-\alpha}, \beta) &= U(\beta) \Pi(E_{-\alpha}) U^{\dagger}(\beta), \\ \widetilde{\Pi}(\widetilde{E}_{\widetilde{\alpha}}, \beta) &= U(\beta) \widetilde{\Pi}(\widetilde{E}_{\widetilde{\alpha}}) U^{\dagger}(\beta), \\ \widetilde{\Pi}(\widetilde{E}_{-\widetilde{\alpha}}, \beta) &= U(\beta) \widetilde{\Pi}(\widetilde{E}_{-\widetilde{\alpha}}) U^{\dagger}(\beta). \end{aligned} \quad (5.17)$$

podemos reescrever o Estado Coerente Térmico Generalizado (5.16) como

$$\begin{aligned}
|\beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle &= \exp \left\{ \sum_{\alpha} [\eta_{\alpha} \Pi(E_{\alpha}, \beta) - \eta_{\alpha}^* \Pi(E_{-\alpha}, \beta)] \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{\tilde{\alpha}} [\tilde{\eta}_{\tilde{\alpha}} \tilde{\Pi}(\tilde{E}_{\tilde{\alpha}}, \beta) - \tilde{\eta}_{\tilde{\alpha}}^* \tilde{\Pi}(\tilde{E}_{-\tilde{\alpha}}, \beta)] \right\} |\beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Similar ao caso não térmico, podemos determinar as seguintes propriedades:

i) Não-ortogonalidade

$$\begin{aligned}
\langle \beta; \Omega \times \tilde{\Omega}, \tilde{\Lambda}, \Lambda | \beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega' \times \tilde{\Omega}' \rangle &= \langle \beta; \tilde{\psi}_0, \psi_0 | \Pi[(\Omega \times \tilde{\Omega})^{-1}, \beta] \Pi[\Omega' \times \tilde{\Omega}', \beta] | \beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \langle \beta; \tilde{\psi}_0, \psi_0 | \Pi[(\Omega \times \tilde{\Omega})^{-1} (\Omega' \times \tilde{\Omega}'), \beta] | \beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \langle \beta; \tilde{\psi}_0, \psi_0 | \Pi[\Omega'' \times \tilde{\Omega}'', \beta] | \beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \exp(i\alpha) \\
&\neq 0,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

para $\Omega \neq \Omega' \in G/H$ e $\tilde{\Omega} \neq \tilde{\Omega}' \in \tilde{G}/\tilde{H}$, sendo normalizado já que

$$\begin{aligned}
\langle \beta; \Omega \times \tilde{\Omega}, \tilde{\Lambda}, \Lambda | \beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle &= \langle \beta; \tilde{\psi}_0, \psi_0 | \Pi[(\Omega \times \tilde{\Omega})^{-1}, \beta] \Pi[\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta] | \beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= \langle \beta; \tilde{\psi}_0, \psi_0 | \beta; \psi_0, \tilde{\psi}_0 \rangle \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

ii) Supercompleteza

Definindo o operador O como

$$O = \int d_N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta) |\beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle \langle \beta; \Omega \times \tilde{\Omega}, \tilde{\Lambda}, \Lambda|, \tag{5.21}$$

onde $d_N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta)$ é uma medida invariante pelo grupo G , observamos que O é invariante pela

ação de G já que,

$$\begin{aligned}
\Pi(g \times \tilde{g}) O &= \int d_N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta) \Pi(g \times \tilde{g}) |\beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle \langle \beta; \Omega \times \tilde{\Omega}, \tilde{\Lambda}, \Lambda | (\Pi(g \times \tilde{g}))^{-1} \Pi(g \times \tilde{g}) \\
&= \int d_N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta) e^{i\phi(h)} |\beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega' \times \tilde{\Omega}' \rangle \langle \beta; \Omega' \times \tilde{\Omega}', \tilde{\Lambda}, \Lambda | e^{-i\phi(h)} \Pi(g \times \tilde{g}) \\
&= O \Pi(g \times \tilde{g}),
\end{aligned} \tag{5.22}$$

utilizando que a medida é invariante pela ação do grupo, isto é, $d_N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta) = d_N(\Omega' \times \tilde{\Omega}', \beta)$. Portanto, pelos Lemas de Schur, O deve ser proporcional à identidade, isto é,

$$\int d_N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta) |\beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle \langle \beta; \Omega \times \tilde{\Omega}, \tilde{\Lambda}, \Lambda | = I. \tag{5.23}$$

Então qualquer estado térmico pode ser expandido em termos do Estado Coerente Térmico Generalizado, ou seja,

$$|\psi(\beta) \rangle = \int |\beta; \Lambda, \tilde{\Lambda}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle f_\Lambda(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta) N^{-1/2}(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta) d_N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta), \tag{5.24}$$

onde $f_\Lambda(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta)$ são os coeficientes do estado definido sobre $(G \times \tilde{G})/(H \times \tilde{H})$ e $N(\Omega \times \tilde{\Omega}, \beta)$ é a constante de normalização.

5.2 Caso de $SU(2)$

No caso não termalizado, para se obter os estados coerentes do momento angular observa-se que o subgrupo de isotropia é gerado por uma das componentes do momento angular, ou seja, J_z por exemplo (subálgebra de Cartan) [30, 32]. Segue que o autovetor de J_z que possui o menor autovalor, isto é, $|j, -j \rangle$ é o estado de referência $|\psi_0 \rangle$. Notando-se o grupo $e^{i\varphi J_z}$ que corresponde a uma rotação de ângulo φ no plano xy por $\mathbb{U}(1)^2$ tem-se o espaço quociente dado por $SU(2)/\mathbb{U}(1)$ e a definição dos estados coerentes de $SU(2)$ é então

$$\begin{aligned}
|z \rangle &= |j, \eta \rangle \\
&= e^{\eta J_+ - \eta^* J_-} |j, -j \rangle.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

²Notaremos $\mathbb{U}(1)$ como sendo o grupo unitário de grau 1.

Para o caso termalizado usando a DCT, devido à necessidade de duplicar os graus de liberdade e à transformação de Bogoliubov $U(\beta)$, temos para espaço quociente

$$U(\beta) \left(\frac{SU(2) \times SU(2)}{\mathbb{U}(1) \times \mathbb{U}(1)} \right) U^\dagger(\beta), \quad (5.26)$$

e a correspondente definição de Estado Coerente Termalizado Generalizado dada por

$$\begin{aligned} |\beta; z, \tilde{z}, \Omega \times \tilde{\Omega} \rangle &= \exp[\tau J_+(\beta) - \tau^* J_-(\beta)] \\ &\times \exp[\gamma \tilde{J}_+(\beta) - \gamma^* \tilde{J}_-(\beta)] |\beta; j, -j; \tilde{j}, \widetilde{-j} \rangle, \end{aligned} \quad (5.27)$$

com as relações de comutação

$$\begin{aligned} [J_+(\beta), J_-(\beta)] &= 2J_z(\beta), & [\tilde{J}_+(\beta), \tilde{J}_-(\beta)] &= 2\tilde{J}_z(\beta), \\ [J_z(\beta), J_\pm(\beta)] &= \pm J_\pm(\beta), & [\tilde{J}_z(\beta), \tilde{J}_\pm(\beta)] &= \pm \tilde{J}_\pm(\beta). \end{aligned} \quad (5.28)$$

No contexto do Oscilador Harmônico, Khanna *et al* [100] construíram o Estado Coerente Térmico considerando somente o quociente $U(\beta) \left(\frac{\mathcal{H}_4}{\mathbb{U}(1) \times \mathbb{U}(1)} \right) U^\dagger(\beta)$, com \mathcal{H}_4 sendo o grupo de Weyl, obtendo

$$|\alpha(\beta) \rangle = U(\beta) \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] U^\dagger(\beta) |0(\beta) \rangle. \quad (5.29)$$

É importante analisar esse procedimento porque o estado $|\alpha(\beta) \rangle$ se reduz ao estado $|\alpha \rangle$ quando tomamos o limite $T \rightarrow 0$ (T é a temperatura).

Com o intuito de garantir essa propriedade, nós propomos o estado

$$\begin{aligned} |z(\beta) \rangle &= U(\beta) \exp[\tau J_+ - \tau^* J_-] U^\dagger(\beta) U(\beta) |j, -j, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{\exp[z J_+(\beta)]}{(1 + |z|^2)^j} U(\beta) |j, -j, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle, \end{aligned} \quad (5.30)$$

com

$$\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} = \frac{\tau \sin |\tau|}{|\tau|}, \quad (5.31)$$

onde a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff foi utilizada [32]. Portanto, o Estado Coerente Térmico do Momento Angular neste caso é dado por

$$|z(\beta)\rangle = (1+|z|^2)^{-j} \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} z^{j+m} |\beta; j, m, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle, \quad (5.32)$$

expressão que resulta considerando a aplicação sucessiva do operador $J_+(\beta)$.

Para esse estado podemos verificar as seguintes propriedades:

i) Não-ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle z_1(\beta) | z_2(\beta) \rangle &= \langle z_1 | U^\dagger(\beta) U(\beta) | z_2 \rangle \\ &= \langle z_1 | z_2 \rangle \\ &= \frac{(1+z_1^* z_2)^{2j}}{(1+|z_1|^2)^j (1+|z_2|^2)^j}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

coincidindo com o resultado não termalizado [22, 23], já que a transformação de Bogoliubov é unitária.

ii) Supercompleteza

Como consequência da equação (5.23), temos que

$$\int dN(z(\beta), z^*(\beta)) |z(\beta)\rangle \langle z(\beta)| = 1, \quad (5.34)$$

com

$$dN(z(\beta), z^*(\beta)) = \frac{2j+1}{\pi} \frac{dz(\beta) dz^*(\beta)}{(1+|z|^2)^2}, \quad (5.35)$$

sendo a medida invariante similar ao caso não térmico [32].

5.3 Caso de $SU(1, 1)$

No caso não térmico, para obter o estado coerente de $SU(1, 1)$ nota-se que o subgrupo de isotropia é gerado por uma das componentes, que tomaremos como sendo o K_0 (subálgebra de Cartan). Como $SU(1, 1)$ é um grupo de Lie não compacto, todas as representações são de dimensão infinita [30, 138], sendo rotuladas pelo índice k . O autovetor de K_0 que possui o menor autovalor é $|k, 0\rangle$, que será o estado de referência.

O subgrupo de isotropia é notado por $e^{i\varphi K_0}$, que corresponde ao grupo $\mathbb{U}(1)$, o que implica no espaço quociente ser dado por $SU(1, 1)/\mathbb{U}(1)$ e a definição de estado coerente de $SU(1, 1)$ [30] por

$$|\zeta\rangle = e^{\eta K_+ - \eta^* K_-} |k, 0\rangle, \quad (5.36)$$

com os operadores K_0 , K_+ e K_- satisfazendo as relações

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_-, K_+] = 2K_0. \quad (5.37)$$

Utilizando a termalização dada pelo formalismo da DCT, temos o espaço quociente

$$U(\beta) \left(\frac{SU(1, 1) \times SU(1, 1)}{\mathbb{U}(1) \times \mathbb{U}(1)} \right) U^\dagger(\beta). \quad (5.38)$$

resultando em

$$|k, \tilde{k}, \Omega, \tilde{\Omega}; \beta\rangle = e^{\eta K_+(\beta) - \eta^* K_-(\beta)} \times e^{\delta \tilde{K}_+(\beta) - \delta^* \tilde{K}_-(\beta)} |k, 0; \tilde{k}, \tilde{0}; \beta\rangle, \quad (5.39)$$

onde os operadores térmicos satisfazem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [K_0(\beta), K_{\pm}(\beta)] &= \pm K_{\pm}(\beta), & [\tilde{K}_0(\beta), \tilde{K}_{\pm}(\beta)] &= \pm \tilde{K}_{\pm}(\beta), \\ [K_-(\beta), K_+(\beta)] &= 2K_0(\beta), & [\tilde{K}_-(\beta), \tilde{K}_+(\beta)] &= 2\tilde{K}_0(\beta). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Utilizando o processo usado em (5.29), para garantir que no limite $T \rightarrow 0$ o estado térmico coincida com o estado não térmico, consideramos a duplicação:

$$\begin{aligned}
|\zeta(\beta)\rangle &= U(\beta) \exp[\eta K_+(\beta) - \eta^* K_-(\beta)] U^\dagger(\beta) U(\beta) |k, 0, \frac{\tilde{1}}{2}, \tilde{0}\rangle \\
&= (1 - |\zeta|^2)^k e^{\zeta K_+(\beta)} U(\beta) |k, 0, \frac{\tilde{1}}{2}, \tilde{0}\rangle,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

com $\zeta = e^{i\phi} \tanh r$ sendo $\eta = r e^{i\phi}$ um número complexo com módulo r . O parâmetro ζ é restrito ao disco unitário, ou seja, $|\zeta| < 1$.

O estado coerente termalizado de $SU(1, 1)$ será, assim:

$$|\zeta(\beta)\rangle = (1 - |\zeta|^2)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \sqrt{\left(\frac{\Gamma(m+2k)}{m! \Gamma(2k)}\right)} \zeta^m |\beta; k, k+m, \frac{\tilde{1}}{2}, \tilde{0}\rangle, \tag{5.42}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) Não-ortogonalidade

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_1(\beta) | \zeta_2(\beta) \rangle &= \langle \zeta_1 | U^\dagger(\beta) U(\beta) | \zeta_2 \rangle \\
&= \langle \zeta_1 | \zeta_2 \rangle \\
&= (1 - |\zeta_1|^2)^k (1 - |\zeta_2|^2)^k (1 - \zeta_1^* \zeta_2)^{-2k},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

similar ao caso não térmico [30], que é consistente com a propriedade de unitariedade da transformação de Bogoliubov.

ii) Supercompleteza

A partir da equação (5.23), temos que

$$\int dN(\zeta(\beta), \zeta^*(\beta)) |\zeta(\beta)\rangle \langle \zeta(\beta)| = 1, \tag{5.44}$$

com

$$dN(\zeta(\beta), \zeta^*(\beta)) = \frac{2k-1}{\pi} \frac{d\zeta(\beta) d\zeta^*(\beta)}{(1 - |\zeta|^2)^2}, \tag{5.45}$$

semelhante à medida invariante não térmica [30].

5.4 Vácuo Térmico e o Estado Coerente

Nesta seção observaremos que o Vácuo Térmico, que desempenha um papel fundamental no formalismo da DCT [100], pode ser descrito como um estado coerente, isto é, mostraremos que o vácuo térmico do Oscilador Harmônico Fermiônico [139–146] é um estado coerente de $\mathfrak{su}(2)$, enquanto que o vácuo térmico do Oscilador Harmônico Bosônico [141–146] é um estado coerente de $\mathfrak{su}(1, 1)$.

Como já descrito na equação (3.32), o estado coerente do momento angular para $j = \frac{1}{2}$ é

$$\begin{aligned}
 |z\rangle &= \sum_{m=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \binom{1}{\frac{1}{2}+m} \frac{z^{\frac{1}{2}+m}}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \{1 + zJ_+\} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle,
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

já o vácuo térmico dos férmions [100] é dado por

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\beta\omega}}} \{1 + e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\} |0, \tilde{0}\rangle. \tag{5.47}$$

Originalmente o espaço de Hilbert do oscilador fermiônico termalizado [100] é gerado por $\{|0, \tilde{0}\rangle, |1, \tilde{0}\rangle, |0, \tilde{1}\rangle, |1, \tilde{1}\rangle\}$, mas o vácuo térmico pertence ao subespaço gerado pelos vetores $\{|0, \tilde{0}\rangle, |1, \tilde{1}\rangle\}$. Nosso objetivo é comparar a equação (5.46) com a equação (5.47), isto é, o estado coerente de $\mathfrak{su}(2)$ para $j = \frac{1}{2}$ com o vácuo térmico do sistema fermiônico.

Para isso, observaremos que os operadores J_+ e J_- satisfazem as seguintes relações de anti-comutação

$$\begin{aligned}
 \{J_+, J_-\} &= 1 \\
 \{J_+, J_+\} &= 0 \\
 \{J_-, J_-\} &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

válidas somente para o caso em que $j = \frac{1}{2}$. Associando os estados

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &\longleftrightarrow |1, \tilde{1}\rangle, \\
|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &\longleftrightarrow |0, \tilde{0}\rangle
\end{aligned} \tag{5.49}$$

para $z \in \mathbb{R}_+$, podemos relacionar o estado coerente de $\mathfrak{su}(2)$ com o vácuo térmico, a partir da seguinte relação

$$\begin{aligned}
e^{-\beta\omega} &\longleftrightarrow z^2 \\
J_+ &\longleftrightarrow a^\dagger \tilde{a}^\dagger \\
J_- &\longleftrightarrow a \tilde{a}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Com isso temos uma espécie de equivalência resumida abaixo, relacionando a obtenção do vácuo térmico a partir da aplicação da transformação de Bogoliubov e a obtenção do estado coerente de $\mathfrak{su}(2)$ a partir da aplicação do operador de deslocamento

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle &\longleftrightarrow & |z\rangle = D(z)|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\
&= e^{\theta(\beta)[a^\dagger \tilde{a}^\dagger - a \tilde{a}]}|0, \tilde{0}\rangle && = e^{\zeta[J_+ - J_-]}|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Similar ao caso de $\mathfrak{su}(2)$, o Estado Coerente de $\mathfrak{su}(1, 1)$ [147, 148] é dado por

$$\begin{aligned}
|\zeta, k\rangle &= e^{\zeta K_+} e^{\ln(1-|\zeta|^2)K_0} e^{-\zeta^* K_-} |k, 0\rangle \\
&= (1-|\zeta|^2)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(2k+m)}{m!\Gamma(2k)}} \zeta^m |k, m\rangle.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Utilizando novamente a representação via dois Osciladores Harmônicos Desacoplados, que notaremos por $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ com $|n\rangle \in \mathcal{H}$ e $|\tilde{n}\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}$, onde os operadores de criação e destruição do Oscilador Harmônico satisfazem as relações usuais de comutação [vide equação 2.15], temos que os operadores K_+ , K_- e K_0 podem ser representados por

$$K_+ = a^\dagger \tilde{a}^\dagger, \quad K_- = a \tilde{a}, \quad K_0 = \frac{1}{2} (a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + 1), \tag{5.53}$$

e os autoestados são definidos por

$$|k, m\rangle \iff |\frac{1}{2}(n+q), \tilde{n}\rangle, \quad k = \frac{1}{2}(1+q), \quad m = n, \quad (5.54)$$

implicando que $q, n \in \mathbb{N}$. Utilizando esta representação no Estado Coerente da equação (5.52), temos

$$|\zeta, \frac{1}{2}(1+q)\rangle = (1-|\zeta|^2)^{\frac{1}{2}(1+q)} \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{(q+n)!}{n!q!}} \zeta^n |n+q, \tilde{n}\rangle. \quad (5.55)$$

Tomando $q = 0$ encontramos

$$\begin{aligned} |\zeta, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{1-|\zeta|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^n |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \sqrt{1-|\tanh(\frac{\theta}{2})|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-e^{-i\phi \tanh(\frac{\theta}{2})} \right]^n |n, \tilde{n}\rangle, \end{aligned} \quad (5.56)$$

e considerando $\phi = \pi$

$$|\theta\rangle = \sqrt{1-\tanh^2(\frac{\theta}{2})} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\tanh(\frac{\theta}{2}) \right]^n |n, \tilde{n}\rangle. \quad (5.57)$$

O vácuo Térmico do Oscilador Harmônico para o caso Bosônico é [vide equação 2.9]

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1-e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta\omega n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle, \quad (5.58)$$

pertencente ao espaço $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$. Associando

$$\tanh(\frac{\theta}{2}) \longleftrightarrow e^{-\frac{\beta\omega}{2}}, \quad (5.59)$$

podemos estabelecer uma "relação de equivalência" da equação (5.57) com a equação (5.58), ou seja, o Vácuo Térmico do Oscilador Harmônico Bosônico com o Estado Coerente da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ com $q = 0$ e $\phi = \pi$.

Completando essa seção, consideremos o vácuo térmico do Oscilador Harmônico Bosônico

escrito na representação de posição para mostrar que no limite de $T \rightarrow +\infty$ o Vácuo Térmico é um estado EPR (em homenagem a Einstein, Podolsky e Rosen). Para isso utilizaremos a relação de completudeza $\int dq' \int dq |q, q'\rangle \langle q, q'| = 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta\omega n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle \\
&= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta\omega n}{2}} \int dq' \int dq |q, q'\rangle \langle q, q'| n, \tilde{n}\rangle \\
&= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta\omega n}{2}} \int dq' \int dq \frac{e^{-q^2/2} e^{-q'^2/2}}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(q) H_n(q') |q, q'\rangle, \quad (5.60)
\end{aligned}$$

com H_n sendo os polinômios de Hermite [149].

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \langle q|n\rangle \langle n|q'\rangle &= \lambda^n \frac{e^{-q^2/2} e^{-q'^2/2}}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(q) H_n(q') \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}} \exp\left(-\frac{q^2 + q'^2 - 2\lambda qq'}{2(1-\lambda^2)}\right) \quad (5.61)
\end{aligned}$$

é válido para $\lambda \leq 1$ [150]. Como $e^{-\beta\omega/2} \leq 1$, então podemos assumir $\lambda = e^{-\beta\omega/2}$, e assim temos que

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \int dq' \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - e^{-\beta\omega})}} \exp\left(-\frac{q^2 + q'^2 - 2e^{-\beta\omega/2} qq'}{2(1 - e^{-\beta\omega})}\right) |q, q'\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dq' \int dq \exp\left(-\frac{q^2 + q'^2 - 2e^{-\beta\omega/2} qq'}{2(1 - e^{-\beta\omega})}\right) |q, q'\rangle. \quad (5.62)
\end{aligned}$$

No limite $T \rightarrow +\infty$, temos que $e^{-\beta\omega/2} \rightarrow 1$, e o lado esquerdo da equação (5.61) resulta na função delta de Dirac $\langle q|q'\rangle = \delta(q - q')$. Portanto a função suave $\exp\left(-\frac{q^2 + q'^2 - 2e^{-\beta\omega/2} qq'}{2(1 - e^{-\beta\omega})}\right)$ se aproxima da delta de Dirac, no limite para altas temperaturas.

Segue então que, a menos da constante de normalização, podemos escrever o vácuo térmico no limite que $T \rightarrow +\infty$ como

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle_{T \rightarrow +\infty} &= \int dq' \int dq \delta(q - q') |q, q'\rangle \\
&= \int dq |q, q\rangle.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

A equação (5.63) é justamente o estado EPR (não normalizado) e nos dá:

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle_{T \rightarrow +\infty} &= \int dq |q, q\rangle \\
&= |0, 0\rangle + |1, 1\rangle + |2, 2\rangle + |3, 3\rangle + \dots
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Para calcular a posição relativa $Q - \tilde{Q}$ e o momento total $P + \tilde{P}$ do vácuo térmico, lembremos que a posição e o momento do espaço usual e do espaço til são dados em termos dos operadores de criação e destruição, por:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger), & P &= \frac{1}{\sqrt{2}i} (a - a^\dagger), \\
\tilde{Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger), & \tilde{P} &= \frac{1}{\sqrt{2}i} (\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger),
\end{aligned} \tag{5.65}$$

e que pela relação de Baker-Campbell-Hausdorff [124], temos:

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha a^\dagger \tilde{a}^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger \tilde{a}^\dagger} &= a + \alpha \tilde{a}^\dagger, \\
e^{-\alpha a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \tilde{a} e^{\alpha a^\dagger \tilde{a}^\dagger} &= \tilde{a} + \alpha a^\dagger.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Então, a posição relativa será

$$\begin{aligned}
(Q - \tilde{Q}) |0(\beta)\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger - \tilde{a} - \tilde{a}^\dagger) e^{e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \sqrt{\frac{1 - e^{-\beta\omega}}{2}} e^{-\frac{\beta\omega}{2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \left(a + e^{-\frac{\beta\omega}{2}} \tilde{a}^\dagger + a^\dagger - \tilde{a} - e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger - \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \sqrt{\frac{1 - e^{-\beta\omega}}{2}} e^{-\frac{\beta\omega}{2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \left[\left(1 - e^{-\frac{\beta\omega}{2}}\right) a^\dagger - \left(1 - e^{-\frac{\beta\omega}{2}}\right) \tilde{a}^\dagger \right] |0, \tilde{0}\rangle,
\end{aligned} \tag{5.67}$$

e o momento total é

$$\begin{aligned}
(P + \tilde{P})|0(\beta)\rangle &= \frac{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}{\sqrt{2}i} (a - a^\dagger + \tilde{a} - \tilde{a}^\dagger) e^{e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \frac{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}{\sqrt{2}i} e^{e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \left(a + e^{-\frac{\beta\omega}{2}} \tilde{a}^\dagger - a^\dagger + \tilde{a} + e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger - \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \frac{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}{\sqrt{2}i} e^{e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \left[\left(1 - e^{-\frac{\beta\omega}{2}}\right) a^\dagger - \left(1 - e^{-\frac{\beta\omega}{2}}\right) \tilde{a}^\dagger \right] |0, \tilde{0}\rangle,
\end{aligned} \tag{5.68}$$

o que, a menos da constante de normalização, no limite de $T \rightarrow +\infty$ resulta em

$$\begin{aligned}
(Q - \tilde{Q})|0(\beta)\rangle_{T \rightarrow +\infty} &= 0, \\
(P + \tilde{P})|0(\beta)\rangle_{T \rightarrow +\infty} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Portanto encontramos que o Vácuo Térmico do Oscilador Harmônico Bosônico, além de ter uma equivalência com um Estado Coerente de $\mathfrak{su}(1, 1)$, no limite de altas temperaturas coincide com o estado EPR em que a posição relativa e o momento total são zero. Este fato evidencia uma correlação entre o espaço usual e o espaço til para altas temperaturas.

6 *Termalização do Estado Coerente do Momento Angular*

O Estado Coerente do Momento Angular foi proposto por Atkins [22] e Arecchi [23], sendo empregado extensivamente na Informação Quântica e na Computação Quântica [36, 38, 39]. Os efeitos térmicos, apesar de serem capazes de alterar completamente as propriedades de um sistema, nem sempre são incorporados na análise devido à dificuldade em introduzir a temperatura.

Utilizaremos o formalismo da DCT para analisar os efeitos térmicos sobre o estado coerente do momento angular. Obtemos inicialmente o operador densidade termalizado, que carrega todas as propriedades deste estado; em seguida calculamos a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner, todos termalizados, analisando a influência da temperatura para diversos valores do momento angular total j .

6.1 Estado Coerente do Momento Angular

Como discutido no Capítulo 4, o estado coerente do momento angular pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \frac{e^{zJ_+}}{(1+|z|^2)^j} |j, -j\rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} |j, m\rangle, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

com $\binom{k}{m}$ sendo o Binômio de Newton dado por $\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$.

Schwinger mostrou [124] que a álgebra do momento angular é equivalente à álgebra de dois Osciladores Harmônicos Desacoplados com $a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_1$ e a_2 os operadores de criação e destruição de cada oscilador. Com efeito, a partir do mapeamento,

$$\begin{aligned}
J_+ &= \hbar a_1^\dagger a_2, \\
J_- &= \hbar a_2^\dagger a_1, \\
N_i &= \hbar a_i^\dagger a_i, \quad i \in \{1, 2\} \\
J_z &= \frac{\hbar}{2} (N_1 - N_2), \\
(J_+)^{\dagger} &= J_-,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

replica-se a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ do momento angular. Nesse contexto, o estado $|j, m\rangle$ pode ser escrito como

$$|j, m\rangle \longleftrightarrow |j + m, j - m\rangle \tag{6.3}$$

e em consequência, podemos reescrever o estado coerente da equação (6.1) na forma

$$|z\rangle = \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} |j+m, j-m\rangle. \tag{6.4}$$

Este mapeamento faz com que tenhamos

$$\begin{aligned}
|j, -j\rangle &\longleftrightarrow |0, 2j\rangle, \\
|j, -j+1\rangle &\longleftrightarrow |1, 2j-1\rangle, \\
|j, -j+2\rangle &\longleftrightarrow |2, 2j-2\rangle, \\
&\vdots \\
|j, j\rangle &\longleftrightarrow |2j, 0\rangle,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

com o estado fundamental dado por $|0, 2j\rangle$. Segue que o estado coerente pode ser escrito nas formas

$$\begin{aligned}
|z\rangle &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m} \sqrt{(j-m)!} (a_+^\dagger)^{j+m} (a_-)^{j+m}}{(1+|z|^2)^j \sqrt{(j+m)!} \sqrt{(2j)!}} |0, 2j\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m} \sqrt{(j-m)!} J_+^{j+m}}{(1+|z|^2)^j \sqrt{(j+m)!} \sqrt{(2j)!}} |0_j\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m} (a_1^\dagger)^{j+m} (a_2^\dagger)^{j-m}}{(1+|z|^2)^j \sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} |0, 0\rangle,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

onde denotamos $|0, 2j\rangle = |0_j\rangle$, para indicar o autoestado com menor autovalor relativo ao momento angular.

6.2 Termalizando o estado $|z\rangle$

Para analisar os efeitos térmicos relativos ao estado coerente do momento angular, utilizaremos a DCT [100] na representação de Schwinger construída a partir dos Osciladores Harmônicos Termalizados. Os operadores do Momento Angular são assim

$$\begin{aligned} J_+(\beta) &= a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta), \\ J_-(\beta) &= a_2^\dagger(\beta)a_1(\beta), \\ J_z(\beta) &= \frac{1}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta)a_2(\beta)]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Os operadores definidos dessa forma satisfazem a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$

$$\begin{aligned} [J_+(\beta), J_-(\beta)] &= 2J_z(\beta), \\ [J_z(\beta), J_\pm(\beta)] &= \pm J_\pm(\beta), \\ [\tilde{J}_+(\beta), \tilde{J}_-(\beta)] &= 2\tilde{J}_z(\beta), \\ [\tilde{J}_z(\beta), \tilde{J}_\pm(\beta)] &= \pm \tilde{J}_\pm(\beta), \end{aligned} \quad (6.8)$$

com o vácuo térmico associado a j

$$|0_j(\beta)\rangle = U(\beta)|0_j, \tilde{00}\rangle, \quad (6.9)$$

duplicado com o $|\tilde{00}\rangle$ ¹, respeitando as relações

$$\begin{aligned} J_-(\beta)|0_j(\beta)\rangle &= 0, \\ J_+(\beta)|(2j)_j(\beta)\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

O estado coerente do momento angular termalizado é então

¹No que segue, usaremos a notação simplificada $|j, m, \tilde{k}, \tilde{l}\rangle = |j, m, \tilde{k}\tilde{l}\rangle$.

$$\begin{aligned}
|z(\beta)\rangle &= U(\beta)|z, \widetilde{00}\rangle \\
&= \frac{e^{zJ_+(\beta)}}{(1+|z|^2)^j} |0_j(\beta)\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m} \sqrt{(j-m)!} J_+(\beta)^{j+m}}{(1+|z|^2)^j \sqrt{(j+m)!} \sqrt{(2j)!}} |0_j(\beta)\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m} (a_1^\dagger(\beta))^{j+m} (a_2^\dagger(\beta))^{j-m}}{(1+|z|^2)^j \sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!}} |0(\beta)\rangle. \quad (6.11)
\end{aligned}$$

onde todas são formas equivalentes de se escrever o estado $|z(\beta)\rangle$, que foi obtido usando a duplicação com $|\widetilde{00}\rangle$.

Relembrando que $a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{a^\dagger}{u(\beta)}|0(\beta)\rangle$, definiremos

$$\bar{C}_{j,m}(z, \beta) = \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j \sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!} u(\beta)^{2j}}, \quad (6.12)$$

o que possibilita escrever (6.12) como,

$$|z(\beta)\rangle = \sum_{m=-j}^j \bar{C}_{j,m}(z, \beta) (a_1^\dagger)^{j+m} (a_2^\dagger)^{j-m} |0(\beta)\rangle, \quad (6.13)$$

que é o Estado Coerente do Momento Angular Termalizado.

6.3 Operador Densidade Térmico

Para encontrar o Operador Densidade Termalizado utilizaremos a média térmica

$$\langle z(\beta) | \hat{O} | z(\beta) \rangle = \text{Tr} \rho_{|z(\beta)\rangle} \hat{O}. \quad (6.14)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta)|\hat{O}|z(\beta)\rangle &= \langle 0(\beta)| \left\{ \left[\sum_{m'=-j}^j \bar{C}_{j,m'}(z,\beta)(a_1^\dagger)^{j+m'}(a_2^\dagger)^{j-m'} \right]^\dagger \hat{O} \right. \\
&\quad \left. \times \left[\sum_{m=-j}^j \bar{C}_{j,m}(z,\beta)(a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m} \right] \right\} |0(\beta)\rangle \\
&= \langle 0(\beta)| \left\{ \sum_{m,m'=-j}^j \bar{C}_{j,m'}^*(z,\beta)\bar{C}_{j,m}(z,\beta)(a_1)^{j+m'}(a_2)^{j-m'} \hat{O} \right. \\
&\quad \left. \times (a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m} \right\} |0(\beta)\rangle \\
&= \text{Tr} \rho \left[\sum_{m,m'=-j}^j \bar{C}_{j,m'}^*(z,\beta)\bar{C}_{j,m}(z,\beta)(a_1)^{j+m'}(a_2)^{j-m'} \hat{O}(a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m} \right],
\end{aligned} \tag{6.15}$$

usando que $\langle 0(\beta)|\hat{O}|0(\beta)\rangle = \text{Tr} \rho \hat{O}$. Da equação (6.14) e da propriedade cíclica do traço, encontramos então que

$$\begin{aligned}
\rho_{|z(\beta)\rangle} &= \sum_{m,m'=-j}^j \bar{C}_{j,m'}^*(z,\beta)\bar{C}_{j,m}(z,\beta)(a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m} \rho(a_1)^{j+m'}(a_2)^{j-m'} \\
&= \sum_{\substack{m,m'=-j \\ n_1,n_2=0}}^{j,\infty} \left\{ \bar{C}_{j,m'}^*(z,\beta)\bar{C}_{j,m}(z,\beta) \frac{1}{(1+\bar{n}(\beta))^2} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^{n_1+n_2} \right. \\
&\quad \left. \times (a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| (a_1)^{j+m'}(a_2)^{j-m'} \right\} \\
&= \sum_{\substack{m,m'=-j \\ n_1,n_2=0}}^{j,\infty} \left\{ \frac{\bar{C}_{j,m'}^*(z,\beta)\bar{C}_{j,m}(z,\beta)}{(1+\bar{n}(\beta))^2} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^{n_1+n_2} \right. \\
&\quad \left. \times \sqrt{\frac{(n_1+j+m)!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2+j-m)!}{n_2!}} \sqrt{\frac{(n_1+j+m')!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2+j-m')!}{n_2!}} \right\} \\
&\quad \times |n_1+j+m, n_2+j-m\rangle \langle n_1+j+m', n_2+j-m'|,
\end{aligned} \tag{6.16}$$

com $\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$. Denotando

$$\begin{aligned}
C_{n_1 n_2}^{m, m'}(z, \beta) &= \frac{\overline{C}_{j, m'}^*(z, \beta) \overline{C}_{j, m}(z, \beta)}{(1 + \overline{n}(\beta))^2} \left(\frac{\overline{n}(\beta)}{1 + \overline{n}} \right)^{n_1 + n_2} \\
&\times \sqrt{\frac{(n_1 + j + m)!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2 + j - m)!}{n_2!}} \sqrt{\frac{(n_1 + j + m')!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2 + j - m')!}{n_2!}} \\
&= \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{z^{j+m} (z^*)^{j+m'}}{(1 + |z|^2)^{2j} (1 + \overline{n}(\beta))^2} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!} \sqrt{(j+m')!} \sqrt{(j-m')!} u(\beta)^{4j}} \left(\frac{\overline{n}(\beta)}{1 + \overline{n}(\beta)} \right)^{n_1 + n_2} \\
&\times \sqrt{\frac{(n_1 + j + m)!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2 + j - m)!}{n_2!}} \sqrt{\frac{(n_1 + j + m')!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2 + j - m')!}{n_2!}}. \quad (6.17)
\end{aligned}$$

teremos

$$\rho_{|z(\beta)\rangle} = \sum_{\substack{m, m' = -j \\ n_1, n_2 = 0}}^{j, \infty} C_{n_1 n_2}^{m, m'}(z, \beta) |n_1 + j + m, n_2 + j - m\rangle \langle n_1 + j + m', n_2 + j - m'|. \quad (6.18)$$

Este é o Operador Densidade Térmico, que expressa todas as propriedades do estado coerente do momento angular com j arbitrário. Utilizaremos o desenvolvimento feito até agora para encontrar a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner.

6.4 Fidelidade

A Fidelidade Quântica pode ser definida por $F = \sqrt{\langle z_1 | \rho_{|z(\beta)\rangle} | z_1 \rangle}$ [151], que é a distância entre o estado coerente $|z_1\rangle$ e o estado coerente térmico $|z(\beta)\rangle$ representado pelo operador densidade $\rho_{|z(\beta)\rangle}$. Analisaremos como os efeitos térmicos modificam essa distância a partir do estudo da Fidelidade, aferindo a preservação da informação quântica. Com efeito, temos;

$$\begin{aligned}
\langle z_1 | \rho_{|z(\beta)\rangle} | z_1 \rangle &= \sum_{\bar{m}=-j}^j \langle j + \bar{m}, j - \bar{m} | \sqrt{\binom{2j}{j + \bar{m}}} \frac{(z_1^*)^{j+\bar{m}}}{(1 + |z_1|^2)^j} \sum_{\substack{m, m'=-j \\ n_1, n_2=0}}^{j, \infty} C_{n_1 n_2}^{m, m'}(z, \beta) \\
&\quad \times |n_1 + j + m, n_2 + j - m \rangle \langle n_1 + j + m', n_2 + j - m' | \\
&\quad \times \sum_{\bar{m}=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j + \bar{m}}} \frac{z_1^{j+\bar{m}}}{(1 + |z_1|^2)^j} |j + \bar{m}, j - \bar{m} \rangle \\
&= \sum_{\substack{m, m', \bar{m}, \bar{m}'=-j \\ n_1, n_2=0}}^{j, \infty} C_{n_1 n_2}^{m, m'}(z, \beta) \sqrt{\binom{2j}{j + \bar{m}}} \sqrt{\binom{2j}{j + \bar{m}'}} \frac{(z_1^*)^{j+\bar{m}} z_1^{j+\bar{m}'}}{(1 + |z_1|^2)^{2j}} \\
&\quad \times \langle j + \bar{m}, j - \bar{m} | n_1 + j + m, n_2 + j - m \rangle \\
&\quad \times \langle n_1 + j + m', n_2 + j - m' | j + \bar{m}, j - \bar{m} \rangle. \tag{6.19}
\end{aligned}$$

Segue de (6.19), pelas relações de ortonormalidade, que

$$\begin{aligned}
n_1 + j + m &= j + \bar{m}, \\
n_2 + j - m &= j - \bar{m}, \\
n_1 + j + m' &= j + \bar{m}', \\
n_2 + j - m' &= j - \bar{m}', \tag{6.20}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\bar{m} &= n_1 + m, \\
\bar{m}' &= n_1 + m', \\
n_2 + n_1 &= 0. \tag{6.21}
\end{aligned}$$

Como $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, a única forma de termos $n_2 + n_1 = 0$ é tendo $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\bar{m} &= m, \\
\bar{m}' &= m', \tag{6.22}
\end{aligned}$$

o que resulta que a Fidelidade é

$$F = \left\{ \sum_{m,m'=-j}^j \binom{2j}{j+m} \binom{2j}{j+m'} \frac{(zz_1^*)^{j+m} (z^*z_1)^{j+m'}}{(1+|z|^2)^{2j} (1+|z_1|^2)^{2j} (1+\bar{n}(\beta))^2 u(\beta)^{4j}} \right\}^{1/2}. \quad (6.23)$$

Relembrando que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, obtemos

$$F = \left\{ \frac{(1+z^*z_1)^{2j} (1+zz_1^*)^{2j}}{(1+|z|^2)^{2j} (1+|z_1|^2)^{2j} (1+\bar{n}(\beta))^2 u(\beta)^{4j}} \right\}^{1/2}. \quad (6.24)$$

Considerando que $1+\bar{n}(\beta) = 1+v(\beta)^2 = u(\beta)^2$, temos

$$F = \left| \frac{(1+z^*z_1)^j (1+zz_1^*)^j}{(1+|z|^2)^j (1+|z_1|^2)^j u(\beta)^{2j+2}} \right|. \quad (6.25)$$

Usando $z = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$ com $\theta \in [0, \pi[$ e $\phi \in [0, 2\pi[$, obtemos

$$F = \left| \cos^2(\theta/2)\cos^2(\theta_1/2) + \frac{\text{sen}(\theta)\text{sen}(\theta_1)}{2} \cos(\phi - \phi_1) + \text{sen}^2(\theta/2)\text{sen}^2(\theta_1/2) \right|^j \frac{1}{u(\beta)^{2j+2}}, \quad (6.26)$$

que é a expressão da Fidelidade Quântica que utilizaremos.

A análise para diferentes fases é muito útil quando vislumbramos a implementação de portas lógicas quânticas, de imensa importância na Computação Quântica. Essa análise pode ajudar a controlar a atuação dessas portas lógicas, visando maior eficiência nos processos. Podemos analisar diversos casos possíveis para os ângulos $\{\theta_1, \theta, \phi_1, \phi\}$; por exemplo,

- Para o caso em que $\phi - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$,

$$F_{\frac{\pi}{2}} = \left| \cos^2(\theta/2)\cos^2(\theta_1/2) + \text{sen}^2(\theta/2)\text{sen}^2(\theta_1/2) \right|^j \frac{1}{u(\beta)^{2j+2}}, \quad (6.27)$$

e se $\theta_1 = \theta$ obtemos

$$F_{\frac{\pi}{2}} = \left| 1 - \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2} \right|^j \frac{1}{u(\beta)^{2j+2}}. \quad (6.28)$$

- Para o caso em que $\phi - \phi_1 = \pi$,

$$F_{\pi} = \frac{|\cos(\theta/2)\cos(\theta_1/2) - \text{sen}(\theta/2)\text{sen}(\theta_1/2)|^{2j}}{u(\beta)^{2j+2}}, \quad (6.29)$$

e se $\theta_1 = \theta$ temos

$$F_{\pi} = \frac{|\cos(\theta)|^{2j}}{u(\beta)^{2j+2}}. \quad (6.30)$$

- Para o caso em que $\phi = \phi_1$,

$$F_{\theta} = \frac{|\cos(\theta/2)\cos(\theta_1/2) + \text{sen}(\theta/2)\text{sen}(\theta_1/2)|^{2j}}{u(\beta)^{2j+2}}. \quad (6.31)$$

Por fim, quando temos $|z_1\rangle = |z\rangle$, isto é, $\phi_1 = \phi$ e $\theta_1 = \theta$, a Fidelidade se resume a $F = \sqrt{\langle z|\rho_{|z(\beta)\rangle}|z\rangle}$, que informa a distância de um estado quântico em relação a ele mesmo, ou seja, mostra como somente os efeitos térmicos são capazes de alterar o estado quântico. Nesse caso, de (6.31) segue que

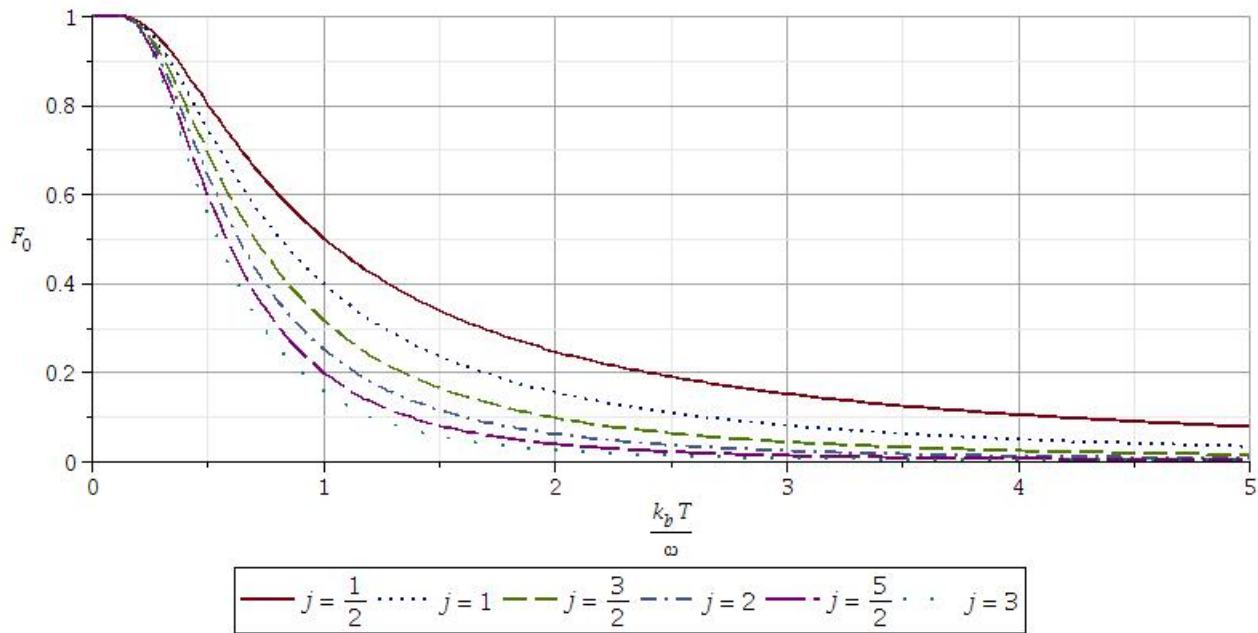
$$F_0 = \frac{1}{u(\beta)^{2j+2}} = (1 - e^{-\beta\omega})^{j+1}, \quad (6.32)$$

resultando que a modificação dos estados devido aos efeitos térmicos depende, além da temperatura, do valor de j .

Quando fazemos o limite para T tendendo a zero, obtemos $\lim_{T \rightarrow 0^+} F_0 = 1$, para qualquer valor de j . Isso corrobora com a ideia de reversibilidade do processo térmico já que, para $T \rightarrow 0^+$ os efeitos térmicos analisados cessam, resultando que o estado permanece o mesmo, pois a Fidelidade é 1.

O resultado de $\lim_{T \rightarrow +\infty} F = 0$, indica que com o aumento da temperatura o estado afasta-se

Figura 6.1: Gráfico de $F_0 \times \frac{k_b T}{\omega}$ para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$.



do seu estado inicial, independente de qual seja, afastando-se também de qualquer outro estado coerente do momento angular, e isto para qualquer valor de j . Isso implica que as propriedades quânticas devem ser perdidas.

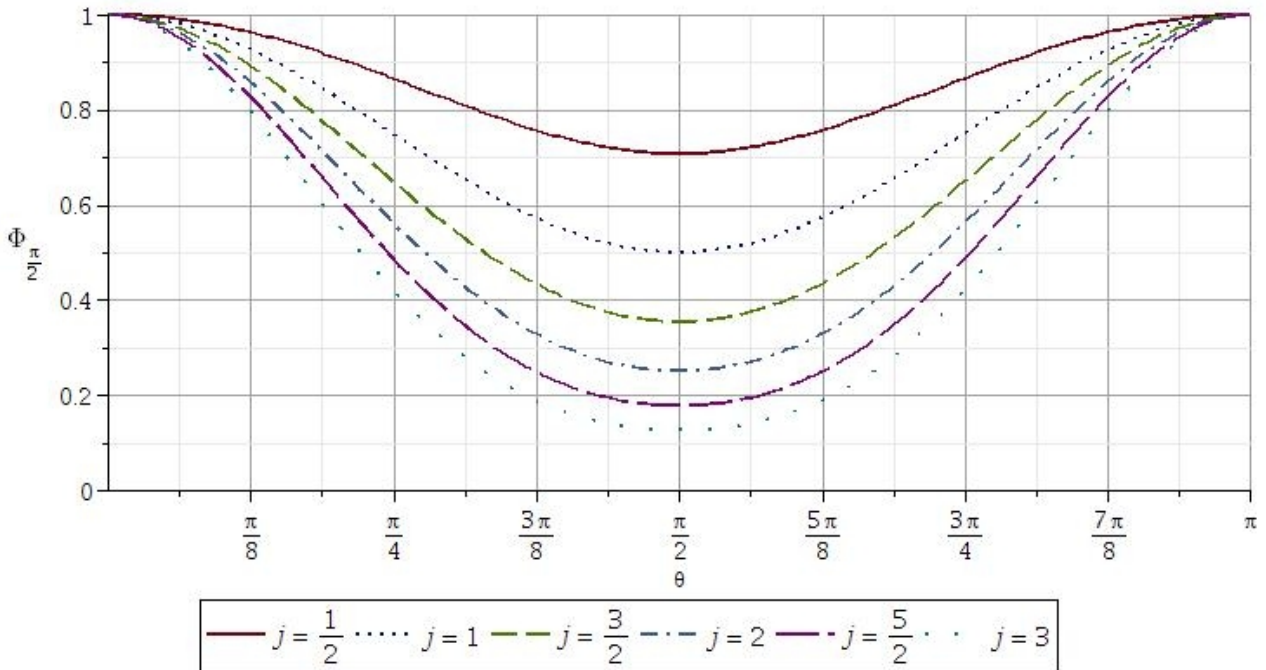
A partir do gráfico da função F_0 (Fig. 6.1), podemos inferir que quanto maior o valor de j , mais sensível é a variação do estado em relação a temperatura. Com o aumento do valor de j , encontramos que o estado coerente do momento angular preserva cada vez menos a informação original.

Como exemplo, procuremos determinar para que faixa de temperatura é mantida uma Fidelidade superior a 60%. Para o caso de $j = \frac{1}{2}$ obtemos que $\frac{k_b T_1}{\omega} = 0,80$, para $j = 3$ obtemos que $\frac{k_b T_2}{\omega} = 0,47$, de modo que $T_1 = 1,70T_2$, isto é, temos quase o dobro da temperatura quando variamos de $j = 3$ até $j = \frac{1}{2}$.

As curvas não se interceptam, ou seja, não temos duas curvas associadas a diferentes j que possuem a mesma Fidelidade para uma mesma temperatura. Com isso surge a ideia de identificarmos um estado a partir da sua resposta à temperatura, isto é, se soubermos como o estado varia termicamente, poderemos ser capazes de, ao aumentarmos ou diminuirmos a temperatura, identificar o valor de j a partir do seu comportamento.

O limite clássico dado em [34] é encontrado quando tomamos $j \rightarrow +\infty$, que implica num distanciamento completo do caso quântico. Se tomarmos esse limite a partir da equação (6.26),

Figura 6.2: Gráfico de $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ x θ com $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$.



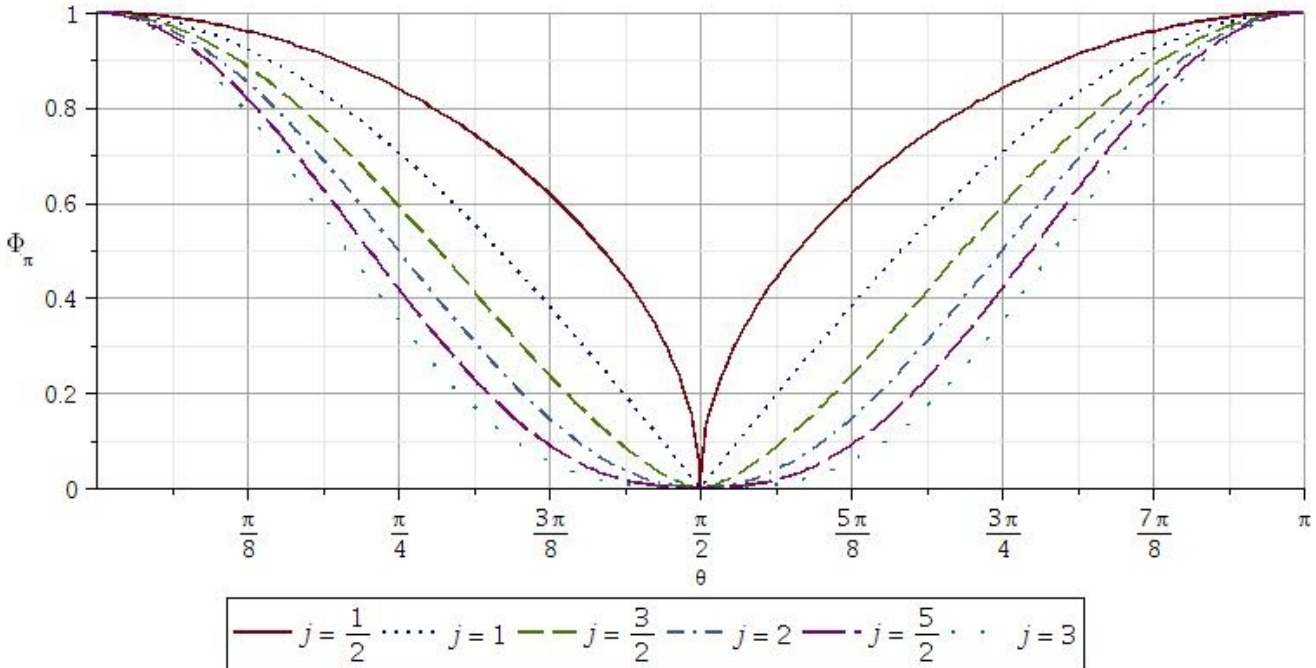
temos que $\lim_{\substack{j \rightarrow +\infty \\ T \neq 0}} F = 0$ já que uma função limitada multiplicada por uma função que tende a zero, implica que o limite total também tende a zero. Dessa forma, o estado inicial afasta-se de qualquer estado quântico considerado, concordando com a ideia de estarmos num limite clássico. Isso também ocorre independente do estado inicial que considerarmos. Tal resultado concorda com a Fidelidade calculada por Demkowicz-Dobrazanski *et al* [39], onde o comportamento é similar ao nosso.

Os efeitos térmicos sobre a Fidelidade são sempre dados pelo fator $F_0(\beta)$, independente da posição entre $|z_1\rangle$ e $|z\rangle$. De fato, as equações (6.28) e (6.30) podem ser reescritas como $F_{\frac{\pi}{2}}(\theta, \beta) = \Phi_{\frac{\pi}{2}}(\theta) * F_0(\beta)$ e $F_{\pi}(\theta, \beta) = \Phi_{\pi}(\theta) * F_0(\beta)$. Podemos, assim, analisar somente a parte angular das duas funções.

Relembrando que θ está relacionado ao módulo do parâmetro z , já que $z = \tan(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}$, então para $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos $|z| = 1$. Portanto os gráficos de $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ (Fig. 6.2) e Φ_{π} (Fig. 6.3) nos informam que quando um estado coerente termalizado possui uma diferença de fase de 90° ou 180° de outro estado coerente, a informação é menos preservada quanto mais próximo o $|z|$ é de 1.

Uma informação interessante é obtida quando analisamos $\Phi_{\frac{\pi}{2}}(\theta)$ para o caso de $j = \frac{1}{2}$; percebemos que, para qualquer valor de θ , obtemos sempre uma Fidelidade acima de 70%, isto é, se o estado original sofrer uma variação de fase de 90° , ainda assim a informação contida nesse estado é preservada com Fidelidade acima de 70%, independente dos efeitos térmicos.

Figura 6.3: Gráfico de Φ_π x θ para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$.



A partir da análise da Fidelidade, somos capazes de inferir que o valor do parâmetro ϕ é de grande importância quando pretendemos aplicar portas lógicas sobre o estado. Já no caso em que preparamos os estados e enviamos a informação, propagando-se num meio em banho térmico T , o valor de z não influencia na perda de informação já que $F_0(\beta)$ não depende de θ nem de ϕ , só dependendo do valor de j .

Os gráficos de $F_{\frac{\pi}{2}}$ e F_π , equações (6.28) e (6.30) respectivamente, são apresentados nas figuras (Fig. 6.4) e (Fig. 6.5); eles dão uma boa ideia dos efeitos globais da temperatura e da variação de j . Observamos um comportamento semelhante para F_π e $F_{\frac{\pi}{2}}$, ou seja, independentemente se temos uma variação de fase de $\frac{\pi}{2}$ ou de π , com o aumento da temperatura ou o aumento de j , observamos uma queda da Fidelidade.

Comparando os gráficos (Fig. 6.4) e (Fig. 6.5), temos claramente que a Fidelidade é bem mais sensível se a diferença de fase for 180° do que se for 90° . No gráfico de F_π com $j = \frac{1}{2}$ ocorre uma quina, caracterizada pela não existência da primeira derivada em $\frac{\pi}{2}$.

Quanto maior o valor de j , observamos que a região com Fidelidade alta se torna cada vez menor. Dessa forma, concluímos que quanto menor o valor de j , maior será a preservação da informação contida no estado $|z\rangle$. Concluímos também que o valor de z , que depende de θ e ϕ , é importante quando vislumbramos a atuação de portas lógicas.

Figura 6.4: $F_{\frac{\pi}{2}} \times \frac{k_b T}{\omega} \times \theta$ para $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.

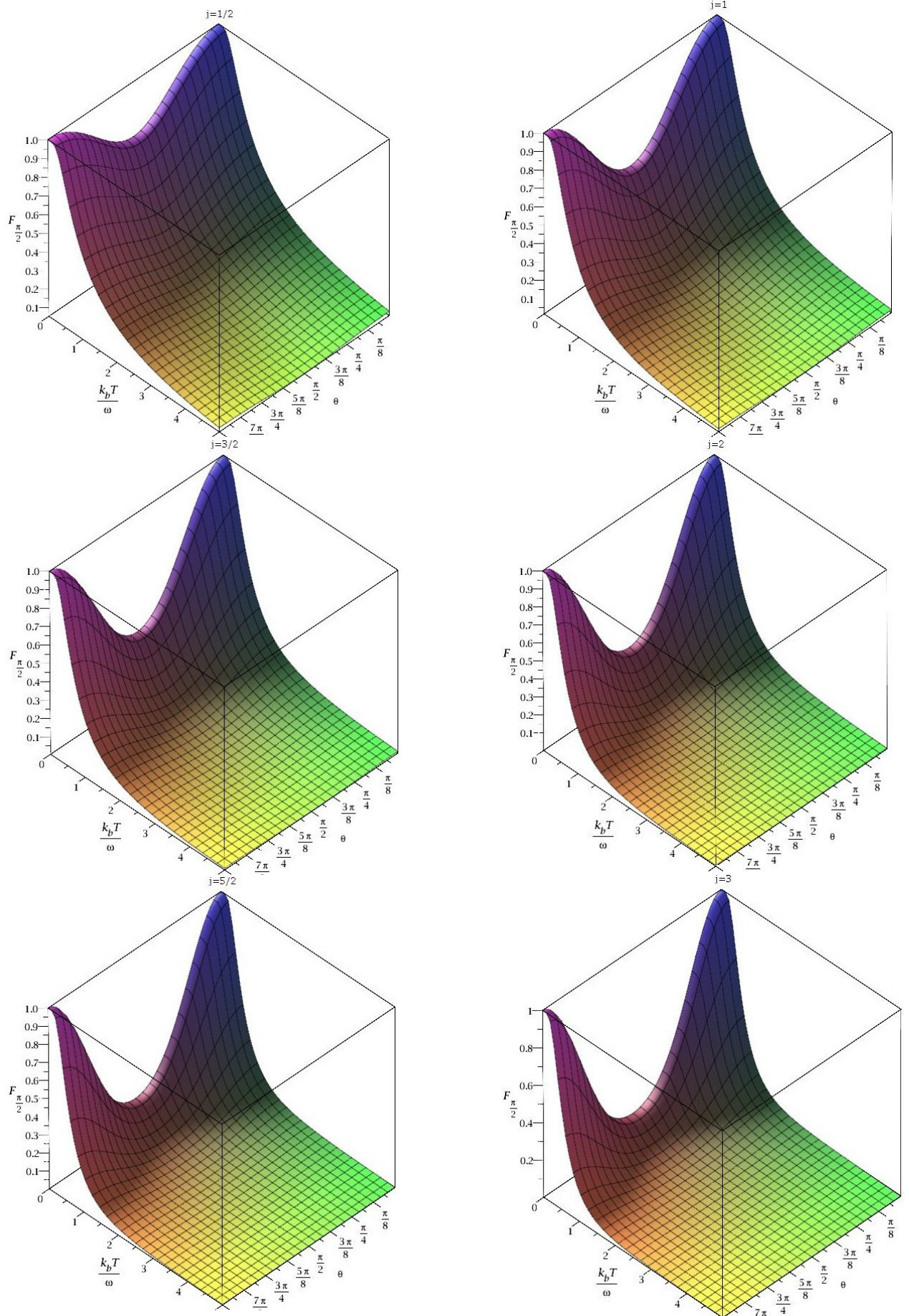
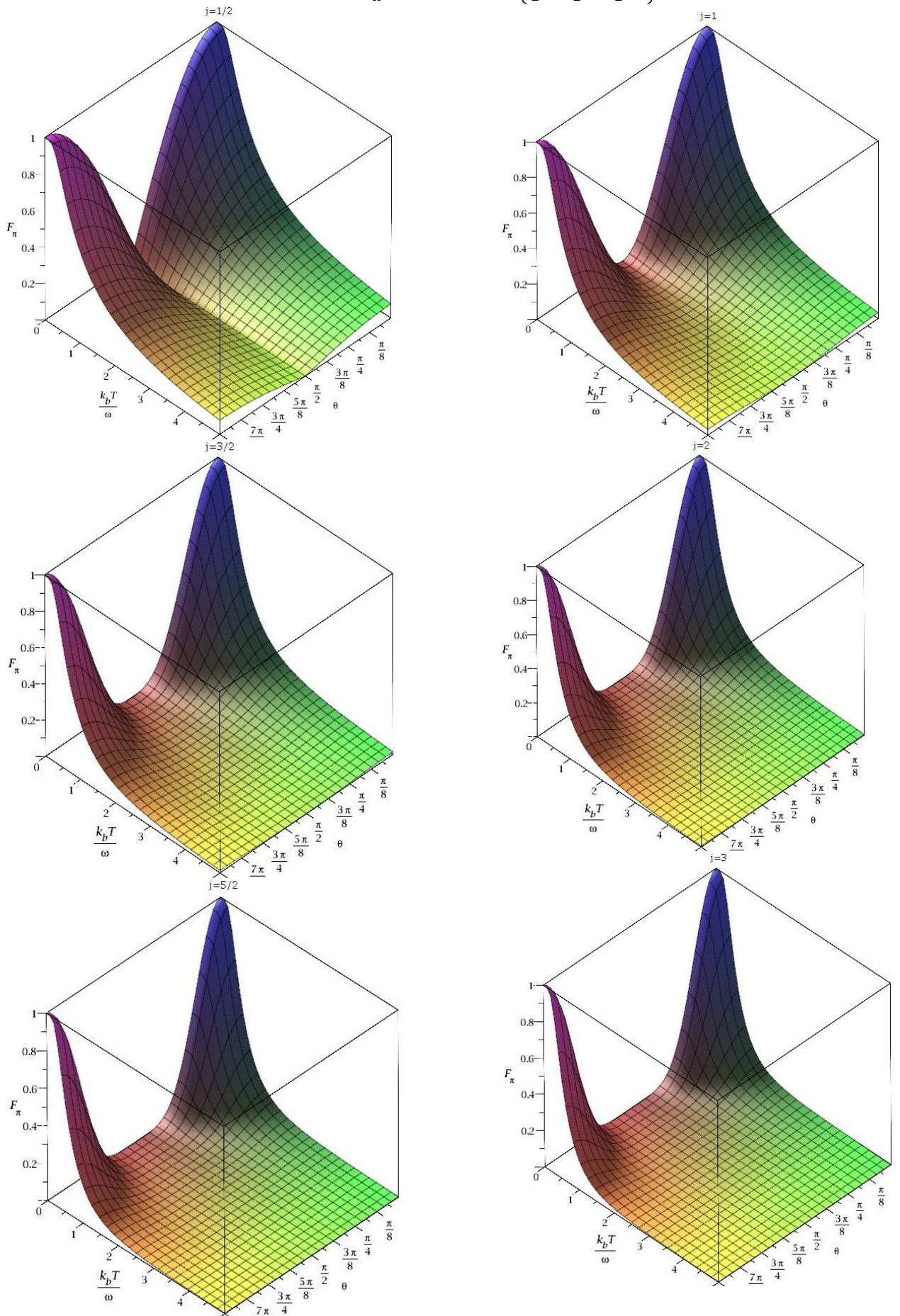


Figura 6.5: $F_\pi \times \frac{k_b T}{\omega} \times \theta$ para $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.



6.5 Fator de Mandel

O Fator de Mandel, via DCT, é definido como [100]

$$Q = \frac{\langle z(\beta)|N^2|z(\beta) \rangle}{\langle z(\beta)|N|z(\beta) \rangle} - \langle z(\beta)|N|z(\beta) \rangle - 1, \quad (6.33)$$

que informa a estatística seguida pelo estado. Para $Q \in [-1, 0[$ a estatística é dita sub-Poissoniana, que é uma característica essencialmente quântica, se $Q = 0$ a estatística é Poissoniana e para $Q > 0$ o estado segue uma estatística super-Poissoniana. Seguindo a formulação de Schwinger, $N = N_1 + N_2$ é o operador número dos Osciladores Harmônicos Desacoplados, resultando em

$$Q = \frac{\langle z(\beta)|(N_1 + N_2)^2|z(\beta) \rangle}{\langle z(\beta)|(N_1 + N_2)|z(\beta) \rangle} - \langle z(\beta)|(N_1 + N_2)|z(\beta) \rangle - 1. \quad (6.34)$$

Usando a DCT, podemos escrever o operador número como

$$\begin{aligned} N &= a^\dagger a \\ &= u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta) + v(\beta)u(\beta) \left[a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + a(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] + v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde usamos (2.38) e (2.40); então

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= u^2(\beta)a_1^\dagger(\beta)a_1(\beta) + v(\beta)u(\beta) \left[a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_1^\dagger(\beta) + a_1(\beta)\tilde{a}_1(\beta) \right] + v^2(\beta)\tilde{a}_1(\beta)\tilde{a}_1^\dagger(\beta) \\ &\quad + u^2(\beta)a_2^\dagger(\beta)a_2(\beta) + v(\beta)u(\beta) \left[a_2^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) + a_2(\beta)\tilde{a}_2(\beta) \right] + v^2(\beta)\tilde{a}_2(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta), \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde reiteramos a consideração de que os dois osciladores possuem a mesma frequência, $\omega_1 = \omega_2$, $u_i(\beta) = u(\beta)$ e $v_i(\beta) = v(\beta)$. Segue, portanto, que

$$\begin{aligned} (N_1 + N_2)|z(\beta) \rangle &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} (N_1 + N_2)|\beta; (j+m), (j-m), \tilde{00} \rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} (2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta))|\beta; j+m, j-m, \tilde{00} \rangle \right. \\ &\quad \left. + u(\beta)v(\beta)\sqrt{j+m+1}|\beta; j+m+1, j-m, \tilde{10} \rangle \right. \\ &\quad \left. + u(\beta)v(\beta)\sqrt{j-m+1}|\beta; j+m, j-m+1, \tilde{01} \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

e com isso,

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta)|(N_1 + N_2)|z(\beta) \rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{z^{j+m}(z^*)^{j+m'}}{(1+|z|^2)^{2j}} (2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)) \\
&\quad \times \langle \beta; j+m', j-m', \widetilde{00} | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} [2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)], \tag{6.38}
\end{aligned}$$

sendo usada a equação (6.11). Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(N_1 + N_2)^2 |z(\beta) \rangle &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \\
&\quad \times [4j^2 u^4(\beta) + (10j+2)u^2(\beta)v^2(\beta) + 4v^4(\beta)] |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle, \tag{6.39}
\end{aligned}$$

onde só consideramos os termos que não irão se anular quando for tomada a média, ou seja, os termos contendo $|\widetilde{00} \rangle$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta)|(N_1 + N_2)^2|z(\beta) \rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{z^{j+m}(z^*)^{j+m'}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&\quad \times [4j^2 u^4(\beta) + (10j+2)u^2(\beta)v^2(\beta) + 4v^4(\beta)] \\
&\quad \times \langle \beta; j+m', j-m', \widetilde{00} | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} [4j^2 u^4(\beta) + (10j+2)u^2(\beta)v^2(\beta) + 4v^4(\beta)], \tag{6.40}
\end{aligned}$$

o que implica em

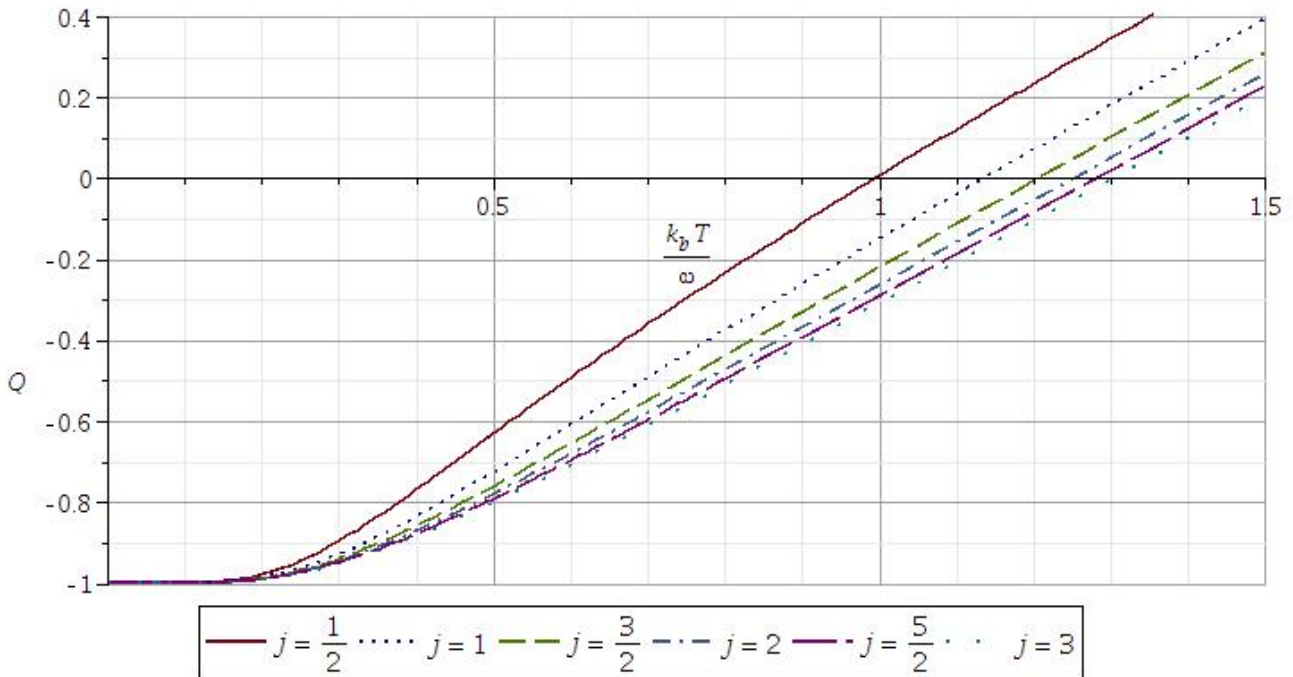
$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} [4j^2 u^4(\beta) + (10j+2)u^2(\beta)v^2(\beta) + 4v^4(\beta)]}{\sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} [2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)]} \\
&\quad - \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} [2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)] - 1. \tag{6.41}
\end{aligned}$$

Utilizando novamente $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, temos $\sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1 + |z|^2)^{2j}} = 1$.
Portanto o Fator de Mandel, para o caso em estudo, resulta em

$$\begin{aligned} Q &= \frac{[4j^2 u^4(\beta) + (10j + 2)u^2(\beta)v^2(\beta) + 4v^4(\beta)]}{[2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)]} - [2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)] - 1 \\ &= \frac{(2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta))^2 + 2(j + 1)u^2(\beta)v^2(\beta)}{[2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)]} - [2ju^2(\beta) + 2v^2(\beta)] - 1 \\ &= \frac{(j + 1)u^2(\beta)v^2(\beta)}{ju^2(\beta) + v^2(\beta)} - 1. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Uma primeira observação na equação (6.42) é que o Fator de Mandel não depende de z , isto é, o valor de z não altera a estatística seguida pelo estado coerente do momento angular.

Figura 6.6: Gráfico Fator de Mandel $\times \frac{k_b T}{\omega}$ sendo $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.



Na figura (Fig. 6.6) são apresentados os gráficos do Fator de Mandel Q para diferentes valores da temperatura e j . Observamos que independentemente do valor de j , todo estado coerente do momento angular segue a estatística sub-Poissoniana, com $Q = -1$, para $T = 0$. Com o aumento da temperatura, os estados passam para o caso Poissoniana, com $Q = 0$, e super-Poissoniana, com $Q > 0$. O valor de j influencia na resposta do estado ao aumento de temperatura.

Para o caso com $j = 0$ obtemos $Q = v^2(\beta) = \bar{n}(\beta)$, que é justamente o número de ocupação.

Tabela 6.1: Limites térmicos para a estatística Poissoniana.

Valores de j e $\frac{k_b T}{\omega}$ para que $Q = 0$							
	$j = \frac{1}{2}$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$	$j \rightarrow \infty$
$\frac{k_b T}{\omega}$	0.995	1.135	1.206	1.251	1.281	1.303	1.443

Neste caso, para $T \rightarrow 0$ obtemos uma estatística Poissoniana e para $T > 0$ temos uma estatística super-Poissoniana. Dessa forma, os estados com $j = 0$ são essencialmente clássicos, independente dos efeitos térmicos. Para os outros valores de j , temos os resultados indicados na Tabela 6.1. Aumentando o valor de j , aumenta a temperatura necessária para que ocorra a transição da estatística sub-Poissoniana para a super-Poissoniana. Obtemos também um valor limite para a estatística sub-Poissoniana, isto é, se $\frac{k_b T}{\omega} \leq 1.443$ temos $Q \leq 0$. Logo, se o sistema estiver num banho térmico que ultrapasse esse valor, o sistema seguirá uma estatística essencialmente clássica.

A partir do gráfico do Fator de Mandel (Fig. 6.6), percebemos que quanto maior o valor do j , maior é a temperatura necessária para a transição da estatística sub-Poissoniana para a estatística super-Poissoniana.

Analisando a equação (6.42), podemos reescrever o Fator de Mandel utilizando que $v^2(\beta) = \bar{n}(\beta)$ e que $u^2(\beta) = 1 + \bar{n}(\beta)$, então

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{(j+1)(1+\bar{n}(\beta))\bar{n}(\beta)}{j(1+\bar{n}(\beta))+\bar{n}(\beta)} - 1 \\
 &= \frac{(j+1)(\bar{n}^2(\beta)+\bar{n}(\beta)) - j(1+\bar{n}(\beta)) - \bar{n}(\beta)}{j(1+\bar{n}(\beta))+\bar{n}(\beta)} \\
 &= \frac{(j+1)\bar{n}^2(\beta) - j}{(j+1)\bar{n}(\beta) + j}.
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

A equação (6.43) é similar ao Fator de Mandel encontrado pelo estado número termalizado do oscilador harmônico [100]. A principal diferença é que no contexto do estado coerente do momento angular, j pode assumir valores semi-inteiros.

6.6 Função de Wigner

A Função de Wigner é uma quase probabilidade, cujos valores negativos estão associados a propriedades não clássicas do sistema. Toda informação do estado térmico $|z(\beta)\rangle$ está contida no $\rho_{|\psi(\beta)\rangle}$. Usando a definição usual de função de Wigner [100] e $\rho_{|\psi(\beta)\rangle}$ dada por (6.18), temos:

$$\begin{aligned}
f_W(q_1, p_1, q_2, p_2; z, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 e^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 e^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \\
&\times \langle q_1 - \frac{v_1}{2}, q_2 - \frac{v_2}{2} | \rho_{|z(\beta)\rangle} | q_1 + \frac{v_1}{2}, q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle \\
&= \sum_{\substack{m, m' = -j \\ n_1, n_2 = 0}}^{j, \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 e^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 e^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \\
&\times C_{\substack{m, m' \\ n_1 n_2}}(z, \beta) \langle q_1 - \frac{v_1}{2}, q_2 - \frac{v_2}{2} | n_1 + j + m, n_2 + j - m \rangle \\
&\times \langle n_1 + j + m', n_2 + j - m' | q_1 + \frac{v_1}{2}, q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle \\
&= \sum_{\substack{m, m' = -j \\ n_1, n_2 = 0}}^{j, \infty} C_{\substack{m, m' \\ n_1 n_2}}(z, \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 e^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 e^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \\
&\times \langle q_1 - \frac{v_1}{2} | n_1 + j + m \rangle \langle n_1 + j + m' | q_1 + \frac{v_1}{2} \rangle \\
&\times \langle q_2 - \frac{v_2}{2} | n_2 + j - m \rangle \langle n_2 + j - m' | q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle \\
&= \sum_{\substack{m, m' = -j \\ n_1, n_2 = 0}}^{j, \infty} \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{z^{j+m} (z^*)^{j+m'}}{(1+|z|^2)^{2j} (1+\bar{n}(\beta))^2} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!} \sqrt{(j+m')!} \sqrt{(j-m')!} u(\beta)^{4j}} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^{n_1+n_2} \\
&\times \sqrt{\frac{(n_1+j+m)!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2+j-m)!}{n_2!}} \sqrt{\frac{(n_1+j+m')!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2+j-m')!}{n_2!}} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 e^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \langle q_1 - \frac{v_1}{2} | n_1 + j + m \rangle \langle n_1 + j + m' | q_1 + \frac{v_1}{2} \rangle \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 e^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \langle q_2 - \frac{v_2}{2} | n_2 + j - m \rangle \langle n_2 + j - m' | q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Com a representação de Schwinger, relacionamos os estados do momento angular com estados do oscilador harmônico. Então as autofunções do hamiltoniano são justamente os polinômios de Hermite $H_n(x)$, o que resulta

$$\langle q + \alpha | \tau \rangle = \psi_\tau(q + \alpha) = \frac{e^{-\frac{(q+\alpha)^2}{2b^2}}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{\tau}{2}} (\tau)!^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} H_\tau\left(\frac{q + \alpha}{b}\right), \quad (6.45)$$

em que $b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$. Denotando

$$I_{\eta,\xi}(q,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{\frac{ipv}{\hbar}} \langle q - \frac{v}{2} | \eta \rangle \langle \xi | q + \frac{v}{2} \rangle, \quad (6.46)$$

como a integração dos Polinômios de Hermite resulta nos Polinômios Associados de Laguerre $L_n^m(x)$, então

$$\begin{aligned} I_{\eta,\xi}(q,p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{e^{\frac{ipv}{\hbar} - \frac{q^2}{b^2} - \frac{v^2}{4b^2}}}{\sqrt{\pi\eta!\xi!} 2^{\frac{\eta+\xi}{2}}} H_\eta\left(\frac{q - v/2}{b}\right) H_\xi\left(\frac{q + v/2}{b}\right) \\ &= 2(-1)^\xi e^{-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}} \frac{2^{\max(\eta,\xi)} \min(\eta,\xi)!}{2^{\frac{\eta+\xi}{2}} \sqrt{\eta!\xi!}} \chi_{\max(\eta,\xi)}^{|\eta-\xi|} L_{\min(\eta,\xi)}^{|\eta-\xi|} (-2\chi_\eta \chi_\xi), \end{aligned} \quad (6.47)$$

com $\chi_\eta = \frac{ipb}{\hbar} - \frac{q}{b}$ e $\chi_\xi = \frac{ipb}{\hbar} + \frac{q}{b}$. Logo $-2\chi_\eta \chi_\xi = 2\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} + 2\frac{q^2}{b^2}$ e fazendo $x_i = \frac{ip_i b}{\hbar} + \frac{q_i}{b}$ e $-x_i^* = \frac{ip_i b}{\hbar} - \frac{q_i}{b}$ para cada oscilador harmônico, obtemos que $-2\chi_\eta \chi_\xi = 2x_i^2$, somente explicitando o índice de cada oscilador.

Consequentemente temos

$$\begin{aligned} \bullet I_{n_1+j+m, n_1+j+m'}(q_1, p_1) &= 2(-1)^{n_1+j+m'} e^{-x_1^2} \frac{2^{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')}}{2^{\frac{2n_1+2j+m+m'}{2}}} \\ &\times \frac{\min(n_1+j+m, n_1+j+m')!}{\sqrt{(n_1+j+m)!(n_1+j+m')!}} \chi_{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|} \\ &\times L_{\min(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|}(2x_1^2), \end{aligned} \quad (6.48)$$

e

$$\begin{aligned} \bullet I_{n_2+j-m, n_2+j-m'}(q_2, p_2) &= 2(-1)^{n_2+j-m'} e^{-x_2^2} \frac{2^{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}}{2^{\frac{2n_2+2j-m-m'}{2}}} \\ &\times \frac{\min(n_2+j-m, n_2+j-m')!}{\sqrt{(n_2+j-m)!(n_2+j-m')!}} \chi_{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|} \\ &\times L_{\min(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|}(2x_2^2). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Com esse resultado, a Função de Wigner pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
f_W(q_1, p_1, q_2, p_2; z, \beta) = & \sum_{\substack{m, m' = -j \\ n_1, n_2 = 0}}^{j, \infty} \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{z^{j+m} (z^*)^{j+m'}}{(1+|z|^2)^{2j} (1+\bar{n}(\beta))^2} \\
& \times \frac{1}{\sqrt{(j+m)!} \sqrt{(j-m)!} \sqrt{(j+m')!} \sqrt{(j-m')!} u(\beta)^{4j}} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right)^{n_1+n_2} \\
& \times \sqrt{\frac{(n_1+j+m)!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2+j-m)!}{n_2!}} \sqrt{\frac{(n_1+j+m')!}{n_1!}} \sqrt{\frac{(n_2+j-m')!}{n_2!}} \\
& \times 2(-1)^{n_1+j+m'} e^{-x_1^2} \frac{2^{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')}}{2^{\frac{2n_1+2j+m+m'}{2}}} \\
& \times \frac{\min(n_1+j+m, n_1+j+m')!}{\sqrt{(n_1+j+m)!(n_1+j+m')!}} \chi_{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|} \\
& \times L_{\min(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|} (2x_1^2) 2(-1)^{n_2+j-m'} e^{-x_2^2} \frac{2^{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}}{2^{\frac{2n_2+2j-m-m'}{2}}} \\
& \times \frac{\min(n_2+j-m, n_2+j-m')!}{\sqrt{(n_2+j-m)!(n_2+j-m')!}} \chi_{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|} \\
& \times L_{\min(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|} (2x_2^2). \tag{6.50}
\end{aligned}$$

Efetuada algumas poucas simplificações, como $1+\bar{n}(\beta) = u^2(\beta)$, $\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} = e^{-\beta\omega}$ obtemos

$$\begin{aligned}
f_W(x_1, x_2; z, \beta) = & \sum_{\substack{m, m' = -j \\ n_1, n_2 = 0}}^{j, \infty} \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{z^{j+m} (z^*)^{j+m'} (e^{-\beta\omega})^{n_1+n_2} e^{-x_1^2-x_2^2}}{(1+|z|^2)^{2j} u(\beta)^{4j+4}} \\
& \times \frac{4\min(n_1+j+m, n_1+j+m')! \min(n_2+j-m, n_2+j-m')!}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')! n_1! n_2!}} \\
& \times (-1)^{n_1+n_2} \frac{2^{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')} 2^{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}}{2^{n_1+n_2+2j}} \\
& \times \chi_{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|} \chi_{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|} \\
& \times L_{\min(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|} (2x_1^2) L_{\min(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|} (2x_2^2). \tag{6.51}
\end{aligned}$$

Podemos ver que se $\max(n_1+j+m, n_1+j+m') = n_1+j+m$ então $m > m'$, o que implica que $\max(n_2+j-m, n_2+j-m') = n_2+j-m'$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\chi_{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|} \chi_{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|} &= (-x_2 x_1^*)^{|m-m'|} \text{ se } m < m' \text{ ou} \\
\chi_{\max(n_1+j+m, n_1+j+m')}^{|m-m'|} \chi_{\max(n_2+j-m, n_2+j-m')}^{|m-m'|} &= (-x_2^* x_1)^{|m-m'|} \text{ se } m \geq m'.
\end{aligned}$$

Tendo a função de Wigner, podemos analisar sua dependência com respeito ao valor do momento angular total j , do parâmetro z e da temperatura T . Como $z = \tan(\theta/2)e^{-i\phi}$ observaremos inicialmente a influência da fase ϕ , sobre a função de Wigner [veja os gráficos, Fig. 6.7 e Fig. 6.8]: para os ângulos $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$, a função de Wigner tem a mesma forma, por isso só precisamos analisar uma delas. Para esses casos observamos que a variação de j não altera a forma da função de Wigner, apenas seus valores máximos e mínimos.

A menor região negativa é observada quando $\phi = 0$, o que é mostrado no gráfico (Fig 6.9) para $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$. Quando comparamos este caso com o de $\phi = \pi$, percebemos que a diferença reside numa rotação de 90° , sendo então suficiente analisar somente o caso com $\phi = 0$. Percebemos claramente que há uma relação entre j e o número de picos e vales da função de Wigner, para cada semi-plano: se j for inteiro, temos $2j + 1$ picos e $2j$ vales; caso j seja semi-inteiro, temos $2j$ picos e $2j + 1$ vales. A função de Wigner evidencia uma distinção entre valores inteiro e semi-inteiro de j . Como a parte negativa da função de Wigner representa a não classicalidade do sistema, notamos que os valores semi-inteiros de j geram mais vales do que picos, diferente do caso de j inteiro, representando estados mais não clássicos.

Construímos os gráficos da função de Wigner para $j = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ e com $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$; estes gráficos estão representados, respectivamente, em (Fig. 6.10), (Fig. 6.11), (Fig. 6.12), (Fig. 6.13), (Fig. 6.14) e (Fig. 6.15). O comportamento da função de Wigner obtida neste trabalho coincide com o encontrado por Dowling *et al* [152], quando comparamos as ondulações e o pico central. Dessa forma os resultados encontrados são coerentes com os existentes na literatura.

Um ponto a observar, é que o aumento da temperatura diminui os valores da função de Wigner, de forma que $T \rightarrow +\infty$ implica em $f_W \rightarrow 0$. Há, entretanto, diferença para valores inteiros e semi-inteiros de j : quando j é um valor inteiro, o aumento da temperatura diminui drasticamente a parte negativa, enquanto permanecem dois picos positivos. Isso ocorre independente do valor inteiro que j assume, caracterizando então uma propriedade da função de Wigner; já quando j é semi-inteiro, o aumento da temperatura diminui drasticamente a parte positiva enquanto permanecem dois vales negativos. Isso também ocorre independente do valor semi-inteiro que j tenha.

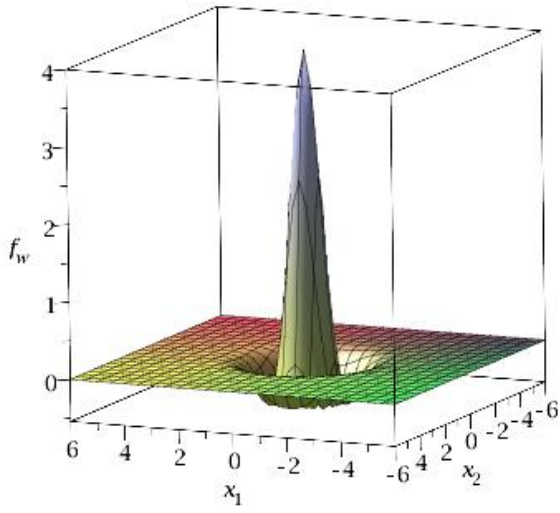
Portanto os estados com j semi-inteiro devem ser mais resistentes, ou seja, preservam mais seu caráter quântico, sob a ação da temperatura que os estados com j inteiro, já que a parte negativa da função de Wigner é mais preservada no primeiro caso.

A influência de z pode ser obtida comparando os gráficos (Fig. 6.16) e (Fig. 6.17) de $j = \frac{5}{2}$ e $j = 3$ com $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$, sendo $\theta = \{0, 01\pi, 0.3\pi, 0.6\pi, 0.99\pi\}$. A variação de θ gira a função

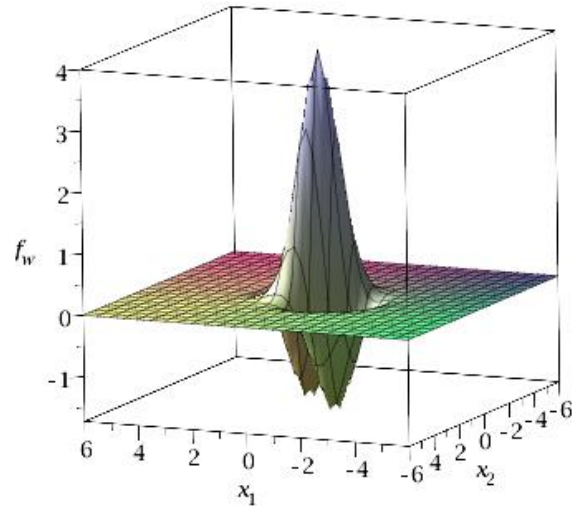
de Wigner em 90° no sentido horário, mantendo a forma inalterada. À medida que a rotação acontece, a função de Wigner é praticamente esticada para cima e para baixo, isto é, os valores máximos e mínimos são aumentados e diminuídos respectivamente, variando de 0.03 até 0.2 para $j = \frac{5}{2}$ e de 0.005 até 0.07 para $j = 3$. Essa variação chega num máximo quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e depois volta a diminuir quando $\theta \rightarrow \pi$. Logo, θ não representa somente uma rotação pois, se assim fosse, não teríamos um aumento nos valores positivos e negativos da função de Wigner. A variação de θ gera também uma alteração nas características do estado, sendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ o valor mais significativo.

Figura 6.7: $f_w \times x_2 \times x_1$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$, $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right\}$ e $\phi = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$.

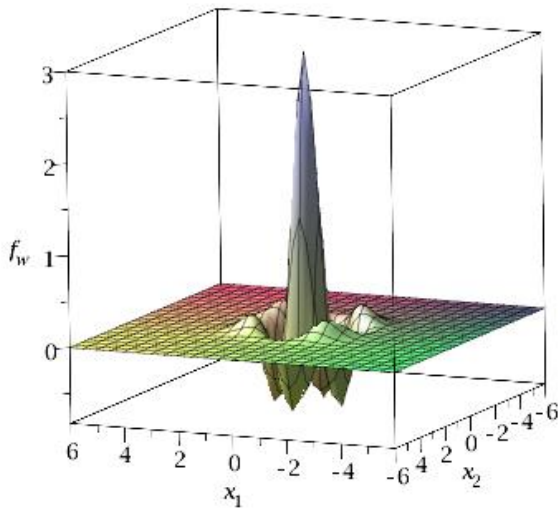
$j=1/2$ e $\phi=\pi/2$



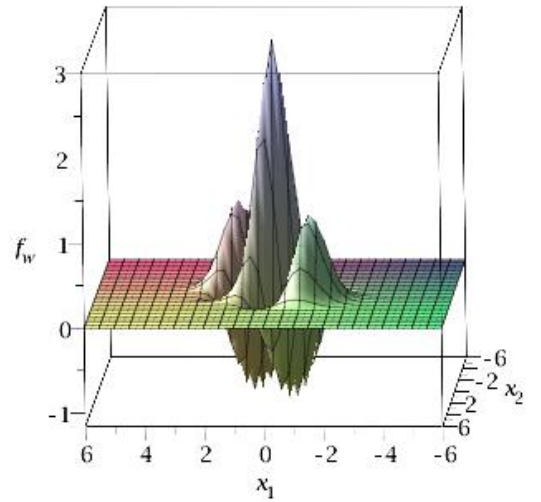
$j=1/2$ e $\phi=\pi$



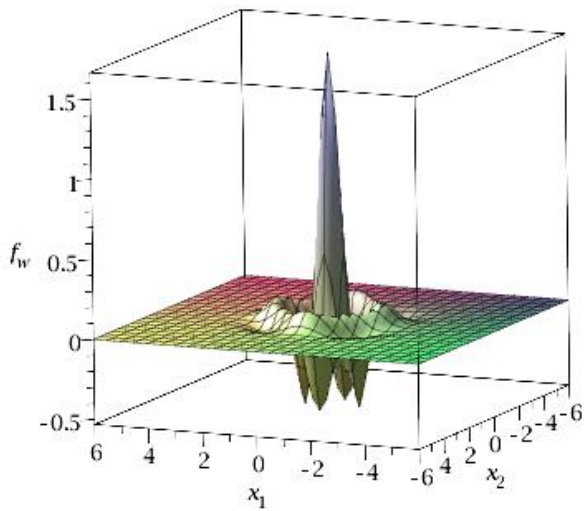
$j=1$ e $\phi=\pi/2$



$j=1$ e $\phi=\pi$



$j=3/2$ e $\phi=\pi/2$



$j=3/2$ e $\phi=\pi$

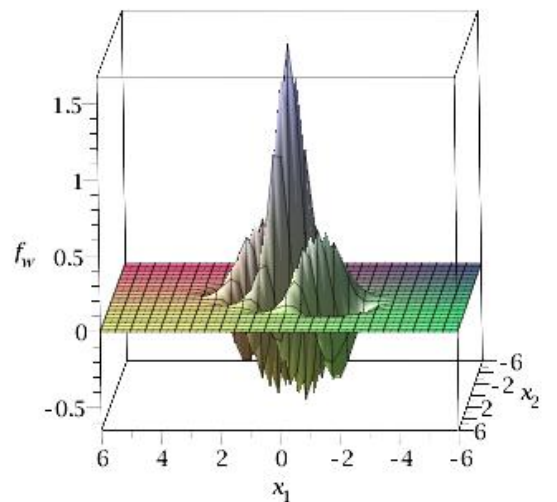
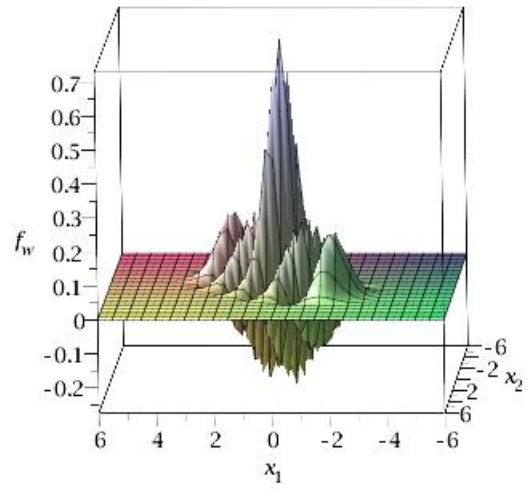
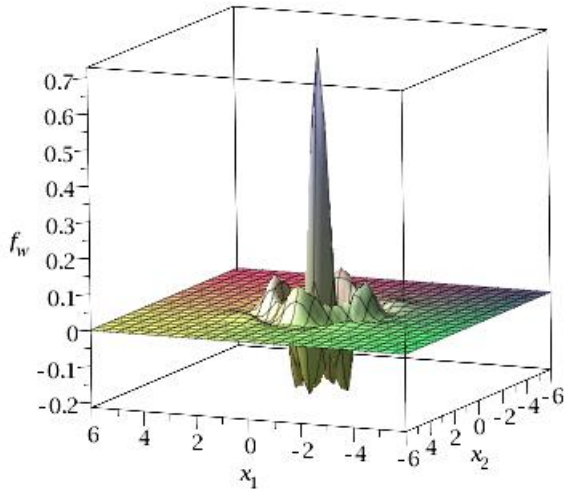


Figura 6.8: f_W x x_2 x x_1 para $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, j = \{2, \frac{5}{2}, 3\}$ e $\phi = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$.

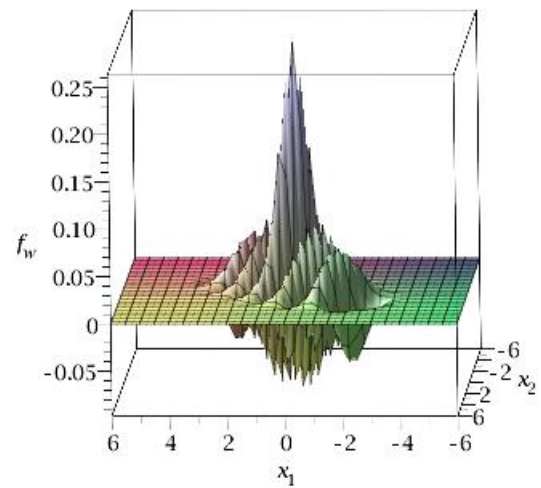
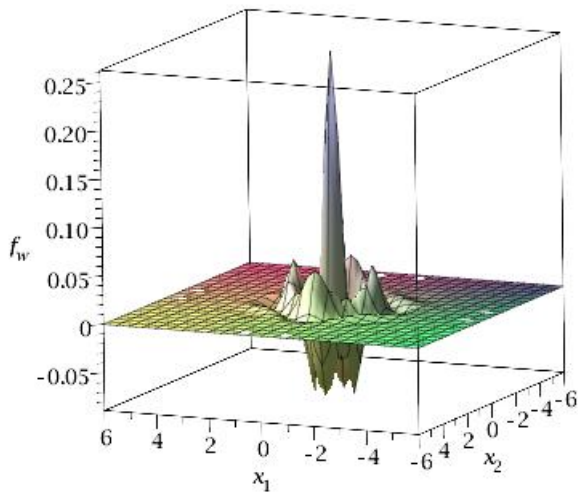
$j=2$ e $\phi=\pi/2$

$j=2$ e $\phi=\pi$



$j=5/2$ e $\phi=\pi/2$

$j=5/2$ e $\phi=\pi$



$j=3$ e $\phi=\pi/2$

$j=3$ e $\phi=\pi$

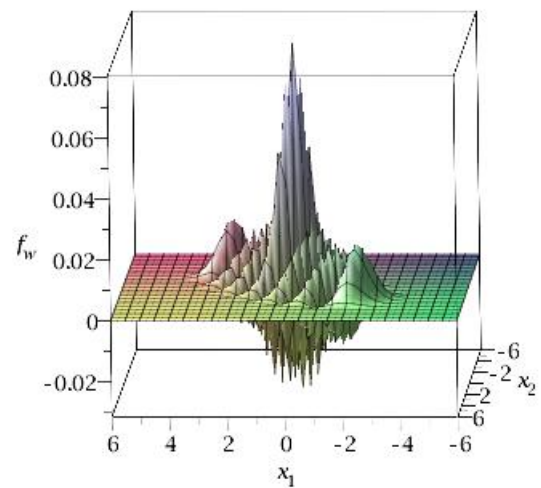
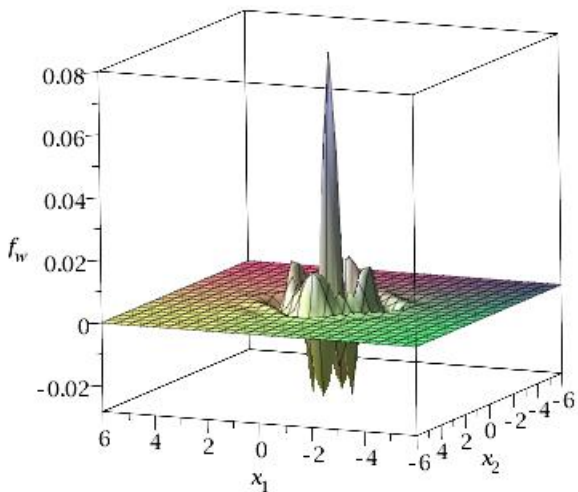
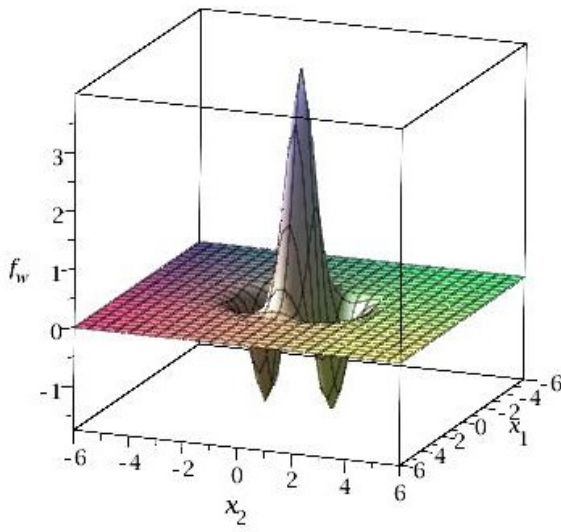
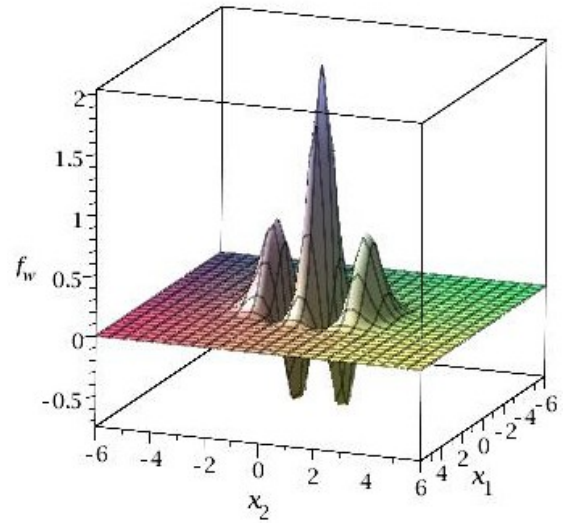


Figura 6.9: $f_W \times x_2 \times x_1$ com $\phi = 0, z = 0.1, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.

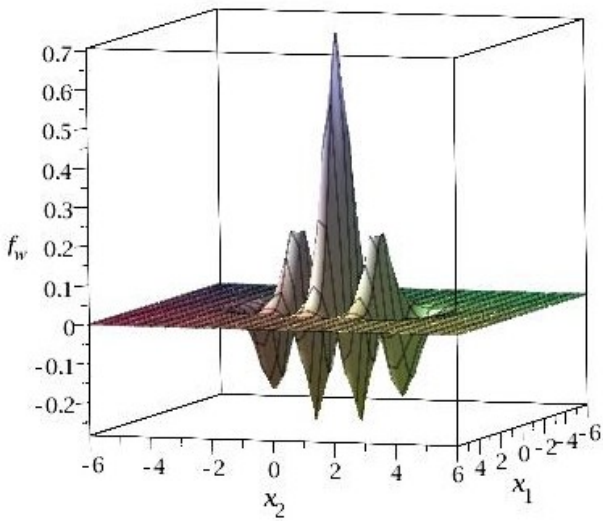
$j=1/2$



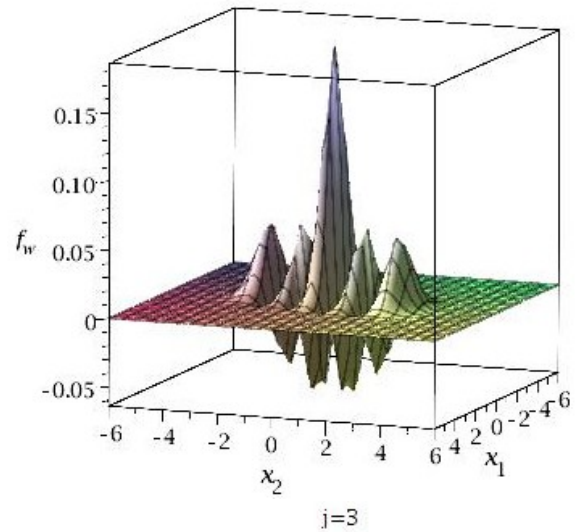
$j=1$



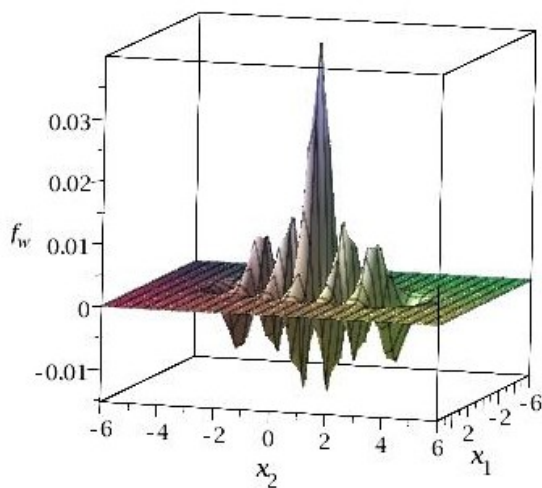
$j=3/2$



$j=2$



$j=5/2$



$j=3$

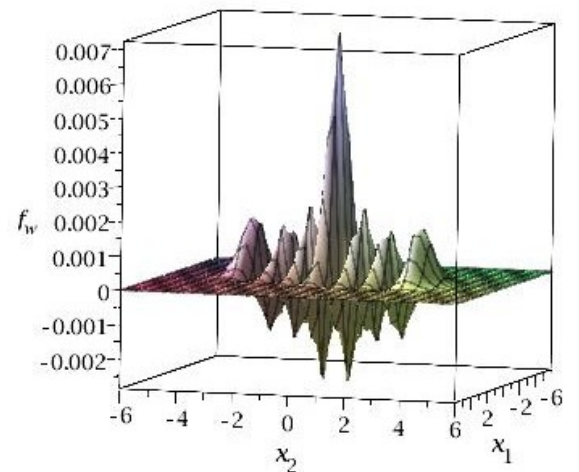
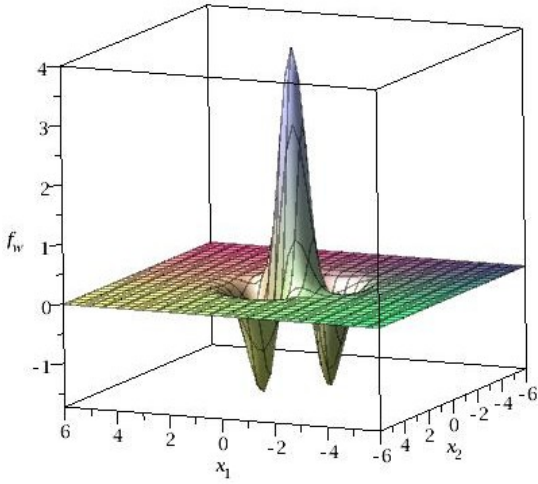
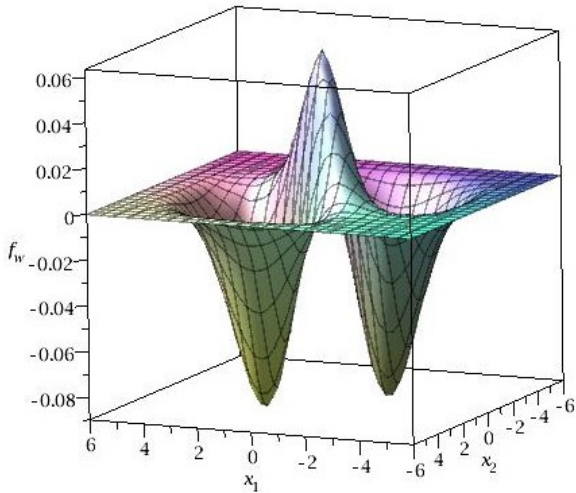


Figura 6.10: $f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = \frac{1}{2}$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$.

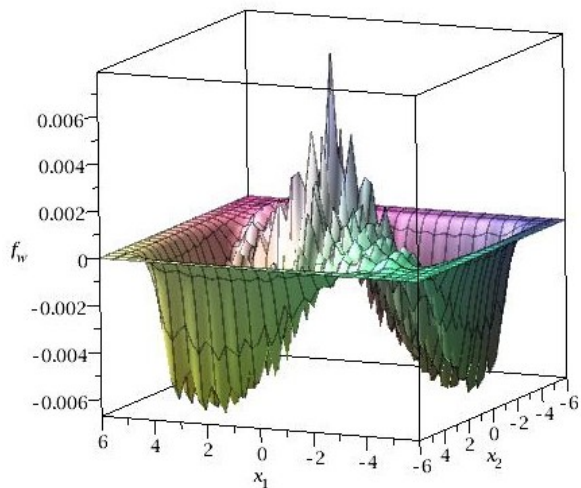
$j=1/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 0.01$



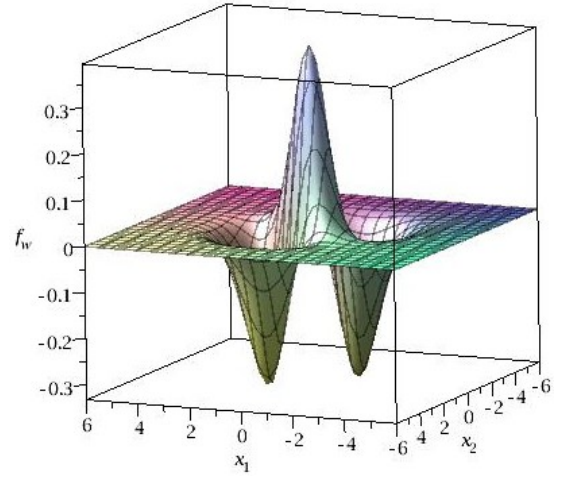
$j=1/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 2$



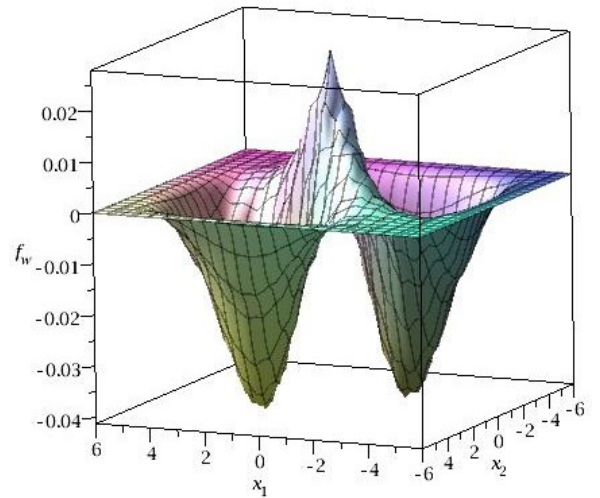
$j=1/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 8$



$j=1/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 1$



$j=1/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 3$



$j=1/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 50$

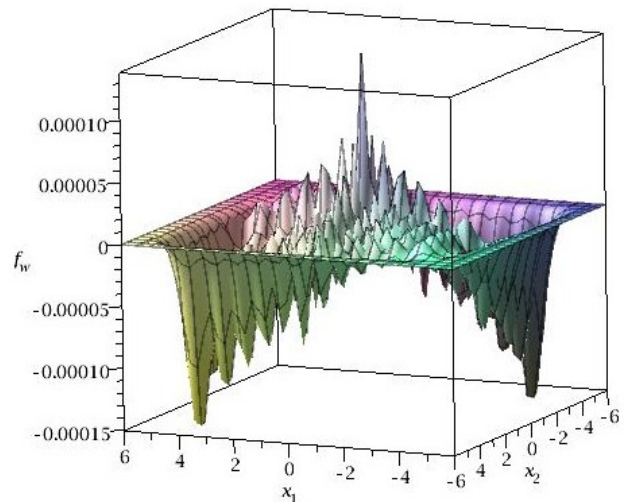
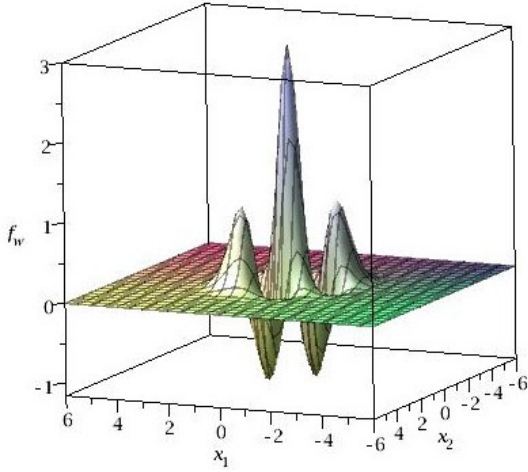
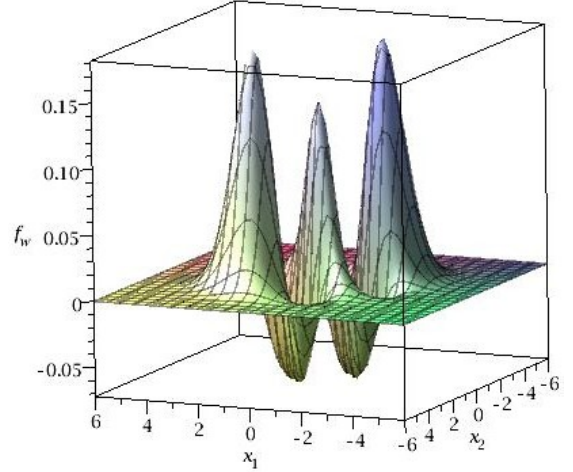


Figura 6.11: f_W x x_2 x x_1 para $j = 1$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$.

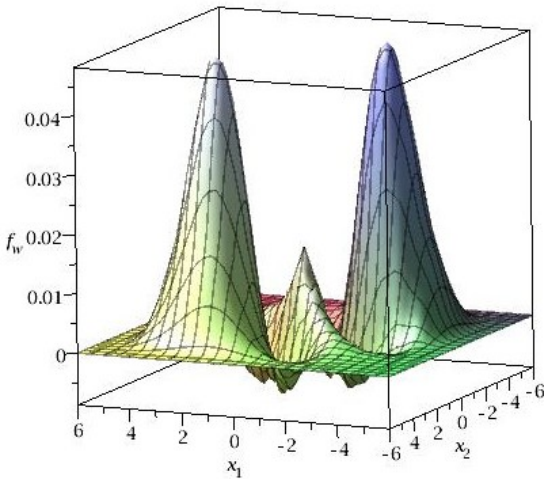
$j=1, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 0.01$



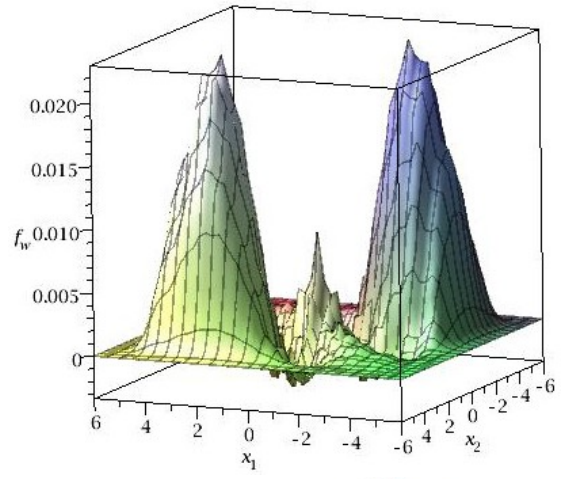
$j=1, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 1$



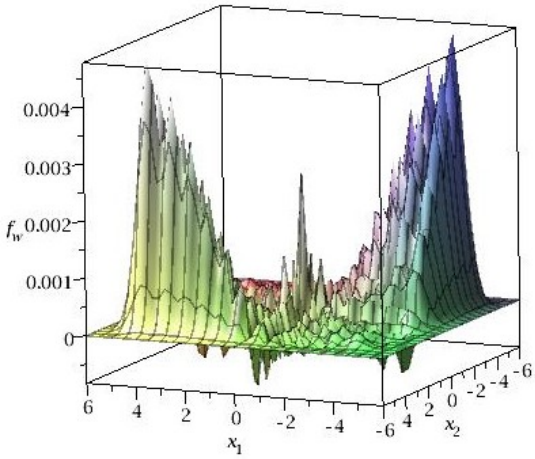
$j=1, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 2$



$j=1, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 3$



$j=1, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 8$



$j=1, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 50$

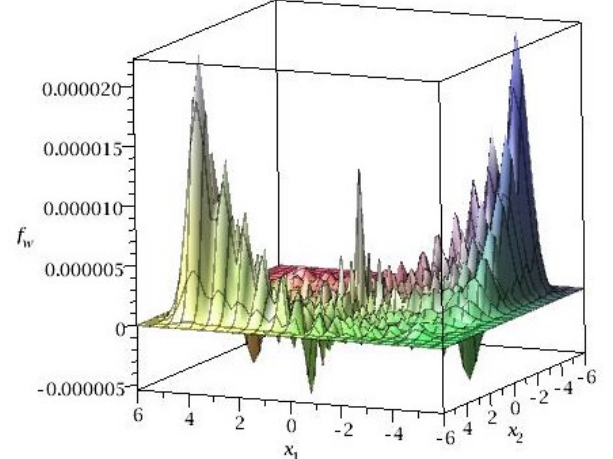
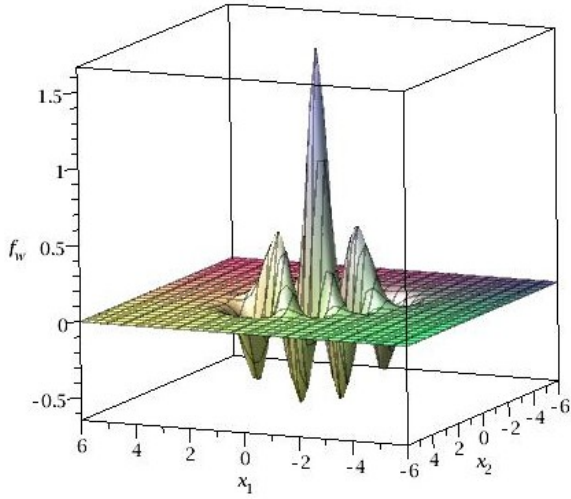


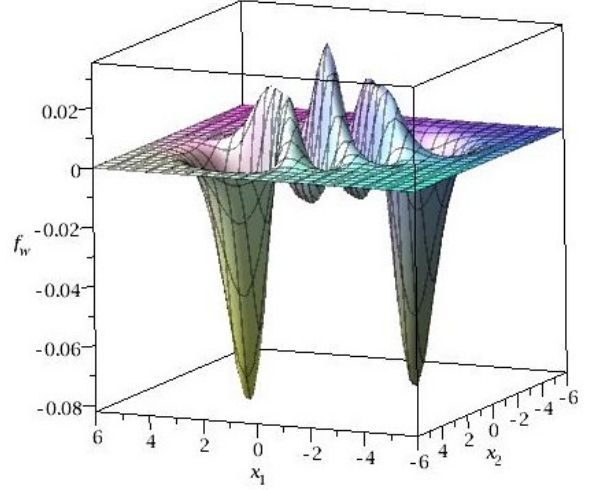
Figura 6.12: f_W x x_2 x x_1 para $j = \frac{3}{2}$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$.

$j=3/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 0.01$

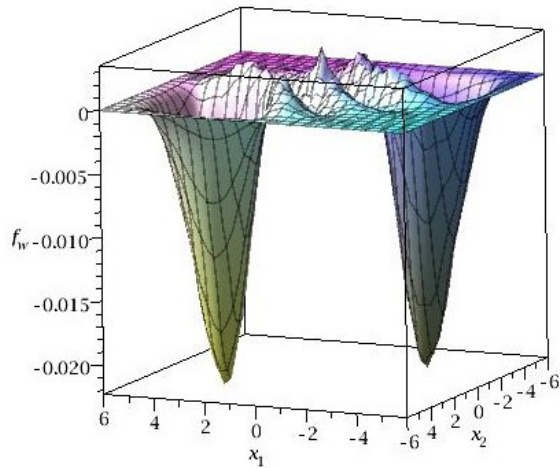


$j=3/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 2$

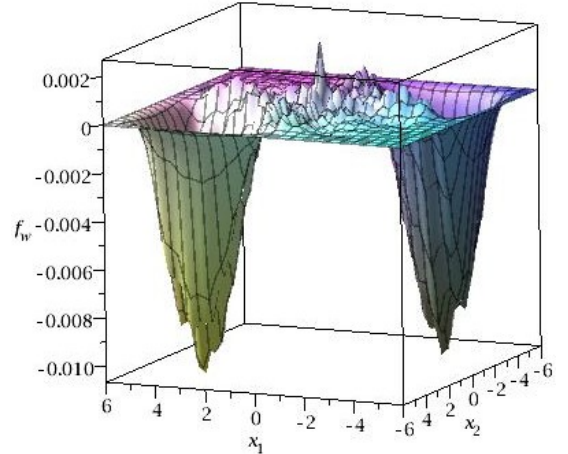
$j=3/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 1$



$j=3/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 3$



$j=3/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 8$



$j=3/2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 50$

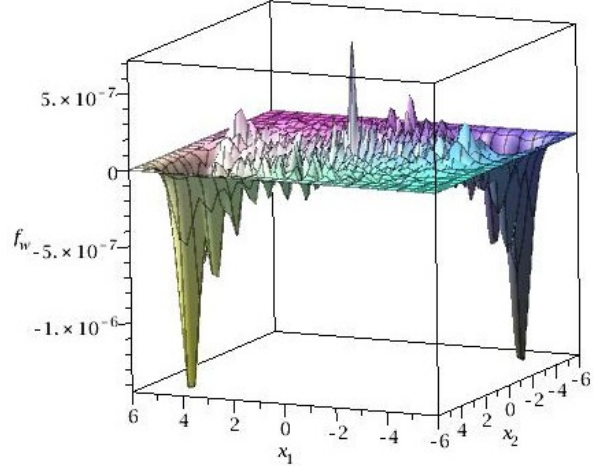
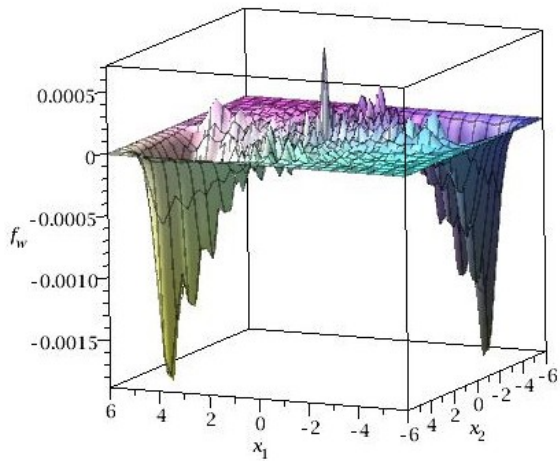
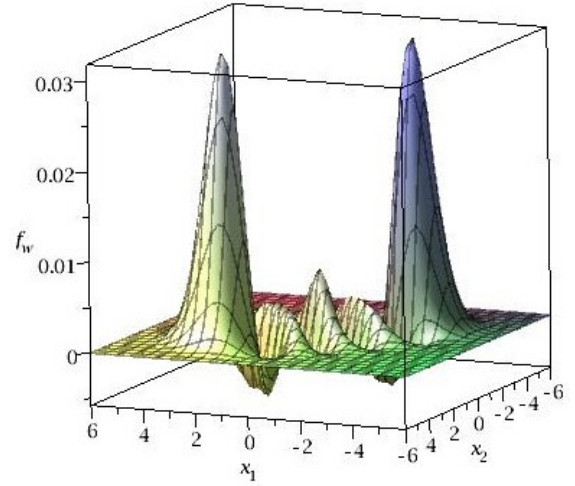
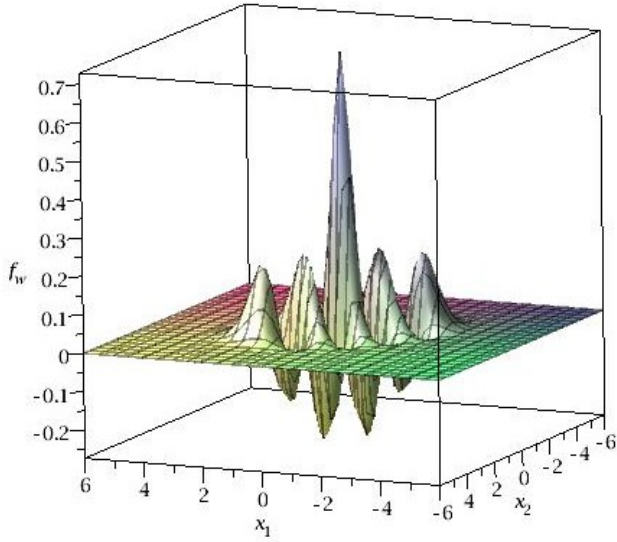


Figura 6.13: $f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = 2$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$.

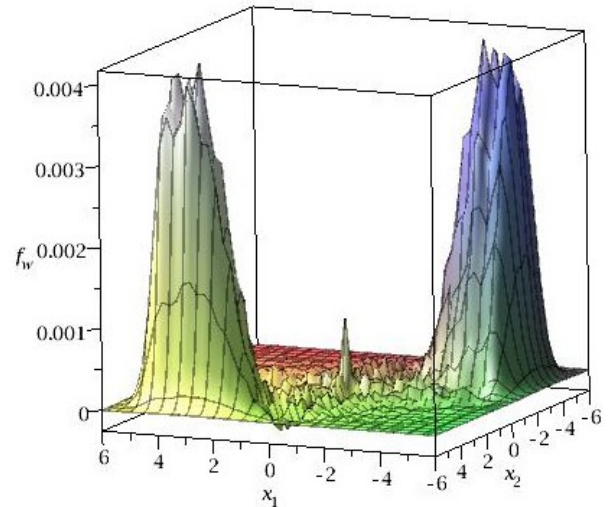
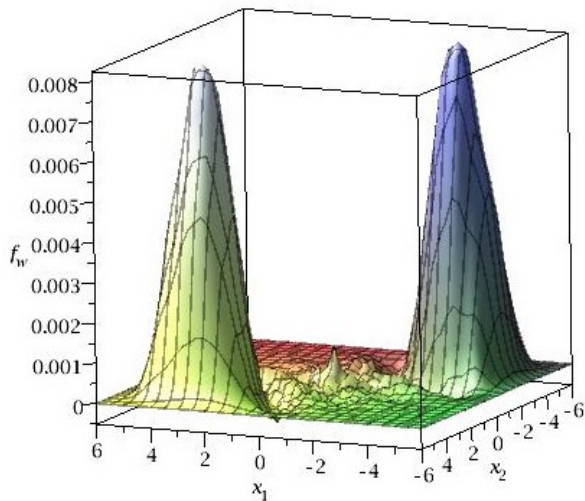
$j=2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 0.01$

$j=2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 1$



$j=2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 2$

$j=2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 3$



$j=2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 8$

$j=2, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 50$

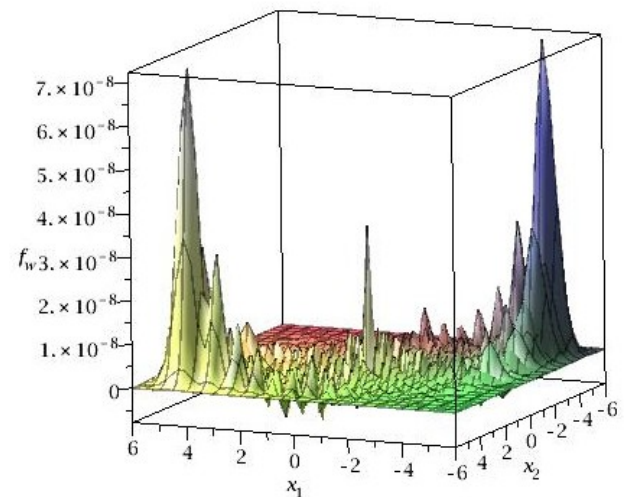
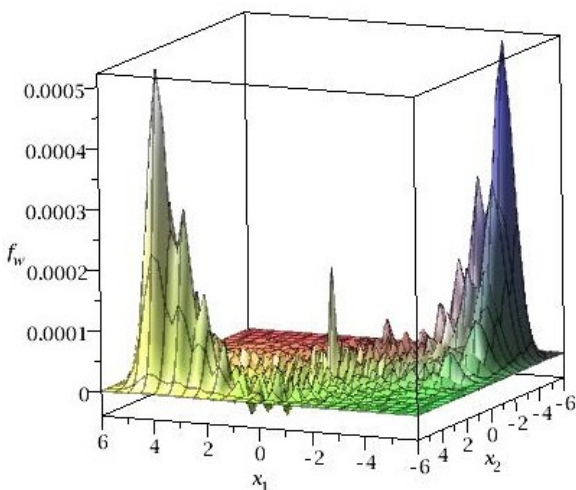


Figura 6.14: $f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = \frac{5}{2}$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$.

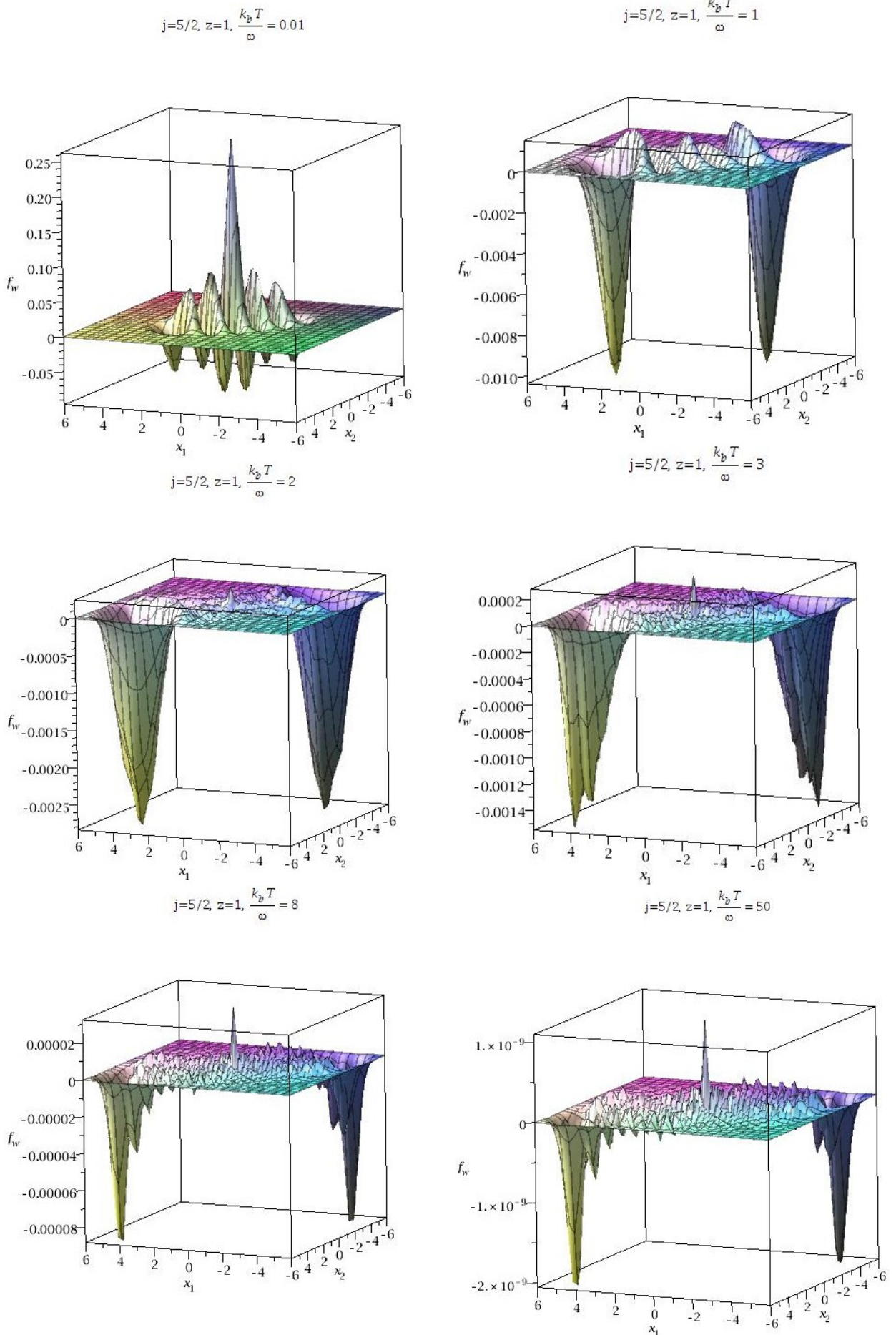
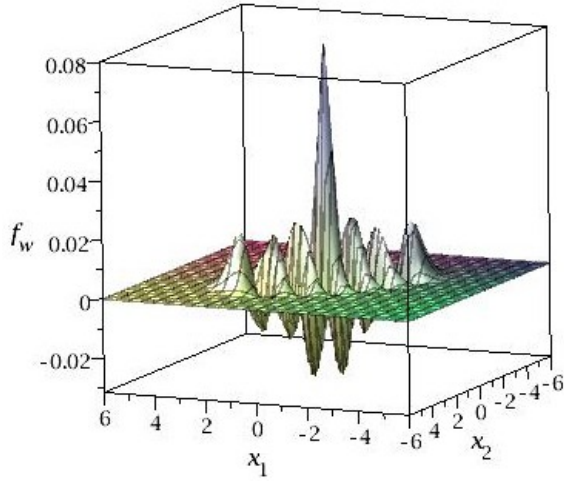
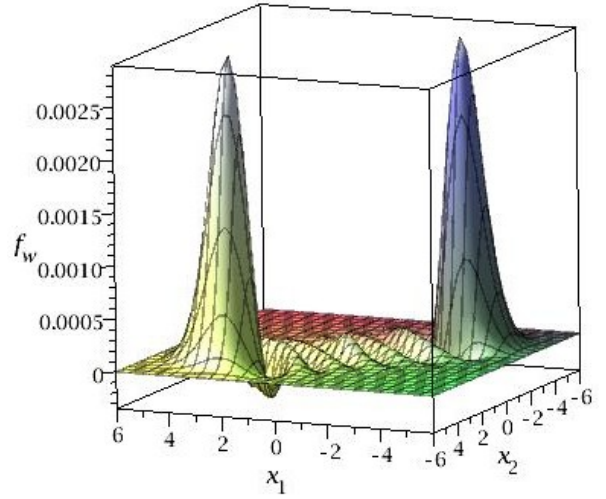


Figura 6.15: $f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = 3$, com $z = 1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.01, 1, 2, 3, 8, 50\}$.

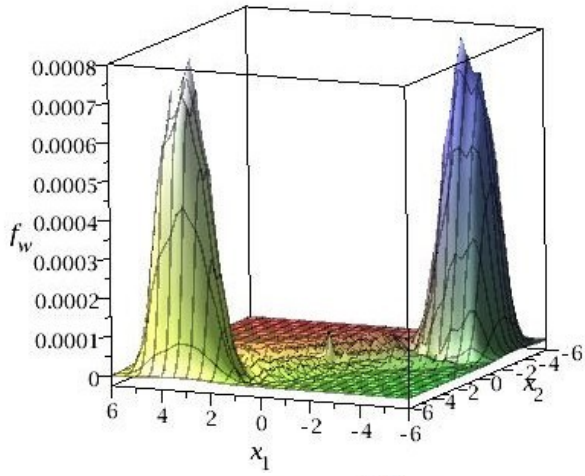
$j=3, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 0.01$



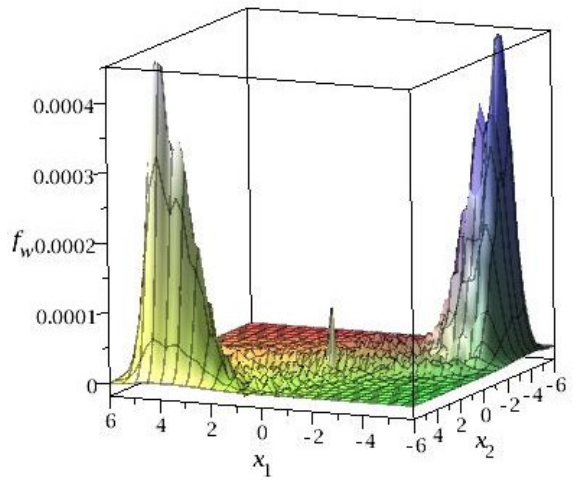
$j=3, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 1$



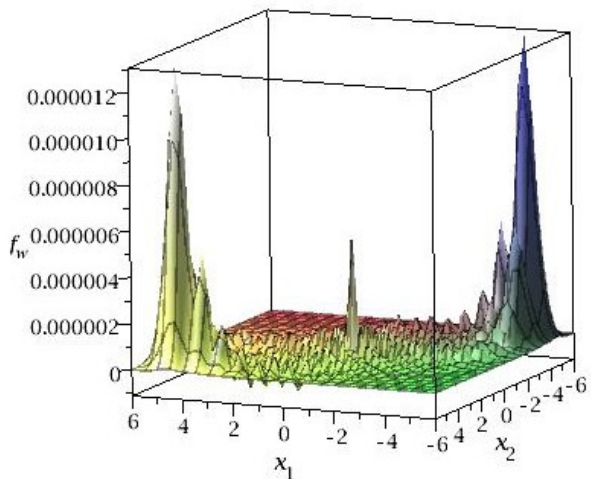
$j=3, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 2$



$j=3, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 3$



$j=3, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 8$



$j=3, z=1, \frac{k_b T}{\omega} = 50$

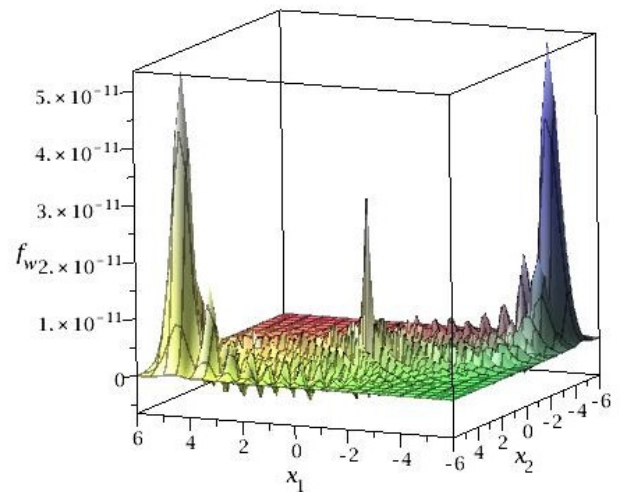
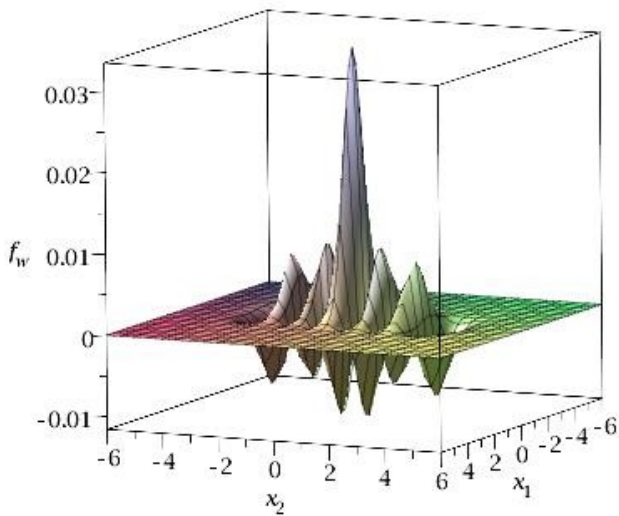
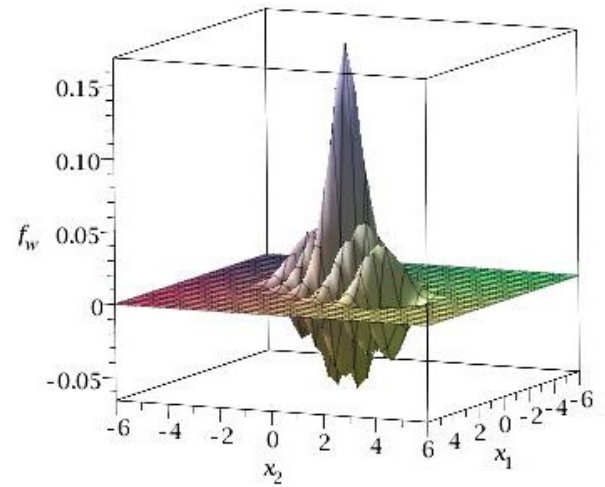


Figura 6.16: $f_W \times x_2 \times x_1$ para $j = \frac{5}{2}$, com $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $\theta = \{0.01\pi, 0.3\pi, 0.6\pi, 0.99\pi\}$.

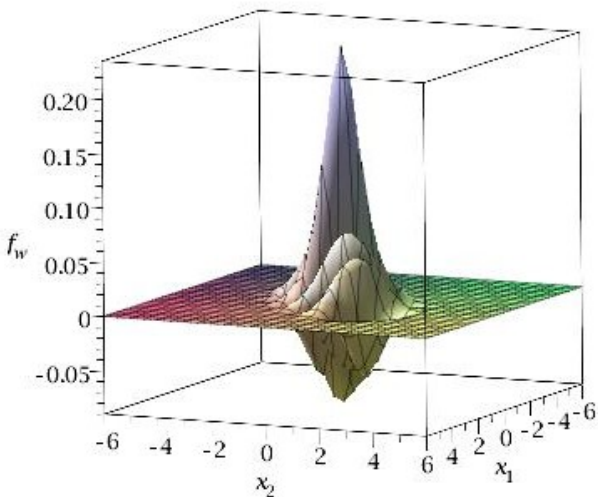
$$j=5/2, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.01\pi$$



$$j=5/2, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.3\pi$$



$$j=5/2, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.6\pi$$



$$j=5/2, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.99\pi$$

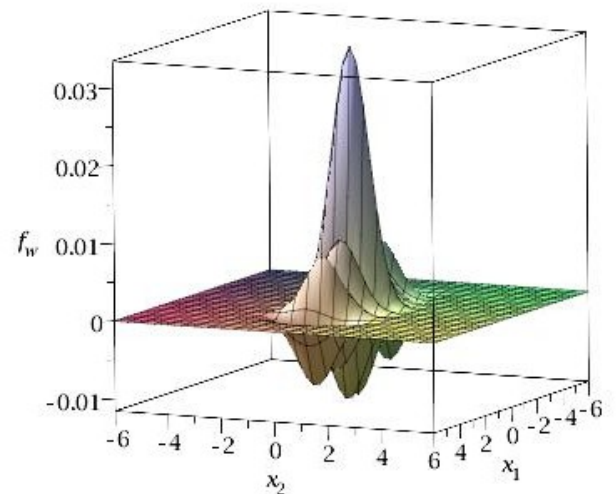
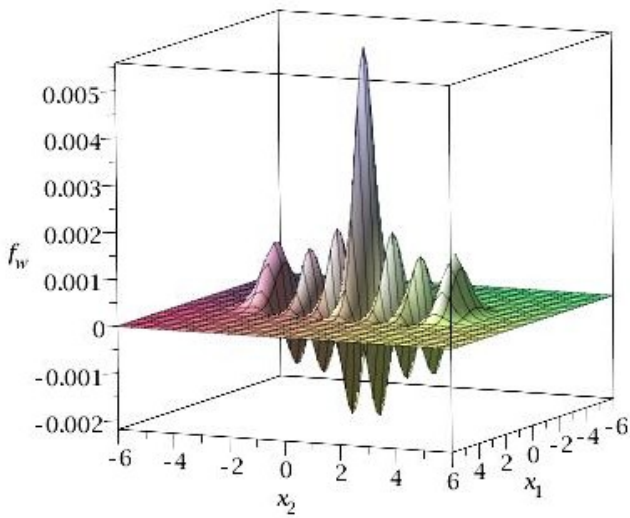
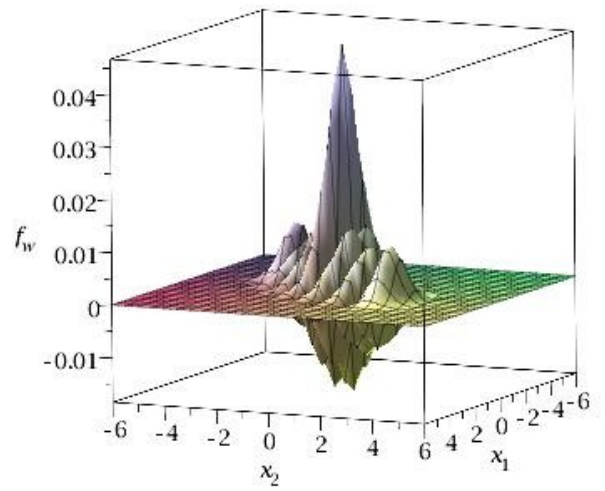


Figura 6.17: f_W x x_2 x x_1 para $j = 3$, com $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $\theta = \{0.01\pi, 0.3\pi, 0.6\pi, 0.99\pi\}$.

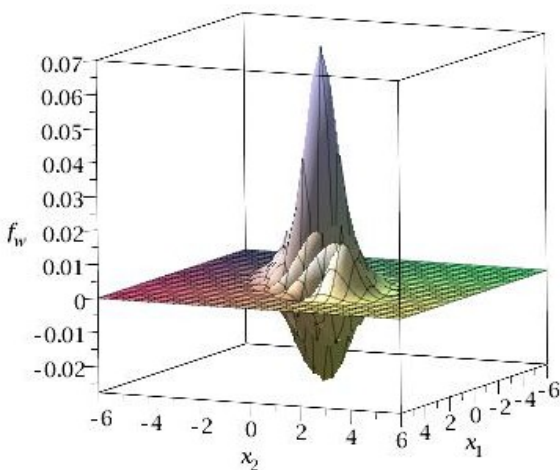
$$j=3, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.01\pi$$



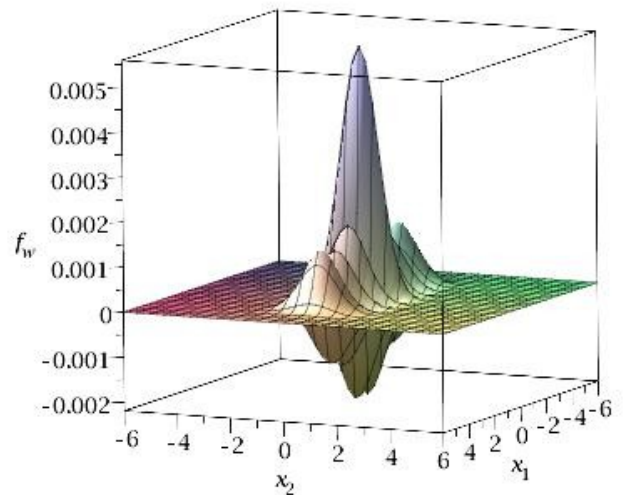
$$j=3, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.3\pi$$



$$j=3, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.6\pi$$



$$j=3, \frac{k_b T}{\omega} = 0.1, \theta=0.99\pi$$



7 *Estado Coerente Termalizado e os Parâmetros de Compressão*

No contexto dos autoestados do Momento Angular, o estado coerente possui grande destaque [22, 24–28]. Neste capítulo aplicaremos o formalismo da DCT para, a partir das médias e variâncias térmicas, analisar a relação da compressão com a temperatura para esses estados.

Apresentamos a versão térmica dos parâmetros de compressão ξ_R proposto por Wineland [53, 54], $\xi_{R'}$ proposto por Sorensen [55] e ξ_T e $\xi_{T'}$ proposto por Tóth [58]. No caso em que o estado coerente térmico com momento angular total j , pode ser descrito por N subsistemas de spin $\frac{1}{2}$, com $N = 2j$, também analisamos o parâmetro de compressão ξ_E igualmente proposto por Tóth [57].

7.1 Médias e Variâncias Térmicas do Estado Coerente

A partir da equação (6.11), o estado coerente termalizado é

$$\begin{aligned}
 |z(\beta)\rangle &= U(\beta)|z, \widetilde{00}\rangle \\
 &= \frac{e^{zJ_+(\beta)}}{(1+|z|^2)^j} |0_j(\beta)\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle. \tag{7.1}
 \end{aligned}$$

Para calcular as médias $\langle z(\beta)|J_i|z(\beta)\rangle$, iremos escrever os operadores J_x, J_y e J_z em termo dos operadores de criação e aniquilação térmicos, lembrando que $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ e usando as expressões (2.38), (2.40) e (6.2). Assim

$$\begin{aligned}
J_x &= \frac{1}{2} [a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger] \\
&= \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) + a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2} [\tilde{a}_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_2(\beta) + \tilde{a}_1(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta)] \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1(\beta) a_2(\beta) + \tilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta) + a_1(\beta) \tilde{a}_2(\beta)], \quad (7.2)
\end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
J_y &= \frac{1}{2i} [a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger] \\
&= \frac{u(\beta)^2}{2i} [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) - a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2i} [-\tilde{a}_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_2(\beta) + \tilde{a}_1(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta)] \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} [a_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1(\beta) a_2(\beta) - \tilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta) - a_1(\beta) \tilde{a}_2(\beta)], \quad (7.3)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_z &= \frac{1}{2} [a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2] \\
&= \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta) a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta) a_2(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2} [\tilde{a}_1(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) - \tilde{a}_2(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta)] \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1(\beta) a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta) - a_2(\beta) \tilde{a}_2(\beta)]. \quad (7.4)
\end{aligned}$$

Os operadores til são similares aos operadores usuais, com $\tilde{a}_i|0(\beta)\rangle = 0$, $i = \{1, 2\}$. Usando (7.1) e as relações (7.2), (7.3) e (7.4) temos:

$$\begin{aligned}
J_x|z(\beta)\rangle &= \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) + a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta)] \right\} \\
&\quad \times \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} |\beta; j+m, j-m, \tilde{0}\tilde{0}\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \left\{ \frac{u^2(\beta)}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \tilde{0}\tilde{0}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u^2(\beta)}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \tilde{0}\tilde{0}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j+m+1)} |\beta; j+m+1, j-m, \tilde{0}\tilde{1}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j-m+1)} |\beta; j+m, j-m+1, \tilde{1}\tilde{0}\rangle \right\}, \quad (7.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_y|z(\beta)\rangle &= \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) - a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) - \tilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta)] \right\} \\
&\quad \times \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} |\beta; j+m, j-m, \tilde{00}\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \left\{ \frac{u^2(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \tilde{00}\rangle \right. \\
&\quad - \frac{u^2(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \tilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m+1)} |\beta; j+m+1, j-m, \tilde{01}\rangle \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{(j-m+1)} |\beta; j+m, j-m+1, \tilde{10}\rangle \right\} \quad (7.6)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_z|z(\beta)\rangle &= \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta)a_2(\beta)] |z(\beta)\rangle + \frac{v(\beta)^2}{2} [\tilde{a}_1(\beta)\tilde{a}_1^\dagger(\beta) - \tilde{a}_2(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)] |z(\beta)\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_1^\dagger(\beta) - a_2^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)] |z(\beta)\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \left\{ u^2(\beta)m |\beta; j+m, j-m, \tilde{00}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j+m+1} |\beta; j+m+1, j-m, \tilde{10}\rangle \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j-m+1} |\beta; j+m, j-m+1, \tilde{01}\rangle \right\}. \quad (7.7)
\end{aligned}$$

Desto maneira, a média térmica dos operadores J_i são

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta)|J_x|z(\beta)\rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \sqrt{\binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&\quad \times \left\{ \frac{u^2(\beta)}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{j+m',j+m+1} + \frac{u^2(\beta)}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{j+m',j+m-1} \right\} \\
&= \operatorname{Re}(z) u^2(\beta) \sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m) \\
&= u^2(\beta) j \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\
&= \frac{j \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi)}{1 - e^{-\beta\omega}}, \quad (7.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta) | J_y | z(\beta) \rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m} \binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&\quad \times \left\{ \frac{u^2(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{j+m',j+m+1} - \frac{u^2(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{j+m',j+m-1} \right\} \\
&= \text{Im}(z) u^2(\beta) \sum_{m=-j}^j \frac{|z|^{2j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m) \\
&= u^2(\beta) j \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \\
&= \frac{j \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi)}{1 - e^{-\beta\omega}} \tag{7.9}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta) | J_z | z(\beta) \rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m} \binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \{ u^2(\beta) m \delta_{j+m',j+m} \} \\
&= j u^2(\beta) \frac{(|z|^2 - 1)}{1 + |z|^2} \\
&= -u^2(\beta) j \cos(\theta) \\
&= \frac{-j \cos(\theta)}{1 - e^{-\beta\omega}}. \tag{7.10}
\end{aligned}$$

As médias térmicas coincidem com as equações (4.8), (4.9) e (4.10), ao tomarmos o limite para $T \rightarrow 0$. Calculando os segundos momentos térmicos, obtemos

$$\begin{aligned}
J_x^2 |z(\beta)\rangle &= \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2} [\tilde{a}_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2(\beta) + \tilde{a}_1(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1(\beta)a_2(\beta) + \tilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta) + a_1(\beta)\tilde{a}_2(\beta)] \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \left(\frac{u^2(\beta)}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{u^2(\beta)}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j+m+1)} |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j-m+1)} |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \\
&\quad \times \left\{ \frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} |\beta; j+m+2, j-m-2, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u^4(\beta)}{4} (j+m)(j-m+1) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u^4(\beta)}{4} (j+m+1)(j-m) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)} |\beta; j+m-2, j-m+2, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} (j-m+1) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} (j+m+1) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right\}. \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Na equação (7.11) só consideramos os elementos $|\widetilde{00}\rangle$, já que os outros se anularão ao tomarmos a média térmica, devido à ortogonalidade dos estados. Então,

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta) | J_x^2 | z(\beta) \rangle &= \sum_{m, m' = -j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m} \binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \left\{ \frac{u^4(\beta)}{2} [j(j+1) - m^2] \delta_{j+m', j+m} \right. \\
&\quad + \frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \delta_{j+m', j+m+2} \\
&\quad + \frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)} \delta_{j+m', j+m-2} \\
&\quad \left. + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} [j+1] \delta_{j+m', j+m} \right\} \\
&= u^4(\beta) \left\{ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] + \frac{j(2j-1) \sin^2(\theta) \cos 2\phi}{4} \right\} \\
&\quad + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1), \tag{7.12}
\end{aligned}$$

que é semelhante à equação (4.14). Continuando temos,

$$\begin{aligned}
J_y^2 | z(\beta) \rangle &= \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) - a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2i} [-\tilde{a}_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_2(\beta) + \tilde{a}_1(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} [a_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_2^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1(\beta) a_2(\beta) - \tilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta) - a_1(\beta) \tilde{a}_2(\beta)] \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \frac{u^2(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \tilde{00} \rangle \right. \\
&\quad - \frac{u^2(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \tilde{00} \rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m+1)} |\beta; j+m+1, j-m, \tilde{01} \rangle \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{(j-m+1)} |\beta; j+m, j-m+1, \tilde{10} \rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} |\beta; j+m+2, j-m-2, \tilde{00} \rangle \right. \\
&\quad + \left(\frac{u^4(\beta)}{4} (j+m)(j-m+1) |\beta; j+m, j-m, \tilde{00} \rangle \right. \\
&\quad + \frac{u^4(\beta)}{4} (j+m+1)(j-m) |\beta; j+m, j-m, \tilde{00} \rangle \\
&\quad - \frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)} |\beta; j+m-2, j-m+2, \tilde{00} \rangle \\
&\quad + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} (j-m+1) |\beta; j+m, j-m, \tilde{00} \rangle \\
&\quad \left. + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} (j+m+1) |\beta; j+m, j-m, \tilde{00} \rangle \right\}, \tag{7.13}
\end{aligned}$$

onde novamente só consideramos os elementos $|\widetilde{00}\rangle$, pelo mesmo motivo anterior. Logo

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta)|J_y^2|z(\beta)\rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}\binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&\times \left\{ -\frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \delta_{j+m',j+m+2} \right. \\
&- \frac{u^4(\beta)}{4} \sqrt{(j+m)(j-m+1)(j+m-1)(j-m+2)} \delta_{j+m',j+m-2} \\
&+ \frac{u^4(\beta)}{4} [(j(j+1)-m^2)] \delta_{j+m',j+m} \\
&\left. + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} (j+1) \delta_{j+m',j+m} \right\} \\
&= u^4(\beta) \left\{ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1] - \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4} \right\} \\
&+ \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1), \tag{7.14}
\end{aligned}$$

que é similar à equação (4.16). Por fim,

$$\begin{aligned}
J_z^2|z(\beta)\rangle &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \\
&\left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta)a_2(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2} [\tilde{a}_1(\beta)\tilde{a}_1^\dagger(\beta) - \tilde{a}_2(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)] \right. \\
&+ \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_1^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1(\beta)a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) - a_2(\beta)\tilde{a}_2(\beta)] \left. \right\} \\
&\times \left\{ u^2(\beta)m|\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&+ \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j+m+1} |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{10}\rangle \\
&\left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j-m+1} |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{01}\rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \\
&\times \left[u^4(\beta)m^2|\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1)|\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right], \tag{7.15}
\end{aligned}$$

onde, pelo mesmo motivo anterior, só consideramos os termos com $|\widetilde{00}\rangle$. Segue que

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta) | J_z^2 | z(\beta) \rangle &= \sum_{m', m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m} \binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&\quad \times \left[u^4(\beta) m^2 \delta_{j+m', j+m} + \frac{u^2(\beta) v^2(\beta)}{2} (j+1) \delta_{j+m', j+m} \right] \\
&= u^4(\beta) \frac{j \left[j|z|^4 - 2j|z|^2 + 2|z|^2 + j \right]}{(1+|z|^2)^2} + \frac{u^2(\beta) v^2(\beta)}{2} (j+1) \\
&= u^4(\beta) \frac{j}{2} \left[2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1 \right] + \frac{u^2(\beta) v^2(\beta)}{2} (j+1). \quad (7.16)
\end{aligned}$$

Com esses resultados, utilizando a equação (4.18), obtemos

$$\langle z(\beta) | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | z(\beta) \rangle = u^4(\beta) j(j+1) + \frac{3u^2(\beta) v^2(\beta)}{2} (j+1). \quad (7.17)$$

A partir desses cálculos encontrarmos as variâncias térmicas de cada um dos operadores J_i , ou seja,

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x(\beta))^2 &= u^4(\beta) \left\{ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} \left[2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1 \right] + \frac{j(2j-1) \operatorname{sen}^2(\theta) \cos 2\phi}{4} \right\} \\
&\quad + \frac{u^2(\beta) v^2(\beta)}{2} (j+1) - u^4(\beta) j^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi), \quad (7.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta J_y(\beta))^2 &= u^4(\beta) \left\{ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} \left[2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1 \right] - \frac{j(2j-1) \operatorname{sen}^2(\theta) \cos 2\phi}{4} \right\} \\
&\quad + \frac{u^2(\beta) v^2(\beta)}{4} (j+1) - u^4(\beta) j^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi), \quad (7.19)
\end{aligned}$$

$$(\Delta J_z(\beta))^2 = u^4(\beta) \frac{j}{2} \left[2j \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1 \right] + \frac{u^2(\beta) v^2(\beta)}{2} (j+1) - u^4(\beta) j^2 \cos^2(\theta). \quad (7.20)$$

Comparando com a equação (4.19), as variâncias térmicas podem ser escritas em termos das não térmicas. Especificamente,

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x(\beta))^2 &= u^4(\beta)(\Delta J_x)^2 + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1), \\
(\Delta J_y(\beta))^2 &= u^4(\beta)(\Delta J_y)^2 + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1), \\
(\Delta J_z(\beta))^2 &= u^4(\beta)(\Delta J_z)^2 + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1),
\end{aligned} \tag{7.21}$$

o que, por (4.20), implica em

$$(\Delta J_x(\beta))^2 + (\Delta J_y(\beta))^2 + (\Delta J_z(\beta))^2 = u^4(\beta)j + \frac{3}{2}u^2(\beta)v^2(\beta)(j+1). \tag{7.22}$$

7.2 Parâmetro de Wineland Térmico do Estado Coerente

A partir da definição do *Mean Spin Direction* (MSD), como $\hat{n}_0 = \frac{\vec{J}}{|\langle \vec{J} \rangle|}$, temos que $\hat{n}_0 = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), -\cos(\theta))$ (eq. (4.36)) e as direções ortogonais podem ser

$$\begin{aligned}
\hat{n}_1 &= (-\text{sen}(\phi), \cos(\phi), 0) \\
\hat{n}_2 &= (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\text{sen}(\phi), \text{sen}(\theta)),
\end{aligned} \tag{7.23}$$

dadas por (4.37). Denotando $\hat{n}_\perp = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$, temos

$$\begin{aligned}
J_{\hat{n}_\perp} &= -J_x \text{sen}(\phi) + J_y \cos(\phi), \\
J_{\hat{n}_\perp}^2 &= J_x^2 \text{sen}^2(\phi) - \text{sen}(\phi)\cos(\phi) [J_x J_y + J_y J_x] + J_y^2 \cos^2(\phi) \\
&= J_x^2 \text{sen}^2(\phi) + J_y^2 \cos^2(\phi) - \frac{\text{sen}(\phi)\cos(\phi)}{2i} [J_+^2 - J_-^2],
\end{aligned} \tag{7.24}$$

onde usamos $J_\pm = J_x \pm iJ_y$, com $\Delta J_{\hat{n}_\perp}$ sendo conhecido como *Projection Noise* [vide equação (4.41)]. A versão térmica do parâmetro de Wineland (4.50) para o estado coerente é

$$\xi_R(\beta) = 2j \frac{(\Delta J_{\hat{n}_\perp}(\beta))^2}{|\langle z(\beta) | \vec{J} | z(\beta) \rangle|^2}. \tag{7.25}$$

A média sobre qualquer direção ortogonal a MSD é zero, ou seja, $\vec{J} \cdot \hat{n}_\perp = 0 = \langle J_{\hat{n}_\perp} \rangle$; en-

tão para calcular a variância térmica ortogonal é suficiente obter os segundos momentos. Como $\langle z(\beta)|J_x^2|z(\beta)\rangle$ e $\langle z(\beta)|J_y^2|z(\beta)\rangle$ foram calculados nas equações (7.12) e (7.14) respectivamente, basta encontrar os segundos momentos de J_+ e J_- . Sendo,

$$\begin{aligned}
 J_+ &= a_1^\dagger a_2 \\
 &= [u(\beta)a_1^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}_1(\beta)] [u(\beta)a_2(\beta) + v(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)] \\
 &= [u^2(\beta)a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + u(\beta)v(\beta)(\tilde{a}_1(\beta)a_2(\beta) + a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)) + v^2(\beta)\tilde{a}_1(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)];
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

então

$$\begin{aligned}
 J_+|z(\beta)\rangle &= [u^2(\beta)a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + u(\beta)v(\beta)(\tilde{a}_1(\beta)a_2(\beta) + a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)) + v^2(\beta)\tilde{a}_1(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta)]|z(\beta)\rangle \\
 &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \left\{ u^2(\beta)\sqrt{(j+m+1)(j-m)}|\beta; j+m+1, j-m-1, \tilde{00}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + u(\beta)v(\beta)\sqrt{j+m+1}|\beta; j+m+1, j-m, \tilde{01}\rangle \right\},
 \end{aligned}
 \tag{7.27}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle z(\beta)|J_+^2|z(\beta)\rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}\binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
 &\quad \times \langle \beta; j+m', j-m', \tilde{00}|J_+^2|\beta; j+m', j-m', \tilde{00}\rangle \\
 &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}\binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
 &\quad \times \left\{ u^4(\beta)\sqrt{(j+m+2)(j+m+1)(j-m)(j-m-1)}\delta_{m',m+2} \right\} \\
 &= u^4(\beta)(z^*)^2 \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} (j-m)(j-m-1) \\
 &= u^4(\beta)(z^*)^2 \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{7.28}$$

De forma análoga temos

$$\begin{aligned}
J_- &= a_1 a_2^\dagger \\
&= \left[u(\beta) a_1(\beta) + v(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) \right] \left[u(\beta) a_2^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}_2(\beta) \right] \\
&= \left[u^2(\beta) a_2^\dagger(\beta) a_1(\beta) + u(\beta) v(\beta) \left(\tilde{a}_2(\beta) a_1(\beta) + a_2^\dagger(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) \right) + v^2(\beta) \tilde{a}_2(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) \right],
\end{aligned} \tag{7.29}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}
J_- |z(\beta)\rangle &= \left[u^2(\beta) a_2^\dagger(\beta) a_1(\beta) + u(\beta) v(\beta) \left(\tilde{a}_2(\beta) a_1(\beta) + a_2^\dagger(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) \right) + v^2(\beta) \tilde{a}_2(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) \right] |z(\beta)\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} \frac{z^{j+m}}{(1+|z|^2)^j} \left\{ u^2(\beta) \sqrt{(j-m+1)(j+m)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \tilde{0}\tilde{0}\rangle \right. \\
&\quad \left. + u(\beta) v(\beta) \sqrt{j-m+1} |\beta; j+m+1, j-m+1, \tilde{1}\tilde{0}\rangle \right\},
\end{aligned} \tag{7.30}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta) | J_-^2 |z(\beta)\rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m} \binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&\quad \times \langle \beta; j+m', j-m', \tilde{0}\tilde{0} | J_-^2 | \beta; j+m', j-m', \tilde{0}\tilde{0}\rangle \\
&= \sum_{m,m'=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m} \binom{2j}{j+m'}} \frac{(z^*)^{j+m'} z^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\
&\quad \times \left\{ u^4(\beta) \sqrt{(j-m+2)(j-m+1)(j+m)(j+m-1)} \delta_{m',m-2} \right\} \\
&= u^4(\beta) (z)^2 \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} (j-m)(j-m-1) \\
&= u^4(\beta) z^2 \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2}.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle z(\beta) | J_{n_\perp}^2 | z(\beta) \rangle &= \langle z(\beta) | J_x^2 | z(\beta) \rangle \text{sen}^2(\phi) + \langle z(\beta) | J_y^2 | z(\beta) \rangle \text{cos}^2(\phi) \\
&\quad - u^4(\beta) \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2} \text{sen}(\phi) \text{cos}(\phi) \frac{(z^*)^2 - z^2}{2i} \\
&= u^4(\beta) \text{sen}^2(\phi) \langle J_x^2 \rangle + u^4(\beta) \text{cos}^2(\phi) \langle J_y^2 \rangle + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1) \\
&\quad - u^4(\beta)j(2j-1) \frac{\text{sen}^2(\theta)\text{sen}^2(2\phi)}{4} \\
&= u^4(\beta) \left[\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} (2j\text{cos}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) + \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\text{cos}(2\phi)}{4} \right. \\
&\quad \left. \times (\text{sen}^2(\phi) - \text{cos}^2(\phi)) \right] + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1) - u^4(\beta)j(2j-1) \frac{\text{sen}^2(\theta)\text{sen}^2(2\phi)}{4} \\
&= u^4(\beta) \left[\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} (2j\text{cos}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) - \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)}{4} \right] + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1) \\
&= u^4(\beta) \left[\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} (2j) \right] + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1) \\
&= u^4(\beta) \frac{j}{2} + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1). \tag{7.32}
\end{aligned}$$

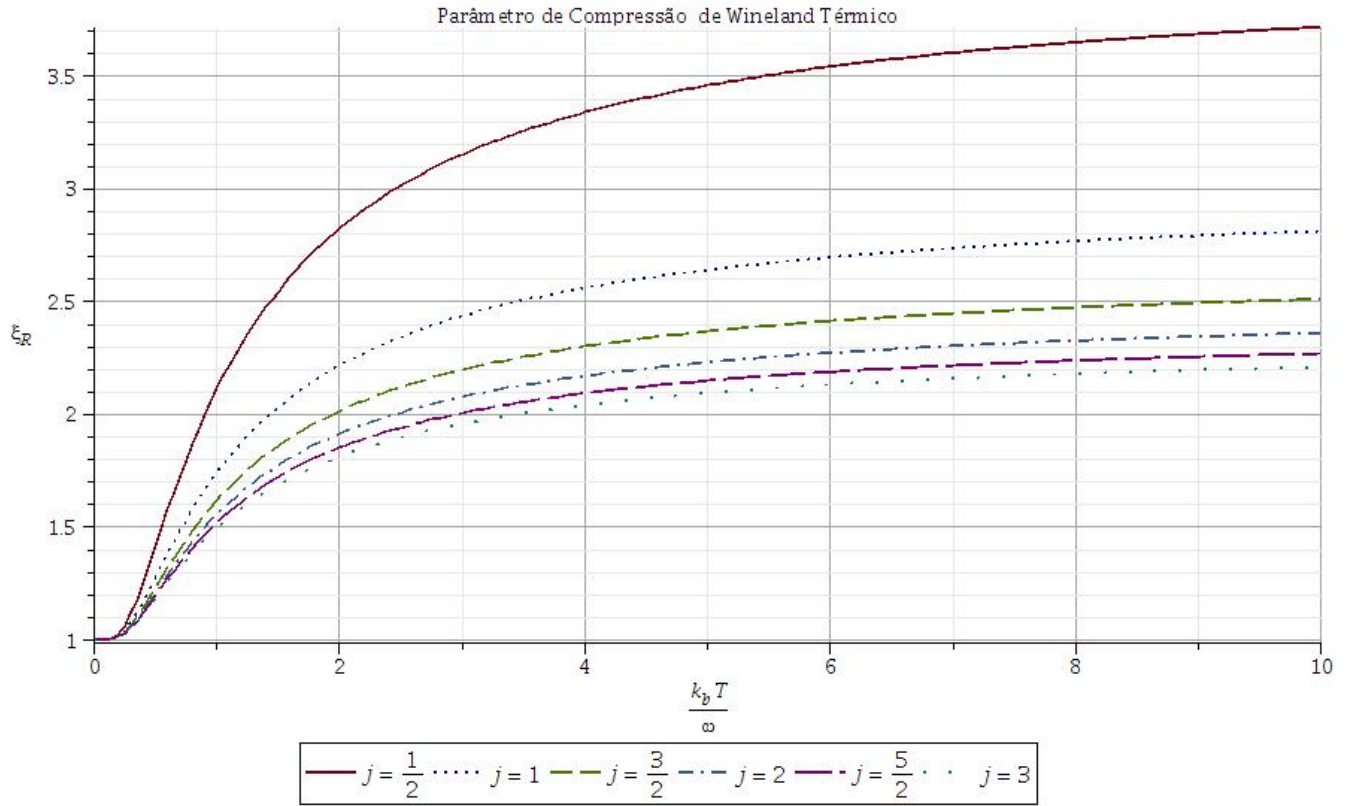
Usando a expressão do Parâmetro de Wineland térmico obtemos

$$\begin{aligned}
\xi_R(\beta) &= 2j \frac{(\Delta J_{\hat{n}_\perp}(\beta))^2}{|\langle z(\beta) | \vec{J} | z(\beta) \rangle|^2} \\
&= 2j \frac{u^4(\beta) \frac{j}{2} + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1)}{u^4(\beta)j^2} \\
&= 1 + \frac{v^2(\beta)}{u^2(\beta)} \frac{(j+1)}{j}, \tag{7.33}
\end{aligned}$$

o que implica em $\xi_R(\beta) \geq 1$, não havendo compressão independente da temperatura e do valor de j , para o estado coerente térmico. Aplicando o limite $T \rightarrow 0$ no parâmetro térmico de Wineland, obtemos o caso usual, ou seja, $\xi_R(T \rightarrow 0) = 1$. Para $T \rightarrow +\infty$ o parâmetro de compressão aumenta até um valor fixo para cada valor de j . Esse valor limite é dado por $\xi_R(T \rightarrow +\infty) = \frac{2j+1}{j}$.

Na figura (Fig. 7.1) apresentamos o gráfico da equação (7.33). Neste não há dependência dos ângulos $\{\theta, \phi\}$; sua dependência é somente do valor de j . Traçamos o gráfico do parâmetro de Wineland variando a temperatura, para os valores de $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$ e não observamos compressão, como era de se esperar pela equação (7.33).

Figura 7.1: Gráfico do parâmetro de Wineland térmico para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$.



7.3 Parâmetro de Sorensen Térmico do Estado Coerente

No contexto da DCT o parâmetro de Sorensen, dado pela expressão (4.57), será

$$\begin{aligned}
 \xi_{R'}(\beta) &= \frac{2j(\Delta J_I(\beta))^2}{\langle J_m(\beta) \rangle^2 + \langle J_n(\beta) \rangle^2} \\
 &= \frac{2ju^4(\beta)(\Delta J_I)^2}{u^4(\beta)[\langle J_m \rangle^2 + \langle J_n \rangle^2]} + \frac{v^2(\beta)j(j+1)}{u^2(\beta)[\langle J_m \rangle^2 + \langle J_n \rangle^2]} \\
 &= 1 + \frac{v^2(\beta)j(j+1)}{u^2(\beta)[\langle J_m \rangle^2 + \langle J_n \rangle^2]}, \tag{7.34}
 \end{aligned}$$

onde utilizamos as expressões (4.25) e (7.21).

Como $\xi_{R'}(\beta) \geq 1$ não temos compressão, isto é, para qualquer valor de temperatura o estado coerente termalizado não é comprimido, segundo o parâmetro $\xi_{R'}$. Tomando $T \rightarrow 0$ temos $\xi_{R'}(T \rightarrow 0) = 1$, concordando com os resultados usuais que não levam em conta a temperatura.

Os valores de $\langle J_m \rangle^2$ são dados pelas equações (4.8), (4.9) e (4.10), com $\langle J_m \rangle^2 +$

$\langle J_n \rangle^2$ variando entre 0 e j^2 . O mínimo do parâmetro corresponde ao máximo da soma das duas médias, resultando em

$$\xi_{R'}(\beta) = 1 + \frac{v^2(\beta)(j+1)}{u^2(\beta)j}, \quad (7.35)$$

que é justamente o parâmetro de Wineland. Para as direções x , y e z temos que

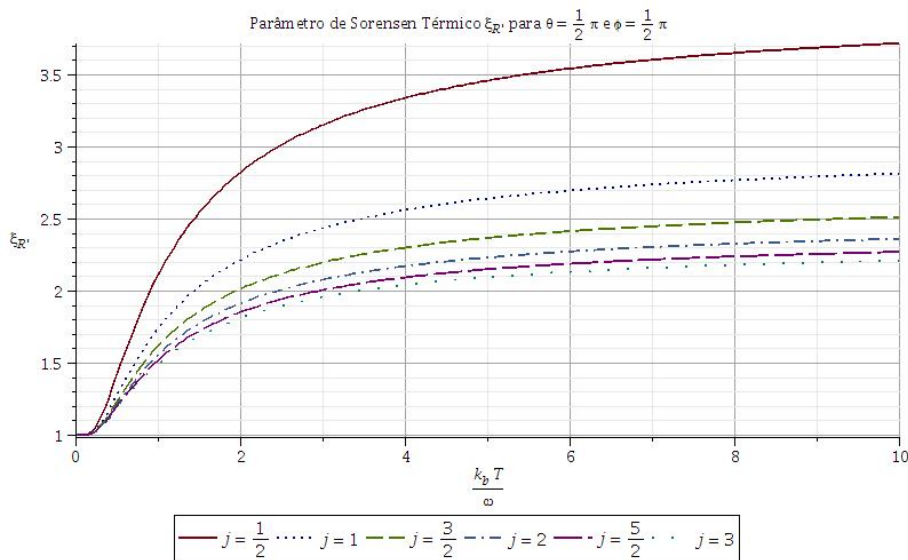
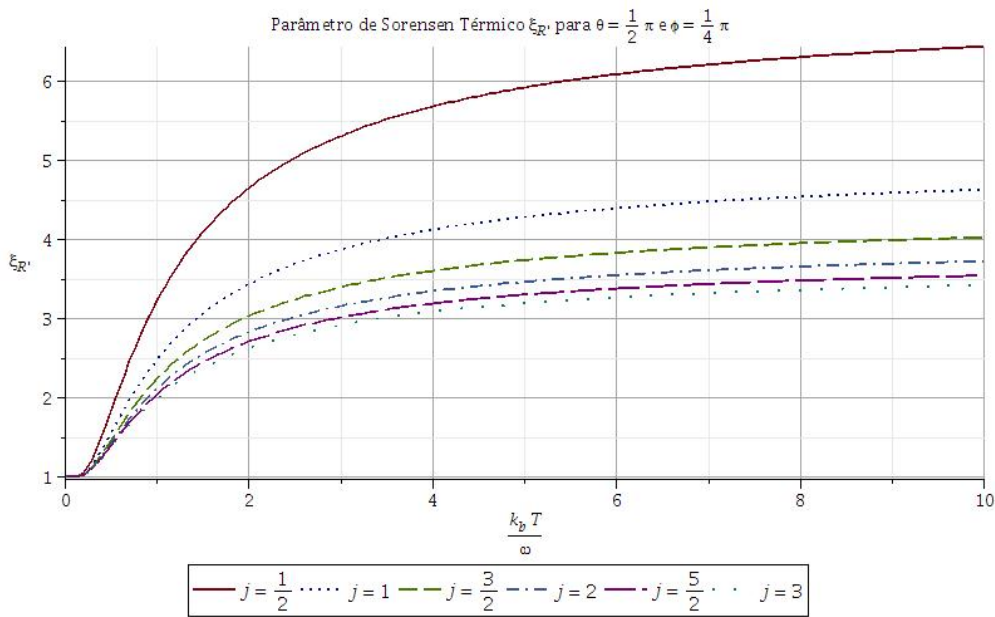
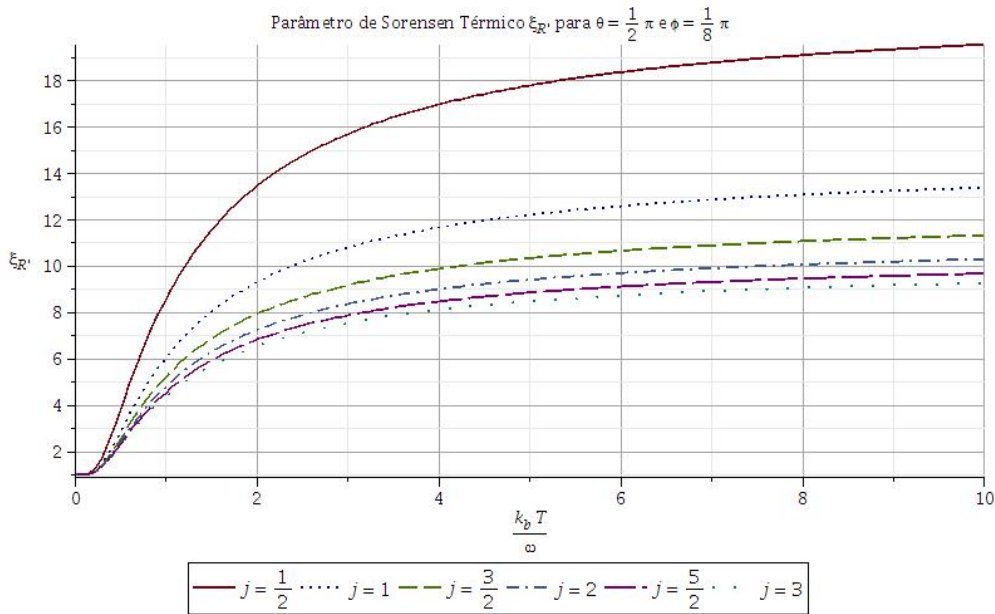
$$\begin{aligned} \xi_{R'_x}(\beta) &= 1 + \frac{v^2(\beta)(j+1)}{u^2(\beta)j[\text{sen}^2(\theta)\text{sen}^2(\phi) + \text{cos}^2(\theta)]} \\ \xi_{R'_y}(\beta) &= 1 + \frac{v^2(\beta)(j+1)}{u^2(\beta)j[\text{sen}^2(\theta)\text{cos}^2(\phi) + \text{cos}^2(\theta)]} \\ \xi_{R'_z}(\beta) &= 1 + \frac{v^2(\beta)(j+1)}{u^2(\beta)j\text{sen}^2(\theta)}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

As direções x e y diferem por uma translação $\phi \rightarrow \phi + \frac{\pi}{2}$, já que $\text{cos}^2(\phi + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}^2(\phi)$, e a direção z coincide com a direção x para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi \leftrightarrow \theta$. Portanto, é suficiente analisarmos somente a direção x .

Como exemplo, apresentamos o gráfico do parâmetro $\xi_{R'_x}$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$, na Figura 7.2. Aumentando a temperatura o parâmetro de compressão também aumenta, mas se aproxima de valores limites, diferentes para cada valor de j .

Pelos gráficos da Fig. 7.2, somos capazes de perceber os efeitos térmicos modificando o valor do parâmetro de Sorensen, afastando o estado da região de compressão. Notamos também que a variação da fase ϕ possui um mínimo para $\phi = \frac{\pi}{2}$, caso em que o parâmetro de Sorensen coincide com o parâmetro de Wineland. Podemos ainda perceber a influência da fase sobre a compressão, fato este que será de grande importância na análise do estado *Atomic-Cat*.

Figura 7.2: Gráfico do parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ para $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$, com $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$.



7.4 Desigualdades de Tóth Térmicas do Estado Coerente

Segundo Tóth [58] se um estado quântico viola uma das desigualdades de (4.67), tal estado é dito ser emaranhado. No contexto da Dinâmica de Campos Térmicos, mostraremos que a desigualdade de Tóth pode ser violada, indicando emaranhamento, mesmo não havendo compressão sobre o estado. As versões térmicas dos parâmetros de compressão definidas a partir das desigualdades de Tóth, que envolvem as somas das variâncias e dos segundos momentos, são

$$\xi_{T'}(\beta) = \frac{Nj(Nj+1)}{\langle J_x^2(\beta) \rangle + \langle J_y^2(\beta) \rangle + \langle J_z^2(\beta) \rangle}, \quad (7.37)$$

$$\xi_T(\beta) = \frac{(\Delta J_x(\beta))^2 + (\Delta J_y(\beta))^2 + (\Delta J_z(\beta))^2}{Nj}, \quad (7.38)$$

onde N está associado ao número de sistemas em análise. Substituindo as equações (7.17) e (7.22) nos parâmetros de compressão $\xi_{T'}$ e ξ_T respectivamente, encontramos

$$\xi_{T'} = \frac{2j}{2ju^4(\beta) + 3u^2(\beta)v^2(\beta)} \quad (7.39)$$

e

$$\xi_T = u^4(\beta) + \frac{3}{2}u^2(\beta)v^2(\beta)\frac{j+1}{j}. \quad (7.40)$$

A equação (7.39) também é válida para um estado térmico qualquer, definido em termos dos auto-estados do momento angular [vide Apêndice C]. Como $u^4(\beta) \geq 1$, $\xi_{T'}$ expressa compressão para qualquer $T > 0$, resultando que todo estado térmico do momento angular exibe a existência de emaranhamento. No limite $T \rightarrow 0$, obtemos $\xi_{T'} = 1$, o qual concorda com os resultados usuais da literatura [58]. Na Figura 7.3 apresentamos o comportamento do parâmetro de compressão $\xi_{T'}$ para alguns valores de j , exibindo compressão para qualquer valor de $T > 0$.

Já a equação (7.40) não exibe compressão, independente do valor de j e de $\frac{k_b T}{\omega}$. Portanto, nesse caso, segundo o critério de Tóth, não podemos afirmar nada em relação ao emaranhamento do estado coerente térmico. Vale a pena ressaltar que o mínimo de ξ_T é obtido para $T \rightarrow 0$, quando se obtém as expressões originais deste parâmetro de compressão para o estado coerente, como é mostrado na Figura 7.4.

A compressão na equação (7.39) indica a existência de emaranhamento no estado coerente térmico do momento angular, sendo que para $T \rightarrow 0$ o emaranhamento não é garantido. Portanto a compressão, associada à desigualdade de Tóth, só ocorre quando levamos em conta a

Figura 7.3: Parâmetro de Compressão $\xi_{T'}$ com $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.

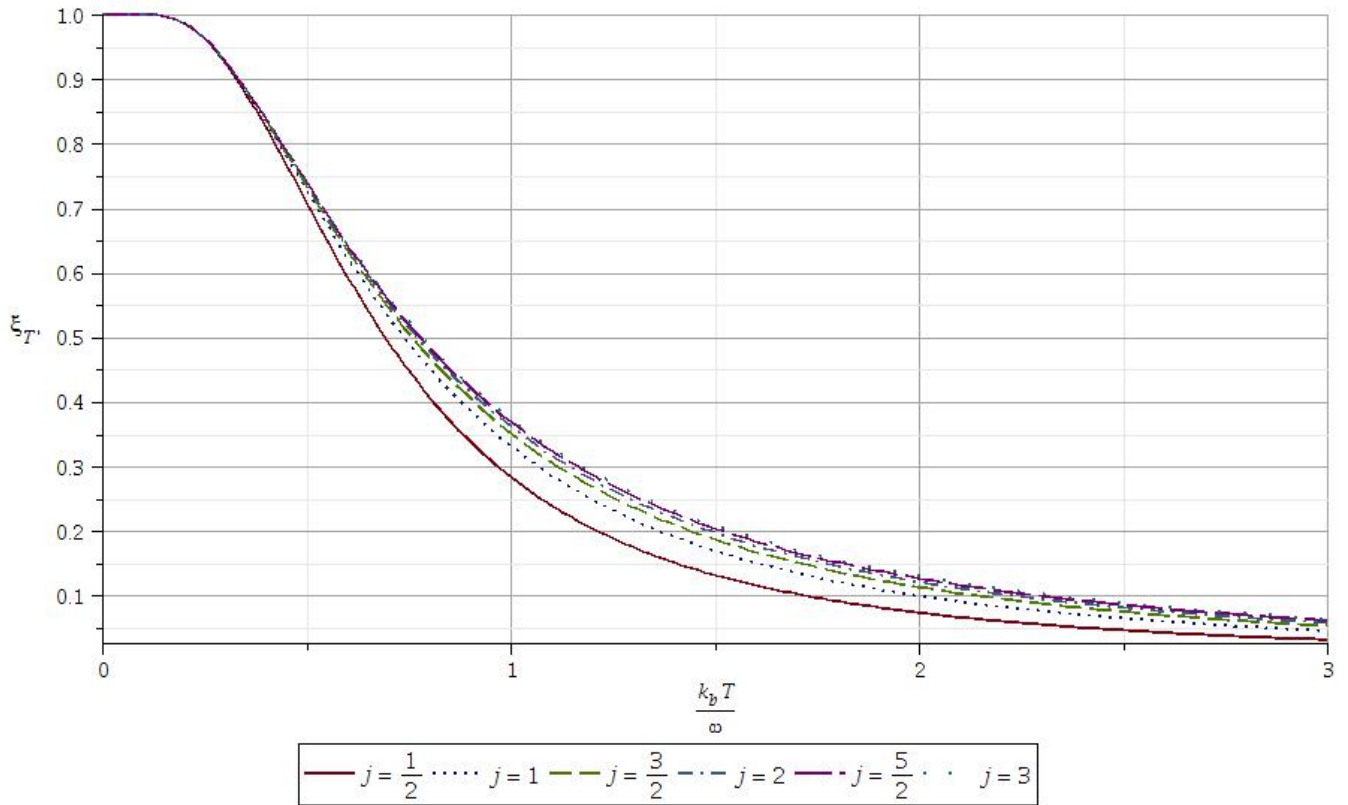
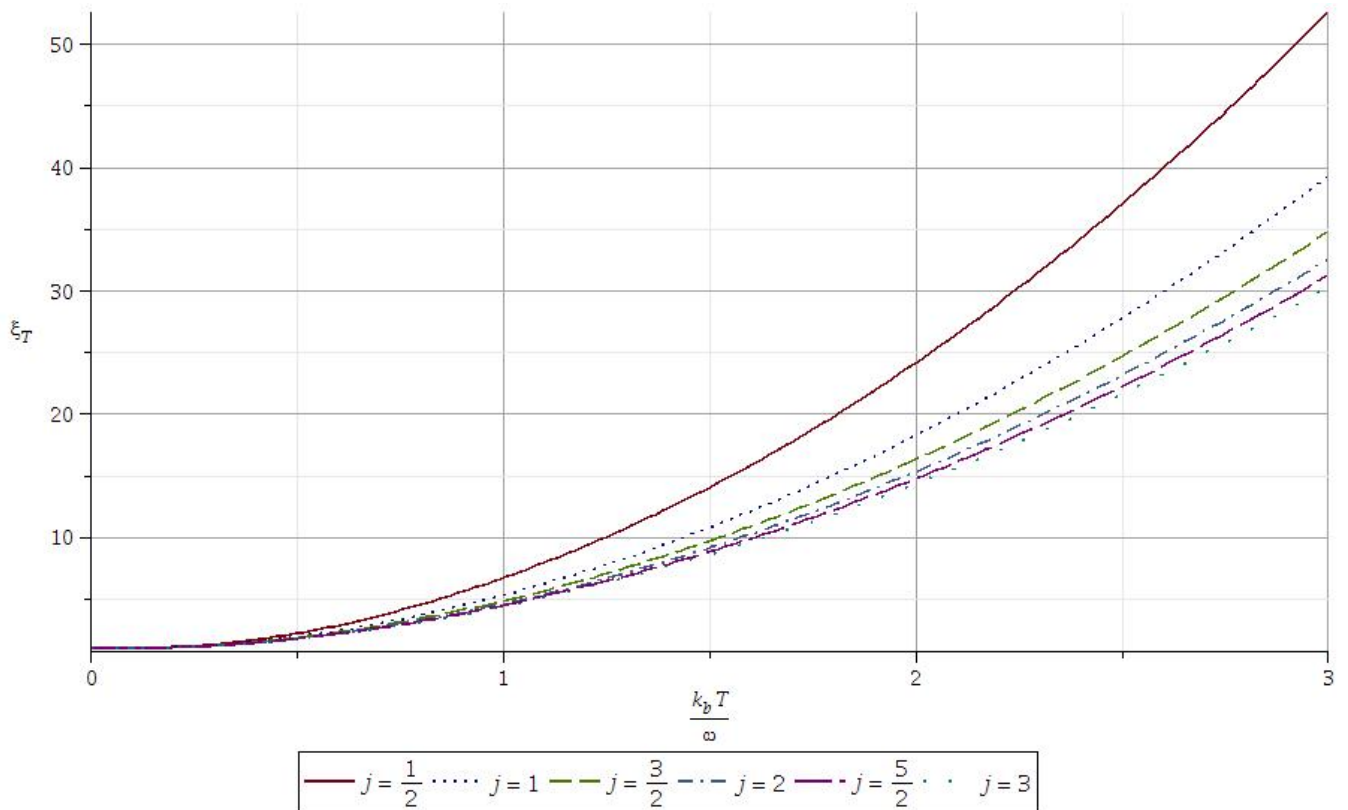


Figura 7.4: Parâmetro de Compressão ξ_T com $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.



temperatura. Isso evidencia a importância dos efeitos térmicos na análise do emaranhamento.

Vale a pena ressaltar que os critérios propostos por Vitagliano et al. [58] não quantificam o emaranhamento, ou seja, a partir deles só podemos dizer se um estado é ou não emaranhado. Dessa forma não podemos inferir sobre o quão emaranhados são esses estados.

7.5 Parâmetro ξ_E Térmico do Estado Coerente

Nesta seção vamos considerar o parâmetro de compressão ξ_E da equação (4.61). A sua importância reside na conexão com o emaranhamento, isto é, a compressão indica a existência de emaranhamento. Esse critério só é válido para um conjunto de N subsistemas de spin $\frac{1}{2}$, por isso somente o aplicaremos para esse estado.

A versão térmica do parâmetro ξ_E é:

$$\begin{aligned}\xi_E(\beta) &= \frac{2j(\Delta J_l(\beta))^2}{\langle J^2(\beta) \rangle - \langle J_l(\beta) \rangle^2 - j} \\ &= 2j \frac{u^4(\beta)(\Delta J_l)^2 + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1)}{u^4(\beta)j(j+1) + \frac{3u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1) - u^4(\beta)\langle J_l \rangle^2 - j},\end{aligned}\quad (7.41)$$

onde usamos (7.21). Estamos interessados na região onde o estado sofre compressão, ou seja, quando $\xi_E < 1$. Para isso basta mostrar que

$$u^4(\beta)2j(\Delta J_l)^2 + u^2(\beta)v^2(\beta)j(j+1) < u^4(\beta)j(j+1) + \frac{3u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1) - u^4(\beta)\langle J_l \rangle^2 - j.\quad (7.42)$$

Utilizando as equações (4.11) e (4.25), obtemos

$$\begin{aligned}u^4(\beta)j^2 + u^2(\beta)v^2(\beta)j(j+1) - u^4(\beta)j(j+1) - \frac{3u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1) + j < 0 \Rightarrow \\ u^2(\beta)v^2(\beta) \left[j^2 - \frac{j}{2} - \frac{3}{2} \right] - u^4(\beta)j + j < 0.\end{aligned}\quad (7.43)$$

A desigualdade $\xi_E(\beta) < 1$ é equivalente à desigualdade da equação (7.43), que independe de θ, ϕ , ou seja, da direção escolhida. Portanto, os valores dessas variáveis não alteram a viola-

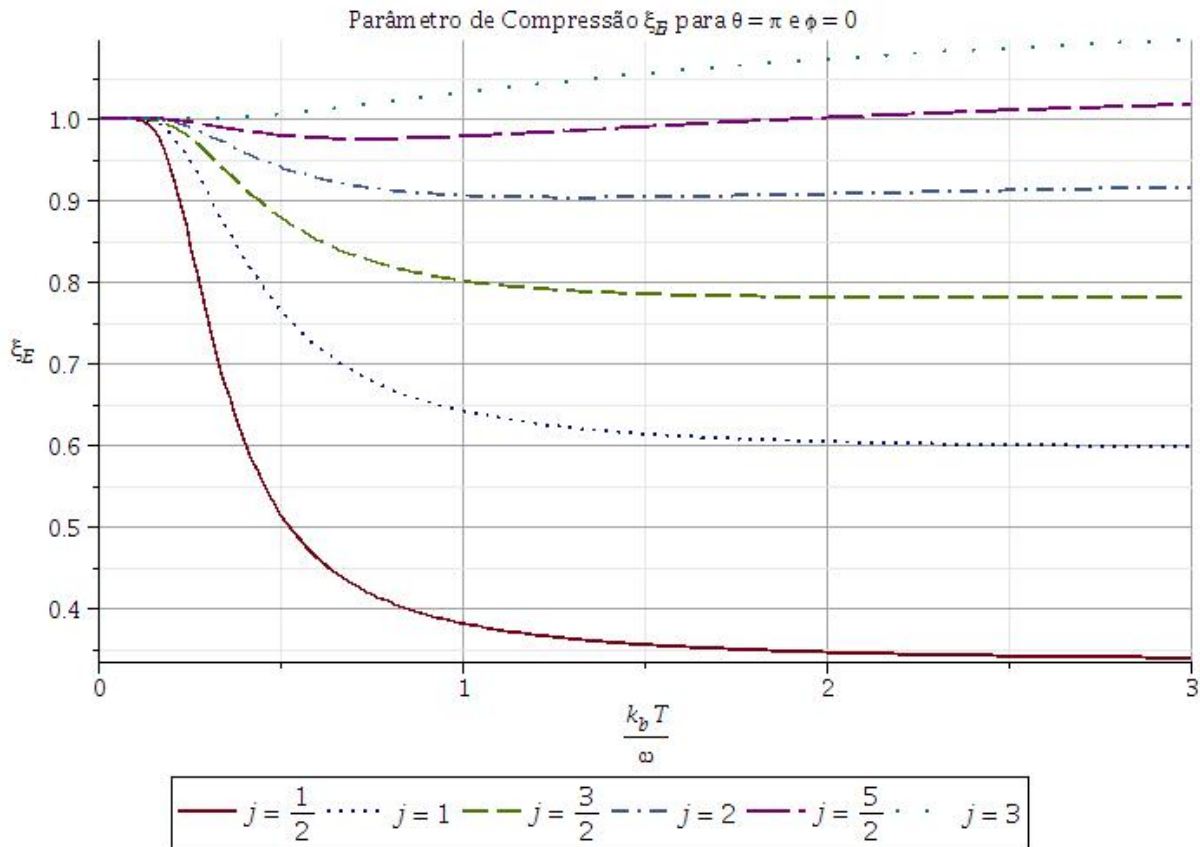
ção da desigualdade; somente j e $\frac{k_b T}{\omega}$ são relevantes.

Sem perda de generalidade, consideraremos $\theta = \pi$ e $\phi = 0$ que resulta no estado coerente ser $|j, j\rangle$. Podemos supor que este estado é formado por um conjunto de N spins $\frac{1}{2}$ apontados na direção z , com $N = 2j$, sendo então razoável analisarmos o parâmetro proposto por Tóth.

As expressões relativas às direções x e y coincidem e, para o estado acima, são dadas por $(\Delta J_i(\beta))^2 = \frac{j}{2}u^4(\beta) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2}(j+1)$ e $\langle J_i(\beta) \rangle = 0$, $i = \{x, y\}$. Então, temos;

$$\xi_E(\beta) = \frac{u^4(\beta)j^2 + u^2(\beta)v^2(\beta)j(j+1)}{u^4(\beta)j(j+1) + \frac{3}{2}u^2(\beta)v^2(\beta)(j+1) - j}. \quad (7.44)$$

Figura 7.5: Gráfico do parâmetro ξ_E para $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$.



O gráfico (Fig. 7.5) representa o comportamento da equação (7.44) para alguns valores de j . Para a temperatura nula, observamos que $\xi_E(T \rightarrow 0) = 1$, concordando com os valores encontrados na literatura para o estado coerente. Ao aumentarmos a temperatura encontramos comportamentos diferentes a depender do valor de j . Para j de 0 até 2, o parâmetro diminui até um valor fixo, menor do que 1, havendo então compressão. Para $j = \frac{5}{2}$ o parâmetro de compressão diminui e aumenta, caracterizando compressão para $\frac{k_b T}{\omega} \in [0, 1.96]$. Depois desta

região, o parâmetro de compressão continua a aumentar, o que resulta em valores maiores do que 1, ou seja, não exibindo mais compressão.

Tabela 7.1: Valores limites do parâmetro ξ_E para altas temperaturas do Estado Coerente Térmico.

Valores do parâmetro ξ_E para $T \rightarrow +\infty$.						
	$j = \frac{1}{2}$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\xi_R \left(\frac{k_b T}{\omega} \rightarrow +\infty \right)$	0.333	0.600	0.800	0.952	1.071	1.167

Essa compressão sobre o estado coerente do momento angular surge somente quando introduzimos a temperatura. De alguma forma, os efeitos térmicos são capazes de influenciar na compressão do estado, reforçando a sua relevância para a análise da compressão.

Se j for maior ou igual a 3, o parâmetro de compressão aumenta, sendo maior que 1 para qualquer temperatura. Consequentemente não encontramos compressão, segundo este parâmetro, para $j \geq 3$.

Na tabela (Tab. 7.1) apresentamos os valores de compressão para $T \rightarrow +\infty$. Percebemos que os estados coerentes com j entre $\frac{1}{2}$ e 2 são mais resistentes à variação da temperatura, sendo capazes de preservar a compressão para qualquer temperatura.

Figura 7.3: Parâmetro de Compressão $\xi_{T'}$ com $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.

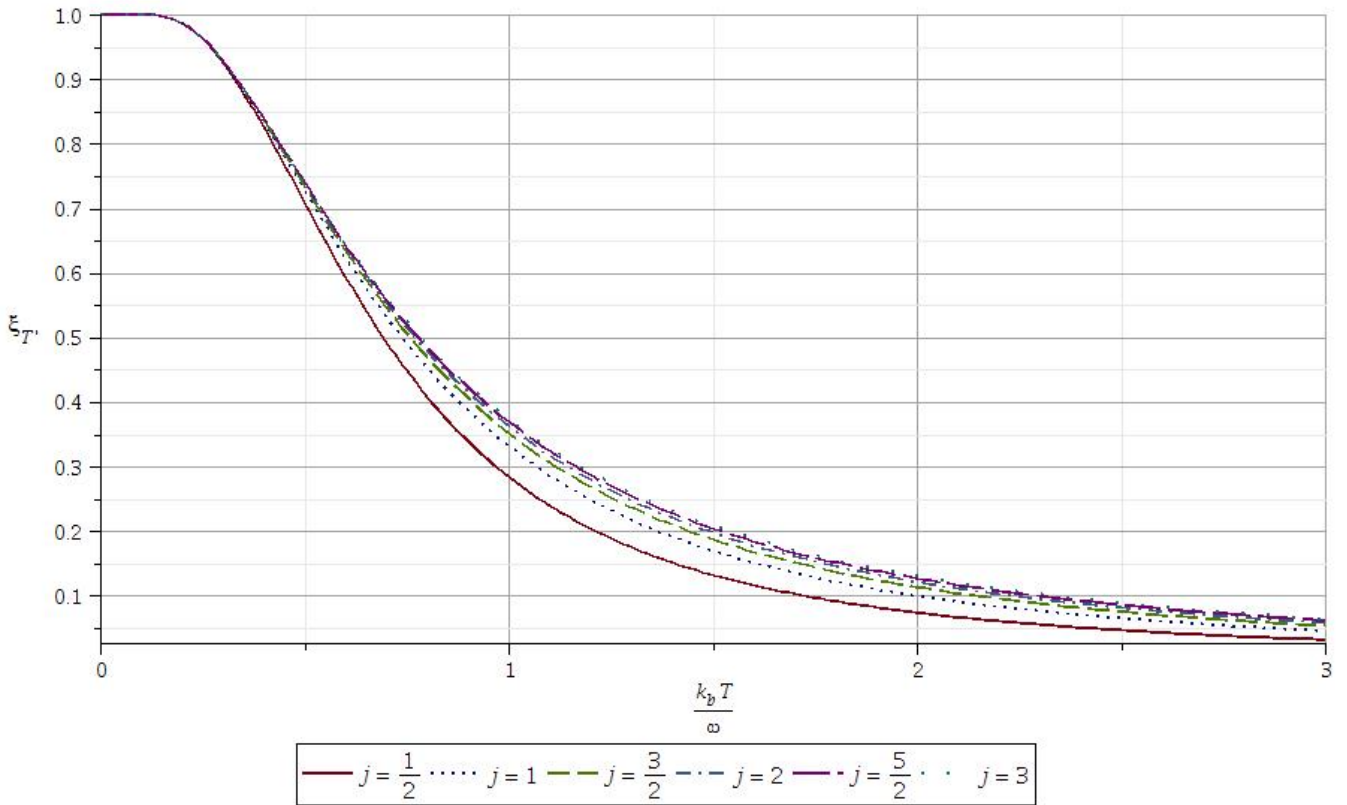
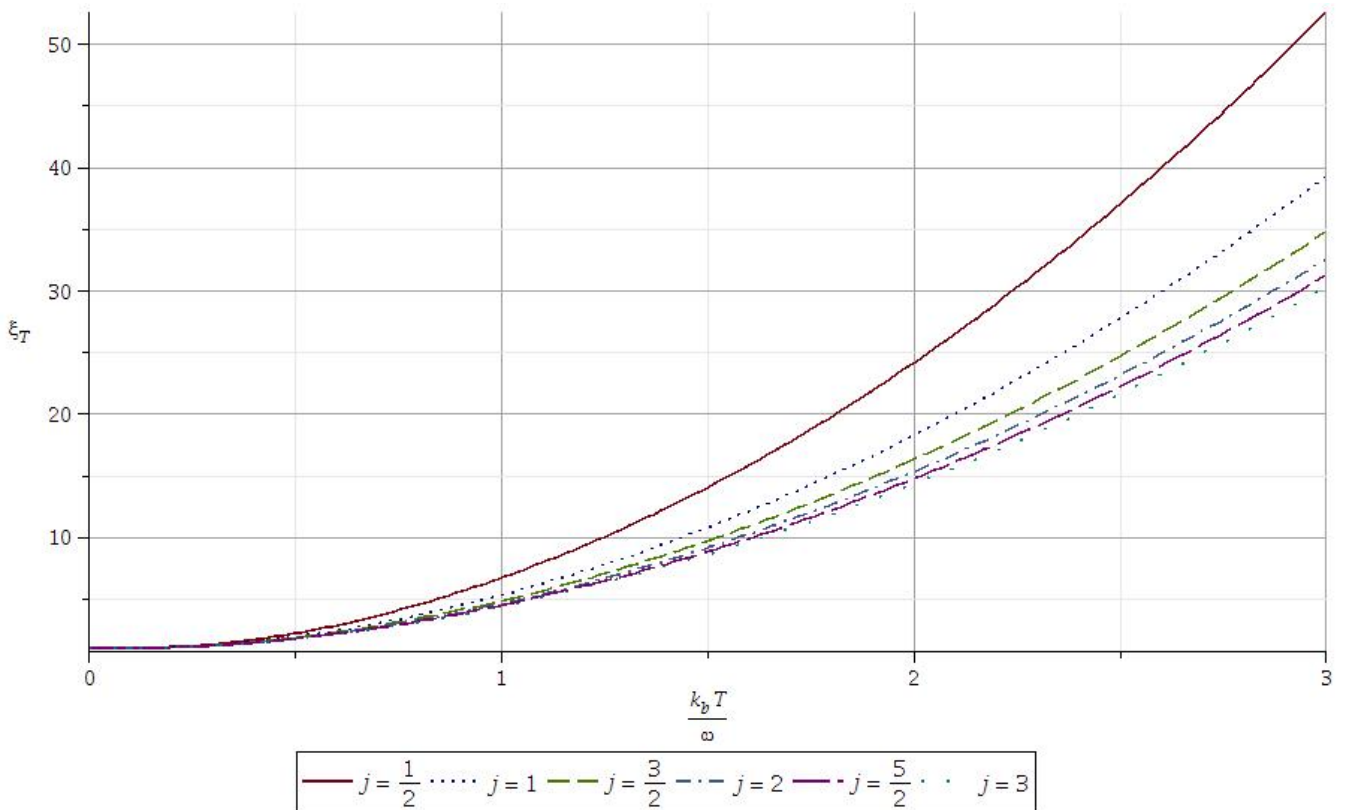


Figura 7.4: Parâmetro de Compressão ξ_T com $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$.



$$\begin{aligned}
J_x|\sigma(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta)] \right\} \\
&\quad \times |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j+m+1)} |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j-m+1)} |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\}, \tag{8.2}
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(\beta) | J_x | \sigma(\beta) \rangle &= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m, m'=-j}^j e^{-\frac{m^2+m'^2}{4\sigma^2}} \frac{u(\beta)^2}{2} \\
&\quad \times \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} + \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m', m-1} \right\} \\
&= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^{j-1} e^{-\frac{m^2+(m+1)^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m'=-j}^{j-1} e^{-\frac{(m'+1)^2+m'^2}{4\sigma^2}} \frac{u(\beta)^2}{2} \left\{ \sqrt{(j+m'+1)(j-m')} \right\} \\
&= \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\}. \tag{8.3}
\end{aligned}$$

Analogamente para J_y

$$\begin{aligned}
J_y|\sigma(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) - a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) - \tilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta)] \right\} \\
&\quad \times |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad - \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j-m+1)(j+m)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{(j+m+1)} |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{(j-m+1)} |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\}, \tag{8.4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(\beta) | J_y | \sigma(\beta) \rangle &= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m, m'=-j}^j e^{-\frac{m^2+m'^2}{4\sigma^2}} \frac{u(\beta)^2}{2i} \\
&\quad \times \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} - \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m', m-1} \right\} \\
&= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^{j-1} e^{-\frac{m^2+(m+1)^2}{4\sigma^2}} \frac{u(\beta)^2}{2i} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m'=-j}^{j-1} e^{-\frac{(m'+1)^2+m'^2}{4\sigma^2}} \frac{u(\beta)^2}{2i} \left\{ \sqrt{(j+m'+1)(j-m')} \right\} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{8.5}$$

o que é consistente com o obtido no Apêndice C, já que o peso associado ao estado gaussiano é uma função real, o que implica na média em y ser zero. Portanto a direção y é ortogonal à Direção Média de Spin (MSD), sendo a variância em y denominada de *Protection Noise*.

Já a média de J_z anula-se quando a função peso do estado for par ou ímpar [vide Apêndice C], em relação ao índice m da soma dos estados. De fato,

$$\begin{aligned}
J_z | \sigma(\beta) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta) a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta) a_2(\beta)] + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) - \tilde{a}_2^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta)] \right\} \\
&\quad \times | \beta; j+m, j-m, \tilde{00} \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ u(\beta)^2 m | \beta; j+m, j-m, \tilde{00} \rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j+m+1)} | \beta; j+m+1, j-m, \tilde{10} \rangle \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{(j-m+1)} | \beta; j+m, j-m+1, \tilde{01} \rangle \right\},
\end{aligned} \tag{8.6}$$

então

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(\beta) | J_z | \sigma(\beta) \rangle &= \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.7}$$

pois o somatório de uma função ímpar, no intervalo de $-j$ até j , resulta em zero.

Por isso a MSD para o estado Gaussiano Térmico é $\hat{n}_0 = (1, 0, 0)$, com as duas direções ortogonais dadas por y e z . O módulo da média de \vec{J} é então somente a contribuição de J_x

$$|\langle \sigma(\beta) | \vec{J} | \sigma(\beta) \rangle| = \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\}. \tag{8.8}$$

Os segundos momentos térmicos são dados por

$$\begin{aligned}
J_x^2 |\sigma(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \\
&\times \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&+ \frac{u(\beta)^4}{4} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \\
&+ \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} \sqrt{(j+m+1)} a_1(\beta) \tilde{a}_2(\beta) |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\left. + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} \sqrt{(j-m+1)} a_2(\beta) \tilde{a}_1(\beta) |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \\
&\times \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} |\beta; j+m+2, j-m-2, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&+ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)(j+m)(j+m-1)} |\beta; j+m-2, j-m+2, \widetilde{00}\rangle \\
&\left. + \left[\frac{u(\beta)^4}{2} (j^2 + j - m^2) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1) \right] |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right\} \quad (8.9)
\end{aligned}$$

onde só consideramos os termos $|\widetilde{00}\rangle$, pois os demais terão média zero. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(\beta) | J_x^2 | \sigma(\beta) \rangle &= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m, m'=-j}^j e^{-\frac{m^2+m'^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \delta_{m', m+2} \right. \\
&+ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)(j+m)(j+m-1)} \delta_{m', m-2} \\
&\left. + \left[\frac{u(\beta)^4}{2} (j^2 + j - m^2) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1) \right] \delta_{m, m'} \right\} \\
&= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2+(m+2)^2}{4\sigma^2}} \left\{ \frac{u(\beta)^4}{2} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \right\} \\
&- \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \frac{u(\beta)^4}{2} m^2 + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1) \\
&= \frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+1)^2+1}{2\sigma^2}} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \\
&- \frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1). \quad (8.10)
\end{aligned}$$

Obtemos também o segundo momento para J_y

$$\begin{aligned}
J_y^2 |\sigma(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \\
&\times \left\{ -\frac{u(\beta)^4}{4} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) - a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&+ \frac{u(\beta)^4}{4} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) - a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \\
&+ \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} \sqrt{(j+m+1)} a_1(\beta) \tilde{a}_2(\beta) |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\left. + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{4} \sqrt{(j-m+1)} a_2(\beta) \tilde{a}_1(\beta) |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \\
&\times \left\{ -\frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} |\beta; j+m+2, j-m-2, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&- \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)(j+m)(j+m-1)} |\beta; j+m-2, j-m+2, \widetilde{00}\rangle \\
&\left. + \left[\frac{u(\beta)^4}{2} (j^2 + j - m^2) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1) \right] |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right\} \quad (8.11)
\end{aligned}$$

omitindo os termos diferentes de $|\widetilde{00}\rangle$. Com isso

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(\beta) | J_y^2 | \sigma(\beta) \rangle &= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m, m'=-j}^j e^{-\frac{m^2+m'^2}{4\sigma^2}} \left\{ -\frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \delta_{m', m+2} \right. \\
&- \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)(j+m)(j+m-1)} \delta_{m', m-2} \\
&\left. + \left[\frac{u(\beta)^4}{2} (j^2 + j - m^2) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1) \right] \delta_{m, m'} \right\} \\
&= -\frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+1)^2+1}{2\sigma^2}} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \\
&- \frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1). \quad (8.12)
\end{aligned}$$

Para finalizar,

$$\begin{aligned}
J_z^2|\sigma(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ u(\beta)^4 m^2 |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{(j+m+1)\widetilde{a}_1 a_1} |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{10}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{(j-m+1)\widetilde{a}_2 a_2} |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{01}\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ u(\beta)^4 m^2 |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} (j+m+1) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} (j-m+1) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \left\{ u(\beta)^4 m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \right\} |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle
\end{aligned} \tag{8.13}$$

só escrevendo os termos da forma $|\widetilde{00}\rangle$, obtendo

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(\beta) | J_z^2 | \sigma(\beta) \rangle &= \frac{1}{N_\sigma} \sum_{m, m'=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \left\{ u(\beta)^4 m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \right\} \delta_{m', m} \\
&= \frac{u(\beta)^4}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1).
\end{aligned} \tag{8.14}$$

As variâncias térmicas são assim

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x(\beta))^2 &= \frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+1)^2+1}{2\sigma^2}} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \\
&\quad - \frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1) \\
&\quad - \left| \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2,
\end{aligned} \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta J_y(\beta))^2 &= -\frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+1)^2+1}{2\sigma^2}} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \\
&\quad - \frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1), \quad (8.16)
\end{aligned}$$

e

$$(\Delta J_z(\beta))^2 = \frac{u(\beta)^4}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1). \quad (8.17)$$

8.2 Parâmetro de Wineland e Sorensen Térmico do Estado Gaussiano

Como discutido na seção anterior, a MSD para o Estado Gaussiano térmico é $\hat{n}_0 = (1, 0, 0)$, com y, z sendo duas direções ortogonais. Então, o Parâmetro de Wineland pode ser definido tanto tomando a variância na direção y , como na direção z , de forma que

$$\begin{aligned}
\xi_{R_y}(\beta) &= 2j \frac{(\Delta J_{\hat{n}_\perp}(\beta))^2}{|\langle \sigma(\beta) | \vec{J} | \sigma(\beta) \rangle|^2} \\
&= -2j \frac{\frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+1)^2+1}{2\sigma^2}} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)}}{\left| \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2} \\
&\quad + 2j \frac{-\frac{u(\beta)^4}{2N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{2} (j+1)}{\left| \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2} \\
&= -jN_\sigma \frac{\sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+1)^2+1}{2\sigma^2}} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)}}{\left| \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2} \\
&\quad + jN_\sigma \frac{\sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + j(j+1)N_\sigma + u^{-2}(\beta)v^2(\beta)(j+1)N_\sigma}{\left| \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2}, \quad (8.18)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\xi_{R_z}(\beta) &= 2j \frac{(\Delta J_{\hat{n}_\perp}(\beta))^2}{|\langle \sigma(\beta) | \vec{J} | \sigma(\beta) \rangle|^2} \\
&= 2j \frac{\frac{u(\beta)^4}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1)}{\left| \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2} \\
&= j N_\sigma \frac{2 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} m^2 + u(\beta)^{-2} v(\beta)^2 (j+1) N_\sigma}{\left| \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2}. \tag{8.19}
\end{aligned}$$

Vale ressaltar que, como $\langle J_y(\beta) \rangle = \langle J_z(\beta) \rangle = 0$, os Parâmetros de Sorensen coincidem com os parâmetros de Wineland. As equações (8.18) e (8.19) são representadas nos gráficos (Fig. 8.1), (Fig. 8.2), (Fig. 8.3) e (Fig. 8.4), com $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$ e os seguintes valores de temperatura $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$.

Ao analisarmos a média térmica dada pela equação (8.8) percebemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} |\langle \sigma(\beta) | \vec{J} | \sigma(\beta) \rangle|^2 = \begin{cases} 0, & j = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \frac{2j+1}{4}, & j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots \end{cases}, \tag{8.20}$$

ou seja, para valores inteiros de j o parâmetro de Wineland irá divergir quando $\sigma \rightarrow 0$, tendendo para mais infinito. A escala dos gráficos (Fig. 8.2) e (Fig. 8.4) começa com $\sigma = 0.5$, para evitar esta divergência.

Para $j = \frac{1}{2}$ o parâmetro de Wineland é uma reta, tanto na direção y (Fig. 8.1) como na direção z (Fig. 8.3). Isso ocorre porque, neste caso, o estado Gaussiano térmico, dado pela equação (8.1), é

$$\begin{aligned}
|\sigma(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_\sigma}} \sum_{m=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} |\beta; j+m, j-m, \tilde{00}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{e^{-\frac{1}{8\sigma^2}} + e^{-\frac{1}{8\sigma^2}}}} \left[e^{-\frac{1}{16\sigma^2}} |\beta; 0, 1, \tilde{00}\rangle + e^{-\frac{1}{16\sigma^2}} |\beta; 1, 0, \tilde{00}\rangle \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\beta; 0, 1, \tilde{00}\rangle + |\beta; 1, 0, \tilde{00}\rangle \right], \tag{8.21}
\end{aligned}$$

não dependendo do parâmetro σ .

Tomando o limite $T \rightarrow 0$, com $j = \frac{1}{2}$ obtemos que $\xi_{R_y}(\beta) = \xi_{R_z}(\beta) = 1$. Ao aumentarmos a temperatura o parâmetro de compressão vai aumentando gradativamente, indicando não haver

compressão para $j = \frac{1}{2}$ em nenhuma das duas direções.

Na direção y , gráficos da (Fig. 8.1) e da (Fig. 8.2), para $j \neq \frac{1}{2}$ o parâmetro decresce à medida que σ aumenta. Portanto o valor do parâmetro de compressão diminui à medida que o estado se torna mais uniformemente distribuído, isto é, σ aumentando.

Para a direção z , temos os gráficos da (Fig. 8.3) e da (Fig. 8.4) com um comportamento completamente oposto para $j \neq \frac{1}{2}$: quando σ aumenta, o valor do parâmetro de compressão também aumenta, o que indica que quanto menos distribuído for o estado mais haverá compressão.

Essa diferença de comportamento em relação às direções y e z é consistente com a relação de incerteza, preservando a equação (4.1), independente do valor do parâmetro σ .

Ao compararmos o comportamento para os diferentes valores de j , notamos que ao aumentarmos o valor de j o parâmetro $\xi_{R_y}(\beta)$ também aumenta, evidenciando que estados com grandes valores de j são mais difíceis de serem comprimidos. Já ξ_{R_z} tem um comportamento diferente, não sendo tão sensível às variações de j .

O efeito térmico é analisado ao variarmos a temperatura usando as relações (8.18) e (8.19), para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$. Observamos que o aumento da temperatura acarreta um aumento do valor de $\xi_R(\beta)$, independente da direção escolhida. Portanto os efeitos térmicos têm o caráter global de diminuir a região de compressão.

Figura 8.1: Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{R_y} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$.

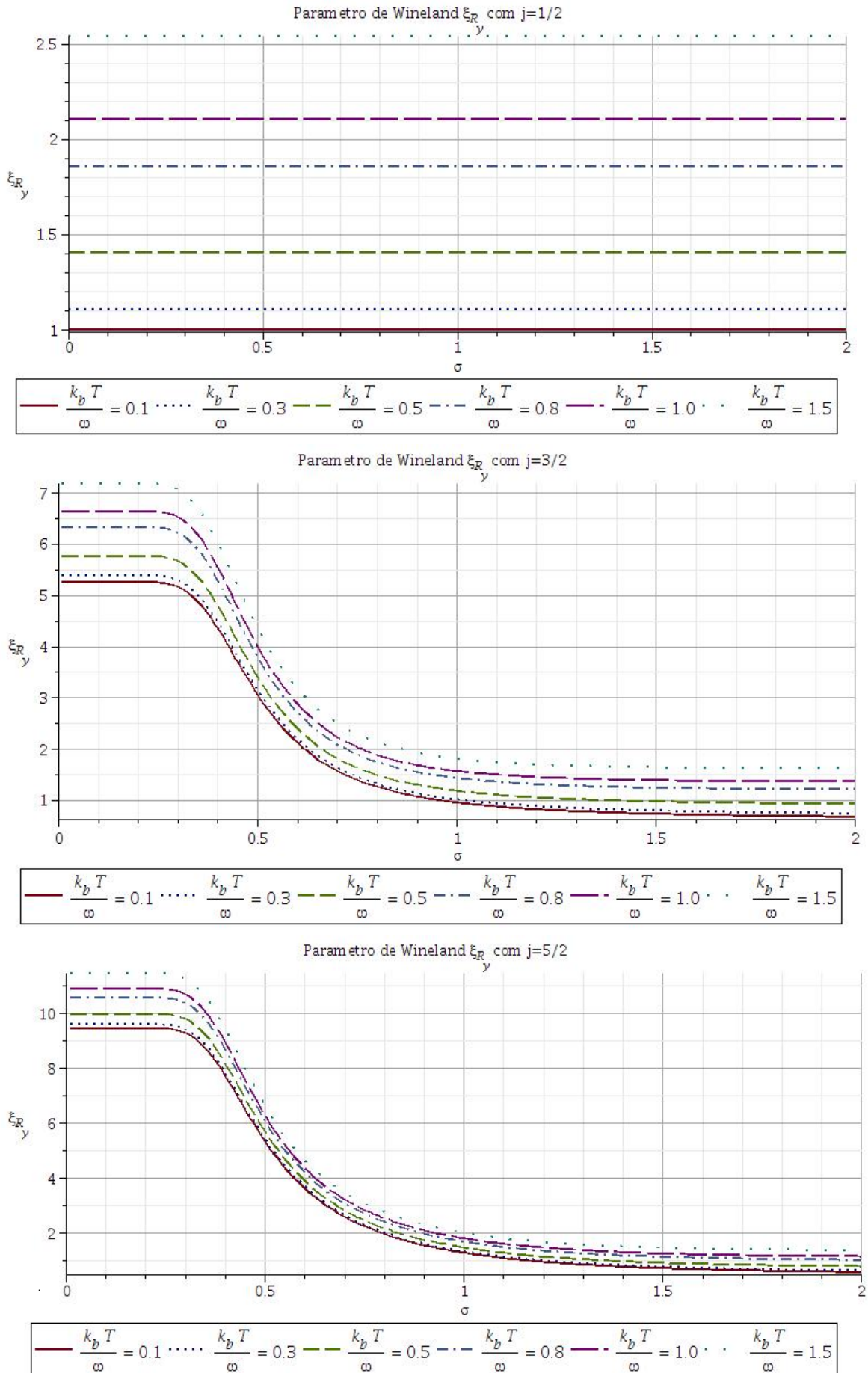


Figura 8.2: Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{Ry} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \{1, 2, 3\}$.

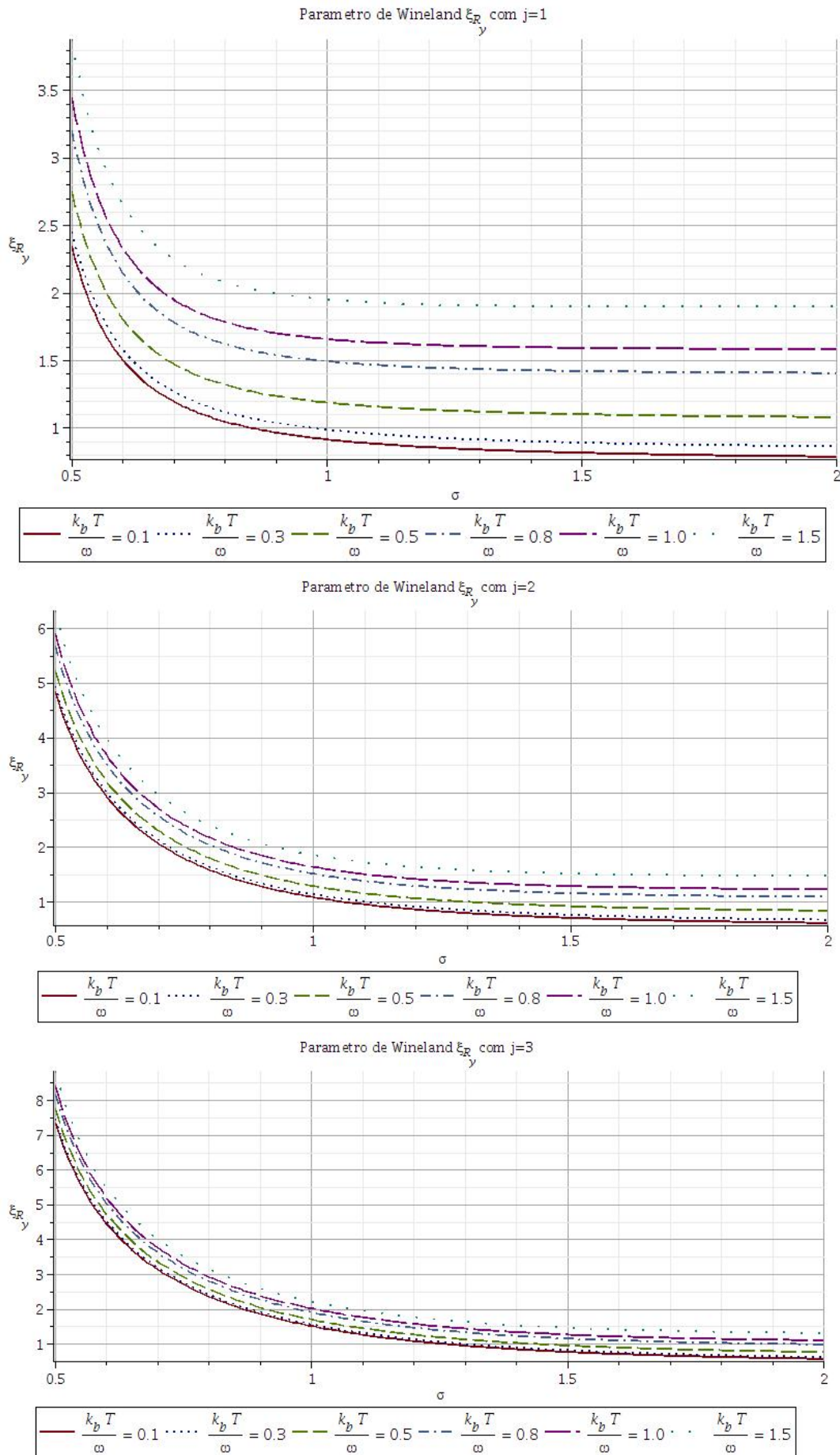


Figura 8.3: Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{Rz} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$.

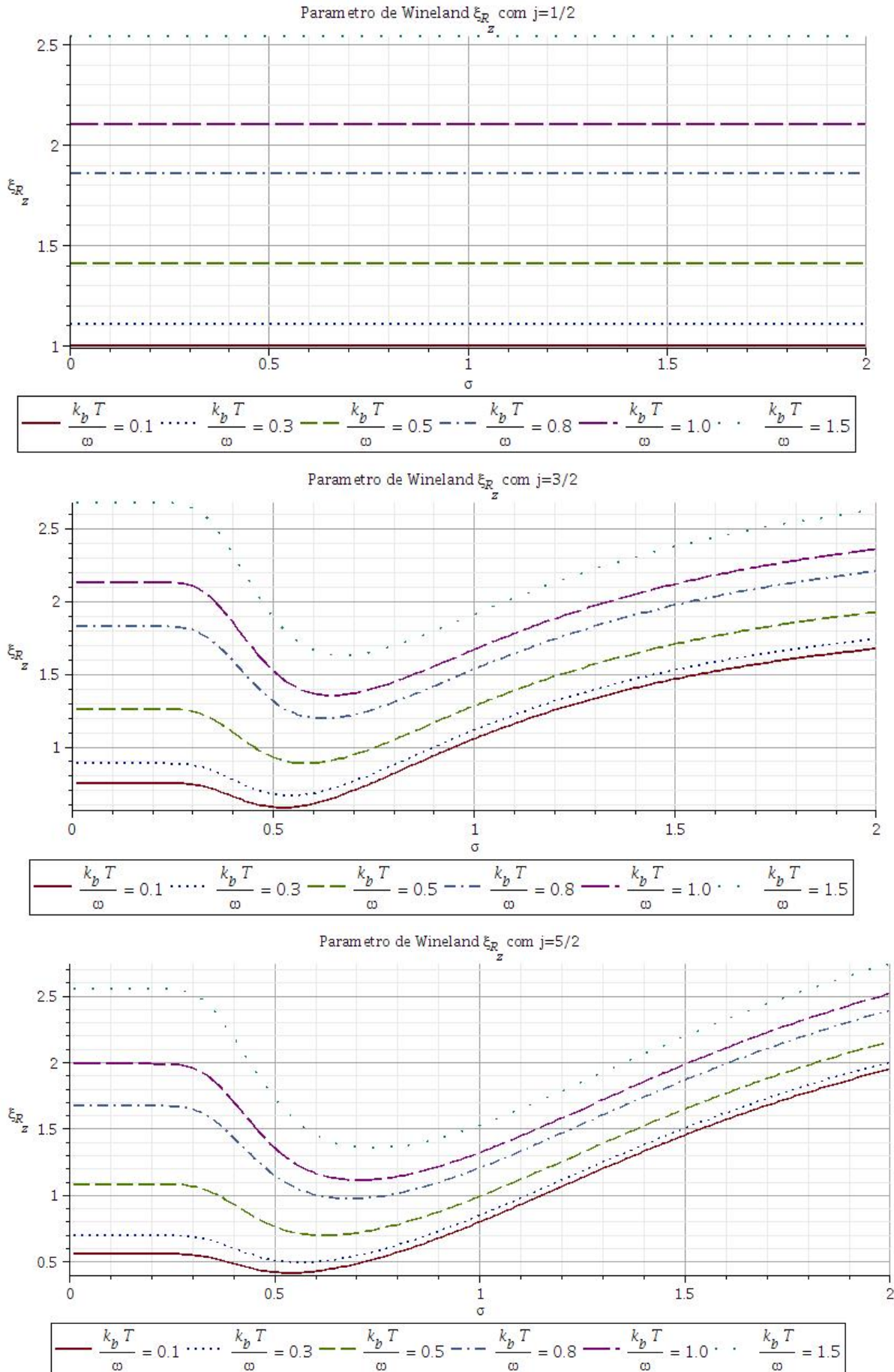
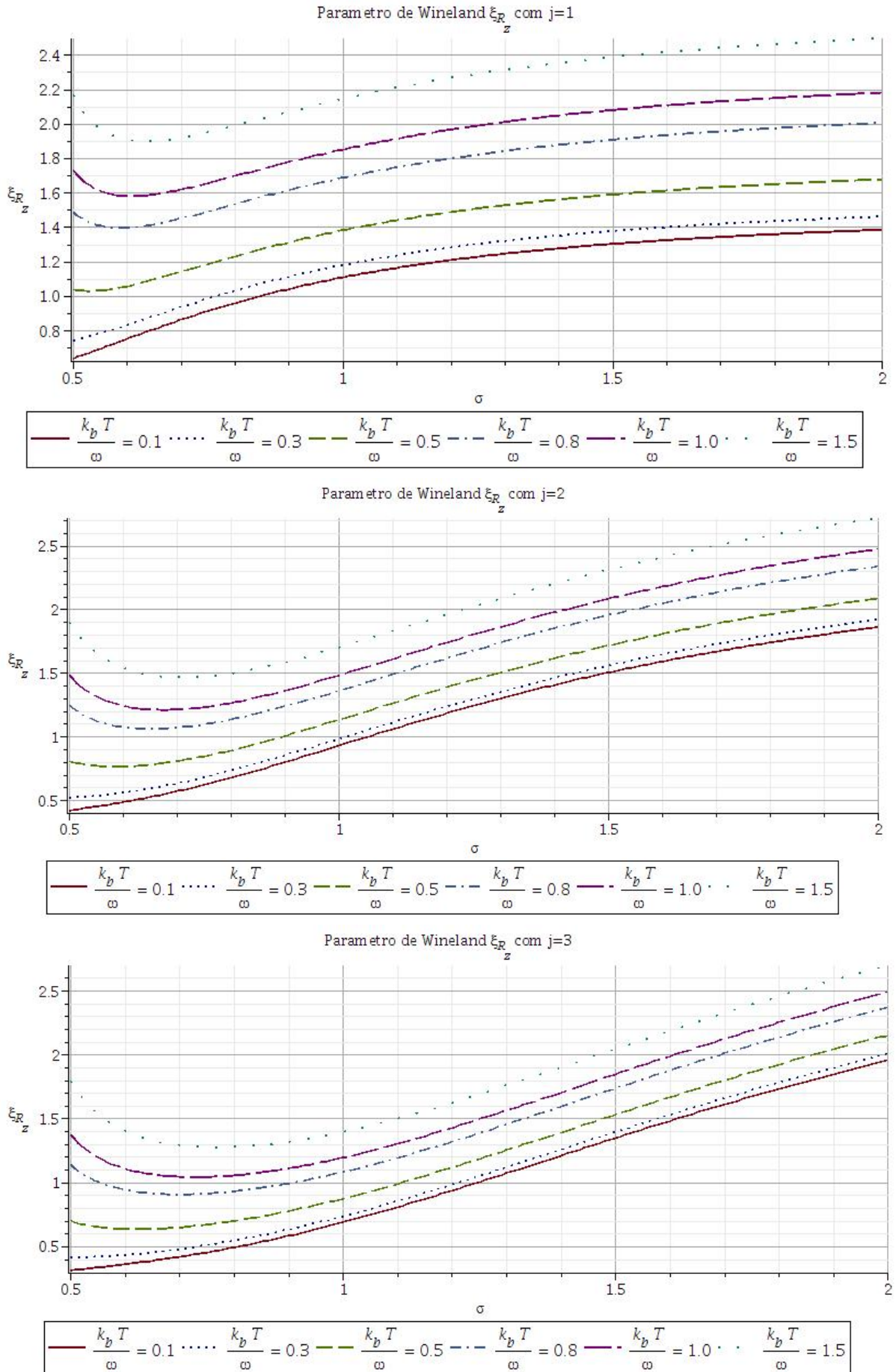


Figura 8.4: Parâmetro de Wineland Térmico ξ_{Rz} para $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$, com $j = \{1, 2, 3\}$.



Para a temperatura $T \rightarrow 0$ podemos obter o limite de σ , para cada valor de j , em que a compressão pode ocorrer. Apesar de possuírem expressões diferentes, as direções y e z possuem limites de compressão bem próximos, que diferem somente a partir da terceira casa decimal. Tais dados são apresentados na tabela (Tab. 8.1).

Vale ressaltar que para grandes temperaturas, isto é, para $T \rightarrow +\infty$, não há compressão em nenhuma das duas direções. Isso indica que para altas temperaturas não é possível manter a compressão sobre o estado Gaussiano.

Os dados da tabela (Tab. 8.1) mostram os valores de σ em que, à temperatura nula, o parâmetro de Compressão $\xi_{R_{y,z}}$ é igual a 1. A partir da análise desses valores podemos obter informação em relação à compressão do estado. Observamos que ao aumentar o valor de j , o limite para que haja compressão aumenta gradativamente.

Apesar de semelhantes, os valores para as direções y e z possuem diferentes interpretações. A tabela abaixo (Tab. 8.1) exhibe, no caso para ξ_{R_y} , os menores valores em que ocorre compressão, ou seja, a partir deles há compressão. Já para o caso ξ_{R_z} , a mesma informa os maiores valores de σ em que há compressão do estado à temperatura nula. Esse comportamento também é observado no trabalho de Huang e Moore [82], ratificando os nossos resultados.

Tabela 8.1: Valores limites de σ , para o parâmetro de Wineland, em que há compressão com $T \rightarrow 0$.

Limite de compressão do parâmetro σ para o Estado Gaussiano Termalizado.					
$\xi_{R_{y,z}} \left(\frac{k_b T}{\omega} \rightarrow 0 \right) = 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
σ	0.850	0.955	1.057	1.157	1.252

Uma questão a ser respondida é se existe um Limite Térmico de Compressão, isto é, uma temperatura em que acima dela não encontraremos compressão sobre o estado, independente do valor de σ utilizado. Tal limite existe e depende do valor de j , aumentando concomitantemente com ele. Os Limites Térmicos de Compressão são expressos na tabela abaixo (Tab. 8.2) para as direções y e z .

Ao analisarmos os valores da tabela abaixo (Tab. 8.2) percebemos que há diferença entre as duas direções, havendo coincidência somente na primeira casa decimal. Como os valores de y são sempre um pouco menores que os de z , a direção y é um pouco mais sensível aos efeitos térmicos que a direção z .

Portanto, utilizando o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos, somos capazes de introduzir o conceito de Limite Térmico de Compressão, calculando-o para cada valor de j . Além disso, evidenciamos que há diferença entre as duas direções ortogonais, o que nos faz concluir que a direção z é mais resistente aos efeitos térmicos.

Tabela 8.2: Limites térmicos para o parâmetro de Wineland nas direções y e z , determinando as menores temperaturas em que há compressão do estado, independente do valor de σ .

Limite Térmico para a Compressão do Estado Gaussiano Termalizado na direção y .					
$\xi_{R_y} = 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\frac{k_b T}{\omega}$	0.456	0.603	0.721	0.828	0.927
Limite Térmico para a Compressão do Estado Gaussiano Termalizado na direção z .					
$\xi_{R_z} = 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\frac{k_b T}{\omega}$	0.481	0.604	0.733	0.837	0.937

8.3 Desigualdades de Tóth Térmicas do Estado Gaussiano

As desigualdades de Tóth, podem ser obtidas a partir das equações (8.10), (8.12) e (8.14). Temos, por exemplo [vide 4.67],

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\beta) | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | \sigma(\beta) \rangle &= u(\beta)^4 j(j+1) + \frac{3}{2} u(\beta)^2 v(\beta)^2 (j+1) \\ &\leq j, \end{aligned} \quad (8.22)$$

resultando no parâmetro de compressão

$$\xi_{T'} = \frac{2j}{2ju^4(\beta) + 3u^2(\beta)v^2(\beta)}. \quad (8.23)$$

igual à equação (7.39) para o estado coerente térmico com $N = 1$. No Apêndice C mostramos que tal resultado independe do estado quântico termalizado.

A segunda desigualdade de Tóth consiste na soma das variâncias térmicas obtidas nas equações (8.15), (8.16) e (8.17), isto é, [vide 4.67]

$$\begin{aligned}
 (\Delta J_x(\beta))^2 + (\Delta J_y(\beta))^2 + (\Delta J_z(\beta))^2 &= u(\beta)^4 j(j+1) + \frac{3}{2} u(\beta)^2 v(\beta)^2 (j+1) \\
 &\quad - \left| \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2,
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

acarretando no parâmetro de compressão

$$\xi_T = u(\beta)^4 (j+1) + \frac{3}{2} u(\beta)^2 v(\beta)^2 \frac{(j+1)}{j} - \frac{1}{j} \left| \frac{u(\beta)^2}{N_\sigma} \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{(m+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}{2\sigma^2}} \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \right\} \right|^2. \tag{8.25}$$

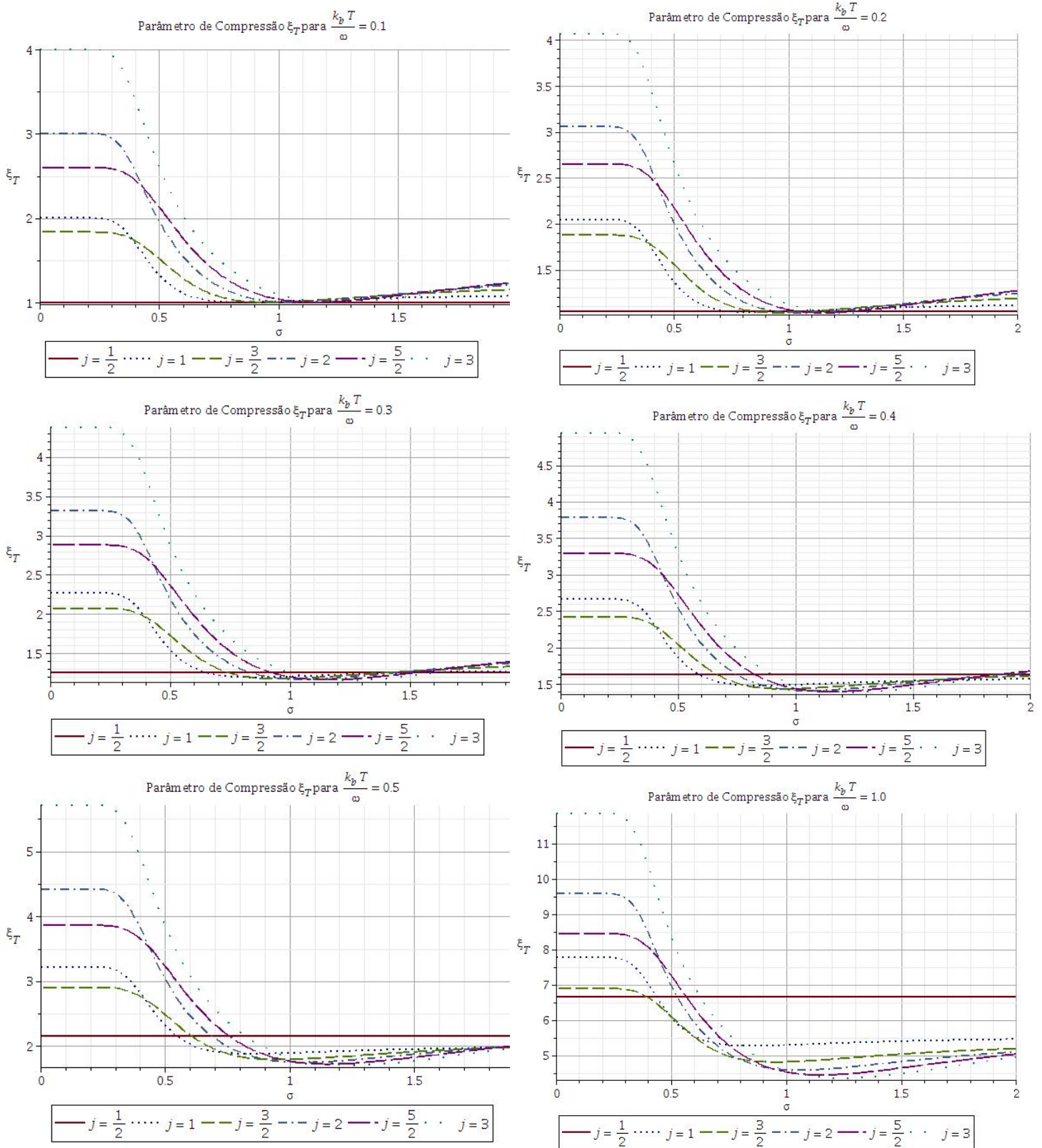
O parâmetro de compressão dado pela equação (8.25) está representado no gráfico da Fig. 8.5. Analisamos os casos em que $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$ com $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0\}$, para observar os efeitos térmicos, assim como a influência do momento angular total j .

Observa-se, nessa análise, uma violação da desigualdade de Tóth dada pela equação (8.22), já que $\xi_{T'} < 1$ para $T > 0$, o que concorda com o resultado obtido no Apêndice C. Já a desigualdade envolvendo as variâncias, representada pelo parâmetro de compressão ξ_T na equação (8.25), não é violada uma vez que todos os valores são maiores ou iguais a 1, independente dos valores de σ e de j , como é mostrado no gráfico da (Fig. 8.5).

É importante frisar que basta a violação de uma das desigualdades de Tóth para caracterizar o emaranhamento, enquanto que a não violação não fornece nenhuma informação sobre a existência ou não desta propriedade. Portanto, obtemos como resultado que a desigualdade de Tóth envolvendo os segundos momentos é mais adequada para avaliar o emaranhamento do estado Gaussiano térmico.

Ao observarmos a Fig. 8.5 notamos também que os efeitos térmicos afastam o estado da região de violação da desigualdade, sendo que ao aumentarmos o valor de j , os valores da desigualdade também aumentam gradativamente, havendo sempre um mínimo que depende de σ .

Figura 8.5: Parâmetro de Compressão ξ_T com $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0\}$.



9 Estado Atomic-Cat Termalizado e os Parâmetros de Compressão

O estado *Atomic-Cat* [88, 89], é uma superposição de dois estados coerentes do momento angular, com diferença de fase de 180° . Podemos analisar esse estado a partir de uma fase arbitrária, o que possibilita investigar os casos com paridade positiva e negativa, além de outras situações.

Neste capítulo utilizaremos a DCT para introduzir a temperatura na análise desse estado, com o intuito de explorar a compressão térmica. Obtendo as médias e variâncias termalizadas, somos capazes de investigar os parâmetros e compressão de Wineland [53, 54], Sorensen [55] e as Desigualdades de Tóth [58], observando a influência da fase ϕ , do parâmetro $z = \tan(\frac{\theta}{2})e^{-i\phi}$, e da temperatura. Também introduzimos o conceito de Limite Térmico de Compressão, o que evidencia a importância da análise dos efeitos térmicos.

9.1 Médias e Variâncias Térmicas do Estado *Atomic-Cat*

A versão térmica do estado *Atomic-Cat* definido na equação (3.59), é

$$|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle = \frac{1}{N_\alpha} \left[|z(\beta)\rangle + e^{i\alpha} | -z(\beta)\rangle \right], \quad (9.1)$$

com a normalização $N_\alpha = \sqrt{2 + 2\cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}}$. As médias térmicas serão obtidas de modo geral por

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_i | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle &= \frac{1}{N_\alpha^2} \left[\langle z(\beta) | J_i | z(\beta) \rangle + e^{i\alpha} \langle z(\beta) | J_i | -z(\beta) \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\alpha} \langle -z(\beta) | J_i | z(\beta) \rangle + \langle -z(\beta) | J_i | -z(\beta) \rangle \right], \end{aligned} \quad (9.2)$$

valendo que $\langle z(\beta) | J_i | -z(\beta) \rangle = (\langle -z(\beta) | J_i | z(\beta) \rangle)^*$, pois J_i é hermitiano.

De forma análoga à (7.8), obtemos

$$\langle z(\beta)|J_x|-z(\beta)\rangle = u^2(\beta)j[-z+z^*] \frac{(1-|z|^2)^{2j-1}}{(1+|z|^2)^{2j}}, \quad (9.3)$$

e juntamente com $\langle -z(\beta)|J_x|-z(\beta)\rangle = -\langle z(\beta)|J_x|z(\beta)\rangle$, segue que

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta)|J_x|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle &= \frac{u^2(\beta)j}{N_\alpha^2} \frac{(1-|z|^2)^{2j-1}}{(1+|z|^2)^{2j}} [e^{i\alpha}(-z+z^*) + e^{-i\alpha}(-z^*+z)] \\ &= -4 \frac{u^2(\beta)j}{N_\alpha^2} \frac{[\cos(\theta)]^{2j}}{(1-\tan(\frac{\theta}{2}))^2} \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\phi)\tan(\frac{\theta}{2}) \\ &= -2 \frac{u^2(\beta)j}{N_\alpha^2} [\cos(\theta)]^{2j-1} \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ &= -u^2(\beta)j \frac{[\cos(\theta)]^{2j-1} \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Analogamente à equação (7.9), a média de J_y é

$$\langle z(\beta)|J_y|-z(\beta)\rangle = u^2(\beta)j \frac{z+z^*}{i} \frac{(1-|z|^2)^{2j-1}}{(1+|z|^2)^{2j}}, \quad (9.5)$$

e como $\langle -z(\beta)|J_y|-z(\beta)\rangle = -\langle z(\beta)|J_y|z(\beta)\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta)|J_y|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle &= \frac{u^2(\beta)j}{N_\alpha^2} \frac{(1-|z|^2)^{2j-1}}{(1+|z|^2)^{2j}} \frac{e^{i\alpha}(z+z^*) - e^{-i\alpha}(z^*+z)}{i} \\ &= 4 \frac{u^2(\beta)j}{N_\alpha^2} \frac{[\cos(\theta)]^{2j}}{(1-\tan(\frac{\theta}{2}))^2} \text{sen}(\alpha)\cos(\phi)\tan(\frac{\theta}{2}) \\ &= u^2(\beta)j \frac{[\cos(\theta)]^{2j-1} \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta)\cos(\phi)}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Como na equação (7.10), temos que

$$\langle z(\beta)|J_z|-z(\beta)\rangle = -u^2(\beta)j \frac{(1-|z|^2)^{2j-1}}{(1+|z|^2)^{2j-1}}, \quad (9.7)$$

que juntamente com $\langle -z(\beta)|J_z|-z(\beta)\rangle = \langle z(\beta)|J_z|z(\beta)\rangle$, nós dá a média de J_z como

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta)|J_z|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle &= \frac{u^2(\beta)j}{N_\alpha^2} \left\{ 2 \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} - 2\cos(\alpha) \frac{(1-|z|^2)^{2j-1}}{(1+|z|^2)^{2j-1}} \right\} \\ &= -u^2(\beta)j \frac{\cos(\theta) + \cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j-1}}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Para os segundos momentos, ocorre que

$$\langle -z(\beta)|J_i^2|-z(\beta)\rangle = \langle z(\beta)|J_i^2|z(\beta)\rangle. \quad (9.9)$$

Então, analisando a equação (7.12) temos

$$\begin{aligned} \langle z(\beta)|J_x^2|-z(\beta)\rangle &= u^4(\beta)\frac{j(j+1)}{2}\frac{(1-|z|^2)^{2j}}{(1+|z|^2)^{2j}} - \frac{u^4(\beta)}{2}j[j|z|^4+2j|z|^2-2|z|^2+j]\frac{(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\ &+ u^4(\beta)\frac{z^2+(z^*)^2}{2}\frac{j(2j-1)(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}} + u^2(\beta)v^2(\beta)\frac{j+1}{2}\frac{(1-|z|^2)^{2j}}{(1+|z|^2)^{2j}}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta)|J_x^2|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle &= \frac{2}{N_\alpha^2}\langle z(\beta)|J_x^2|z(\beta)\rangle + \frac{2\cos(\alpha)}{N_\alpha^2}\langle z(\beta)|J_x^2|-z(\beta)\rangle \\ &= \frac{u^4(\beta)}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}}\left\{\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4}[2j\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)]\right. \\ &\quad \left. + \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4}\right\} + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}}\frac{(j+1)}{2} \\ &\quad + \frac{\cos(\alpha)u^4(\beta)}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}}\left\{\frac{j(j+1)}{2}[\cos(\theta)]^{2j} - \frac{j}{4}[\cos(\theta)]^{2j-2}[2j-\text{sen}^2(\theta)]\right. \\ &\quad \left. + \frac{j(2j-1)}{4}[\cos(\theta)]^{2j-2}\text{sen}^2(\theta)\cos(2\phi) + \frac{v^2(\beta)}{u^2(\beta)}\frac{j+1}{2}[\cos(\theta)]^{2j}\right\} \\ &= \frac{u^4(\beta)}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}}\left\{\frac{j(j+1)}{2}[1+\cos(\alpha)\cos^{2j}(\theta)]\right. \\ &\quad + \frac{v^2(\beta)(j+1)}{2u^2(\beta)}[1+\cos(\alpha)\cos^{2j}(\theta)] \\ &\quad + \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos(2\phi)}{4}[1+\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)] \\ &\quad \left. - \frac{j}{4}[2j\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)+\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)(2j-\text{sen}^2(\theta))]\right\} \\ &= u^4(\beta)\frac{j(j+1)}{2} - u^4(\beta)\frac{j}{4}\frac{2j\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)+\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)[2j-\text{sen}^2(\theta)]}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}} \\ &\quad + u^4(\beta)\frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos(2\phi)}{4}\frac{1+\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)}{1+\cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}} + u^2(\beta)v^2(\beta)\frac{j+1}{2}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Analogamente, para o segundo momento J_y^2 , a partir da equação (7.14), temos

$$\begin{aligned} \langle z(\beta) | J_y^2 | -z(\beta) \rangle &= u^4(\beta) \frac{j(j+1)}{2} \frac{(1-|z|^2)^{2j}}{(1+|z|^2)^{2j}} - \frac{u^4(\beta)}{2} j [j|z|^4 + 2j|z|^2 - 2|z|^2 + j] \frac{(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\ &\quad - u^4(\beta) \frac{z^2 + (z^*)^2}{4} \frac{2j(2j-1)(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}} + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{j+1}{2} \frac{(1-|z|^2)^{2j}}{(1+|z|^2)^{2j}}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

o que acarreta em

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_y^2 | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle &= \frac{2}{N_\alpha^2} \langle z(\beta) | J_y^2 | z(\beta) \rangle + \frac{2\cos(\alpha)}{N_\alpha^2} \langle z(\beta) | J_y^2 | -z(\beta) \rangle \\ &= \frac{u^4(\beta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \left\{ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{j}{4} [2j\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos 2\phi}{4} \right\} + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \frac{(j+1)}{2} \\ &\quad + \frac{\cos(\alpha)u^4(\beta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \left\{ \frac{j(j+1)}{2} [\cos(\theta)]^{2j} - \frac{j}{4} [\cos(\theta)]^{2j-2} [2j - \text{sen}^2(\theta)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{j(2j-1)}{4} [\cos(\theta)]^{2j-2} \text{sen}^2(\theta)\cos(2\phi) + \frac{v^2(\beta)}{u^2(\beta)} \frac{j+1}{2} [\cos(\theta)]^{2j} \right\} \\ &= u^4(\beta) \frac{j(j+1)}{2} - u^4(\beta) \frac{j}{4} \frac{\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta) [2j - \text{sen}^2(\theta)] + 2j\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \\ &\quad - u^4(\beta) \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\cos(2\phi)}{4} \frac{1 + \cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{j+1}{2}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Por fim, utilizando a equação (7.16), determinamos que

$$\begin{aligned} \langle z(\beta) | J_z^2 | -z(\beta) \rangle &= u^4(\beta) j [j|z|^4 + 2j|z|^2 - 2|z|^2 + j] \frac{(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}} \\ &\quad + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{j+1}{2} \frac{(1-|z|^2)^{2j}}{(1+|z|^2)^{2j}}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

e então

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_z^2 | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle &= \frac{2}{N_\alpha^2} \langle z(\beta) | J_z^2 | z(\beta) \rangle + \frac{2\cos(\alpha)}{N_\alpha^2} \langle z(\beta) | J_z^2 | -z(\beta) \rangle \\
&= \frac{u^4(\beta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \frac{j}{2} [2j\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] + \frac{u^2(\beta)v^2(\beta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \frac{(j+1)}{2} \\
&\quad + \frac{\cos(\alpha)u^4(\beta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \left\{ \frac{j}{2} [\cos(\theta)]^{2j-2} [2j - \sin^2(\theta)] + \frac{v^2(\beta)}{u^2(\beta)} \frac{j+1}{2} [\cos(\theta)]^{2j} \right\} \\
&= u^4(\beta) \frac{j}{2} \frac{\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta) [2j - \sin^2(\theta)] + 2j\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \\
&\quad + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{j+1}{2}. \tag{9.15}
\end{aligned}$$

As equações (9.11), (9.13) e (9.15) satisfazem a relação

$$\begin{aligned}
u^4(\beta)j(j+1) + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{3(j+1)}{2} &= \langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_x^2 | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle \\
&\quad + \langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_y^2 | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle \\
&\quad + \langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_z^2 | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle, \tag{9.16}
\end{aligned}$$

como apresentado no Apêndice C [vide equação C.17]. As variâncias térmicas do estado *Atomic-Cat* são

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x(\beta))^2 &= u^4(\beta) \frac{j(j+1)}{2} - u^4(\beta) \frac{j}{4} \frac{\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta) [2j - \sin^2(\theta)] + 2j\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \\
&\quad + u^4(\beta) \frac{j(2j-1)\sin^2(\theta)\cos(2\phi)}{4} \frac{1 + \cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{j+1}{2} \\
&\quad - u^4(\beta)j^2 \frac{[\cos(\theta)]^{4j-2} \sin^2(\alpha)\sin^2(\theta)\sin^2(\phi)}{\{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}^2}, \tag{9.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta J_y(\beta))^2 &= u^4(\beta) \frac{j(j+1)}{2} - u^4(\beta) \frac{j}{4} \frac{\cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta) [2j - \sin^2(\theta)] + 2j\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \\
&\quad - u^4(\beta) \frac{j(2j-1)\sin^2(\theta)\cos(2\phi)}{4} \frac{1 + \cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{j+1}{2} \\
&\quad - u^4(\beta)j^2 \frac{[\cos(\theta)]^{4j-2} \sin^2(\alpha)\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)}{\{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}^2}, \tag{9.18}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\Delta J_z(\beta))^2 &= u^4(\beta) \frac{j}{2} \frac{\cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta) [2j - \sin^2(\theta)] + 2j \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} + u^2(\beta) v^2(\beta) \frac{j+1}{2} \\
&\quad - u^4(\beta) j^2 \left\{ \frac{\cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1}}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \right\}^2. \tag{9.19}
\end{aligned}$$

9.2 Parâmetro de Wineland Térmico do Estado *Atomic-Cat*

O vetor $\vec{J}(\beta) = (\langle J_x(\beta) \rangle, \langle J_y(\beta) \rangle, \langle J_z(\beta) \rangle)$ é dado pelas equações (9.4), (9.6) e (9.8). Uma direção ortonormal a MSD é

$$\hat{n}_\perp = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0). \tag{9.20}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
J_{\hat{n}_\perp} &= J_x \cos(\phi) + J_y \sin(\phi) \\
J_{\hat{n}_\perp}^2 &= J_x^2 \cos^2(\phi) + J_y^2 \sin^2(\phi) + \sin(\phi) \cos(\phi) \frac{J_+^2 - J_-^2}{2i}, \tag{9.21}
\end{aligned}$$

e tem-se $\langle J_{\hat{n}_\perp} \rangle = 0$. Para calcular a variância ortogonal à MSD basta determinar as médias térmicas do estado *Atomic-Cat* sobre J_+^2 e J_-^2 .

Pela equação (7.28) temos

$$\langle z(\beta) | J_+^2 | -z(\beta) \rangle = u^4(\beta) (z^*)^2 \frac{2j(2j-1)(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}}, \tag{9.22}$$

e que $\langle -z(\beta) | J_+^2 | -z(\beta) \rangle = \langle z(\beta) | J_+^2 | z(\beta) \rangle$, acarretando em

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_+^2 | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle &= \frac{2}{N_\alpha^2} \langle z(\beta) | J_+^2 | z(\beta) \rangle + \frac{2\cos(\alpha)}{N_\alpha^2} \langle z(\beta) | J_+^2 | -z(\beta) \rangle \\
&= \frac{u^4(\beta) 4j(2j-1)}{N_\alpha^2} \left\{ \frac{(z^*)^2}{(1+|z|^2)^2} + \cos(\alpha) \frac{(z^*)^2 (1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}} \right\}. \tag{9.23}
\end{aligned}$$

De modo análogo, utilizando a equação (7.31) obtemos

$$\langle z(\beta)|J_-^2|-z(\beta)\rangle = u^4(\beta)(z)^2 \frac{2j(2j-1)(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}}, \quad (9.24)$$

com $\langle -z(\beta)|J_-^2|-z(\beta)\rangle = \langle z(\beta)|J_-^2|z(\beta)\rangle$. Segue então que

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta)|J_-^2|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle &= \frac{2}{N_\alpha^2} \langle z(\beta)|J_-^2|z(\beta)\rangle + \frac{2\cos(\alpha)}{N_\alpha^2} \langle z(\beta)|J_-^2|-z(\beta)\rangle \\ &= \frac{u^4(\beta)4j(2j-1)}{N_\alpha^2} \left\{ \frac{(z)^2}{(1+|z|^2)^2} + \cos(\alpha) \frac{(z)^2(1-|z|^2)^{2j-2}}{(1+|z|^2)^{2j}} \right\}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta)|\frac{J_+^2 - J_-^2}{2i}|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle &= \frac{u^4(\beta)4j(2j-1)}{N_\alpha^2} \left\{ \frac{(z^*)^2 - z^2}{2i(1+|z|^2)^2} + \cos(\alpha) \frac{[(z^*)^2 - z^2](1-|z|^2)^{2j-2}}{2i(1+|z|^2)^{2j}} \right\} \\ &= \frac{u^4(\beta)j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)\text{sen}(2\phi)}{1 + \cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}} \left\{ \frac{1 + \cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j-2}}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

A variância térmica na direção ortonormal é obtida a partir das equações (9.11), (9.13) e (9.26), ou seja,

$$\begin{aligned} (\Delta J_{n_\perp}(\beta))^2 &= \cos^2(\phi) \langle \psi_\alpha(z, \beta)|J_x^2|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle + \text{sen}^2(\phi) \langle \psi_\alpha(z, \beta)|J_y^2|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle \\ &\quad + \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} \langle \psi_\alpha(z, \beta)|\frac{J_+^2 - J_-^2}{2i}|\psi_\alpha(z, \beta)\rangle \\ &= u^4(\beta) \frac{j(j+1)}{2} - u^4(\beta) \frac{j}{4} \frac{2j\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) + \cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)[2j - \text{sen}^2(\theta)]}{1 + \cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}} \\ &\quad + u^4(\beta) \frac{j(2j-1)\text{sen}^2(\theta)}{4} \frac{1 + \cos(\alpha)\cos^{2j-2}(\theta)}{1 + \cos(\alpha)[\cos(\theta)]^{2j}} + u^2(\beta)v^2(\beta) \frac{j+1}{2}, \end{aligned} \quad (9.27)$$

que não depende de ϕ .

Calculando o parâmetro térmico de Wineland (vide equação 7.25) temos

$$\begin{aligned}
\xi_R(\beta) &= 2j \frac{(\Delta J_{\hat{n}_\perp}(\beta))^2}{|\langle \psi_\alpha(z, \beta)(\beta) | \vec{J} | \psi_\alpha(z, \beta)(\beta) \rangle|^2} \\
&= \left\{ \frac{(j+1)}{j} - \frac{1}{2} \frac{2j \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta) [2j - \sin^2(\theta)]}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2j-1) \sin^2(\theta)}{2} \frac{1 + \cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta)}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} + \frac{v^2(\beta)}{u^2(\beta)} \frac{j+1}{j} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{[\cos(\theta)]^{4j-2} \sin^2(\alpha) \sin^2(\theta)}{\{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}^2} + \left[\frac{\cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1}}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \right]^2 \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{9.28}$$

O ângulo α só aparece em $\sin^2(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, o que implica que para os valores $\alpha = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ temos as mesmas expressões para $\xi_R(\beta)$, sendo então suficiente analisar somente uma delas. O parâmetro de Wineland não depende do ângulo ϕ . Os gráficos de ξ_R são apresentados nas figuras (Fig. 9.1) e (Fig. 9.2) para $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $\frac{k_b T}{\omega} = 1.0$, respectivamente, e $\alpha = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$.

O estado *Atomic-Cat* não sofre compressão segundo o parâmetro de Wineland, isto é, $\xi_R(\beta) \geq 1$ independente dos valores de j , θ , α e $\frac{k_b T}{\omega}$, o que indica que a direção ortogonal à MSD não é comprimida. A variação de $\xi_R(\beta)$ com a temperatura pode ser observada comparando os gráficos (Fig. 9.1), para $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$, com os gráficos (Fig. 9.2), para $\frac{k_b T}{\omega} = 1.0$. O aumento da temperatura só afasta mais ainda o estado da região de compressão.

Devido à função $\cos(\theta)$ encontrar-se no denominador do parâmetro de Wineland, observamos uma divergência em todos os casos para $\theta = \frac{\pi}{2}$, exceto para $j = \frac{1}{2}$.

O caso do estado simétrico (quando $\alpha = 0$) e o antissimétrico (para $\alpha = \pi$) implicam em propriedades de simetria em relação a m . O efeito dessas propriedades emerge quando fazemos a soma sobre todos os valores de m , resultando em diferentes formas das expressões do parâmetro de Wineland.

Figura 9.1: Parâmetro de Wineland ξ_{R_x} para $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$ e $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

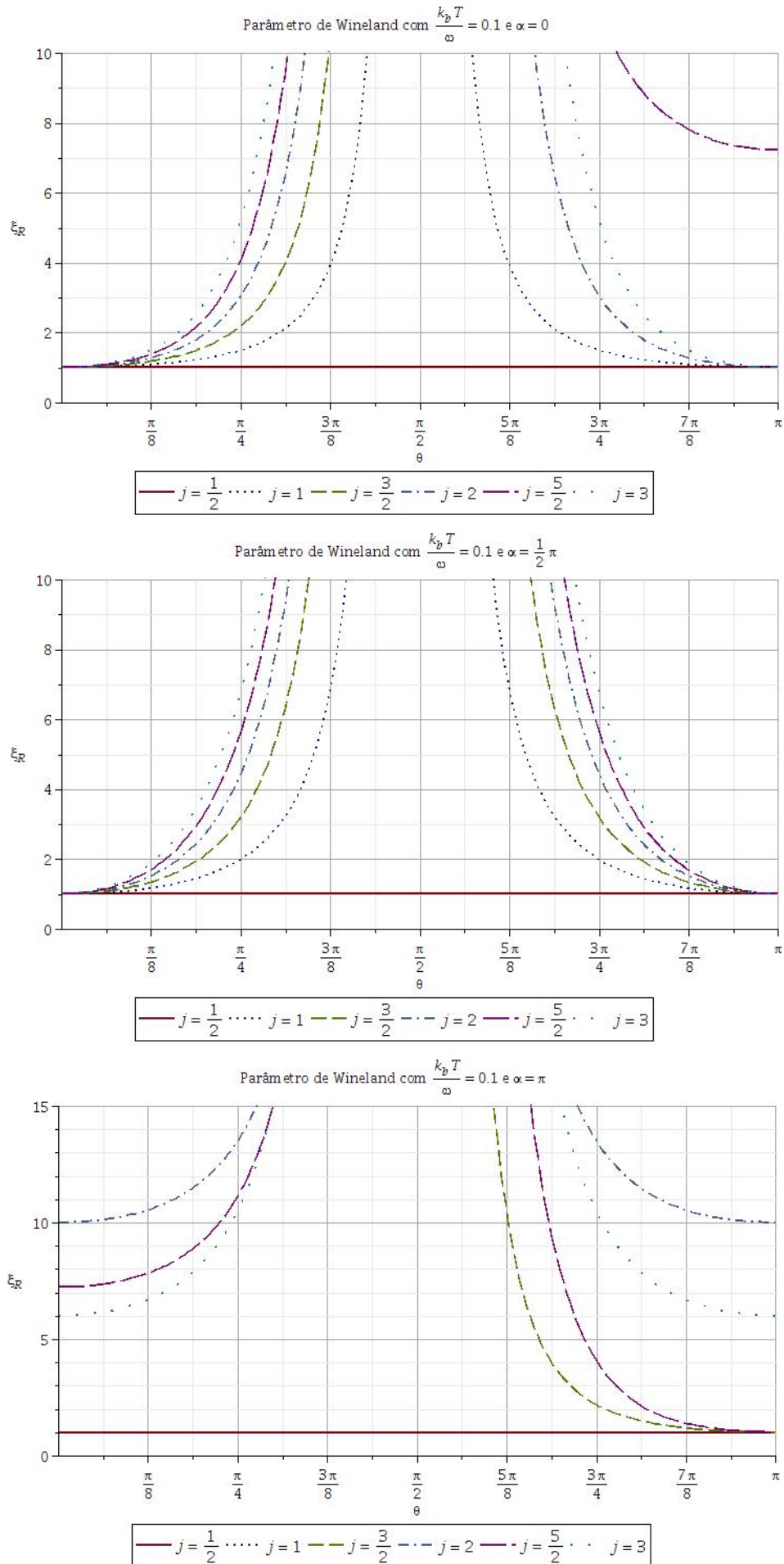
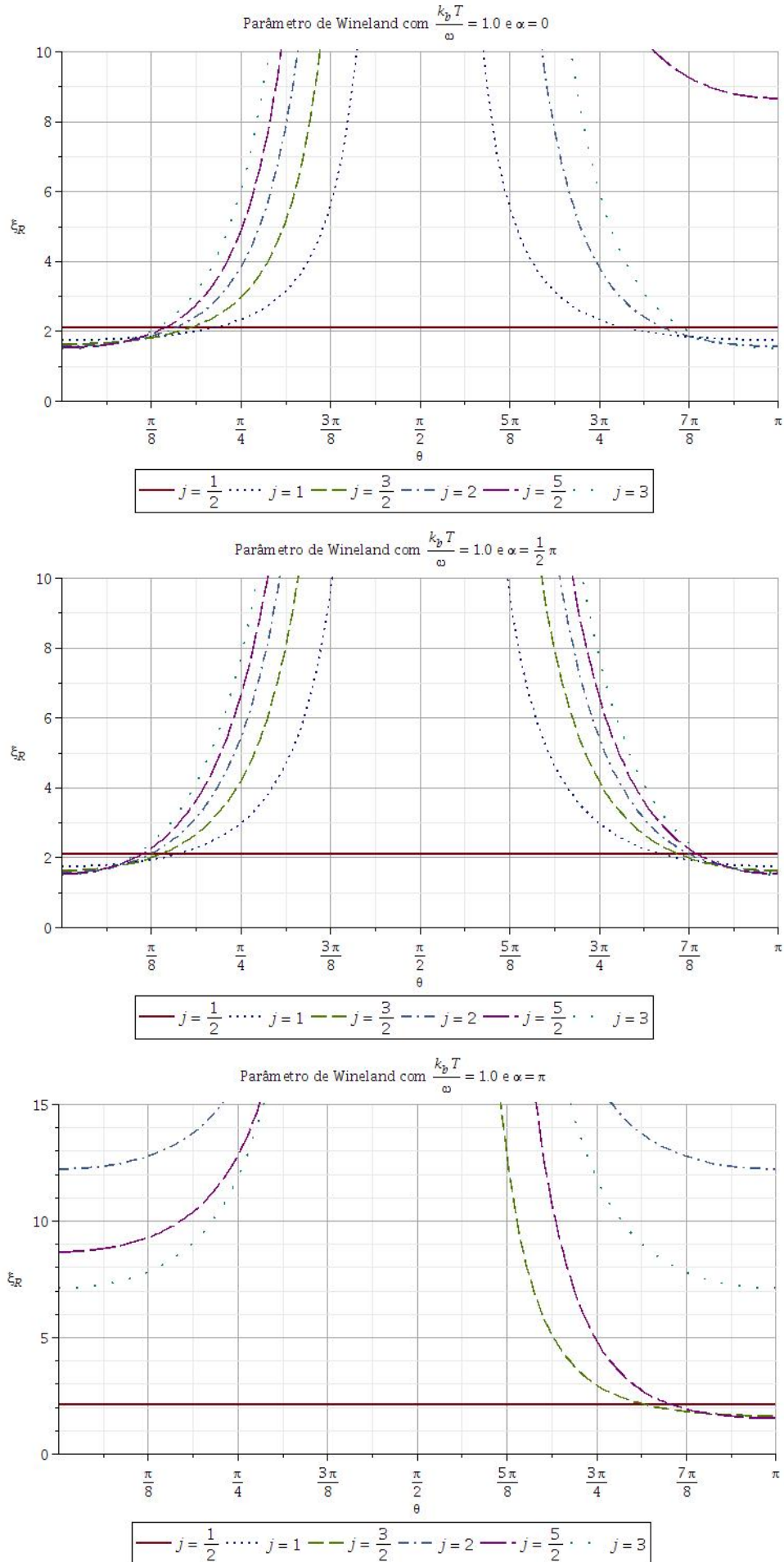


Figura 9.2: Parâmetro de Wineland ξ_{R_x} para $\frac{k_b T}{\omega} = 1.0$ e $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.



9.3 Parâmetro de Sorensen Térmico do Estado *Atomic-Cat*

As três direções do parâmetro de Sorensen térmico, do estado *Atomic-Cat*, são dados a partir da equação

$$\xi_{R'}(\beta) = \frac{2j(\Delta J_l(\beta))^2}{\langle J_m(\beta) \rangle^2 + \langle J_n(\beta) \rangle^2}, \quad l, m, n \in \{x, y, z\}. \quad (9.29)$$

Então, para cada uma das direções temos:

i) direção x

$$\begin{aligned} \xi_{R'_x}(\beta) = & \frac{1}{2j^2} \left\{ j(j+1) + \frac{v^2(\beta)(j+1)}{u^2(\beta)} \right\} \frac{\{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}^2}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2} \\ & - \frac{1}{4j} \frac{\{ \cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta) [2j - \text{sen}^2(\theta)] + 2j \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) \} \{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2} \\ & + \frac{(2j-1) \text{sen}^2(\theta) \cos(2\phi)}{4j} \frac{\{1 + \cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta)\} \{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2} \\ & - \frac{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \text{sen}^2(\phi)}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2}, \end{aligned} \quad (9.30)$$

ii) direção y

$$\begin{aligned} \xi_{R'_y}(\beta) = & \frac{1}{2j^2} \left\{ j(j+1) + \frac{v^2(\beta)(j+1)}{u^2(\beta)} \right\} \frac{\{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}^2}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \text{sen}^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2} \\ & - \frac{1}{4j} \frac{\{ \cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta) [2j - \text{sen}^2(\theta)] + 2j \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) \} \{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \text{sen}^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2} \\ & - \frac{(2j-1) \text{sen}^2(\theta) \cos(2\phi)}{4j} \frac{\{1 + \cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta)\} \{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}\}}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \text{sen}^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2} \\ & - \frac{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi)}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta) \text{sen}^2(\phi) + \{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \}^2}, \end{aligned} \quad (9.31)$$

iii) direção z

$$\xi_{R'_z}(\beta) = \frac{1}{2j} \frac{\left\{ \cos(\alpha) \cos^{2j-2}(\theta) [2j - \sin^2(\theta)] + 2j \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \right\} \left\{ 1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j} \right\}}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \sin^2(\alpha) \sin^2(\theta)} - \frac{\left\{ \cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1} \right\}^2}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \sin^2(\alpha) \sin^2(\theta)} + \frac{v^2(\beta) j + 1}{u^2(\beta) 2j^2} \frac{\left\{ 1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j} \right\}^2}{[\cos(\theta)]^{4j-2} \sin^2(\alpha) \sin^2(\theta)}. \quad (9.32)$$

A compressão é observada quando os valores desses parâmetros são menores do que 1. Analisaremos aqui diversos gráficos das equações (9.30), (9.31) e (9.32) a fim de caracterizar o comportamento de tais expressões, assim como a influência da temperatura sobre a região de compressão¹.

Os parâmetros de compressão de Sorensen divergem para $\theta = \frac{\pi}{2}$, devido à função $\cos(\theta)$ no denominador, fato este presente em todos os gráficos dessa seção.

O ângulo ϕ aparece nas expressões nas funções $\cos^2(\phi)$, $\cos(2\phi)$ e $\sin^2(\phi)$, resultando que para os valores $\phi = \{0, \pi\}$ e $\phi = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ os parâmetros coincidem, sendo suficiente analisar o comportamento do parâmetro para somente um desses valores. Semelhante à seção anterior, a dependência de α se dá com $\sin^2(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, e assim para os valores $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ há coincidência dos parâmetros.

Na direção x , o gráfico (Fig. 9.3) indica que há compressão quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, dependendo do valor de θ . Isso ocorre para os três valores de α analisados, tanto para j inteiro como para semi-inteiro. Para $\phi = 0$ não há compressão, independente dos valores de α e θ .

Já na direção y , gráfico (Fig. 9.4), nota-se compressão para $\phi = 0$, mas não há compressão quando $\phi = \frac{\pi}{2}$. Analisando atentamente os dois gráficos percebemos que os gráficos relativos a x são semelhantes aos de y ; suas expressões diferem por uma translação $\phi \mapsto \phi + \frac{\pi}{2}$.

Quando analisamos a direção z , [veja o gráfico (Fig. 9.5)], não encontramos compressão em nenhuma situação. A expressão da equação (9.32) diverge tanto para $\theta = 0$ como para $\theta = \pi$, sendo necessário escolher pontos diferentes destes valores para construir os gráficos.

O parâmetro $\xi_{R'_z}$ não depende de ϕ e não indica compressão em circunstância alguma. O fato da direção que não depende de ϕ não indicar compressão, e aquelas que dependem sofrerem grande influência da sua variação, indica a importância desse parâmetro para o estudo da compressão.

Pela análise da expressão (9.30) o menor valor de $\xi_{R'_x}$, em relação ao parâmetro ϕ , é obtido para $\phi = \frac{\pi}{2}$, enquanto que para a direção y , dada pela equação (9.31), temos $\phi = 0$. Com $j = \frac{1}{2}$

¹Indicamos por região de compressão a área do gráfico em que o parâmetro é menor do que 1.

Figura 9.3: Parâmetro de Sorensen na direção x , $\xi_{R'_x}$, com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\phi = \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

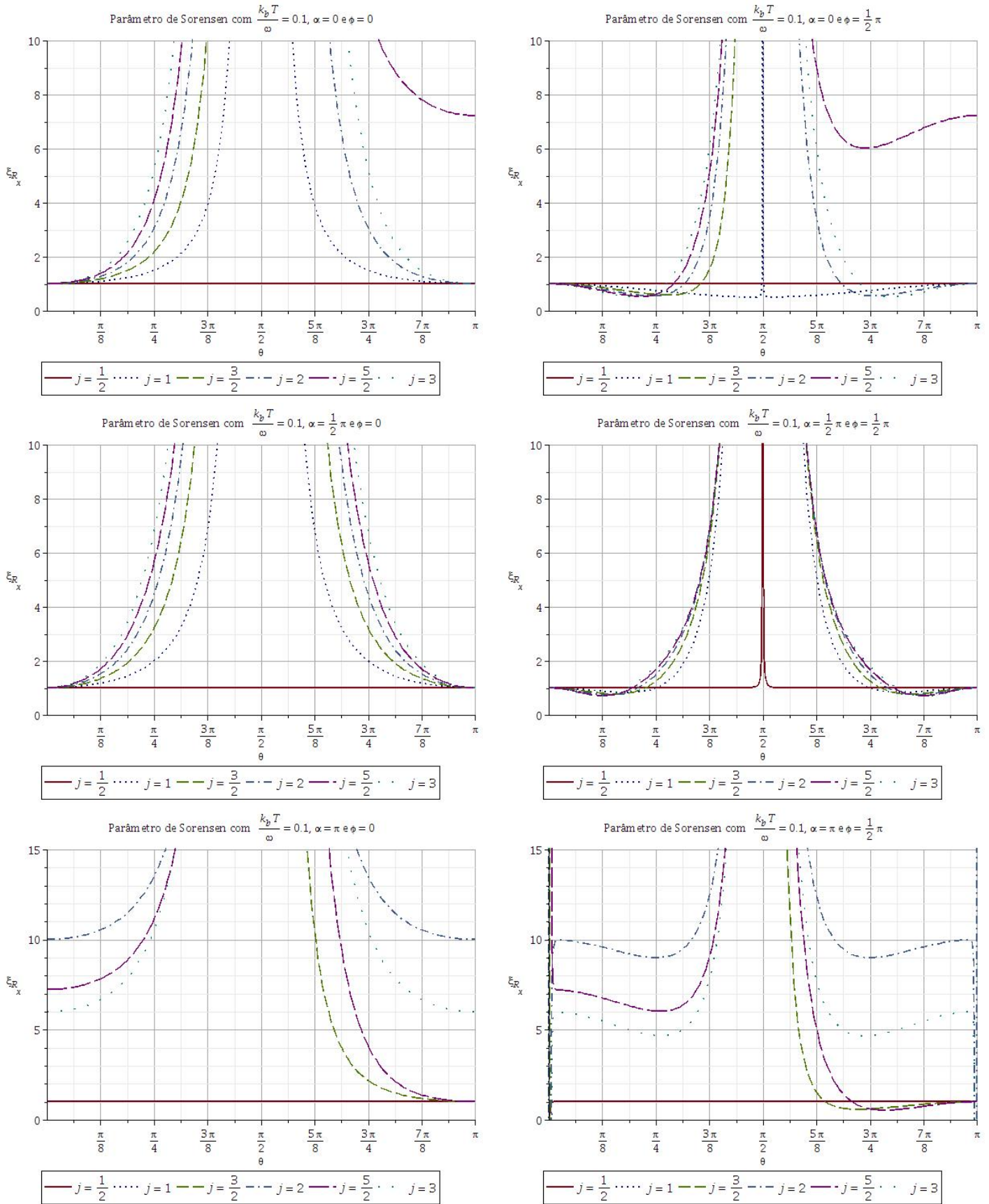


Figura 9.4: Parâmetro de Sorensen na direção y , $\xi_{R'_y}$, com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\phi = \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

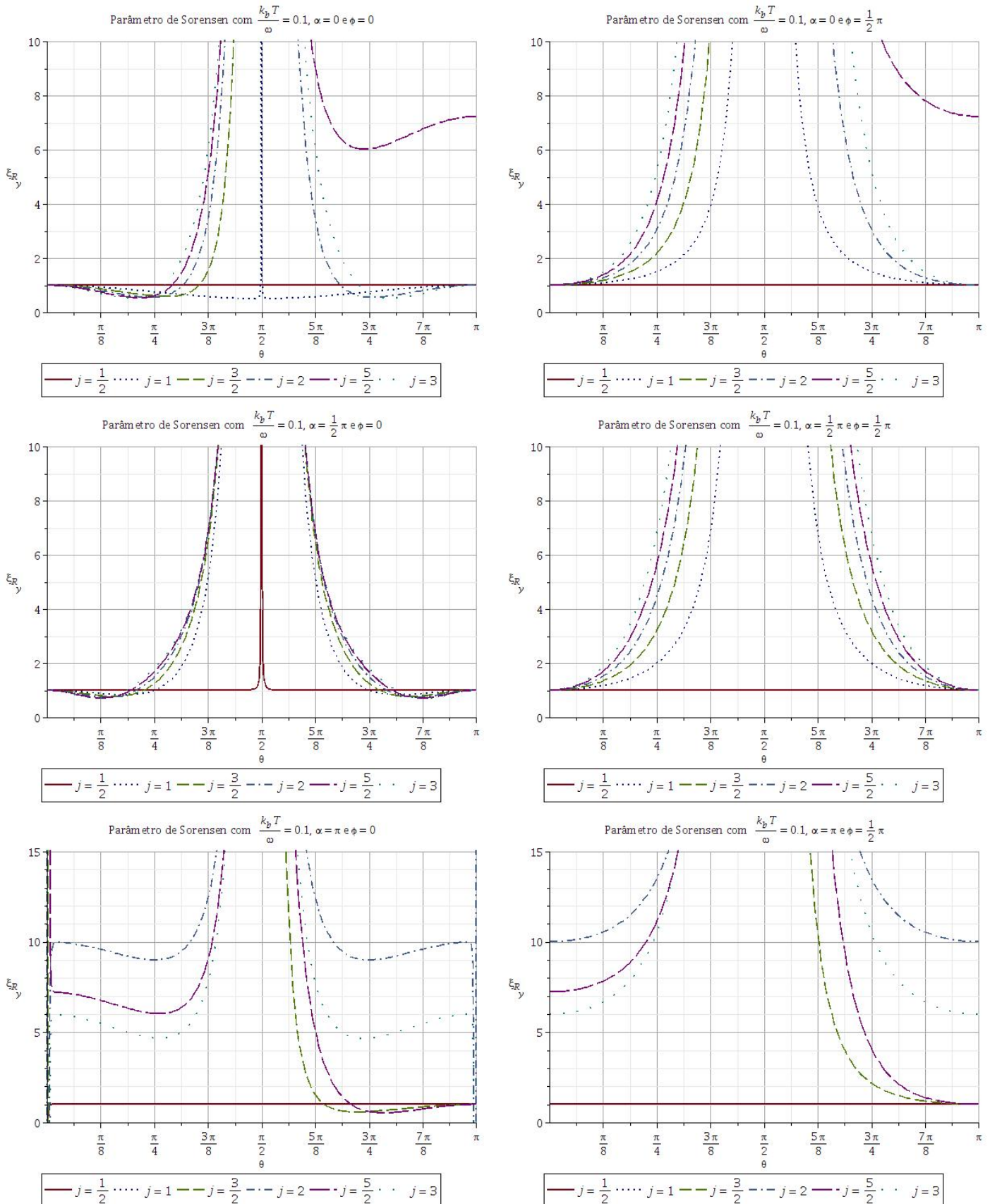
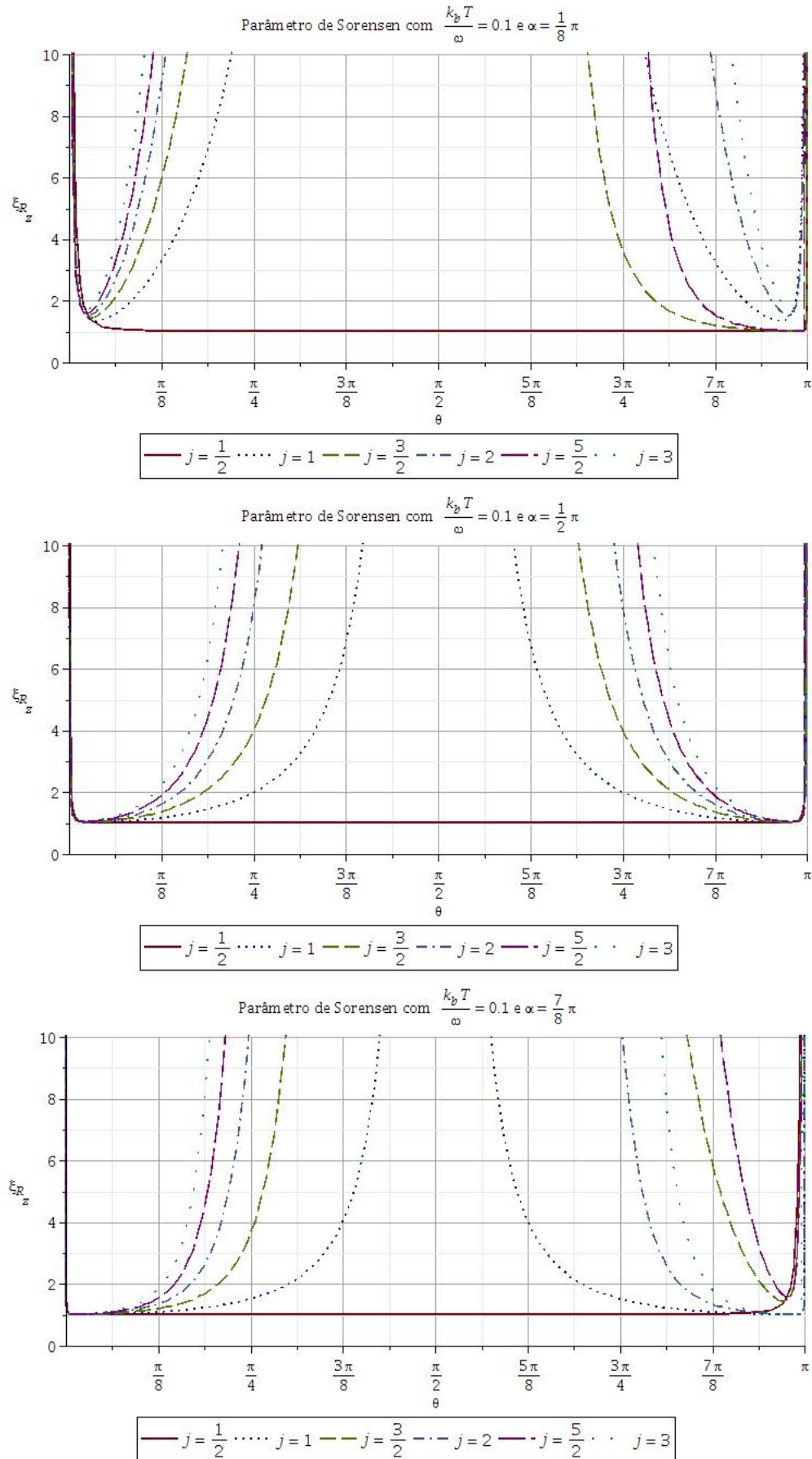


Figura 9.5: Parâmetro de Sorensen na direção z , ξ_{R_z} , com $\alpha = \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{8} \right\}$.



a compressão não é alcançada independente do valor de θ , α e ϕ .

Para $j = 1$ e $\alpha = \pi$ os parâmetros de compressão são divergentes, tanto na direção x quanto na direção y . Por esse motivo, não os observamos nos gráficos (Fig. 9.3) e (Fig. 9.4).

A situação para temperatura nula é apresentada no gráfico (Fig. 9.6) com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$, onde tomamos $\phi = \frac{\pi}{2}$ afim de explicitar a região de compressão. Sem perda de generalidade, escolhemos a direção x já que a mesma é equivalente a y , a menos de uma translação de $\frac{\pi}{2}$. Esses resultados coincidem com os obtidos por Lau et al. [153], legitimando nossos resultados.

As regiões de compressão dos gráficos (Fig. 9.6) são apresentadas na tabela (Tab. 9.1), para $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. Os limites superiores dos intervalos foram truncados na terceira casa decimal, enquanto que os limites inferiores foram majorados, para garantir a compressão nas regiões. Nossos valores concordam com o resultado encontrado por Gerry e Grobre [89, 154], ratificando os nossos resultados.

Tabela 9.1: Regiões de compressão do parâmetro de Sorensen à temperatura nula, para $\xi_{R'_x}$ com $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Região de compressão para $\alpha = 0$.					
$\xi_{R_x} < 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\theta \in$	$]0 ; \pi[$	$]0 ; 1.112[$	$]0 ; 0.993[$ $]2.149 ; \pi[$	$]0 ; 0.915[$	$]0 ; 0.858[$ $]2.284 ; \pi[$
Região de compressão para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.					
$\xi_{R_x} < 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\theta \in$	$]0 ; 0.785[$ $]2.357 ; \pi[$	$]0 ; 0.707[$ $]2.434 ; \pi[$	$]0 ; 0.653[$ $]2.488 ; \pi[$	$]0 ; 0.613[$ $]2.529 ; \pi[$	$]0 ; 0.580[$ $]2.561 ; \pi[$
Região de compressão para $\alpha = \pi$.					
$\xi_{R_x} < 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\theta \in$	————	$]2.030 ; \pi[$	————	$]2.227 ; \pi[$	————

Na temperatura nula e para $\alpha = 0$, observamos que quanto maior o valor de j menor é a

região de compressão. Verifica-se também uma distinção entre estados com j inteiros e semi-inteiros, pois no caso inteiro a compressão ocorre em duas regiões simétricas, enquanto que no caso semi-inteiro a compressão existe a partir de uma região sempre iniciada em $\theta = 0$. Em particular para $j = 1$ a compressão ocorre para todos os ângulos.

À medida que j aumenta, as regiões de compressão vão se reduzindo, o que concorda com a ideia de limite clássico para $j \rightarrow +\infty$; isso indica que, quanto maior j , mais difícil é observar a compressão do estado.

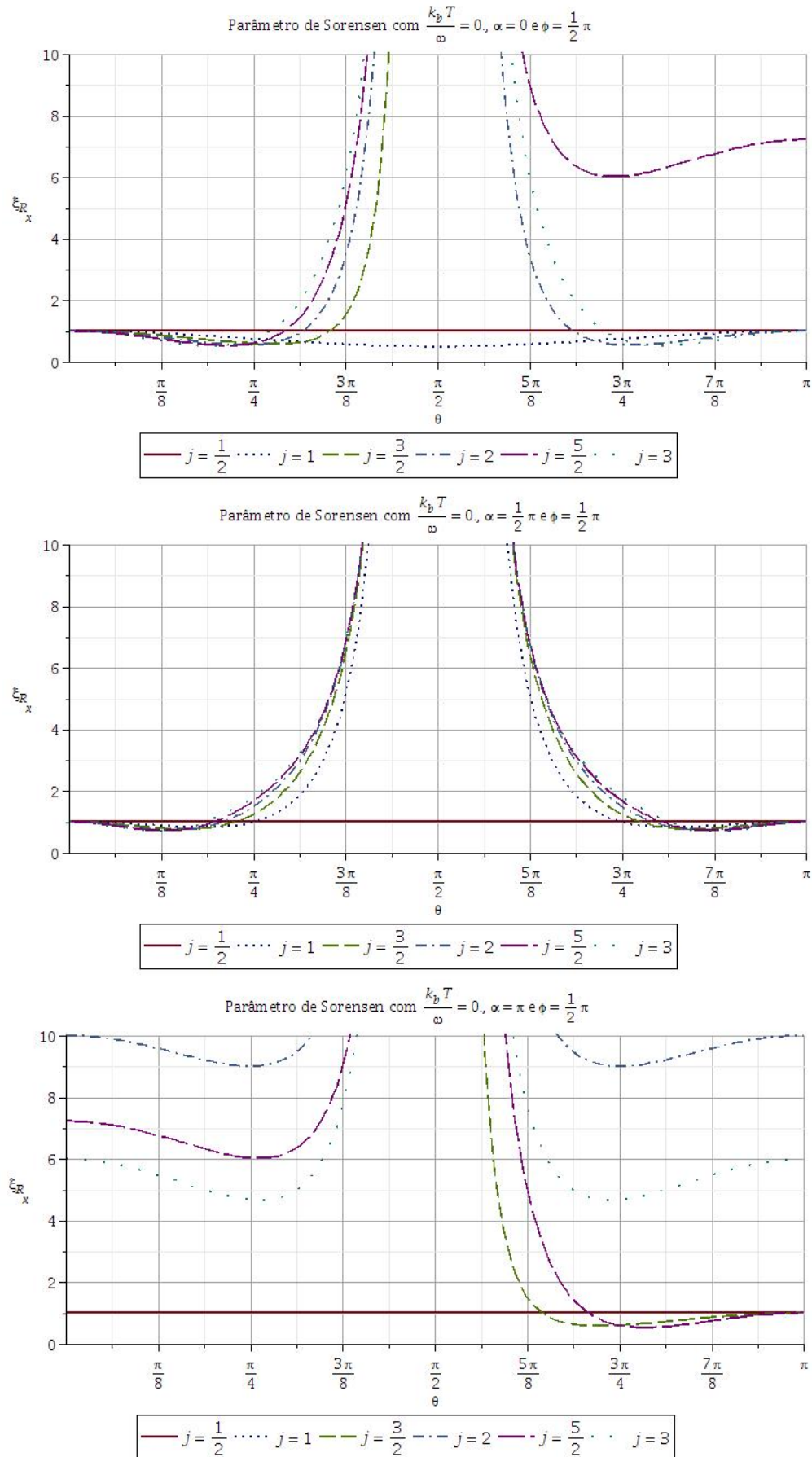
Com $\alpha = \frac{\pi}{2}$, todas as regiões de compressão são simétricas em relação ao valor central $\frac{\pi}{2}$. No caso de $\alpha = \pi$, somente os valores semi-inteiros apresentam compressão, que ocorre para ângulos de θ maiores que $\frac{\pi}{2}$.

Tabela 9.2: Limites térmicos de compressão para o parâmetro de Sorensen ξ_{R_x} com $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Limites térmicos de compressão para $\alpha = 0$.					
$\xi_{R_x} = 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\frac{k_b T}{\omega}$	0.481	0.604	0.701	0.781	0.847
Limites térmicos de compressão para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.					
$\xi_{R_x} = 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\frac{k_b T}{\omega}$	0.361	0.454	0.521	0.571	0.617
Limite térmico de compressão para $\alpha = \pi$.					
$\xi_{R_x} = 1$	$j = 1$	$j = \frac{3}{2}$	$j = 2$	$j = \frac{5}{2}$	$j = 3$
$\frac{k_b T}{\omega}$	—	0.604	—	0.781	—

Ao aumentarmos a temperatura, os valores dos parâmetros de compressão também aumentam, o que implica na existência dos Limites Térmicos de Compressão, ou seja, uma temperatura tal que, acima dela, não encontramos compressão sobre o estado, independente dos valores de α , θ e ϕ .

Figura 9.6: Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ à temperatura nula, com $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.



Os Limites Térmicos de Compressão são apresentados na tabela 9.2, e dependem do valor de j e do ângulo α . Esses valores evidenciam a importância da consideração dos efeitos térmicos para a análise da compressão.

Nossos resultados podem auxiliar na realização de experimentos, informando as melhores faixas tanto de temperatura quanto dos parâmetros α , θ e ϕ , para se obter compressão.

Analisando a tabela 9.2, percebemos que os estados simétricos, com $\alpha = 0$, são mais resistentes à temperatura, sendo a melhor opção j inteiro, já que os mesmos possuem duas regiões de compressão.

No caso de $\alpha = \pi$ os limites térmicos de compressão, quando existem, coincidem com os valores encontrados para o caso $\alpha = 0$. Isso evidencia que os estados simétricos e anti-simétricos, quando comprimidos, respondem de formas semelhantes à temperatura.

Consistente com toda a análise térmica feita até o momento, à medida que j aumenta o limite térmico de compressão também aumenta. As variações da temperatura para $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ são apresentadas nas figuras (Fig. 9.7), (Fig. 9.8) e (Fig. 9.9).

Variando as temperaturas, afim de analisar os limites térmicos para cada α , percebemos que, ao aumentar a temperatura, as regiões de compressão diminuem e ao ultrapassar os limites térmicos a compressão é extinta.

Figura 9.7: Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ com $\alpha = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.5, 0.7, 0.9\}$.

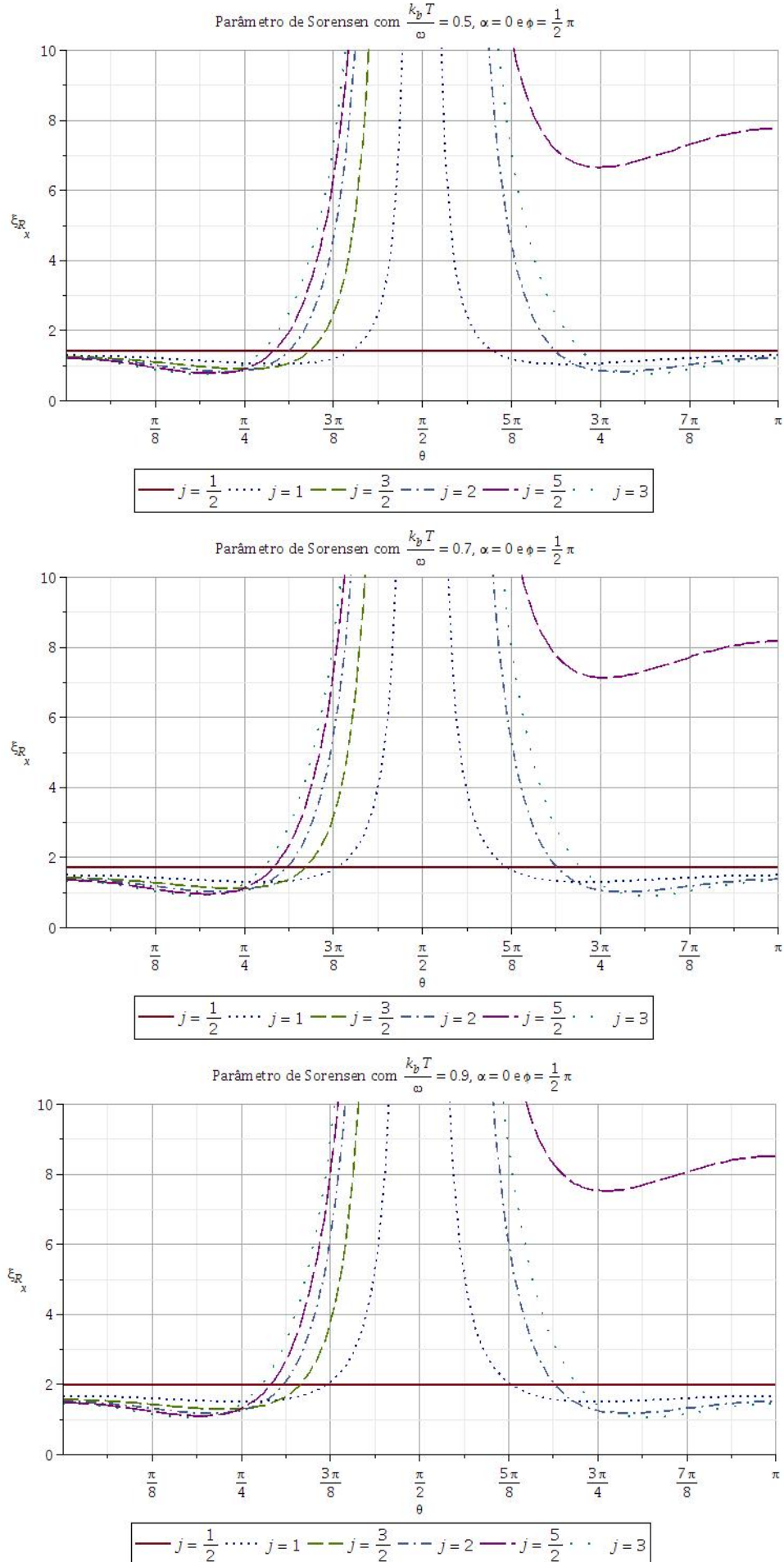


Figura 9.8: Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ com $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.3, 0.5, 0.7\}$.

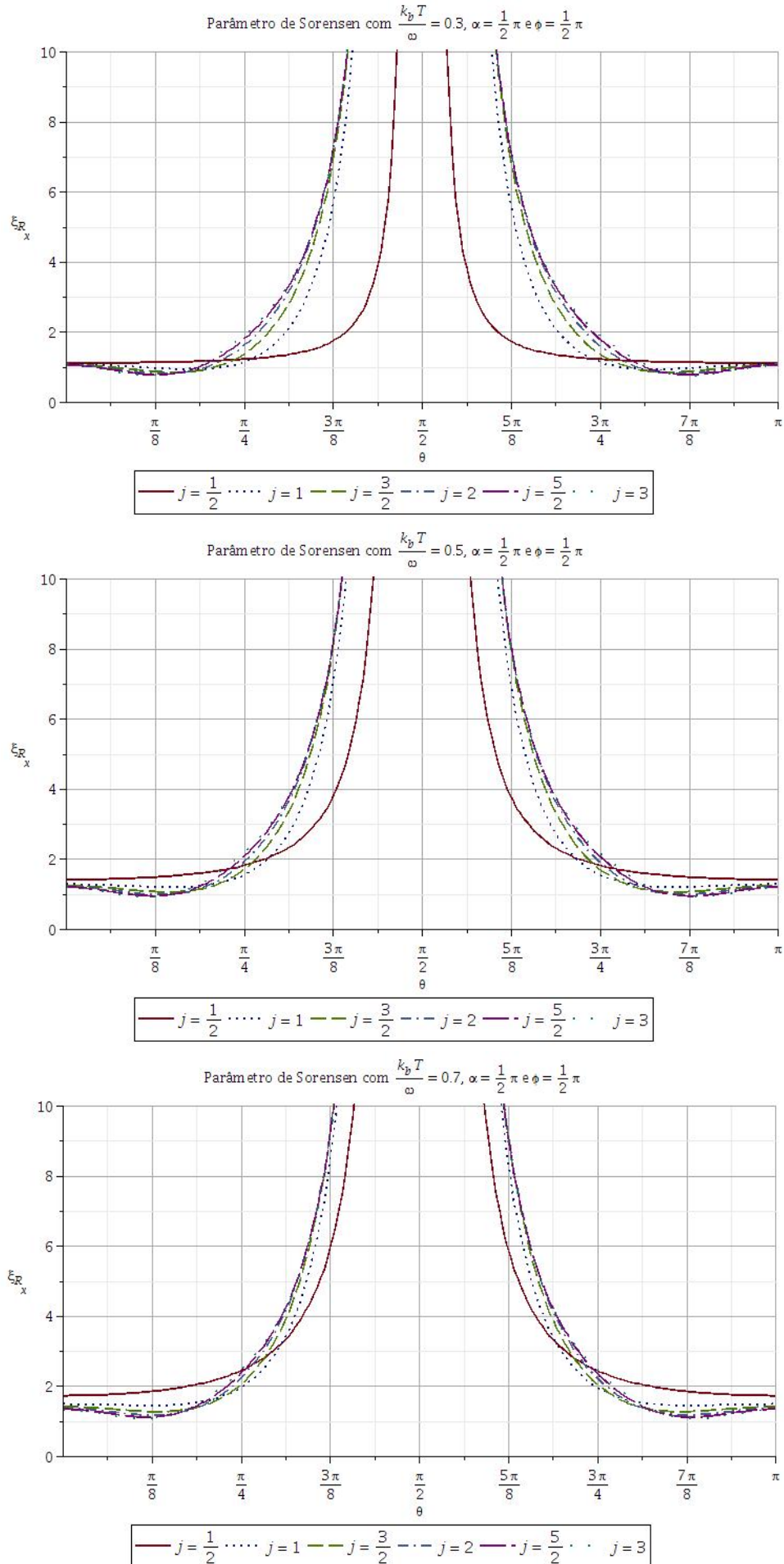
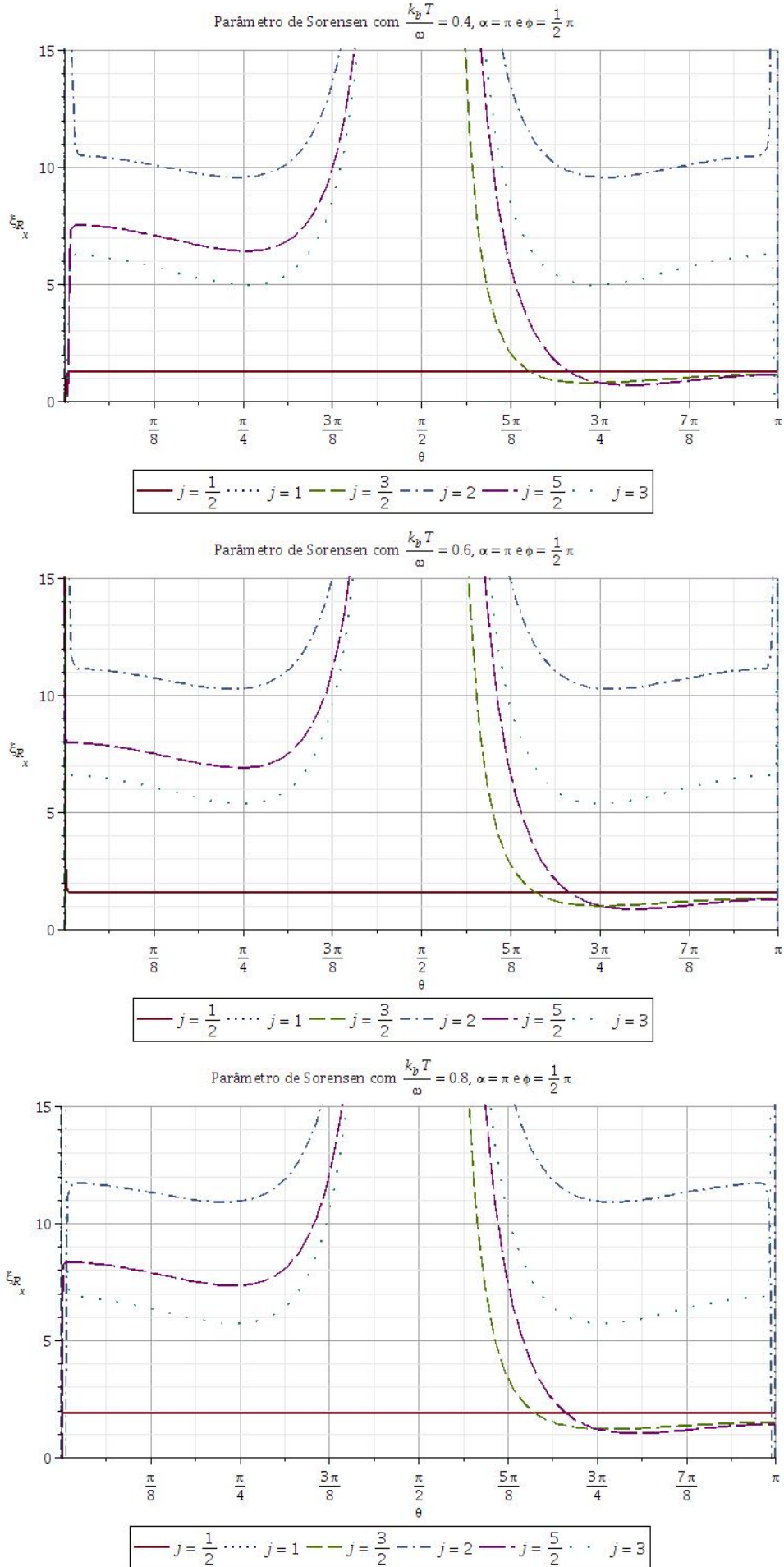


Figura 9.9: Parâmetro de Sorensen $\xi_{R'_x}$ com $\alpha = \pi$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.4, 0.6, 0.8\}$.



9.4 Desigualdade de Tóth Térmica do Estado *Atomic-Cat*

As desigualdades de Tóth podem ser analisadas a partir das equações (9.16), (9.17), (9.18) e (9.19). Como discutido na seção 7.4, a desigualdade de Tóth envolvendo os segundos momentos é

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(z, \beta) | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | \psi_\alpha(z, \beta) \rangle &= \frac{3}{2} u^4(\beta) j(j+1) + u^2(\beta) v^2(\beta) (j+1) \\ &\leq j(j+1) \end{aligned} \quad (9.33)$$

resultando no parâmetro de compressão

$$\xi_{T'} = \frac{2j}{2ju^4(\beta) + 3u^2(\beta)v^2(\beta)} \quad (9.34)$$

o qual é violado para todo $\frac{k_b T}{\omega} > 1$. Para as variâncias térmicas temos

$$\begin{aligned} (\Delta J_x(\beta))^2 + (\Delta J_y(\beta))^2 + (\Delta J_z(\beta))^2 &= u^4(\beta) j(j+1) - u^4(\beta) j^2 \left\{ \frac{\cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1}}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \right\}^2 \\ &\quad + 3u^2(\beta) v^2(\beta) \frac{j+1}{2} - u^4(\beta) j^2 \frac{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta)}{\left\{ 1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j} \right\}^2}, \end{aligned} \quad (9.35)$$

o que acarreta no parâmetro de compressão

$$\begin{aligned} \xi_T &= u^4(\beta) (j+1) - u^4(\beta) j \left\{ \frac{\cos(\theta) + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j-1}}{1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j}} \right\}^2 \\ &\quad + 3u^2(\beta) v^2(\beta) \frac{j+1}{2j} - u^4(\beta) j \frac{[\cos(\theta)]^{4j-2} \text{sen}^2(\alpha) \text{sen}^2(\theta)}{\left\{ 1 + \cos(\alpha) [\cos(\theta)]^{2j} \right\}^2}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

o qual não é violado, independente da temperatura. A equação (9.36) não depende do valor de ϕ e seus gráficos são apresentados em (Fig. 9.10) e (Fig. 9.11) para $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$, $j = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.1, 0.2, 1.0\}$.

Apesar de não encontrarmos compressão no parâmetro de compressão ξ_T percebemos, a partir da variação de α , que ao alterarmos as propriedades de simetria e antissimetria relativas a m alteramos as características dos gráficos. Um fato a observar é que o aumento da temperatura acarreta um aumento do parâmetro ξ_T dado pela equação (9.36), afastando o estado do limite de compressão, como podemos ver nos gráficos (Fig. 9.10) e (Fig. 9.11).

Figura 9.10: Parâmetro de Compressão ξ_T do Estado *Atomic-Cat* com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = 0.1$.

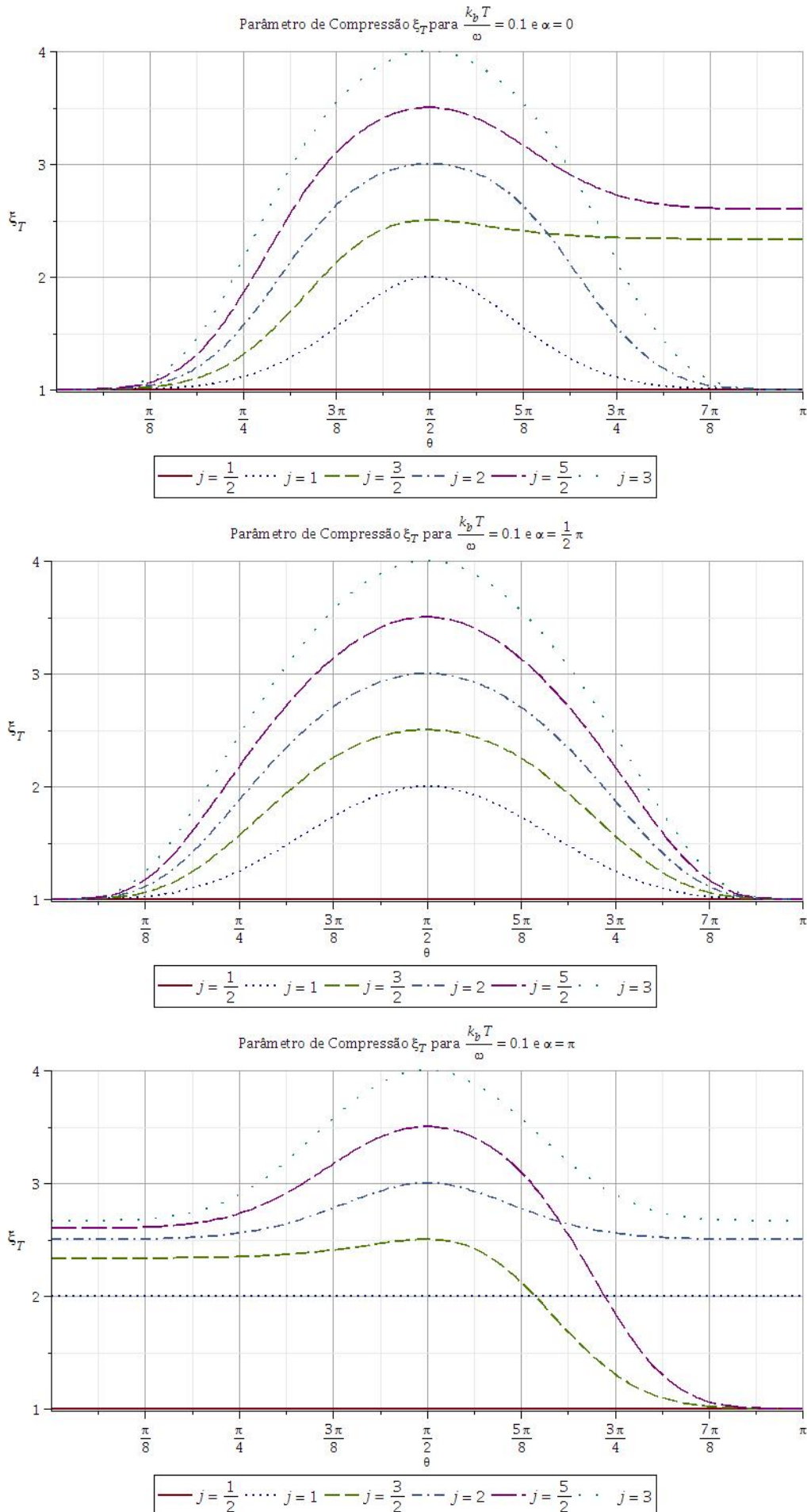
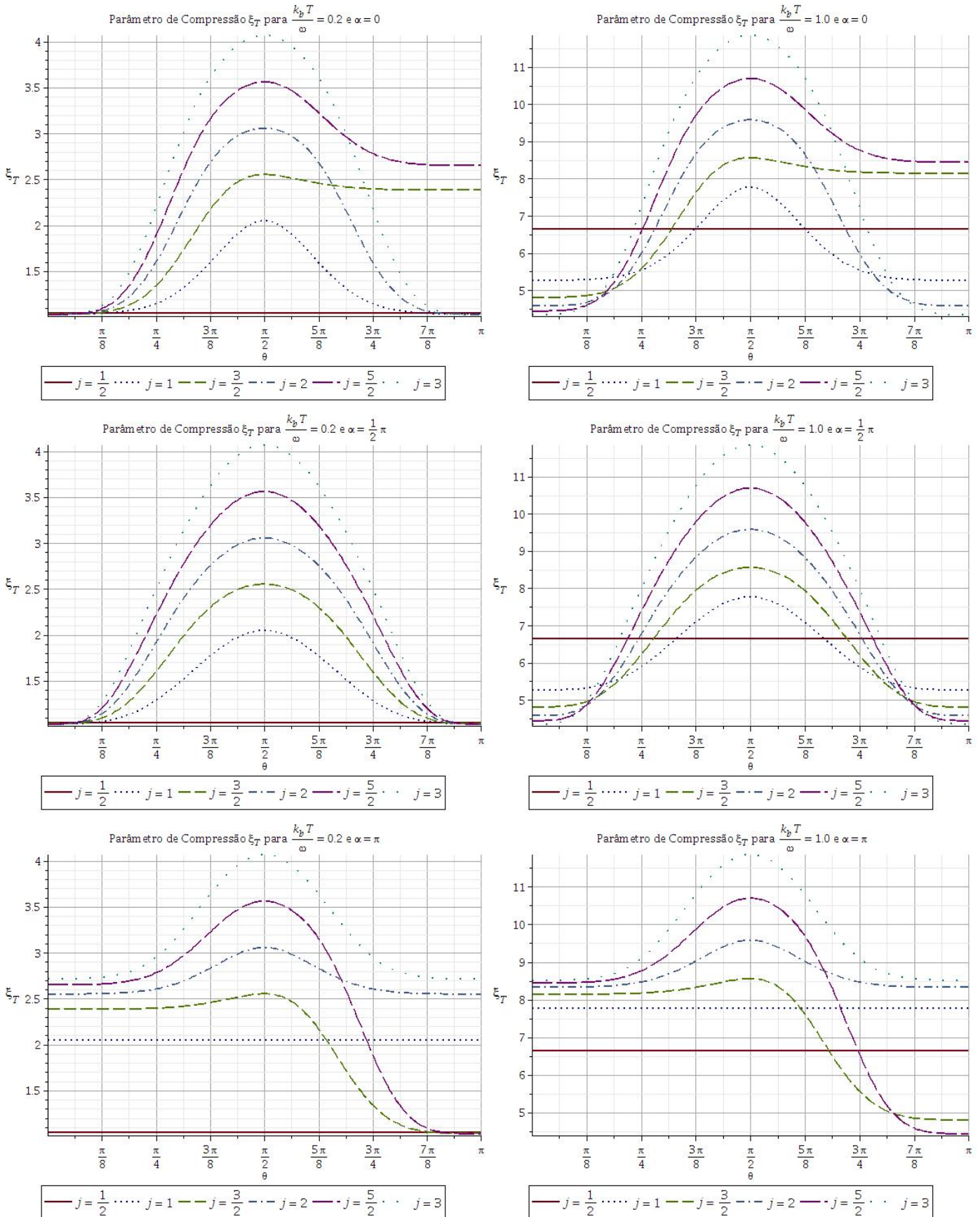


Figura 9.11: Parâmetro de Compressão ξ_T do Estado *Atomic-Cat* com $\alpha = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ e $\frac{k_b T}{\omega} = \{0.2, 1.0\}$.



10 *Conclusões e Perspectivas*

Neste trabalho mostramos a compatibilidade da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) com a construção dos Estados Coerentes para uma álgebra de Lie arbitrária. Neste contexto apresentamos os Estados Coerentes de $SU(2)$ e de $SU(1, 1)$ térmicos e observamos que o Vácuo Térmico, elemento essencial do formalismo da DCT, pode ser relacionado com um Estado Coerente de $SU(2)$, para o caso ferminônico, e um Estado Coerente de $SU(1, 1)$, para o caso bosônico.

Aplicamos então essa formulação para analisar as propriedades térmicas do Estado Coerente do Momento Angular. Com esse objetivo determinamos o operador densidade termalizado desse estado que "carrega" todas as suas propriedades térmicas e analisamos a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner, todos termalizados.

A partir do cálculo da Fidelidade Quântica do Estado Coerente do Momento Angular Termalizado observamos como a contribuição do efeito térmico é influenciado pelo valor de j , ou seja, quanto maior o valor do momento angular total j mais sensível é o sistema à temperatura; conseqüentemente, mais difícil é preservar a informação contida nele. No limite $T \rightarrow 0$ obtemos o estado que descreve o sistema na situação não térmica, o que possibilita comparação com os resultados conhecidos. Simulando a ação de portas lógicas associadas a rotações de 90° e 180° sobre a fase, percebemos que as rotações de 90° resistem melhor aos efeitos térmicos. Também observamos que, para o estado coerente do momento angular, a fase inicial não tem influência na preservação da informação, sendo importante somente a diferença de fase. Portanto, considerando a ação dessas portas lógicas, podemos preparar o sistema com qualquer fase ϕ .

Com a análise da Fidelidade também observamos que o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou equivalentemente $|z| = 1$, é a situação mais difícil para preservar o estado original. Concluimos assim que a preservação do estado coerente do momento angular é aprimorada ao evitarmos regiões com θ próximo a $\frac{\pi}{2}$. Ao tomarmos $j \rightarrow +\infty$, que corresponde ao limite clássico, observamos que a Fidelidade é nula, independente do valor de θ e ϕ , para $T > 0$. Portanto, no limite de $j \rightarrow +\infty$ o estado coerente do momento angular afasta-se de qualquer outro estado coerente, o que pode

caracterizar a não classicalidade do sistema.

O Fator de Mandel do Estado Coerente do Momento Angular Termalizado informa a estatística seguida pelo sistema para cada valor de temperatura. Observamos que para $T \rightarrow 0^+$ todos os estados seguem uma estatística sub-Poissoniana, independente do valor de j . Ao aumentarmos a temperatura, o valor do Fator de Mandel também aumenta até alcançar a temperatura de transição, alternando para a estatística Poissoniana e Super-Poissoniana. Obtivemos os valores do Fator de Mandel para a transição das estatísticas; esses valores de transição aumentam à medida que j aumenta, sugerindo que uma vez gerados, no que se refere à estatística, os estados com maiores valores de j resistem um pouco mais à temperatura.

A Função de Wigner f_W para o Estado Coerente do Momento Angular Termalizado depende do valor da fase ϕ , fato este também observado quando analisamos a compressão sobre o estado *Atomic-Cat*. A região negativa da função de Wigner muda a depender do valor de ϕ , sendo o máximo obtido quando tomamos $\phi = 0$. Variando o ângulo θ de f_W observamos uma espécie de rotação em relação ao eixo z , onde os valores de máximos e mínimos da função de Wigner também aumentam, o que implica que a variação de θ é mais que uma simples rotação, uma vez que a região de não classicalidade da função de Wigner é ampliada. Ao analisarmos $j = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$ evidenciamos uma relação entre os picos e vales de f_W , que se mostra diferente para valores inteiro e semi-inteiro de j . Para o caso inteiro temos mais picos do que vales, enquanto que no caso semi-inteiro observamos mais vales do que picos; isso evidencia que os estados com j semi-inteiro são "mais não clássicos" que aqueles com j inteiro. Tal fato concorda com a análise para altas temperaturas, onde os valores inteiros de j geram dois picos positivos, enquanto que para os valores semi-inteiros de j há 2 vales negativos.

Ao analisarmos a influência da temperatura na compressão para o Estado Coerente do Momento Angular Termalizado observamos que, como era de esperar, o estado não apresenta compressão de acordo com os parâmetros de Wineland e Sorensen, onde observamos que os efeitos térmicos afastam cada vez mais o estado da região de compressão. Na situação onde podemos supor que o estado coerente pode ser visto como uma superposição de N subsistemas com $j = \frac{1}{2}$, encontramos compressão somente para $j < 3$. Já as desigualdades de Tóth, que estão associadas à presença de emaranhamento, são violadas indicando a presença de emaranhamento no Estado Coerente do Momento Angular Termalizado. Na verdade obtivemos um resultado mais forte, ou seja, que utilizando a DCT observa-se que todo estado termalizado do momento angular viola a desigualdade de Tóth que envolve a soma dos três segundos momentos.

Para o Estado Gaussiano Termalizado notamos que os parâmetros de Wineland e Sorensen coincidem e observamos como as regiões de compressão coexistem com o princípio de incer-

teza. Percebemos que a região de compressão depende do parâmetro σ e da temperatura T , sendo que a temperatura tem o efeito global de afastar o estado Gaussiano da região de compressão, o que nos motivou a introduzir o conceito de Limite Térmico de Compressão, isto é, a temperatura em que, acima dela, não garantimos mais encontrar compressão do estado. O Limite Térmico de Compressão evidencia a importância da análise dos efeitos térmicos no estudo da compressão, fato este desconhecido até o momento. Portanto a aplicação da DCT, além de revelar a importância da temperatura, permite encontrar uma forma consistente de mensurar os efeitos térmicos, fato este que possibilitou calcularmos os Limites Térmicos de Compressão para o parâmetro de Wineland, considerando diversos valores de j . Neste caso encontramos uma pequena diferença para os valores nas direções y e z , o que revela que a direção z é um pouco mais resistente aos efeitos térmicos que a direção y .

Já o Estado *Atomic-Cat* Termalizado resultou num parâmetro de Wineland térmico que não depende da fase ϕ , sendo que não encontramos compressão mesmo variando todos os parâmetros. Quando analisamos o parâmetro de Sorensen térmico percebemos a influência da fase ϕ já que, dependendo do seu valor, encontramos ou não compressão sobre o estado; isto reflete o fato que a fase ϕ pode ser utilizada para regular a intensidade da compressão. Se variarmos a fase arbitrária α , somos capazes de analisar como as propriedades de paridade se refletem nas expressões dos parâmetros de compressão. Percebemos que os estados com paridade positiva apresentam mais regiões de compressão, sendo mais fáceis de serem comprimidos que os com paridade negativa. Considerando o caso com j inteiro os estados simétricos, $\alpha = 0$, apresentam maiores regiões de compressão, enquanto que para j semi-inteiro a região de compressão é maior para $\alpha = \frac{\pi}{2}$. O aumento da temperatura tem o efeito global de afastar o estado da região de compressão, novamente possibilitando a introdução do conceito de Limite Térmico de Compressão, cujo cálculo para diversos valores de j permite notar que seu valor aumenta concomitantemente com o valor de j . Apesar de exibirem gráficos diferentes para $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$, os estados simétricos e antissimétricos possuem limites térmicos iguais; isso implica que, uma vez comprimidos, esses estados respondem de forma semelhante aos efeitos térmicos. Por possuir limites térmicos para j inteiro e semi-inteiro, os estados simétricos apresentam melhor comportamento em relação à compressão. Ao calcularmos as desigualdade de Tóth, só observamos compressão usando a desigualdade que envolve a soma dos três segundos momentos, mas a desigualdade que envolve a soma das três variâncias, mesmo não apresentando compressão, pode ser utilizada para reforçar a ideia de que os efeitos térmicos afastam cada vez mais o estado da região de compressão, além de evidenciar as propriedades de simetria e antissimetria desses estados.

Esse trabalho permite uma vasta gama de desdobramentos. Nossas perspectivas consistem

em explorar outros estados de interesse, no contexto dos autoestados do momento angular, assim como introduzir a versão térmica de outros parâmetros de compressão. Pretendemos investigar os estados coerentes de $SU(3)$ que estão sendo analisados em recentes trabalhos, vislumbrando obter resultados para o caso geral de $SU(N)$ na perspectiva da Dinâmica de Campos Térmicos. Uma característica muito investigada é a Informação de Fisher, que mensura a quantidade de informação contida num sistema; pretendemos obter uma versão térmica da Informação de Fisher e analisar como essa informação se comporta nas regiões de compressão, para diversos valores de temperatura. Motivados pelas desigualdades de Tóth, pretendemos propor alguns parâmetros de compressão e determinar um conjunto de desigualdades que caracterize o emaranhamento para os estados de $SU(1,1)$, o que dará origem a parâmetros de compressão cuja violação irá indicar emaranhamento. Também pensamos em analisar o processo inverso, isto é, a partir das definições de cada parâmetro de compressão, propor estados que minimizem tais parâmetros; dessa forma seríamos capazes de fornecer quais seriam os melhores estados a serem empregados, para cada situação. Pretendemos também escrever a transformação de Bogoliubov em termos da base de Cartan-Weyl, a fim de explorar o formalismo da DCT para uma álgebra de Lie arbitrária.

APÊNDICE A – Cálculo de Séries

Neste apêndice explicitaremos a resolução das séries necessárias para o cálculo das médias e das variâncias dos operadores do estado coerente do momento angular (seção 4.2). Para isso, partiremos da série dada pelo binômio de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (\text{A.1})$$

Tomando $n = 2j$ e $x = 1$ ou $y = 1$ reescrevemos a série (A.1) de duas formas equivalentes

$$\begin{aligned} (1 + x)^{2j} &= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^{2j-k}, \\ &= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^k, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

consistente com a propriedade $\binom{2j}{k} = \binom{2j}{2j-k}$ dos Binômios de Newton. Equivalentemente, podemos associar $k \leftrightarrow 2j - k$, sem alterar a série.

- Cálculo da soma associada a J_x e J_y

$$\sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1 + |z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m) = \frac{2j}{1 + |z|^2}. \quad (\text{A.3})$$

Se derivarmos a equação (A.2)

$$\begin{aligned}
2j(1+x)^{2j-1} &= \sum_{k=0}^{2j-1} \binom{2j}{k} x^{2j-k-1} (2j-k), \\
&= \sum_{k=1}^{2j} \binom{2j}{k-1} x^{2j-k} (2j-k+1), \\
&= \sum_{k=1}^{2j} \binom{2j}{k} \frac{k}{2j-k+1} x^{2j-k} (2j-k+1), \\
&= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^{2j-k} k, \\
&= \sum_{k=2j}^0 \binom{2j}{2j-k} x^k (2j-k), \\
&= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^k (2j-k), \\
&= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} x^{j+m} (j-m). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $x = |z|^2$ obtemos

$$\sum_{m=-j}^j |z^2|^{j+m} \binom{2j}{j+m} (j-m) = 2j(1+|z|^2)^{2j-1}, \tag{A.5}$$

resultando na série desejada após a divisão por $(1+|z|^2)^{2j}$.

- Cálculo da soma associada a J_z

$$\sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m = \frac{j(|z|^2-1)}{1+|z|^2} \tag{A.6}$$

Derivando o Binômio de Newton e multiplicando por $\frac{x}{2}$ encontramos

$$\begin{aligned}
jx(1+x)^{2j-1} &= \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{2j} \binom{2j}{k} x^{k-1} k \\
&= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^k \frac{k}{2} \\
&= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} x^{j+m} \frac{j+m}{2}. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Se multiplicarmos a equação (A.4) por $-\frac{1}{2}$ e somarmos a equação (A.7), temos:

$$\begin{aligned} j(x-1)(1+x)^{2j-1} &= -\frac{1}{2} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} x^{j+m} (j-m) + \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} x^{j+m} \frac{j+m}{2} \\ &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} x^{j+m} m, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e denotando $x = |z|^2$ temos

$$j(|z|^2 - 1)(1 + |z|^2)^{2j-1} = \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} |z^2|^{j+m} m; \quad (\text{A.9})$$

a série desejada é obtida após a divisão por $(1 + |z|^2)^{2j}$.

- Cálculo da soma associada a J_x^2 e J_y^2

$$\sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1 + |z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m)(j-m-1) = \frac{2j(2j-1)}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (\text{A.10})$$

Basta derivar duas vezes a série do Binômio de Newton obtendo,

$$\begin{aligned} 2j(2j-1)(1+x)^{2j-2} &= \sum_{k=0}^{2j-2} \binom{2j}{k} x^{2j-k-2} (2j-k)(2j-k-1) \\ &= \sum_{k=2}^{2j} \binom{2j}{k-2} x^{2j-k} (2j-k+2)(2j-k+1), \\ &= \sum_{k=2}^{2j} \binom{2j}{k} \frac{k}{2j-k+1} \frac{k-1}{2j-k+2} x^{2j-k} (2j-k+1)(2j-k+2), \\ &= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^{2j-k} k(k-1), \\ &= \sum_{k=2j}^0 \binom{2j}{2j-k} x^k (2j-k)(2j-k-1), \\ &= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^k (2j-k)(2j-k-1), \\ &= \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} x^{j+m} (j-m)(j-m-1). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Então, definindo $x = |z|^2$ segue que

$$2j(2j-1)(1+|z|^2)^{2j-2} = \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} |z^2|^{j+m} (j-m)(j-m-1), \quad (\text{A.12})$$

que dividida por $(1+|z|^2)^{2j}$ resulta na série desejada.

- Cálculo da soma associada a J_z^2

$$\sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m^2 = \frac{j[j|z|^4 - 2j|z|^2 + 2|z|^2 + j]}{(1+|z|^2)^2}. \quad (\text{A.13})$$

Reescrevendo a equação (A.10) como

$$\begin{aligned} \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2} &= \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m)(j-m-1) \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} [j^2 - 2jm + m^2 - (j-m)] \\ &= j^2 - 2j \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m + \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m^2 \\ &\quad - \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} (j-m), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

pelas equações (A.3) e (A.6) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=-j}^j \frac{|z^2|^{j+m}}{(1+|z|^2)^{2j}} \binom{2j}{j+m} m^2 &= \frac{2j(2j-1)}{(1+|z|^2)^2} - j^2 + 2j \frac{j(|z|^2-1)}{1+|z|^2} + \frac{2j}{1+|z|^2} \\ &= \frac{4j^2 - 2j - j^2(1+|z|^2)^2 + 2j^2(|z|^4-1) + 2j(1+|z|^2)}{(1+|z|^2)^2} \\ &= \frac{j[j|z|^4 - 2j|z|^2 + 2|z|^2 + j]}{(1+|z|^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

APÊNDICE B – Grupos e Álgebras de Lie

Neste apêndice faremos uma revisão sobre conceitos fundamentais associados aos Grupos de Lie e às Álgebras de Lie, baseada nas referências [137, 155–157], com o intuito de melhor aplicá-los no desenvolvimento do Estado Coerente de uma Álgebra de Lie arbitrária, no contexto da DCT.

Definição B.1. Um **Grupo** (G, \cdot) é formado por um conjunto G munido de uma operação produto que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) Fechamento* $\mapsto a \cdot b \in G, \forall a, b \in G$
- ii) Associatividade* $\mapsto (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c \in G$
- iii) Identidade* $\mapsto \exists e \in G; \forall a \in G \ a \cdot e = e \cdot a = a$
- iv) Inverso* $\mapsto \forall a \in G, \exists a^{-1} \in G; \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Definição B.2. Uma **Topologia** no conjunto X é um conjunto τ de subconjuntos de X tal que

- i) $\emptyset, X \in \tau$*
- ii) Se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$*
- iii) Se $A_i \in \tau, \forall i \in I$, então $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$.*

Um **Espaço Topológico** é um par (X, τ) em que X é um conjunto não vazio e τ é uma topologia em X . Os elementos de uma topologia são denominados conjuntos abertos do espaço topológico respectivo; uma **Vizinhança** de $x \in X$ para uma topologia τ é um subconjunto $V \subseteq X$ que contém um aberto ao qual x pertence.

Podemos unir o conceito de grupo ao de topologia dando origem à ideia de grupo topológico.

Definição B.3. Um **Grupo Topológico** é um grupo G cujo conjunto é munido de uma topologia, tal que

$$i) \text{ O produto } p : G \times G \rightarrow G, p(g, h) = gh$$

e

$$ii) \text{ A aplicação } i : G \rightarrow G, i(g) = g^{-1}$$

são aplicações contínuas.

As duas propriedades que definem um grupo topológico podem ser condensadas equivalentemente, tomando a continuidade da aplicação

$$q(g, h) \rightarrow gh^{-1}, \quad q : G \times G \rightarrow G.$$

Cada elemento $g \in G$ define naturalmente as seguintes aplicações contínuas:

- **Translação à Esquerda** $E_g : G \rightarrow G, E_g(h) = gh.$
- **Translação à Direita** $D_g : G \rightarrow G, D_g(h) = hg.$
- **Conjugação** $C_g : G \rightarrow G, C_g(h) = ghg^{-1}.$

É interessante analisar como os grupos topológicos atuam em outros conjuntos; para isso introduz-se o conceito de ação de um grupo.

Definição B.4. Uma **Ação** de um Grupo G num conjunto X é uma aplicação $a : G \times X \rightarrow X$ que associa a cada $g \in G$, uma aplicação $a(g) : X \rightarrow X$ satisfazendo as propriedades:

$$i) a(1) = id_X, \text{ isto é, } a(1)(x) = x, \forall x \in X.$$

$$ii) a(gh) = a(g) \circ a(h).$$

Essas propriedades garantem que cada $a(g)$ seja uma bijeção. Visto de outra forma, uma ação é um homomorfismo sobre o grupo das bijeções de X , isto é, $a : G \rightarrow B(X)$. Normalmente o símbolo a é suprimido na notação para ações de grupos, sendo simbolizado somente por gx ao invés de $a(g)(x)$.

Dado $x \in X$, o conjunto formado por todos os elementos oriundos da ação de G sobre x é denominado de **Órbita**, que denotaremos por Gx , com

$$Gx = \{gx \in X; g \in G\}$$

Cada órbita é uma classe de equivalência, de forma que duas órbitas ou são disjuntas ou coincidem.

Definição B.5. O Subgrupo de Isotropia é o conjunto G_x dos elementos de G que fixam x , ou seja,

$$G_x = \{g \in G; gx = x\}.$$

Os subgrupos de Isotropia podem ser obtidos um dos outros, a partir da seguinte proposição:

Proposição B.6. Dados $x, y \in X$ com G_x e G_y sendo os respectivos subgrupos de Isotropia, suponha que $y = gx$ com $g \in G$. Então

$$G_y = gG_xg^{-1}.$$

Um subgrupo de isotropia é máximo, se não está contido em nenhum outro subgrupo de isotropia. As ações de grupos podem ser distinguidas de acordo com as propriedades de suas órbitas e grupos de isotropia.

Definição B.7. Seja a uma ação de G em X .

i) A ação é dita ser **Transitiva** se X é uma órbita de G , isto é, para todo par de elementos $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

ii) A ação é dita ser **Livre** se os subgrupos de isotropia se reduzem ao elemento neutro de G , isto é, se $gx = x$ para algum $x \in X$, então $g = 1$.

iii) A ação é dita ser **Efetiva ou Fiel** se $\text{kernel}(a) = \{g \in G; a(g) = id_X\} = \{1\}$. Isto é, se $gx = x$ para todo $x \in X$ então $g = 1$.

Segue direto das definições (B.7) que toda ação efetiva é também uma ação livre, no entanto nem toda ação livre é efetiva. A partir das definições apresentadas em B.7, podemos obter que

Proposição B.8. Suponha que a ação de G em X é transitiva e considere $x \in X$. Então, a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : G/G_x &\longmapsto X \\ \xi(gG_x) &\longrightarrow gx \end{aligned}$$

é uma bijeção entre G/G_x e X .

Se considerarmos a órbita Gx , encontramos um homomorfismo $G/G_x \rightarrow Gx$ relacionando a órbita com o grupo de Isotropia.

No final do século XIX Sophus Lie, trabalhando com Equações Diferenciais Parciais, desenvolveu a teoria dos grupos de transformação que posteriormente recebeu seu nome. Os grupos de Lie são uma junção da teoria de grupos com o conceito de variedades diferenciáveis.

O quinto problema de Hilbert pergunta quais grupos topológicos são diferenciáveis, ou seja, possui uma estrutura diferenciável. Como resposta foi demonstrado que um grupo Topológico é um grupo de Lie se for uma variedade topológica localmente euclidiana. Portanto,

Definição B.9. Uma **Variedade Topológica** de dimensão m é um espaço topológico X com as seguintes propriedades:

i) X é **Hausdorff**, ou seja, dados dois pontos distintos $p, q \in X$, então existem abertos disjuntos U, V tais que $p \in U$ e $q \in V$.

ii) X tem **Base Enumerável de Abertos**, isto é, existe uma coleção enumerável de abertos de X tal que todo aberto é uma união de abertos dessa coleção

iii) X é **Localmente Euclidiano**, isto é, para qualquer $p \in X$, existem abertos $U \subset X$ contendo p e $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$, com um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$.

Definição B.10. Um **Atlas** na variedade topológica X é uma coleção $\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i\}_{i \in I}$ de homeomorfismos, chamados cartas locais de X , onde $U_i \subset X$ é aberto, $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $\cup_{i \in I} U_i = X$. Os homeomorfismos

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_i \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_j$$

são chamados de mudanças de coordenadas.

Um atlas é de classe C^r se todas as mudanças de coordenadas do atlas são diferenciáveis até a ordem r . Um atlas é maximal se não está contido propriamente em nenhum outro atlas. Na coleção de todos os atlas de classe C^r temos uma relação de ordem parcial dada pela inclusão. Pelo Lema de Zorn, todo atlas \mathcal{A} está contido em um único atlas maximal.

Definição B.11. Uma **Variedade Diferencial**, de dimensão m e classe C^k é um par (M, \mathcal{U}) onde M é um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável e \mathcal{U} é um atlas maximal de dimensão m e classe C^k sobre M .

A exigência de que o atlas seja maximal não é necessária para se definir uma variedade, mas é conveniente em muitos casos. Em muitas abordagens também introduz-se o conceito de estrutura diferenciável, acarretando uma definição equivalente.

Sejam M e N duas variedades de dimensão m e n respectivamente. Uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$ em $\phi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em p tal que $\phi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Desta forma podemos analisar se uma aplicação entre variedades é diferenciável ou não transferindo essa análise para o espaço \mathbb{R}^n . Uma **Curva** em M é uma aplicação diferenciável dada por $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$.

Definição B.12. Seja M uma variedade de dimensão m , α uma curva de M com $\alpha(0) = p \in M$ e \mathcal{D} o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O **Vetor Tangente** à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0)$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(0) & : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha'(0)f & = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Se escolhermos uma parametrização $x : U \rightarrow M$ em $p = x(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α por

$$\begin{aligned} q & = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U, \\ f \circ x(q) & = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x^{-1} \circ \alpha(t) & = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \alpha'(0)f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} \\
 &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{t=0} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f,
 \end{aligned}$$

então o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização x como

$$\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0,$$

sendo $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ o Vetor Tangente em p , que depende somente das derivadas parciais em x .

O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é o **Espaço Tangente** $T_p M$, que possui uma estrutura de espaço vetorial de dimensão m . A escolha de uma parametrização $x : U \rightarrow M$ determina uma base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \in T_p M.$$

O **Fibrado Tangente** de uma variedade M é definido como sendo $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$, munido de uma estrutura diferenciável. Esse espaço, de dimensão $2m$, é utilizado para descrever a posição e a velocidade na Mecânica Clássica.

Definição B.13. Um **Campo de Vetores** X em uma variedade M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

com $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ uma base associada a parametrização x .

Se os Campos de Vetores forem diferenciáveis, podemos interpretar X como sendo operadores sobre o conjunto das funções diferenciáveis em M , ou seja, $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Se X e Y são

campos diferenciáveis em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, em geral $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ não resultam em campos vetoriais.

Proposição B.14. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$*

$$Zf = (XY - YX)f.$$

o campo vetorial $Z = [X, Y] = XY - YX$ é denominado de colchete de Lie, que dará origem à Álgebra de Lie.

Definição B.15. *Um Grupo de Lie é uma Variedade Diferenciável G com uma estrutura de grupo, de tal modo que a aplicação*

$$(x, y) \in G \times G \longrightarrow xy^{-1} \in G$$

é diferenciável.

De forma análoga podemos introduzir os conceitos de translação à esquerda, translação à direita, conjugação, órbita e subgrupo de isotropia.

Definição B.16. *Uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de um produto (colchete) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) o colchete $[\cdot, \cdot]$ é bilinear*
- ii) antisimetria, isto é, $[A, B] = -[B, A]$*
- iii) identidade de Jacobi: para $A, B, C \in \mathfrak{g}$ então*

$$[A, [B, C],] + [B, [C, A],] + [C, [A, B],] = 0.$$

Um aspecto importante da Teoria de Lie é a relação entre os Grupos e as Álgebras de Lie, que se faz através dos campos de vetores invariantes a translações juntamente com a aplicação exponencial.

Definição B.17. *Seja G um grupo de Lie. Um campo de vetores X em G é dito ser*

i) **Invariante à Direita** se para todo $g \in G$, $(D_g)X = X$, isto é,

$$d(D_g)_h(X(h)) = X(hg), \quad \forall g, h \in G$$

ii) **Invariante à Esquerda** se para todo $g \in G$, $(E_g)X = X$, isto é,

$$d(E_g)_h(X(h)) = X(gh), \quad \forall g, h \in G$$

Os campos invariantes à direita ou à esquerda são completamente determinados por seus valores na identidade $I \in G$. Para todo $g \in G$ a condição de invariância acarreta que

$$\begin{aligned} d(D_g)_I(X(I)) &= X(g) \\ &= d(E_g)_I(X(I)), \end{aligned}$$

o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda será denotado por \mathfrak{g} , que é isomorfo ao conjunto dos campos invariantes à direita.

Proposição B.18. *Dado um Grupo de Lie G , o conjunto \mathfrak{g} dos campos invariantes à esquerda de G é um espaço vetorial, e a aplicação $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow T_I G$ definida por*

$$\phi(X) = X(I)$$

é um isomorfismo linear. Consequentemente $\dim \mathfrak{g} = \dim T_I G = \dim G$, sendo $T_I G$ o espaço tangente da identidade.

Devido à Proposição (B.14), os campos de vetores invariantes à esquerda preservam o colchete de Lie, sendo então fechado em relação a essa operação.

Definição B.19. *A Álgebra de Lie de um grupo de Lie G é definida como a Álgebra \mathfrak{g} dos campos vetoriais invariantes à esquerda de G munida com o produto de Lie, ou equivalentemente, o espaço tangente da identidade $T_I G$ munida com o mesmo produto.*

A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ estabelece um vínculo entre os grupos de Lie e as Álgebras de Lie, permitindo transportar algumas propriedades de uma estrutura para outra.

A ideia básica da construção é que os elementos de \mathfrak{g} são equações diferenciais ordinárias em G , permitindo construir a partir de $X \in \mathfrak{g}$ um subgrupo a 1-parâmetro $t \in \mathbb{R}$ cuja solução é

da forma exponencial.

Proposição B.20. *Seja X um campo de vetor em uma variedade M e seja $p \in M$. Então existem uma vizinhança $U \subset M$ de p , um intervalo $(-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ e uma aplicação diferenciável $\phi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$ tais que a curva $\alpha : t \rightarrow \phi(t, p)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única curva que satisfaz*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = X(\phi(t, q)) \quad e \quad \phi(0, q) = q, \quad \forall q \in U.$$

Uma curva $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ que satisfaz as condições $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ com $\alpha(0) = p$ é chamada de **Trajatória** do campo X .

A Proposição (B.20) garante que para cada ponto de uma certa vizinhança passa uma única trajetória de X , sendo a aplicação $\phi(t, p) = \phi_t(p) : U \subset M \rightarrow G$ denominada de **Fluxo Local do Campo**.

Proposição B.21. *Num grupo de Lie G , ϕ_t é definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e a aplicação $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ assim definida é um subgrupo de Lie.*

Dessa forma, o conceito de aplicação exponencial pode ser introduzido como

Definição B.22. *Seja G um grupo de Lie com uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . Seja $X \in \mathfrak{g}$. Se indicarmos por ϕ_X a trajetória de X pela origem I , então definimos a **Aplicação Exponencial** de G por*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} \approx T_I G &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \phi_X(I). \end{aligned}$$

A aplicação exponencial relaciona a álgebra de Lie \mathfrak{g} com o Grupo de Lie G , permitindo também associar os subgrupos com as subálgebras. A partir desta aplicação, mostra-se que:

Proposição B.23. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} .*

- *Então para qualquer subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, existe um único subgrupo conexo $H \subset G$, cuja álgebra de Lie é \mathfrak{h} .*
- *Então todo subgrupo fechado $H \subset G$ é um grupo de Lie, sendo sua álgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.*

Iremos agora analisar as propriedades das Álgebras de Lie a fim de entender a decomposição de Cartan, essencial para a construção dos estados coerentes generalizados.

Definição B.24. *Seja \mathfrak{g} uma Álgebra de Lie com geradores X_i , então as **Constantes de Estrutura** são $C_{\rho,\sigma}^\tau$ dadas por*

$$[X_\rho, X_\sigma] = C_{\rho,\sigma}^\tau X_\tau,$$

e determinam a estrutura da Álgebra de Lie.

Definição B.25. *Todo elemento X de uma Álgebra de Lie \mathfrak{g} define uma transformação linear*

$$\begin{aligned} ad(X) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Z &\longmapsto [X, Z], \end{aligned}$$

denominada de **Representação Adjunta** da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Definição B.26. *Um subconjunto \mathfrak{i} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dito ser um **Ideal** se \mathfrak{i} é um subespaço linear de \mathfrak{g} e*

$$[X, Y] \in \mathfrak{i}, \quad \forall X \in \mathfrak{i}, Y \in \mathfrak{g};$$

em particular, um Ideal é uma subálgebra de Lie.

Definição B.27. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é **Simple** se $\dim \mathfrak{g} > 1$ e se os únicos ideais de \mathfrak{g} são os triviais, ou seja, \mathfrak{g} e $\{0\}$.*

Definição B.28. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é **Semi-Simple** se*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$$

em que cada \mathfrak{g}_i é uma álgebra de Lie simples.

A partir das constantes de estrutura, podemos definir um tensor simétrico

$$g_{\sigma,\lambda} = C_{\sigma\rho}^\tau C_{\lambda\tau}^\rho$$

denominado de **Forma de Killing**, que permite caracterizar as álgebras semi-simples.

Proposição B.29. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é semi-simples se, e somente se*

$$\det|g_{\sigma\lambda}| \neq 0.$$

Definição B.30. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, o seu Centro é*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}; \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0\}.$$

O centro de toda álgebra de Lie \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie Abelianas.

Proposição B.31. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie simples, então o seu centro é $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.*

Por definição, o mesmo ocorre se a álgebra de Lie for semi-simples, ou seja, o centro de uma álgebra de Lie semi-simples é trivial.

Definição B.32. *Uma álgebra de Lie real \mathfrak{g} é dita **Compacta** se existe em \mathfrak{g} um produto interno (\cdot, \cdot) invariante, isto é, em que a representação adjunta é uma isometria*

$$(ad(X)Y, Z) + (Y, ad(X)Z) = 0, \quad X, Y, Z, \in \mathfrak{g}.$$

Proposição B.33. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} compacta se decompõe como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{u},$$

onde $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é o centro de \mathfrak{g} e \mathfrak{u} é uma álgebra semi-simples.

O resultado da proposição (B.33) é válido para uma Álgebra de Lie real; para estudar o caso complexo é preciso associar álgebras de Lie reais a álgebras de Lie complexas.

Definição B.34. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real, a álgebra de Lie complexa*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

é chamada de **Complexificação** de \mathfrak{g} .

Definição B.35. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa e \mathfrak{g}_0 uma álgebra de Lie real tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$$

*então \mathfrak{g}_0 é dita ser a **Forma Real** da álgebra de Lie complexa \mathfrak{g} .*

Proposição B.36. *Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie complexa e semi-simples, então existe uma forma real compacta de \mathfrak{g} .*

Definição B.37. *O Normalizador de uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é definido por*

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g}; ad(X)\mathfrak{h} = [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}.$$

O normalizador de uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é também uma subálgebra de \mathfrak{g} .

Definição B.38. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita ser **Nilpotente** se existe $k > 1$ tal que*

$$\mathfrak{g}^k = \{0\},$$

com $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^k = \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{k-1}\}$.

As álgebras de Lie nilpotentes são a classe das álgebras que mais se assemelham ao caso abeliano, sendo que toda álgebra abeliana é nilpotente, pois $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Definição B.39. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie com $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ então se diz que \mathfrak{h} é uma **Subálgebra de Cartan** se:*

- i) \mathfrak{h} é nilpotente.*
- ii) \mathfrak{h} coincide com o seu normalizador em \mathfrak{g} , isto é, se $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $X \in \mathfrak{h}$.*

Proposição B.40. *Se \mathfrak{g} é uma álgebra semi-simples complexa, uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é de Cartan se, e somente se,*

- i) \mathfrak{h} é abeliana.*
- ii) As adjuntas de seus elementos $ad(H)$, $H \in \mathfrak{h}$, são diagonalizáveis.*
- iii) É maximal¹ com respeito às propriedades (i) e (ii).*

¹uma álgebra é dita maximal se a mesma não está contida propriamente em nenhuma subálgebra.

Definição B.41. Uma **Raíz da Subálgebra de Cartan** \mathfrak{h} é um funcional linear $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H)X\} \neq \{0\},$$

onde \mathfrak{h}^* é o espaço de todos os funcionais lineares sobre \mathfrak{h} .

A dimensão de cada subespaço associado às raízes da subálgebra de Cartan é $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

Proposição B.42. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples sobre os complexos e \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} , então esta álgebra se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\Pi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

com $\Pi \in \mathfrak{h}^*$ o conjunto de todas as raízes.

A decomposição obtida na proposição (B.42) é conhecida como **Decomposição de Cartan** e possui as propriedades indicadas na Proposição B.43.

Proposição B.43. Dado uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} , então vale que

- i) $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, com $\lambda + \mu \neq 0$
- ii) $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}] \subset \mathfrak{h}$
- iii) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\lambda] \subset \mathfrak{g}_\lambda$

A partir dessas propriedades podemos definir uma base de vetores para a álgebra de Lie que respeite a decomposição de Cartan.

Definição B.44. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples, a **Base de Cartan-Weyl** é o conjunto $\{H_i, E_\alpha\}$, com α sendo raíz da subálgebra de Cartan, tal que

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, & [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \sum_i \alpha^i H_i, & [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

sendo $H_i \in \mathfrak{h}$ e $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ dados pela decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$.

Para o caso do grupo não compacto, o que irá fazer o papel da subálgebra de Cartan será uma subálgebra Abeliana Maximal \mathfrak{a} . Iwasawa na década de 40 demonstrou uma decomposição em termos de \mathfrak{a} e das suas raízes.

Definição B.45. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples não compacta², a **Decomposição de Iwasawa** é dada por*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

com \mathfrak{l} sendo a subálgebra compacta maximal, \mathfrak{a} a subálgebra abeliana maximal e $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_{\alpha}$ associada às raízes positivas de \mathfrak{a} .

Uma outra decomposição em termos das raízes pode ser feita considerando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}$, tal que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, com \mathfrak{m} uma subálgebra compacta.

²Uma álgebra de Lie é dita ser não compacta, se o seu grupo de Lie não é compacto.

APÊNDICE C – Médias e Variâncias Térmicas

As médias e as variâncias térmicas podem ser encontradas de uma maneira sistemática. Para mostrar isso, consideraremos um estado térmico genérico

$$|\tau(\beta)\rangle = \sum_{m=-j}^j f_m(\tau) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle, \quad (\text{C.1})$$

com $f_m(\tau)$ dando o peso de cada auto-estado normalizado. Os operadores térmicos são

$$\begin{aligned} J_x = & \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2} [\widetilde{a}_1^\dagger(\beta)\widetilde{a}_2(\beta) + \widetilde{a}_1(\beta)\widetilde{a}_2^\dagger(\beta)] \\ & + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta)\widetilde{a}_2^\dagger(\beta) + \widetilde{a}_1(\beta)a_2(\beta) + \widetilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta) + a_1(\beta)\widetilde{a}_2(\beta)], \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} J_y = & \frac{u(\beta)^2}{2i} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) - a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2i} [-\widetilde{a}_1^\dagger(\beta)\widetilde{a}_2(\beta) + \widetilde{a}_1(\beta)\widetilde{a}_2^\dagger(\beta)] \\ & + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} [a_1^\dagger(\beta)\widetilde{a}_2^\dagger(\beta) + \widetilde{a}_1(\beta)a_2(\beta) - \widetilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta) - a_1(\beta)\widetilde{a}_2(\beta)] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e

$$\begin{aligned} J_z = & \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta)a_2(\beta)] + \frac{v(\beta)^2}{2} [\widetilde{a}_1(\beta)\widetilde{a}_1^\dagger(\beta) - \widetilde{a}_2(\beta)\widetilde{a}_2^\dagger(\beta)] \\ & + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta)\widetilde{a}_1^\dagger(\beta) + \widetilde{a}_1(\beta)a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta)\widetilde{a}_2^\dagger(\beta) - a_2(\beta)\widetilde{a}_2(\beta)]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

As médias térmicas desses operadores serão obtidas, considerando,

$$\begin{aligned}
J_x|\tau(\beta)\rangle &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) + a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] f_m(\tau)|\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) + \tilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta)] f_m(\tau)|\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_m(\tau)|\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} f_m(\tau)|\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j+m+1} |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j-m+1} |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\}, \tag{C.5}
\end{aligned}$$

o que resulta para a média de J_x

$$\begin{aligned}
\langle \tau(\beta)|J_x|\tau(\beta)\rangle &= \sum_{m,m'=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \delta_{m',m+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \delta_{m',m-1} \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)^2}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau) \right\} \\
&= u(\beta)^2 \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) + f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau)}{2}. \tag{C.6}
\end{aligned}$$

Para J_y temos

$$\begin{aligned}
J_y|\tau(\beta)\rangle &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} [a_1^\dagger(\beta)a_2(\beta) - a_1(\beta)a_2^\dagger(\beta)] f_m(\tau)|\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} [a_1^\dagger(\beta)\tilde{a}_2^\dagger(\beta) - \tilde{a}_1^\dagger(\beta)a_2^\dagger(\beta)] f_m(\tau)|\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_m(\tau)|\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad - \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} f_m(\tau)|\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{j+m+1} |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2i} \sqrt{j-m+1} |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\}, \tag{C.7}
\end{aligned}$$

levando à média de J_y dada por

$$\begin{aligned}
\langle \tau(\beta) | J_y | \tau(\beta) \rangle &= \sum_{m, m'=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \delta_{m', m+1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \delta_{m', m-1} \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) \right. \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)^2}{2i} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau) \right\} \\
&= u(\beta)^2 \sum_{m=-j}^j \frac{\sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) - f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau)}{2i}. \quad (\text{C.8})
\end{aligned}$$

Já a média de J_z é obtida, a partir da expressão

$$\begin{aligned}
J_z | \tau(\beta) \rangle &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [a_1^\dagger(\beta) a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta) a_2(\beta)] f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} [a_1^\dagger(\beta) \widetilde{a}_1^\dagger(\beta) - a_2^\dagger(\beta) \widetilde{a}_2^\dagger(\beta)] f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^2}{2} [(j+m) - (j-m)] f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j+m+1} f_m(\tau) | \beta; j+m+1, j-m, \widetilde{10} \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j-m+1} f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m+1, \widetilde{01} \rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ u(\beta)^2 m f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j+m+1} f_m(\tau) | \beta; j+m+1, j-m, \widetilde{10} \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{u(\beta)v(\beta)}{2} \sqrt{j-m+1} f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m+1, \widetilde{01} \rangle \right\}, \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}
\langle \tau(\beta) | J_z | \tau(\beta) \rangle &= \sum_{m, m'=-j}^j u(\beta)^2 m f_{m'}^* f_m(\tau) \delta_{m', m} \\
&= u(\beta)^2 \sum_{m=-j}^j m f_m^* f_m(\tau). \quad (\text{C.10})
\end{aligned}$$

Analisando as médias térmicas obtidas pelas equações (C.6), (C.8) e (C.10), percebemos algumas propriedades, a depender das características da função:

$$\text{Se } f_{m+1}^*(\tau) \cdot f_m(\tau) \text{ for imaginário puro} \quad \mapsto \quad \langle \tau(\beta) | J_x | \tau(\beta) \rangle = 0.$$

$$\text{Se } f_m(\tau) \text{ for real ou imaginário puro} \quad \mapsto \quad \langle \tau(\beta) | J_y | \tau(\beta) \rangle = 0.$$

$$\text{Se } f_m(\tau) \text{ for ímpar ou par em relação a } m \quad \mapsto \quad \langle \tau(\beta) | J_z | \tau(\beta) \rangle = 0.$$

Quando consideramos a média, os estados que não são da forma $|\widetilde{00}\rangle$ irão resultar em zero; então para calcular os segundos momentos, precisamos considerar somente os termos com $|\widetilde{00}\rangle$. Segue que

$$\begin{aligned} J_x^2 | \tau(\beta) \rangle &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_m(\tau) \right. \\ &\quad \times [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) + a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] | \beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad + \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} f_m(\tau) [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) + a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] | \beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{j+m+1} \tilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta) | \beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01} \rangle \\ &\quad \left. + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{j-m+1} \tilde{a}_2^\dagger(\beta) a_1^\dagger(\beta) | \beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10} \rangle \right\}, \\ &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} f_m(\tau) | \beta; j+m+2, j-m-2, \widetilde{00} \rangle \right. \\ &\quad + \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)} f_m(\tau) | \beta; j+m-2, j-m+2, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad + \frac{u(\beta)^4}{2} [j^2 + j - m^2] f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} (j+m+1) \tilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta) | \beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01} \rangle \\ &\quad \left. + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} (j-m+1) \tilde{a}_2^\dagger(\beta) a_1^\dagger(\beta) | \beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10} \rangle \right\}, \\ &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} f_m(\tau) | \beta; j+m+2, j-m-2, \widetilde{00} \rangle \right. \\ &\quad + \frac{u(\beta)^2}{4} \sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)} f_m(\tau) | \beta; j+m-2, j-m+2, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad \left. + \left[\frac{u(\beta)^2}{2} (j^2 + j - m^2) + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \right] f_m(\tau) | \beta; j+m, j-m, \widetilde{00} \rangle \right\}, \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
\langle \tau(\beta) | J_x^2 | \tau(\beta) \rangle &= \sum_{m, m'=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \delta_{m', m+2} \right. \\
&+ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)} f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \delta_{m', m-2} \\
&+ \left. \left[\frac{u(\beta)^4}{2} (j^2 + j - m^2) + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \right] f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \delta_{m', m} \right\}, \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} f_{m+2}^*(\tau) f_m(\tau) \right. \\
&+ \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+2)(j+m+1)(j-m-1)(j-m)} f_m^*(\tau) f_{m+2}(\tau) \\
&- \left. \frac{u(\beta)^4}{2} f_m^*(\tau) f_m(\tau) m^2 \right\} + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \\
&= u(\beta)^4 \sum_{m=-j}^j \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \right. \\
&\times \left. \left[\frac{f_{m+2}^*(\tau) f_m(\tau) + f_{m'}^*(\tau) f_{m+2}(\tau)}{4} \right] - \frac{1}{2} m^2 f_m^*(\tau) f_m(\tau) \right\} \\
&+ \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1). \tag{C.12}
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}
J_y^2 |\tau(\beta)\rangle &= \sum_{m=-j}^j \left\{ -\frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} f_m(\tau) \right. \\
&\quad \times [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) - a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] |\beta; j+m+1, j-m-1, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} f_m(\tau) [a_1^\dagger(\beta) a_2(\beta) - a_1(\beta) a_2^\dagger(\beta)] |\beta; j+m-1, j-m+1, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{j+m+1} \widetilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta) |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{j-m+1} \widetilde{a}_2^\dagger(\beta) a_1^\dagger(\beta) |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\}, \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ -\frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} f_m(\tau) |\beta; j+m+2, j-m-2, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad - \frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)} f_m(\tau) |\beta; j+m-2, j-m+2, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)^4}{2} [j^2 + j - m^2] f_m(\tau) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} (j+m+1) \widetilde{a}_1^\dagger(\beta) a_2^\dagger(\beta) |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} (j-m+1) \widetilde{a}_2^\dagger(\beta) a_1^\dagger(\beta) |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{10}\rangle \right\}, \\
&= \sum_{m=-j}^j \left\{ -\frac{u(\beta)^4}{4} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} f_m(\tau) |\beta; j+m+2, j-m-2, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2}{4} \sqrt{(j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2)} f_m(\tau) |\beta; j+m-2, j-m+2, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad \left. + \left[\frac{u(\beta)^2}{2} (j^2 + j - m^2) + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \right] f_m(\tau) |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right\}, \tag{C.13}
\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\langle \tau(\beta) | J_y^2 | \tau(\beta) \rangle &= u(\beta)^4 \sum_{m=-j}^j \left\{ -\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{f_{m+2}^*(\tau) f_m(\tau) + f_m^*(\tau) f_{m+2}(\tau)}{4} \right] - \frac{1}{2} m^2 f_m^*(\tau) f_m(\tau) \left. \right\} \\
&\quad + \frac{u(\beta)^4}{2} j(j+1) + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1). \tag{C.14}
\end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}
J_z^2 |\tau(\beta)\rangle &= \sum_{m=-j}^j \left\{ \frac{u(\beta)^4}{2} m f_m(\tau) [a_1^\dagger(\beta) a_1(\beta) - a_2^\dagger(\beta) a_2(\beta)] |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle \right. \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{j+m+1} f_m(\tau) \widetilde{a}_1(\beta) a_1(\beta) |\beta; j+m+1, j-m, \widetilde{10}\rangle \\
&\quad \left. + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{4} \sqrt{j-m+1} f_m(\tau) \widetilde{a}_2(\beta) a_2(\beta) |\beta; j+m, j-m+1, \widetilde{01}\rangle \right\} \\
&= \sum_{m=-j}^j f_m(\tau) \left\{ u(\beta)^4 m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \right\} |\beta; j+m, j-m, \widetilde{00}\rangle, \quad (\text{C.15})
\end{aligned}$$

acarretando que

$$\begin{aligned}
\langle \tau(\beta) | J_z^2 | \tau(\beta) \rangle &= \sum_{m, m'=-j}^j f_{m'}^*(\tau) f_m(\tau) \left\{ u(\beta)^4 m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1) \right\} \delta_{m', m} \\
&= u(\beta)^4 \sum_{m=-j}^j f_m^*(\tau) f_m(\tau) m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1). \quad (\text{C.16})
\end{aligned}$$

Consistentemente,

$$\langle \tau(\beta) | J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 | \tau(\beta) \rangle = u^4(\beta) j(j+1) + \frac{3u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2} (j+1), \quad (\text{C.17})$$

cujo limite para $T \rightarrow 0$ coincide com os resultados usuais.

As variâncias térmicas podem ser obtidas a partir da relação

$$(\Delta J_i(\beta))^2 = \langle J_i^2(\beta) \rangle - (\langle J_i(\beta) \rangle)^2, \quad i = \{x, y, z\}. \quad (\text{C.18})$$

Pela generalidade das expressões, não conseguimos simplificar as variâncias, sendo as mesmas dadas por

$$\begin{aligned}
(\Delta J_x(\beta))^2 &= u(\beta)^4 \sum_{m=-j}^j \left\{ \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{f_{m+2}^*(\tau)f_m(\tau) + f_{m'}^*(\tau)f_{m+2}(\tau)}{4} \right] - \frac{1}{2}m^2 f_m^*(\tau)f_m(\tau) \left. \right\} + \frac{u(\beta)^4}{2}j(j+1) \\
&\quad - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau)f_m(\tau) + f_m^*(\tau)f_{m+1}(\tau)}{2} \right\}^2, \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2}(j+1)
\end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta J_y(\beta))^2 &= u(\beta)^4 \sum_{m=-j}^j \left\{ -\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)(j-m)(j-m-1)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{f_{m+2}^*(\tau)f_m(\tau) + f_{m'}^*(\tau)f_{m+2}(\tau)}{4} \right] - \frac{1}{2}m^2 f_m^*(\tau)f_m(\tau) \left. \right\} + \frac{u(\beta)^4}{2}j(j+1) \\
&\quad - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau)f_m(\tau) - f_m^*(\tau)f_{m+1}(\tau)}{2i} \right\}^2 \\
&\quad + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2}(j+1),
\end{aligned} \tag{C.20}$$

e

$$(\Delta J_z(\beta))^2 = u(\beta)^4 \sum_{m=-j}^j f_m^*(\tau)f_m(\tau) m^2 + \frac{u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2}(j+1) - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j m f_m^* f_m(\tau) \right\}^2. \tag{C.21}$$

Por sua vez, a soma das variâncias resulta em

$$\begin{aligned}
\sum_{i=x,y,z} (\Delta J_i(\beta))^2 &= u^4(\beta)j(j+1) + \frac{3u(\beta)^2 v(\beta)^2}{2}(j+1) - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j m f_m^* f_m(\tau) \right\}^2 \\
&\quad - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau)f_m(\tau) + f_m^*(\tau)f_{m+1}(\tau)}{2} \right\}^2 \\
&\quad - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau)f_m(\tau) - f_m^*(\tau)f_{m+1}(\tau)}{2i} \right\}^2.
\end{aligned} \tag{C.22}$$

Com base nas equações (C.12), (C.14) e (C.16), podemos tecer alguns comentários sobre as Desigualdades de Tóth no contexto da DCT, para um estado arbitrário. A partir da desigualdade

$$\langle J_x^2(\beta) \rangle + \langle J_y^2(\beta) \rangle + \langle J_z^2(\beta) \rangle \leq Nj(Nj+1), \quad (\text{C.23})$$

temos que

$$\begin{aligned} u^4(\beta)j(j+1) + \frac{3u(\beta)^2v(\beta)^2}{2}(j+1) &\leq j(j+1) \\ u^4(\beta)j + \frac{3u(\beta)^2v(\beta)^2}{2} &\leq j. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Analisando agora a desigualdade envolvendo as variâncias, ou seja,

$$(\Delta J_x(\beta))^2 + (\Delta J_y(\beta))^2 + (\Delta J_z(\beta))^2 \geq Nj \quad (\text{C.25})$$

encontramos que

$$\begin{aligned} j \leq & u^4(\beta)j(j+1) + \frac{3u(\beta)^2v(\beta)^2}{2}(j+1) - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j m f_m^* f_m(\tau) \right\}^2 \\ & - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) + f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau)}{2} \right\}^2 \\ & - u(\beta)^4 \left\{ \sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) - f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau)}{2i} \right\}^2. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Reorganizando a equação (C.26), obtemos

$$\begin{aligned} j \left\{ u^4(\beta) - 1 \right\} + \frac{3u(\beta)^2v(\beta)^2}{2}(j+1) + u(\beta)^4 \left\{ j^2 - \left[\sum_{m=-j}^j m f_m^* f_m(\tau) \right]^2 \right. \\ \left. - \left[\sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) + f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau)}{2} \right]^2 \right. \\ \left. - \left[\sum_{m=-j}^j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \frac{f_{m+1}^*(\tau) f_m(\tau) - f_m^*(\tau) f_{m+1}(\tau)}{2i} \right]^2 \right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

onde podemos notar que o primeiro e o segundo termos são sempre positivos ou nulos; já o último termo representa justamente j^2 menos o quadrado da média do vetor $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$. Portanto a violação desta desigualdade de Tóth, no contexto da DCT, estará relacionada ao fato do quadrado da média sobre o estado ser maior que j^2 .

Referências Bibliográficas

- [1] SCHRÖDINGER, E., *Der Stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik.*, Die Naturwissenschaften **14**, 664 (1926).
- [2] NEUMANN, J. V., *Mathematical foundations of quantum mechanics.*, New Jersey: Princeton University Press (1996).
- [3] KLAUDER, J. R., *The Action Option and a Feynman Quantization of Spinor Fields in Terms of Ordinary C-Numbers.*, Ann. Phys. **11**, 123 (1960).
- [4] GLAUBER, R., *Photon Correlations.*, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).
- [5] GLAUBER, R., *The Quantum Theory of Optical Coherence.*, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [6] GLAUBER, R. J., *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field.*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [7] SUDARSHAN, E. C. G., *Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams.*, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
- [8] KLAUDER, J. R., *Continuous Representation Theory I. Postulates of Continuous Representation Theory.*, J. Math. Phys. **4**, 1055 (1963).
- [9] KLAUDER, J. R., *Continuous-Representation Theory II. Generalized Relation Between Quantum and Classical Dynamics.*, J. Math. Phys. **4**, 1058 (1963).
- [10] KLAUDER, J. R.; SUDARSHAN, E. C. G., *Fundamentals of Quantum Optics.*, New York: Benjamin (1968).
- [11] KLAUDER, J. R.; SKAGERSTAM, B. S., *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics.*, Singapore: World Scientific (1985).
- [12] GAZEAU, J. P., *Coherent States in Quantum Physics.*, Weinheim: Wiley-VCH (2009).
- [13] RODRIGUES, R. L.; FERNADES JÚNIOR, D.; BATISTA, S. M., *Estados Coerentes em Mecânica Quântica.*, Rio de Janeiro: CBPF - Notas de Física (2001).
- [14] RADCLIFFE, J. M., *Some Properties of Coherent Spin States.*, J. Phys. A: Gen. Phys. **4**, 313 (1971).
- [15] SHASTRY, B. S.; AGARWAL, G. S.; RAO, I. R., *The Heisenberg Ferromagnet in Spin Coherent State Representation.*, Pramana **11**, 85 (1978).
- [16] KIBBLE, T. W. B., *Coherent Soft-Photon States and Infrared Divergences. I. Classical Currents.*, J. Math. Phys. **9**, 315 (1968).

- [17] KIBBLE, T. W. B., *Coherent Soft-Photon States and Infrared Divergences. II. Mass-Shell Singularities of Green's Functions.*, Phys. Rev. **173**, 1527 (1968).
- [18] KIBBLE, T. W. B., *Coherent Soft-Photon States and Infrared Divergences. III. Asymptotic States and Reduction Formulas.*, Phys. Rev. **174**, 1882 (1968).
- [19] KIBBLE, T. W. B., *Coherent Soft-Photon States and Infrared Divergences. IV. The Scattering Operator.*, Phys. Rev. **175**, 1624 (1968).
- [20] D'ARIANO, G. M.; RASETTI, M. G., *Solitons Equations and Coherent States.*, Phys. Lett. A **107**, 291 (1985).
- [21] LÜBECK, E. G.; BIRSE, E. M.; HENLEY, E. M.; WILETS, L., *Momentum Projection and Relativistic Boost of Solitons: Coherent States and Projection.*, Phys. Rev. D **33**, 234 (1986).
- [22] ATKINS, P. W.; DOBSON, J. C., *Angular Momentum Coherent States.*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **321**, 321 (1971).
- [23] ARECCHI, F. T.; COURTENS, E.; GILMORE, R.; THOMAS, H., *Atomic Coherent States in Quantum Optics.*, Phys. Rev. A **6**, 2211 (1972).
- [24] TAKAHASHI, Y.; SHIBATA, F., *Generalized Phase Space Method in Spin Systems-Spin Coherent State Representation.*, J. Stat. Phys. **14**, 49 (1976).
- [25] AL-HASSANIEH, K. A.; DOBROVITSKI, V. V.; DAGOTTO, E.; HARMON, B. N., *Numerical Modeling of the Central Spin Problem Using the Spin-Coherent-State P Representation.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 037204 (2006).
- [26] AGARWAL, G. S., *Relation Between Atomic Coherent-State Representation, State Multipoles, and Generalized Phase-space Distributions.*, Phys. Rev. A **24**, 6, 2889 (1981).
- [27] LEE, C. T., *Q Representation of the Atomic Coherent States and The Origin of Fluctuations in Superfluorescence.*, Phys. Rev. A **30**, 3308 (1984).
- [28] VEWINGER, F.; HEINZ, M.; FERNANDEZ, R. G.; VITANOV, N. V.; BERGMANN, K., *Creation and Measurement of a Coherent Superposition of Quantum States.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 213001 (2003).
- [29] PERELOMOV, A. M., *Coherent States for Arbitrary Lie Group.*, Commun. Math. Phys. **26**, 222 (1972).
- [30] PERELOMOV, A. M., *Generalized Coherent States and Their Applications.*, Berlin: Springer-Verlag (1986).
- [31] GILMORE, R., *Geometry of Symmetrized States.*, Ann. Phys. **74**, 391 (1972).
- [32] ZHANG, W. M.; FENG, D. H.; GILMORE, R., *Coherent States: Theory and some Applications.*, Rev. Mod. Phys. **62**, 867 (1990).
- [33] ROWE, J. D., *Vector Coherent State Representations and Their Inner Products.*, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 244003 (2012).

- [34] PERELOMOV, A. M., *Generalized Coherent States and Some of Their Applications.*, Usp. Fiz. Nauk. **123**, 23 (1977).
- [35] TASGIN, M. E.; MEYSTRE, P., *Spin Squeezing with Coherent Light via Entanglement Swapping.*, Phys. Rev. A **83**, 053848 (2011).
- [36] MANDILARA, A.; COUDREAU, T.; KELLER, A.; MILMAN, P., *Entanglement Classification of Pure Symmetric States via Spin Coherent States.*, Phys. Rev. A **90**, 050302 (2014).
- [37] FAN, H.; CHEN, J., *Atomic Coherent States Studied by Virtue of the EPR Entangled State and Their Wigner Function.*, Eur. Phys. J. D. **23**, 437 (2003).
- [38] SANDERS, B. C., *Review of Entangled Coherent States.*, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 244002 (2012).
- [39] DEMKOWICZ-DOBRAZANSKI, R.; KUS, M.; WODKIEWICZ, K., *Cloning of Spin-Coherent States.*, Phys. Rev. A **69**, 012301 (2004).
- [40] MARKHAM, D.; VEDRAL, V., *Classicality of Spin-coherent States via Entanglement and Distinguishability.*, Phys. Rev. A **67**, 042113 (2003).
- [41] NOVAES, M., *Semiclassical Propagation of Spin-coherent States.*, Phys. Rev. A **71**, 042102 (2005).
- [42] MEYER, V.; ROWE, M. A.; KIELPINSKI, D.; SACKETT, C. A.; ITANO, W. M.; MONROE, C.; WINELAND, D. J., *Experimental Demonstration of Entanglement-Enhanced Rotation Angle Estimation Using Trapped Ions.*, Phys. Rev. Lett **86**, 5870 (2001).
- [43] JULSGAARD, B.; SHERSON, J.; CIRAC, J. I.; FIURASSERK, J.; POLZIK, E. S., *Experimental Demonstration of Quantum Memory for Light.*, Nature **432**, 482 (2004).
- [44] PYRKOV, A.; BYRNES, T., *Quantum Teleportation of Spin Coherent States: Beyond Continuous Variable Teleportation.*, New J. Phys. **16**, 073038 (2014).
- [45] STOLER, D., *Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets.*, Phys. Rev. D **1**, 3271 (1970).
- [46] STOLER, D., *Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets II.*, Phys. Rev. D **4**, 1925 (1971).
- [47] YUEN, H. P., *Two-photon Coherent States of the Radiation Field.*, Phys. Rev. A **13**, 2226 (1976).
- [48] HOLLENHORST, J. N., *Quantum Limits on Resonant-Mass Gravitational-Radiation Detectors.*, Phys. Rev. D **19**, 1669 (1979).
- [49] FUJIWARA, I.; MIYOSHI, K., *Pulsating States for Quantal Harmonic Oscillator.*, Prog. Theor. Phys. **64**, 715 (1980).
- [50] DODONOV, V. V.; KURMYSHEV, E. V.; MAN'KO, V. I., *Generalized Uncertainty Relation and Correlated Coherent States.*, Phys. Lett. A **79**, 150 (1980).
- [51] DRUMMOND, P. D.; FICEK, Z., *Quantum Squeezing.*, New York: Springer (2004).

- [52] KITAGAWA, M.; UEDA, M., *Squeezed Spin States.*, Phys. Rev. A **47**, 6 (1993).
- [53] WINELAND, D. J.; BOLLINGER, J. J.; ITANO, W. M.; MOORE, F. L.; HEINZEN, D.J., *Spin Squeezing and Reduced Quantum Noise in Spectroscopy.*, Phys. Rev. A **46**, R6797 (1992).
- [54] WINELAND, D. J.; BOLLINGER, J. J.; ITANO, W. M.; MOORE, F. L.; HEINZEN, D.J., *Squeezed Atomic State and Projection Noise in Spectroscopy.*, Phys. Rev. A **50**, 67 (1994).
- [55] SORENSEN, A.; DUAN, L. M.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P., *Many-particle Entanglement with Bose-Einstein Condensates.*, Nature **409**, 63 (2001).
- [56] RAGHAVAN, S.; PU, H.; MEYSTRE, P.; BIGELOW, N. P., *Generation of Arbitrary Dicke State in Spinor Bose-Einstein Condensates.*, Opt. Commun. **188**, 149 (2001).
- [57] GÜHNE, O.; TÓTH, G., *Entanglement Detection.*, Phys. Rep. **474**, 1 (2009).
- [58] VITAGLINO, G.; APELLANIZ, I.; EGUSQUIZA, I. L.; TÓTH, G., *Spin Squeezing and Entanglement for an Arbitrary Spin.*, Phys. Rev. A **89**, 032307 (2014).
- [59] BIGELOW, N., *Quantum Engineering - Squeezing Entanglement.*, Nature **409**, 27 (2001).
- [60] GROSS, C., *Spin Squeezing, Entanglement and Quantum Metrology with Bose-Einstein Condensates.*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **45**, 103001 (2012).
- [61] HYLLUS, P.; PEZZÉ, L.; SMERZI, A.; TÓTH, G., *Entanglement and Exterme Spin Squeezing for a Fluctuating Number of Indistinguishable Particles.*, Phys. Rev. A. **86**, 012337 (2012).
- [62] KURKJIAN, H.; PAWLOWSKI, K.; SINATRA, A., *Spin Squeezing and Einstein-Podolsky-Rosen Entanglement of Two Bimodal Condensate in State-Dependent Potentials.*, Phys. Rev. A **88**, 043605 (2013).
- [63] DALTON, B. J.; HEANEY, L.; GOOLD, J.; GARRAWAY, B. M.; BUSCH, T., *New Spin Squeezing and Other Entanglement Test For Two mode Systems of Identical Bosons.*, New J. Phys. **16**, 013026 (2014).
- [64] POLZIK, E.S., *Quantum Physics - The Squeeze goes on.*, Nature **453**, 45 (2008).
- [65] CRONIN, A. D.; SCHMIEDMAYER, J.; PRITCHARD, D. E., *Optics and Interferometry With Atoms and Molecules.*, Rev. Mod. Phys. **81**, 1051 (2009).
- [66] SEWELL, R. J.; KOSCHORRECK, M.; NAPOLITANO, M.; DUBOST, B.; BEHBOOD, N.; MITCHELL M. W., *Magnetic Sensitivity Beyond the Projection Noise Limit by Spin Squeezing.*, Phys. Rev. Lett. **109**, 253605 (2012).
- [67] TORRE, E. G. D.; OTTERBACH, J.; DEMLER, E.; VULETIC, V.; LUKIN, M. D., *Dissipative Preparation of Spin Squeezed Atomic Ensembles in a Steady State.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 120402 (2013).
- [68] LIU, W. F.; MA, J.; WANG, X., *Quantum Fisher Information and Spin Squeezing in the Ground State of the XY Model.*, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 045302 (2013).

- [69] ESTEVE, J.; GROSS, C.; WELLER, A.; GIOVANAZZI, S.; OBERTHALER, M. K., *Squeezing and Entanglement in a Bose-Einstein Condensate.*, Nature **455**, 1216 (2008).
- [70] GROSS, C.; ZIBOLD, T.; NICKLAS, E.; ESTEVE, J.; OBERTHALER, M. K., *Nonlinear Atom Interferometer Surpasses Classical Precision Limit.*, Nature **464**, 1165 (2010).
- [71] RIEDEL, M. F.; BÖHI, P.; LI, Y.; HÄNSCH, T. W.; SINATRA, A.; TREUTLEIN, P., *Atom-Chip-Based Generation of Entanglement for Quantum Metrology.*, Nature **464**, 1170 (2010).
- [72] SHAH, V.; VASILAKIS, G.; ROMALIS, M. V., *High Bandwidth Atomic Magnetometry with Continuous Quantum Nondemolition Measurements.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 013601 (2010).
- [73] AUCCAISE, R.; ARAUJO-FERREIRA, A. G.; SARTHOUR, R. S.; OLIVEIRA, I. S.; BONAGAMBA, T. J.; RODITI, I., *Spin Squeezing in a Quadrupolar Nuclei NMR System.*, Phys. Rev. Lett. **114**, 043604 (2015).
- [74] CHAUDHURY, S.; MERKEL, S.; HERR, T.; SILBERFARD, A.; DEUTSCH, I. H.; JESSEN, P. S., *Quantum Control of the Hyperfine Spin of a Cs Atom Ensemble.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 163002 (2007).
- [75] LEROUX, I. D.; SMITH-SCHLEIER, H.; VULETIC, V., *Implementation of Cavity Squeezing of a Collective Atomic Spin.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 073602 (2010).
- [76] SMITH-SCHLEIER, H.; LEROUX, I. D.; VULETIC, V., *Squeezing the Collective Spin of a Dilute Atomic Ensemble by Cavity Feedback.*, Phys. Rev. A **81**, 021804 (2010).
- [77] MA, J.; WANG, X.; SUN, C. P.; NORI, F., *Quantum Spin Squeezing.*, Phys. Reports **509**, 89 (2011).
- [78] SCHUMM, T.; HOFFERBERTH, S.; ANDERSSON, L. M.; WILDERMUTH, S.; GROTH, S.; BAR-JOSEPH, I.; SCHMIEDMAYER, J.; KÜGER, P., *Matter-Wave Interferometry in a Double Well on an Atom Chip.*, Nature Phys. **1**, 57 (2005).
- [79] BÖHI, P.; RIEDEL, M. F.; HOFFFROGGE, J.; REICHEL, J.; HÄNSCH, T. W.; TREUTLEIN, P., *Coherent Manipulation of Bose-Einstein Condensates with State-Dependent Microwave Potentials on an Atom Chip.*, Nature Phys. **5**, 592 (2009).
- [80] JAKSCH, D.; BRUDER, C.; CIRAC, J. I.; GARDINER, C. W.; ZOLLER, P., *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3108 (1998).
- [81] IMAMOGLU, A.; LEWENSTEIN, M.; YOU, L., *Inhibition of Coherent in Trapped Bose-Einstein Condensates.*, Phys. Rev. Lett. **78**, 13 (1997).
- [82] HUANG, Y. P.; MOORE, M. G., *Optimized Double-Well Quantum Interferometry with Gaussian Squeezed States.*, Phys. Rev. Lett. **100**, 250406 (2008).
- [83] JIAN, G. R.; AN, Y.; YAN, T.; LU, Z. S., *Dynamical Generation of Phase-Squeezed States in Two-Component Bose-Einstein Condensates.*, Phys. Rev. A **82**, 063622 (2010).
- [84] TIKHONENKOV, I.; MOORE, M. G.; VARDI, A., *Optimal Gaussian Squeezed States for Atom-Interferometry in the Presence of Phase Diffusion.*, Phys. Rev. A **82**, 043624 (2010).

- [85] TIKHONENKOV, I.; MOORE, M. G.; VARDI, A., *Robust Sub-Shot-Noise Measurement via Rabi-Josephson Oscillations in Bimodal Bose-Einstein Condensates.*, Phys. Rev. A **83**, 063628 (2011).
- [86] YURKE, B.; STOLER, D., *Generating Quantum Mechanical Superpositions of Macroscopically Distinguishable States Via Amplitude Dispersion.*, Phys. Rev. Lett **57**, 13 (1986).
- [87] YURKE, B.; STOLER, D., *Quantum Behaviour of a Four-Wave Mixer Operated in a Nonlinear Regime.*, Phys. Rev. A **35**, 4846 (1987).
- [88] AGARWAL, G.; PURI, R. R.; SINGH, R. P., *Atomic Schrödinger Cat States.*, Phys. Rev. A **56**, 2249 (1997).
- [89] GERRY, C. C.; GROBE, R., *Generation and Properties of Collective Atomic Schrodinger-Cat States.*, Phys. Rev. A **56**, 2390 (1997).
- [90] GERRY, C.; GROBE, R., *Cavity-QED State Reduction Method to Produce Atomic Schrödinger-Cat States.*, Phys. Rev. A **57**, 2247 (1999).
- [91] MATSUBARA, T., *A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics.*, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [92] DAS, A., *Finite Temperature Field Theory.*, Singapore: World Scientific (1997).
- [93] EZAWA, H.; TOMOZAWA, Y.; UMEZAWA, H., *Quantum Statistical of Fields and Multiple Production of Mesons.*, N. Cimento Ser. X **5**, 810 (1957).
- [94] SCHWINGER, J., *Brownian Motion of a Quantum Oscillator.*, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
- [95] KELDYSH, L. V., *Diagram Technique for Nonequilibrium Processes.*, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965).
- [96] LANDSMAN, N. P.; WEERT, C. G. V., *Real- and Imaginary-Time Field Theory as Finite Temperatura and Density.*, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).
- [97] TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H., *Thermo Field Dynamics.*, Coll. Phenomena **2**, 55 (1975) (Reprinted in: Int. J. Mod. Phys. **10**, 1755 (1996)).
- [98] UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M., *Thermo Field Dynamics and Condensed States.*, Amsterdam: North-Holland (1982).
- [99] UMEZAWA, H., *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics.*, New York: AIP (1993).
- [100] KHANNA, F. C.; MALBOUISSON, A. P. C.; MALBOUISSON, J. M. C.; SANTANA, A. E., *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications.*, Singapore: World Scientific (2009).
- [101] ANDRADE, M. C. B.; SANTANA, A. E.; VIANNA, J. D. M., *Poincaré-Lie Algebra and Relativistic Phase Space.*, J. Phys. A: Math. Gen **33**, 4015 (2000).

- [102] SANTANA, A. E.; KHANNA, F. C., *Lie Groups and Thermal Field Theory.*, Phys. Lett. A **203**, 68 (2000).
- [103] BARNETT, S. M.; PHOENIX, J. D., *Entropy as a Measure of Quantum Optical Correlation.*, Phys. Rev. A **40**, 2404 (1989).
- [104] BARNETT, S. M.; KNIGHT, P. L., *Thermofield Analysis of Squeezing and Statistical Mixtures in Quantum Optics.*, J. Opt. Soc. Am. B **2**, 467 (1985).
- [105] MELO, G. R., Dinâmica de Campos Térmicos e Estados de Superposição do Campo Eletromagnético Quantizado., Dissertação (Mestre em Física), Salvador: Instituto de Física - Universidade Federal da Bahia, (2004).
- [106] ROCHA, V. N. A. L., Dinâmica de Campos Térmicos: Uma Análise de Superposição de Estados Coerentes e Estados de Fock Usando Função de Wigner., Dissertação (Mestre em Física), Salvador: Instituto de Física - Universidade Federal da Bahia, (2013).
- [107] ISRAEL, W., *Thermo-field Dynamics of Black Holes.*, Phys. Lett. A **57**, 107 (1976).
- [108] ABDALLA, M. C. B.; GADELHA, A. L.; VANCEA, I. V., *SU(1,1) Thermal Group of Bosonic Strings and D-Branes.*, Phys. Rev. D **66**, 065005 (2002).
- [109] MALDACENA, J., *Eternal Black Holes in Anti-de-Sitter.*, JHEP **04**, 021 (2003).
- [110] ABDALLA, M. C. B.; GADELHA, A. L.; VANCEA, I. V., *Bosonic Dp-branes at Finite Temperature in TFD Approach.*, Nucl. Phys. B **127**, 92 (2004).
- [111] CANTCHEFF, M. B.; GADELHA, A. L.; MARCHIORO, D. F. Z.; NEDEL, D. L., *String in Ads Black Hole: A Thermo Field Dynamics Approach.*, Phys. Rev. D **86**, 086006 (2004).
- [112] OJIMA, I., *Gauge Fields at Finite Temperatures - "Thermo Field Dynamics" and the KMS Condition and Their Extension to Gauge Theories.*, Ann. Phys. **137**, 1 (1981).
- [113] PLÁCIDO, H. Q.; SILVA, J. C.; KHANNA, F. C.; MALBOUISSON, J. M. C.; REVZEN, M.; SANTANA, A. E., *Thermofield Dynamics and Casimir Effect for Fermions.*, Ann. Phys. **317**, 220 (2005).
- [114] BELICH, H.; SILVA, L. M.; HELAYËL-NETO, J. A., *Casimir Effect at Finite Temperature for the Kalb-Ramond Field.*, Phys. Rev. D **84**, 045007 (2011).
- [115] SANTANA, A. E.; KHANNA, F. C.; REVZEN, M., *Entropy of Entangled States and SU(1,1) and SU(2) Symmetries.*, Phys. Rev. A **65**, 032119 (2002).
- [116] OLIVEIRA, T. P., Teletransporte Quântico de Estados Térmicos., Dissertação (Mestre em Física), Brasília: Instituto de Física - Universidade de Brasília, (2008).
- [117] TRINDADE, M. A. S., Estruturas Algébricas em Informação Quântica e a Dinâmica de Campos Térmicos., Tese (Doutor em Física), Salvador: Instituto de Física - Universidade Federal da Bahia, (2010).
- [118] SALES, S. F., Informação Quântica: Efeitos da Temperatura Utilizando a Dinâmica de Campos Térmicos., Dissertação (Mestre em Física), Salvador: Instituto de Física - Universidade Federal da Bahia, (2011).

- [119] ROCHA, O. L. V., Estados Quânticos do Tipo Bell na Representação Duplo-Trilho e Efeitos da Temperatura: Uma Análise Usando a Dinâmica de Campos Térmicos., Dissertação (Mestre em Física), Salvador: Instituto de Física - Universidade Federal da Bahia, (2011).
- [120] TRINDADE, M. A. S.; FILHO SILVA, L. M.; SANTOS, L. C.; MARTINS, M. G. R.; VIANNA, J. D. M., *Quantum Information, Thermo field Dynamics and Thermalized Bosonic Oscillator*, Inter. Jour. Mod, Phys. B **37**, 1350133 (2013).
- [121] BAN, M., *Noisy Parametric Amplifiers in Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics.*, J. Mod. Opt. **61**, 1348 (2014).
- [122] ARAKI, H.; WOODS, E., *Representations of the Canonical Commutation Relations Describing a Nonrelativistic Infinite Free Bose Gas.*, J. Math. Phys. **4**, 637 (1963).
- [123] LANDAU, L., *Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik.*, Z. Phys., **45**, 430 (1927).
- [124] SAKURAI, J. J., *Modern quantum mechanics.*, 2.ed. rev., New York: Addison-Wesley (1994).
- [125] BIEDENHARN, L. C.; LOUCK, J. D., *Angular Momentum in Quantum Physics*, New York: Addison-Wesley (1981).
- [126] TÓTH, G.; KNAPP, C.; GÜHNE, O.; BRIEGEL, H. J., *Spin Squeezing and Entanglement.*, Phys. Rev. A **79**, 042334 (2009).
- [127] TÓTH, G.; KNAPP, C.; OTFRIED, G.; BRIEGEL, H. J., *Optimal Spin Squeezing Inequalities Detect Bound Entanglement in Spin Models.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 250405 (2007).
- [128] TÓTH, G., *Entanglement Detection in Optical Lattices of Bosonic Atoms with Collective Measurements.*, Phys. Rev. A **69**, 052327 (2004).
- [129] VITAGLINO, G.; HYLLUS, P.; EGUSQUIZA, I. L.; TÓTH, G., *Spin Squeezing Inequalities for Arbitrary Spin.*, Phys. Rev. Lett. **107**, 240502 (2011).
- [130] LAW, C.; NG, H.; LUENG, P., *Coherent Control of Spin Squeezing.*, Phys. Rev. A **63**, 055601 (2001).
- [131] POULSEN, U.; MOLMER, K., *Positive-P Simulations of Spin Squeezing in a Two-component Bose Condensate.*, Phys. Rev. A **64**, 013616 (2001).
- [132] SORENSEN, A., *Bogoliubov Theory of Entanglement in a Bose-Einstein Condensate.*, Phys. Rev. A **65**, 043610 (2002).
- [133] CHOI, S.; BIGELOW, N., *Quantum Squeezing and Entanglement in a Two-mode Bose-Einstein Condensate With Time-dependent Josephson-like Coupling.*, Phys. Rev. A **72**, 033612 (2005).
- [134] JIN, G. R.; KIM, S. W., *Storage of Spin Squeezing in a Two-component Bose-Einstein Condensate.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 170405 (2007).
- [135] LI, Y.; TREUTLEIN, P.; REICHEL, J.; SINATRA, A., *Spin Squeezing in a Bimodal Condensate: Spatial Dynamics and Particle Losses.*, Eur. Phys. J. B **68**, 365 (2009).

- [136] JAFARPOUR, M.; AKHOUND, A., *Entanglement and Squeezing of Multi-qubits Systems Using a Two-Axis Counter Twisting Hamiltonian With an External Field.*, Phys. Lett. A **372**, 2374 (2008).
- [137] MARTIN, L. A. B. S., *Álgebras de Lie.*, Campinas: Editora Unicamp (2010).
- [138] BARUT, A. O.; GIRARDELLO, L., *New "Coherent" States Associated with Non-Compact Groups.*, Commun. Math. Phys. **21**, 41 (1971).
- [139] DRUMMOND, P. D., *Violations of Bell's Inequality in Cooperative States.*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1407 (1983).
- [140] REID, M. D.; MUNRO, W. J.; MARTINI, F., *Violation of Multiparticle Bell Inequalities for Low- and High-Flux Parametric Amplification Using Both Vacuum and Entanglement Input States.*, Phys. Rev. A **66**, 033801 (2002).
- [141] BANASZEK, K.; WÓDKIEWICZ, K., *Nonlocality of the Einstein-Podolsky-Rosen State in the Phase Space.*, Acta Phys. Slov. **49**, 491 (1999).
- [142] BRUKNER, C.; KIM, M. S.; JIAN-WEI, P.; ZEILINGER, A., *Correspondence Between Continuous-Variable and Discrete Quantum Systems of Arbitrary Dimensions.*, Phys. Rev. A **68**, 062105 (2003).
- [143] JACOBSEN, S. H.; JARVIS, P. D., *Regularized Tripartite Continuous Variable EPR-types States with Wigner Functions and CHSH Violations.*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 365301 (2008).
- [144] EVANS, R.; PFISTER, O., *On the Experimental Violation of Mermin's Inequality With Imperfect Measurements.*, Quantum Inf. Comput. **11**, 820 (2011).
- [145] SRIDHAR, N.; PFISTER, O., *Generation of Multipartite Entanglement from Multimode Squeezed States.*, Phys. Rev. A **89**, 012310 (2014).
- [146] HONG-YI, F.; KLAUDER, J. R., *Eigenvectors of Two Particles Relative Position and Total Momentum.*, Phys. Rev. A **49**, 704 (1994).
- [147] WODKIEWICZ, K.; EBERLY, J. H., *Coherent States, Squeezed Fluctuations, and the $SU(2)$ and $SU(1,1)$ groups in quantum-optics applications.*, J. Opt. Soc. Am. B **2**, 458 (1985).
- [148] GERRY, C. C., *Remarks on the Use of Group Theory in Quantum Optics.*, Opt. Express **8**, 76 (2001).
- [149] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F., *Mathematical Methods for Physicists.*, Orlando: Academic Press New York (1985).
- [150] WU, C.; CHEN, J. L.; KWEK, L. C.; OH, C. H.; XUE, K., *Continuous Multipartite Entanglement State in Wigner Representation and Violation of the Zukowsku-Brukner Inequality.*, Phys. Rev. A **71**, 022110 (2005).
- [151] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L., *Computação Quântica e Informação Quântica.*, Porto Alegre: Bookman (2005).

- [152] DOWLING, J. P.; AGARWAL, G. S.; SCHLEICH, W. P., *Wigner Distribution of a General Angular-Momentum State: Applications to a Collection of Two-Level Atoms.*, Phys. Rev. A **49**, 5 (1994).
- [153] LAU, H. W.; DUTTON, Z.; WANG, T.; SIMON, C., *Proposal for the Creation and Optical Detection of Spin Cat States in Bose-Einstein Condensates.*, Phys. Rev. Lett. **113**, 090401 (2014).
- [154] VITALI, D.; KUHR, S.; BRUNE, M.; RAIMOND, J. M., *A Cavity-QED Scheme for Heisenberg-Limited Interferometry.*, J. Mod. Opt. **54**, 1551 (2007).
- [155] MELO, W., *Variedades Topológicas.*, Disponível em: 06 de julho de 2015, Acessado em: <http://w3.impa.br/~demelo/topologiadiferencial2011/Topologia%das%Variedades.pdf> (2011).
- [156] CARMO, M. P., *Geometria Riemanniana.*, Rio de Janeiro: Projeto Euclides (2005).
- [157] WYBOURNE, B. G., *Classical Groups for Physicists.*, Toronto: John Wiley Sons (1974).