



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**Efeitos de Temperatura em Estados Quânticos
Emaranhados**

Érico Gonçalves de Figueiredo

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Efeitos de Temperatura em Estados Quânticos
Emaranhados**

Érico Gonçalves de Figueiredo

Orientador: Prof. Dr. Jorge Mário Carvalho Malbouisson

Tese apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal da Bahia como
pré-requisito para a obtenção do título
de Doutor em Física.

Salvador - 2014

Agradecimentos

Gostaria inicialmente de agradecer a Veronice Gonçalves de Figueiredo e Manoel Pinto de Figueiredo, meus pais, pelo apoio e incentivo que sempre me deram nesta minha trajetória. Aos meus irmãos Clarissa Gonçalves de Figueiredo e Rodrigo Gonçalves de Figueiredo por estarem sempre presentes nesta jornada. A Aguinaldo Severo e Veraldina Severo pelas palavras de carinho e pelo incentivo. A Raimundo Gonçalves por todo carinho. A Conceição e Rubens Campregher que apesar da distância sempre estiveram presentes. A tio Eliseu e Tia Zuleide, pelo eterno carinho. Aos demais familiares que sempre me apoiaram.

Não poderia deixar de agradecer a Marília Crusoé Figueiredo pelo carinho e paciência demonstrados nestes últimos anos, prova de amor incondicional. A Alice Crusoé, Marcela Crusoé, Cristóvão Cordeiro, Nílson Crusoé e Nilma Crusoé pelo apoio.

Gostaria de agradecer ao Professor e amigo Jorge Mario Carvalho Malbouisson por todos esses anos de convívio e pelas belas lições de Física e sobre a vida.

Agradeço também aos professores Ângelo Maniero, Alexandre Gadelha, Arthur Matos Neto, Delmiro Baqueiro, Frederico Prudente, Juarez Caetano, Raimundo Muniz, Ricardo Miranda e Humberto Borges pelas boas discussões sobre a vida e as belas lições de física.

Aos professores Ademir Eugênio de Santana, Luciano Abreu e João Cardeal pelas primeiras lições de física.

Aos professores Adolfo Malbouisson e César Linhares pelas colaborações que resultaram em parte desta tese.

Aos funcionários do Instituto de Física pela dedicação exemplar, em especial a Eraldina da Conceição, Valtério Pereira de Carvalho, Maria Júlia Souza de Jesus e Néelson Dumiense.

Aos amigos Antônio Augusto, Daniel Abreu, Jorge Nunes, Marcos Melo, Marcílio Guimarães, Jorge Dantas, Joelmo Oliveira, Genilson Ribeiro, Paulo Neves (*in memoriam*), Antônio Lafayette, João Humberto Jr., Mabele Santos, Fábio da Hora, Ronaldo Naziazeno, Valdencastró Vilas Boas, Exupério Souza, Daniel Lima, Antônio Arapiraca, Antônio Teixeira, José Guerra, Isadora Salomão, Isadora Costa, Cristiano Marques, Fabrício Santana, Leandro

Barreto, Orlando Filho e a todos os demais colegas e amigos construídos ao longo destes anos.

Aos colegas e amigos da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, em particular aos professores Anderson Sanches, Renê Medeiros, José Humberto, Marcelo Teles, Manuela Arruda, João Cláudio Costa, Eleazar Lozada, Clélio Gomes, Aroldo Félix e Tiago Motta.

Ao Instituto de Física da Universidade de Brasília pelo acolhimento em um período que foi relevante para a finalização desta tese, em especial aos professores Ademir Santana, Antony Polito, Amílcar Queiroz e Tarcísio Marciano.

A todos aqueles que não foram citados, minhas mais sinceras desculpas.

A comunidade do Instituto de Física.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo
por
Érico Gonçalves de Figueiredo

Nesta tese estudamos a dinâmica de emaranhamento em estados quânticos sob efeito de temperatura. Fizemos uma revisão do atual estado da arte no que diz respeito aos estados emaranhados. Definições de emaranhamento para estados puro e de mistura, critérios de emaranhamento e quantificadores do grau de emaranhamento foram apresentados. A Dinâmica de Campos Térmicos foi revisada e estados termalizados bipartite foram construídos a partir desta formulação. Estudamos o emaranhamento para dois estados termalizados sendo um Gaussiano e outro não Gaussiano. Estudamos também a evolução temporal do emaranhamento para um sistema confinado em cavidade. O formalismo de Estados Vestidos e Coordenadas Renormalizadas foram utilizadas a fim de analisar este sistema. O desaparecimento do emaranhamento para altas temperaturas é percebido em todos os sistemas analisados, contudo a existência de emaranhamento a temperatura suficientemente pequena é um resultado relevante encontrado nesta tese. Efeitos de morte e ressurgimento de emaranhamento também são observados para sistemas confinados em cavidade pequena a temperatura finita.

Abstract

by

Érico Gonçalves de Figueiredo

In this thesis we study the dynamics of entanglement in quantum states under the temperature effect. We review quantum entanglement. Entanglement definition for pure states and mixing states, criteria of entanglement and quantifiers of entanglement were presented. Thermalfields Dynamics was reviewed and thermalized bipartite states were constructed from this formulation. We study the entanglement for two thermalized states where one Gaussian and the other does not. We also study the time evolution of entanglement in a confined system in cavity. Dressed States and Renormalized Coordinates were used for confined systems. The disappearance of entanglement for high temperatures is seen in all the systems studied. However the existence of entanglement for sufficiently small temperature is an important results found in this study. Death and revival of entanglement is also observed for confined system in small cavity at finite temperature.

É falso pensar que a tarefa da física seria descobrir como a natureza está constituída. A tarefa da física é, pelo contrário, descobrir o que podemos dizer sobre a natureza.

(Niels Bohr)

Aos meus Pais e Irmãos.
A Ernesto.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Introdução	1
1 Emaranhamento Quântico	4
1.1 Fundamentos Teóricos	5
1.1.1 Definição de Estados Emaranhados	7
1.2 Desigualdade de Bell	10
1.3 Identificando Emaranhamento	12
1.3.1 Critério de Peres-Horodecki	13
1.3.2 Critério de Simon	18
1.3.3 Critério de Shchukin e Vogel	25
1.4 Quantificação de Emaranhamento	30
1.4.1 Entropia de von Neumann	32
1.4.2 Medidas tipo distância	35
1.4.3 Emaranhamento de Formação	35
1.4.4 Negatividade	40
1.5 Considerações Finais	41
2 Dinâmica de Campos Térmicos	42
2.1 Espaço de Hilbert Térmico	43
2.2 Oscilador Bosônico Térmico	46
2.2.1 Estado de Vácuo Térmico	47
2.2.2 Transformação de Bogoliubov	48
2.2.3 Operadores Térmicos	49
2.3 Estados Termalizados de um Oscilador	51
2.3.1 Estado Número Termalizado	53
2.3.2 Estado arbitrário Termalizado	54
2.4 Considerações Finais	55
3 Emaranhamento Quântico e Estados Termalizados	56
3.1 Dinâmica de Campos Térmicos para N Osciladores	56
3.1.1 Espaço de Hilbert Térmico para N Osciladores	58
3.1.2 Estados Termalizados para N Osciladores	60
3.2 Estados Termalizados Emaranhados Bipartite	61

3.2.1	Superposição de Estados de Número	62
	Critério de Shchukin e Vogel	63
3.2.2	Estados Comprimidos Termalizados de Dois Osciladores	66
3.3	Considerações Finais	71
4	Estados Vestidos e Processos de Termalização	72
4.1	Osciladores Acoplados	73
4.2	Estados Vestidos	77
4.3	Processos de Termalização	81
	4.3.1 Cavidades Pequenas	82
	4.3.2 Cavidades Grandes	85
4.4	Considerações Finais	90
5	Emaranhamento em Sistema Biatômico Confinado em Cavidade	91
5.1	Sistema Biatômico em Cavidade	91
	5.1.1 Estados Biatômicos Vestidos	93
5.2	Emaranhamento a Temperatura Nula	95
	Cavidade Pequena	97
	Cavidade Grande	97
	Impureza	98
	5.2.1 Desigualdade de Bell	98
	Cavidade Pequena	100
	Cavidade Grande	101
	5.2.2 Medidas de Emaranhamento	101
	Emaranhamento de Formação	102
	Negatividade	103
5.3	Emaranhamento a temperatura finita	106
	5.3.1 Critério de Simon	107
	5.3.2 Critério de Shchukin-Vogel	109
	Cavidade Pequena	111
	Cavidade Grande	112
5.4	Considerações Finais	116
6	Conclusões e Perspectivas	117
	Referências Bibliográficas	119

Lista de Figuras

1.1	Violação da desigualdade de Bell para os estados (1.16) (linha contínua) e (1.20) (linha tracejada).	12
1.2	Autovalor negativo em função do parâmetro da superposição de um estado de Bell com o vácuo.	18
1.3	Entropia de von Neumann da matriz reduzida de um estado de Bell.	34
1.4	Entropia de von Neumann da matriz reduzida de um estado <i>squeezed</i> de dois modos.	34
3.1	$Det(\mathbb{S}) \times p$ para uma superposição de estados número termalizados. Linha contínua $\bar{n}(\beta) = 0.0$, linha tracejada $\bar{n}(\beta) = 0.14$, linha traço-pontilhada $\bar{n}(\beta) = 0.22$ e a linha pontilhada $\bar{n}(\beta) = 0.2612$	65
3.2	Gráfico de $\bar{n}_c(p) \times p$ para a superposição de estados número termalizados. . .	66
3.3	Gráfico de $E(r, \beta) \times r$ para um estado comprimido termalizado para diferentes valores de $\bar{n}(\beta)$: Linha continua $\bar{n}(\beta) = 0.0$, linha tracejada $\bar{n}(\beta) = 0.5$ e linha pontilhada $\bar{n}(\beta) = 0.7$	69
3.4	Gráfico de $E(r, \beta) \times \bar{n}(\beta)$ para um estado comprimido termalizado para diferentes valores de r : Linha continua $r = 0.0$, linha tracejada $r = 0.4$ e linha pontilhada $r = 0.6$	70
3.5	Gráfico do valor de $\bar{n}_c(r) \times r$	70
4.1	Gráfico dos dois termos da equação (4.23) para os seguintes parâmetros: $g = 0.5$, $\delta = 0.25$ e $\bar{\omega} = 1.162$. Linha contínua: $Y(\Omega_r) = \cot\left(\frac{\pi\delta\Omega_r}{g}\right)$. Linha tracejada: $X(\Omega_r) = \frac{\Omega_r}{\pi g} + \frac{g}{\pi\delta\Omega_r} \left(1 - \frac{\delta\bar{\omega}^2}{g^2}\right)$	84
4.2	Comportamento de $n'_0(t) \times t$ para um estado tipo (4.51) considerando os seguintes valores: $n_0 = 1.0$, $\bar{\omega} = 0.67$, $g = 0.1$, $\delta = 0.03$ e $\beta = 2.0$	85
4.3	Comportamento para cavidade grande do valor esperado do operador número para um estado (4.51) em função do tempo para $n_0 = 1.0$, $g = 0.1$, $\beta = 1.5$ e $\bar{\omega} = 1.0$ (linha contínua), $\bar{\omega} = 1.5$ (linha tracejada). As linhas horizontais são para $n'(\beta = 1.5, \bar{\omega} = 1.5) \approx 0.12$ (linha pontilhada) e $n'(\beta = 1.5, \bar{\omega} = 1.0) \approx 0.28$ (linha ponto-tracejada).	89
5.1	Comportamento do grau de impureza como função do tempo para cavidade grande fazendo $\bar{\omega} = 2.0$ e $g = 0.1$ (em unidades arbitrárias), fixando alguns valores de ξ : 0.5 (linha contínua); 0.2 (linha tracejada); e 0.8 (linha pontilhada).	98

5.2	Comportamento do grau de impureza para cavidade pequena como função do tempo, fazendo $\bar{\omega} = 0.67$ e $g = 0.1$ (em unidades arbitrárias) com $\delta = 0.03$, para alguns valores de ξ : 0.2 (linha completa); 0.5 (linha tracejada); e 0.8 (linha pontilhada).	99
5.3	Gráfico de $DB(t) \times t$, para valores fixos de $\xi = 0.5$, $\phi = \pi$, $\bar{\omega} = 1.92$ e $g = 1.0$ (em unidades arbitrárias), para um cavidade pequena com $\delta = 0.1$	100
5.4	Gráfico no plano $\phi \times t$ da desigualdade de Bell para valores fixos de $\xi = 0.5$, $\bar{\omega} = 1.92$ e $g = 1.0$ (em unidades arbitrárias), para um cavidade pequena com $\delta = 0.1$	101
5.5	Gráfico do contorno no plano $\xi \times \phi$ mostrando a região onde ocorre violação da desigualdade de Bell para cavidade grande. A violação ocorre na região interior das curvas. Fizemos neste caso: $t = 0.01$ (linha completa), 0.08 (linha tracejada) e 0.12 (linha pontilhada), com $\bar{\omega} = 2.0$ e $g = 1.0$ em unidades arbitrárias.	102
5.6	Negatividade (linha contínua), Emaranhamento de formação (linha tracejada) e Concorrência (linha pontilhada) para uma cavidade pequena considerando $\delta = 0.03$, $\bar{\omega} = 0.67$ e $g = 0.1$	105
5.7	Negatividade (linha contínua), Emaranhamento de formação (linha tracejada) e Concorrência (linha pontilhada) para uma cavidade grande, considerando $\bar{\omega} = 2.0$ e $g = 0.1$	105
5.8	Evolução temporal de $E(t)$ para o estado (5.57) em uma cavidade pequena com $\delta = 0.03$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 0.67$ e $\xi = 0.5$. Fizemos β : 0.10 (linha pontilhada), 0.1465 (linha traço-pontilhada), 0.3 (linha tracejada) e ∞ (linha contínua).	112
5.9	Evolução temporal de $E(t)$ para o estado (5.57) em uma cavidade pequena com $\delta = 0.03$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 0.67$ e $\xi = 1/2$. Fizemos β : 0.00315 (linha completa) e 0.001 (linha tracejada).	113
5.10	Gráfico de $E(t) \times t$ considerando $\xi = 1/2$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 2.0$ para cavidade grande sendo $\beta \rightarrow \infty$ (linha inteira), $\beta = 1.2$ (linha tracejada) e $\beta = 0.9$ (linha pontilhada).	114
5.11	Gráfico de $E(t) \times t$ considerando $\xi = 1/2$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 2.0$ para cavidade grande, sendo $\beta = 0.175$ (linha contínua) e $\beta = 0.08$ (linha tracejada).	115

Introdução

A mecânica quântica surgiu no início do século XX com o trabalho de Planck (1900) sobre a radiação de corpo negro. Durante as primeiras três décadas do século passado a teoria quântica se consolidou, levando a uma diversidade de concepções que estão longe de se tornarem consensuais até o presente momento. Dentre estas questões encontra-se o emaranhamento quântico.

Os estados quânticos emaranhados foram fundamentais para a existência de um dos grandes debates epistemológicos da história da física no século passado. De um lado Einstein, Podolsky e Rosen [1] foram grandes defensores da incompletude da teoria quântica, baseando-se em uma definição própria de realidade física. Por outro lado Bohr [2] se colocou como um exímio defensor da nova teoria, contradizendo os principais argumentos dos primeiros.

Durante anos algumas questões fundamentais referentes ao emaranhamento quântico, tais como realismo e não-localidade, ficaram restritas as discussões filosóficas. Em 1964 Bell [3] demonstrou que o princípio de superposição aplicado a sistemas compostos poderia comprovar o aspecto não-local da mecânica quântica. Contudo, somente no início da década de 1980 foi que Aspect, Grangier e Roger [4, 5] confirmaram os aspectos de não-localidade da teoria quântica experimentalmente.

No contexto dos estados emaranhados correlações de Bell para partículas relativísticas também vem sendo estudadas [6]. A discussão do efeito das transformações de Lorentz sobre o emaranhamento motivou também o estudo de correlações de Bell no contexto da relatividade geral [7, 8].

Na década de 1990 diversos trabalhos demonstraram que não somente aspectos filosóficos eram relevantes para o emaranhamento quântico, mas também uma infinidade de aplicações tecnológicas poderiam ser implementadas via a utilização destes estados. Uma síntese destes trabalhos pode ser encontrada nos textos [9, 10], que tratam de computação e informação quânticas. Mais recentemente outras aplicações de estados emaranhados vem sendo desen-

volvidas [11], no que se denota atualmente como metrologia quântica.

Diante de todo o contexto apresentado anteriormente, uma questão que se coloca é sobre a existência de estados emaranhados para sistema que interagem com um ambiente. Sabemos que usualmente os sistemas quânticos não existem isoladamente e portanto, algum efeito de temperatura sobre o sistema é esperado. Especificamente no nosso caso estamos interessados no efeito da temperatura na sobrevivência do emaranhamento de estados quânticos.

Esta questão se torna relevante diante de várias situações, como por exemplo a influência do emaranhamento em propriedades macroscópicas dos sólidos. Em [12] os autores demonstraram que a suscetibilidade magnética de alguns materiais é condizente com um modelo teórico onde se considera estados emaranhados e o sistema encontra-se a uma temperatura suficientemente pequena. Esta dependência possui uma razão simples. A suscetibilidade magnética é proporcional a correlação entre os spins nos sólidos e o emaranhamento corresponde a correlações quânticas, sem analogia clássica, entre as partes do sistema. Estas e outras questões colocam o problema de analisar emaranhamento para sistemas a temperatura finita [12–14].

Nesta tese o que vamos apresentar trata-se de um estudo de emaranhamento quântico para estados de osciladores bosônicos sob efeito de temperatura. Dividimos este trabalho em duas partes. Primeiramente discutimos o efeito da temperatura em estados emaranhados em equilíbrio térmico. Na sequência, apresentamos um estudo sobre a evolução temporal de estados emaranhados de um sistema em contato com um ambiente a temperatura finita.

Para sistematizar este estudo dividimos esta tese em cinco capítulos. No primeiro capítulo fizemos uma revisão sobre o atual estado da arte no que corresponde ao emaranhamento quântico. As definições de estados emaranhados puros e de mistura, desigualdades de Bell, critérios para a identificação e quantificadores do grau de emaranhamento são revisados.

No segundo capítulo fizemos uma revisão sobre o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos com ênfase em osciladores bosônicos. Estados termalizados para o campo de radiação quantizado são discutidos.

No terceiro capítulo fizemos um estudo sobre emaranhamento em estados termalizados do campo de radiação considerando dois exemplos, um estado gaussiano e outro não gaussiano. A temperatura crítica para a existência de emaranhamento é encontrada em ambos os casos.

No quarto capítulo fizemos uma revisão a fim de introduzir os estados vestidos e as coordenadas renormalizadas que foram utilizadas no estudo de sistemas atômicos confinados em cavidades. Apresentamos neste capítulo também algumas considerações sobre o formalismo

utilizado, apresentando novos desenvolvimentos.

No quinto capítulo a dinâmica de emaranhamento para um sistema bipartite atômico confinado em cavidade, utilizando estados vestidos, foi apresentada considerando um ambiente a temperatura nula e a temperatura finita. Finalizamos a tese com um último capítulo de conclusões e perspectivas.

Capítulo 1

Emaranhamento Quântico

Emaranhamento indubitavelmente consiste em uma das mais intrigantes previsões da teoria quântica. Desde a sua proposição até os dias atuais, os aspectos contra intuitivos relacionados aos estados emaranhados vem levantando debates interessantes na comunidade científica. Talvez o mais famoso destes tenha sido proporcionado por Einstein e Bohr por volta da década de trinta do século passado. Os questionamentos do primeiro a respeito da completude da teoria quântica e a defesa implacável do segundo pela viabilidade da teoria, foram assuntos cotidianos durante um bom tempo¹.

Atualmente existem diversas aplicações tecnológicas onde se utilizam estados emaranhados. Para citar algumas a teleportação de estados quânticos, criptografia quântica, algoritmos computacionais entre outros, levam a um conjunto de aplicações dentro do escopo do que se conhece como ciência da informação e computação quânticas [9, 10].

Neste capítulo faremos uma revisão de alguns aspectos, que serão utilizados no propósito da tese, do atual estado da arte sobre emaranhamento quântico. Na primeira seção discutiremos os fundamentos teóricos e as definições de estados emaranhados puros e de mistura. O teorema de Bell que versa sobre não-localidade na teoria quântica será revisado na sequência. Na seção seguinte apresentaremos alguns critérios que identificam estados emaranhados. Na quarta seção quantificadores do grau de emaranhamento serão tratados seguidos das considerações finais.

¹Uma boa leitura sobre o tema pode ser encontrada nos seguintes textos: 1) Freire Jr, Olival, *David Bohm e a Controvérsia dos Quanta*, Campinas, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (1999) e 2) Zeilinger, Anton, *A Face Oculta da Natureza: O novo mundo da física quântica*, Rio de Janeiro, Globo (2005).

1.1 Fundamentos Teóricos

Na formulação da Mecânica Clássica o estado de um sistema de partículas com N graus de liberdade é definido por um par $(q, p) \in \Sigma$, onde $q = (q_1, \dots, q_N)$ são as coordenadas generalizadas e $p = (p_1, \dots, p_N)$ os *momenta* generalizados do sistema. Do ponto de vista formal, o conjunto de estados acessíveis (q, p) do sistema formam uma variedade simplética Σ chamada de espaço de fase. As observáveis físicas são funções do estado $f = f(q, p)$ e a dinâmica pode ser determinada pelas equações canônicas de Hamilton.

Quando entramos no mundo quântico a situação se configura diferente. O primeiro postulado da teoria quântica pode ser formulado como segue [15]:

Postulado 1 *Em um instante de tempo t o estado de um sistema físico é definido por um raio vetor $e^{i\phi} |\psi\rangle$ pertencente a um espaço de Hilbert \mathcal{H} .*

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial complexo, completo e provido de uma métrica definida através de um produto escalar. Devido ao caráter vetorial do conjunto de estados quânticos sabemos que a combinação linear de dois estados distintos é também um estado do sistema. Em outras palavras, sendo $|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}$, então $|\psi\rangle = x_1 |\psi\rangle_1 + x_2 |\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}$, onde $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Essa propriedade de espaços vetoriais é relevante em física devido as suas consequências experimentais e filosóficas, a tal ponto de ser conhecido como *princípio da superposição*.

Outra característica da mecânica quântica que a diferencia da teoria clássica consiste sobre os processos de observação. Enquanto a medida de uma observável física sobre um sistema clássico não interfere no estado do sistema, o mesmo não ocorre em sistemas quânticos. A medida de uma grandeza física sobre um sistema quântico modifica o estado do sistema. Esse comportamento experimental impõe a caracterização das observáveis físicas como operadores hermitianos que atuam no espaço de Hilbert do sistema. Complementa-se a isto o fato de que os possíveis resultados das medidas de uma observável são os seus respectivos autovalores.

A distinção entre mecânica clássica e mecânica quântica sobre a natureza matemática dos conjuntos de estados acessíveis de um sistema físico, sobre a descrição das observáveis e os processos de mensuração apresentam consequências fundamentais para a interpretação da teoria quântica. Desde os primórdios da teoria até os dias atuais estes fatores juntamente com o *princípio da superposição* consistem na base de diversas discussões entre físicos, filósofos e historiadores da ciência. Talvez o debate mais conhecido sobre o tema tenha sido iniciado

em 1935 por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [1] em um artigo intitulado *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Neste artigo EPR aplicam o princípio da superposição, a hipótese de localidade e uma definição de realidade física para demonstrar a incompletude da mecânica quântica.

Como exemplo EPR consideram um sistema bipartite onde a função de onda que descreve o estado do sistema é dada por

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2i\pi/\hbar)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp. \quad (1.1)$$

Considerando o operador *momentum* na representação coordenada

$$\hat{p} = (\hbar/2i\pi)\partial/\partial x, \quad (1.2)$$

é possível demonstrar que quando realizada uma medida sobre a partícula (1) e for determinado que o *momentum* dela é igual p , a partícula (2) encontrar-se-a com *momentum* igual a $-p$. Este processo é realizado sem que nenhuma perturbação seja operada sobre a segunda partícula. Esse resultado entra em desacordo com os postulados EPR sobre realidade física e levam os autores a concluírem que a mecânica quântica é incompleta.

Também em 1935 Bohr [2] em um artigo com o mesmo título refuta as conclusões de EPR considerando uma outra definição de realidade física. Em verdade Bohr considera que não é possível falar de realidade física sem se levar em consideração o observador.

No mesmo espírito Schrödinger apresenta as consequências do *princípio de superposição* quando aplicado a um sistema macroscópico. Considerando um experimento imaginário onde um gato encontra-se confinado dentro de uma caixa juntamente com um átomo radioativo e supondo que o átomo esteja inicialmente em um estado instável $|i\rangle$ e que pode decair para um estado mais estável $|e\rangle$. Considera-se ainda que a energia liberada no processo seja suficiente para matar o gato. Como a mecânica quântica somente pode prever a probabilidade do decaimento sem afirmar quando ele ocorre, o que podemos afirmar é que o estado do sistema composto pelo gato mais átomo é dado por

$$|\psi\rangle = |v, i\rangle + |m, e\rangle \quad (1.3)$$

onde $|v, i\rangle$ representa o gato vivo mais o átomo instável e $|m, e\rangle$ o gato morto mais o átomo estável. Para a relação entre os entes desse sistema Schrödinger usou o termo em alemão *Verschränkung*, que traduzido para o português resulta em *emaranhamento*.

Essas questões apresentadas por EPR, Bohr e Schrödinger sobre os aspectos da mecânica quântica derivados do princípio de superposição, ficaram restritos as discussões filosóficas durante um período devido a não apresentação de resultados quantitativos. Somente em 1964 Bell [3], utilizando um sistema bipartite de dois níveis, apresentou um teorema que possibilitou Aspect *et. al.* [4, 5] comprovar experimentalmente o caráter não-local da teoria quântica.

1.1.1 Definição de Estados Emaranhados

Conforme discutido anteriormente o emaranhamento ocorre como uma derivação do *princípio de superposição* para sistemas de duas ou mais partes. Do ponto de vista formal defini-se o que é um estado separável e a partir desta, conceitua-se estados emaranhados. Para estados puros a definição de estados emaranhados é dada por:

Definição 1 *Seja um sistema físico composto tal que o espaço de Hilbert é dado por $\mathcal{H} = \otimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$, onde \mathcal{H}_k é o espaço de Hilbert do subsistema k . Seja $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ um estado puro do sistema, diz-se que $|\psi\rangle$ é um estado separável se, e somente se, ele pode ser escrito como sendo $|\psi\rangle = \otimes_{k=1}^N |\phi\rangle_k$ onde $|\phi\rangle_k \in \mathcal{H}_k$, é um estado do subsistema k . Quando um estado não é separável ele é dito ser emaranhado.*

Verifica-se diretamente da definição que o valor esperado de um operador $\hat{A} = \otimes_{k=1}^N \hat{A}_k$, quando o sistema encontra-se em um estado $|\psi\rangle$ separável é dado por

$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi} = \prod_{k=1}^N \langle \hat{A}_k \rangle_{\phi_k} . \quad (1.4)$$

Essa relação demonstra que em estados separáveis não existe correlação entre as medidas de observáveis físicas relacionadas as partes do sistema. Em outras palavras, que não é possível identificar o valor esperado de uma observável \hat{A}_k correspondente ao subsistema k realizando um processo de observação sobre o subsistema $j \neq k$.

Para entender essa definição vamos analisar alguns exemplos de estados puros para um sistema bipartite com espectro do Hamiltoniano discreto. Considere o Hamiltoniano para dois osciladores harmônicos dado por

$$\hat{H} = \omega_A \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_B \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (1.5)$$

Os autovetores do Hamiltoniano (1.5) são os estados de número $|n, m\rangle = |n\rangle_A \otimes |m\rangle_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ com $n, m \in \mathbb{N}$. Assim sobre essa base e considerando um sistema de dois níveis

podemos obter os estados

$$|\psi\rangle = N (|00\rangle + |01\rangle), \quad (1.6)$$

$$|\phi\rangle = N (|00\rangle + |11\rangle) \quad (1.7)$$

com N sendo um fator de normalização. O estado (1.6) é um estado separável pois pode ser escrito como $|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$. O mesmo não acontece para o estado (1.7) que é portanto um estado emaranhado. Podemos observar também que o valor esperado de um operador $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ no estado (1.6) é dado por

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle 0 | \hat{A}_1 | 0 \rangle \left(\langle 0 | \hat{A}_2 | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{A}_2 | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{A}_2 | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{A}_2 | 1 \rangle \right) \quad (1.8)$$

enquanto que para o estado (1.7) é

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle_\phi &= \langle 0 | \hat{A}_1 | 0 \rangle \langle 0 | \hat{A}_2 | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{A}_1 | 1 \rangle \langle 0 | \hat{A}_2 | 1 \rangle \\ &+ \langle 1 | \hat{A}_1 | 0 \rangle \langle 1 | \hat{A}_2 | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{A}_1 | 1 \rangle \langle 1 | \hat{A}_2 | 1 \rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ou seja, enquanto que para o estado $|\psi\rangle$ a medida sobre o subsistema (1) não carrega nenhuma informação sobre o sistema (2), no estado $|\phi\rangle$ o resultado da medida sobre quaisquer uma das partes do sistema determina *instantaneamente* o resultado da medida da outra parte².

A definição (1) se aplica exclusivamente para estados puros de um sistema. Em geral os estados quânticos são descritos por matrizes densidades ρ , que podem representar estados puros ou de mistura. Quando tratamos de estados não puros de um sistema bipartite nota-se que para uma matriz densidade fatorável

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \quad (1.10)$$

o valor esperado de uma observável $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ é dado por

$$\langle \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 \rangle_\rho = \text{Tr} \left(\hat{A}_1 \rho_1 \right) \text{Tr} \left(\hat{A}_2 \rho_2 \right) \quad (1.11)$$

e, portanto, podemos afirmar que estados descritos por matrizes densidades tais quais (1.10) não apresentam correlações quânticas entre as partes do sistema.

²Esse fenômeno foi o que Einstein chamou de *ação fantasmagórica a distância*. Devido a sua inconsistência com uma teoria local como é o caso da Teoria da Relatividade, esse fenômeno foi usado como argumento para que EPR afirmassem que a Mecânica Quântica era uma teoria incompleta.

Contudo nem todo estado de mistura que não é fatorável constitui um estado emaranhado. Segundo Werner [16] existem estados não fatoráveis que apresentam somente correlações clássicas. Esses estados podem ser gerados por *Operações Locais com Comunicação Clássica* (OLCC). Por OLCC entende-se um conjunto de manipulações locais realizadas sobre as partes do sistema onde se envolva canais clássicos de comunicação, ou seja, que respeitem os princípios da relatividade restrita. Estas manipulações não geram estados quânticos emaranhados.

Vejamos agora o protocolo para criação de estados mistos não emaranhados proposto por Werner [16]. Suponhamos que um sistema seja composto de duas partes (A) e (B). Se (A) e (B) realizam operações locais sobre o sistema um estado puro $|\psi, \phi\rangle$ fatorável é preparado. Por manipulações locais unitárias pode-se criar um outro estado fatorável a partir destes. Supondo então um sistema que gere um *ensemble* de estados fatoráveis onde cada estado $|\psi_i, \phi_i\rangle$ é criado com probabilidade p_i , podemos escrever qualquer estado como sendo

$$\rho = \sum_{j=1}^N p_j |\psi_j, \phi_j\rangle \langle \psi_j, \phi_j|, \quad (1.12)$$

com $p_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N p_j = 1$. Esses estados são os mais gerais que podem ser construídos com OLCC, não são fatoráveis e devido ao fato de somente apresentarem correlações clássicas são ditos estados não-emaranhados ou estados separáveis. Assim podemos definir um estado misto emaranhado como segue:

Definição 2 *Seja um sistema quântico formado por N subsistemas. Seja um estado descrito por uma matriz densidade $\rho \in \otimes_{j=1}^N \mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$, onde $\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$ é o conjunto formado por todos os operadores que atuam em \mathcal{H}_j . Dizemos que a matriz densidade ρ descreve um estado separável se, e somente se, ela pode ser escrita como sendo*

$$\rho = \sum_{i=1}^k p_k \left(\otimes_{j=1}^N \rho_i^j \right)$$

para qualquer k , sendo $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^N p_k = 1$ e ρ_i^j é um estado produto. Quando um estado misto não é separável ele é dito ser emaranhado.

Essas definições de estados emaranhados são construídas a partir de definições de estados separáveis. Contudo, nem sempre encontrar uma decomposição de um estado puro ou de mistura é uma tarefa simples. Esta dificuldade permite afirmar que estas definições não são operacionais. Neste sentido critérios de identificação de emaranhamento são necessários. Vejamos agora um destes identificadores introduzido por Bell.

1.2 Desigualdade de Bell

Considerando o princípio de localidade e a suposição de variáveis ocultas Bell [3] anunciou, em formato de teorema, algumas desigualdades que deveriam ser satisfeitas por qualquer teoria local. Vamos considerar um sistema de dois componentes e um par de instrumentos de medidas que podem apresentar como resultados somente dois valores para cada um dos componentes do sistema. Os resultados possíveis são ± 1 . Vamos denotar por \mathbf{a} e \mathbf{b} os parâmetros controláveis do primeiro e do segundo aparelho de medida respectivamente. Vamos denotar por λ os parâmetros incontroláveis dos aparelhos de medida. Assim, vamos definir uma função $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$, que determina os resultados das medidas da primeira partícula. De maneira análoga definimos um função $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$ para a segunda partícula.

Do princípio de localidade obtemos que funções do tipo $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)$ e $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)$ não são consideradas e que as medidas de $A(\mathbf{a}, \lambda)$ são independentes de $B(\mathbf{b}, \lambda)$. Contudo, os parâmetros incontroláveis λ estão submetidos a mesma distribuição de probabilidades $\rho(\lambda)$ se fixarmos os aparelhos de medidas. Dessa maneira é possível definir uma função de correlação

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \quad (1.13)$$

onde $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$, $\rho(\lambda) \geq 0$, $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$ e $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$.

Consideremos agora dois conjuntos de parâmetros controláveis $(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ para o primeiro instrumento e $(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$ para o segundo, podemos escrever

$$\begin{aligned} C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}') &= \int [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)] \rho(\lambda)d\lambda \\ &= \int [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) \{1 - A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)\}] \rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad - \int [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda) \{1 - A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)\}] \rho(\lambda)d\lambda. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e lembrando que $|A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)| = 1$, podemos escrever

$$D_b = |C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}) \leq 2. \quad (1.14)$$

Esta desigualdade obtida por Bell não utilizou nenhum pressuposto quântico de tal modo que não é possível afirmar que a mecânica quântica seja compatível com essa relação. Vamos verificar a violação desta desigualdade de Bell para um estado puro.

Vamos supor que as funções de correlação sejam dadas por

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \vec{a} \cdot \hat{\sigma}^A \otimes \vec{b} \cdot \hat{\sigma}^B \rangle, \quad (1.15)$$

onde $\vec{a} \cdot \hat{\sigma}^A = a_x \hat{\sigma}_x^A + a_y \hat{\sigma}_y^A + a_z \hat{\sigma}_z^A$, com $\hat{\sigma}_i$ as matrizes de Pauli e $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Considere um estado bipartite escrito na decomposição de Schmidt

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|01\rangle + \sqrt{1-p}|10\rangle. \quad (1.16)$$

Sabendo que as matrizes de Pauli são dadas por $\hat{\sigma}_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$, $\hat{\sigma}_y = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|)$ e $\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$, temos

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -a_z b_z + 2\sqrt{p(1-p)}(a_x b_x + a_y b_y),$$

onde usamos o fato de $|\psi\rangle$ ser normalizado. Definindo $\vec{a} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ e $\vec{b} = (\sin \beta, 0, \cos \beta)$ obtemos

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos \alpha \cos \beta + 2\sqrt{p(1-p)} \sin \alpha \sin \beta. \quad (1.17)$$

Expressões análogas podem ser obtidas para as outras funções de correlação. Se fixarmos agora $\alpha = 0$ e $\alpha' = \pi/2$, $\cos \beta = -\cos \beta' > 0$, $\sin \beta = \sin \beta' > 0$, o lado direito da desigualdade (1.14) é dado por

$$D_\psi(p) = |C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + C(\mathbf{a}', \mathbf{b}) = 2 \cos \beta + 4\sqrt{p(1-p)} \sin \beta. \quad (1.18)$$

É então factível que calculemos o valor de β para o qual a função acima seja máxima. Isso acontece quando temos $\beta = \arctan 2\sqrt{p(1-p)}$ e fazendo as devidas manipulações matemáticas obtemos

$$D_\psi(p) = 2\sqrt{1 + 4p(1-p)}. \quad (1.19)$$

Podemos perceber na figura (1.1) que para o estado puro (1.16) sempre ocorre violação da desigualdade de Bell para qualquer valor de $p \in]0, 1[$.

Vejam agora a situação de um estado de mistura dado por

$$\sigma = p|\psi_+\rangle\langle\psi_+| + (1-p)|00\rangle\langle 00|, \quad (1.20)$$

onde

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \quad (1.21)$$

Este estado é uma interpolação entre os estados puros $|00\rangle$ ($p = 0$) e $|\psi_+\rangle$ ($p = 1$). Realizando procedimento análogo e considerando os mesmos parâmetros anteriores obtemos

$$D_\sigma(p) = 2p \sin \beta + 2\sqrt{(1-2p)^2} \cos \beta. \quad (1.22)$$

O valor de β que maximiza a função $D_\sigma(p)$ é $\beta = \arctan \frac{p}{\sqrt{(1-2p)^2}}$. Fazendo então as devidas substituições obtemos

$$D_\sigma(p) = 2 \sqrt{p^2 + (1-2p)^2}. \quad (1.23)$$

Verificamos que $D_\sigma(p=1) = D_\psi(p=1/2) = 2\sqrt{2}$ como esperado. Na figura (1.1) podemos verificar que para o estado (1.20) somente para $p > 0.8$ ocorre violação da desigualdade de Bell.

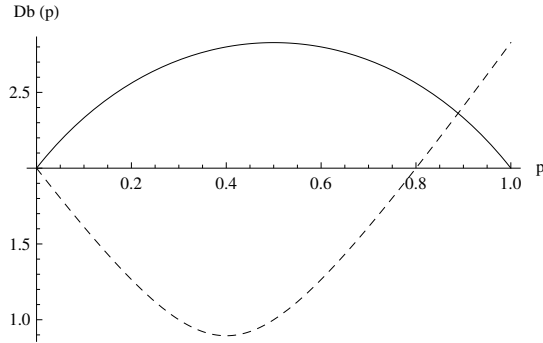


Figura 1.1: Violação da desigualdade de Bell para os estados (1.16) (linha contínua) e (1.20) (linha tracejada).

Esses resultados demonstram que as desigualdades de Bell não são suficientes para estabelecer a identificação de emaranhamento. Somente para estados puros as desigualdades de Bell são violadas. Para um estado σ dado por (1.20) é notório que alguma informação de emaranhamento existe para $\forall p \neq 0$, contudo não se observa nenhuma violação da função (1.23) para $p \leq 0.8$. Devido a este resultado outros critérios para identificação de emaranhamento são necessários.

1.3 Identificando Emaranhamento

Procedimentos operacionais para a identificação de estados emaranhados são construídos a partir de propriedades que são satisfeitas para estados separáveis. Se essas propriedades são violadas para um estado arbitrário ρ dizemos que esse estado é um estado emaranhado. Em alguns casos estes procedimentos são inconclusivos, ou seja quando essas propriedades são satisfeitas não podemos afirmar, pelo menos em princípio, se este estado é separável ou não. Vamos nos restringir nessa tese ao estudo de emaranhamento para sistemas bipartite.

1.3.1 Critério de Peres-Horodecki

Peres [17] apresentou um critério para identificação de emaranhamento baseando-se em uma condição necessária para toda matriz densidade de estados separáveis. Este critério parte da observação de que se ρ é uma matriz densidade que descreve um estado físico de um sistema, então ρ é uma matriz positiva semidefinida. Uma matriz é dita positiva semidefinida quando todos os seus autovalores são não negativos. Dessa maneira pode-se demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja ρ uma matriz densidade de um estado separável dada por (1.12). O operador obtido através da transposição parcial da matriz densidade ρ é também positivo semidefinido.*

Para demonstrar o teorema acima vamos considerar algumas definições relevantes. Seja a operação de transposição $\mathcal{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, considere \mathcal{O}_{ij} elemento de uma matriz $\mathcal{O} \in \mathcal{V}$. A operação de transposição é dada por $\mathcal{T}\mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_{ji}$. Com esse resultado podemos anunciar o seguinte Lema:

Lema 1 *Sejam \hat{A} e \hat{B} operadores e seja \mathcal{T} um operador de transposição. Dessa maneira temos $\mathcal{T}(\hat{A}\hat{B}) = \mathcal{T}(\hat{B})\mathcal{T}(\hat{A})$.*

A demonstração desse Lema encontra-se em diversas referências de álgebra linear de tal maneira que não será apresentada nesse texto. Vamos nos atentar para um outro Lema que é mais relevante para o nosso propósito de enunciar o critério de Peres.

Lema 2 *Se \mathcal{O} é um operador hermitiano positivo semidefinido e \mathcal{T} é o operador transposição, então o operador $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ é também um operador positivo semidefinido.*

Vejamos a demonstração deste lema. Seja \mathcal{U} a transformação unitária que diagonaliza o operador positivo semidefinido \mathcal{O} . Então o operador diagonal $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{U}\mathcal{O}\mathcal{U}^\dagger$ é um operador positivo semidefinido pois transformações unitárias não alteram os autovalores de um operador. Pela definição da operação de transposição temos que o operador $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{O}})$ é também positivo semidefinido. Do lema (1) obtemos que $\mathcal{T}\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{T}(\mathcal{U}\mathcal{O}\mathcal{U}^\dagger) = \mathcal{T}(\mathcal{U}^\dagger)\mathcal{T}(\mathcal{O})\mathcal{T}(\mathcal{U})$ e $\mathcal{T}(\mathcal{U}^\dagger)\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{T}(\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger) = \mathcal{I}$. Ou seja, o operador $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ é uma transformação unitária e portanto não altera os autovalores do operador $\mathcal{T}(\mathcal{O})$. Como o operador $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{O}})$ é positivo semidefinido, então o operador $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ é também positivo semidefinido como queríamos demonstrar.

Baseando-se nas discussões anteriores Peres utilizou o conceito de *transposição parcial* aplicada a uma matriz densidade de um sistema bipartite dada por

$$\rho = \sum_{n,m,k,l} \rho_{nl,mk} |n, l\rangle \langle m, k|. \quad (1.24)$$

A matriz transposta parcial no sistema (B) é dada por

$$\rho^{T(B)} = \sum_{n,m,k,l} \rho_{nk,ml} |n, k\rangle \langle m, l|. \quad (1.25)$$

Ou seja, a transposição somente é realizada em uma parte do sistema. Aplicando essa operação em um estado separável obtêm-se

$$\rho^{T(B)} = \sum_{k=1}^N p_k (\rho_k^{(A)} \otimes \rho_k^{(B)T}). \quad (1.26)$$

Como $\rho_k^{(B)T}$ também representa estados do sistema (B), então $\rho^{T(B)}$ é também um estado acessível do sistema e portanto é uma matriz densidade positiva semidefinida. Baseando-se nessa condição o critério de Peres pode ser formulado da seguinte maneira:

Critério 1 (Peres) *Se a transposta parcial de uma matriz densidade ρ de um sistema bipartite não for positiva semidefinida, então o estado ρ é um estado emaranhado.*

Operacionalmente podemos afirmar que um estado é emaranhado quando a matriz parcialmente transposta apresenta um, e ao menos um, autovalor negativo. Peres conjecturou que este critério era uma condição necessária e suficiente para a identificação de emaranhamento. Contudo Horodecki *et. al.* [18] demonstraram que somente para sistemas (2×2) e (2×3) esse critério é uma condição necessária e suficiente, para dimensões mais altas é somente uma condição necessária. Vamos brevemente discutir os resultados obtidos na referência [18].

Seja um sistema bipartite onde o espaço de Hilbert é dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Sejam $\mathcal{B}_1(\mathcal{H}_1)$ e $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_2)$ os conjuntos de operadores que atuam em \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 respectivamente. Os conjuntos $\mathcal{B}_i(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$, constituem um espaço vetorial de Hilbert-Schmidt, cujo o produto interno é dado por $(A, B) = \text{Tr}(B^\dagger A)$. Vamos considerar dois espaços de operadores denotados por \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 . O espaço dos mapas lineares que levam operadores de \mathcal{A}_1 em \mathcal{A}_2 denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$. Dizemos que um mapa é positivo se, e somente se, dado um operador positivo semidefinido $\hat{A} \in \mathcal{A}_1$ o operador $\Lambda(\hat{A}) \in \mathcal{A}_2$ for também positivo semidefinido. Por fim, um mapeamento Λ é dito ser *completamente positivo* se o mapeamento induzido

$$\Lambda_n = \Lambda \otimes I : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{M}_n, \quad (1.27)$$

é positivo para todo n . \mathcal{M}_n é o conjunto de todas as matrizes complexas de ordem $n \times n$ e I é o mapeamento identidade.

É notório que o produto de um mapa completamente positivo com o mapa identidade mapeia operadores positivos em operadores positivos. Dessa maneira é perceptível que mapas completamente positivos são insensíveis a inseparabilidade de uma matriz densidade. Não obstante, o produto de um mapa positivo com o mapa identidade aplicado em uma matriz densidade separável resulta em uma matriz densidade positiva, ou seja, $(\Lambda \otimes I)(\rho_1 \otimes \rho_2) = \Lambda(\rho_1) \otimes \rho_2 \geq 0$. Essa propriedade para estados separáveis é essencial para a construção do critério de separabilidade de Peres. De fato podemos afirmar que se uma matriz densidade ρ não for separável, então existe ao menos um mapa positivo Λ tal que, $(\Lambda \otimes I)(\rho)$ não é positivo. Objetivando encontrar estes mapas positivos que levam matrizes inseparáveis em operadores não positivos semidefinidos vamos anunciar o seguinte Lema.

Lema 3 *Seja qualquer estado inseparável $\rho \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_2)$, existe um operador Hermítico \hat{O} tal que*

$$\text{Tr}(\hat{O}\rho) < 0 \quad e \quad \text{Tr}(\hat{O}\sigma) \geq 0 \quad (1.28)$$

para qualquer σ separável.

Vejamos a prova deste lema. Da definição do conjunto de estados separáveis segue que eles são completos e fechados em $\mathcal{B}_1(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_2)$. Vamos agora utilizar o teorema de Hahn-Banach que pode ser formulado como segue:

Teorema 2 (Hahn-Banach) *Se W_1 e W_2 são conjuntos convexos e fechados em um espaço real de Banach e se um deles é compacto, então existe um funcional contínuo f e um $\alpha \in \mathfrak{R}$ tal que para todo par $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ nos temos*

$$f(w_1) < \alpha \leq f(w_2). \quad (1.29)$$

Esse teorema afirma que um conjunto convexo fechado em um espaço de Banach é completamente descrito por desigualdades que envolvem funcionais contínuos. Dessa maneira podemos afirmar que existe um funcional real g sobre um espaço real \mathcal{A} gerado por operadores que pertencem a $\mathcal{B}_1(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_2)$ tal que

$$g(\rho) < \beta \leq g(\sigma), \quad (1.30)$$

para todos os estados separáveis σ . Sendo \mathcal{A} um espaço de Hilbert real o funcional g pode ser representado como sendo

$$g(\rho) = \text{Tr}(\rho \hat{A}), \quad (1.31)$$

onde $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Considerando que para quaisquer estados ρ e $\hat{\sigma}$, temos que $\text{Tr}(\beta \hat{I} \rho) = \text{Tr}(\beta \hat{I} \hat{\sigma}) = \beta$, fazendo

$$\hat{A} = \hat{O} + \beta \hat{I}, \quad (1.32)$$

a desigualdade (1.30) resulta em

$$\text{Tr}(\rho \hat{O}) < 0 \leq \text{Tr}(\sigma \hat{O}), \quad (1.33)$$

demonstrando o lema. Provado o Lema (3) obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3 *Um estado $\rho \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}_2(\mathcal{H}_2)$ é separável se, e somente se,*

$$\text{Tr}(\rho \hat{A}) \geq 0 \quad (1.34)$$

para qualquer operador \hat{A} que satisfaça $\text{Tr}(\hat{A} \hat{P} \otimes \hat{Q}) \geq 0$, onde os operadores \hat{P} e \hat{Q} são projetores que atuam em $\mathcal{B}_1(\mathcal{H}_1)$ e $\mathcal{B}_2(\mathcal{H}_2)$ respectivamente.

A comprovação deste teorema pode ser obtida aplicando o Lema (3). Vamos supor um estado ρ não separável e que satisfaça a condição (1.34) para qualquer A , tal que $\text{Tr}(\hat{A} \hat{P} \otimes \hat{Q}) \geq 0$. Do Lema (3) temos que existe um operador \hat{A} tal que $\text{Tr}(\hat{A} \rho) < 0$ e que $\text{Tr}(\hat{A} \hat{\sigma}) \geq 0$, para qualquer operador separável σ . Como o produto de projetores $\hat{P} \otimes \hat{Q}$ pode ser um estado separável, a menos de um fator de normalização, existe um operador A tal que $\text{Tr}(\hat{A} \hat{P} \otimes \hat{Q}) \geq 0$ e $\text{Tr}(\hat{A} \rho) < 0$. Este resultado contradiz a hipótese de que sendo ρ inseparável $\text{Tr}(\hat{A} \rho) \geq 0$ para qualquer A que satisfaça $\text{Tr}(\hat{A} \hat{P} \otimes \hat{Q}) \geq 0$. Logo ρ é um estado separável.

Horodecki *et. al.* traduziram o teorema (3) para a linguagem de mapas positivos. Para isto usaram o isomorfismo entre mapas positivos e operadores positivos. Seja \mathcal{A} o conjunto de operadores que atuam no espaço de Hilbert \mathcal{H} e considere $A_i \in \mathcal{A}$ uma base. Pode-se definir um mapa isomórfico $\mathcal{S} : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, onde $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é o conjunto formado por operadores que atuam no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ e Λ são mapas lineares $\Lambda : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$, como sendo

$$\mathcal{S}(\Lambda) = (I \otimes \Lambda) \sum_i A_i^\dagger \otimes A_i \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2. \quad (1.35)$$

Com base neste isomorfismo é possível enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4 *Seja uma matriz densidade $\rho \in \mathcal{A}_A \otimes \mathcal{A}_B$. Então ρ é separável se, e somente se, para qualquer mapa $\Lambda : \mathcal{A}_A \rightarrow \mathcal{A}_B$ positivo o operador $(I \otimes \Lambda)\rho$ é positivo.*

Utilizando este teorema Horodecki *et. al.* demonstraram o seguinte teorema:

Teorema 5 *Um estado ρ que atua em $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^2$ ou $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^3$ é separável se, e somente se, sua matriz parcialmente transposta for um operador positivo definido.*

A prova de que se ρ é um estado separável, então a sua matriz parcialmente transposta é positiva foi demonstrada por Peres. Para demonstrar que se a transposta parcial de uma matriz densidade bipartite for positiva o estado é separável Horodecki *et. al.* usaram os resultados obtidos por Woronowicz [19] de que qualquer mapa positivo $\Lambda : \mathcal{A}_A \rightarrow \mathcal{A}_B$ pode ser escrito como sendo

$$\Lambda = \Lambda_1^{CP} + \Lambda_2^{CP}T, \quad (1.36)$$

onde Λ_i^{CP} são mapas completamente positivos e T é o operador de transposição, desde que $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathcal{C}^2$ ou $\mathcal{H}_A = \mathcal{C}^3$ e $\mathcal{H}_B = \mathcal{C}^2$.

Com este resultado verifica-se que o critério de Peres-Horodecki é uma condição necessária e suficiente para identificação de emaranhamento somente para estados bipartite (2×2) ou (2×3) . Para os demais casos é somente uma condição necessária. Para ilustrar a operacionalidade deste critério vamos analisar o mesmo estado de mistura que discutimos quando tratamos da identidade de Bell.

Exemplo 1 *Considere então um estado de um sistema bipartite dado por*

$$\sigma = p |\psi_+\rangle \langle \psi_+| + (1-p) |00\rangle \langle 00|, \quad (1.37)$$

onde $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Para esse estado obtemos a seguinte matriz densidade

$$\rho = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & \frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & \frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

onde estamos considerando a seguinte base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. A matriz parcialmente transposta é dada então por

$$\rho^{2T} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & \frac{1}{2}p \\ 0 & \frac{1}{2}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}p & 0 \\ \frac{1}{2}p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Os autovalores não nulos dessa matriz são

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left\{ (1-p) + \sqrt{p^2 + (1-p)^2} \right\}, \quad (1.40)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ (1-p) - \sqrt{p^2 + (1-p)^2} \right\}. \quad (1.41)$$

O autovalor λ_1 é sempre positivo e o autovalor $\lambda_2 < 0$ para todo valor de $p < 1$ como é possível observar no gráfico da figura (1.2). Ou seja, pelo critério de Peres-Horodecki o estado (1.37) é emaranhado a menos para $p = 0$, quando $|\psi\rangle$ se torna o estado puro $|00\rangle \langle 00|$.

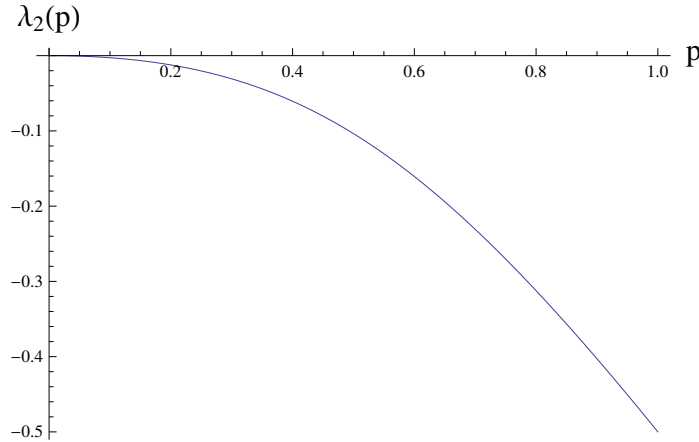


Figura 1.2: Autovalor negativo em função do parâmetro da superposição de um estado de Bell com o vácuo.

O critério de Peres-Horodecki apesar de ser operacional não possui uma interpretação física, diferente das violações das desigualdades de Bell. Vamos agora apresentar um outro critério que é uma extensão para sistemas de variáveis contínuas do critério da positividade da transposta parcial.

1.3.2 Critério de Simon

O ponto central do trabalho do Simon [20] foi demonstrar que a operação de transposição parcial adquire no caso contínuo um interpretação geométrica associada a uma *reflexão*

especular na função de Wigner no espaço de fase. A separabilidade leva a uma restrição nos segundos momentos que é mais forte do que as relações de incerteza usuais. Com o uso dessa restrição Simon demonstra que o critério de Peres-Horodecki no caso contínuo é uma condição necessária e suficiente para todos os estados gaussianos bipartite.

Vamos analisar inicialmente o comportamento da função de Wigner para a matriz densidade parcialmente transposta. Considere uma matriz densidade de um estado bipartite separável cuja função de Wigner é dada por

$$W(q_1, p_1, q_2, p_2) = \pi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 dq'_2 \langle q_1 - q'_1, q_2 - q'_2 | \rho | q_1 + q'_1, q_2 + q'_2 \rangle \times \exp [2i(q'_1 p_1 + q'_2 p_2)]. \quad (1.42)$$

Como ρ é um estado separável, podemos substituí-lo na equação acima pela matriz densidade dada por (1.12), e assim reescrevendo a função de Wigner temos

$$W(q_1, p_1, q_2, p_2) = \pi^{-2} \sum_{k=1}^N p_k \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 \langle q_1 - q'_1 | \rho_k^{(1)} | q_1 + q'_1 \rangle \exp (2iq'_1 p_1) \times \int_{-\infty}^{\infty} dq'_2 \langle q_2 - q'_2 | \rho_k^{(2)} | q_2 + q'_2 \rangle \exp (2iq'_2 p_2). \quad (1.43)$$

Fazendo a transposição parcial em relação ao sistema (2) na Eq. (1.43) e realizando uma substituição de variável $q'_2 = -q''_2$ nos obtemos

$$W^{T_2}(q_1, p_1, q_2, p_2) = W(q_1, p_1, q_2, -p_2). \quad (1.44)$$

Esse resultado demonstra que a transposição parcial leva a uma inversão temporal que atua somente em uma variável *momentum*. Esse comportamento da função de Wigner leva a uma questão interessante. Quais são as implicações da reflexão especular no *momentum* devido a transposição parcial, nas relações de incerteza de Heisenberg?

Objetivando escrever uma desigualdade a partir das relações de incerteza de Heisenberg vamos introduzir o vetor $\hat{\xi}$ dado por

$$\hat{\xi} = (\hat{q}_1 \hat{p}_1 \hat{q}_2 \hat{p}_2). \quad (1.45)$$

Com essa notação podemos escrever as relações de comutação canônicas entre q_i e p_j de maneira compacta como sendo

$$[\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta] = i\Omega_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \quad (1.46)$$

onde a matriz Ω é uma matriz (4×4) dada por

$$\Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Vamos introduzir também um outro operador dado por $\Delta\hat{\xi}_\alpha = \hat{\xi}_\alpha - \langle \hat{\xi}_\alpha \rangle$, onde $\langle \hat{\xi}_\alpha \rangle = \text{Tr}(\hat{\xi}_\alpha \rho)$. Vamos então definir uma matriz V , dita matriz de variância ou matriz de correlação, cujos elementos são dados por

$$V_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \langle \{ \Delta\hat{\xi}_\alpha, \Delta\hat{\xi}_\beta \} \rangle = \int d^4\xi \Delta\xi_\alpha \Delta\xi_\beta W(\xi), \quad (1.48)$$

com $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ a operação realizada pelo anticomutador.

A matriz de variância V é uma matriz (4×4) , real ($V = V^*$), simétrica ($V = V^T$) e positiva semidefinida $V \geq 0$, de tal maneira que podemos aplicar o teorema de Williamson [21].

Teorema 6 (Williamson) *Seja V uma matriz quadrática de ordem 4, real, simétrica e positiva semidefinida. Para $\forall V, \exists S \in S_p(4, R)$ tal que $SVS^T = V'$ onde $V' = \text{diag}(x_1, x_1, x_2, x_2)$.*

$S_p(4, R)$ é um grupo formado pelas matrizes simpléticas de dimensão 4. Vamos então escrever a matriz de variância na sua forma diagonal que é dada por

$$V' = \begin{pmatrix} \Delta^2 q'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 p'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^2 q'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^2 p'_2 \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Considerando o fato de que transformações simpléticas foram utilizadas para $q \rightarrow q'$, sabemos que essas transformações não alteram as relações de comutação e portanto temos que as relações de incerteza de Heisenberg são dadas por

$$\Delta^2 q'_i \Delta^2 p'_j \geq \frac{1}{4} \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.50)$$

Pelo teorema de Williamson temos $\Delta^2 q'_1 = \Delta^2 p'_1 = x_1$ e $\Delta^2 q'_2 = \Delta^2 p'_2 = x_2$, logo $x_i \geq 1/2$, $i = 1, 2$. Vejamos então agora a matriz

$$V' + (i/2)\Omega = \begin{pmatrix} x_1 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & x_2 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

onde Ω é dada por (1.47). Os autovalores dessa matriz são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= x_1 - \frac{1}{2}, & \lambda_2 &= x_1 + \frac{1}{2}, \\ \lambda_3 &= x_2 - \frac{1}{2}, & \lambda_4 &= x_2 + \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{1.52}$$

Como $x_i \geq 1/2$, $\forall i = 1, 2$ então todos os autovalores são positivos e portanto a matriz $V' + (i/2)\Omega$ é uma matriz positiva semidefinida. Por definição as transformações simpléticas não alteram as relações de comutação, ou seja $S\Omega S^T = \Omega$, então

$$V' + \frac{i}{2}\Omega = S(V + \frac{i}{2}\Omega)S^T \geq 0 \Rightarrow V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0.\tag{1.53}$$

Assim podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 7 *Seja ρ um estado bipartite contínuo e V sua matriz de variância, então obtemos como consequência direta do princípio de incerteza de Heisenberg a seguinte desigualdade:*

$$V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0.\tag{1.54}$$

Essa desigualdade deve ser satisfeita para qualquer estado bipartite contínuo. Vejamos agora qual restrição é válida para os casos de estados separáveis.

Como vimos anteriormente uma transposição parcial na matriz densidade de um estado separável realiza sobre a função de Wigner uma reflexão especular $W(\xi) \rightarrow W(\Lambda\xi)$ com $\Lambda = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$. Dessa maneira os elementos da matriz de variância calculada com a função de Wigner $W(\Lambda\xi)$ são dados por

$$\tilde{V}_{\mu,\nu} = \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \Delta\xi_\mu \Delta\xi_\nu W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\xi_4).\tag{1.55}$$

Fazendo a substituição de variável $\xi_4 = -\xi_4$ temos

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\mu,\nu} &= \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \sum_{\mu'} \Lambda_{\mu,\mu'} \Delta\xi_{\mu'} \sum_{\nu'} \Lambda_{\nu,\nu'} \Delta\xi_{\nu'} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ &= \sum_{\mu',\nu'} \Lambda_{\mu,\mu'} V_{\mu',\nu'} \Lambda_{\nu',\nu},\end{aligned}\tag{1.56}$$

o que implica em

$$\tilde{V} = \Lambda V \Lambda.\tag{1.57}$$

E considerando que $\Lambda^2 = I$, temos também

$$V = \Lambda \tilde{V} \Lambda.\tag{1.58}$$

Com esses resultados e considerando que ρ é um estado separável, então $W(\Lambda\xi)$ é uma função de Wigner que representa o estado ρ^{2T} . Portanto a matriz de variância calculada a partir de $W(\Lambda\xi)$ também deve satisfazer as relações de incerteza de Heisenberg (1.54) e assim obtemos

$$\tilde{V} + \frac{i}{2}\Omega \geq 0. \quad (1.59)$$

Aplicando a transformação Λ em (1.59) obtemos

$$V + \frac{i}{2}\tilde{\Omega} \geq 0, \quad (1.60)$$

onde

$$\tilde{\Omega} = \Lambda\Omega\Lambda = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Perceba que a matriz $\tilde{\Omega}$ difere de Ω por um sinal menos em uma matriz J . A relação (1.54) deve ser satisfeita para todo estado bipartite enquanto que (1.60) é válida para estados separáveis. A desigualdade (1.60) representa uma condição necessária e operacional de separabilidade no sentido que se ρ é um estado de um sistema bipartite, encontrando sua matriz de variância e somando a ela a matriz $(i/2)\tilde{\Omega}$, calculamos seus autovalores e se um deles for negativo então o estado ρ não é separável. Contudo, caso encontremos todos os autovalores positivos não podemos afirmar que o estado seja separável. Isso se deve ao fato desta não ser uma condição suficiente de separabilidade.

Simon e Sudarshan [22] demonstraram que existe uma relação de equivalência entre uma transformação simplética S aplicada nas coordenadas ξ com uma transformação unitária em ρ . Em outras palavras, se $\hat{\xi}' \rightarrow S\hat{\xi}$, então $\rho \rightarrow \hat{U}\rho\hat{U}^\dagger$. Além disso demonstraram também que se ρ sofre uma transformação unitária \hat{U} devido a uma transformação simplética S , a função de Wigner se transforma em $W(\xi) \rightarrow W(S^{-1}\xi)$. Vejamos como esse resultado interfere na matriz de variância.

Sejam os elementos de V dados por

$$V'_{\mu,\nu} = \int d^4\xi \Delta\xi_\mu \Delta\xi_\nu W(S^{-1}\xi). \quad (1.62)$$

Aplicando agora a transformação simplética em ξ , temos $\eta \rightarrow S\xi$ e

$$V'_{\mu,\nu} = \int d^4\eta |J(\eta, \xi)| \sum_{\mu',\nu'} S_{\mu,\mu'} \Delta\eta_{\mu'} S_{\nu,\nu'} \Delta\eta_{\nu'} W(\eta), \quad (1.63)$$

onde $J(\eta, \xi)$ é a matriz Jacobiana. É possível demonstrar que $J(\eta, \xi) = S$ e portanto o módulo do determinante da matriz Jacobiana é igual a unidade. Assim a matriz de variância

pode ser reescrita como sendo

$$V'_{\mu,\nu} = \sum_{\mu',\nu'} S_{\mu,\mu'} V_{\mu',\nu'} S_{\nu',\nu}^T, \quad (1.64)$$

onde $V_{\mu',\nu'} = \int d^4\eta \Delta\eta_{\mu'} \Delta\eta_{\nu'} W(\eta)$. Essa relação demonstra que

$$V \rightarrow V' = SVS^T. \quad (1.65)$$

Como visto anteriormente a equação (1.54) é invariante por transformações simpléticas, pois $S\Omega S^T = \Omega$, e a relação (1.60) é invariante por transformações simpléticas locais

$$S_{local} \in S_p(2, R) \otimes S_p(2, R) \subset S_p(4, R). \quad (1.66)$$

Em notação matricial temos

$$S_{local} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

e $S_1 JS_1^T = S_2 JS_2^T = J$. Por transformações simpléticas locais podemos escrever qualquer matriz de variância em uma forma especial

$$V_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Para demonstrar essa afirmação vamos considerar a matriz de variância escrita em blocos

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Vamos implementar em V duas transformações simpléticas locais $S = S_1 \otimes S_2$ e $M = M_1 \otimes M_2$. Aplicando inicialmente S temos

$$V \rightarrow V' = \begin{pmatrix} S_1 A S_1^T & S_1 C' S_2^T \\ S_2 C^T S_1^T & S_2 B S_2^T \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Podemos escolher S de maneira apropriada que $S_1 A S_1^T$ e $S_2 B S_2^T$ fiquem diagonais

$$S_1 A S_1^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad S_2 B S_2^T = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Devemos agora aplicar a transformação M , impondo a restrição de que as matrizes M_1 e M_2 sejam ortogonais, para garantir a a invariância das matrizes $S_1AS_1^T$ e $S_2BS_2^T$. Utilizando portanto as matrizes

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sin \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sin \psi & -\cos \psi \\ \cos \psi & \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

e fazendo os elementos fora da diagonal nulos, podemos demonstrar que é possível satisfazer as condições impostas fazendo

$$\tan 2\psi = \frac{2(c'_{11}c'_{12} + c'_{22}c'_{21})}{(c'_{11})^2 + (c'_{21})^2 - (c'_{12})^2 - (c'_{22})^2}. \quad (1.73)$$

Dessa maneira qualquer matriz de variância V pode ser transformada, via transformações simpléticas locais, na matriz V_0 .

Se utilizarmos portanto a matriz de variância na sua forma especial (1.68) e realizarmos o calculo do determinante da matriz $V_0 + (i/2)\Omega$, resulta da desigualdade (1.54) a seguinte relação

$$a^2b^2 + \left(\frac{1}{4} - c_1c_2\right)^2 - ab(c_1^2 + c_2^2) - \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq 0. \quad (1.74)$$

É perceptível que são válidas as seguintes relações

$$Det(A) = a^2, \quad Det(B) = b^2 \quad e \quad Det(C) = c_1c_2. \quad (1.75)$$

Vamos demonstrar que o termo $ab(c_1^2 + c_2^2)$ é também invariante por transformações simpléticas locais. Seja a matriz $K' = (S_1AS_1^T)J(S_1CS_2^T)J(S_2BS_2^T)J(S_2C^TS_1^T)J$. Usando a propriedade cíclica do traço e lembrando que S_1 e S_1^T são transformações simpléticas é possível demonstrar que

$$\text{Tr}((S_1AS_1^T)J(S_1CS_2^T)J(S_2BS_2^T)J(S_2C^TS_1^T)J) = \text{Tr}(AJCJBJC^TJ). \quad (1.76)$$

Considerando V_0 temos que

$$\text{Tr}(AJCJBJC^TJ) = ab(c_1^2 + c_2^2). \quad (1.77)$$

Dessa maneira podemos escrever a relação (1.74) como sendo

$$DetADetB + \left(\frac{1}{4} - DetC\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^TJ) - \frac{1}{4}(DetA + DetB) \geq 0. \quad (1.78)$$

Essa condição é valida para todo estado bipartite. Lembremos que ela foi derivada da relação (1.54) que é obtida diretamente das relações de incerteza de Heisenberg. Realizando

um procedimento análogo utilizando a relação (1.60), que deve ser satisfeita somente para estados separáveis Simon [20] obteve a seguinte relação

$$DetADetB + \left(\frac{1}{4} + DetC\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) - \frac{1}{4}(DetA + DetB) \geq 0. \quad (1.79)$$

Perceba que a diferença entre as relações (1.78) e (1.79) é um sinal positivo na frente do $DetC$ no segundo termo do lado esquerdo da desigualdade. Com esse resultado Simon enunciou o seguinte teorema:

Teorema 8 *Seja ρ um estado separável e contínuo de um sistema bipartite. Seja V a matriz de variância dada por*

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Então a desigualdade

$$DetADetB + \left(\frac{1}{4} - |DetC|\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) - \frac{1}{4}(DetA + DetB) \geq 0, \quad (1.81)$$

deve ser satisfeita, onde esta é uma consequência direta das relações de incerteza de Heisenberg e da reflexão especular do momentum da função de Wigner de ρ , devido a operação de transposição parcial.

Esse teorema garante uma condição necessária para separabilidade. Simon também demonstrou que para estados dito gaussianos essa condição torna-se também suficiente.

1.3.3 Critério de Shchukin e Vogel

Como dito na seção anterior a condição de separabilidade de Simon é necessária para que um estado ρ seja separável. Em outras palavras, se um estado é separável, então a desigualdade (1.81) é satisfeita. Isso não implica que quando um estado não for separável a relação seja violada. Somente para estados gaussianos ela se torna uma condição suficiente. Essa dificuldade apresentada pelo critério do Simon motivou Shchukin e Vogel [23] a proporem uma hierarquia de condições sobre a negatividade da matriz transposta parcial, que se caracteriza como condições necessárias e suficientes de separabilidade.

Vamos relembrar a definição de um estado separável para um sistema quântico bipartite. Um estado ρ é dito ser separável se ele é uma combinação convexa de estados fatoráveis, ou seja,

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \rho_1^n \otimes \rho_2^n, \quad (1.82)$$

onde p_n são números não negativos tais que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. Como visto na seção (1.3.1) o critério de Peres-Horodecki é baseado na não negatividade da matriz densidade parcialmente transposta de um estado. Essa mesma propriedade foi utilizada por Shchukin e Vogel para derivar a sua hierarquia de condições para a separabilidade de um estado quântico bipartite. O ponto de partida é utilizar um operador arbitrário \hat{f} para redefinir o que são operadores positivos semidefinidos e assim reescrever a condição de Peres-Horodecki.

Por definição um operador \hat{A} é dito ser não-negativo se

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \geq 0, \quad \forall | \psi \rangle \in \mathcal{H}. \quad (1.83)$$

Sabe-se também que qualquer operador projeção $| \psi \rangle \langle \psi |$ pode ser representado por $\hat{f}^\dagger \hat{f}$, desde que

$$\hat{f} = | 0 \rangle \langle \psi |, \quad (1.84)$$

onde $| 0 \rangle$ representa um estado de vácuo. Considerando sistemas bipartite vamos usar $| 00 \rangle$ como notação para representar o estado fundamental. Em geral um estado puro pode ser obtido a partir da aplicação de uma função de operadores no vácuo $\hat{g}^\dagger | 00 \rangle$, onde $\hat{g} = \hat{g}(\hat{a}, \hat{b})$ e \hat{a} e \hat{b} operadores de aniquilação dos modos (1) e (2) respectivamente. Dessa maneira um operador \hat{f} pode ser escrito como

$$\hat{f} = | 00 \rangle \langle 00 | \hat{g}, \quad (1.85)$$

onde usamos a relação (1.84).

Vamos agora demonstrar uma relação sobre o operador $| 00 \rangle \langle 00 |$ e os operadores número $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ e $\hat{b}^\dagger \hat{b}$. Inicialmente consideramos o problema para um único modo. Vamos supor um operador $\hat{F}(\theta)$ dado por

$$\hat{F}(\theta) = \exp(\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}) =: \exp[p(\theta) \hat{a}^\dagger \hat{a}] :, \quad (1.86)$$

onde $: \dots :$ representa o ordenamento normal. Calculando a derivada de $\hat{F}(\theta)$ em relação a θ temos

$$\frac{d\hat{F}(\theta)}{d\theta} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \exp(\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \frac{dp(\theta)}{d\theta} \hat{a}^\dagger : \exp(p(\theta) \hat{a}^\dagger \hat{a}) : \hat{a}, \quad (1.87)$$

onde o operador de aniquilação se encontra do lado direito do último termo devido ao ordenamento normal. Substituindo (1.86) no último termo da equação (1.87), juntamente com a relação $\hat{F}(-\theta)\hat{F}(\theta) = \hat{1}$ obtemos

$$\frac{d\hat{F}(\theta)}{d\theta} = \frac{dp(\theta)}{d\theta} \hat{a}^\dagger \exp(\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} \exp(-\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}) \exp(\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}). \quad (1.88)$$

Usando a relação

$$\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots, \quad (1.89)$$

encontramos que

$$\frac{dp(\theta)}{d\theta} \hat{a}^\dagger : \exp(p(\theta)\hat{a}^\dagger\hat{a}) : \hat{a} = \frac{dp(\theta)}{d\theta} \exp(-\theta)\hat{a}^\dagger\hat{a} \exp(\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (1.90)$$

onde utilizamos $[\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -\theta\hat{a}$. Comparando (1.90) com (1.87) verificamos que

$$\frac{dp(\theta)}{d\theta} = \exp(\theta). \quad (1.91)$$

Considerando que $p(0) = 0$, pela definição do operador (1.86) e fazendo a integral em (1.91) obtemos

$$p(\theta) = \exp(\theta) - 1. \quad (1.92)$$

Da definição do operador $\hat{F}(\theta)$ dada pela equação (1.86), verificamos que os estados número $|n\rangle$ são autoestados de $\hat{F}(\theta)$, com seus respectivos autovalores $\exp(\theta n)$. Usando esse fato juntamente com a relação de completude $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1$, obtemos a seguinte relação

$$: \exp\{[\exp(2\theta) - 1]\hat{a}^\dagger\hat{a}\} : = |0\rangle \langle 0| + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\theta k) |k\rangle \langle k| \exp(\theta k). \quad (1.93)$$

Assim considerando o limite de $\theta \rightarrow -\infty$ na relação acima encontramos que

$$: \exp(-\hat{a}^\dagger\hat{a}) : = |0\rangle \langle 0|. \quad (1.94)$$

E no caso de dois modos demonstra-se que

$$|00\rangle \langle 00| =: \exp(-\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b}) : \quad (1.95)$$

Esse resultado demonstra que o ordenamento normal do operador $|00\rangle \langle 00|$ sempre existe. Considerando o fato de que o operador \hat{g} é função dos operadores de aniquilação, percebemos que para o operador \hat{f} dado por (1.85), o ordenamento normal sempre existe. Considerando a definição de um operador positivo semidefinido (1.83) e as relações obtidas anteriormente para o operador \hat{f} , podemos enunciar o seguinte teorema [23]:

Teorema 9 *Um operador \hat{A} é positivo semidefinido, se e somente se, para qualquer operador \hat{f} cujo ordenamento normal existe, a desigualdade*

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{f}^\dagger\hat{f}) \geq 0 \quad (1.96)$$

é satisfeita.

Com esse teorema é simples anunciar o critério de Peres-Horodecki como segue:

Teorema 10 (Shchukin-Vogel) *Para qualquer estado separável ρ , a desigualdade*

$$\langle \hat{f}^\dagger \hat{f} \rangle^{PT} = \text{Tr} \left(\rho^{PT} \hat{f}^\dagger \hat{f} \right) \geq 0 \quad (1.97)$$

é satisfeita para qualquer operador \hat{f} cujo o ordenamento normal exista, sendo ρ^{PT} a matriz parcialmente transposta.

Vejamos agora como operacionalizar o enunciado de Shchukin-Vogel sobre o critério de Peres-Horodecki. O valor esperado de um operador \hat{A} é uma *forma sesquilinear* $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, onde V é o espaço dos operadores que atuam no espaço de Hilbert do sistema e \mathbb{C} o conjunto dos números complexos³. Considerando portanto um operador \hat{f} cujo ordenamento normal é dado por

$$\hat{f} = \sum_{n,m,k,l=0}^{\infty} C_{nm,kl} \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \hat{b}^{\dagger k} \hat{b}^l. \quad (1.98)$$

Dessa maneira a desigualdade (1.97) é dada por

$$\langle \hat{f}^\dagger \hat{f} \rangle^{PT} = \sum_{n,m,k,l,p,q,r,s=0}^{\infty} C_{pq,rs}^* C_{nm,kl} M_{pqrs,nmkl} \geq 0, \quad (1.99)$$

onde os momentos da transposta parcial são dados por

$$M_{pqrs,nmkl} = \langle \hat{a}^{\dagger q} \hat{a}^p \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \hat{b}^{\dagger s} \hat{b}^r \hat{b}^{\dagger k} \hat{b}^l \rangle^{PT}. \quad (1.100)$$

A equação (1.99) é portanto uma *forma quadrática* nos coeficientes $C_{nm,kl}$. O que permite utilizar o seguinte teorema:

Teorema 11 *Seja f uma forma sobre um espaço vetorial V e A uma matriz de f sobre uma base ordenada β . Então f é uma forma positiva se, e somente se, $A = A^*$ e todos os menores principais de A são positivos.*

A prova desse teorema pode também ser encontrada em diversos textos de álgebra linear⁴ de tal maneira que não será demonstrada nessa tese. Vamos nos atentar a definição dos menores principais usados no teorema.

³A definição de *forma sesquilinear* pode ser encontrada em **Kenneth Hoffman and Ray Kunze**, *Linear Algebra*, Second Edition, cap. IX, pag. 320, Ed. Prentice Hall.

⁴Recomendo a leitura do texto **Kenneth Hoffman and Ray Kunze**, *Linear Algebra*, Second Edition, cap. IX, pag. 320, Ed. Prentice Hall.

Definição 3 *Seja A uma matriz $n \times n$ sobre um campo F . Os menores principais de A são escalares $\Delta_k(A)$ definidos por*

$$\Delta_k(A) = \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1.101)$$

Para finalizar o critério precisamos escrever os menores principais explicitamente. Para isso é necessário ordenar de maneira adequada os momentos $M_{pqrs,nmkl}$. A proposta de Vogel *et. al.* foi utilizar a seguinte ordem: Para quaisquer dois multi-índices $\mathbf{u} = (n, m, k, l)$ e $\mathbf{v} = (p, q, r, s)$,

$$\mathbf{u} < \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} |\mathbf{u}| < |\mathbf{v}| \text{ ou} \\ |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| \text{ e } \mathbf{u} <' \mathbf{v} \end{cases}, \quad (1.102)$$

onde $|\mathbf{u}| = n + m + k + l$ e $\mathbf{u} <' \mathbf{v}$ significa que a primeira diferença não nula de $r - k$, $s - l$, $p - n$, $q - m$ é positiva. Desse maneira de ordenamento resulta que os primeiros momentos são dados por

$$1, \langle \hat{a} \rangle, \langle \hat{a}^\dagger \rangle, \langle \hat{b} \rangle, \langle \hat{b}^\dagger \rangle, \langle \hat{a}^2 \rangle, \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle, \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle, \langle \hat{a} \hat{b} \rangle, \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle, \langle \hat{b}^2 \rangle, \langle \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle, \langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \rangle, \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle, \langle \hat{b}^{\dagger 2} \rangle, \dots \quad (1.103)$$

Considerando que

$$\langle \hat{a}^{\dagger q} \hat{a}^p \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \hat{b}^{\dagger s} \hat{b}^r \hat{b}^{\dagger k} \hat{b}^l \rangle^{PT} = \langle \hat{a}^{\dagger q} \hat{a}^p \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \hat{b}^{\dagger l} \hat{b}^k \hat{b}^{\dagger r} \hat{b}^s \rangle, \quad (1.104)$$

podemos escrever os menores principais em função dos momentos calculados a partir do estado ρ , ou seja, sem a realização da transposição parcial. Diante desse resultado é possível então enunciar o seguinte teorema.

Teorema 12 *A matriz parcialmente transposta de um estado quântico bipartite é não negativa se, e somente se, todos os determinantes*

$$D_N = \begin{vmatrix} 1 & \langle \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{b} \rangle & \cdots \\ \langle \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle & \cdots \\ \langle \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^2 \rangle & \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b} \rangle & \cdots \\ \langle \hat{b} \rangle & \langle \hat{a} \hat{b} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle & \langle \hat{b}^2 \rangle & \cdots \\ \langle \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{b}^{\dagger 2} \rangle & \langle \hat{b} \hat{b}^\dagger \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (1.105)$$

forem não negativos. Ou seja, $\forall N : D_N \geq 0$.

De outra maneira podemos afirmar que *se existe um determinante D_N negativo, então a matriz parcialmente transposta é negativa*, ou seja

$$\exists N : D_N < 0, \quad (1.106)$$

e portanto o estado ρ é emaranhado.

Mais detalhes sobre a equivalência desse critério com outros estabelecidos na literatura podem ser encontrados na referência [23]. Vale ressaltar aqui que essa é uma condição necessária e suficiente para a identificação de emaranhamento para estados de osciladores harmônicos. Essa restrição se deve ao fato de que utilizamos para a demonstração da existência do ordenamento normal do operador \hat{f} , a álgebra associada a osciladores harmônicos quantizados. Outra questão importante deve-se ao fato de que realizando-se algumas restrições sobre o operador \hat{f} , que podem ser implementadas fazendo alguns coeficientes da expansão (1.98) nulos, subdeterminantes de D_N podem ser utilizados como identificadores de separabilidade. Assim, os autores demonstram que utilizando o subdeterminante

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \langle b^\dagger \rangle & \langle ab^\dagger \rangle \\ \langle b \rangle & \langle b^\dagger b \rangle & \langle ab^\dagger b \rangle \\ \langle a^\dagger b \rangle & \langle a^\dagger b^\dagger b \rangle & \langle a^\dagger ab^\dagger b \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.107)$$

pode-se verificar o emaranhamento para o estado

$$|\psi\rangle = N(\alpha, \beta) [|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle]. \quad (1.108)$$

De fato obtêm-se

$$\text{Det}(S) = -|\alpha|^2 |\beta|^4 \frac{\coth(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{[\sinh|\alpha|^2 + |\beta|^2]^2}, \quad (1.109)$$

que é sempre negativo $\forall |\alpha|, |\beta| \in]0, \infty]$.

1.4 Quantificação de Emaranhamento

Na seção anterior apresentamos alguns critérios para identificar se um determinado estado ρ é separável. A violação das condições impostas pelos métodos apresentados anteriormente, levam a conclusão de que um estado é emaranhado. Não obstante, outra questão relevante neste contexto versa sobre a quantificação do grau de emaranhamento de um estado. Existem diversas possibilidades de realizarmos medidas do grau de emaranhamento porém, algumas delas não possuem interpretações físicas apesar de serem operacionais e outras possuem um significado físico interessante contudo, não são implementáveis facilmente.

É bem aceito na comunidade que uma medida do grau de emaranhamento deve satisfazer algumas condições. Mais uma vez a família Horodecki [24] deu sua contribuição para estudos de emaranhamento. Nesse artigo eles apresentam uma série de postulados que esses quantificadores devem satisfazer. São eles:

Postulado 1 *Seja $E(\rho)$ uma medida do grau de emaranhamento de um estado ρ , então $E(\rho)$ deve ser nula para todos os estados separáveis.*

Postulado 2 (Não negatividade) *Se $E(\rho)$ é uma medida de emaranhamento, então $E(\rho) \geq 0$.*

Postulado 3 (Normalização) *Se $E(\rho)$ é uma medida de emaranhamento, então $E(\rho)$ deve ser normalizada.*

Postulado 4 (Monotonicidade sobre operações locais) *Se qualquer uma das partes que compartilham um estado ρ emaranhado, realizar uma operação local levando $\rho_i \rightarrow \sigma_i$ com probabilidade p_i , então o grau de emaranhamento não deve aumentar. Ou seja,*

$$\sum_i p_i E(\sigma_i) \leq E(\rho). \quad (1.110)$$

Postulado 5 (Convexidade) *A medida de emaranhamento $E(\rho)$ deve ser uma função convexa no conjunto dos operadores, ou seja,*

$$E\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i E(\rho_i), \quad (1.111)$$

Postulado 6 (Aditividade Parcial) *Seja $\rho^{\otimes k}$ um estado formado por k cópias idênticas de um mesmo estado ρ . Então os quantificadores de emaranhamento devem obedecer*

$$E(\rho^{\otimes k}) = kE(\rho). \quad (1.112)$$

Postulado 7 (Continuidade) *Se $\langle \psi^{\otimes n} | \rho_n | \psi^{\otimes n} \rangle \rightarrow 1$ para $n \rightarrow \infty$, então*

$$\frac{1}{n} |E(\psi^{\otimes n}) - E(\rho_n)| \rightarrow 0, \quad (1.113)$$

onde ρ_n é um estado coletivo de n pares.

O postulado (1) garante que para estados separáveis as medidas de emaranhamento sejam nulas, contudo não exclui a possibilidade de que existam quantificadores que apresentem medidas nulas para estados emaranhados [25]. Os postulados (2) e (3) são triviais. O postulado (4) restringe a classe das possíveis medidas de emaranhamento e é ao mesmo tempo de difícil demonstração. Este postulado está associado ao fato de que OLCC não devem aumentar o grau de emaranhamento total de um estado.

Estes quatro primeiros postulados são comumente aceitos pela comunidade. Algumas discussões aparecem sobre a viabilidade dos outros. Por exemplo, Plenio e Vedral [26] consideram que a aditividade total $E(\rho \otimes \sigma) = E(\rho) + E(\sigma)$ é uma propriedade desejada. Contudo, para tratar dos limites de emaranhamento a condição fraca de aditividade, citada acima, é considerada pelos Horodecki. O postulado (5) também é questionado por alguns autores. Veremos mais adiante um exemplo de medida de emaranhamento que não é convexa no conjunto dos operadores densidade. Não é objetivo desta tese tratar sobre os postulados relacionados as medidas de emaranhamento de tal modo que não faremos nenhuma discussão sobre as implicações dessas propostas. Vamos nos atentar para algumas medidas de emaranhamento que serão usadas mais adiante.

1.4.1 Entropia de von Neumann

Bennett *et. al.* [27, 28] demonstraram que uma medida de emaranhamento para estados puros pode ser implementada via a entropia de von Neumann para uma matriz reduzida do sistema. Entende-se por matriz reduzida a matriz densidade obtida após a realização do traço parcial sobre uma das partes da matriz densidade total do estado. Ou seja, se um sistema encontra-se em um estado ρ_{AB} , sua matriz densidade reduzida é dada por

$$\rho_{A(B)} = Tr_A(\rho_{AB}) = Tr_B(\rho_{AB}), \quad (1.114)$$

onde $Tr_{A(B)}$ significa o traço sobre o modo $A(B)$. Com essa matriz reduzida Bennett *et. al.* demonstraram a validade dos postulados sobre medidas de emaranhamento para a entropia de von Neumann de $\rho_{A(B)}$.

Vejam a aplicação dessa medida de emaranhamento. Seja $|\psi\rangle$ um estado puro de um sistema bipartite dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij} |u_i\rangle_A \otimes |v_j\rangle_B, \quad (1.115)$$

onde $N = \dim \mathcal{H}_A$, $N \leq M = \dim \mathcal{H}_B$ e os estados $|u_i\rangle_A$ e $|v_j\rangle_B$ ortonormais $\forall i, j$. Se fizermos $|w_i\rangle_B = \sum_{j=1}^M c_{ij} |v_j\rangle_B$ ficamos então com $|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle_A |w_i\rangle_B$. Fazendo a escolha de $|u_i\rangle_A$ a fim de obtermos a matriz reduzida ρ_A diagonal, ou seja

$$\rho_A = \sum_{i=1}^N p_i |u_i\rangle \langle u_i|, \quad (1.116)$$

encontra-se a relação $\langle w_i | w_k \rangle = p_i \delta_{ik}$. Portanto redefinindo o estado $|w_i\rangle_B = \sqrt{p_i} |\tilde{w}_i\rangle$ podemos reescrever

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sqrt{p_i} |u_i\rangle_A |\tilde{w}_i\rangle_B, \quad (1.117)$$

com os estados $|u_i\rangle$ e $|\tilde{w}_i\rangle$ ortonormais. Esse procedimento, conhecido como decomposição de Schmidt, demonstra que qualquer estado bipartite pode ser escrito na forma da equação (1.117). E portanto a entropia de von Neumann da matriz reduzida é dada por

$$E(\rho_A) = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i. \quad (1.118)$$

Vejamos o exemplo de um estado de Bell

$$|\psi\rangle = \sqrt{\xi} |00\rangle + \sqrt{(1-\xi)} |11\rangle. \quad (1.119)$$

Esse estado se encontra na forma Schmidt e portanto a medida de emaranhamento é dada por

$$E(\psi) = -\xi \log_2 \xi - (1-\xi) \log_2 (1-\xi), \quad (1.120)$$

onde $0 \leq \xi \leq 1$.

Um outro estado puro emaranhado importante é o estado *squeezed* de dois modos

$$|\psi(\gamma)\rangle = \frac{1}{\cosh \gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(\gamma) |n, n\rangle. \quad (1.121)$$

Esse estado também já se encontra na forma de Schmidt. Nesse caso a entropia de von Neumann da matriz reduzida é dada por

$$E(\psi(\gamma)) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^{2n} \gamma}{\cosh^2 \gamma} \log_2 \left(\frac{\tanh^{2n} \gamma}{\cosh^2 \gamma} \right). \quad (1.122)$$

Apos as manipulações matemáticas devidas e usando as relações

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n} \gamma = \cosh^2 \gamma, \quad (1.123)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \tanh^{2n} \gamma = \sinh^2 \gamma \cosh^2 \gamma, \quad (1.124)$$

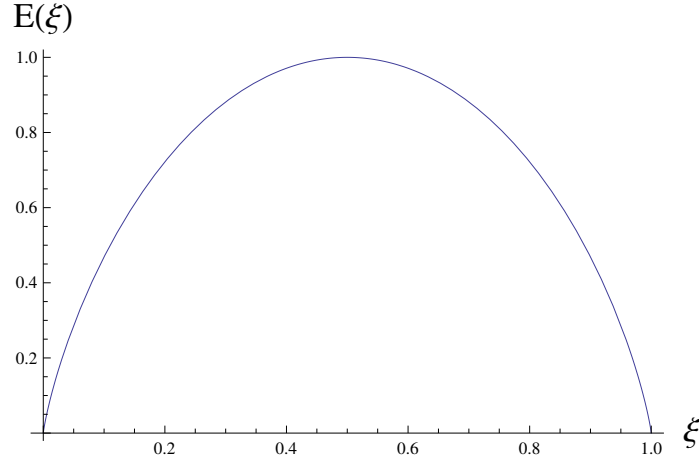


Figura 1.3: Entropia de von Neumann da matriz reduzida de um estado de Bell.

obtemos para a medida de emaranhamento

$$E(\psi(\gamma)) = \cosh^2 \gamma \log_2 (\cosh^2 \gamma) - \sinh^2 \gamma \log_2 (\sinh^2 \gamma). \quad (1.125)$$

Esses resultados encontram-se demonstrados nas figuras (1.3) e (1.4).

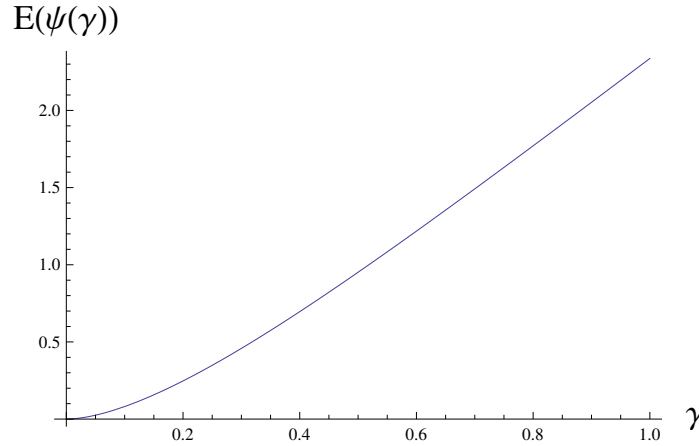


Figura 1.4: Entropia de von Neumann da matriz reduzida de um estado *squeezed* de dois modos.

Quando tratamos de medidas de emaranhamento para estados bipartite puro é consensual que a medida via entropia de von Neumann da matriz reduzida é adequada. Para estados de mistura contudo, somente em alguns casos de sistemas bipartite existem medidas operacionais. Vamos apresentar na sequência algumas dessas medidas para estados mistos bipartite.

1.4.2 Medidas tipo distância

Essas medidas são baseadas em uma intuição natural de que quanto mais perto um estado ρ for do conjunto de estados separáveis \mathcal{S} , menos emaranhado ele é. A quantificação do emaranhamento é implementada via uma distância mínima entre um estado arbitrário ρ e um estado $\sigma \in \mathcal{S}$. Várias propostas sobre distâncias de emaranhamento existem na literatura, contudo essas medidas não apresentam resultados operacionais satisfatórios.

A entropia relativa de emaranhamento é uma medida tipo distância para a qual se conhece uma expressão analítica para um sistema bem específico [29]. A definição de entropia relativa de emaranhamento é dada a partir do conjunto formado por todos os estados separáveis. Seja $\sigma \in \mathcal{S}$, onde \mathcal{S} representa o conjunto formado por todos os estados separáveis. Defini-se a entropia relativa como sendo

$$E_R(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{D}} S(\rho, \sigma), \quad (1.126)$$

onde

$$S(\rho, \sigma) = \text{Tr}([\rho \log \rho - \rho \log \sigma]). \quad (1.127)$$

Esse é um típico exemplo de uma medida com interpretação física que não apresenta operacionalidade. A ausência de expressões analíticas juntamente com a necessidade de altos recursos computacionais para implementação numérica fazem com que medidas tipo distâncias não sejam úteis.

1.4.3 Emaranhamento de Formação

Emaranhamento de formação é um caso particular de uma classe de medidas denominadas *medidas convexas* [30]. Entende-se por medidas convexas de estados mistos, aquelas que são oriundas de uma combinação convexa de medidas de estados puros, tal como

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i), \quad \sum_i p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad (1.128)$$

onde o mínimo é calculado sobre todos os *ensembles* (p_i, ψ_i) , para os quais

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.129)$$

O emaranhamento de formação foi proposto por Bennett *et. al.* [27] fazendo $E(\psi_i)$ a entropia de von Neumann da matriz densidade reduzida do estado ψ_i . Nesse contexto também se coloca um problema de minimização. Ou seja, dentre todas as possíveis combinações convexas de um estado misto em estados puros, deve-se encontrar aquela que minimiza o lado

direito da equação (1.128). Em outras palavras, o emaranhamento de formação de um estado misto é definido como uma média dos emaranhamentos dos estados puros da decomposição, minimizado sobre todas as possíveis decomposições. Apesar de termos aqui um problema de minimização, avanços foram alcançados por Wootters [31] para estados 2×2 puros ou de mistura. Primeiramente vamos analisar as possíveis decomposições em estados puros de uma matriz densidade.

Considere uma matriz densidade diagonal

$$\rho = \sum_{i=1}^m p_i |u_i\rangle \langle u_i|. \quad (1.130)$$

Sejam então outra família de autovetores dessa matriz

$$|\psi_i\rangle = \sqrt{p_i} |u_i\rangle. \quad (1.131)$$

Os estados $|\psi_i\rangle$ são ditos subnormalizados pois $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = p_i \delta_{ij}$. Seja então uma matriz unitária U de ordem $m \times m$, tal que

$$|w_i\rangle = \sum_{k=1}^n U_{ik}^* |\psi_k\rangle, \quad n \leq m, \quad (1.132)$$

onde n é o número de autovalores não nulos da matriz ρ . Usando o fato de que U é unitária podemos escrever a transformação inversa $|\psi_i\rangle \rightarrow |w_i\rangle$ e a partir da equação (1.130), decompor a matriz densidade nos vetores $|w_i\rangle$, ou seja, $\rho = \sum_{i=1}^n |w_i\rangle \langle w_i|$. Em outras palavras, uma matriz densidade sempre pode ser decomposta em termos de vetores *subnormalizados* associados a seus autovalores não nulos.

Vamos então considerar um conjunto de estados subnormalizados $|x_i\rangle$, tais que

$$\langle x_i | \tilde{x}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.133)$$

onde

$$|\tilde{x}_j\rangle = \sigma_y^1 \otimes \sigma_y^2 |x_j^*\rangle, \quad (1.134)$$

sendo $|x_i^*\rangle$ o complexo conjugado de $|x_i\rangle$ e σ_y^i , $i = 1, 2$ as matrizes de Pauli. A partir da equação (1.132) podemos demonstrar que

$$\langle x_i | \tilde{x}_j \rangle = (U \tau U^T)_{ij}, \quad (1.135)$$

onde $\tau_{ij} = \langle \psi_i | \tilde{\psi}_j \rangle$ são os elementos da matriz simétrica e não necessariamente Hermitiana τ . Para que a condição (1.133) seja satisfeita é necessário que $U \tau U^T$ seja uma matriz diagonal.

Como τ é simétrica, sempre será possível definir U de maneira apropriada para diagonalizar τ . Complementa-se a isso o fato de que seus autovalores são sempre reais e não negativos.

Pode-se também realizar uma outra decomposição, a partir da anterior, fazendo $|y_1\rangle = |x_1\rangle$, $|y_i\rangle = i|x_i\rangle$, $i, j > 1$. Dessa maneira temos

$$\langle y_1|\tilde{y}_1\rangle = \lambda_1, \quad \langle y_i|\tilde{y}_j\rangle = -\lambda_i\delta_{ij}, \quad i, j > 1. \quad (1.136)$$

Até o momento apresentamos decomposições possíveis para uma matriz densidade em termos de estados puros subnormalizados. Para encontrar o emaranhamento de formação devemos então, inicialmente encontrar a média dos emaranhamentos de cada estado puro e posteriormente proceder um processo de minimização sobre todas as possíveis decomposições. Vamos agora nos limitar a sistemas bipartite de dois níveis.

Para sistemas bipartite de dois níveis podemos escrever qualquer estado puro em uma base formada pelos estados

$$|e_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (1.137)$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{2}i(|00\rangle - |11\rangle), \quad (1.138)$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{2}i(|01\rangle + |10\rangle), \quad (1.139)$$

$$|e_4\rangle = \frac{1}{2}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (1.140)$$

Ou seja, $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |e_i\rangle$, $i = 1, 2, 3, 4$. Os estados acima são os estados de Bell a menos de uma fase em (1.138) e (1.139). É possível demonstrar [27,32] que a entropia de von Neumann para um estado arbitrário $|\psi\rangle$ escrito nessa base é dado por

$$E(\psi) = \mathcal{E}(C(\psi)), \quad (1.141)$$

onde $C(\psi)$ é definida por

$$C(\psi) = |\langle \psi^* | \psi \rangle| = \left| \sum_i \alpha_i^2 \right|. \quad (1.142)$$

A função $\mathcal{E}(x)$ é dada por

$$\mathcal{E}(x) = -z(x) \log_2(z(x)) - (1 - z(x)) \log_2(1 - z(x)), \quad (1.143)$$

com $z(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - x^2})$. A quantidade $C(\psi)$ é monotonicamente relacionada com $E(\psi)$ e ambas possuem o mesmo intervalo $0 \leq C(\psi) \leq 1$. A quantidade $C(\psi)$ é portanto uma medida de emaranhamento independente e a ela foi dado o nome de *concorrência*. A definição

da concorrência apresentada na equação (1.142) é equivalente a $C(\psi) = \left| \langle \tilde{\psi} | \psi \rangle \right|$, onde $|\psi\rangle$ é escrito na base de Bell usual [32], ou seja, sem o fator de fase nos vetores (1.138) e (1.139). Apresentamos a definição da concorrência para estados puros. Agora voltemos ao problema de estados mistos.

Como dito anteriormente podemos decompor ρ em uma combinação convexa de estados puros subnormalizados, relacionados aos autovalores não nulos da matriz densidade. Relembrando que podemos construir uma decomposição em vetores $|y_i\rangle$, tal que $\langle y_1 | \tilde{y}_1 \rangle = \lambda_1$, $\langle y_i | \tilde{y}_j \rangle = -\lambda_i \delta_{ij}$, $\forall i, j > 1$, onde λ_i são os autovalores da matriz τ . Se definirmos a matriz

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y^1 \otimes \sigma_y^2) \rho^* (\sigma_y^1 \otimes \sigma_y^2), \quad (1.144)$$

demonstramos que $\text{Tr}(\rho \tilde{\rho}) = \sum_i \lambda_i^2$. Ou seja, os autovalores da matriz τ podem ser obtidos diretamente da matriz densidade do sistema. Basta que encontremos a matriz *til* dada por (1.144) e diagonalizarmos a matriz $\rho \tilde{\rho}$. Dessa maneira os autovalores encontrados são o quadrado dos autovalores da matriz τ . Vejamos agora como escrever o emaranhamento do sistema em função dos autovalores λ_i . Vamos definir a pré-concorrência $C(\psi)$

$$C(\psi) = \frac{\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (1.145)$$

E usando os vetores $|y_i\rangle$ para a decomposição da matriz densidade, obtemos a pré-concorrência média

$$\langle c \rangle = \sum_i \langle y_i | y_i \rangle \frac{\langle y_i | \tilde{y}_i \rangle}{\langle y_i | y_i \rangle} = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = C_{y_i}(\rho), \quad (1.146)$$

onde $C_{y_i}(\rho)$ é uma espécie de pré-concorrência do estado misto ρ , quando decomposto nos estados puros $|y_i\rangle \langle y_i|$. Vamos agora procurar uma decomposição em vetores $|z_i\rangle$, tal que além de termos $\langle c \rangle = C_{z_i}(\rho) = C_{y_i}(\rho)$, tenhamos também que as pré-concorrências para todos os vetores $|z_i\rangle$ sejam as mesmas, ou seja, $c(z_1) = \dots = c(z_n)$.

Vamos supor que os vetores $|z_i\rangle$ sejam obtidos dos vetores $|y_i\rangle$ por uma transformação unitária V , tal que

$$|z_i\rangle = \sum_j V_{ij}^* |y_j\rangle. \quad (1.147)$$

É possível demonstrar então que a pré-concorrência média vale $\langle c \rangle = \text{Tr}(VYV^T)$, onde a matriz $Y_{ij} = \langle y_i | \tilde{y}_j \rangle$ é diagonal e real. Em outras palavras, a pré-concorrência média é invariante por transformações unitárias reais (ortogonais). Desta maneira podemos proceder aplicando transformações ortogonais, de tal maneira que as pré-concorrências dos estados z_i

sejam iguais a $C_{z_i}(\rho)$. Assim o emaranhamento de formação para essa decomposição, usando a equação (1.141), é dado por

$$E_{F_z}(\rho) = \sum_i p_i \mathcal{E}(C(z_i)) = \sum_i p_i \mathcal{E}(C_{z_i}(\rho)) = \mathcal{E}(C_{y_i}(\rho)). \quad (1.148)$$

Para encontramos o emaranhamento de formação desejado, precisamos agora demonstrar que essa decomposição em z_i minimiza a pré-concorrência média. Isso se deve ao fato de que o emaranhamento de formação é uma função convexa e monotonicamente crescente com a concorrência.

Vamos então redefinir a pré-concorrência média como sendo

$$\langle c \rangle = \sum_i |(VYV^T)_{ii}|. \quad (1.149)$$

A matriz V é de ordem $m \times n$ com suas colunas formadas por vetores ortonormais. Lembrando que a matriz Y é diagonal e fazendo $\alpha_{ij} = (V_{ij})^2$, podemos reescrever $\langle c \rangle$ como sendo

$$\langle c \rangle = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} Y_{kk} \right|. \quad (1.150)$$

Usando a desigualdade triangular e substituindo os elementos da matriz Y obtemos

$$\langle c \rangle \geq \left| \lambda_1 \sum_{i=1}^m \alpha_{i1} - \sum_{k=2}^n \lambda_k \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \right|. \quad (1.151)$$

É sempre possível, via redefinição de fases globais, definir V de tal maneira que os elementos α_{i1} sejam reais e positivos, de tal maneira que o somatório $\sum_i \alpha_{i1} = 1$. Usando esse resultado podemos demonstrar que

$$\langle c \rangle \geq \lambda_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k \sum_{i=1}^m |\alpha_{ik}| = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4. \quad (1.152)$$

Com esse resultado demonstramos que a pré-concorrência média será sempre maior ou igual a $C_{y_1}(\rho)$. Assim provamos que o emaranhamento de formação é dado por

$$E_F(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)), \quad (1.153)$$

onde

$$C(\rho) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (1.154)$$

com $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. $C(\rho)$ é a concorrência para um estado qualquer bipartite de dois níveis e a função $\mathcal{E}(x)$ é dada por (1.143).

Esse resultado nos garante um processo operacional para a quantificação de emaranhamento para sistemas bipartite de dois níveis. Basta que calculemos os autovalores da matriz $\sqrt{\rho\tilde{\rho}}$ e apliquemos na definição de concorrência dada acima. Para sistemas de mais níveis existem também alguns avanços que não discutiremos nessa tese.

1.4.4 Negatividade

Uma outra medida de emaranhamento também operacional foi apresentada por Vidal e Werner [33]. Essa medida é baseada na não positividade da transposta parcial de uma matriz densidade. Defini-se a negatividade como sendo [33, 34]

$$\mathcal{N}(\rho) = \|\rho^{T_2}\| - 1, \quad (1.155)$$

onde ρ^{T_2} é a matriz parcialmente transposta no modo (2) e $\|\cdot\|$ denota o traço da norma, que para um operador hermitiano é definido como sendo $\|\hat{A}\| = \text{Tr}(\sqrt{\hat{A}\hat{A}^T})$. Operacionalmente devemos encontrar os autovalores da matriz $\hat{A}\hat{A}^T$ e realizar o somatório da raiz quadrada desses autovalores. Em outras palavras, o traço da norma é a soma dos valores absolutos dos autovalores da matriz $\hat{A}\hat{A}^T$. Podemos demonstrar que

$$\|\hat{A}\| = \sum_i |\lambda_i| = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i = 1 + 2 \sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i|. \quad (1.156)$$

Ou seja, a negatividade é proporcional a soma dos valores absolutos dos autovalores negativos de uma matriz parcialmente transposta⁵. É notório que se uma matriz é separável, a sua transposta parcial não possui autovalor negativo e conseqüentemente a negatividade é nula. Outra observação importante está relacionada ao fato da norma do traço $\|\cdot\|$, como qualquer norma, satisfazer a desigualdade triangular. Isso leva necessariamente a convexidade da negatividade.

Uma outra medida proposta por Vidal e Werner é a negatividade logarítmica

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \log_2 \|\rho^{T_2}\|. \quad (1.157)$$

Demonstra-se também, lembrando que a norma do traço é a soma dos valores absolutos dos autovalores de um operador hermitiano, que $\|\rho_1 \otimes \rho_2\| = \|\rho_1\| \cdot \|\rho_2\|$. Portanto a aditividade da negatividade logarítmica é comprovada. Um inconveniente nessa medida é que ela não é convexa. De fato ela é a combinação de um funcional convexo, a norma do traço, com uma função côncava.

⁵A operação de transposição parcial pode ser realizada em qualquer dos modos.

1.5 Considerações Finais

Neste capítulo apresentamos uma breve discussão sobre o estado da arte de estados emaranhados, destacando pontos que serão usados mais adiante, para o estudo de emaranhamento em sistemas a temperatura finita. Discutimos alguns critérios de separabilidade e apresentamos alguns quantificadores de emaranhamento.

Uma diversidade de questões sobre emaranhamento não foram tratadas neste texto, mas que não se tornam menos importantes como por exemplo o emaranhamento de sistemas multipartite. A constituição de critérios de separabilidade que sejam factíveis de uma interpretação física consistente é fundamental para uma melhor compreensão dos estados emaranhados.

Como dito no introito desta tese, estamos interessados em estudar efeito da temperatura em estados quânticos emaranhados. Desta maneira vamos apresentar na sequência um formalismo conhecido como Dinâmica de Campos Térmicos, pelo qual é possível introduzir estados termalizados para sistemas quânticos.

Capítulo 2

Dinâmica de Campos Térmicos

Foi apresentado no capítulo anterior uma revisão do atual estado da arte sobre emaranhamento quântico. Neste capítulo faremos uma revisão sobre um formalismo conhecido como Dinâmica de Campos Térmicos, com o intuito de apresentar estados termalizados dos osciladores bosônicos.

A formulação de Teoria de Campos a Temperatura Finita, conhecida como Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) foi proposta inicialmente por Takahashi e Umezawa em 1975 [35]. A questão central da DCT é a proposição de um espaço vetorial, com estrutura de espaço de Hilbert, tal que estados de equilíbrio térmico sejam tratados como vetores deste espaço, de maneira análoga aos estados puros na mecânica quântica *standard*. Esta formulação portanto apresenta vantagens do ponto de vista operacional em relação ao tratamento implementado via matrizes densidade. Outra questão relevante neste contexto é que diversos autores vem estudando sistemas oscilatórios bosônicos com aplicações em ótica quântica usando DCT, tais como a inversão de população atômica, estatísticas sub-Poissonianas e compressão de quadraturas. Contudo, poucos trabalhos vem sendo desenvolvidos no estudos de emaranhamento e efeito de temperatura usando a DCT.

Nesse capítulo vamos discutir primeiramente a formulação da DCT proposta por Takahashi e Umezawa [35] baseando-se em primeiros princípios. Vamos estudar um oscilador harmônico como exemplo a fim de apresentar os aspectos mais relevantes da DCT para esta tese. Posteriormente alguns desenvolvimentos recentes apresentados por Khanna *et. al.* [36] para sistemas bosônicos também serão apresentados.

2.1 Espaço de Hilbert Térmico

Um estado de equilíbrio termodinâmico é descrito na mecânica estatística quântica por um operador densidade ρ_β que atua em um espaço de Hilbert \mathcal{H} associado ao sistema físico. A média térmica de uma observável A no contexto da mecânica estatística do equilíbrio, utilizando o ensemble canônico, é dada por

$$\langle A \rangle_\beta = Tr[\rho_\beta A] \quad (2.1)$$

onde Tr representa a operação traço, ρ_β é a matriz densidade

$$\rho_\beta = \frac{\exp[-\beta H]}{Z(\beta)}, \quad (2.2)$$

$Z(\beta) = Tr[\rho_\beta H]$ é a função partição e H o hamiltoniano do sistema. A matriz densidade (2.2) representa um estado de mistura a temperatura¹ $T = \beta^{-1}$.

A proposta apresentada pelos autores da DCT [35] foi a introdução de um espaço vetorial \mathcal{H}_T , com estrutura de "espaço de Hilbert", onde a média térmica de uma observável A fosse dada por

$$\langle A \rangle_\beta = \langle 0(\beta) | \mathbb{A} | 0(\beta) \rangle, \quad (2.3)$$

com $|0(\beta)\rangle \in \mathcal{H}_T$ e \mathbb{A} é um operador que atua em \mathcal{H}_T obtido de um mapeamento $M : \mathcal{O}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}_T)$, onde $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ representa o conjunto de operadores que atuam no espaço de Hilbert usual da mecânica quântica \mathcal{H} e $\mathcal{O}(\mathcal{H}_T)$ os operadores que atuam em \mathcal{H}_T . Efetivamente esse espaço vetorial é diferente do espaço de Hilbert usual da mecânica quântica, pelo simples fato de se tratar neste contexto de estados mistos. A imposição relevante é que a média térmica deve ser a mesma em ambos os casos, ou seja, as equações (2.1) e (2.3) são equivalentes e portanto pode-se considerar que

$$\langle A \rangle_\beta = \langle 0(\beta) | \mathbb{A} | 0(\beta) \rangle \equiv Tr[\rho_\beta A]. \quad (2.4)$$

Se \mathcal{H}_T é um espaço vetorial com estrutura de um espaço de Hilbert, pode-se então definir $B = \{|\psi_n\rangle, \forall n = 0, 1, 2, \dots\}$ uma base ortonormal de \mathcal{H}_T , e dessa maneira escrever

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta) |\psi_n\rangle. \quad (2.5)$$

Considerando o espectro do hamiltoniano H discreto

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (2.6)$$

¹Estamos considerando a constante de Boltzmann $K = 1$.

onde $\{|n\rangle, n = 0, 1, \dots\}$ são autovetores de H e portanto formam uma base ortonormal de \mathcal{H} . Consequentemente a relação (2.4) é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_m^*(\beta) f_n(\beta) \langle \psi_m | \mathbb{A} | \psi_n \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n) \langle n | A | n \rangle. \quad (2.7)$$

A equação acima somente pode ser validada considerando duas possibilidades. A primeira é que $f_m^*(\beta) f_n(\beta) = \delta_{n,m}$, o que não é correto se afirmar pelo fato de que os $f_n(\beta)$ são escalares. A segunda possibilidade é $\langle \psi_m | \mathbb{A} | \psi_n \rangle = \langle m | A | n \rangle \delta_{n,m}$. Diante dessa imposição a proposta apresentada pelos autores da DCT foi introduzir um espaço vetorial ($\tilde{\mathcal{H}}$), com estrutura de espaço de Hilbert tal que $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$. Desta maneira os vetores $|\psi_n\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$, onde $|\tilde{n}\rangle \in \tilde{\mathcal{B}} \subset \tilde{\mathcal{H}}$, com $\tilde{\mathcal{B}}$ base de $\tilde{\mathcal{H}}$. O espaço $\tilde{\mathcal{H}}$ é um espaço vetorial com estrutura de espaço de Hilbert análogo ao espaço *standard* da mecânica quântica e construído a partir de \mathcal{H} , através das regras de conjugação *til*

$$(A_i, A_j)^\sim = \tilde{A}_i \tilde{A}_j \quad (2.8)$$

$$(c_i A_i + A_j)^\sim = c_i^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j \quad (2.9)$$

$$(A_i^\dagger)^\sim = (\tilde{A}_i)^\dagger \quad (2.10)$$

$$(\tilde{A}_i)^\sim = A_i \quad (2.11)$$

$$[A_i, \tilde{A}_j] = 0, \quad \forall i, j. \quad (2.12)$$

É positivo também se definir um mapeamento linear M_H tal que

$$M_H : A \rightarrow \mathbb{A} = A \otimes \tilde{1}, \quad (2.13)$$

e um mapeamento anti-linear $M_{\tilde{H}}$

$$M_{\tilde{H}} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}^\dagger = 1 \otimes \tilde{A}^\dagger. \quad (2.14)$$

Com as definições apresentadas anteriormente é evidente que pode-se obter

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n/2) |n, \tilde{n}\rangle, \quad (2.15)$$

de tal modo que a igualdade (2.4) seja preservada. Das relações que definem os mapeamentos (2.13) e (2.14) verificamos que

$$[\mathbb{A}, \mathbb{A}^\dagger] = [\tilde{\mathbb{A}}, \tilde{\mathbb{A}}^\dagger] = 1 \quad (2.16)$$

com todas as outras comutações nulas. A duplicação dos graus de liberdade é comumente usada em outras formulações para tratar estados térmicos, por exemplo quando se escreve

a matriz densidade como uma projeção dada por $\rho \simeq |\psi\rangle\langle\psi|$. Outra questão interessante presente na DCT é o fato da formulação ser construída em uma estrutura de espaço de Hilbert.

Apresentamos a DCT anteriormente via o que chamamos de primeiros princípios. Outra maneira de se construir a DCT é via representações redutíveis de C^* -álgebra [37]. Neste caso considera-se uma C^* -álgebra \mathcal{B} representada irredutivelmente por $\pi_{\mathcal{H}}(\mathcal{B})$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Vamos denotar por A um elemento de \mathcal{B} e por $\pi_{\mathcal{H}}(\mathcal{B})$ um operador correspondente em \mathcal{H} . Os elementos de \mathcal{B} formam um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos. Considerando $\tilde{\mathcal{H}}$ o espaço dual de \mathcal{H} podemos escrever um operador $\pi_{\mathcal{H}}(\mathcal{B})$

$$\pi_{\mathcal{H}}(\mathcal{B}) = \sum_{m,n} \alpha_{m,n} (|\psi_n\rangle\langle\psi_m|) \quad (2.17)$$

onde $\alpha_{m,n} = \langle\psi_m|\pi_{\mathcal{H}}(\mathcal{B})|\psi_n\rangle$, $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}$ e $\langle\psi_n| \in \tilde{\mathcal{H}}$.

Os elementos de \mathcal{B} podem ser realizados sobre o espaço $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ como operadores ou como vetores. No primeiro caso as observáveis do sistema, que são operadores definidos em \mathcal{H} , são estendidas sobre $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ através dos mapeamentos (2.13) e (2.14). No segundo caso temos um estado ω definido em \mathcal{B} , representado em \mathcal{H} por uma matriz densidade ρ , associado a um vetor

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} \alpha_{m,n} |\psi_m, \psi_n\rangle \in \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}. \quad (2.18)$$

Desta maneira o valor esperado de uma observável $A \in \mathcal{B}$ no estado ω deve ser o mesmo considerando as duas representações. Assim a matriz $\rho \in \pi_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}$ é associada a um vetor $|\sqrt{\rho}\rangle \in \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$, tal que

$$\omega(A) = \langle\sqrt{\rho}|\pi_{\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}}(A)|\sqrt{\rho}\rangle = Tr[\sqrt{\rho}\pi_{\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}}(A)\sqrt{\rho}] \quad (2.19)$$

Perceba que para cada matriz densidade ρ podemos associar um vetor pertencente a $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$, mas o inverso não é verdadeiro. Ou seja, nem todo vetor que pertence a $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ é um estado físico associado ao sistema. Para a construção da DCT via as representações redutíveis de C^* -álgebras são necessários alguns postulados para satisfazer as condições de equilíbrio térmico do *ensemble* de Gibbs, da evolução temporal e da construção das observáveis.

A apresentação algébrica apresentada acima é somente ilustrativa nesta tese, no sentido de que não será utilizada para a construção dos estados de interesse. Apenas apresentamos que a DCT pode também ser obtida a partir de uma estrutura mais formal do ponto de vista matemático.

2.2 Oscilador Bosônico Térmico

Vamos agora apresentar a construção do estado térmico $|0(\beta)\rangle$ para um oscilador quântico bosônico. Vamos considerar um hamiltoniano dado por

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (2.20)$$

com $\hbar = 1$ e a energia do estado fundamental considerada nula. Os operadores a e a^\dagger satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (2.21)$$

A equação de autovalor para o hamiltoniano (2.20) é dada por

$$H |n\rangle = n\omega |n\rangle. \quad (2.22)$$

Usando as relações de comutação (2.21) demonstra-se que os estados $a |n\rangle$ e $a^\dagger |n\rangle$ são autovetores de H satisfazendo as seguintes equações

$$H(a |n\rangle) = (n - 1)\omega(a |n\rangle), \quad (2.23)$$

$$H(a^\dagger |n\rangle) = (n + 1)\omega(a^\dagger |n\rangle), \quad (2.24)$$

o que permite designar os operadores a e a^\dagger como operadores de aniquilação e criação de um *quantum* de energia respectivamente. Por consistência física é necessário se definir um estado $|0\rangle$ tal que

$$a |0\rangle = 0, \quad (2.25)$$

onde $|0\rangle$ é dito ser o estado de vácuo do sistema. Das relações explicitadas acima verifica-se que os operadores a e a^\dagger quando aplicados nos autovetores de H satisfazem as seguintes relações

$$|n - 1\rangle = \frac{a}{\sqrt{n}} |n\rangle, \quad (2.26)$$

$$|n + 1\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n + 1}} |n\rangle, \quad (2.27)$$

É perceptível também, da relação (2.27), que

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.28)$$

Esses estados são ditos estados número do oscilador bosônico e determinam a quantidade de *quanta* de energia associada ao oscilador, são ortonormais, ou seja,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{m,n} \quad (2.29)$$

e formam uma base do espaço de Hilbert \mathcal{H} , tal que

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (2.30)$$

sendo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

2.2.1 Estado de Vácuo Térmico

Para introduzir a Dinâmica de Campos Térmicos necessitamos inicialmente definir o espaço vetorial $\tilde{\mathcal{H}}$, obtido a partir do espaço de Hilbert \mathcal{H} . Esse espaço “*til*” é construído a partir do estado de vácuo $|\tilde{0}\rangle$ com a aplicação do operador de criação \tilde{a}^\dagger obtido através das regras de conjugação *til* aplicadas sobre os operadores que pertencem a $\mathcal{O}(\mathcal{H})$. A partir da álgebra definida pelas relações de comutação (2.21) obtêm-se

$$(aa^\dagger - a^\dagger a)^\sim = \tilde{1} = 1, \quad (2.31)$$

e portanto leva as definições das relações

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (2.32)$$

O operador Hamiltoniano \tilde{H} deve satisfazer a seguinte equação de autovalor

$$\tilde{H} |\tilde{n}\rangle = \omega n |\tilde{n}\rangle. \quad (2.33)$$

A imposição que os autovalores sejam os mesmos da equação (2.22) se deve ao fato de pretende-se preservar a igualdade das médias térmicas estabelecidas pela equação (2.4). Os estados

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle. \quad (2.34)$$

são também ortonormais, ou seja $\langle \tilde{m}|\tilde{n}\rangle = \delta_{m,n}$ e formam uma base de $\tilde{\mathcal{H}}$.

Definida a álgebra associada ao espaço vetorial “*til*”, podemos agora definir o espaço duplicado $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$. A partir dos mapeamentos dados por (2.13) e (2.14) definimos os operadores

$$\mathbb{A}^\dagger = a^\dagger \otimes \tilde{1}, \quad (2.35)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}^\dagger = 1 \otimes \tilde{a}^\dagger \quad (2.36)$$

e com as relações estabelecidas anteriormente, podemos escrever o estado $|0(\beta)\rangle$ como sendo

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega/2} \frac{(\mathbb{A}^\dagger)^n (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger)^n}{n!} |0, \tilde{0}\rangle, \quad (2.37)$$

onde usamos as equações de autovalores (2.22) e (2.33). Da condição de normalização $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$ obtêm-se a função partição igual a

$$Z(\beta) = \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (2.38)$$

onde usamos a identidade $1/(1-x) = \sum_n x^n$ com $0 < x < 1$.

2.2.2 Transformação de Bogoliubov

O somatório presente na equação (2.37) é a expansão em série de uma função exponencial, de tal modo que podemos escrever o estado $|0(\beta)\rangle$ como sendo

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1-\eta} e^{(\eta\mathbb{A}^\dagger\tilde{\mathbb{A}}^\dagger)} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.39)$$

onde $\eta = e^{-\beta\omega}$. Esta relação demonstra que o estado $|0(\beta)\rangle$ é obtido do estado de vácuo duplicado $|0, \tilde{0}\rangle$ a partir da aplicação de um operador $\mathbb{F} = e^{(\eta\mathbb{A}^\dagger\tilde{\mathbb{A}}^\dagger)}$. Podemos reescrever (2.39) de tal modo que o estado $|0(\beta)\rangle$ seja obtido do vácuo duplicado a partir de uma operação unitária. Para isto vamos utilizar a identidade

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\log \cosh \alpha [A,B]} e^{\tanh \alpha A} \quad (2.40)$$

e fazer $A = -\mathbb{A}\tilde{\mathbb{A}}$, $B = \mathbb{A}^\dagger\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$. Vamos também definir as funções

$$u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-\beta\omega}}} \equiv \cosh \theta(\beta), \quad (2.41)$$

$$v(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1-e^{-\beta\omega}}} \equiv \sinh \theta(\beta) \quad (2.42)$$

que são condizentes com a relação

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = \cosh^2(\theta(\beta)) - \sinh^2(\theta(\beta)) = 1. \quad (2.43)$$

O comutador entre os operadores A e B é dado por

$$[A, B] = -\tilde{\mathbb{A}}\tilde{\mathbb{A}}^\dagger - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}. \quad (2.44)$$

E considerando $\alpha = \theta(\beta)$ na relação (2.40) podemos reescrever

$$|0(\beta)\rangle = e^{(\tanh(\theta(\beta))\mathbb{A}^\dagger\tilde{\mathbb{A}}^\dagger)} e^{(-\log[\cosh(\theta(\beta))](\tilde{\mathbb{A}}\tilde{\mathbb{A}}^\dagger + \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}))} e^{(-\tanh(\theta(\beta))\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A})} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.45)$$

Esse relação é factível se lembrarmos que

$$e^{(-\tanh(\theta(\beta))\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A})} |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle, \quad (2.46)$$

$$e^{(-\log[\cosh(\theta(\beta))](\tilde{\mathbb{A}}\tilde{\mathbb{A}}^\dagger + \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}))} |0, \tilde{0}\rangle = \cosh^{-1}(\theta(\beta)) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.47)$$

Considerando agora a (2.40) podemos reescrever (2.45) como

$$|0(\beta)\rangle = e^{i\mathbb{G}(\beta)} |0, \tilde{0}\rangle \quad (2.48)$$

com $\mathbb{G}(\beta) = i(\theta(\beta)(\mathbb{A}\tilde{\mathbb{A}} - \mathbb{A}^\dagger\tilde{\mathbb{A}}^\dagger))$. O operador $\mathbb{U}(\beta) = e^{i\mathbb{G}(\beta)}$ é conhecido como operador de Bogoliubov, é unitário e descreve uma rotação no espaço de Hilbert duplicado $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$.

2.2.3 Operadores Térmicos

Até o presente momento descrevemos a Dinâmica de Campos Térmicos para um oscilador quântico bosônico, construímos o estado $|0(\beta)\rangle$ e demonstramos como obtê-lo a partir de uma transformação de Bogoliubov no vácuo duplicado. Contudo, ainda não fizemos uma discussão mais detalhada sobre o significado físico deste estado. Em verdade, a questão que se coloca é saber como os operadores de aniquilação $\mathbb{A}, \tilde{\mathbb{A}} \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_\beta)$, e os seus adjuntos, atuam em $|0(\beta)\rangle$. Para esclarecer tal questionamento vamos definir um operador termalizado dado por

$$\mathbb{A}(\beta) = \mathbb{U}(\beta)\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger(\beta). \quad (2.49)$$

Com o auxílio da identidade

$$\exp(-iB)A\exp(iB) = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B, [B, A]] + \dots \quad (2.50)$$

e das relações de comutação apropriadas encontramos

$$\mathbb{A}(\beta) = u(\beta)\mathbb{A} - v(\beta)\tilde{\mathbb{A}}^\dagger. \quad (2.51)$$

Realizando um procedimento análogo definimos também o operador

$$\tilde{\mathbb{A}}(\beta) = \mathbb{U}(\beta)\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{U}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{\mathbb{A}} - v(\beta)\mathbb{A}^\dagger. \quad (2.52)$$

Verifica-se também que

$$\mathbb{A}(\beta)|0(\beta)\rangle = \tilde{\mathbb{A}}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0 \quad (2.53)$$

onde usamos a unitariedade do operador de Bogoliubov $\mathbb{U}(\beta)\mathbb{U}^\dagger(\beta) = \mathbb{U}^\dagger(\beta)\mathbb{U}(\beta) = 1$ e o fato de que $\mathbb{A}|0, \tilde{0}\rangle = \tilde{\mathbb{A}}|0, \tilde{0}\rangle = 0$. Essas relações demonstram quem o estado $|0(\beta)\rangle$ se

comporta como estado de vácuo para os operadores termalizados $\mathbb{A}(\beta)$ e $\tilde{\mathbb{A}}(\beta)$, o que viabiliza a denominação de estado de vácuo térmico. É possível também determinar os operadores auto-adjuntos termalizados dados por

$$\mathbb{A}^\dagger(\beta) = \mathbb{U}(\beta)\mathbb{A}^\dagger\mathbb{U}^\dagger(\beta) = u(\beta)\mathbb{A}^\dagger - v(\beta)\tilde{\mathbb{A}}, \quad (2.54)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta) = \mathbb{U}(\beta)\tilde{\mathbb{A}}^\dagger\mathbb{U}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{\mathbb{A}}^\dagger - v(\beta)\mathbb{A}. \quad (2.55)$$

Os operadores termalizados satisfazem as relações de comutação

$$[\mathbb{A}(\beta), \mathbb{A}^\dagger(\beta)] = [\tilde{\mathbb{A}}(\beta), \tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta)] = 1 \quad (2.56)$$

com todas as outras nulas. Percebemos também que

$$\mathbb{A}^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle = \mathbb{U}(\beta) |1, \tilde{0}\rangle = |1, \tilde{0}; (\beta)\rangle, \quad (2.57)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle = \mathbb{U}(\beta) |0, \tilde{1}\rangle = |0, \tilde{1}; (\beta)\rangle. \quad (2.58)$$

Desta maneira podemos definir os estados número termalizados dados por

$$|n, \tilde{m}; (\beta)\rangle = \frac{(\mathbb{A}^\dagger(\beta))^n (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta))^m}{\sqrt{n!m!}} |0(\beta)\rangle, \quad \forall n, m \geq 0. \quad (2.59)$$

Os estados $|n, \tilde{m}; (\beta)\rangle$ formam um conjunto completo e definem uma base ortonormal do espaço de Hilbert Térmico \mathcal{H}_T a uma temperatura $T = \beta^{-1}$. Em outras palavras, o espaço de Hilbert Térmico corresponde a uma transformação de Bogoliubov no espaço duplicado $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$.

Voltemos agora a questão levantada anteriormente, ou seja, qual o resultado da aplicação dos operadores \mathbb{A} e $\tilde{\mathbb{A}}$ no estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$. Se multiplicarmos a equação (2.51) por $u(\beta)$ e (2.55) por $v(\beta)$ e realizar a soma dessas equações encontramos

$$\mathbb{A} = u(\beta)\mathbb{A}(\beta) + v(\beta)\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta) \quad (2.60)$$

lembrando que $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$. Analogamente podemos obter também os outros operadores não térmicos em função dos operadores térmicos, tais como

$$\tilde{\mathbb{A}} = u(\beta)\tilde{\mathbb{A}}(\beta) + v(\beta)\mathbb{A}^\dagger(\beta), \quad (2.61)$$

$$\mathbb{A}^\dagger = u(\beta)\mathbb{A}^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{\mathbb{A}}(\beta), \quad (2.62)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}^\dagger = u(\beta)\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta) + v(\beta)\mathbb{A}(\beta). \quad (2.63)$$

Com essas relações podemos verificar que o estado $|0(\beta)\rangle$ não é um estado de vácuo para os operadores \mathbb{A} e $\tilde{\mathbb{A}}$. A aplicação do operador \mathbb{A} no estado $|0(\beta)\rangle$ adiciona um “*quantum*”

no grau de liberdade “*til*” e destrói um quantum no grau de liberdade *standard* do vácuo duplicado. Em outras palavras, ele se comporta como operador de aniquilação para os graus de liberdade usuais da mecânica quântica e como operador de criação para os graus de liberdade fictícios introduzidos pela duplicação do espaço de Hilbert imposta pela DCT.

2.3 Estados Termalizados de um Oscilador

Vamos agora analisar outros estados termalizados para um oscilador harmônico quantizado. Como dissemos anteriormente os estados (2.59) formam uma base do espaço de Hilbert Térmico \mathcal{H}_T . Desta maneira podemos escrever um estado arbitrário

$$|\psi(\beta)\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m} |n, \tilde{m}; (\beta)\rangle. \quad (2.64)$$

Uma questão relevante neste contexto é sobre a realidade física destes estados. Sabemos da mecânica quântica que estados de mistura são descritos por matrizes densidade e assim podemos nos perguntar qual matriz densidade esta associada aos estados termalizados. Neste sentido Khanna *et. al.* [36] apresentaram recentemente um desenvolvimento que possibilita uma relação direta entre estados termalizados e matrizes densidade, juntamente com uma interpretação física consistente. Vamos apresentar nesta seção um resumo deste desenvolvimento.

Seja $\mathcal{H}_\beta \subset \mathcal{H}_T$ um subespaço gerado pelos vetores $|n, \tilde{m}_0; (\beta)\rangle$ com $n = 0, 1, 2, \dots$. Este subespaço pode ser obtido se fixarmos $\tilde{m} = m_0$. Vamos agora considerar uma transformação $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\beta$, tal que

$$\mathcal{T}(|n\rangle) \rightarrow |n, \tilde{m}_0; (\beta)\rangle = U(\beta)(|n\rangle \otimes |\tilde{m}_0\rangle). \quad (2.65)$$

Verificamos que \mathcal{T} é linear

$$\mathcal{T}(\alpha |n\rangle + \xi |p\rangle) = \alpha |n, \tilde{m}_0; \beta\rangle + \xi |p, \tilde{m}_0; \beta\rangle \quad (2.66)$$

e que o produto interno se conserva

$$\langle p, \tilde{m}_0; \beta | n, \tilde{m}_0; \beta \rangle = \langle p | n \rangle. \quad (2.67)$$

Dessa forma dizemos que \mathcal{T} é um isomorfismo de \mathcal{H} em \mathcal{H}_β e portanto que \mathcal{H} é isomorfo a \mathcal{H}_β . O isomorfismo apresentado neste contexto esta baseado na estrutura matemática entre os espaços de Hilbert usual da Mecânica Quântica \mathcal{H} , que somente possui estados puros do

sistema, e o subespaço introduzido por Khanna *et. al.* [36] \mathcal{H}_β que correspondem a estados de mistura.

A existência deste isomorfismo corresponde a questão central do desenvolvimento apresentado em [36] como veremos a seguir. Como essas relações são validas para qualquer valor de \tilde{m}_0 , podemos fazer $\tilde{m}_0 = 0$ sem perda de generalidade. Neste caso os estados de número termalizados em \mathcal{H}_β são dados por

$$|n(\beta)\rangle = \frac{(\mathbb{A}^\dagger(\beta))^n}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \quad (2.68)$$

e um estado arbitrário é dado por

$$|\psi(\beta)\rangle = \sum_n C_n |n(\beta)\rangle. \quad (2.69)$$

Usando o fato de que $\tilde{\mathbb{A}}(\beta) |0(\beta)\rangle = 0$, juntamente com a relação (2.52) verificamos que

$$\tilde{\mathbb{A}} |0(\beta)\rangle = \frac{v(\beta)}{u(\beta)} \mathbb{A}^\dagger |0(\beta)\rangle. \quad (2.70)$$

E usando a relação (2.54) podemos perceber

$$\mathbb{A}^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle = \frac{\mathbb{A}^\dagger}{u(\beta)} |0(\beta)\rangle. \quad (2.71)$$

Estes resultados demonstram que um estado número termalizado dado por (2.68) pode ser obtido pela atuação dos operadores não térmicos \mathbb{A}^\dagger ponderados pela função $u(\beta)$. Assim, podemos escrever um estado arbitrário como

$$|\psi(\beta)\rangle = \mathbb{F}(\mathbb{A}, \mathbb{A}^\dagger; \beta) |0(\beta)\rangle, \quad (2.72)$$

tal que

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}, \mathbb{A}^\dagger; \beta) = f(a, a^\dagger; \beta) \otimes \tilde{\mathbb{I}}. \quad (2.73)$$

Desta maneira o valor esperado de uma observável $\mathbb{O} = O \times \tilde{\mathbb{I}}$, para um estado arbitrário $|\psi(\beta)\rangle$, é dado por

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{O} \rangle_{\psi(\beta)} &= \langle \psi(\beta) | \mathbb{O} | \psi(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | \mathbb{F}^\dagger(\mathbb{A}, \mathbb{A}^\dagger; \beta) \mathbb{O} \mathbb{F}(\mathbb{A}, \mathbb{A}^\dagger; \beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= \text{Tr}[\rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) O f(a, a^\dagger; \beta)] \\ &= \text{Tr}[f(a, a^\dagger; \beta) \rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) O]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

A equação (2.74) permite afirmar que o valor esperado de uma observável \mathbb{O} é equivalente a média térmica de uma outra observável dada por $f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) O f(a, a^\dagger; \beta)$, ou é também equivalente ao valor esperado da observável O para um estado de mistura dado por

$$\rho_{\psi(\beta)} = f(a, a^\dagger; (\beta)) \rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; (\beta)). \quad (2.75)$$

Este resultado é fundamental para a associação da matriz densidade (2.75) ao estado arbitrário $|\psi(\beta)\rangle$ dado por (2.72) realizado em [36]. Outras possibilidades de associar matrizes densidade a estados termalizados obtidos pela atuação de $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta)$ no vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ foram desenvolvidas em [36], porém não serão tratadas nesta tese.

2.3.1 Estado Número Termalizado

Um estado número termalizado é dado por (2.68) e o operador de criação térmico pela equação (2.54), de tal modo que

$$|n(\beta)\rangle = \frac{[u(\beta)\mathbb{A}^\dagger - v(\beta)\tilde{\mathbb{A}}]^n}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle. \quad (2.76)$$

Considerando que $\tilde{\mathbb{A}}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0$ e usando a relação (2.52) encontramos que

$$\tilde{\mathbb{A}}|0(\beta)\rangle = \frac{v(\beta)}{u(\beta)}\mathbb{A}^\dagger|0(\beta)\rangle. \quad (2.77)$$

Realizando então a aplicação sucessiva do operador de criação térmico $\mathbb{A}^\dagger(\beta)$ n vezes e considerando que $[\mathbb{A}^\dagger, \tilde{\mathbb{A}}] = 0$, obtemos

$$|n(\beta)\rangle = \frac{[\mathbb{A}^\dagger]^n}{\sqrt{n!}[u(\beta)]^n} |0(\beta)\rangle, \quad (2.78)$$

onde usamos a relação $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$. Desta maneira podemos identificar

$$f(a, a^\dagger; \beta) = \frac{[a^\dagger]^n}{\sqrt{n!}[u(\beta)]^n} \quad (2.79)$$

e conseqüentemente

$$\rho_{n(\beta)} = \frac{1}{n![u(\beta)]^{2n}} a^{\dagger n} \rho_\beta a^n. \quad (2.80)$$

Usando a definição de ρ_β dada por (2.2) e usando a relação de completude da base formada pelos estados número $|n\rangle$ encontramos

$$\begin{aligned} \rho_{n(\beta)} &= \frac{1}{n![u(\beta)]^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} a^{\dagger n} \rho_\beta |r\rangle \langle r| a^n \\ &= \left(\frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r \frac{(n+r)!}{n!r!} |n+r\rangle \langle n+r| \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde usamos as relações $u^2(\beta) = Z(\beta) = 1 + \bar{n}(\beta)$, $v^2(\beta) = \bar{n}(\beta)$, juntamente com

$$a^{\dagger n} |r\rangle = \sqrt{\frac{(n+r)!}{r!}} |n+r\rangle. \quad (2.82)$$

Usando a identidade

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{r!} x^r = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad \forall x < 1, \quad (2.83)$$

verifica-se que o traço da matriz densidade (2.81) é igual a unidade, representando assim um estado físico acessível a um oscilador harmônico. Este estado foi proposto anteriormente por Argaval e Tara [38] para descrever um modo do campo de radiação adicionado de n fótons. Posteriormente propriedades não-clássicas foram estudadas por Baseia *et. al.* [39] e recentemente sua correlação com a Dinâmica de Campos Térmicos foi realizada por Khanna e colaboradores em [36], na perspectiva que apresentamos neste texto. O estado número termalizado (2.81), segundo Baseia [39], representa uma interpolação entre o estado caótico dado pela matriz densidade ρ_β com um estado número $|n\rangle$. Verifica-se que no limite de temperatura nula $T = \beta^{-1} = 0$, $\rho_{n(\beta)} \rightarrow |n\rangle\langle n|$ e conjuntamente, no limite de $|n\rangle \rightarrow |0\rangle$, $\rho_{n(\beta)} \rightarrow \rho_\beta$.

2.3.2 Estado arbitrário Termalizado

Em geral um estado arbitrário $|\psi(\beta)\rangle$ pode ser escrito na base de estados número termalizados, tal como

$$|\psi(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{n!} [u(\beta)]^n} \mathbb{A}^{\dagger n} |0(\beta)\rangle, \quad (2.84)$$

juntamente com a condição de normalização $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1$. Desta maneira podemos identificar que o operador $f(a, a^\dagger; \beta)$ é dado por

$$f(a, a^\dagger; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{n!} [u(\beta)]^n} a^{\dagger n}, \quad (2.85)$$

o que resulta em uma matriz densidade da forma

$$\rho_{\psi(\beta)} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{C_m^* C_n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!} [u(\beta)]^{m+n}} a^{\dagger n} \rho_\beta a^m. \quad (2.86)$$

A unitariedade do traço da matriz $\rho_{\psi(\beta)}$ pode ser verificada considerando que

$$\text{Tr}[a^{\dagger n} \rho_\beta a^m] = n! [u(\beta)]^{2n} \delta_{nm}, \quad (2.87)$$

que é consequência direta do fato da matriz ρ_β ser diagonal na base formada por estados número. Este resultado demonstra que qualquer combinação linear devidamente normalizada, de estados em \mathcal{H}_β esta associada a uma matriz densidade de traço unitário, correspondendo consequentemente a um estado de mistura acessível para um oscilador, incorporando efeitos

térmicos. Diversos outros estados podem ser estudados a partir desta construção e alguns deles estão presentes nos capítulos 12 e 13 em [36] tais como estados coerentes, estados números deslocados e estados comprimidos, para citar alguns.

2.4 Considerações Finais

Neste capítulo fizemos uma breve revisão sobre a Dinâmica de Campos Térmicos apresentada por Takahashi e Umezawa [35]. Tomamos como exemplo um oscilador bosônico quântico para construir o estado de vácuo térmico via uma transformação de Bogoliubov no vácuo duplicado e a partir disto apresentar o espaço de Hilbert Térmico. Posteriormente fizemos também uma breve apresentação dos desenvolvimentos recentemente apresentados por Khanna e colaboradores [36], para a obtenção de matrizes densidades associadas a estados termalizados de um subespaço \mathcal{H}_β . Finalizamos com a análise de um estado número termalizado e um estado arbitrário descrito na base de Fock. É relevante ressaltar que outros exemplos de estados termalizados, juntamente com algumas propriedades destes, podem ser encontrados em [36], de tal modo que preferimos omitir outros exemplos a fim de não alongar este texto.

Capítulo 3

Emaranhamento Quântico e Estados Termalizados

Neste capítulo vamos apresentar um estudo sobre o efeito da temperatura no emaranhamento quântico para estados bipartite termalizados. Para introduzir estes estados vamos realizar inicialmente uma extensão baseada na revisão feita no capítulo anterior, considerando inicialmente um sistema de N osciladores bosônicos. A DCT é utilizada juntamente com os desenvolvimentos apresentados nos capítulos 12 e 13 da referência [36]. Posteriormente vamos considerar como caso particular um sistema de dois osciladores e apresentar dois estados bipartite emaranhados. Finalizaremos analisando o efeito da temperatura no emaranhamento destes estados usando alguns critérios de identificação de emaranhamento.

3.1 Dinâmica de Campos Térmicos para N Osciladores

A Dinâmica de Campos Térmicos foi revisada no capítulo precedente e como exemplo estados termalizados de um oscilador bosônico foram discutidos. Vamos agora ao caso de N osciladores quantizados. Sabemos que o espaço de Hilbert deste sistema é dado por $\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ e o Hamiltoniano é dado por

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j, \quad \mathbf{H}_j = \omega_j \mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{a}_j, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{H}_j e \mathbf{H}_j são o espaço de Hilbert e o Hamiltoniano do j -ésimo oscilador respectivamente. Estamos usando a notação

$$\mathbf{A}_j = I_1 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes A_j \otimes \cdots \otimes I_N \quad (3.2)$$

para uma observável arbitrária A_j relacionada ao j -ésimo oscilador. Assim verificamos que os operadores de aniquilação e criação satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3)$$

Os autovetores do Hamiltoniano (3.1) são dados por

$$|\mathbf{n}\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle, \quad (3.4)$$

onde $|n_j\rangle$, $\forall j = 1, 2, \dots, N$ são autovetores dos Hamiltonianos \mathbf{H}_j . Desta maneira podemos escrever a equação de autovalor para o Hamiltoniano \mathbf{H} como sendo

$$\mathbf{H} |\mathbf{n}\rangle = (E_1 + \dots + E_N) |\mathbf{n}\rangle, \quad (3.5)$$

onde $E_j = n_j \omega_j$. A atuação dos operadores de criação e aniquilação nos estados número são dadas por

$$\mathbf{a}_j^\dagger |\mathbf{n}\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_N\rangle, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{a}_j |\mathbf{n}\rangle = \sqrt{n_j} |n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_N\rangle, \quad (3.7)$$

de modo que o estado de vácuo $|\mathbf{0}\rangle = |0_1, \dots, 0_N\rangle$ é definido, tal que

$$\mathbf{a}_j |\mathbf{0}\rangle = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.8)$$

De maneira semelhante a revisão feita no capítulo anterior, devemos introduzir o espaço fictício $\tilde{\mathcal{H}} = \bigotimes_{j=1}^N \tilde{\mathcal{H}}_j$ análogo a \mathcal{H} , para a partir do espaço duplicado $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ definir um espaço de Hilbert Térmico via uma transformação de Bogoliubov. Neste caso o Hamiltoniano "til" é dado por

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{H}}_j, \quad \tilde{\mathbf{H}}_j = \omega_j \tilde{\mathbf{a}}_j^\dagger \tilde{\mathbf{a}}_j, \quad (3.9)$$

preservando a mesma frequência ω_j . Vamos também neste caso usar a notação

$$\tilde{\mathbf{A}}_j = \tilde{I}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{A}_j \otimes \dots \otimes \tilde{I}_N \quad (3.10)$$

para uma observável arbitrária \tilde{A}_j . Os operadores de aniquilação e criação "til" satisfazem as relações de comutação idênticas a (3.3)

$$[\tilde{\mathbf{a}}_i, \tilde{\mathbf{a}}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.11)$$

O Hamiltoniano (3.9) deve satisfazer também uma equação de autovalor dada por

$$\tilde{\mathbf{H}} |\tilde{\mathbf{n}}\rangle = (E_1 + \cdots + E_N) |\tilde{\mathbf{n}}\rangle \quad (3.12)$$

onde

$$|\tilde{\mathbf{n}}\rangle = |\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \cdots, \tilde{n}_N\rangle = |\tilde{n}_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\tilde{n}_N\rangle \quad (3.13)$$

e sendo $|\tilde{n}_j\rangle$, $\forall j = 1, 2, \cdots, N$ autovetores dos Hamiltonianos $\tilde{\mathbf{H}}_j$. Os autovalores $E_j = n_j \omega_j$ são os mesmos da equação (3.5) para a que igualdade entre as médias térmicas seja preservada. A álgebra dos operadores de criação e aniquilação "til" também nos permite encontrar que

$$\tilde{\mathbf{a}}_j^\dagger |\tilde{\mathbf{n}}\rangle = \sqrt{n_j + 1} |\tilde{n}_1, \cdots, \tilde{n}_j + 1, \cdots, \tilde{n}_N\rangle, \quad (3.14)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_j |\tilde{\mathbf{n}}\rangle = \sqrt{n_j} |\tilde{n}_1, \cdots, \tilde{n}_j - 1, \cdots, \tilde{n}_N\rangle, \quad (3.15)$$

usando mais uma vez o rotulo "til" somente para diferenciar os graus de liberdade do espaço duplicado. Finalizamos então com a definição do estado de vácuo $|\tilde{\mathbf{0}}\rangle = |\tilde{0}_1, \cdots, \tilde{0}_N\rangle$, tal que

$$\tilde{\mathbf{a}}_j |\tilde{\mathbf{0}}\rangle = 0, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, N. \quad (3.16)$$

Vamos agora a discussão sobre o espaço de Hilbert Térmico para o caso de N osciladores.

3.1.1 Espaço de Hilbert Térmico para N Osciladores

Lembrando que o ponto de partida para a construção do espaço de Hilbert Térmico \mathcal{H}_T é a introdução do vetor cíclico $|\mathbf{0}(\beta)\rangle \in \mathcal{H}_T$, tal que a média térmica de uma observável arbitrária \mathbf{A}_j seja dada por

$$\langle \mathbf{A}_j \rangle_\beta = \langle \mathbf{0}(\beta) | \mathbb{A}_j | \mathbf{0}(\beta) \rangle, \quad (3.17)$$

lembrando que $\mathbb{A}_j = \mathbf{A}_j \otimes \tilde{\mathbf{I}}_j$. Para o caso de N osciladores a matriz densidade de que descreve um estado de equilíbrio térmico no ensemble canônico é dada por

$$\varrho_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \exp \left[\sum_{j=1}^N -\beta \mathbf{H}_j \right] = \frac{1}{Z(\beta)} \prod_{j=1}^N \exp \left[-\beta \omega_j \mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{a}_j \right]. \quad (3.18)$$

Considerando $Tr[\varrho_\beta] = 1$ encontramos

$$Z(\beta) = \prod_{j=1}^N Z_j(\beta), \quad Z_j(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_j}}. \quad (3.19)$$

Diante disto encontramos que a média térmica, via a mecânica quântica estatística, é dada por

$$\langle \mathbf{A}_j \rangle_\beta = \frac{1}{Z_j(\beta)} \sum_{m_j=0}^{\infty} \langle m_j | \mathbf{A}_j | m_j \rangle e^{-\beta\omega_j m_j} \quad (3.20)$$

Vamos denotar $|\mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}}\rangle = |\mathbf{m}\rangle \otimes |\tilde{\mathbf{m}}\rangle$ e assim escrever

$$|\mathbf{0}(\beta)\rangle = \sum_{\mathbf{m}=0}^{\infty} f_{\mathbf{m}}(\beta) |\mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}}\rangle \quad (3.21)$$

onde $\sum_{\mathbf{m}=0}^{\infty} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty}$ e $f_{\mathbf{m}}(\beta) = f_{m_1}(\beta) \cdots f_{m_N}(\beta)$. Desta maneira a média térmica calculada via o vetor cíclico (3.21) é igual a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{0}(\beta) | \mathbb{A}_j | \mathbf{0}(\beta) \rangle &= \sum_{\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{m}}=0}^{\infty} f_{\mathbf{n}}^*(\beta) f_{\mathbf{m}}(\beta) \langle \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}} | \mathbb{A}_j | \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}} \rangle \\ &= \sum_{m_j=0}^{\infty} |f_{m_j}(\beta)|^2 \langle m_j | \mathbf{A}_j | m_j \rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

o que nos permite encontrar

$$f_{m_j}(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega_j m_j/2}}{\sqrt{Z_j(\beta)}} \quad (3.23)$$

para que a igualdade entre as médias térmicas seja satisfeita. Com estas relações podemos escrever o estado (3.21) como sendo

$$\begin{aligned} |\mathbf{0}(\beta)\rangle &= \bigotimes_{j=1}^N \left(\sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\omega_j m_j/2}}{\sqrt{Z_j(\beta)}} |m_j, \tilde{m}_j\rangle \right) \\ &= \bigotimes_{j=1}^N \left(\sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\omega_j m_j/2} (\mathbb{A}_j^\dagger)^{m_j} (\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger)^{m_j}}{(m_j)! \sqrt{Z_j(\beta)}} |0_j, \tilde{0}_j\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

e utilizando novamente a identidade

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\log \cosh \alpha [A,B]} e^{\tanh \alpha A}$$

podemos reescrever

$$|\mathbf{0}(\beta)\rangle = \mathbf{U}(\beta) |\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}}\rangle = \left(\bigotimes_{j=1}^{\infty} U_j(\beta) \right) |\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}}\rangle, \quad U_j(\beta) = e^{i\mathbb{G}_j(\beta)} \quad (3.25)$$

onde $\mathbb{G}_j(\beta) = i\theta_j(\beta)(\mathbb{A}_j \tilde{\mathbb{A}}_j - \mathbb{A}_j^\dagger \tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger)$. Novamente os parâmetros $\theta_j(\beta)$ são definidos, para cada um dos osciladores independentemente, pelas relações

$$u_j(\beta) = \cosh \theta_j(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_j}}}, \quad (3.26)$$

$$v_j(\beta) = \sinh \theta_j(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega_j/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_j}}}. \quad (3.27)$$

De maneira análoga ao caso de um oscilador podemos também determinar os operadores termalizados

$$\mathbb{A}_j(\beta) = \mathbf{U}(\beta)\mathbb{A}_j\mathbf{U}^\dagger(\beta) = u_j(\beta)\mathbb{A}_j - v_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger, \quad (3.28)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_j(\beta) = \mathbf{U}(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j\mathbf{U}^\dagger(\beta) = u_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j - v_j(\beta)\mathbb{A}_j^\dagger, \quad (3.29)$$

$$\mathbb{A}_j^\dagger(\beta) = \mathbf{U}(\beta)\mathbb{A}_j^\dagger\mathbf{U}^\dagger(\beta) = u_j(\beta)\mathbb{A}_j^\dagger - v_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j, \quad (3.30)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger(\beta) = \mathbf{U}(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger\mathbf{U}^\dagger(\beta) = u_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger - v_j(\beta)\mathbb{A}_j, \quad (3.31)$$

e os operadores não termalizados

$$\mathbb{A}_j = u_j(\beta)\mathbb{A}_j(\beta) + v_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger(\beta), \quad (3.32)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_j = u_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j(\beta) + v_j(\beta)\mathbb{A}_j^\dagger(\beta), \quad (3.33)$$

$$\mathbb{A}_j^\dagger = u_j(\beta)\mathbb{A}_j^\dagger(\beta) + v_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j(\beta), \quad (3.34)$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger = u_j(\beta)\tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger(\beta) + v_j(\beta)\mathbb{A}_j(\beta), \quad (3.35)$$

Desta maneira definimos os estados de Fock que geram o espaço de Hilbert Térmico \mathcal{H}_T , a partir da atuação dos operadores de criação térmicos

$$|\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{m}}; (\beta)\rangle = \left[\bigotimes_{j=1}^N \frac{[\mathbb{A}_j^\dagger(\beta)]^{n_j} \tilde{\mathbb{A}}_j^\dagger(\beta)^{\tilde{m}_j}}{\sqrt{n_j! m_j!}} \right] |\mathbf{0}(\beta)\rangle = \mathbf{U}(\beta) |\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{m}}\rangle, \quad (3.36)$$

e assim um estado arbitrário é dado como sendo

$$|\psi(\beta)\rangle = \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{m}} C_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} |\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{m}}; (\beta)\rangle. \quad (3.37)$$

3.1.2 Estados Termalizados para N Osciladores

A implementação realizada por Khanna *et. al.* em [36] para a construção de um subespaço $\mathcal{H}_\beta \subset \mathcal{H}_T$, que preserva um isomorfismo com o espaço de Hilbert usual da mecânica quântica para um oscilador, pode ser estendida para o caso de N osciladores. Vamos então definir um subespaço \mathcal{H}_β fixando $\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{m}}_0 = 0$, de tal maneira que os estados de Fock sejam dados por

$$|\mathbf{n}(\beta)\rangle = \left(\bigotimes_{j=1}^N \frac{[\mathbb{A}_j^\dagger(\beta)]^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \right) |\mathbf{0}(\beta)\rangle. \quad (3.38)$$

Percebe-se também que a transformação $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\beta$, dada por

$$\mathcal{T}(|m_1, \dots, m_N\rangle) = \mathbf{U}(\beta) |\mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}}_0\rangle, \quad (3.39)$$

preserva o produto interno e é linear. Neste sentido podemos afirmar que o subespaço \mathcal{H}_β é isomorfo ao espaço *standard* da mecânica quântica \mathcal{H} para um sistema formado por N osciladores, tal qual o caso discutido no capítulo anterior. Os estados (3.38) formam também uma base do espaço de Hilbert termalizado \mathcal{H}_β e um estado arbitrário é portanto dado por

$$|\psi(\beta)\rangle = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} C_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}(\beta)\rangle. \quad (3.40)$$

Procedendo da mesma maneira que para o estado de um oscilador podemos obter que um estado arbitrário (3.40) pode ser escrito como

$$|\psi(\beta)\rangle = \mathbb{F}(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_1^\dagger, \dots, \mathbb{A}_N, \mathbb{A}_N^\dagger; \beta) |\mathbf{0}(\beta)\rangle. \quad (3.41)$$

Desta maneira a igualdade entre os valores esperados de uma observável \mathbb{A} , podemos identificar a matriz densidade

$$\varrho_{\psi(\beta)} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1^\dagger, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{A}_N^\dagger; \beta) \varrho_\beta f^\dagger(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1^\dagger, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{A}_N^\dagger; \beta) \quad (3.42)$$

associada ao estado arbitrário $\psi(\beta)$ e ϱ_β sendo a matriz densidade do estado de vácuo térmico (3.18).

Nesta seção fizemos um extensão da DCT para um sistema formado de N osciladores. Finalizamos apresentando um desenvolvimento equivalente ao apresentado em [36] para a construção de um subespaço térmico, que nos permite relacionar estados termalizados e suas respectivas matrizes densidade. Na próxima seção vamos apresentar alguns estados emaranhados bipartite, construídos com base neste formalismo e verificar o efeito da temperatura no emaranhamento destes estados.

3.2 Estados Termalizados Emaranhados Bipartite

Vamos agora desenvolver a análise de emaranhamento para um sistema formado de somente dois osciladores. Os estados termalizados serão introduzidos via a formulação da Dinâmica de Campos Térmicos conforme apresentado na seção anterior. O conceito de separabilidade de um estado de mistura é dado pela definição (2) apresentada no primeiro capítulo desta tese. Vamos relembrar que um estado bipartite é separável quando podem ser escritos da seguinte forma

$$\rho = \sum_{i=1}^k p_i (\rho_{i1} \otimes \rho_{i2}), \quad (3.43)$$

com $k \geq 1$, $\sum_i^k p_i = 1$ com p_i não-negativo e ρ_{i1} e ρ_{i2} as matrizes densidades dos dois osciladores individualmente. Um estado que não é separável é dito ser *emaranhado*. Como discutimos no primeiro capítulo a identificação do emaranhamento via a definição nem sempre é uma tarefa simples. Em geral usamos critérios ou quantificadores de emaranhamento a fim de obter as informações sobre o emaranhamento do sistema. Nos exemplos que apresentaremos a seguir, por se tratar de estados de mistura, vamos usar alguns identificadores para verificar o comportamento do emaranhamento em estados de equilíbrio térmico. Vamos denotar os dois osciladores por A e B .

3.2.1 Superposição de Estados de Número

Vamos analisar uma superposição de estados número termalizados dada por

$$\begin{aligned} |\psi(\beta)\rangle_{AB} &= \sqrt{p} |0, 1; \beta\rangle + \sqrt{1-p} |1, 0; \beta\rangle \\ &= \left[\sqrt{p} \mathbb{B}^\dagger(\beta) + \sqrt{1-p} \mathbb{A}^\dagger(\beta) \right] |0(\beta)\rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Usando a definição dos operadores (3.30) juntamente com

$$\tilde{\mathbb{A}} |0(\beta)\rangle = \frac{v_A(\beta)}{u_A(\beta)} \mathbb{A}^\dagger |0(\beta)\rangle, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathbb{B}} |0(\beta)\rangle = \frac{v_B(\beta)}{u_B(\beta)} \mathbb{B}^\dagger |0(\beta)\rangle, \quad (3.46)$$

que podem ser obtidas se lembrarmos que $\tilde{\mathbb{A}}(\beta) |0(\beta)\rangle = \tilde{\mathbb{B}}(\beta) |0(\beta)\rangle = 0$ com $\tilde{\mathbb{A}}(\beta)$ e $\tilde{\mathbb{B}}(\beta)$ dados por (3.29), podemos obter o estado (3.44) como

$$|\psi(\beta)\rangle_{AB} = \left[\frac{\sqrt{p}}{u_B(\beta)} \mathbb{B}^\dagger + \frac{\sqrt{1-p}}{u_A(\beta)} \mathbb{A}^\dagger \right] |0(\beta)\rangle. \quad (3.47)$$

Desta maneira percebemos que

$$f(a, a^\dagger, b, b^\dagger; \beta) = \frac{\sqrt{p}}{u_B(\beta)} b^\dagger + \frac{\sqrt{1-p}}{u_A(\beta)} a^\dagger, \quad (3.48)$$

e assim a matriz densidade deste estado é dada por

$$\rho_{\psi(\beta)} = \frac{p}{u_B^2(\beta)} b^\dagger \rho_\beta b + \frac{(1-p)}{u_A^2(\beta)} a^\dagger \rho_\beta a + \frac{\sqrt{p(1-p)}}{u_A(\beta)u_B(\beta)} (a^\dagger \rho_\beta b + b^\dagger \rho_\beta a). \quad (3.49)$$

Verifica-se que $Tr[\rho_{\psi(\beta)}] = 1$, se lembrarmos que $Tr[a^\dagger \rho_\beta a] = u_A^2(\beta)$, igualmente ao que foi discutido no capítulo dois desta tese. É perceptível também que no limite de temperatura

nula ($\beta \rightarrow \infty$) nos temos $\rho_\beta \rightarrow |0\rangle\langle 0|$ e $u_A(\beta) = u_B(\beta) = 1$, o que nos leva a obter

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_\beta &= p |0, 1\rangle\langle 0, 1| + (1 - p) |1, 0\rangle\langle 1, 0| \\ &+ \sqrt{p(1 - p)} (|1, 0\rangle\langle 0, 1| + |0, 1\rangle\langle 1, 0|), \end{aligned} \quad (3.50)$$

que é a matriz densidade de um estado puro dado por

$$|\psi\rangle = \sqrt{p} |0, 1\rangle + \sqrt{1 - p} |1, 0\rangle. \quad (3.51)$$

Outro limite relevante é quando fazemos as excitações de ambos os osciladores nulas. Neste caso a matriz (3.49) passa a ser a matriz do estado caótico (térmico) de dois osciladores, ou de dois modos da radiação de corpo negro. Podemos então interpretar o estado (3.44) como uma interpolação do estado de Bell (3.51) com o estado caótico de dois osciladores.

Como discutido no capítulo primeiro o estado de Bell (3.51) é emaranhado para $0 < p < 1$ e maximamente emaranhado para $p = 1/2$. Como ele é um estado puro foi possível quantificar o grau de emaranhamento via a entropia de von Neumann. Contudo, o estado (3.44) é um estado de mistura e conforme discutido anteriormente, a quantificação do grau de emaranhamento neste caso ainda consiste em um problema não solucionado.

Diante disto vamos analisar o efeito da temperatura no emaranhamento deste estado analisando um critério de identificação de emaranhamento apresentado anteriormente, a saber o critério de Shchukin e Vogel.

Critério de Shchukin e Vogel

A opção para a utilização deste critério consiste no fato de que para um estado de Bell a temperatura nula, o critério de Simon é não conclusivo enquanto que Shchukin-Vogel apresenta uma solução satisfatória. Essa diferença de resultados se baseia no fato de que os estados (3.44) não são estados Gaussianos¹. Como já dissemos anteriormente o critério do Simon somente é uma condição necessária e suficiente para a identificação de emaranhamento em estados gaussianos.

O critério Shchukin-Vogel foi apresentado na seção (1.3.3), de tal modo que a reapresentação será omitida. Vamos relembrar somente que a identificação de emaranhamento

¹Estados Gaussianos são definidos como aqueles estados para os quais a função característica no espaço de fase é Gaussiana.

segundo este critério pode ser implementada via o determinante da matriz

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & \langle \mathbb{B}^\dagger \rangle & \langle \mathbb{A}\mathbb{B}^\dagger \rangle \\ \langle \mathbb{B} \rangle & \langle \mathbb{B}^\dagger \mathbb{B} \rangle & \langle \mathbb{A}\mathbb{B}^\dagger \mathbb{B} \rangle \\ \langle \mathbb{A}^\dagger \mathbb{B} \rangle & \langle \mathbb{A}^\dagger \mathbb{B}^\dagger \mathbb{B} \rangle & \langle \mathbb{A}^\dagger \mathbb{A}\mathbb{B}^\dagger \mathbb{B} \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Segundo Shchukin-Vogel um estado é emaranhado quando $Det(\mathbb{S}) < 0$.

Objetivando encontrar o $Det(\mathbb{S})$ devemos inicialmente calcular os valores esperados que descrevem os elementos da matriz. Considerando o sistema de dois osciladores que estamos estudando temos que

$$\mathbb{A}^\dagger = u_A(\beta)\mathbb{A}^\dagger(\beta) + v_A(\beta)\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta), \quad (3.53)$$

$$\mathbb{B}^\dagger = u_B(\beta)\mathbb{B}^\dagger(\beta) + v_B(\beta)\tilde{\mathbb{B}}^\dagger(\beta) \quad (3.54)$$

e

$$\mathbb{A} = u_A(\beta)\mathbb{A}(\beta) + v_A(\beta)\tilde{\mathbb{A}}^\dagger(\beta), \quad (3.55)$$

$$\mathbb{B} = u_B(\beta)\mathbb{B}(\beta) + v_B(\beta)\tilde{\mathbb{B}}^\dagger(\beta). \quad (3.56)$$

Assim os valores esperados não nulos são dados por

$$\alpha_1 = \langle \mathbb{A}\mathbb{B}^\dagger \rangle = \langle \mathbb{A}^\dagger \mathbb{B} \rangle = \sqrt{p(1-p)}u_A(\beta)u_B(\beta), \quad (3.57)$$

$$\alpha_2 = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^\dagger \rangle = p u_B^2(\beta) + v_B^2(\beta), \quad (3.58)$$

$$\alpha_3 = \langle \mathbb{A}^\dagger \mathbb{A}\mathbb{B}^\dagger \mathbb{B} \rangle = (1-p) u_A^2(\beta)v_B^2(\beta) + p v_A^2(\beta)u_B^2(\beta) + v_A^2(\beta)v_B^2(\beta). \quad (3.59)$$

Desta maneira obtemos

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

e conseqüentemente

$$Det(\mathbb{S}) = \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_1^2). \quad (3.61)$$

Para efeito dos cálculos vamos considerar os osciladores idênticos $\omega_A = \omega_B = \omega$ e em equilíbrio térmico, ou seja $u_A^2(\beta) = u_B^2(\beta) = 1 + \bar{n}(\beta)$ e $v_A^2(\beta) = v_B^2(\beta) = \bar{n}(\beta)$ onde

$$\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (3.62)$$

é a distribuição de Bose-Einstein. Assim podemos encontrar $\bar{n}_c(p)$ como sendo valor crítico para que o estado deixe de ser emaranhado para os diversos valores de p . Da equação (3.61) percebemos que $\bar{n}_c(p)$ é obtido quando fazemos $\alpha_3 = \alpha_1^2$. Esta igualdade nos leva a uma equação de segundo grau dada por

$$x^2 + x = p(1 - p), \quad x = \frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)}. \quad (3.63)$$

A variável x é obviamente não negativa, de tal modo que vamos analisar somente a raiz positiva x_0 da equação acima, resultando portanto em

$$\bar{n}_c(p) = \frac{x_0}{1 - x_0}, \quad x_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4p(1 - p)}. \quad (3.64)$$

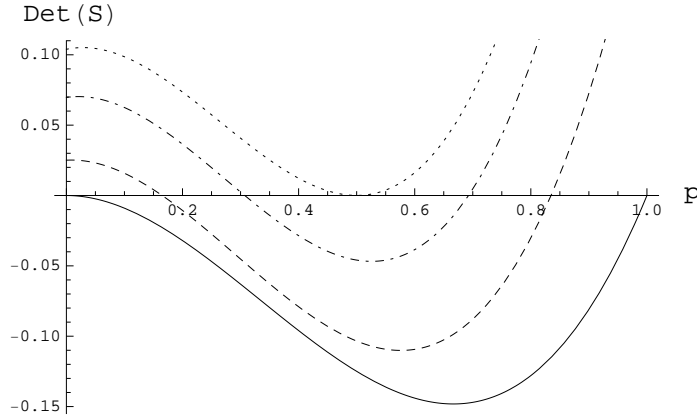


Figura 3.1: $Det(\mathbb{S}) \times p$ para uma superposição de estados número termalizados. Linha contínua $\bar{n}(\beta) = 0,0$, linha tracejada $\bar{n}(\beta) = 0,14$, linha traço-pontilhada $\bar{n}(\beta) = 0,22$ e a linha pontilhada $\bar{n}(\beta) = 0,2612$.

Na figura (3.1) encontram-se algumas curvas $Det(\mathbb{S}) \times p$ considerando alguns valores do parâmetro $\bar{n}(\beta)$ que depende da temperatura. Observamos que para temperatura nula ($\bar{n}(\beta) = 0,0$) o estado é completamente emaranhado para qualquer valor de $0 < p < 1$. Somente para os valores de $p = 0$ e $p = 1$ o estado torna-se não emaranhado como já era esperado. Verificamos também que para temperaturas finitas é possível existir emaranhamento até o valor limite de $\bar{n}(\beta) = 0,2612$. Este valor do fator de Bose-Einstein corresponde a temperatura na qual o estado maximamente emaranhado ($p = 1/2$) deixa de ser emaranhado.

A figura (3.2) representa um contorno de $\bar{n}_c(p) \times p$. Percebemos que o maior valor crítico do fator de Bose-Einstein é justamente para um valor de $p = 0,5$ ($\bar{n}_c = 2612$). Como discutido

no capítulo primeiro este estado a temperatura nula corresponde ao emaranhamento máximo, como pode ser verificado na figura (1.3). Outra observação importante neste caso é que na figura (3.2) percebe-se o comportamento simétrico, ou seja se fizermos a substituição de $p = 1 - q$ o comportamento da temperatura crítica do emaranhamento não se altera como era esperado.

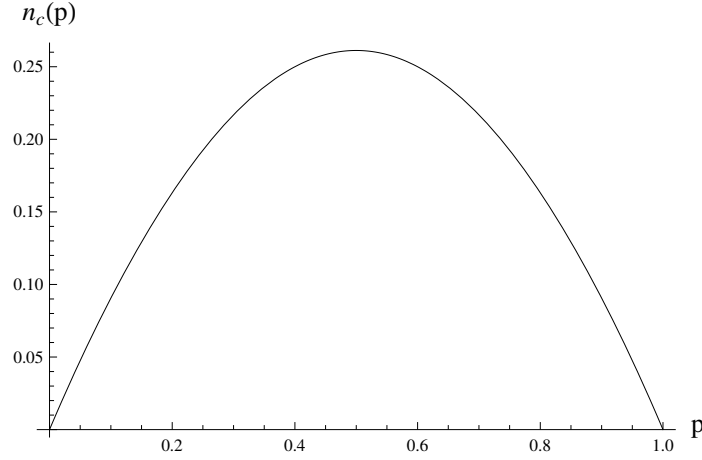


Figura 3.2: Gráfico de $\bar{n}_c(p) \times p$ para a superposição de estados número termalizados.

3.2.2 Estados Comprimidos Termalizados de Dois Osciladores

Outro estado relevante para o estudo de emaranhamento é o estado comprimido. No capítulo introdutório demonstramos que este estado possui um emaranhamento crescente proporcional ao fator de compressão, ver figura (1.4). Este estado foi proposto inicialmente para a detecção de ondas gravitacionais [40, 41] e implementado experimentalmente [42] em 1985. Posteriormente diversas aplicações destes estados apareceram, tal como em espectroscopia [43]. Vamos considerar um estado comprimido termalizado de dois osciladores dado por

$$|\zeta(\beta)\rangle = \mathbb{S}(\zeta, \beta) |0(\beta)\rangle, \quad (3.65)$$

onde $\zeta = r \exp(i\phi)$ e

$$\mathbb{S}(\zeta, \beta) = \exp [\zeta \mathbb{A}^\dagger(\beta) \mathbb{B}^\dagger(\beta) - \zeta^* \mathbb{A}(\beta) \mathbb{B}(\beta)]. \quad (3.66)$$

Vamos usar novamente a identidade

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\log \cosh \alpha [A, B]} e^{\tanh \alpha A}.$$

Fazendo $A = -e^{-i\phi} \mathbb{A}(\beta) \mathbb{B}(\beta)$, $B = e^{i\phi} \mathbb{A}^\dagger(\beta) \mathbb{B}^\dagger(\beta)$ e $\alpha = r$ nos obtemos

$$|\zeta(\beta)\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \exp[\tanh r e^{i\phi} \mathbb{A}^\dagger(\beta) \mathbb{B}^\dagger(\beta)] |0(\beta)\rangle. \quad (3.67)$$

Usando novamente a definição dos operadores de criação termalizados dada por (3.30) e as relações (3.45) e (3.46) nos obtemos

$$|\zeta(\beta)\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \exp\left[\frac{e^{i\phi} \tanh r}{u_A(\beta) u_B(\beta)} \mathbb{A}^\dagger \mathbb{B}^\dagger\right] |0(\beta)\rangle. \quad (3.68)$$

Desta maneira a função $f(a, a^\dagger, b, b^\dagger; \beta)$ esta definida e podemos associar ao estado $|\zeta(\beta)\rangle$ a matriz densidade

$$\rho_{\zeta(\beta)} = \frac{1}{\cosh^2(r)} \exp\left(\frac{e^{i\theta} \tanh r}{u_a(\beta) u_b(\beta)} a^\dagger b^\dagger\right) \rho_\beta \exp\left(\frac{e^{-i\theta} \tanh r}{u_a(\beta) u_b(\beta)} ab\right). \quad (3.69)$$

Assim o estado $|\zeta(\beta)\rangle$ pode ser interpretado como uma interpolação entre o estado de vácuo comprimido de dois osciladores com o estado caótico. Podemos verificar essa afirmação analisando os limites de interesses. Primeiramente o limite de temperatura nula ($\beta^{-1} = 0$) temos $\rho_\beta \rightarrow |0\rangle \langle 0|$. Quando fazemos o limite $r \rightarrow 0$, obtemos $\rho_{\zeta(\beta)} \rightarrow \rho_\beta$ pelo fato de que o

$$\lim_{r \rightarrow 0} \cosh r = 1 \quad (3.70)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tanh r = 0. \quad (3.71)$$

Outra observação importante neste caso é que ambos os estados, o comprimido e o caótico, são estados Gaussianos, de tal maneira que o estado (3.65) preserva a Gaussianidade. Neste caso portanto podemos utilizar como identificador de emaranhamento o critério estabelecido por Simon [20]. É salutar lembrar que o critério do Simon é baseado em uma desigualdade construída a partir da matriz de variância, cujos elementos são obtidos a partir dos valores esperados do anticomutador dos operadores $\Delta \xi_j = \xi_j - \langle \xi_j \rangle$, sendo $\xi = (q_A \ p_A \ q_B \ p_B)$. Representando a matriz de variância \mathbb{V} em blocos de matrizes 2×2 temos

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^T & \mathbb{B} \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

a desigualdade que deve ser satisfeita para que um estado seja não emaranhado é

$$\det \mathbb{A} \det \mathbb{B} + \left(\frac{1}{4} - |\det \mathbb{C}|\right)^2 - Tr [\mathbb{A} \mathbb{J} \mathbb{C} \mathbb{J} \mathbb{B} \mathbb{J} \mathbb{C}^T \mathbb{J}] \geq \frac{1}{4} (\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B}). \quad (3.73)$$

A desigualdade (3.73) é satisfeita para todo valor positivo da grandeza E definida por

$$E = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B} + \left(\frac{1}{4} - |\det \mathbb{C}| \right)^2 - \text{Tr} [\mathbb{A} \mathbb{J} \mathbb{C} \mathbb{J} \mathbb{B} \mathbb{J} \mathbb{C}^T \mathbb{J}] - \frac{1}{4} (\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B}). \quad (3.74)$$

Assim sendo, podemos afirmar que um estado é emaranhado quando E for negativo. Os operadores \mathbb{Q} e \mathbb{P} que são utilizados para se determinar os elementos da matriz de variância, são dados por

$$\mathbb{Q}_i = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} (\mathbb{A}_i + \mathbb{A}_i^\dagger), \quad (3.75)$$

$$\mathbb{P}_i = -i \sqrt{\frac{\omega_i}{2}} (\mathbb{A}_i - \mathbb{A}_i^\dagger), \quad (3.76)$$

de tal forma que, o precisamos calcular em verdade são os valores esperados de produtos dos operadores $\mathbb{A}^\dagger, \mathbb{B}^\dagger, \mathbb{A}$ e \mathbb{B} . Realizados os cálculos os elementos não nulos da matriz de variância são dados por

$$\omega^2 \mathbb{V}_{11} = \mathbb{V}_{22} = \omega \left(u_a^2(\beta) \cosh^2(r) - \frac{1}{2} \right) \quad (3.77)$$

$$\omega^2 \mathbb{V}_{13} = -\mathbb{V}_{24} = \omega u_a(\beta) u_b(\beta) \cosh r \sinh r \cos \phi \quad (3.78)$$

$$\mathbb{V}_{14} = \mathbb{V}_{23} = -i u_a(\beta) u_b(\beta) \cosh r \sinh r \sin \phi \quad (3.79)$$

$$\omega^2 \mathbb{V}_{33} = \mathbb{V}_{44} = \omega \left(u_b^2(\beta) \cosh^2(r) - \frac{1}{2} \right) \quad (3.80)$$

Para efeito de cálculo vamos também neste caso considerar dois osciladores idênticos e em equilíbrio térmico. Assim devemos fazer $\omega_A = \omega_B = \omega$ e conseqüentemente $u_A^2(\beta) = u_B^2(\beta) = 1 + \bar{n}(\beta)$ e $v_A^2(\beta) = v_B^2(\beta) = \bar{n}(\beta)$. Vamos também considerar $\phi = 0$. Com essas considerações nos obtemos

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

sendo

$$\alpha_1 = (1 + \bar{n}(\beta)) \cosh^2(r) - \frac{1}{2}, \quad (3.82)$$

$$\alpha_2 = (1 + \bar{n}(\beta)) \cosh r \sinh r. \quad (3.83)$$

Desta maneira a igualdade (3.74) é dada por

$$E(r, \beta) = \alpha_1^4 + \left(\frac{1}{4} - \alpha_2^2 \right)^2 - 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2. \quad (3.84)$$

Realizando as devidas simplificações nos obtemos

$$E(r, \beta) = \cosh^4(r) \left((1 + \bar{n}(\beta))^4 - 2(1 + \bar{n}(\beta))^3 \right) + \cosh^2(r) (1 + \bar{n}(\beta))^2. \quad (3.85)$$

Da equação (3.85) verificamos claramente que $E(r, \beta) \geq 0$ para todo valor de $\bar{n}(\beta) \geq 1$, que obtemos fazendo $(1 + \bar{n}(\beta))^4 \geq 2(1 + \bar{n}(\beta))^3$. Ou seja, para uma temperatura tal que $\bar{n}(\beta) < 1$, podemos encontrar estados comprimidos que possuem emaranhamento a temperatura finita.

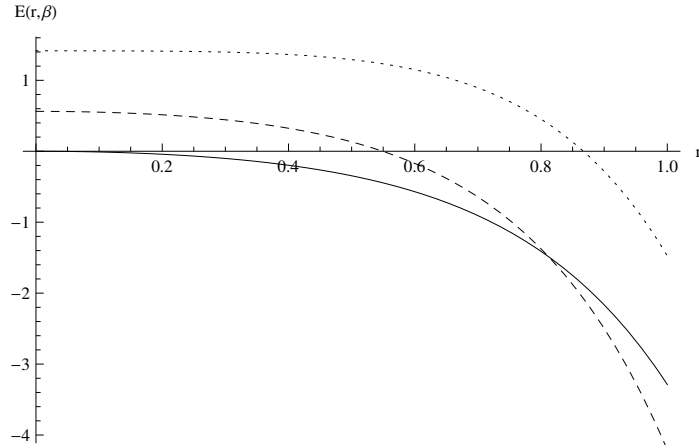


Figura 3.3: Gráfico de $E(r, \beta) \times r$ para um estado comprimido termalizado para diferentes valores de $\bar{n}(\beta)$: Linha contínua $\bar{n}(\beta) = 0.0$, linha tracejada $\bar{n}(\beta) = 0.5$ e linha pontilhada $\bar{n}(\beta) = 0.7$.

Na figura (3.3) encontram-se o comportamento de $E(r, \beta)$ em função do parâmetro de compressão r do estado comprimido (3.65), para diversas temperaturas aonde $\bar{n}(\beta) < 1$. Verificamos que para temperatura nula ($\bar{n}(\beta) = 0.0$) o estado é emaranhado para qualquer valor de $r \neq 0$. Para valores de temperatura não nulas existe um valor crítico para o parâmetro de compressão aonde o estado passa a ser emaranhado, isto pode ser visto na transição de valores positivos para os negativos da função $E(r, \beta)$.

Na figura (3.4) demonstramos o comportamento de $E(r, \beta)$ em função do parâmetro de temperatura $\bar{n}(\beta)$ do estado comprimido (3.65), para diversos valores de r . Verificamos que para $r = 0$ o estado não possui nenhum emaranhamento para qualquer temperatura. Para os outros valores percebemos que em baixas temperaturas o estado apresenta algum grau de emaranhamento, a medida que a temperatura se eleva o estado deixa de ser emaranhado. Esta temperatura crítica é diferente para diversos valores de r , o que nos leva imediatamente a se questionar qual a dependência de \bar{n}_c com o parâmetro r . Se fizermos então $E(r, \beta) = 0$

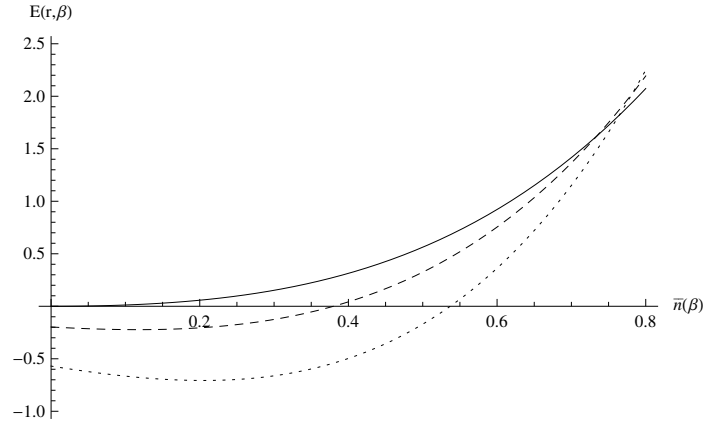


Figura 3.4: Gráfico de $E(r, \beta) \times \bar{n}(\beta)$ para um estado comprimido termalizado para diferentes valores de r : Linha contínua $r = 0.0$, linha tracejada $r = 0.4$ e linha pontilhada $r = 0.6$.

encontramos uma equação do segundo grau para uma variável $x = 1 + \bar{n}(\beta)$. A solução desta equação nos permite encontrar

$$\bar{n}_c(r) = \sqrt{\frac{\cosh^2(r) - 1}{\cosh^2(r)}}. \quad (3.86)$$

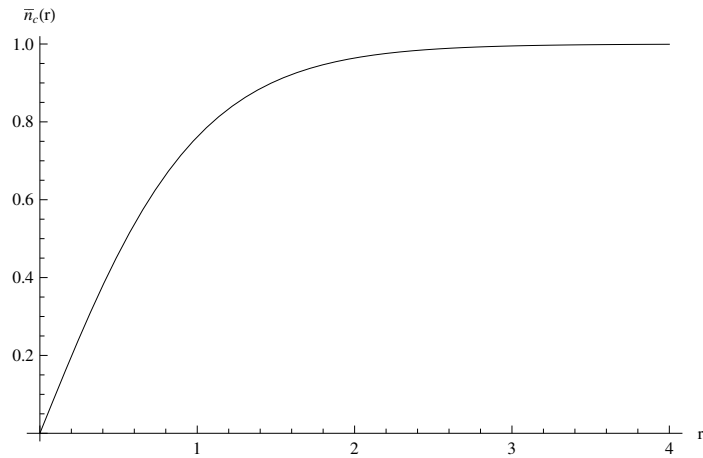


Figura 3.5: Gráfico do valor de $\bar{n}_c(r) \times r$.

Este resultado concorda perfeitamente com a discussão anterior sobre o valor limite de $\bar{n}(\beta)$, tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{n}_c(r) = 1. \quad (3.87)$$

Na figura (3.5) nos demonstramos o comportamento de $\bar{n}_c(r)$, aonde o limite assintó-

tico pode ser visualizado. O resultado relevante para este estado é o valor limite para o parâmetro crítico $\bar{n}_c(r)$. O fato de encontrarmos que para valores $\bar{n}(\beta) \geq 1$ não é possível encontrar nenhum emaranhamento independentemente do valor do fator de compressão r esta em acordo com o comportamento esperado, ou seja, que para altas temperaturas as propriedades quânticas tendem a desaparecer, especificamente neste caso o desaparecimento do emaranhamento.

3.3 Considerações Finais

Neste capítulo fizemos uma discussão sobre estados de equilíbrio térmico de osciladores bosônicos obtidos via a formulação conhecida como Dinâmica de Campos Térmicos. Demonstramos que para temperaturas elevadas o emaranhamento tende a desaparecer para dois estados estudados. Em ambos os casos verificou-se também que para temperaturas finitas baixas ainda se preserva algum grau de emaranhamento. Os valores críticos para estas temperaturas também foram encontrados e analisados em ambos os casos.

Capítulo 4

Estados Vestidos e Processos de Termalização

Nesta segunda parte da tese iremos analisar a evolução temporal do emaranhamento para sistemas atômicos acoplados com um ambiente a temperatura finita. Estamos interessados em perceber o efeito do processo de termalização em estados inicialmente emaranhados. Processos de termalização ocorrem quando um sistema material interage com um ambiente que se encontra a uma dada temperatura. Em geral, o estudo desses processos requer a utilização de teoria de perturbação, o que leva necessariamente a um tratamento aproximado. Uma dificuldade natural para se implementar tratamentos analíticos nesses processos, se deve ao caráter não linear das interações entre as partículas e o ambiente.

Um tratamento analítico para sistemas interagentes partícula + campo confinados em cavidades, foi proposto por Andion, Malbouisson e Matos Neto [44]. Neste trabalho os autores consideram um modelo linear simplificado de interação e aplicam *coordenadas re-normalizadas* e *estados vestidos*. Esse modelo se apresenta como uma boa aproximação de um tratamento analítico não perturbativo de sistemas acoplados.

Posteriormente Malbouisson *et. al.* [45, 46] estudaram os efeitos da temperatura em sistemas confinados, usando o modelo apresentado por Andion *et. al.* [44]. Eles comprovaram [45] que para o espaço livre, ou seja para uma cavidade infinitamente grande ($R \rightarrow \infty$), a configuração final do sistema não carrega nenhuma informação do seu estado inicial. Eles demonstraram também que para cavidades pequenas [46] alguma memória da excitação inicial é preservada, diferenciando-o este comportamento do regime de espaço livre. Vamos revisar neste capítulo estes estudos sobre processos de termalização para os dois regimes de

cavidades. Esses resultados são de fundamental importância para análise do emaranhamento em sistemas confinados que desenvolveremos no capítulo seguinte.

4.1 Osciladores Acoplados

O ponto de partida do trabalho de Andion *et. al.* é considerar um sistema composto de osciladores harmônicos acoplados, confinados em uma cavidade esférica de raio R . Eles consideram uma partícula, que doravante chamaremos de átomo, em uma aproximação harmônica, acoplada com um ambiente (campo), modelado como uma superposição de osciladores harmônicos. A frequência de oscilação livre da partícula é denotada por ω_0 e ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$ são as frequências dos n osciladores que modelam o ambiente. O Hamiltoniano que descreve um sistema de $n + 1$ osciladores acoplados é

$$H = \frac{1}{2} \left\{ p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^n (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \right\} - \sum_{k=1}^n c_k q_0 q_k, \quad (4.1)$$

onde c_k são as constantes de acoplamento. Do formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica, podemos obter as seguintes equações de movimento para os osciladores

$$\ddot{q}_0(t) + \omega_0^2 q_0(t) = \sum_{k=1}^n c_k q_k(t), \quad (4.2)$$

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = c_k q_0(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

As equações acima formam um sistema de $n + 1$ equações acopladas. Uma maneira de solucionar este sistema de equações é utilizar uma transformação de coordenadas, tal que no novo sistema de coordenadas as equações de movimento sejam desacopladas. Pode-se implementar essa transformação via uma matriz ortonormal.

Definição 4 *Um matriz A é dita ser ortonormal se, e somente se ela satisfaz as seguintes condições*

$$AA^T = A^T A = 1, \quad (\text{Ortogonalidade}), \quad (4.4)$$

$$AA^* = A^* A, \quad (\text{Normalidade}). \quad (4.5)$$

É consequência direta da definição acima que $\sum_{l=1}^m A_l^i A_l^j = \sum_{l=1}^m A_l^i A_l^j = \delta_{i,j}$. Vamos então supor uma matriz ortonormal $T = (t_\mu^r)$, onde $\mu, r = (0, \{k\})$ com 0 referente a partícula e $1 \leq k \leq n$ referente aos modos do campo, tal que

$$q_\mu(t) = \sum_{r=0}^n t_\mu^r Q_r(t), \quad p_\mu(t) = \sum_{r=0}^n t_\mu^r P_r(t). \quad (4.6)$$

Se aplicarmos as transformações (4.6) nas equações de movimento (4.2) e (4.3), obtemos as seguintes equações nas novas coordenadas

$$\sum_{r=0}^n \left\{ t_0^r \ddot{Q}_r(t) + \omega_0^2 t_0^r Q_r(t) \right\} = \sum_{r=0}^n \sum_{k=1}^n c_k t_k^r Q_r(t), \quad (4.7)$$

$$\sum_{r=0}^n \left\{ t_k^r \ddot{Q}_r(t) + \omega_k^2 t_k^r Q_r(t) \right\} = \sum_{r=0}^n c_k t_0^r Q_r(t). \quad (4.8)$$

Essas equações nos permitem escrever um conjunto de equações dadas por

$$\sum_{r=0}^n t_\mu^r \left(\ddot{Q}_r(t) + \Omega_r^2 Q_r(t) \right) = 0, \quad (4.9)$$

desde que as condições abaixo sejam satisfeitas

$$t_k^r \Omega_r^2 = t_k^r \omega_k^2 - c_k t_0^r, \quad (4.10)$$

$$t_0^r \Omega_r^2 = t_0^r \omega_0^2 - \sum_{k=1}^n c_k t_k^r. \quad (4.11)$$

Para que a equação (4.9) seja verdadeira devemos fazer

$$\ddot{Q}_r(t) + \Omega_r^2 Q_r(t) = 0, \quad \forall 0 \leq r \leq n, \quad (4.12)$$

que são equações desacopladas nas novas coordenadas. As equações acima podem ser obtidas de um Hamiltoniano $H = H(Q_r, P_r)$ diagonal

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^n (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2). \quad (4.13)$$

Ou seja, aplicando as transformações (4.6) nas equações de movimento (4.2) e (4.3), obtemos um conjunto de $n + 1$ equações desacopladas, que podem ser oriundas de um Hamiltoniano diagonal. Não obstante, os elementos da matriz de transformação devem satisfazer as condições impostas pelas equações (4.10) e (4.11) juntamente com a condição de ortonormalidade

$$\sum_{r=0}^{\infty} t_r^\mu t_r^\nu = \sum_{r=0}^{\infty} t_\mu^r t_\nu^r = \delta_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

É notório que da primeira condição (4.10) podemos escrever

$$t_k^r = \frac{c_k}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} t_0^r, \quad (4.15)$$

e usando (4.14) demonstra-se que

$$t_0^r = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n \frac{c_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)^2} \right\}^{-1/2}. \quad (4.16)$$

Essas equações definem os elementos da matriz de transformação, que dependem da constante de acoplamento c_k , das frequências dos modos do campo ω_k e das frequências dos modos normais Ω_r . Falta ainda encontrar uma relação entre as frequências Ω_r e os parâmetros conhecidos do sistema. Usando a segunda condição (4.11), obtemos uma relação entre essas frequências dos modos normais de oscilação com as outras grandezas envolvidas, que é dada por

$$\omega_0^2 - \Omega_r^2 = \sum_{k=1}^n \frac{c_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)}. \quad (4.17)$$

Agora estamos com três equações que nos permitem solucionar o problema. Da equação (4.17) podemos, ao menos em princípio, encontrar os frequências normalizadas Ω_r . Com este resultado podemos obter t_0^r com a equação (4.16) e por fim, o restante dos elementos de matriz dados pela relação (4.15).

A solução do problema depende da forma de interação entre a partícula e os osciladores que modelam o campo. Se verificarmos na equação (4.17), a convergência da série depende da constante de acoplamento c_k . Se fizermos $c_k = \eta\omega_k^u$, com $u < 1$, a série converge e as frequências ω_0 são bem definidas. Mas como dissemos no início do capítulo, o modelo considerado é linear na interação, de tal maneira que $c_k = \eta\omega_k$ e nesta condição, a série é divergente no limite $n \rightarrow \infty$.

Uma maneira de solucionar esse problema é se fizermos a seguinte mudança de variável $\xi_k^2 = \omega_k^2 - \Omega_r^2$ no lado direito da equação (4.17). Dessa maneira teremos

$$\sum_{k=1}^n \frac{\eta^2 \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} = \eta^2 \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{\Omega_r^2}{\xi_k^2} \right), \quad (4.18)$$

e assim podemos reescrever (4.17) como

$$\bar{\omega}^2 - \Omega_r^2 = \eta^2 \Omega_r^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)}, \quad (4.19)$$

onde

$$\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 - n\eta^2. \quad (4.20)$$

Dessa forma a divergência em ω_0 é compensada pelo termo $n\eta^2$ na equação acima, de tal maneira que $\bar{\omega}$ é convergente no mesmo limite $n \rightarrow \infty$. Verifica-se também que se $\omega_0^2 > n\eta^2$, todas as frequências dos modos normais são positivas, significando que o sistema oscila harmonicamente em todos os modos e portanto este é o regime de comportamento do sistema que será considerado.

Sabemos que o sistema se encontra confinado em uma cavidade esférica de raio R de tal modo que as autofrequências dos modos do campo são dadas por $\omega_k = \frac{k\pi c}{R}$, sendo $k = 1, 2, \dots, \infty$. Estamos considerando o limite da interação partícula + ambiente ($n \rightarrow \infty$). Vamos também definir uma constante g , com dimensão de frequência, associada a interação tal que $g = \frac{\eta^2}{2\Delta\omega}$, com $\Delta\omega = \frac{\pi c}{R}$. A série da equação (4.19) pode então ser reescrita como sendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_k^2 - \Omega_r^2)} = \frac{R^2}{\pi^2 c^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - u_r^2)}, \quad (4.21)$$

onde fizemos $u_r = \frac{\Omega_r R}{\pi c}$. Considerando a identidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - u_r^2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{u_r^2} - \frac{\pi}{u_r} \cot(\pi u_r) \right], \quad (4.22)$$

chegamos a seguinte relação

$$\cot\left(\frac{\Omega_r R}{c}\right) = \frac{c}{R\Omega_r} \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2 R}{\pi g c}\right) + \frac{\Omega_r}{\pi g}. \quad (4.23)$$

Esta equação nos permite encontrar o espectro das autofrequências dos modos normais de oscilação. Voltaremos a esse problema mais adiante.

Falta agora escrever os elementos da matriz T em função grandezas com significado físico $\bar{\omega}$ e Ω_r . Para isso vamos considerar inicialmente os elementos t_0^r dados por (4.16). Usando novamente a transformação de variável $\xi_k^2 = \omega_k^2 - \Omega_r^2$, podemos obter

$$t_0^r = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^2}{\xi_k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^2 \Omega_r^2}{\xi_k^4} \right\}^{-1/2}. \quad (4.24)$$

O primeiro somatório do lado direito da equação acima resulta, usando a equação (4.19), em

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^2}{\xi_k^2} = \frac{\bar{\omega}^2 - \Omega_r^2}{\Omega_r^2}. \quad (4.25)$$

Vejamos agora o segundo somatório. Usando a identidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - a^2)^2} = \frac{-2 + a\pi \cot(a\pi) + a^2 \pi^2 \csc^2(a\pi)}{4a^4}, \quad (4.26)$$

juntamente com a relação trigonométrica $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$, e aplicando a equação (4.23), após as manipulações matemáticas devidas, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^2 \Omega_r^2}{\xi_k^4} = \frac{1}{\eta^2 \Omega_r^2} \left\{ \pi^2 g^2 \Omega_r^2 + \frac{3}{2} \eta^2 (\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + (\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 \right\}. \quad (4.27)$$

Dessa maneira podemos escrever então

$$t_0^r = \frac{\eta\Omega_r}{\sqrt{(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{\eta^2}{2}(3\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \pi^2 g^2 \Omega_r^2}}, \quad (4.28)$$

$$t_k^r = \frac{\eta\omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r. \quad (4.29)$$

Temos então os elementos t_μ^r da transformação descritos em função da variáveis físicas de interesse, ou seja, das frequências dos modos normais Ω_r , da frequência renormalizada $\bar{\omega}$, das constantes η e g , que estão relacionadas ao regime de acoplamento como discutiremos adiante.

A introdução da frequência renormalizada $\bar{\omega}$ é um procedimento equivalente a transformação do Hamiltoniano (4.1) para um Hamiltoniano renormalizado dado por $H \rightarrow H - \frac{1}{2}n\eta^2 q_0^2$. Este Hamiltoniano descreve um sistema de $n + 1$ osciladores acoplados sendo $\bar{\omega}$ a frequência renormalizada de oscilação da partícula.

4.2 Estados Vestidos

A quantização para este sistema é implementada partindo do Hamiltoniano em coordenadas normais

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2).$$

Este Hamiltoniano descreve um sistema de osciladores desacoplados de tal modo que suas autofunções na representação coordenada, usando a descrição de Schrödinger, são dadas por

$$\Phi_{n_0, \dots, n_\infty}(Q, t) = \prod_{s=0}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{2n_s}{n_s!}} H_{n_s} \left(\sqrt{\Omega_s} Q_s \right) \right] \Gamma^0 e^{-i \sum_s n_s \Omega_s t}, \quad (4.30)$$

onde fizemos $\hbar = 1$. As funções H_{n_s} são polinômios de Hermite e Γ^0 é a autofunção normalizada do estado fundamental

$$\Gamma^0 = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \Omega_r^2 Q_r^2}. \quad (4.31)$$

Para introduzir os estados vestidos, Andion *et. al.* [44] utilizaram uma relação entre polinômios de Hermite dada por¹

$$\sum_{m_1 + \dots + m_s = N} \left[\prod_{i=1}^s \frac{a_i^{m_i}}{m_i!} H_{m_i}(x_i) \right] = \frac{(\sum_{i=1}^s a_i^2)^{N/2}}{N!} H_N \left(\frac{\sum_{i=1}^s a_i x_i}{(\sum_{i=1}^s a_i^2)^{1/2}} \right). \quad (4.32)$$

¹Essa relação pode ser encontrada no livro *Higher Transcendental Functions*, volume II, pag. 196, Bateman, Harry and Erdelyi, Arthur. McGRAW-HUL BOOK COMPANY, INC. (1953).

Desta relação juntamente com as autofunções independentes do tempo do Hamiltoniano diagonal, nos podemos obter um único polinômio de Hermite fazendo transformações de coordenadas. Se fizermos $a_r = t_\mu^r$ na equação (4.32) e considerando que $\sum_r (t_\mu^r)^2 = 1$ obtemos

$$\sum_{m_1+\dots+m_s=N} \left[\prod_{r=1}^s \frac{(t_\mu^r)^{m_r}}{m_r!} H_{m_r}(\sqrt{\Omega_r} Q_r) \right] = \frac{1}{N!} H_N \left(\sum_{r=1}^s t_\mu^r \sqrt{\Omega_r} Q_r \right). \quad (4.33)$$

A relação acima nos indica que podemos definir portanto, uma transformação de coordenadas e *momenta*, dada por

$$\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu = \sum_{r=1}^{\infty} t_\mu^r \sqrt{\Omega_r} Q_r, \quad \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}_\mu}} p'_\mu = \sum_{r=1}^{\infty} t_\mu^r \frac{P_r}{\sqrt{\Omega_r}}, \quad (4.34)$$

válida para R arbitrário e com $\bar{\omega}_\mu = (\bar{\omega}, \omega_k)$. Assim podemos definir uma função de onda, nas novas coordenadas, considerando uma configuração particular de que somente o oscilador q'_μ encontra-se no N -ésimo estado excitado

$$\psi_{0,0,\dots,N_\mu,0,\dots}(q') = N_N H_N (\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu) \Gamma_0. \quad (4.35)$$

Esses estados são chamados *estados vestidos* e as novas coordenadas q'_μ são ditas coordenadas *renormalizadas*.

Essas coordenadas são novos objetos e não devem ser confundidos com as coordenadas livres q_μ ou com as coordenadas normais Q_r . Da mesma maneira que não devemos confundir os estados vestidos com os autoestados ϕ do Hamiltoniano diagonal $H = H(Q_r, P_r)$. O estado (4.35) representa uma coleção de estados normalizados com a condição de vínculo $\sum_i m_i = N$. Podemos escrever portanto um estado mais geral, onde cada oscilador q'_μ encontra-se em um k_μ -ésimo estado excitado

$$\Psi_{k_0,k_1,\dots,k_\infty}(q') = \prod_{\mu} \left[\sqrt{\frac{2^{k_\mu}}{k_\mu!}} H_{k_\mu} (\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu) \right] \Gamma^0. \quad (4.36)$$

A autofunção do estado de vácuo é a mesma devido a definição das coordenadas renormalizadas.

A questão central do problema dinâmico é encontrar a evolução temporal de uma determinada grandeza física. Em mecânica quântica essa questão pode ser abordada de duas maneiras. Pode-se encontrar a evolução temporal do estado, hipótese do tratamento de Schrödinger, ou determinar a dinâmica de uma observável, visão de Heisenberg. Dentro desse formalismo de estados vestidos é possível, sem tratamento perturbativo, encontrar a dinâmica dos operadores de criação e aniquilação vestidos [45, 46].

As coordenadas e os momenta vestidos estão associados a operadores renormalizados q' e p' . De maneira análoga ao tratamento canônico de osciladores podemos definir

$$q'_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}_\mu}} (a'_\mu + a'^\dagger_\mu), \quad p'_\mu = -i\sqrt{\frac{\bar{\omega}_\mu}{2}} (a'_\mu - a'^\dagger_\mu), \quad (4.37)$$

onde a'_μ é o operador de aniquilação e seu conjugado complexo o de criação. usando a transformação (4.34) e a inversa de (4.6), podemos também escrever os operadores renormalizados em função dos operadores livres

$$q'_\mu = \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} q_\nu, \quad p'_\mu = \sum_\nu \beta_{\mu\nu} p_\nu, \quad (4.38)$$

onde

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}_\mu}} \sum_r t_\mu^r t_\nu^r \sqrt{\Omega_r}, \quad \beta_{\mu\nu} = \sqrt{\bar{\omega}_\mu} \sum_r t_\mu^r t_\nu^r \frac{1}{\sqrt{\Omega_r}}. \quad (4.39)$$

Obtemos diretamente da (4.37) o operador de aniquilação renormalizado

$$a'_\mu = \sqrt{\frac{\bar{\omega}_\mu}{2}} q'_\mu + \frac{i}{\sqrt{2\bar{\omega}_\mu}} p'_\mu. \quad (4.40)$$

Com essas transformações vamos analisar agora a evolução temporal do operador de aniquilação renormalizado. Como sabemos da interpretação de Heisenberg, a dinâmica de uma observável é dada pela equação de Liouville-von Neumann

$$\frac{d}{dt} a'_\mu(t) = i[H, a'_\mu(t)]. \quad (4.41)$$

Vamos supor que o operador $a'_\mu(t)$, escrito em função dos operadores livres, seja dado por

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\dot{B}'_{\mu\nu}(t) q_\nu + B'_{\mu\nu}(t) p_\nu \right). \quad (4.42)$$

Considerando o Hamiltoniano renormalizado nas coordenadas livres

$$H = \frac{1}{2} \left\{ p_0^2 + \bar{\omega}^2 q_0^2 + \sum_{k=1}^n (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \right\} - \sum_{k=1}^n c_k q_0 q_k, \quad (4.43)$$

calculamos o comutador da equação (4.41). Fazendo a derivada temporal no operador de aniquilação (4.42), obtemos da equação de Liouville-von Neumann as seguintes equações de movimento

$$\ddot{B}'_{\mu k}(t) + \omega_k^2 B'_{\mu k}(t) = c_k B'_{\mu 0}(t), \quad (4.44)$$

$$\ddot{B}'_{\mu 0}(t) + \bar{\omega}^2 B'_{\mu 0}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k B'_{\mu k}(t). \quad (4.45)$$

As equações (4.44) e (4.45) são análogas as equações de movimento clássicas obtidas para as coordenadas de posição e momenta (4.2) e (4.3). Dessa maneira podemos usar a mesma transformação ortonormal de elementos t_μ^r , para desacoplar as equações acima. Se fizermos $B'_{\mu\nu}(t) = \sum_r t_\mu^r C_\nu^r(t)$, verificamos que os coeficientes $C_\nu^r(t)$ devem satisfazer equações de osciladores harmônicos, de tal modo que

$$B'_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t_\nu^r (a_\mu^r e^{i\Omega_r t} + b_\mu^r e^{-i\Omega_r t}). \quad (4.46)$$

Os coeficientes a_μ^r e b_μ^r podem ser obtidos da condição inicial (4.40), bastando somente escreve-la em função dos operadores livres, e comparando com a equação (4.42) em $t = 0$. Após as manipulações devidas obtemos

$$B'_{\mu\nu}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{it_\mu^r t_\nu^r}{\sqrt{2\Omega_r}} e^{-i\Omega_r t}. \quad (4.47)$$

Assim aplicando (4.47) na equação (4.42), e fazendo a transformação dos operadores livres para os operadores renormalizados obtemos

$$a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\mu\nu}(t) a'_\nu \quad (4.48)$$

onde

$$f_{\mu\nu}(t) = \sum_r t_\mu^r t_\nu^r e^{-i\Omega_r t} \quad (4.49)$$

Da relação (4.48) percebemos que a evolução temporal é determinada por $f_{\mu\nu}(t)$, conseqüentemente a partir dos parâmetros de interesse físico do sistema. Podemos obter também o operador de criação renormalizado dependente do tempo, e conseqüentemente uma diversidade de outros operadores de interesse. Por exemplo, a evolução temporal do operador número renormalizado, foi utilizada em [45, 46] para estudar estabilidade de átomos em cavidade a temperatura finita. Esses resultados também podem ser encontrados em [36]. Dentro no nosso proposito, esses resultados foram utilizados para calcularmos os valores esperados de interesse, no intuito de analisar os critérios de emaranhamento apresentados no primeiro capítulo como veremos adiante.

Antes de adentrar propriamente em processos de termalização, vamos considerar um estado que foi objeto de estudo em [44]. Trata-se do estado vestido aonde a partícula encontra-se no seu primeiro estado excitado e os modos do campo no estado fundamental. Usando a notação de Dirac podemos escrever $|\Gamma_0^1\rangle$. Neste trabalho, Andion *et. al.*, demonstraram que

a evolução temporal deste estado é dada por

$$|\Gamma_0^1(t)\rangle = \sum_{\mu} f_{0\mu}(t) |\Gamma_{\mu}^1(0)\rangle. \quad (4.50)$$

Este resultado demonstra que os estados vestidos são instáveis, a menos do estado fundamental. Outra constatação importante deste fato é que os elementos $f_{\mu\nu}(t)$ estão associados as probabilidades de decaimento dos estados vestidos. Podemos interpretar por exemplo que $f_{00}(t)$ representa a probabilidade do estado $|\Gamma_0^1(0)\rangle$ permanecer excitado no instante de tempo t , enquanto $f_{0k}(t)$ a probabilidade de termos um decaimento do estado excitado da partícula, populando portanto o k -ésimo modo do campo com um fóton.

4.3 Processos de Termalização

Vamos agora apresentar os desenvolvimentos sobre processos de termalização com base nas referências [45, 46]. Nestes trabalhos os autores estudam a evolução temporal do valor esperado do operador número para um estado

$$\rho = \rho'_0 \otimes \rho'_\beta, \quad (4.51)$$

onde ρ'_0 é um estado da partícula e ρ'_β o estado térmico do campo

$$\rho'_\beta = Z_\beta^{-1} \exp \left[-\beta \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left(a_k^\dagger a'_k + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.52)$$

sendo

$$Z_\beta = \prod_{k=1}^N \text{Tr} \left(e^{-\beta \omega_k (a_k^\dagger a'_k + \frac{1}{2})} \right) \quad (4.53)$$

a função partição. Considera-se aqui que o ambiente encontra-se em equilíbrio térmico.

Com o resultado demonstrado anteriormente para a evolução temporal do operador de aniquilação, ver equação (4.48), podemos construir o operador número dependente do tempo

$$\hat{n}'_\mu(t) = a_\mu^\dagger(t) a'_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |f_{\mu\nu}(t)|^2 a'_\nu^\dagger a'_\nu + \sum_{\nu \neq \lambda} f_{\mu\lambda}^*(t) f_{\mu\nu}(t) a'_\lambda^\dagger a'_\nu. \quad (4.54)$$

Estamos interessados na evolução temporal do número de ocupação associado a partícula.

Usando o estado (4.51) obtemos

$$n'_0(t) = |f_{00}(t)|^2 n'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{0k}(t)|^2 n'_k(\beta), \quad (4.55)$$

onde $n'_0 = \langle a_0^\dagger a'_0 \rangle$ e

$$n'_k(\beta) = \langle a_k^\dagger a'_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}. \quad (4.56)$$

Como verificamos a dinâmica do valor esperado do operador $n'_0(t)$ é determinada pelos elementos $f_{00}(t)$ e $f_{0k}(t)$. Estes resultados estão em concordância com o que foi apresentado nas referências [45,46]. Contudo a maneira como foram expressos explicitamente os elementos $f_{00}(t)$ e $f_{0k}(t)$ não será mantida. Fizemos uma pequena correção neste tratamento a fim de garantir a ortogonalidade destes elementos. Voltaremos mais adiante com essa discussão. Da equação (4.49) podemos escrever

$$f_{00}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (t_0^r)^2 \exp(-i\Omega_r t), \quad (4.57)$$

$$f_{0k}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t_0^r t_k^r \exp(-i\Omega_r t). \quad (4.58)$$

Nossa contribuição neste caso consiste em considerar que no instante inicial ($t = 0$), temos $f_{00}(t = 0) = 1$ e $f_{0k}(t = 0) = 0$. Podemos verificar estas relações a partir da ortogonalidade dos elementos de matriz. Desta maneira podemos escrever

$$(t_0^0)^2 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (t_0^k)^2, \quad (4.59)$$

$$t_0^0 t_k^0 = - \sum_{l=1}^{\infty} t_0^l t_k^l. \quad (4.60)$$

Portanto podemos reescrever

$$f_{00}(t) = \exp(-i\Omega_0 t) + \sum_{l=1}^{\infty} (t_0^l)^2 (\exp(-i\Omega_l t) - \exp(-i\Omega_0 t)), \quad (4.61)$$

$$f_{0k}(t) = \sum_{l=1}^{\infty} t_0^l t_k^l (\exp(-i\Omega_l t) - \exp(-i\Omega_0 t)). \quad (4.62)$$

As relações acima serão usadas para a análise das duas situações de interesse. A primeira esta relacionada a uma cavidade pequena e posteriormente faremos uma discussão sobre cavidade grande. Em ambos os casos vamos realizar as justificativas para essas modificações.

4.3.1 Cavidades Pequenas

O estudo de átomos acoplados com campos em cavidades finitas vem sendo estudado, considerando diversos aspectos. Em particular, o efeito da temperatura na emissão espontânea

de átomos confinados tem chamado especial atenção, principalmente pelo fato do decaimento ser um dos fatores de desaparecimento de emaranhamento. Nessa seção vamos apresentar os resultados obtidos em [46] que versam sobre estabilidade de átomos confinados sob efeito de um campo térmico, juntamente com as alterações apresentadas anteriormente.

Por cavidade pequena entendemos uma cavidade de raio R finito tal que o tamanho da cavidade não deve ser grande o suficiente para termos um espectro contínuo, ao mesmo tempo que não pode ser pequeno a ponto da distribuição térmica de Bose-Einstein não ser mais válida. Postular que a distribuição de Bose-Einstein é válida nesse limite, se justifica em algumas situações. Por exemplo, uma cavidade cujo raio é da ordem de $10^{-6}m$, é 10^4 vezes maior que um raio de Bohr. Assim, um átomo de hidrogênio percebe a cavidade extremamente grande e o regime de acoplamento neste caso é fraco. Desta maneira podemos considerar que os modos do campo encontram-se em uma distribuição de Bose-Einstein.

Outra consideração importante que devemos fazer é sobre a interpretação física neste limite. Como visto anteriormente, os operadores vestidos são descritos em função dos operadores livres pela equação (4.38), onde os coeficientes $\alpha_{\mu\nu}$ são dados por (4.39). Isso significa que para qualquer R finito, temos que todas as coordenadas q'_0 e $\{q'_i\}$ são vestidas e portanto não se pode separar nessa abordagem, o oscilador mecânico dos osciladores que descrevem os modos do campo.

Vamos então considerar um estado dado por (4.51) tal que o valor esperado do operador número seja dado por

$$n'_0(t) = |f_{00}(t)|^2 n'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{0k}(t)|^2 n'_k$$

e $f_{00}(t)$ e $f_{0k}(t)$ dados por (4.61) e (4.62). Para efeito de cálculo necessitamos dos valores dos elementos de matrizes dados por (4.28) e (4.29), para os quais necessitamos dos valores das frequências Ω_r . Vamos lembrar que as autofrequências Ω_r dos modos normais de vibração obedecem a seguinte equação

$$\cot\left(\frac{\pi\delta\Omega_r}{g}\right) = \frac{\Omega_r}{\pi g} + \frac{g}{\pi\delta\Omega_r} \left(1 - \frac{\delta\bar{\omega}^2}{g^2}\right), \quad (4.63)$$

onde introduzimos uma outra constante $\delta = gR/\pi c$. Vamos considerar a condição

$$\frac{\delta\bar{\omega}^2}{g^2} > 1 \quad (4.64)$$

de tal modo que o último termo do lado direito da equação (5.17) seja negativo. Esta condição é necessária a fim de garantir a existência da primeira raiz Ω_0 da equação (5.17). Podemos

perceber o que acabamos de afirmar visualizando a figura (4.1), onde fizemos separadamente as funções definidas no dois lados da equação (5.17). Percebemos também que as frequências Ω_k são muito próximas das frequências ω_k , que são as assintotas nos gráficos. Desta maneira podemos escrever

$$\Omega_k = \frac{g}{\delta} (k + \epsilon_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.65)$$

onde $0 < \epsilon_k < 1$ e satisfaz a equação

$$\cot(\pi\epsilon_k) = \frac{k + \epsilon_k}{\pi\delta} + \frac{1}{\pi(k + \epsilon_k)} \left(1 - \frac{\delta\bar{\omega}^2}{g^2}\right). \quad (4.66)$$

Usando a condição que $\epsilon_k \ll 1$ nos podemos linearizar a equação (4.66), de tal maneira que encontramos

$$\epsilon_k = \frac{\delta g^2 k}{g^2 k^2 - \delta^2 \bar{\omega}^2}. \quad (4.67)$$

Ou seja, a definição de ϵ_k dada acima nos permite encontrar aproximadamente todas as frequências Ω_k , $k = 1, 2, \dots$.

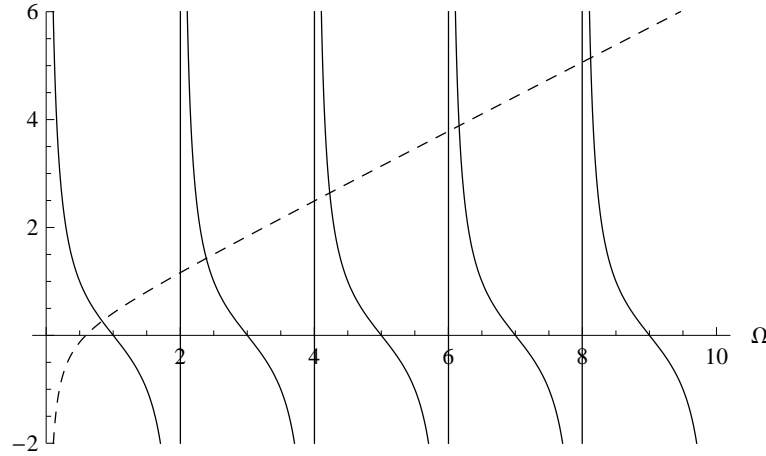


Figura 4.1: Gráfico dos dois termos da equação (4.23) para os seguintes parâmetros: $g = 0.5$, $\delta = 0.25$ e $\bar{\omega} = 1.162$. Linha contínua: $Y(\Omega_r) = \cot\left(\frac{\pi\delta\Omega_r}{g}\right)$. Linha tracejada: $X(\Omega_r) = \frac{\Omega_r}{g} + \frac{g}{\pi\delta\Omega_r} \left(1 - \frac{\delta\bar{\omega}^2}{g^2}\right)$.

Fica então faltando encontrar somente a frequência Ω_0 , que pode ser obtida diretamente da solução da equação (4.23). Para isto vamos considerar

$$\frac{\Omega_0\pi\delta}{g} \ll 1 \quad (4.68)$$

e realizar a expansão em série de Taylor da cotangente até o segundo termo, ou seja

$$\cot(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{x}{3}. \quad (4.69)$$

Solucionando assim a equação (5.17) com estas condições, obtemos

$$\Omega_0^2 = \bar{\omega}^2 \left(1 - \frac{\pi^2 \delta}{6} \right). \quad (4.70)$$

Resumindo, a equação (4.70) é a solução da primeira frequência Ω_0 e as equações (4.65) e (4.67) permitem encontrar as outras frequências Ω_k , $k = 1, 2, \dots$, e assim todo o espectro dos modos normais está definido. As outras frequências ω_k são dadas por $\omega_k = gk/\delta$ considerando as novas constantes g e δ .

Com todas essas informações podemos encontrar então os elementos t_0^l e t_k^l dados por

$$t_0^r = \frac{\eta \Omega_r}{\sqrt{(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{\eta^2}{2}(3\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \pi^2 g^2 \Omega_r^2}},$$

$$t_k^r = \frac{\eta \omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r.$$

Os somatórios das equações (4.61) e (4.62) foram implementados numericamente. Uma análise gráfica para o valor esperado (4.55) pode ser realizada com a figura (4.2). Neste caso verificamos que o comportamento da evolução temporal do valor esperado $n'_0(t)$ apresenta um comportamento oscilatório, o que nos permite afirmar que alguma memória da excitação inicial é preservada.

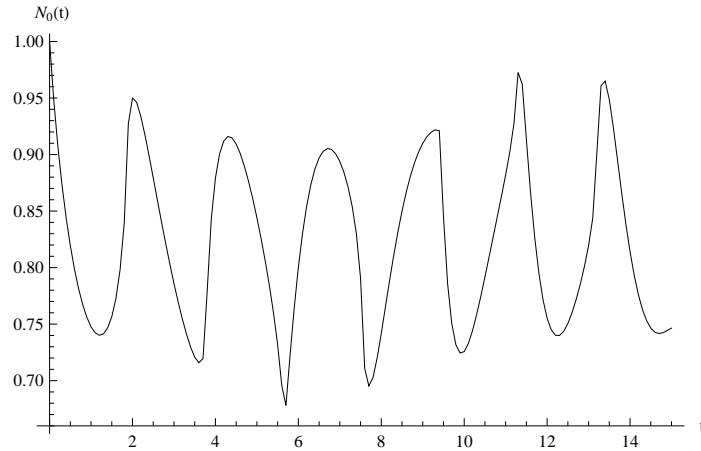


Figura 4.2: Comportamento de $n'_0(t) \times t$ para um estado tipo (4.51) considerando os seguintes valores: $n_0 = 1.0$, $\bar{\omega} = 0.67$, $g = 0.1$, $\delta = 0.03$ e $\beta = 2.0$.

4.3.2 Cavidades Grandes

Uma cavidade grande é considerada quando tomamos o limite de $R \rightarrow \infty$, e assim assumimos que $\Delta\omega = \Delta\Omega \rightarrow 0$. Neste caso [44] os elementos $\alpha_{\mu\nu}$, dados por (4.39), são tais

que

$$q'_0 = A_{00}(\bar{\omega}, g)q_0, \quad q'_i = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.71)$$

onde

$$\alpha_{00} \rightarrow A_{00}(\bar{\omega}, g) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}}} \int_0^\infty \frac{2g\Omega^2 \sqrt{\Omega} d\Omega}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2}. \quad (4.72)$$

Somente as coordenadas q'_0 são vestidas enquanto as outras coordenadas q'_i são idênticas as coordenadas livres. Isso significa que os modos do campo vestidos são os mesmos do campo livre e nos permite também interpretar que a coordenada q'_0 descreve um oscilador mecânico, vestido pelo seu próprio campo. Este resultado também é relevante no estudo dos processos de termalização como veremos adiante. Não obstante, outra observação importante é que neste caso podemos associar diretamente $n'_k(\beta)$ da equação (4.55) a uma distribuição de Bose-Einstein

$$n'_k(\beta) \rightarrow n_\omega(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (4.73)$$

Essa associação se torna óbvia se lembrarmos que os modos vestidos são os mesmos modos livres do campo.

Assim, podemos então passar para a análise da evolução temporal do número de ocupação

$$n'_0(t) = |f_{00}(t)|^2 n'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{0k}(t)|^2 n'_k(\beta).$$

Devemos portanto analisar os coeficientes $f_{00}(t)$ e $f_{0k}(t)$ no limite de uma cavidade infinitamente grande. Usando a definição (4.61) temos que encontrar o seguinte limite

$$f_{00}(t) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \left\{ \exp(-i\Omega_0 t) + \sum_{l=1}^{\infty} (t'_0)^2 [\exp(-i\Omega_l t) - \exp(-i\Omega_0 t)] \right\}. \quad (4.74)$$

No limite considerado temos que $\Omega_0 \rightarrow 0$, que é perceptível na figura (4.1), tal que $\exp(-i\Omega_0 t) \rightarrow 1$.

Outra relação relevante neste limite é

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \eta^2 = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} 2g\Delta\Omega = 0, \quad (4.75)$$

de tal maneira que podemos considerar somente dois termos do denominador da equação (4.28). O somatório da equação (4.74) é uma soma de Riemann de tal maneira que o cálculo do limite resulta naturalmente em uma integral de Riemann. Desta maneira obtemos no limite de cavidade grande

$$f_{00}(t) = 1 + 2g \int_0^\infty \frac{\Omega^2 [\exp(-i\Omega t) - 1]}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} d\Omega. \quad (4.76)$$

Por conveniência matemática vamos escrever

$$f_{00}(t) = C_1(t; \bar{\omega}, g) + iS_1(t; \bar{\omega}, g), \quad (4.77)$$

onde

$$C_1(t; \bar{\omega}, g) = 1 + 2g \int_0^\infty \frac{\Omega^2 [\cos(\Omega t) - 1]}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} d\Omega, \quad (4.78)$$

$$S_1(t; \bar{\omega}, g) = -2g \int_0^\infty \frac{\Omega^2 \sin(\Omega t)}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} d\Omega, \quad (4.79)$$

A parte real de f_{00} pode ser resolvida usando o teorema dos resíduos. Para isto vamos analisar inicialmente a seguinte integral

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \frac{\alpha^2 [\cos(\alpha t) - 1]}{(\alpha^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \alpha^2} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha^2 \exp(i\alpha t)}{(\alpha^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \alpha^2} d\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \alpha^2} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Usando a variável $x = \alpha^2 - \bar{\omega}^2$, encontramos para o denominador

$$h(\alpha) = (\alpha^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \alpha^2, \quad (4.81)$$

uma equação do segundo grau em x cujas raízes são dadas por

$$x = -\frac{\pi^2 g^2}{2} \pm i\pi g k, \quad (4.82)$$

onde definimos

$$k^2 = \bar{\omega}^2 - \frac{\pi^2 g^2}{4}. \quad (4.83)$$

Usando portanto a definição da variável x , obtemos as seguintes raízes para o denominador $h(\alpha)$

$$\alpha_1 = k + \frac{i\pi g}{2}, \quad \alpha_2 = -k + \frac{i\pi g}{2}, \quad (4.84)$$

$$\alpha_3 = k - \frac{i\pi g}{2}, \quad \alpha_4 = -k - \frac{i\pi g}{2}. \quad (4.85)$$

Usando então α_1 e α_2 , que são as raízes que pertencem ao semi-eixo imaginário positivo, obtemos via o teorema de Cauchy,

$$C_1(t; \bar{\omega}, g) = e^{-\pi g t/2} \left[\cos(kt) - \frac{\pi g}{2k} \sin(kt) \right]. \quad (4.86)$$

A parte imaginária não possui expressão analítica, contudo é possível encontrar uma solução numericamente. Não obstante, para tempos suficientemente longos, isto é $t \gg \frac{1}{\bar{\omega}}$, ela tende a um comportamento assintótico dado por [44]

$$S_1(t; \bar{\omega}, g) \approx \frac{4g}{\bar{\omega}^4 t^3}. \quad (4.87)$$

Percebe-se deste resultado que $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{00}(t) = 0$, levando o número de ocupação do estado térmico a não carregar mais informação do estado inicial. Ou seja, o primeiro termo do lado direito da equação (4.55), tende a zero independente do valor de n'_0 .

Nos resta agora encontrar o segundo termo do lado direito da igualdade (4.55), que depende explicitamente da temperatura. O elemento $f_{0k}(t)$ no limite considerado é obtido calculando o limite

$$f_{0\omega_k}(t) = \lim_{\Delta\Omega_l \rightarrow 0} \left\{ (2g)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_k \sqrt{\Delta\omega_k}}{\omega_k^2 - \Omega_l^2} \frac{\Omega_l^2 [\exp(-i\Omega_l t) - 1] \Delta\Omega_l}{(\Omega_l^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega_l^2} \right\}. \quad (4.88)$$

O limite acima nos leva novamente a uma integral de Riemann. Novamente por conveniência matemática vamos escrever

$$f_{0\omega_k}(t) = \omega_k \sqrt{\Delta\omega_k} [C_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g) + iS_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g)], \quad (4.89)$$

sendo

$$C_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g) = (2g)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\Omega^2 [\cos(\Omega t) - 1]}{(\omega_k^2 - \Omega^2) [(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2]} d\Omega, \quad (4.90)$$

$$S_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g) = -(2g)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\Omega^2 \sin(\Omega t)}{(\omega_k^2 - \Omega^2) [(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2]} d\Omega. \quad (4.91)$$

onde já consideramos o limite da soma de Riemann. Novamente temos somente a evolução analítica para a função (4.90) e a função (4.91) é calculada numericamente. Vamos então considerar a seguinte integral

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 [\cos(\alpha t) - 1]}{(\omega_k^2 - \alpha^2) [(\alpha^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \alpha^2]} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 \exp(i\alpha t)}{(\omega_k^2 - \alpha^2) h(\alpha)} d\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\omega_k^2 - \alpha^2) h(\alpha)} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Neste caso as raízes do denominar $(\omega_k^2 - \alpha^2)h(\alpha)$ são dadas pelas equações (4.84) e (4.85), juntamente com $\alpha = \pm\omega_k$. Aplicando novamente o teorema de Cauchy encontramos

$$\begin{aligned} C_2(\omega_k, t, \bar{\omega}, g) &= \sqrt{2g} e^{-\pi g t/2} \left\{ \frac{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2) \cos(kt)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} - \frac{\pi g}{2k} \frac{(\omega_k^2 + \bar{\omega}^2) \sin(kt)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} \right\} \\ &+ \sqrt{2g} \left[\frac{\pi g \omega_k \sin \omega_k t}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} - \frac{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} \right] \end{aligned} \quad (4.93)$$

Com esses resultados verificamos que a soma em k da equação (4.55) é também uma soma de Riemann e que no limite considerado resulta em

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 n'_k(\beta) [C_2^2(\omega_k, t, \bar{\omega}, g) + S_2^2(\omega_k, t, \bar{\omega}, g)] \Delta\omega \\ &= \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 [C_2^2(\omega, t, \bar{\omega}, g) + S_2^2(\omega, t, \bar{\omega}, g)] n'_\omega(\beta) \end{aligned} \quad (4.94)$$

Assim podemos escrever o número de ocupação em função do tempo como sendo

$$n'_0(t) = [C_1^2(t; \bar{\omega}, g) + S_1^2(t; \bar{\omega}, g)] n'_0 + \int_0^\infty d\omega \omega^2 [C_2^2(\omega, t; \bar{\omega}, g) + S_2^2(\omega, t; \bar{\omega}, g)] n'_\omega(\beta). \quad (4.95)$$

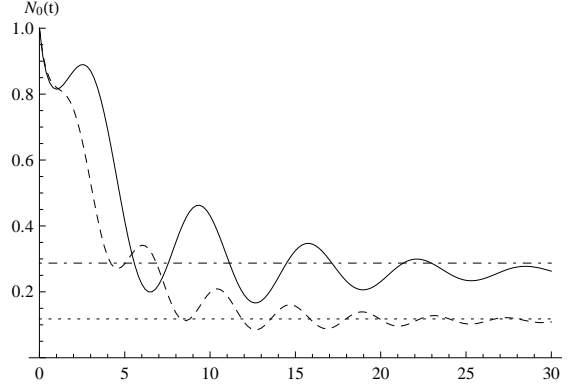


Figura 4.3: Comportamento para cavidade grande do valor esperado do operador número para um estado (4.51) em função do tempo para $n_0 = 1.0$, $g = 0.1$, $\beta = 1.5$ e $\bar{\omega} = 1.0$ (linha contínua), $\bar{\omega} = 1.5$ (linha tracejada). As linhas horizontais são para $n'(\beta = 1.5, \bar{\omega} = 1.5) \approx 0.12$ (linha pontilhada) e $n'(\beta = 1.5, \bar{\omega} = 1.0) \approx 0.28$ (linha ponto-tracejada).

Numericamente podemos obter um gráfico para o comportamento de $n'_0(t)$ dado por (4.95). Este resultado encontra-se na figura (4.3). Percebemos que para $t = 0$, $n'_0(t = 0) = n'_0$. Para valores de $t \gg 1$ o número de ocupação tende ao limite dado por $n'_0(t) \rightarrow n'_\omega(\beta)$. Ou seja, o oscilador entra em equilíbrio térmico com o reservatório e não preserva nenhuma memória do estado inicial. As correções introduzidas para as funções $f_{00}(t)$ e $f_{0k}(t)$ foram fundamentais para a diferença encontrada entre a figura (4.3) e o resultado obtido em [45] porém o comportamento do sistema para o limite assintótico em $t \gg 1$ é o mesmo.

Vamos agora tecer alguns comentários sobre essas soluções. Na referência [45] os elementos $f_{00}(t)$ e $f_{0k}(t)$ foram construídos de maneira distinta a que foi apresentada nesta tese. Os autores de [45] encontraram para $C_1(t; \bar{\omega}, g)$ e $C_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g)$ as seguintes integrais

$$C_1(t; \bar{\omega}, g) = 2g \int_0^\infty \frac{\Omega^2 \cos(\Omega t)}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} d\Omega, \quad (4.96)$$

$$C_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g) = (2g)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\Omega^2 \cos(\Omega t)}{(\omega_k^2 - \Omega^2) [(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2]} d\Omega. \quad (4.97)$$

Essas expressões foram obtidas sem a devida separação entre a frequência Ω_0 e as frequências Ω_k na expressão (4.49). Isto resulta em um termo adicional nas séries que descrevem $f_{00}(t)$

e $f_{0k}(t)$, levando a uma inconsistência na passagem da soma de Riemann para a Integral de Riemann. Para $C_1(t; \bar{\omega}, g)$ esta diferença não fica perceptível pois a solução da integral (4.96) é idêntica a que obtemos usando (4.78). Esta coincidência acaba escondendo o equívoco matemático pois leva a resultados físicos consistentes, quando usa-se somente $f_{00}(t)$. Contudo quando usamos $C_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g)$ isto não é mais verdade. A solução para a integral (4.97) é dada por

$$C_2(\omega_k, t, \bar{\omega}, g) = \sqrt{2g}e^{-\pi g t/2} \left\{ \frac{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2) \cos(kt)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} - \frac{\pi g}{2k} \frac{(\omega_k^2 + \bar{\omega}^2) \sin(kt)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} \right\} + \sqrt{2g} \left[\frac{\pi g \omega_k \sin \omega_k t}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} \right]. \quad (4.98)$$

Percebemos da solução acima, que para $t = 0$ temos

$$C_2(t = 0) = \frac{\sqrt{2g}(\omega^2 - \bar{\omega}^2)}{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega^2}. \quad (4.99)$$

Este resultado leva necessariamente a $f_{0k}(t = 0) \neq 0$ e como já discutimos anteriormente este resultado não encontra-se em acordo com as condições de ortogonalidade dos $f_{\mu\nu}(t)$. Neste caso os resultados físicos acabam sendo afetados de maneira relevante. Por exemplo, nos processos de termalização apresentados anteriormente, sem a correção que fizemos, o valor esperado do operador número no instante inicial dependeria da temperatura, o que fisicamente é uma configuração inicial não consistente.

4.4 Considerações Finais

Neste capítulo apresentamos um resumo sobre o formalismo de estados vestidos introduzido por [44]. Desenvolvimentos recentes em processos de termalização [45, 46] também foram apresentados. Por fim apresentamos algumas modificações inéditas nestes tratamentos, a fim de solucionar algumas incongruências. Verificamos que para sistemas confinados em cavidade pequena, a excitação inicial de um estado é preservada pela presença da cavidade. No âmbito de uma cavidade grande (espaço livre) encontramos que um estado excitado decai exponencialmente, e para tempos longos não carrega mais nenhuma informação do seu estado inicial. Esses aspectos distintos nas situações anteriormente citadas, são de fundamental importância para o estudo de emaranhamento em sistemas biatômicos confinados como veremos no capítulo subsequente.

Capítulo 5

Emaranhamento em Sistema Biatômico Confinado em Cavidade

Nos capítulos precedentes apresentamos a base teórica que vamos utilizar para análise da dinâmica de emaranhamento em um sistemas de dois átomos confinados. A compreensão sobre emaranhamento em sistema biatômico é relevante por ser este um forte candidato a implementação dos q-bits em computação quântica [9]. Estudos sobre a existência de emaranhamento para esses sistemas sobre efeito de temperatura também vem chamado a atenção de diversos autores. Por exemplo, Nielsen [47] descobriu a existência de emaranhamento a temperatura finita, para uma cadeia de q-bits de spin unidimensional. Verificou que quando um campo magnético externo é utilizado, o grau de emaranhamento pode ser elevado até uma dada temperatura crítica.

5.1 Sistema Biatômico em Cavidade

Nosso sistema consiste de dois átomos, confinados em uma cavidade esférica totalmente refletora de raio R , acoplados com um ambiente modelado como uma superposição de osciladores harmônicos. Os átomos serão considerados em uma aproximação harmônica. O Hamiltoniano do sistema é dado por

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \left[p_A^2 + \omega_A^2 q_A^2 + p_B^2 + \omega_B^2 q_B^2 + \sum_{k=1}^n (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \right] \\
 &- \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n (\eta_A q_A + \eta_B q_B) \omega_k q_k,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde η_A e η_B são as constantes de acoplamento, os índices A e B referem-se aos átomos e k ao campo. Note que os átomos não interagem diretamente entre si mas apenas via o acoplamento com o campo. Vamos assumir que os dois átomos estão acoplados da mesma maneira com o ambiente, ou seja

$$\eta_A = \eta_B = \eta = \sqrt{2g\Delta\omega} \quad (5.2)$$

onde g é uma constante com dimensão de frequência responsável pela mensuração da força do acoplamento. A quantidade $\Delta\omega = \pi c/R$ é o intervalo entre as frequências vizinhas dos modos do campo $\omega_k = k\Delta\omega = k\frac{\pi c}{R}$, lembrando que estamos considerando uma cavidade esférica.

Esse Hamiltoniano descreve um sistema composto de dois átomos, em aproximação harmônica, acoplados com o campo, descrito como uma superposição de osciladores. Objetivando utilizar o formalismo apresentado no capítulo precedente, aonde somente um átomo encontrava-se acoplado com o ambiente, vamos realizar uma transformação de coordenadas tal que

$$q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_A + q_B); \quad q_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_A - q_B). \quad (5.3)$$

A coordenada q_+ esta associada ao centro de massa dos dois osciladores e q_- descreve a posição relativa entre eles. Desta maneira podemos também obter as transformações inversas

$$q_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_+ + q_-); \quad q_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_+ - q_-) \quad (5.4)$$

e conseqüentemente os *momenta* associados aos átomos

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ + p_-), \\ p_B &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ - p_-). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considerando portanto as novas coordenadas q_{\pm} e os novos momenta p_{\pm} , juntamente com a suposição de que estamos tratando de átomos idênticos, ou seja $\omega_A = \omega_B = \omega_0$, podemos reescrever o Hamiltoniano (5.1) como

$$H = H_- + H_+, \quad (5.6)$$

onde

$$H_- = \frac{1}{2} [p_-^2 + \omega_0^2 q_-^2] \quad (5.7)$$

e

$$H_+ = \frac{1}{2} \left[p_+^2 + \omega_0^2 q_+^2 + \sum_{k=1}^n (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2 - 2\eta q_+ \omega_k q_k) \right]. \quad (5.8)$$

Quando realizamos esta transformação encontramos um sistema equivalente no qual somente o oscilador referente ao centro de massa se encontra acoplado com o ambiente. O oscilador que se refere a coordenada relativa oscila livremente. Desta maneira podemos realizar sobre o sistema ($q_+ \oplus$ field) procedimento análogo ao que revisamos no capítulo anterior e introduzir os estados vestidos do sistema.

5.1.1 Estados Biatômicos Vestidos

Em relação as coordenadas do centro de massa e relativa dos osciladores A e B o Hamiltoniano do sistema é dado por

$$H = \frac{1}{2} [p_-^2 + \omega_0^2 q_-^2] + \frac{1}{2} \left[p_+^2 + \omega_0^2 q_+^2 + \sum_{k=1}^n (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2 - 2\eta q_+ \omega_k q_k) \right]. \quad (5.9)$$

Neste caso as equações de movimento obtidas do formalismo Hamiltoniano são

$$\ddot{q}_-(t) + \omega_0^2 q_-(t) = 0, \quad (5.10)$$

$$\ddot{q}_+(t) + \omega_0^2 q_+(t) = \eta \sum_{k=1}^n \omega_k q_k(t), \quad (5.11)$$

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \eta \omega_k q_+(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.12)$$

O sistema acima é composto de $n + 2$ equações de movimento das quais somente a equação (5.10) encontra-se desacoplada das demais. As $n + 1$ equações acopladas somente envolvem as coordenadas q_+ e q_k , de tal modo que podemos realizar as transformações de coordenadas

$$q_\mu = \sum_{r=0}^n t_\mu^r Q_r, \quad p_\mu = \sum_{r=0}^n t_\mu^r P_r, \quad (5.13)$$

para desacoplar as equações (5.11) e (5.12). Neste caso $\mu = (+, \{k\})$; $k = 1, 2, \dots, n$. Os subíndices $\mu = +$ e $\mu = k$ referem-se respectivamente ao oscilador do centro de massa q_+ e aos modos harmônicos do campo. Ficamos então com um sistema de equações formado por (5.10) juntamente com as $n + 1$ equações dadas por

$$\ddot{Q}_r(t) + \Omega_r^2 Q_r(t) = 0, \quad r = +, 1, 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

De maneira análoga ao que foi discutido no capítulo anterior, obtemos das condições impostas pelas transformações (5.13) a frequência renormalizada

$$\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 - \delta\omega^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (\omega_0^2 - N\eta^2), \quad (5.15)$$

os elementos de matriz

$$\begin{aligned} t_+^r &= \frac{\eta\Omega_r}{\sqrt{(\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{\eta^2}{2}(3\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \pi^2 g^2 \Omega_r^2}}, \\ t_k^r &= \frac{\eta\omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_r^2} t_0^r \end{aligned} \quad (5.16)$$

e a equação

$$\cot\left(\frac{\pi\delta\Omega_r}{g}\right) = \frac{\Omega_r}{\pi g} + \frac{g}{\pi\delta\Omega_r} \left(1 - \frac{\delta\bar{\omega}^2}{g^2}\right), \quad (5.17)$$

que descreve o espectro das autofrequências dos modos normais do sistema ($q_+ \oplus$ field). A constante $\delta = gR/\pi c$ foi também introduzida. A frequência renormalizada $\bar{\omega}$ foi introduzida a fim de retirar a divergência em ω_0 para o sistema ($q_+ \oplus$ field). Contudo, para manter a igualdade entre os átomos devemos fazer a frequência do oscilador referente a coordenada relativa igual a $\bar{\omega}$. Assim o Hamiltoniano (5.9) é levado a

$$H = \frac{1}{2} [p_-^2 + \bar{\omega}^2 q_-^2] + \frac{1}{2} \left[p_+^2 + \bar{\omega}^2 q_+^2 + \sum_{k=1}^n (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2 - 2\eta q_+ \omega_k q_k) \right]. \quad (5.18)$$

As equações de movimento (5.14) do sistema ($q_+ \oplus$ field) nas coordenadas normais podem ser obtidas de um Hamiltoniano diagonal para o qual

$$\phi_{n_0 n_1 n_2 \dots}(Q) = \prod_s \left[\frac{1}{\sqrt{2^{n_s} n_s!}} H_{n_s}(\sqrt{\Omega_s} Q_s) \right] \Gamma_0 \quad (5.19)$$

são autofunções. H_{n_s} são os polinômios de Hermite e Γ_0 é a autofunção do estado fundamental normalizado. Usando a relação dos polinômios de Hermite dada por (4.33), vamos definir para o sistema ($q_+ \oplus$ field) as coordenadas vestidas

$$\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu = \sum_r t_\mu^r \sqrt{\Omega_r} Q_r, \quad (5.20)$$

onde $q'_\mu = q'_+, \{q'_k\}$ e $\bar{\omega}_\mu = \{\bar{\omega}, \omega_k\}$. Para essas novas coordenadas e fixando o tempo em $t = 0$, vamos definir os estados vestidos $|\kappa_+, \kappa_1, \kappa_2, \dots\rangle$ para o sistema ($q_+ \oplus$ field), que são estados cuja representação coordenada é dada pelas autofunções

$$\psi_{\kappa_+ \kappa_1 \dots}(q') = \prod_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{2^{\kappa_\mu} \kappa_\mu!}} H_{\kappa_\mu}(\sqrt{\bar{\omega}_\mu} q'_\mu) \right] \Gamma_0. \quad (5.21)$$

Para o oscilador $(-)$ as coordenadas vestidas são as mesmas coordenadas livres, ou seja $q'_- = q_-$. Este resultado demonstra que os estados relacionados ao oscilador de posição relativa são estáveis, ou seja não evoluem no tempo. Diferentemente dos estados vestidos do sistema centro de massa acoplado com o campo que são instáveis e podem ser interpretados da mesma maneira que os estados apresentados no capítulo quarto.

5.2 Emaranhamento a Temperatura Nula

Nesta seção vamos apresentar os resultados obtidos para o emaranhamento de um estado de superposição tipo Bell para um sistema bipartite confinado, a temperatura nula. Entendemos por temperatura nula o fato do campo encontrar-se no estado de vácuo. Alguns destes resultados foram publicados em [48].

O ponto de partida é considerar uma família de estado de superposição dada por

$$|\Psi^{AB}(0)\rangle = \sqrt{\xi} \left| \Gamma_{10}^{(+)}(0) \right\rangle + \sqrt{1-\xi} e^{i\phi} \left| \Gamma_{01}^{(+)}(0) \right\rangle. \quad (5.22)$$

O estado $\left| \Gamma_{10}^{(+)} \right\rangle \equiv |1_+, 0_-, 0_1, \dots\rangle$ representa um estado no qual o oscilador do centro de massa vestido encontra-se no primeiro estado excitado e o de posição relativa no estado fundamental. De maneira análoga $\left| \Gamma_{01}^{(+)} \right\rangle \equiv |0_+, 1_-, 0_1, \dots\rangle$ representa o estado no qual somente o oscilador associado a posição relativa encontra-se no primeiro estado excitado.

Lembrando que somente o oscilador do centro de massa encontra-se acoplado com o campo, percebemos que é ele o responsável pela evolução temporal do estado global. Em outras palavras, o estado excitado do oscilador q'_- é estável, devido ao fato de não carregar informação da interação. Desta maneira podemos determinar, usando o resultado demonstrado no capítulo anterior e com base na referência [44], que o estado $|\Psi^{AB}(t)\rangle$ é dado por

$$|\Psi^{AB}(t)\rangle = \sqrt{\xi} \left| \Gamma_{10}^{(+)}(t) \right\rangle + \sqrt{1-\xi} e^{i\phi} \left| \Gamma_{01}^{(+)}(t) \right\rangle, \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} |1_+(t), 0_-; 0, 0, \dots\rangle &= f_{++}(t) |1_+(0), 0_-; 0, 0, \dots\rangle \\ &+ \sum_i f_{+i}(t) |0_+, 0_-; 0_1, \dots, 1_i, 0_{i+1}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ou seja, o estado $\left| \Gamma_{10}^{(+)}(t) \right\rangle$ possui uma probabilidade $f_{++}(t)$ de permanecer com o oscilador do centro de massa no primeiro estado excitado no instante de tempo t e probabilidades $f_{+i}(t)$ de, no instante de tempo t , o oscilador q'_+ decair e popular o i -ésimo modo do campo com um fóton. Usando estes resultados, podemos escrever explicitamente a matriz densidade

dependente do tempo para o estado (5.23)

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= |\Psi^{AB}(t)\rangle \langle \Psi^{AB}(t)| \\
&= \xi \left| \Gamma_{10}^{(+)}(t) \right\rangle \left\langle \Gamma_{10}^{(+)}(t) \right| \\
&\quad + (1 - \xi) \left| \Gamma_{01}^{(+)}(t) \right\rangle \left\langle \Gamma_{01}^{(+)}(t) \right| \\
&\quad + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} \left| \Gamma_{01}^{(+)}(t) \right\rangle \left\langle \Gamma_{10}^{(+)}(t) \right| \\
&\quad + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} \left| \Gamma_{10}^{(+)}(t) \right\rangle \left\langle \Gamma_{01}^{(+)}(t) \right|.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

A matriz densidade acima descreve um estado puro do sistema. Como estamos interessados na evolução temporal da parte que esta relacionada com os dois osciladores massivos, vamos realizar a operação de traço parcial sobre os modos do campo objetivando encontrar um estado de mistura que descreva a parte de interesse do sistema. Assim calculando o traço somente nos modos do campo temos

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sum_{k_i} [\xi \langle k_1, k_2, \dots | 1_+(t), 0_-; 0, 0, \dots \rangle \langle 1_+(t), 0_-; 0, 0, \dots | k_1, k_2, \dots \rangle \\
&\quad + (1 - \xi) \langle k_1, k_2, \dots | 0_+, 1_-; 0, 0, \dots \rangle \langle 0_+, 1_-; 0, 0, \dots | k_1, k_2, \dots \rangle \\
&\quad + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} \langle k_1, k_2, \dots | 0_+, 1_-; 0, 0, \dots \rangle \langle 1_+(t), 0_-; 0, 0, \dots | k_1, k_2, \dots \rangle \\
&\quad + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} \langle k_1, k_2, \dots | 1_+(t), 0_-; 0, 0, \dots \rangle \langle 0_+, 1_-; 0, 0, \dots | k_1, k_2, \dots \rangle]
\end{aligned}$$

e usando agora a equação (5.24) finalmente obtemos

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & d(t) & 0 \\ 0 & d^*(t) & c(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.26}$$

onde

$$a(t) \equiv (\rho)_{0_+0_-}^{0_+0_-} = \xi (1 - |f_{++}(t)|^2) \tag{5.27}$$

$$b(t) \equiv (\rho)_{0_+1_-}^{0_+1_-} = 1 - \xi; \tag{5.28}$$

$$c(t) \equiv (\rho)_{1_+0_-}^{1_+0_-} = \xi |f_{++}(t)|^2; \tag{5.29}$$

$$d(t) \equiv (\rho)_{0_+1_-}^{1_+0_-} = \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} f_{++}^*(t); \tag{5.30}$$

$$d^*(t) \equiv (\rho)_{1_+0_-}^{0_+1_-} = \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} f_{++}(t). \tag{5.31}$$

A matriz reduzida possui traço igual a unidade

$$Tr[\rho(t)] = a(t) + b(t) + c(t) = 1, \tag{5.32}$$

como se espera por razões físicas. É fácil perceber também, verificando os elementos da matriz (5.26), que a dinâmica de emaranhamento será definida pelo comportamento da função $f_{++}(t)$. O comportamento para esta função nos regimes de cavidade grande e pequena, foram discutidos anteriormente no capítulo quarto com base nas referências [45, 46]. Vamos relembrar os resultados de interesse.

Cavidade Pequena

No regime de cavidade pequena estamos considerando que o raio da cavidade é muito menor que o comprimento coerente, ou seja $R < \pi c/g$, e que o espectro das autofrequências são discretos. Demonstramos anteriormente que podemos escrever $f_{++}(t)$ como sendo

$$f_{++}(t) = \exp(-i\Omega_+ t) + \sum_{l=1}^{\infty} (t_+^l)^2 (\exp(-i\Omega_l t) - \exp(-i\Omega_+ t)). \quad (5.33)$$

O elemento de matriz t_+^l é dado por

$$t_+^l = \frac{\eta\Omega_l}{\sqrt{(\Omega_l^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{\eta^2}{2}(3\Omega_l^2 - \bar{\omega}^2) + \pi^2 g^2 \Omega_l^2}}, \quad (5.34)$$

as frequências Ω_l são dadas por

$$\Omega_l = \frac{g}{\delta} (l + \epsilon_l), \quad l = 1, 2, \dots, \quad ; \quad \epsilon_l = \frac{\delta g^2 l}{g^2 l^2 - \delta^2 \bar{\omega}^2} \quad (5.35)$$

e a frequência Ω_+ é igual a

$$\Omega_+^2 = \bar{\omega}^2 \left(1 - \frac{\pi^2 \delta}{6} \right). \quad (5.36)$$

Cavidade Grande

Para uma cavidade grande a quantidade $f_{++}(t)$ é dada por

$$f_{++}(t) = C_1(t; \bar{\omega}, g) + iS_1(t; \bar{\omega}, g), \quad (5.37)$$

onde

$$C_1(t; \bar{\omega}, g) = e^{-\pi g t/2} \left[\cos(kt) - \frac{\pi g}{2k} \sin(kt) \right] \quad (5.38)$$

e

$$S_1(t; \bar{\omega}, g) = -2g \int_0^{\infty} \frac{\Omega^2 \sin(\Omega t)}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} d\Omega. \quad (5.39)$$

O parâmetro κ é dado por

$$\kappa = \sqrt{\bar{\omega}^2 - \frac{\pi^2 g^2}{4}}. \quad (5.40)$$

Como estamos considerando o regime de acoplamento fraco temos que $\kappa^2 \gg 0$.

Impureza

Uma boa ilustração da diferença de comportamento nos regimes distintos das cavidades consideradas é via análise do grau de impureza do estado (5.26). Defini-se como impureza de um estado a grandeza

$$D(\xi; t) = 1 - \text{Tr}\rho^2(t) = 2\xi(1 - |f_{++}(t)|^2)(1 - \xi + \xi|f_{++}(t)|^2). \quad (5.41)$$

Nas figuras (5.1) e (5.2) apresentamos os gráficos do comportamento da impureza para cavidade grande e pequena respectivamente, do estado (5.26). Perceba que para cavidade grande o grau de impureza tende monotonicamente ao valor $2\xi(1 - \xi)$ quando $t \rightarrow \infty$. Isso se deve ao fato de que nesse limite $|f_{++}(t)| \rightarrow 0$. Para cavidade pequena o grau de impureza oscila com a dinâmica determinada pela oscilação do $|f_{++}(t)|^2$.

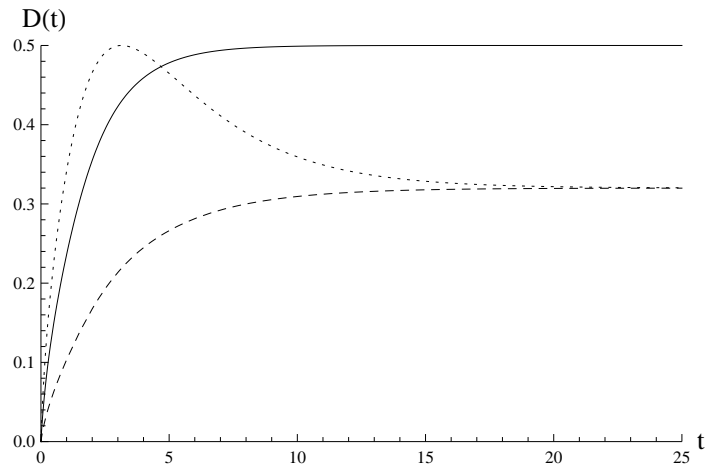


Figura 5.1: Comportamento do grau de impureza como função do tempo para cavidade grande fazendo $\bar{\omega} = 2.0$ e $g = 0.1$ (em unidades arbitrárias), fixando alguns valores de ξ : 0.5 (linha contínua); 0.2 (linha tracejada); e 0.8 (linha pontilhada).

5.2.1 Desigualdade de Bell

É consenso que a violação das desigualdades de Bell é um bom identificador de emaranhamento quando se trata de estados puros. Em estados de mistura nem sempre é possível obter um resultado conclusivo quando alguma desigualdade de Bell não for satisfeita. Neste caso podemos afirmar que se ocorre a violação então se trata de um estado de mistura emaranhado,

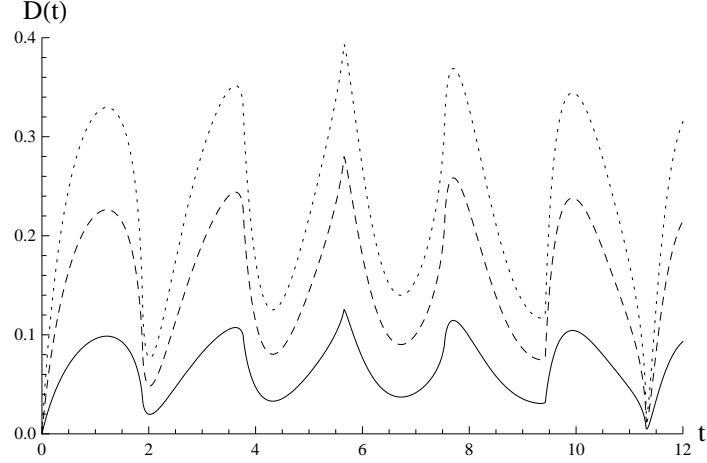


Figura 5.2: Comportamento do grau de impureza para cavidade pequena como função do tempo, fazendo $\bar{\omega} = 0.67$ e $g = 0.1$ (em unidades arbitrárias) com $\delta = 0.03$, para alguns valores de ξ : 0.2 (linha completa); 0.5 (linha tracejada); e 0.8 (linha pontilhada).

porém quando a desigualdade for satisfeita nada podemos afirmar sobre o emaranhamento do estado. Não obstante a isto, sabemos que a violação de alguma desigualdade de Bell possui um significado físico relevante sobre aspectos não-locais da mecânica quântica. Dessa maneira vamos iniciar a análise do emaranhamento do estado (5.26) via essas desigualdades.

Como vimos no primeiro capítulo desta tese podemos escrever uma desigualdade de Bell como

$$|\langle \mathcal{O}_1^+ \mathcal{O}_1^- \rangle + \langle \mathcal{O}_1^+ \mathcal{O}_2^- \rangle + \langle \mathcal{O}_2^+ \mathcal{O}_1^- \rangle - \langle \mathcal{O}_2^+ \mathcal{O}_2^- \rangle| \leq 2, \quad (5.42)$$

onde os operadores \mathcal{O}_i^+ e \mathcal{O}_j^- , $i, j = 1, 2$, possuem autovalores iguais a ± 1 . Vamos definir aqui $\mathcal{O}_1^+ = \sigma_1$, $\mathcal{O}_2^+ = \sigma_3$, $\mathcal{O}_1^- = (\sigma_1 + \sigma_3)/\sqrt{2}$ e $\mathcal{O}_2^- = (\sigma_1 - \sigma_3)/\sqrt{2}$, onde σ_1 e σ_3 são os operadores de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para a matriz densidade dada por (5.26), cada termo da relação (5.42) é calculado fazendo $\langle \mathcal{O}_i^+ \mathcal{O}_j^- \rangle = \text{Tr} [(\mathcal{O}_i^+ \otimes \mathcal{O}_j^-)\rho(t)]$. Realizando esse cálculos obtemos uma desigualdade de Bell dada por

$$\left| 2\sqrt{2} \text{Re}\{d(t)\} + \sqrt{2}[a(t) - b(t) - c(t)] \right| \leq 2,$$

e usando (5.27) a (5.30), podemos substituir os termos na equação acima e obter

$$\left| \sqrt{2} \left[2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re\{e^{-i\phi} f_{++}(t)\} + 2\xi(1 - |f_{++}(t)|^2) - 1 \right] \right| \leq 2. \quad (5.43)$$

Assim podemos introduzir a função

$$DB(t) = \left| \sqrt{2} \left[2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re\{e^{-i\phi} f_{++}(t)\} + 2\xi(1 - |f_{++}(t)|^2) - 1 \right] \right| - 2 \quad (5.44)$$

de tal modo que a violação da desigualdade de Bell ocorre quando $DB(t) > 0$. Com as relações acima podemos implementar os devidos gráficos tanto para uma cavidade grande quanto para pequena.

Cavidade Pequena

Na figura (5.3) encontra-se o gráfico da função (5.44) para alguns parâmetros fixos. Percebe-se que a violação da desigualdade de Bell ($DB(t) > 0$) ocorre em alguns instantes bem definidos. O fato de não ocorrer a violação da desigualdade em todo instante não é suficiente para dizermos que o emaranhamento deixa de existir quando a desigualdade não for violada.

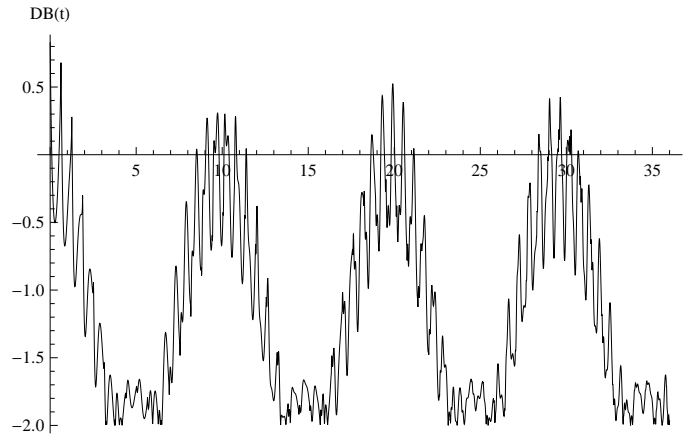


Figura 5.3: Gráfico de $DB(t) \times t$, para valores fixos de $\xi = 0.5$, $\phi = \pi$, $\bar{\omega} = 1.92$ e $g = 1.0$ (em unidades arbitrárias), para um cavidade pequena com $\delta = 0.1$.

O comportamento da relação (5.43) encontra-se na figura 5.4. Neste caso verificamos também um comportamento oscilatório na evolução temporal. As regiões internas das curvas fechadas, onde ocorre a violação, aparecem e desaparecem a medida que o tempo (eixo

vertical) avança. Isto ocorre para todos os valores de ϕ . Como dissemos anteriormente, violação da desigualdade de Bell não é um bom indicador de emaranhamento para estados de mistura [10]. Esse resultado ilustra bem essa afirmação. Aparentemente, o que ocorre neste caso é o que chamamos de morte e ressurreição do emaranhamento. Como veremos adiante não é este o caso.

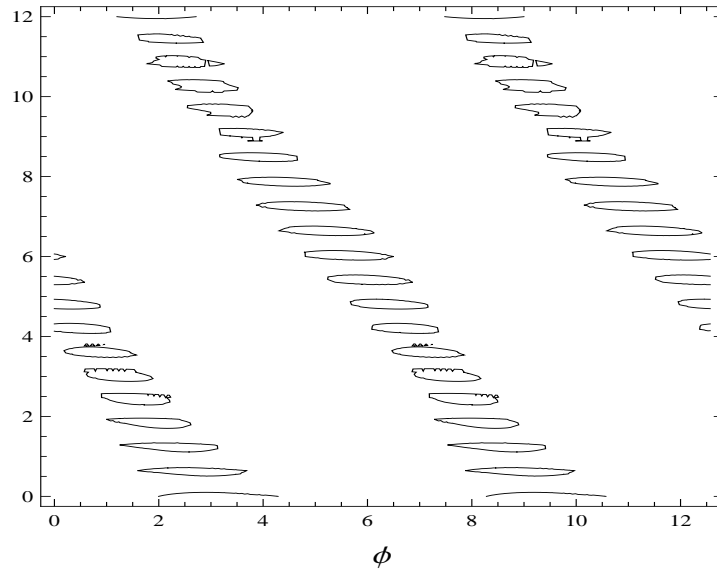


Figura 5.4: Gráfico no plano $\phi \times t$ da desigualdade de Bell para valores fixos de $\xi = 0.5$, $\bar{\omega} = 1.92$ e $g = 1.0$ (em unidades arbitrárias), para um cavidade pequena com $\delta = 0.1$.

Cavidade Grande

Para cavidades grandes verificamos que para $t \gg 1$ a desigualdade (5.43) não é violada para nenhuma valor de ξ e ϕ . Este comportamento se deve ao fato de que $|f_{++}(t)| \rightarrow 0$ no limite $t \rightarrow \infty$. A figura (5.5) ilustra a violação da desigualdade de Bell para cavidades grandes, considerando tempos pequenos. Verificamos que com o aumento do tempo as regiões internas, onde ocorre violação da desigualdade de Bell, tendem a diminuir.

5.2.2 Medidas de Emaranhamento

Nesta subseção vamos discutir algumas medidas de emaranhamento para o estado (5.26). Antes de discutirmos propriamente as medidas utilizadas, vamos fazer algumas considerações. Primeiramente é salutar dizer que apesar de não termos feito nenhuma restrição para

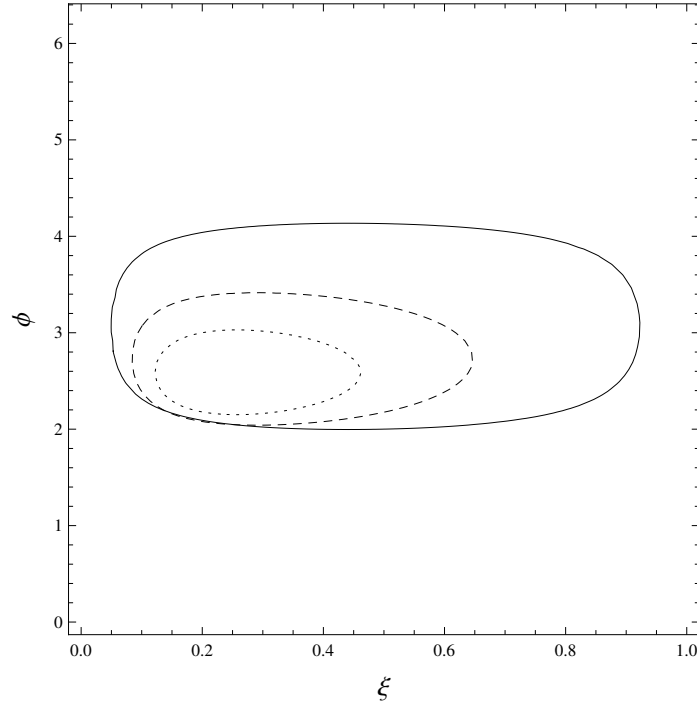


Figura 5.5: Gráfico do contorno no plano $\xi \times \phi$ mostrando a região onde ocorre violação da desigualdade de Bell para cavidade grande. A violação ocorre na região interior das curvas. Fizemos neste caso: $t = 0.01$ (linha completa), 0.08 (linha tracejada) e 0.12 (linha pontilhada), com $\bar{\omega} = 2.0$ e $g = 1.0$ em unidades arbitrárias.

sistemas de dois níveis explicitamente, o estado considerado é descrito por uma matriz reduzida 2×2 . Isso não seria verdade se tivéssemos utilizado por exemplo um estado no qual os osciladores massivos estivessem no segundo estado excitado, e não no primeiro como adotamos. Esta última configuração levaria a uma matriz densidade de ordem 3×3 o que inviabilizaria a utilização das medidas do grau de emaranhamento que foram utilizadas.

Emaranhamento de Formação

Conforme discutido na seção (1.4.3) o emaranhamento de formação é obtido via a concorrência de emaranhamento [31], que é dada a partir dos autovalores da matriz $\sqrt{\rho\tilde{\rho}}$, onde $\tilde{\rho} = (\sigma_2 \otimes \sigma_2)\rho^*(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ e σ_2 é a matriz de Pauli

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando a base $\{|0_+, 0_-\rangle, |0_+, 1_-\rangle, |1_+, 0_-\rangle, |1_+, 1_-\rangle\}$, nos encontramos

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(t) & d(t) & 0 \\ 0 & d^*(t) & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t) \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

e

$$\rho\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b(t)c(t) & 2b(t)d(t) & 0 \\ 0 & 2c(t)d^*(t) & 2b(t)c(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

onde usamos o fato de que $b(t)c(t) = |d(t)|^2$. Essa matriz somente possui um autovalor não nulo, que é $\lambda(t) = 4b(t)c(t)$. Dessa maneira a concorrência é dada por

$$\begin{aligned} C_\rho(t) &= 2\sqrt{b(t)c(t)} \\ &= 2\sqrt{\xi(1-\xi)}|f_{++}(t)|. \end{aligned} \quad (5.47)$$

O emaranhamento de formação pode ser expresso como

$$E_\rho = \mathcal{E}(C_\rho) = h\left(1 + \sqrt{1 - C_\rho^2}\right), \quad (5.48)$$

lembrando que a função h é definida por

$$h(x) = \frac{1}{2} [2 - x \log_2(x) - (2-x) \log_2(2-x)].$$

Assim encontramos

$$E_\rho(t) = h\left(1 + \sqrt{1 - 4\xi(1-\xi)|f_{++}(t)|^2}\right). \quad (5.49)$$

Negatividade

Outra medida de emaranhamento citada anteriormente é a negatividade [33,34], definida por

$$\mathcal{N}_\rho = \|\rho^{T-}\|_1 - 1 \quad (5.50)$$

onde ρ^{T-} é a matriz transposta parcial de um estado de mistura bipartite ρ e $\|\cdot\|_1$ denota a operação chamada de traço da norma. Essa operação é definida como sendo $\|\rho\|_1 = \text{Tr}\sqrt{\rho\rho^\dagger}$, que para operadores hermitianos é dada pela soma dos valores absolutos do seus autovalores.

Como demonstrado na seção 1.4.4, a negatividade é a soma dos valores absolutos dos autovalores negativos da matriz parcialmente transposta. Como já dissemos anteriormente, essa medida é uma consequência direta do critério de Simon [20] para identificação de estados separáveis.

A matriz parcialmente transposta do estado (5.26) é dada por

$$\rho^{T-}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & d(t) \\ 0 & b(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(t) & 0 \\ d^*(t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Os autovalores da matriz acima são dados por

$$\lambda_1(t) = b(t) \quad (5.52)$$

$$\lambda_2(t) = c(t) \quad (5.53)$$

$$\lambda_3(t) = \left(a(t) + \sqrt{a^2(t) + 4|d(t)|^2} \right) / 2 \quad (5.54)$$

$$\lambda_4(t) = \left(a(t) - \sqrt{a^2(t) + 4|d(t)|^2} \right) / 2 \quad (5.55)$$

Como somente existe um único autovalor negativo (5.55), a negatividade é dada então por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\rho(t) &= 2 |\lambda_4(t)| = \sqrt{a^2(t) + 4|d(t)|^2} - a(t) \\ &= \sqrt{\xi^2 + (4\xi - 6\xi^2)|f_{++}(t)|^2 + \xi^2|f_{++}(t)|^4 - \xi + \xi|f_{++}(t)|^2}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

É relevante mencionar que a negatividade e a concorrência, para estados puros, são sempre iguais [34]. Contudo para estados de mistura [49] $\mathcal{N}_\rho \leq \mathcal{C}_\rho$.

Para a cavidade pequena o resultado da negatividade, da concorrência e do emaranhamento de formação encontram-se na figura (5.6). É possível verificar que neste caso, o sistema permanece emaranhado para todo o tempo. As medidas apresentam um comportamento oscilatório e não se anulam. Esse resultado contradiz o que se observa na violação da desigualdade de Bell, como dito anteriormente. Em outras palavras, a temperatura nula, não existe morte súbita de emaranhamento, nos limites considerados. A permanência do emaranhamento no regime de cavidades pequenas se deve a inibição da emissão espontânea, realizada pela geometria da cavidade.

Para cavidades grandes verificamos um comportamento diferente. O emaranhamento tende a desaparecer no limite de $t \rightarrow \infty$. Esse comportamento é denominado na literatura

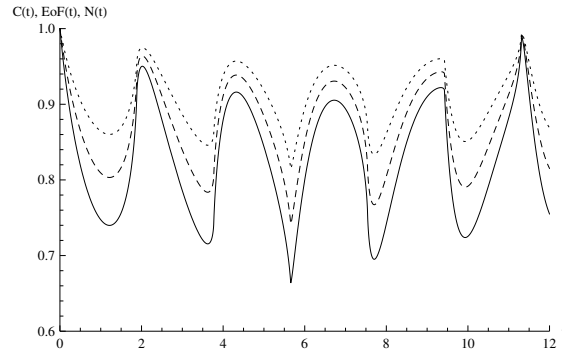


Figura 5.6: Negatividade (linha contínua), Emaranhamento de formação (linha tracejada) e Concorrência (linha pontilhada) para uma cavidade pequena considerando $\delta = 0.03$, $\bar{\omega} = 0.67$ e $g = 0.1$.

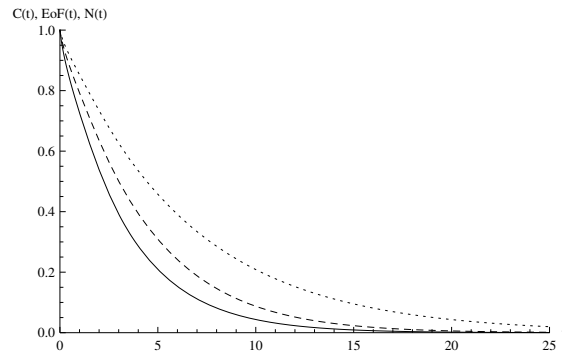


Figura 5.7: Negatividade (linha contínua), Emaranhamento de formação (linha tracejada) e Concorrência (linha pontilhada) para uma cavidade grande, considerando $\bar{\omega} = 2.0$ e $g = 0.1$.

como decaimento assintótico de emaranhamento. Esse comportamento é compreensível devido a emissão espontânea ocorrer no espaço livre. Esses resultados podem ser vistos na figura (5.7).

5.3 Emaranhamento a temperatura finita

Vamos agora analisar o emaranhamento de um estado sob efeito de temperatura. Consideraremos um estado atômico tipo Bell, idêntico ao usado na seção anterior, a menos do campo que será definido em um estado de equilíbrio térmico, ou seja, satisfazendo uma distribuição de Bose-Einstein. Em outras palavras, estamos considerando em $t = 0$, o seguinte estado

$$\hat{\rho}' = \hat{\rho}'_{(+)} \otimes \hat{\rho}'_{\beta}, \quad (5.57)$$

onde

$$\hat{\rho}'_{\beta} = \frac{\bigotimes_k e^{-\beta H'_k}}{\text{Tr}[\bigotimes_k e^{-\beta H'_k}]} \quad (5.58)$$

é a matriz densidade que descreve um estado de equilíbrio térmico do campo e

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_{(+)} &= |\Psi^{+-}\rangle \langle \Psi^{+-}| \\ &= \xi \left| \Gamma_{10}^{(+)} \right\rangle \left\langle \Gamma_{10}^{(+)} \right| \\ &\quad + (1 - \xi) \left| \Gamma_{01}^{(+)} \right\rangle \left\langle \Gamma_{01}^{(+)} \right| \\ &\quad + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{i\phi} \left| \Gamma_{01}^{(+)} \right\rangle \left\langle \Gamma_{10}^{(+)} \right| \\ &\quad + \sqrt{\xi(1 - \xi)} e^{-i\phi} \left| \Gamma_{10}^{(+)} \right\rangle \left\langle \Gamma_{01}^{(+)} \right|. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Nosso interesse é analisar o efeito da temperatura na dinâmica de emaranhamento de estados tipo Bell. Na situação anterior onde consideramos um sistema a temperatura nula, a construção de uma matriz densidade reduzida 2×2 dependente do tempo foi construída possibilitando que medidas de emaranhamento fossem implementadas.

Neste caso a evolução temporal do estado (5.57) pode ser realizada através do Hamiltoniano do sistema em função dos operadores de criação e aniquilação vestidos e calculando a evolução temporal segundo a equação de Liouville-von Neumann. Este procedimento nos levaria a uma matriz densidade reduzida de ordem superior a dois, pelo simples fato de que probabilidades de absorção de fótons pelos átomos são não nulas para um intervalo de tempo pequeno. Somente para tempos suficientemente longos essas probabilidades se anulam.

Realizando a evolução temporal da matriz densidade incorreríamos em um problema de quantificação de emaranhamento ainda não resolvido, qual seja, o da quantificação de emaranhamento em estados de mistura com matrizes densidade de ordem superior a dois. Isso se deve ao fato de que nestes casos a medida mais adequada é a entropia relativa descrita na seção (1.4.2). Essa medida contudo, não possui solução analítica para estados

com dimensão superior a 2×2 . Os procedimentos numéricos conhecidos valem para alguns estados com dimensão finita e ainda assim carecem de grandes recursos computacionais.

Diante das dificuldades apresentadas para a implementação das medidas do grau de emaranhamento fizemos uma análise baseada em alguns critérios de separabilidade. Em geral estes critérios são oriundos de condições que estados separáveis devem necessariamente satisfazer. Quando estas condições são violadas o emaranhamento se caracteriza. Estas condições são obtidas dos valores esperados de observáveis físicas e como visto anteriormente, a evolução temporal dos operadores de criação e aniquilação vestidos é um problema resolvido dentro deste formalismo.

5.3.1 Critério de Simon

Como discutido na seção (1.3.2) o critério de Simon [20] é baseado no critério de Peres-Horodecki [17, 18] da não positividade da matriz parcialmente transposta, estendido para sistemas contínuos. Em verdade Simon demonstrou que a operação de transposição parcial realiza uma reflexão especular no momento no espaço de fase.

Simon obteve relações entre os elementos da matriz de variância, que devem ser satisfeitas para todos os estados separáveis e que são mais fortes que as relações de incerteza de Heisenberg. A não violação dessas relações se configura condição necessária e suficiente para estados gaussianos bipartite. Os elementos da matriz de variância V são dados por

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{\xi}_i, \Delta \hat{\xi}_j \} \rangle \quad (5.60)$$

onde

$$\Delta \hat{\xi}_i = \hat{\xi}_i - \langle \hat{\xi}_i \rangle \quad (5.61)$$

e $\hat{\xi} = (\hat{q}_1 \ \hat{p}_1 \ \hat{q}_2 \ \hat{p}_2)$ com $i, j = 1, \dots, 4$. Simon demonstrou que estados separáveis bipartite devem satisfazer a seguinte desigualdade

$$V + \frac{i}{2} \tilde{\Omega} \geq 0 \quad (5.62)$$

onde

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Denotando a matriz de variância em blocos de matrizes 2×2

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

podemos reescrever a relação (5.62) como sendo

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - |\det C| \right)^2 - \text{Tr} [AJCJBJC^T J] \geq \frac{1}{4} (\det A + \det B). \quad (5.65)$$

Vamos então utilizar a desigualdade (5.65) proposta por Simon, para analisar a dinâmica de emaranhamento para o estado (5.57). Para isso devemos obter a dependência temporal das médias térmicas dos operadores de posição e momento. Sabemos que a evolução temporal de uma matriz densidade é dada por

$$\rho(t) = e^{(-i/\hbar)\hat{H}t} \rho e^{(i/\hbar)\hat{H}t}. \quad (5.66)$$

Assim a média térmica dependente do tempo é dada por

$$\langle A \rangle (t) = \text{Tr}[Ae^{(-i/\hbar)\hat{H}t} \rho e^{(i/\hbar)\hat{H}t}] = \text{Tr}[A(t)\rho] \quad (5.67)$$

sendo

$$A(t) = e^{(i/\hbar)\hat{H}t} A e^{(-i/\hbar)\hat{H}t} \quad (5.68)$$

onde usamos a propriedade cíclica do traço. Usando o Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (p_-^2 + \bar{\omega}^2 q_-^2) + \frac{1}{2} \sum_r (P_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2), \quad (5.69)$$

as transformações

$$\sqrt{\bar{\omega}} q'_+ = \sum_{r=1}^{\infty} t_+^r \sqrt{\Omega_r} Q_r, \quad \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}}} p'_+ = \sum_{r=1}^{\infty} t_+^r \frac{P_r}{\sqrt{\Omega_r}} \quad (5.70)$$

e as relações de Baker–Campbell–Hausdorff

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (5.71)$$

podemos demonstrar que

$$\hat{q}'_-(t) = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \left(\hat{a}'_- e^{-i\bar{\omega}t} + \hat{a}'_-{}^\dagger e^{i\bar{\omega}t} \right), \quad (5.72)$$

$$\hat{q}'_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \sum_{\mu} [\hat{a}'_{\mu} f_{+\mu}(t) + \hat{a}'_{\mu}{}^\dagger f_{+\mu}^*(t)] \quad (5.73)$$

$$\hat{p}'_-(t) = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \left(\hat{a}'_- e^{-i\bar{\omega}t} - \hat{a}'_-{}^\dagger e^{i\bar{\omega}t} \right), \quad (5.74)$$

$$\hat{p}'_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \sum_{\mu} [\hat{a}'_{\mu} f_{+\mu}(t) - \hat{a}'_{\mu}{}^\dagger f_{+\mu}^*(t)]. \quad (5.75)$$

Com esses operadores obtemos os elementos não nulos da matriz de variância

$$V_{11} = \frac{1}{\bar{\omega}^2} V_{22} = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{3}{2} - \xi \right) \quad (5.76)$$

$$V_{33} = \frac{1}{\bar{\omega}^2} V_{44} = \frac{1}{\bar{\omega}} [g(\xi, t) + h(t, \beta)] \quad (5.77)$$

$$V_{13} = \frac{V_{24}}{\bar{\omega}^2} = \sqrt{\frac{\xi(1-\xi)}{\bar{\omega}^2}} \operatorname{Re}[z(t)] \quad (5.78)$$

$$V_{14} = -V_{23} = \sqrt{\xi(1-\xi)} \operatorname{Im}[z(t)] \quad (5.79)$$

onde $g(\xi, t) = 1/2 + \xi |f_{++}(t)|^2$, $h(t, \beta) = \sum_k |f_{+k}(t)|^2 n'_k(\beta)$, $z(t) = f_{++}(t) e^{i(\bar{\omega}t - \phi)}$, $n'_k(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}$, $\omega_k = \frac{k\pi c}{R}$. Com esses resultados podemos analisar a desigualdade proposta por Simon (5.65) para identificação de separabilidade. Os elementos da desigualdade (5.65) são dados por

$$\operatorname{Det}A = \left(\frac{3}{2} - \xi \right)^2, \quad (5.80)$$

$$\operatorname{Det}B = (g(\xi, t) + h(t, \beta))^2, \quad (5.81)$$

$$\operatorname{Det}C = \xi(1-\xi) |z(t)|^2, \quad (5.82)$$

$$\operatorname{Tr}[AJCJBJC^T J] = 2\xi(1-\xi) \left(\frac{3}{2} - \xi \right) [g(\xi, t) + h(t, \beta)] |f_{++}(t)|^2. \quad (5.83)$$

Dessa maneira podemos definir a função

$$\begin{aligned} E_s(t, \xi; \beta) &= \left(\frac{3}{2} - \xi \right)^2 (g(\xi, t) + h(t, \beta))^2 + \left(\frac{1}{4} - \xi(1-\xi) |f_{++}(t)|^2 \right)^2 \\ &\quad - 2\xi(1-\xi) \left(\frac{3}{2} - \xi \right) [g(\xi, t) + h(t, \beta)] |f_{++}(t)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{2} - \xi \right)^2 + (g(\xi, t) + h(t, \beta))^2 \right], \end{aligned} \quad (5.84)$$

tal que quando $E_s(t, \xi; \beta) < 0$, o estado é emaranhado. Analisando o limite de temperatura nula ($\beta \rightarrow \infty$) temos $h(t, \beta) = 0$ e neste caso $E_s(t, \xi; \beta \rightarrow \infty) = 0$, $\forall t \geq 0$ e $\forall \xi \in [0, 1]$. Ou seja, a desigualdade de Simon não é violada em nenhum instante de tempo. Como o estado (5.57) não é um estado Gaussiano nada podemos afirmar sobre o emaranhamento, a partir deste resultado.

5.3.2 Critério de Shchukin-Vogel

O critério proposto por Simon não é suficiente para análise do emaranhamento em um estado tipo Bell. Uma outra maneira de olhar para esses estados é via o critério proposto

por Shchukin e Vogel [23]. A proposta destes autores pode ser implementada para estados não gaussianos pelo fato de ser uma condição necessária e suficiente de separabilidade para qualquer estado de oscilador harmônico.

Conforme o que foi discutido na seção (1.3.3) podemos afirmar que um estado não é separável utilizando o teorema (12), quando $\exists N | D_N < 0$, onde

$$D_N = \begin{vmatrix} 1 & \langle \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{b} \rangle & \dots \\ \langle \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle & \dots \\ \langle \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^2 \rangle & \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b} \rangle & \dots \\ \langle \hat{b} \rangle & \langle \hat{a} \hat{b} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle & \langle \hat{b}^2 \rangle & \dots \\ \langle \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{b}^{\dagger 2} \rangle & \langle \hat{b} \hat{b}^\dagger \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (5.85)$$

Lembrando que esse critério é baseado na positividade dos menores principais de uma matriz, como condição para que ela seja positiva definida. Dessa maneira, basta encontrarmos um menor principal que seja negativo para concluirmos que a matriz não é positiva definida.

Os próprios autores demonstram que para uma superposição de estados coerentes, um subdeterminante que demonstra o emaranhamento do estado é dado por

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \langle b^\dagger \rangle & \langle ab^\dagger \rangle \\ \langle b \rangle & \langle b^\dagger b \rangle & \langle ab^\dagger b \rangle \\ \langle a^\dagger b \rangle & \langle ab^\dagger b \rangle & \langle a^\dagger ab^\dagger b \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.86)$$

Esse mesmo subdeterminante pode ser utilizado para analisar o emaranhamento do estado (5.57). Contudo vamos considerar o determinante da matriz S dependente do tempo, obtido através das médias térmicas dependentes do tempo dos operadores de criação e aniquilação.

De maneira análoga ao que discutimos na subseção anterior podemos obter $\langle a'_\mu \rangle(t)$ e $\langle a'^\dagger_\mu \rangle(t)$ através do valor esperado dos operadores

$$a'_\mu(t) = \sum_\nu f_{\mu\nu}(t) a'_\nu, \quad a'^\dagger_\mu(t) = \sum_\nu f^*_{\mu\nu}(t) a'^\dagger_\nu. \quad (5.87)$$

Para o oscilador referente as coordenadas relativas vamos considerar as transformações

$$q'_- = \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}}} (a'_- + a'^\dagger_-), \quad q'_+ = -i\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2}} (a'_- - a'^\dagger_-) \quad (5.88)$$

de tal modo que o Hamiltoniano (5.7) pode ser escrito como sendo

$$H'_- = \bar{\omega} \left(a'^\dagger_- a'_- + \frac{1}{2} \right). \quad (5.89)$$

Usando novamente as relações de Baker–Campbell–Hausdorff (5.71) encontramos

$$a'_-(t) = a'_- e^{-i\bar{\omega}t}, \quad a'^{\dagger}_-(t) = a'^{\dagger}_- e^{i\bar{\omega}t}. \quad (5.90)$$

Com estes resultados encontramos a matriz $S(t)$ dada por

$$S(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & (1 - \xi) & 0 \\ \alpha^* & 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{\xi(1 - \xi)} f_{++}(t) \exp[-i(\phi - \bar{\omega})t], \quad (5.92)$$

$$\eta = (1 - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} |f_{+k}(t)|^2 n'_k(\beta). \quad (5.93)$$

O determinante da matriz $S(t)$ é dado por

$$\det S(t) = (1 - \xi)^2 \left\{ \sum_k |f_{+k}(t)|^2 n'_k(\beta) - \xi |f_{++}(t)|^2 \right\}. \quad (5.94)$$

O estado é emaranhado quando $\det S(t) < 0$. Observando a equação (5.94) percebemos que o estado (5.57) é emaranhado quando a quantidade

$$E(t, \xi, \beta) = \sum_k |f_{+k}(t)|^2 n'_k(\beta) - \xi |f_{++}(t)|^2 \quad (5.95)$$

não for positiva. No limite $\beta \rightarrow \infty$, $n'_k(\beta) \rightarrow 0$ e conseqüentemente $\det(S) = -\xi(1 - \xi)^2 |f_{++}(t)|^2$. Isso demonstra que para temperatura nula, a evolução temporal de emaranhamento é determinada pela função $|f_{++}(t)|^2$. Além disto, para quaisquer valores de $0 < \xi < 1$ teremos inicialmente um estado emaranhando. Esse resultado encontra-se em acordo com todas as previsões obtidas para o caso a temperatura nula [48]. Vejamos agora a análise desses resultados para as duas cavidades consideradas.

Cavidade Pequena

Para cavidade pequena sabemos que a função $f_{++}(t)$, os elementos t_0^l , as frequências Ω_l e Ω_+ são dados pelas equações (5.33-5.36). Somente nos resta então explicitar os elementos $f_{+k}(t)$. Estas funções são dados por

$$f_{0k}(t) = \sum_{l=1}^{\infty} t_0^l t_k^l [\exp(-i\Omega_l t) - \exp(-i\Omega_0 t)] \quad (5.96)$$

e os elementos t_k^l são

$$t_k^l = \frac{\eta\omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_l^2} t_0^l. \quad (5.97)$$

Com estas informações é possível calcular numericamente o valor da função $E(t, \xi, \beta)$. Na figura (5.8) nos mostramos a evolução temporal da função $E(t, \xi, \beta)$ para $\xi = 1/2$ em diversos valores de β . Verificamos que o sistema permanece emaranhado para qualquer temperatura no intervalo $0.1465 \leq \beta \leq \infty$. Outra observação importante é que para temperaturas tais que $\beta < 0.1465$, existem intervalos no qual o sistema encontra-se emaranhado e em outros o emaranhamento desaparece. Esse comportamento é o que se denomina na literatura como morte e renascimento do emaranhamento.

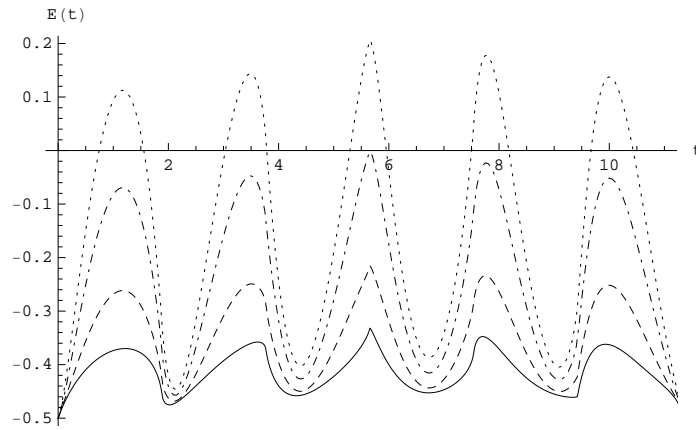


Figura 5.8: Evolução temporal de $E(t)$ para o estado (5.57) em uma cavidade pequena com $\delta = 0.03$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 0.67$ e $\xi = 0.5$. Fizemos β : 0.10 (linha pontilhada), 0.1465 (linha traço-pontilhada), 0.3 (linha tracejada) e ∞ (linha contínua).

A morte e o renascimento do emaranhamento para uma cavidade pequena não ocorre entretanto para todas as temperaturas. Na figura (5.9) mostramos duas temperaturas para as quais o estado encontra-se emaranhado no instante $t = 0$ e rapidamente o emaranhamento desaparece. Este fenômeno é chamado de morte súbita de emaranhamento. Verificamos que quando $\beta = 0.00315$ a função $E(t, \xi, \beta)$ tangencia o eixo horizontal em um instante $11.0 < t' < 11.5$ porém continua positiva. Assim podemos afirmar que para $0.00315 < \beta < 0.1465$ ocorre o que denominamos de morte e renascimento de emaranhamento.

Cavidade Grande

Para o regime de cavidade grande vamos utilizar as mesmas consideração tratadas na seção (4.3.2). Relembrando estamos considerando $R \rightarrow \infty$ juntamente com $\Delta\omega = \pi c/R \rightarrow 0$.

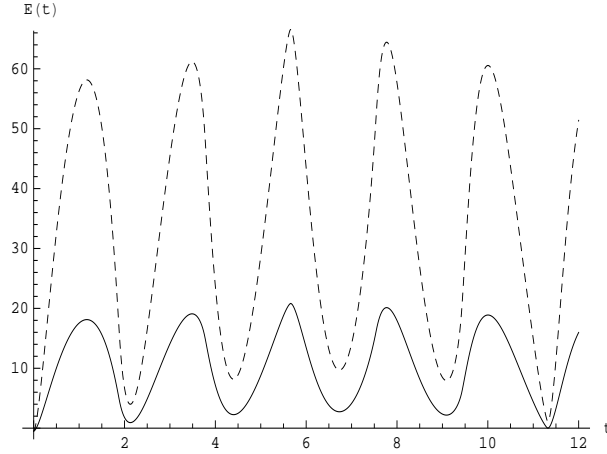


Figura 5.9: Evolução temporal de $E(t)$ para o estado (5.57) em uma cavidade pequena com $\delta = 0.03$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 0.67$ e $\xi = 1/2$. Fizemos β : 0.00315 (linha completa) e 0.001 (linha tracejada).

Neste caso a função $f_{++}(t)$ é dada por

$$f_{++}(t) = C_1(t; \bar{\omega}, g) + iS_1(t; \bar{\omega}, g), \quad (5.98)$$

onde

$$S_1(t; \bar{\omega}, g) = -2g \int_0^\infty \frac{\Omega^2 \sin(\Omega t)}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2} d\Omega \quad (5.99)$$

e a parte real é igual

$$C_1(t; \bar{\omega}, g) = e^{-\pi g t/2} \left[\cos(kt) - \frac{\pi g}{2k} \sin(kt) \right]. \quad (5.100)$$

A função $f_{0\omega_k}(t)$ é dada por

$$f_{0\omega_k}(t) = \omega_k \sqrt{\Delta\omega_k} [C_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g) + iS_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g)], \quad (5.101)$$

sendo a parte imaginária

$$S_2(\omega_k, t; \bar{\omega}, g) = -(2g)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\Omega^2 \sin(\Omega t)}{(\omega_k^2 - \Omega^2) [(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \Omega^2]} d\Omega \quad (5.102)$$

e a parte real igual a

$$C_2(\omega_k, t, \bar{\omega}, g) = \sqrt{2g} e^{-\pi g t/2} \left\{ \frac{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2) \cos(kt)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} - \frac{\pi g}{2k} \frac{(\omega_k^2 + \bar{\omega}^2) \sin(kt)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} \right\} \\ + \sqrt{2g} \left[\frac{\pi g \omega_k \sin \omega_k t}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} - \frac{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)}{(\omega_k^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \pi^2 g^2 \omega_k^2} \right]. \quad (5.103)$$

Tomando agora o limite considerado sobre a função $E(t, \xi, \beta)$ temos

$$\begin{aligned}
 E(t, \xi, \beta) &= \lim_{\Delta\omega_k \rightarrow 0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |f_{+k}(t)|^2 n'_k(\beta) \right] - \xi |f_{++}(t)|^2 \\
 &= \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 [C_2^2(\omega, t, \bar{\omega}, g) + S_2^2(\omega, t, \bar{\omega}, g)] n'(\beta) \\
 &\quad - \xi [C_1^2(t, \bar{\omega}, g) + S_1^2(t, \bar{\omega}, g)]
 \end{aligned} \tag{5.104}$$

Com estes resultados podemos perceber claramente que quando $t = 0$ temos $C_2 = S_2 = S_1 = 0$ e $C_1 = 1$, resultando então em $E(t, \xi, \beta)|_{(t=0)} = -\xi$ e conseqüentemente

$$Det(S) = -\xi(1 - \xi)^2. \tag{5.105}$$

Ou seja, no instante inicial o sistema encontra-se emaranhado para qualquer valor de $\xi \in]0, 1[$ independente da temperatura. O efeito térmico somente aparece para $t > 0$.

Com a equação (5.104) podemos também através de computação numérica encontrar gráficos para análise dos resultados. Na figura (5.10) nos mostramos o comportamento de $E(t)$ fazendo $\xi = 1/2$, em diferentes temperaturas. É perceptível que em todos os casos o emaranhamento desaparece ao longo do tempo, contudo somente para temperatura nula o decaimento ocorre quando $t \rightarrow \infty$. Este fenômeno é designado na literatura como decaimento assintótico de emaranhamento. Para todos os outros valores de temperatura o emaranhamento desaparece para um tempo finito e esse comportamento é o que chamamos de morte súbita de emaranhamento.

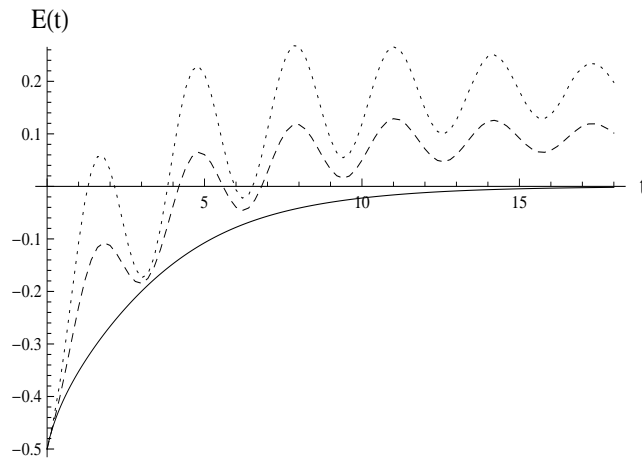


Figura 5.10: Gráfico de $E(t) \times t$ considerando $\xi = 1/2$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 2.0$ para cavidade grande sendo $\beta \rightarrow \infty$ (linha inteira), $\beta = 1.2$ (linha tracejada) e $\beta = 0.9$ (linha pontilhada).

É perceptível também que existe uma faixa de temperatura na qual ocorre algumas oscilações que caracterizam a morte e o renascimento do emaranhamento. Tomando como base $\beta = 1.2$ observamos que o estado encontra-se sem emaranhamento em $t = 5$, apresenta algum emaranhamento em $t = 6$ e posteriormente perde definitivamente qualquer grau de emaranhamento. Associamos este comportamento a alguns fatores. Primeiro é salutar lembrar que estamos considerando um regime de acoplamento fraco entre o oscilador e o campo, o que permite que por inércia o sistema continue excitado por um tempo considerável.

Para temperaturas mais elevadas esse comportamento deixa de existir como podemos perceber usando a figura (5.11). Fica claro neste gráfico que o primeiro ponto de mínimo local da curva de $E(t)$ ocorre em um valor positivo e o mesmo ocorre com todos os outros pontos. Neste caso ocorre a morte súbita e o emaranhamento não ocorre mais em nenhum instante de tempo.

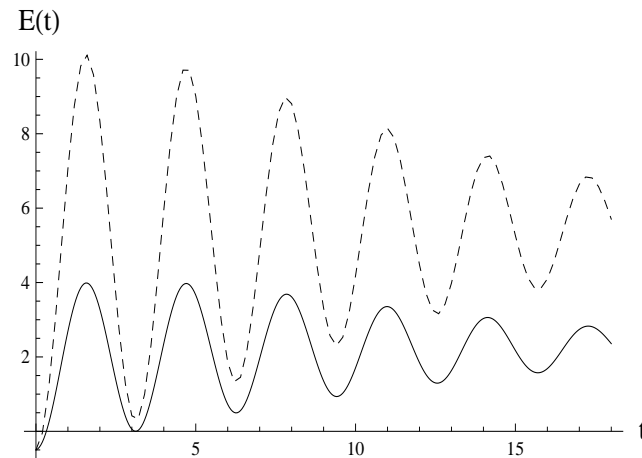


Figura 5.11: Gráfico de $E(t) \times t$ considerando $\xi = 1/2$, $g = 0.1$, $\bar{\omega} = 2.0$ para cavidade grande, sendo $\beta = 0.175$ (linha contínua) e $\beta = 0.08$ (linha tracejada).

Este comportamento em um estado de Bell foi analisado em 2006 por Santos *et. al.* [50] considerando um sistema bipartite interagindo com um ambiente markoviano. Eles demonstraram que estados do tipo $x|01\rangle + y|10\rangle$ para um sistema em contato com um ambiente markoviano a temperatura nula o decaimento é sempre assintótico. Um ano depois Almeida *et. al.* [51] realizaram uma implementação experimental destes estados comprovando as previsões teóricas de Santos.

Nosso resultado demonstra alguma semelhança com os resultados apresentados em [50,51] para o limite de temperatura nula. Para além disto, fizemos um estudo sobre o efeito da

temperatura do ambiente em estados tipo Bell e verificamos os diferentes regimes possíveis para o desaparecimento do emaranhamento.

5.4 Considerações Finais

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre a dinâmica de emaranhamento em um sistema confinado. Considerando uma superposição de estados atômicos, tipo Bell, verificamos diferentes comportamentos do sistema para duas configurações de cavidades distintas.

Quando tratamos o sistema a temperatura nula e considerando uma cavidade grande verificamos que o emaranhamento do sistema desaparece assintoticamente no limite de $t \rightarrow \infty$. Para além disto apresentamos em [48] a dinâmica de emaranhamento para o regime de cavidade pequenas, demonstrando que a inibição da emissão espontânea pela cavidade preserva o emaranhamento.

A extensão do sistema considerando um ambiente a temperatura finita consiste em uma observação relevante no estudo de emaranhamento. Para temperaturas elevadas os comportamentos encontrados já eram esperados, contudo para temperaturas não nulas suficientemente pequenas encontramos alguns resultados interessantes, tais como a preservação do emaranhamento e o regime de morte e ressurgimento do emaranhamento para um sistema bipartite.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese realizamos um estudo sobre efeitos de temperatura em estados emaranhados considerando duas situações distintas. Na primeira parte fizemos uma abordagem do emaranhamento para estados em equilíbrio térmico construídos via a Dinâmica de Campos Térmicos para um sistema de dois osciladores bosônicos. Identificamos que as medidas quantificadoras do grau de emaranhamento apresentadas na literatura não são factíveis nestes casos. Desta maneira usamos alguns identificadores de separabilidade para verificar como se comportam os estados emaranhados termalizados.

Para estes estados observamos que é possível encontrar uma temperatura crítica para a qual o emaranhamento desaparece completamente. Estudamos dois estados que se diferenciam pela sua Gaussianidade, o que é um fator relevante para a escolha do identificador de separabilidade apropriado. Para um estado comprimido (Gaussiano) a temperatura crítica depende do fator de compressão e para um estado de superposição tipo Bell (Não-Gaussiano), depende do parâmetro da superposição. A temperatura limite pode ser obtida usando o valor crítico da distribuição de Bose-Einstein. Nossos resultados encontram-se inéditos na literatura e estão em fase de submissão. Apresentam também acordo com os resultados conhecidos quando tomamos o limite de temperatura nula.

Na segunda parte analisamos um sistema de dois osciladores massivos confinados em uma cavidade esférica, acoplados com um ambiente modelado como uma superposição infinita de osciladores harmônicos. Estudamos neste caso a evolução temporal de identificadores e quantificadores de emaranhamento para um estado de superposição tipo Bell. Verificamos que em ambos os casos o aumento da temperatura proporciona um desaparecimento do emaranhamento. Contudo este comportamento não ocorre de maneira semelhante para todos

os casos.

Verificamos que no caso da temperatura nula o emaranhamento somente desaparece quando tomamos o limite de uma cavidade infinitamente grande, para qualquer valor de raio finito o emaranhamento se preserva. Neste caso foi possível utilizar quantificadores de emaranhamento devido ao comportamento da matriz densidade reduzida.

Quando consideramos o ambiente a temperatura finita não foi possível encontrar uma matriz densidade reduzida para a qual as medidas de emaranhamento pudessem ser utilizadas. Neste caso implementamos nossas observações a partir de um critério de separabilidade adequado. Verificamos que tanto para cavidades finitas ou infinitamente grandes o emaranhamento desaparece para altas temperaturas. Para temperaturas suficientemente pequenas os comportamentos se diferenciam.

Quando a cavidade é considerada infinitamente grande verificamos que para qualquer temperatura finita ocorre o que chamamos de morte súbita de emaranhamento. Em alguns casos pode ocorrer, em um intervalo de tempo finito, uma oscilação entre a existência e não existência do emaranhamento.

Para uma cavidade de raio finito encontramos três situações distintas. A existência de emaranhamento em todo instante, que ocorre para temperaturas suficientemente baixas, um processo de morte e ressurreição de emaranhamento para temperaturas intermediárias e a morte súbita de emaranhamento que ocorre para temperaturas suficientemente altas.

Como perspectiva para novos trabalhos dentro do contexto desta tese encontram-se várias questões. Primeiramente o estudo de outros estados de interesse em computação quântica e metrologia quântica, efeito da temperatura sobre as correlações das desigualdades de Bell e protocolos de teleportação e criptografia quânticas sobre canais modelados por estados termalizados são alguns destes problemas.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **47**, 777 (1935).
- [2] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **48**, 696 (1935).
- [3] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, **1**, 195 (1964).
- [4] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 460 (1981).
- [5] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 91 (1982).
- [6] Marek Czachor. Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment with relativistic massive particles. *Phys. Rev. A*, **55**, 72 (1997).
- [7] Horst von Borzeszkowski and Michael B Mensky. {EPR} effect in gravitational field: nature of non-locality. *Physics Letters A*, **269**, 197 (2000).
- [8] Knut Bakke, Alexandre M de M Carvalho, and Claudio Furtado. Influence of the topology in EPR correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**, 065301 (2008).
- [9] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information* (World Scientific, New York, 2009).
- [10] V. Vedral. *Introduction to Quantum Information Science* (Oxford University Press, Oxford, 2006).

- [11] B.M. Escher, R.L. Matos Filho, and L. Davidovich. Quantum metrology for noisy systems. *Brazilian Journal of Physics*, **41**, 229 (2011).
- [12] Vlatko Vedral. High-temperature macroscopic entanglement. *New Journal of Physics*, **6**, 102 (2004).
- [13] K. C. Lee, M. R. Sprague, B. J. Sussman, J. Nunn, N. K. Langford, X.-M. Jin, T. Champion, P. Michelberger, K. F. Reim, D. England, D. Jaksch, and I. A. Walmsley. Entangling macroscopic diamonds at room temperature. *Science*, **334**, 1253 (2011).
- [14] F. Dolde, I. Jakobi, B. Naydenov, N. Zhao, S. Pezzagna, C. Trautmann, J. Meijer, P. Neumann, F. Jelezko, and J. Wrachtrup. Room-temperature entanglement between single defect spins in diamond. *Nature Physics*, **9**, 139 (2013).
- [15] Claude Cohen-Tannoudji, Bernad Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics* (Hermann and John Wiley & Sons, Paris, 1977).
- [16] Reinhard F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, **40**, 4277 (1989).
- [17] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 1413 (1996).
- [18] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, **223**, 1 (1996).
- [19] S. L. Woronowicz. *Positive maps of low dimensional matrix algebras*. *Rep. Math. Phys.*, **10**, 165 (1976).
- [20] R. Simon. Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2726 (2000).
- [21] J. Williamson. On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. *Amer. J. Math.*, **58**, 141 (1936).
- [22] R. Simon, E. C. G. Sudarshan, and N. Mukunda. Gaussian-Wigner distributions in quantum mechanics and optics. *Phys. Rev. A*, **36**, 3868 (1987).
- [23] E. Shchukin and W. Vogel. Inseparability criteria for continuous bipartite quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 230502 (2005).

- [24] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Limits for entanglement measures. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2014 (2000).
- [25] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Mixed-state entanglement and distillation: Is there a “bound” entanglement in nature? *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 5239 (1998).
- [26] Martin B. Plenio and Vlatko Vedral. Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world. *Contemporary Physics.*, **39**, 431 (1998).
- [27] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, **54**, 3824 (1996).
- [28] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, **53**, 2046 (1996).
- [29] E. M. Rains. Bound on distillable entanglement. *Phys. Rev. A*, **60**, 179 (1999).
- [30] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 865 (2009).
- [31] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2245 (1998).
- [32] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 5022 (1997).
- [33] G. Vidal and R. F. Werner. Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, **65**, 032314 (2002).
- [34] K. Andenaert, F. Verstroete, T. De Bie, and B. De Moor. Negativity and concurrence of mixed 2x2 states. *arXiv:quant-ph/0012074*.
- [35] Y. Takahashi and H. Umezawa. *Coll. Phenomena*, **2**, 55 (1975). (Republicado em *International Journal of Modern Physics B*, **10**, 1755 (1996).).
- [36] Faqir C Khanna, Adolfo P C Malbouisson, Jorge M C Malbouisson, and Ademir E Santana. *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications* (World Scientific, Singapore, 2009).

- [37] F. Strocchi. *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics: A Short Course for Mathematicians* (World Scientific, Singapore, 2005).
- [38] G. S. Agarwal and K. Tara. Nonclassical character of states exhibiting no squeezing or sub-poissonian statistics. *Phys. Rev. A*, **46**, 485 (1992).
- [39] B Baseia, S B Duarte, and J M C Malbouisson. Interpolation from number states to chaotic states of the electromagnetic field. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **3**, 152 (2001).
- [40] Carlton M. Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. D*, **23**, 1693 (1981).
- [41] Rodney Loudon. Quantum limit on the Michelson interferometer used for gravitational-wave detection. *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 815 (1981).
- [42] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley. Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2409 (1985).
- [43] E. S. Polzik, J. Carri, and H. J. Kimble. Spectroscopy with squeezed light. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3020 (1992).
- [44] N P Andion, A P C Malbouisson, and A Mattos Neto. An exact approach to the oscillator radiation process in an arbitrarily large cavity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34**, 3735 (2001).
- [45] G. Flores-Hidalgo, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, Y. W. Milla, and A. E. Santana. Renormalized coordinate approach to the thermalization process. *Phys. Rev. A*, **79**, 032105 (2009).
- [46] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, and A. E. Santana. Thermal effects on the stability of excited atoms in cavities. *Phys. Rev. A*, **81**, 032119 (2010).
- [47] Michael Aaron Nielsen. *Quantum information theory*. PhD thesis, December 1998. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0011036>.
- [48] E. G. Figueiredo, C. A. Linhares, A. P. C. Malbouisson, and J. M. C. Malbouisson. Time evolution of entangled biatomic states in a cavity. *Phys. Rev. A*, **84**, 045802 (2011).

- [49] Frank Verstraete, Koenraad Audenaert, Jeroen Dehaene, and Bart De Moor. A comparison of the entanglement measures negativity and concurrence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34**, 10327 (2001).
- [50] M. França Santos, P. Milman, L. Davidovich, and N. Zagury. Direct measurement of finite-time disentanglement induced by a reservoir. *Phys. Rev. A*, **73**, 040305 (2006).
- [51] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and L. Davidovich. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science*, **316**, 579 (2007).