UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

TESE DE DOUTORADO

MECÂNICA QUÂNTICA SIMPLÉTICA RELATIVÍSTICA SUPERSIMÉTRICA

Ricardo Martinho Lima Santiago Pereira

Programa de Pós-Graduação em Física

Salvador
15 de fevereiro de 2019

PGFIS-Dsc-2019

RICARDO MARTINHO LIMA SANTIAGO PEREIRA

MECÂNICA QUÂNTICA SIMPLÉTICA RELATIVÍSTICA SUPERSIMÉTRICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador:José David Mangueira Vianna

Salvador
15 de fevereiro de 2019

Ficha catalográfica.

Lima Santiago. R. M.

MECÂNICA QUÂNTICA SIMPLÉTICA RELATIVÍSTICA SUPERSIMÉTRICA/ Ricardo Martinho Lima Santiago Pereira– Salvador, 15 de fevereiro de 2019.

69p.: il.

Orientador: José David Mangueira Viana.
Tese(doutorado)– UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, INSTITUTO DE FÍSICA, 15 de fevereiro de 2019.

TOPICOS PARA FICHA CATALOGRAFICA.
I. Vianna, J. D. M.. II. UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. INSTITUTO DE FÍSICA. III Título.

NUMERO CDD

TERMO DE APROVAÇÃO

RICARDO MARTINHO LIMA SANTIAGO PEREIRA

MECÂNICA QUÂNTICA SIMPLÉTICA RELATIVÍSTICA SUPERSIMÉTRICA

Esta Tese de Doutorado foi julgada adequada à obtenção do título de Doutor em Física e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Bahia.

Salvador, 28 de março de 2019

Prof. Dr. José David Mangueira Vianna
Universidade Federal da Bahia

Prof(a). Dr Marco Antônio da Silva Trindade
UNEB

Prof(a). Dr Ronni Geraldo Gomes de Amorim
UNB

Prof(a). Dr Milton Souza Ribeiro
UEFS

Prof(a). Dr Lourival Manoel da Silva Filho
UNEB

Dedico este trabalho às pessoas de minha vida, minha mãe, esposa, filhas e filho, em homenagem ao esforço, apoio e dedicação à minha jornada.

AGRADECIMENTOS

Ofereço meu profundo agradecimento à CAPES pelo apoio financeiro, ao Colegiado da Pós Graduação e a todos os envolvidos pelo apoio, compreensão e incentivo. Presto o meu agradecimento especial ao Professor J. David M. Vianna e à Professora Graça Martins que me ajudaram de todas as maneiras possíveis para chegar à conclusão deste trabalho, para além da orientação acadêmica com orientação para a vida. Gostaria também de agradecer pelo apoio e incentivos de amigos e familiares entre eles a professora Silvia, a minha esposa Viviane Macedo de Jesus e meus ex-alunos Joelton, Tarcisio e Davi Silva Pereira.

O objeto clássico é localizado no espaço-tempo, enquanto o objeto quântico não esta localizado no espaço-tempo. Este evolui num espaço matemático-abstrato, governado pela álgebra dos operadores e não pela álgebra dos números.

—BASSARAB NICOLESCU

RESUMO

A Mecânica Quântica Simplética Relativística (RSQM) considera a álgebra não comutativa de funções no espaço de fase $\Gamma \equiv (q,p)$ e num espaço de Hilbert associado H_Γ para construir uma representação unitária da álgebra de Lie do Grupo de Poincaré. Em consequência uma equação de Klein-Gordon e uma Equação de Dirac são obtidas em termos de variáveis no espaço de fase e a função de Wigner pode ser derivada diretamente a partir de soluções destas equações. Nesta formulação os operadores $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ são dados por $\hat{Q} = q* = \left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)$ e $\hat{P} = p* = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)$; consequentemente as soluções para as equações de Klein-Gordon ou Dirac com potenciais requerem um tratamento especial; para isto estendemos neste trabalho o método de Supersimetria na Mecânica Quântica (SUSYQM) para RSQM: a Hierarquia de Hamiltonianos é gerada e soluções exatas são obtidas para cada potencial. Tomando uma expressão geral para potencial vetor e potencial escalar em termos de parâmetros apropriados nós analisamos o Oscilador Harmônico de Dirac, um potencial tipo $-\frac{A}{Q}$ externo e um potencial que altera a massa. O espectro de auto-valores, as correspondentes auto-funções (amplitudes de quase-probabilidade no espaço de fase) e funções de Wigner são derivadas e discutidas.

Palavras-chave: Mecânica Quântica Simplética, Espaço de Fase, Supersimetria, Equação de Dirac.

ABSTRACT

Relativistic symplectic quantum mechanics (RSQM) considers a noncommutative algebra of functions on a phase space $\Gamma \equiv (q,p)$ and an associated Hilbert space H_Γ to construct a unitary representation of the Poincaré group Lie algebra. Then, Klein-Gordon and Dirac equations are obtained in terms of phase space variables, and the Wigner function can be derived directly from the solutions of these equations. In this formulation, the operators $\hat{Q}$ and $\hat{P}$ are given by $\hat{Q} = q* = \left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)$ and $\hat{P} = p* = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)$. Solutions for the Klein-Gordon and Dirac equations with potentials require special treatment; for that, we extend in this work the method of supersymmetric quantum mechanics (SUSYQM) to RSQM. Using a hierarchy of Hamiltonians, we obtain exact solutions for some potentials. By taking a general expression for vector and scalar potentials in terms of appropriate parameters, we analyze a potential $-\frac{A}{Q}$, the Dirac harmonic oscillator, and a potential added to mass term. Spectra of eigenvalues, the correspondent eigenfunctions (quasi-probability amplitude in phase space) and Wigner functions are derived and discussed.

Keywords: Sympletic Quantum Mechanics, Phase Space, Supersymmetry, Dirac Equation.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução. 1

1.1 Introdução 1

Capítulo 2—Formulação de Wigner. 5

2.1 Introdução. 5
2.2 A equação de Liouville-von Neumann. 5
2.2.1 Definição da Função de Wigner. 6
2.2.2 Equivalência de Operadores da Representação de Wigner. 7
2.2.3 Produto Estrela $*$. 8

Capítulo 3—Grupos de Simetria e Mecânica Quântica Simplética. 11

3.1 Introdução. 11
3.2 O Grupo de Galilei e o Grupo de Poincaré. 11
3.2.1 Determinação do Grupo de Simetrias. 11
3.2.2 Grupo de Galilei. 12
3.2.3 Grupo de Poincaré. 14
3.3 Equações Covariantes. 15

Capítulo 4—Formulação da Supersimetria. 17

4.1 Introdução. 17
4.2 Modelo de Witten:
Caso Geral. 18
4.2.1 Mecânica Quântica Simplética e o Espaço de Hilbert Supersimétrico. 18
4.2.2 Supersimetria Quebrada 19
4.2.3 Supersimetria com dois geradores: $\hat{D}_1$ e $\hat{D}_2$. 19
4.2.3.1 Casos 1 e 2 : 20
4.2.3.2 Caso 3 21

Capítulo 5—Fatoração e Hierarquização do Hamiltoniano de Dirac. 23

5.1 Introdução. 23
5.2 Fatoração e Hierarquização de hamiltonianos:
a invariância na forma 23
5.3 Fatoração da Equação de Dirac
no espaço de fase. 24

5.3.1 Fatoração. 24
5.3.2 Álgebra dos Hamiltonianos. 30

Capítulo 6—Aplicações. 33

6.1 Função de Wigner e Operadores Bosônicos em Geral. 33
6.2 Equação de Dirac
para Partícula Livre. 34
6.2.1 Equação de Dirac no espaço de fase. 34
6.2.2 Autovalores dos Hamiltonianos. 34
6.2.3 Autovetores dos Hamiltonianos. 35
6.2.4 Funções de Wigner. 35
6.3 Equação de Dirac
sob potencial tipo $-\frac{A_2}{r}$ externo. 35
6.3.1 Equação de Dirac no espaço de fase. 35
6.3.2 Autovalores dos Hamiltonianos. 36
6.3.3 Autovetores dos Hamiltonianos. 37
6.3.4 Funções de Wigner. 37
6.4 Oscilador Harmônico de Dirac
tipo $\vec{A}(\vec{\eta}) = -im\omega^2\vec{\eta}\,(\rho_3 \otimes 1)$. 38
6.4.1 Introdução. 38
6.4.1.1 Autovalores dos Hamiltonianos. 39
6.4.1.2 Autovetores dos Estados Fundamentais. 39
6.4.1.3 Funções de Wigner. 40
6.5 Partícula sob um Potencial que altera a massa. 40
6.5.1 Equação de Dirac no espaço de fase. 40
6.5.2 Autovalores dos Hamiltonianos. 41
6.5.3 Autovetores dos Hamiltonianos. 42
6.5.4 Funções de Wigner. 42

Capítulo 7—Conclusões e Perspectivas. 45

Apêndice A—Sobre a Fatoração do Hamiltoniano. 47

A.1 Fatoração da Equação de Dirac
no espaço de fase. 47
A.1.1 Fatoração. 47
A.2 Transformação de Similaridade no caso geral. 49
A.2.1 Transformando ρ_3 no caso geral. 50
A.2.2 Transformando $(\rho_1)_{N=1,M=1}$ e $(\rho_2)_{N=-i,M=-1}$ no caso geral. 50
A.2.3 Transformando $\vec{\Lambda} \cdot \vec{\rho}$ no caso geral. 50
A.2.4 Exigindo que o segundo termo da expressão seja nulo. 51
A.2.5 Transformando $\vec{W} \cdot \vec{\rho}$. 52

Apêndice B—Funções de Wigner. 55

B.1 Conjunto de autovetores dos estados fundamentais. 55
B.1.1 Partícula Livre. 59
B.1.2 Sob um potencial do tipo $-\frac{A}{Q}$ externo. 59
B.1.3 Oscilador Harmônico de Dirac. 59
B.2 Funções de Wigner. 60
B.2.1 Partícula Livre. 62
B.2.2 Sob um potencial do tipo $-\frac{A}{Q}$ externo. 63
B.2.3 Oscilador Harmônico de Dirac. 64

Referências 67

Capítulo 1

"... o menor desvio inicial da verdade é multiplicado mais de mil vezes ... você descobrirá que o mínino que você introduziu, por menor que seja, faz com que as maiores verdades da matemática sejam alteradas - Aristóteles.*"*

INTRODUÇÃO.

1.1 INTRODUÇÃO

O estudo das simetrias de sistema físico tem importância em Física Clássica e Teoria Quântica tanto na formulação relativística como na não relativística, contextos em que aparece tanto em aplicações práticas como no desenvolvimento das teorias. Uma categoria que busca ampliar nossa compreensão a respeito das interações básicas da natureza - forte, fraca, eletromagnética e gravitacional - é a supersimetria. O conceito de supersimetria apareceu inicialmente visando compreender a relação entre bósons e férmions e pode ser um ingrediente necessário para um processo de unificação. Ele foi primeiramente discutida por Gelfand e Likktman [1] em um trabalho sobre álgebra de Lie e o grupo de Poincaré, tendo sido seguido posteriormente por Volker e Akslov [2] e Wess e Zumino [3] na formulação da Teoria de Campos. Embora ainda não haja evidência experimental da supersimetria, essa ideia tem sido aplicada como um modelo em vários ramos da Física: atômica, molecular, nuclear, estatística, e matéria condensada, por exemplo. Em um sistema supersimétrico a supersimetria pode ser exata ou quebrada espontaneamente; se ela for exata (não quebrada) ter-se-á, numa teoria unificada, uma degenerescência entre os espectros de férmions e bósons. Um dos modelos mais simples da teoria quântica supersimétrico foi examinado por Witten [4] e por Cooper e Friedman [5]. No modelo de Witten para a supersimetria o Hamiltoniano do sistema quântico é designado por um par de Hamiltonianos, ditos parceiros, H_1 e H_2, para o qual todos os níveis de energia, exceto o estado fundamental, são duplamente degenerados.

As ideias da supersimetria têm trazido ao longo dos anos novos procedimentos para a Física [6]. Em particular tem sido observado que a supersimetria pode ser considerada como um método de resolução da equação de Schroedinger para certa classe de potenciais e com ela a equação de Dirac tem sido estudada sob vários aspectos [7–13] e mais recentemente analisada por [14–20]. Com este enfoque observa-se a importância do método de hierarquias de Hamiltonianos que está relacionado com a fatoração introduzida por Schroedinger [20] para resolver o problema do átomo de hidrogênio algebricamente, bem como o valor do conceito de invariância na forma para potenciais parceiros introduzida por Gendenshtein [21], [9], [22].

Tanto no que se refere à equação de Schroedinger quanto à equação de Dirac, os procedimentos adotados com base na supersimetria referem-se à teoria quântica usual, ou seja, à denominada SUSY quanto-mecânica. Entretanto, além da formulação usual da mecânica quântica há pelo menos dois outros procedimentos: O método das integrais de trajetória proposto por Dirac e desenvolvido por Feynman [23] e a teoria quântica no espaço de fase proposta por Wigner em 1932 [24] e que vem tendo uma série de desenvolvimentos, sendo um deles o proposto por Oliveira et al [25] e denominado Mecânica Quântica Simplética.

A Mecânica Quântica Simplética baseia-se nas álgebras de Lie do grupo de Galilei, no caso não-relativístico, e do grupo de Poincaré no caso relativístico. Oliveira et al [25] consideram a variedade espaço de fase $\Gamma = (q^1, q^2, \ldots, q^n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = (q, p)$ e funções definidas sobre Γ. De acordo com a regra de correspondência de Weyl, há uma relação entre operadores hermiteanos A sobre o espaço de Hilbert H e funções $a_w(q,p)$ sobre Γ. Assim há uma aplicação $\Omega : A \rightarrow a_w(q,p)$ tal que à algebra associativa de operadores defnidos em H corresponde uma algebra associativa (mas não comutativa) em Γ dada por $\Omega : AB \rightarrow a_w(q,p) * b_w(q,p)$ onde o produto estrela $*$ é definido por;

$$a_w(q,p) * b_w(q,p) = a_w(q,p) e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} b_w(q,p) \tag{1.1}$$

com as setas sobre os campos vetoriais ∂_q e ∂_p indicando que o dado campo vetorial atua somente sobre a função à direita ou à esquerda. Usando então os operadores do tipo a_w* Oliveira et al mostraram que os operadores

$$\hat{Q} = q* = q + \tfrac{i\hbar}{2}\partial_p, \quad \hat{P} = p* = p - \tfrac{i\hbar}{2}\partial_q, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \hat{K} &= k* = mq * -tp* = m\hat{Q} - t\hat{P}, & (1.3)\\ \hat{L}_i &= \epsilon_{ijk}\hat{Q}^j \hat{P}^k = \epsilon_{ijk} q^j * p^k *, & (1.4)\\ \hat{H} &= h* = \frac{\hat{P}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\left(p_j - \frac{i\hbar}{2}\partial_{q_j}\right)^2, & (1.5) \end{aligned}$$

satisfazem a álgebra de Lie do grupo de Galilei com uma extensão central caracterizada por m. Além disso, Oliveira et al obtiveram um par de operadores multiplicativos comutativos hermiteanos $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ com autovetores $|q,p\rangle$ que expandem um espaço de Hilbert $H \equiv \{|\psi\rangle\}$ obtendo então as funções $\psi(q,p) = \langle q,p|\psi\rangle$ e uma equação de Schroedinger no espaço de fase

$$\hat{H}(\hat{Q}, \hat{P})\psi(q,p) = E\psi(q,p) \tag{1.6}$$

onde

$$\hat{H}(\hat{Q}, \hat{P}) = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q}) \quad (\hat{P} = p*, \quad \hat{Q} = q*). \tag{1.7}$$

As soluções de (1.6) são tais que possibilitam obter a função de Wigner $f_w(q,p)$ com

$$f_w(q,p) = \psi(q,p) * \psi^\dagger(q,p). \tag{1.8}$$

Estendendo a formulação simplética para o caso relativístico, Amorim et al [26], considerando o grupo de Poincaré, sua álgebra de Lie e os invariantes de Casimir, determinaram a equação de Dirac no espaço de fase como

$$\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2} \partial_{q^\mu} \right) \phi(q,p) = mc^2 \phi(q,p), \tag{1.9}$$

onde γ^μ ($\mu = 0,1,2,3$) são os geradores da álgebra de Clifford e mostraram que a função de Wigner relativísta é dada $f_w(q,p) = \phi(q,p) * \phi^\dagger(q,p)$, com $\phi(q,p)$ solução de (1.9).

Os métodos de supersimetria embora tenham uma grande aplicação na formulação usual da mecânica quântica, ainda não foram totalmente explorados na mecânica quântica simplética, ou teoria quântica no espaço de fase, cuja ênfase é na determinação da função de Wigner. Recentemente, Menezes et al [27] usaram a supersimetria para resolver a equação de Schroedinger no espaço de fase, ou seja, a equação (1.6) mostrando ser possível introduzir geradores carga em termos do produto estrela e fatorar o hamiltoniano (1.7). A equação de Dirac no espaço de fase, no entanto, ainda não recebeu o tratamento supersimétrico; este é o objetivo do presente trabalho: considerando uma das representações especiais dos γ^μ mostramos que é possível fatorar, construir a hierarquia de Hamiltonianos para a equação livre e com potenciais invariantes na forma, e obter o espectro de autovalores e as correspondentes autofunções e funções de Wigner para esses casos.

A tese está dividida em 7 capítulos e 2 apêndices. O segundo capítulo é dedicado à formulação de Wigner, construída sobre o espaço de fase a partir do uso da Função de Wigner, da transformação de Weyl e do Produto de Moyal. Com ela é possível construir uma distribuição de probabilidades para medir cada estado de energia dos sistemas, assim como os valores de energia possíveis.

O terceiro capítulo estabelece uma revisão resumida de grupos de simetria de Lie, e em particular dos grupos de Galilei e o de Poincaré, cuja álgebra deve ser satisfeita e considerada no uso e determinação das equações dinâmicas.

O quarto capítulo estabelece uma revisão preliminar dos desenvolvimentos da Supersimetria ($SUSY$) para mostrar como a partir de sua álgebra é possível desenvolver um método de Fatoração e Hierarquização de Hamiltonianos.

No quinto capítulo exploramos o método de Fatoração e Hierarquização de Hamiltonianos e o aplicamos à equação de Dirac no espaço de fase. Com isto desenvolvemos o método para encontrar os autovalores e autovetores da equação de Dirac para certos potenciais, de maneira que no sexto capítulo podemos aplicar a sistemática desenvolvida em alguns sistemas físicos relevantes.

O sexto capítulo é dedicado a aplicação do que foi construído até então com respeito à equação de Dirac no espaço de fase e analisamos os casos livre e interagentes do Oscilador Harmônico de Dirac, de um potencial externo tipo $-\frac{A}{Q}$ e um potencial adicionado a um termo de massa que pode ser interpretado como uma massa efetiva dependende da posição.

No último capítulo apresentamos conclusões e possíveis perspectivas que se apresentam a partir deste trabalho.

Nos apêndices apresentamos os cálculos necessários para o desenvolvimento do trabalho: no apêndice A realizamos passo a passo a fatoração e hierarquização dos hailtonianos parceiros e no apêndice B temos a determinação do conjunto de autovetores, funções de Wigner e das Densidades de Probabilidade para os casos escolhidos como aplicações.

Capítulo 2

"Na física quântica, a abstração não é apenas um meio de descrever a realidade, mas uma parte constituinte da própria realidade."

FORMULAÇÃO DE WIGNER.

2.1 INTRODUÇÃO.

Como cita Vianna [28], para a quantização de um sistema microscópico há pelo menos três formulações: a primeira, de certa forma a padrão apresentada nos livros textos é baseada no espaço de Hilbert e operadores que atuam nesse espaço; sua formulação deve-se a Schroedinger [29], Heisenberg [30], Dirac [31], von Neumann [32], Jordan [33] e outros; a segunda refere-se à formulação conhecida por integrais de trajetória desenvolvida por Feynman [23], a partir de uma sugestão do Dirac [31] e a terceira é a formulação no espaço de fase [34], também conhecida como quantização de Moyal, essa formulação baseia-se na função quasi-distribuição de Wigner [24] e na lei de correspondência de Weyl [35] entre operadores quânticos no espaço de Hilbert e $c-$funções no espaço de fase, um desenvolvimento que conduz a uma estrutura matemática não comutativa dependente do produto estrela. É essa formulação que resumiremos neste capítulo.

2.2 A EQUAÇÃO DE LIOUVILLE-VON NEUMANN.

A dinâmica da Mecânica Quântica pode ser construída a partir da equação de Schroedinger $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_i(t)\rangle = \hat{H}|\psi_i(t)\rangle$ em termos dos vetores de estado $|\psi_i(t)\rangle$, ou a partir da equação de Liouville-von Neumann $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t)\right]_{(-)}$ em função dos operadores de densidade de probabilidade $\hat{\rho}(t)$.

A formulação da Mecânica Quântica no espaço de fase, proposta por Wigner [24], pretende estabelecer uma conexão da Teoria Quântica com entes usuais da Mecânica Estatística Clássica como por exemplo c-funções nas variáveis q e p.

A equação de Liouville é obtida considerando a equação de Schroedinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_i(t)\rangle = \hat{H}|\psi_i(t)\rangle, \tag{2.1}$$

e aplicando a variação temporal do operador densidade de probabilidade $\hat{\rho}(t) \equiv \sum_{i,j} \omega_{ij} \left|\psi_i(t)\right\rangle\left\langle\psi_j(t)\right|$, onde os valores ω_{ij} correspondem aos pesos estatístico, o que nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} &= \omega_{ij} \frac{\partial |\psi_i(t)\rangle}{\partial t} \langle \psi_j(t)| + \omega_{ij} |\psi_i(t)\rangle \frac{\partial \langle \psi_j(t)|}{\partial t} \\ &= \frac{\omega_{ij}}{i\hbar} \left\{ \hat{H} |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_j(t)| - |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\hat{H} \right\} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t) \right]_{(-)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Mesmo existindo esta formulação em termos do operador densidade (matriz densidade) Wigner propõe outra função de distribuição (quase-distribuição) de probabilidade que pode ser construída a partir do operador densidade de probabilidade do sistema; esta é a função de Wigner que será apreciada na próxima secção.

2.2.1 Definição da Função de Wigner.

A função de Wigner é definida a partir de $\hat{\rho}$ pelas expressões

$$f_w(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\langle q - \frac{z}{2} \right| \hat{\rho} \left| q + \frac{z}{2} \right\rangle e^{\frac{+ipz}{\hbar}}, \tag{2.3}$$

ou

$$f_w(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\langle p - \frac{k}{2} \right| \hat{\rho} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle e^{\frac{-iqk}{\hbar}}, \tag{2.4}$$

o que corresponde por uma um integração imediata a

$$\begin{aligned} \langle q | \hat{\rho} | q \rangle &= \int f_w(q,p) dp = |\psi(q)|^2, \\ \langle p | \hat{\rho} | p \rangle &= \int f_w(q,p) dq = \left| \tilde{\psi}(p) \right|^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

e como consequência cumpre a um critério de normalização

$$1 = \int f_w(q,p) dp dq. \tag{2.6}$$

Por esta razão a função de Wigner pode em alguns casos ser interpretada como uma função densidade de probabilidade definida em variáveis do espaço de fase, mesmo que não seja propriamente uma distribuição por não ser positivo definida sempre.

Do que expressamos podemos reunir as seguintes propriedades importantes da função de Wigner; são elas

1. $|\psi(q)|^2 = \langle q|\hat{\rho}|q\rangle = \rho(q) = \int f_w(q,p)dp$,
2. $\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2 = \langle p|\hat{\rho}|p\rangle = \rho(p) = \int f_w(q,p)dp$,
3. $\int\int f_w(q,p)dpdq = 1$.

A partir dai o que se requer é estabelecer uma maneira de relacionar os operadores quânticos usuais $\hat{A}(\hat{q},\hat{p})$ definidos em termos de operadores coordenada e operadores *momentum* com as funções $a_w(q,p)$ definidas sobre o espaço de fase

$$\Gamma \equiv \left(q^1, q^2, \ldots, q^n, p_1, p_2, \ldots, p_n\right). \tag{2.7}$$

Para o valor esperado de um observável $\hat{A}$ em termos de $f_w(q,p)$, Wigner obtém:

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr\left(\hat{A}\hat{\rho}\right) = \int a_w(q,p) f_w(q,p) dq dp. \tag{2.8}$$

Para tanto é proposto que as funções $a_w(q,p)$ sejam definidas da mesma maneira que foi definida a função de Wigner o que veremos na próxima secção.

2.2.2 Equivalência de Operadores da Representação de Wigner.

Pelo que foi exposto na secção anterior a seguinte transformação para os observáveis é proposta por Wigner [24]

$$a_w(q,p) \;=\; \int dz e^{\frac{+ipz}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2}\right| \hat{A}(\hat{q},\hat{p}) \left| q + \frac{z}{2}\right\rangle, \tag{2.9}$$

ou

$$a_w(q,p) \;=\; \int dk e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \left\langle p - \frac{k}{2}\right| \hat{A}(\hat{q},\hat{p}) \left| p + \frac{k}{2}\right\rangle, \tag{2.10}$$

o que garante a relação

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle \;=\; \langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle = \int dq dp a_w(q,p) f_w(q,p). \tag{2.11}$$

A unicidade da expressão é justificada com a Transformada de Weyl [35], que estabelece uma relação

$$\Omega_w : \hat{A}(\hat{q},\hat{p}) \to A(q,p),$$

considerando:

$$\begin{aligned}
\hat{U}(\lambda,\mu) &\equiv e^{\frac{\lambda\hat{q}+\mu\hat{p}}{\hbar}}, \\
\hat{A}(\hat{q},\hat{p}) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int A(q,p) e^{\frac{i}{\hbar}[\lambda(\hat{q}-q)+\mu(\hat{p}-p)]} d\lambda d\mu dq dp, \\
A(q,p) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int Tr\left[U^\dagger(\lambda,\mu)\hat{A}\left(\hat{q},\hat{p}\right)\right] e^{-\frac{i}{\hbar}[\lambda(\hat{q}-q)+\mu(\hat{p}-p)]} d\lambda d\mu dq dp,
\end{aligned}$$

com $A(q,p)$ observáveis clássicas e λ e μ parâmetros no intervalo $(-\infty,+\infty)$.

Usando (2.9) e (2.10) tem-se as seguintes propriedades importantes dos operadores $\hat{A}(\hat{q},\hat{p})$

1. $\hat{A}(\hat{q},\hat{p}) = \hat{A}(\hat{p}) \rightarrow a_w(q,p) = a_w(p)$,
2. $\hat{A}(\hat{q},\hat{p}) = \hat{A}(\hat{q}) \rightarrow a_w(q,p) = a_w(q)$,
3. $\hat{A}(\hat{q},\hat{p}) = c \rightarrow a_w(q,p) = c$,
4. $TrA = (2\pi\hbar)^{-1} \int\int dqdpa_w(q,p)$,
5. $\int dqa_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-1} \langle p|\hat{A}|p\rangle$.

Resta estabelecer como as funções $a_w(q,p)$ operam entre si para que a transformada de Weyl conserve a mesma estrutura algébrica definida com oa observáveis quânticos, inclusive e principalmente a relação de incerteza. E isto é feito por meio do produto estrela $(*)$, ou o produto de Moyal [34].

2.2.3 Produto Estrela $*$.

Uma vez estabelecido como construir os elementos $a_w(q,p)$ de maneira que a expressão $\left\langle \hat{A} \right\rangle = \langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle = \int dqdpa_w(q,p)f_w(q,p)$ seja satisfeita, temos então a questão: para um produto $\left(\hat{A}\hat{B}\right)(\hat{q},\hat{p}) \Rightarrow (ab)_w\,(q,p)$, qual o produto que define a relação entre $a_w(q,p)$ e $b_w(q,p)$?

Usando a transformação de Weyl o tal produto é definido pelas seguintes relações

$$\Omega_w : \hat{A}(\hat{q},\hat{p})\hat{B}(\hat{q},\hat{p}) \equiv \hat{C}(\hat{q},\hat{p}) \rightarrow a_w(q,p) * b_w(q,p) \equiv c_w(q,p), \tag{2.12}$$

ou seja,

$$\Omega_w : \hat{A}(\hat{q},\hat{p})\hat{B}(\hat{q},\hat{p}) \rightarrow a_w(q,p)e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)}b_w(q,p) = a_w(q,p)e^{\frac{i\hbar}{2}\Lambda}b_w(q,p), \tag{2.13}$$

onde os termos com a seta a esquerda como o $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}$ atuam à esquerda, e os termos com a seta a direita como o $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}$ atuam à direita, com $\Lambda \equiv \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)$.

Ele é conhecido como produto estrela (*star*) ou produto de Moyal e satisfaz às seguintes propriedades

1. $c * f(q,p) = f(q,p) * c = cf(q,p)$, $c =$constante.
2. $f(q,p) * g(q,p) = f(q + \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_q)g(q,p) = f(q,p)g(q - \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_q)$.
3. $[f(q,p) * g(q,p)] * h(q,p) = f(q,p) * [g(q,p) * h(q,p)]$.
4. $f(q,p) * g(q,p) \equiv f(q,p)e^{+\frac{i\hbar\Lambda}{2}}g(q,p) \neq g(q,p) * f(q,p) = g(q,p)e^{-\frac{i\hbar\Lambda}{2}}f(q,p)$.
5. $[f(q,p) * g(q,p)]^\dagger = \left[g^\dagger(q,p) * f^\dagger(q,p)\right]$.
6. $f * g = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq'dq''dp'dp''f(q',p')g(q'',p'')e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}$.

7. $\int f(q,p) * g(q,p) dqdp = \int f(q,p) g(q,p) dqdp$.

Naturalmente, se os produtos usuais de operadores satisfazem à mesma álgebra que as respectivas funções associadas com relação ao produto *star*, o mesmo deve ser válido tanto para a álgebra definida por meio dos comutadores de operadores quanto para as equações que estabeleçam combinações lineares dos operadores. Assim, pelo menos para um subconjunto dos possíveis observáveis, dada uma equação do tipo $\hat{F}(\hat{A},\hat{B},\ldots) = 0$ há uma equivalente dada em termos $f_w(a_w, b_w, \ldots) = 0$ e $\left[\hat{A},\hat{B}\right]_{(-)}$ deve corresponder à $[a_w(q,p), b_w(q,p)]_{(*)} = a_w(q,p) * b_w(q,p) - b_w(q,p) * a_w(q,p)$ que é o parênteses de Moyal.

Assim, é natural, usando o produto *star* $(*)$, definir entes $\hat{A} \equiv a_w(q,p)*$ ditos operadores-estrela. Neste caso os operadores fundamentais de espaço e *momentum* ficam dados como

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_j &\equiv q_j * = q_j e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_l}\right)} = \sum_{m=0}\left(\frac{1}{m!}\right)\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^m \partial_{q_l}^m q_j \partial_{p_l}^m = \\
&= q_j + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_j}, \qquad (2.14) \\
\hat{P}_j &\equiv p_j * = p_j e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_l}\right)} = \sum_{m=0}\left(\frac{1}{m!}\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^m \partial_{p_l}^m p_j \partial_{q_l}^m = \\
&= p_j - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

e qualquer outro operador definido no espaço de fase deve ser construído em termos destes operadores fundamentais.

Da mesma forma, a correspondência da álgebra de Lie é obtida por meio da aplicação

$$\Omega_w : \left[\hat{A}(\hat{q},\hat{p}), \hat{B}(\hat{q},\hat{p})\right]_{(-)} \rightarrow [a_w(q,p), b_w(q,p)]_{(*)}.$$

As relações fundamentais entre estes operadores fundamentais aplicados às funções $\psi(q,p)$ são dadas como segue

$$\begin{aligned}
\left[\hat{Q}_j, \hat{Q}_k\right]_{(-)} \psi(q,p) &= \left\{[q_j, q_k]_{(-)} + i\hbar\left[\partial_{q_j}, q_k\right]_{(-)} + i\hbar\left[q_j, \partial_{q_k}\right]_{(-)} - \hbar^2\left[\partial_{q_j}, \partial_{q_k}\right]_{(-)}\right\}\psi(q,p) = 0, \\
\left[\hat{P}_j, \hat{P}_k\right]_{(-)} \psi(q,p) &= \left\{[p_j, p_k]_{(-)} - i\hbar\left[\partial_{p_j}, p_k\right]_{(-)} - i\hbar\left[p_j, \partial_{p_k}\right]_{(-)} - \hbar^2\left[\partial_{p_j}, \partial_{p_k}\right]_{(-)}\right\}\psi(q,p) = 0, \\
\left[\hat{Q}_j, \hat{P}_k\right]_{(-)} \psi(q,p) &= \left\{[q_j, p_k]_{(-)} + i\hbar\left[\partial_{q_j}, p_k\right]_{(-)} - i\hbar\left[q_j, \partial_{p_k}\right]_{(-)} + \hbar^2\left[\partial_{q_j}, \partial_{p_k}\right]_{(-)}\right\}\psi(q,p) \\
&= i\hbar\delta_{jk}\psi(q,p).
\end{aligned}$$

e satisfazem à mesma álgebra já conhecida dos operadores; o mesmo acontece com respeito às funções q_j e p_j associadas aos operadores, ou seja,

$$
\begin{aligned}
[q_j, q_k]_{(*)} &= q_j e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_l}\right)} q_k - q_k e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_l}\right)} q_j \\
&= \sum_{m=0}\left(\frac{1}{m!}\right)\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^m \partial^m_{q_l} q_j \partial^m_{p_l} q_k - \sum_{n=0}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^n \partial^n_{p_l} q_j \partial^n_{q_l} q_k = 0, \\
[p_j, p_k]_{(*)} &= p_j e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_l}\right)} p_k - p_k e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_l}\right)} p_j \\
&= \sum_{m=0}\left(\frac{1}{m!}\right)\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^m \partial^m_{q_l} p_j \partial^m_{p_l} p_k - \sum_{n=0}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^n \partial^n_{p_l} p_j \partial^n_{q_l} p_k = 0, \\
[q_j, p_k]_{(*)} &= q_j e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_l}\right)} p_k - p_k e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_l}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_l}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_l}\right)} q_j \\
&= \sum_{m=0}\left(\frac{1}{m!}\right)\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^m \partial^m_{q_l} q_j \partial^m_{p_l} p_k - \sum_{n=0}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^n \partial^n_{p_l} p_k \partial^n_{q_l} q_j = i\hbar\delta_{jk},
\end{aligned}
$$

o que satisfaz as relações fundamentais, e da mesma maneira mantém tanto a álgebra de Lie do grupo de Galilei quanto do grupo de Poincaré. E assim indica que com os operadores estrela (*star*) é possível realizar uma formulação da mecânica quântica, o que discutiremos no capítulo a seguir.

Capítulo 3

GRUPOS DE SIMETRIA E MECÂNICA QUÂNTICA SIMPLÉTICA.

3.1 INTRODUÇÃO.

O formalismo de Wigner induz a mesma álgebra de simetria das mecânicas conhecidas tomando os operadores estrela, de maneira que é possível desenvolver uma sistemática para a construção de um novo formalismo para a mecânica quântica no espaço de fase, e é isto que faremos aqui. Neste desenvolvimento seguiremos Oliveira et al [25] Amorim et al [26].

Embora nosso interesse seja pela mecânica quântica relativística e portanto covariante com respeito ao grupo de Poincaré, por completeza, discutiremos também o grupo de Galilei. Assim, o capítulo conterá a álgebra de Lie desses dois grupos e sua representação em um espaço de Hilbert definidos sobre uma variedade de espaço de fase Γ, onde $(q^1, q^2, \ldots, q^n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ são as coordenadas e *momenta*.

3.2 O GRUPO DE GALILEI E O GRUPO DE POINCARÉ.

3.2.1 Determinação do Grupo de Simetrias.

Dado um espaço vetorial V e um operador $\hat{A}$ que atua sobre os vetores em um referencial pela equação $\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$, passando para outro referencial tem-se $\hat{A}'|\psi'\rangle = |\phi'\rangle$o que nos dá se $|\psi'\rangle = \hat{S}|\psi\rangle$ e $|\phi'\rangle = \hat{S}|\phi\rangle$.

$$
\begin{aligned}
\hat{A}'|\psi'\rangle &= |\phi'\rangle, \\
\hat{A}'\left(\hat{S}|\psi\rangle\right) &= \left(\hat{S}|\phi\rangle\right), \\
\hat{S}^{-1}\hat{A}'\hat{S}|\psi\rangle &= \hat{S}^{-1}\hat{S}|\phi\rangle, \\
\Rightarrow \hat{S}^{-1}\hat{A}'\hat{S} &= \hat{A},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

que é a usual transformação de similaridade que relaciona o operador de um referencial para outro.

Se a transformação for infinitesimal (parâmetros $\epsilon^j << 1$) então (3.1) pode ser escrita, considerando que haja n geradores G_j como

$$\begin{aligned}
\left(I + \epsilon^j G_j\right) A \left(I - \epsilon^k G_k\right) &= A' \\
\left(A + \epsilon^j G_j A\right) \left(I - \epsilon^k G_k\right) &= A + \delta A \\
A + \epsilon^j G_j A - \epsilon^k A G_k - \epsilon^j \epsilon^k G_j A G_k &= A + \delta A \\
\epsilon^j G_j A - \epsilon^j A G_j - \epsilon^j \epsilon^k G_j A G_k &= \delta A \\
\epsilon^j \left[G_j, A\right] &= \delta A
\end{aligned} \tag{3.2}$$

usando a notação de soma sobre índices repetidos, com $j, k = 1, 2, \ldots, n$ e considerando $\epsilon^j, \epsilon^k << 1$.

Se o operador $\hat{A}$ estiver associado a uma operação de simetria do sistema, então a transfomação (3.1) pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned}
\left(I + \epsilon^j G_j\right) \left(I + \epsilon^l G_l\right) \left(I - \epsilon^k G_k\right) &= I' + \epsilon^m G'_m \\
I + \epsilon^l \left(I + \epsilon^j G_j\right) G_l \left(I - \epsilon^k G_k\right) &= I + \epsilon^m G'_m \\
\epsilon^l \left(I + \epsilon^j G_j\right) G_l \left(I - \epsilon^k G_k\right) &= \epsilon^l G'_l \\
\left(G_l + \epsilon^j \left[G_j, G_l\right]_{(-)}\right) &= \left(G_l + \epsilon^q f^{lpq} G_p\right) \\
\Rightarrow \left[G_j, G_l\right]_{(-)} &= f^{lpj} G_p
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dando origem à álgebra de Lie do grupo de simetria do sistema, com f^{lpj} as constantes de estrutura do grupo [36], [37], .

Os operadores, que comutam com os geradores G_j são os operadores de Casimir, ou seja, se C_k for um desses operadores, tem-se

$$\left[G_j, C_k\right]_{(-)} = 0 \Rightarrow C_k \equiv c_k I, \tag{3.4}$$

sendo os valores c_k usados para caracterizar a representação irredutível do grupo [37].

3.2.2 Grupo de Galilei.

Na teoria não relativística as simetrias do espaço-tempo incluem rotações, deslocamentos e transformações entre sistemas de referência que se movem um em relação ao outro com velocidade uniforme. O conjunto de todas essas transformações constitui o grupo de Galilei. O efeito de uma tal transfomação é dada por

$$\begin{aligned}
\vec{q} \;&\Rightarrow\; \vec{q}' = R\vec{q} + \vec{a} + \vec{v} \cdot t, \\
t \;&\Rightarrow\; t' = t + b,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde R é uma transformação linear de rotação, aqui realizada por uma matriz 3×3 atuando sobre um vetor $\vec{q}$ a três componentes, $\vec{a}$ é um deslocamento espacial, $\vec{v}$ é o vetor velocidade e b é o deslocamento no tempo. Das transformações (3.5) segue que uma transformação de Galilei é caracterizada por dez parâmetros; em consequência há dez geradores usualmente notados por:

J_α $\Rightarrow$ rotações em torno dos eixos α ($\alpha = 1, 2, 3$), ou seja, os geradores da transformação $\vec{q} \Rightarrow R_\alpha (\theta_\alpha) \vec{q}$.

P_α $\Rightarrow$ deslocamentos ao longo dos eixos α ($\alpha = 1, 2, 3$), ou seja, os geradores de $q_\alpha \Rightarrow q_\alpha + a_\alpha$.

$K_\alpha \Rightarrow$ *boosts* ao longo dos eixos α ($\alpha = 1, 2, 3$), ou seja, os geradores de $q_\alpha \Rightarrow q_\alpha + v_\alpha t$.

$H \Rightarrow$ deslocamento no tempo, ou seja, o gerador de $t \Rightarrow t + b$.

Tem-se assim ao todo 10 geradores que, usando desenvolvimento similar a (3.3), constituem a álgebra de Lie do grupo e satisfazem para cada gerador das transformação as relações

$$\begin{array}{lll} [P_i, P_j]_{(-)} = 0, & [P_i, H]_{(-)} = 0, & [J_i, H]_{(-)} = 0, \\ [K_i, K_j]_{(-)} = 0, & [K_i, P_j]_{(-)} = im\delta_{ij} 1, & [K_i, H]_{(-)} = iP_i, \\ [J_i, J_j]_{(-)} = i\epsilon_{ijk} J_k, & [J_i, K_j]_{(-)} = i\epsilon_{ijk} K_k, & [J_i, P_j]_{(-)} = i\epsilon_{ijk} P_k, \end{array}$$

onde $l, j, k = 1, 2, 3$ e ϵ_{ljk} é o símbolo de Levi-Civita.

Oliveira et al [26] demonstraram que é possível obter uma realização desta álgebra de Lie por meio dos operadores star ($*$); especificamente, sendo Q_i ($i = 1, 2, 3$) e P_i ($i = 1, 2, 3$) as coordenadas e momenta de um sistema tem-se

$$\begin{aligned} \hat{Q}_j &\equiv q_j * = q_j + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p^j}, \\ \hat{P}_j &\equiv p_j * = p_j - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q^j}, \\ \hat{K}_i &\equiv k_i * = m q_i * - t p_i * = m\hat{Q}_i - t\hat{P}_i, \\ \hat{J}_i &\equiv i\epsilon_{ijk} \hat{Q}_j \hat{P}_k = i\epsilon_{ijk} q_j p_k - i\frac{\hbar}{2} \epsilon_{ijk} p_j \frac{\partial}{\partial q_k} + i\frac{\hbar}{2} \epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial p_k} + i\frac{\hbar^2}{4} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial p_k}, \\ \hat{H} &\equiv h_i * = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \qquad (3.6)$$

e que o espaço natural para essa realização é o espaço de Hilbert construido pelos autokets de dois operadores hermitianos multiplicativos $\bar{Q} \equiv 2\hat{Q}$ e $\bar{P} \equiv 2\hat{P}$ que obdecem à:

$$\begin{aligned} \bar{Q}'_l &= \left(1 - iv^j \hat{K}_j\right) (2\bar{Q}_l) \left(1 + iv^k \hat{K}_k\right) = 2\bar{Q}_l + v^j \left[\hat{K}_j, \hat{Q}_l\right]_{(-)} = 2\bar{Q}_l + v^l t, \\ \bar{P}'_l &= \left(1 - iv^j \hat{K}_j\right) (2\bar{P}_l) \left(1 + iv^k \hat{K}_k\right) = 2\bar{P}_l + v^j \left[\hat{K}_j, \hat{P}_l\right]_{(-)} = 2\bar{P}_l + v^l m, \end{aligned} \qquad (3.7)$$

ou seja, se transformam por Galilei como os operadores coordenada e *momentum*, o que possibilita intruduzir os kets $|q, p\rangle$ tais que

$$\begin{aligned} \bar{Q}_l |q, p\rangle &= q_l |q, p\rangle, \\ \bar{P}_l |q, p\rangle &= p_l |q, p\rangle, \end{aligned} \qquad (3.8)$$

e dai obter nesta base $\{|q, p\rangle\}$ as funções $\psi(q, p) = \langle q, p|\psi\rangle$ e uma equação do tipo Schroedinger no espaço de fase, i.e. $h * \psi(q, p) = E\psi(q, p)$. Tem-se, portanto, que

$$H(\hat{Q}, \hat{P})\psi(q, p) = E\psi(q, p) \quad \Rightarrow \quad H(q, p) * \psi(q, p) = E\psi(q, p), \qquad (3.9)$$

e

$$i\hbar\partial_t\psi(q,p,t) = H(q,p) * \psi(q,p,t), \tag{3.10}$$

com $H(\hat{Q},\hat{P}) = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q})$, o que resulta em:

$$i\hbar\partial_t\psi(q,t) = \left(\frac{P^2}{2m} + V(Q)\right)\psi(q,t) \quad \Rightarrow \quad i\hbar\partial_t\psi(q,p,t) = \left(\frac{p^2}{2m} + V(q)\right) * \psi(q,p,t), \tag{3.11}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi(q,p,t) &= \left(\frac{p^2}{2m} + V(q)\right) * \psi(q,p,t) \\ &= \left[\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{i\hbar p}{2m}\frac{\partial}{\partial q} + V\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\psi(q,p,t), \end{aligned} \tag{3.12}$$

que é a expressão da equação de Schroedinger no espaço de fase com potenciais definidos em função de derivadas $\frac{\partial}{\partial p}$, o que, por esta razão, exige a necessidade de métodos especiais para o estudo da mesma.

3.2.3 Grupo de Poincaré.

Na teoria relativística as simetrias do espaço-tempo incluem rotações, deslocamentos e transformações entre sistemas de referência que se movem um em relação ao outro no espaço de Minkoviski, um espaço tetradimensional com métrica pseudo-euclideana ($\eta_{\mu\mu} = 1, 1, 1 - 1; \eta_{\mu\nu} = 0; \mu\nu = 1, 2, 3, 4$). O conjunto de todas essas transformações constitui o grupo de Poincaré. O efeito de uma tal transfomação é dada por

$$\vec{q} \quad \Rightarrow \quad \vec{q}\,' = R\vec{q} + \vec{a}, \tag{3.13}$$

onde R é uma rotação, aqui realizada por uma matriz 4×4 atuando sobre um vetor $\vec{q}$ a quatro componentes, $\vec{a}$ é um deslocamento espaço-temporal. Das transformações (3.13) segue que uma transformação de Poincaré é caracterizada por dez parâmetros; em consequência há dez geradores usualmente notados por:

$M_{\alpha\beta} \Rightarrow$ rotações no plano $\alpha \times \beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$, ou seja, os geradores de $\vec{q} \Rightarrow R_{\alpha\beta}(\theta_{\alpha\beta})\,\vec{q}$ (três rotações espaciais e três rotações espaço-temporais).

$P_\alpha \Rightarrow$ deslocamentos ao longo dos eixos α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, ou seja, os geradores de $q_\alpha \Rightarrow q_\alpha + a_\alpha$ (três translações espaciais e uma temporal).

Esses 10 geradores constituem a álgebra de Lie do grupo e satisfazem as relações [38]

$$\begin{aligned} &[P_\rho, P_\mu]_{(-)} = 0, \\ &[P_\rho, M_{\mu\nu}]_{(-)} = i\left(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu\right), \\ &[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]_{(-)} = i\left(\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Os invariantes de Casimir neste caso são os operadores $I_1 = P^\mu P_\mu$ e $I_2 = W^\mu W_\mu$, com $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}P^\sigma$, onde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o símbolo de Levi-Civita.

Amorim et al ([39]) demonstraram que uma das realizações desta álgebra de Lie é por meio dos operadores estrela (*star*); especificamente sendo Q_μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ e P_μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ as coordenadas e *momenta* de um sistema tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_\mu &\equiv q_\mu * = q_\mu + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}, \\
\hat{P}_\mu &\equiv p_\mu * = p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu}, \\
\hat{M}_{\mu\nu} &\equiv \hat{Q}_\mu \hat{P}_\nu - \hat{Q}_\nu \hat{P}_\mu = i\left(q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu\right) - \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{p_\mu \partial}{\partial q_\nu} - \frac{p_\nu \partial}{\partial q_\mu} - \frac{q_\mu \partial}{\partial p_\nu} + \frac{q_\nu \partial}{\partial p_\mu}\right) + \\
&+ \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_\mu \partial p_\nu} - \frac{\partial^2}{\partial q_\nu \partial p_\mu}\right). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

3.3 EQUAÇÕES COVARIANTES.

Segundo Amorim et al, as equações covariantes no espaço de fase relativístico podem ser determinadas usando os invariantes de Casimir. De fato, considerando I_1 e (3.15), tem-se

$$\begin{aligned}
P^\mu P_\mu \psi &= p^\mu * p_\mu * \psi = \left(p^\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right)\left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\right)\psi = m^2 c^4 \psi, \\
&= \left[p^\mu p_\mu - \frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q_\mu} - \frac{i\hbar}{2}\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} + p_\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu}\right)\right]\psi = m^2 c^4 \psi, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

que pode ser interpretada como a equação de Klein-Gordon para campos escalares. Já para a equação de Dirac, considerando a relação

$$\gamma^\mu P_\mu \psi = \gamma^\mu p_\mu * \psi = \gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\right)\psi = mc^2 \psi, \qquad (3.17)$$

e o fato que para essa equação ser reconhecida como equação de Dirac suas soluções devem satisfazer a equação de Klein-Gordon no espaço de fase, tem-se multiplicando (3.17) à esquerda por $\gamma^\nu P_\nu$ que

$$\gamma^\nu \left(p_\nu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\right)\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\right)\psi = m^2 c^4 \psi. \qquad (3.18)$$

Daí, como o produto $\gamma^\nu \gamma^\mu$ pode ser escrito como a soma de uma parte simétrica e outra antisimétrica segue que

$$\gamma^\nu \gamma^\mu P_\nu P_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu\right) P_\nu P_\mu, \qquad (3.19)$$

indicando que para ψ satisfazer a equação de Klein-Gordon no espaço de fase, deve-se ter

$$\left(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu\right) = \{\gamma^\nu \gamma^\mu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \qquad (3.20)$$

sendo $\{\gamma^\nu \gamma^\mu\}$ o anticomutador entre γ^ν e γ^μ, ou seja, os elementos γ^μ de (3.17) devem ser geradores da álgebra do Clifford, o que justifica a expressão (3.17), como equação de Dirac no espaço de fase.

Capítulo 4

FORMULAÇÃO DA SUPERSIMETRIA.

4.1 INTRODUÇÃO.

O conceito de supersimetria que busca relacionar estados fermiônicos e bosônicos em Mecânica Quântica , ou seja, combinar estados de spin semi-inteiro e spin inteiro em um único multipleto, tem sido um tema de maior interesse no desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos desde algum tempo [4] [38] . Neste contexto muitos dos modelos têm a chamada supersimetria $N-$estendida , $N = 2$, onde N indica o número de geradores fermiônicos.

Inicialmente, a supersimetria foi usada na Mecânica Quântica como um teste básico para os métodos não-perturbativos de investigação sobre a quebra de simetrias na Teoria de Campos [4]; entretanto, logo foi percebido que se tratava de um conceito importante por si só. Na realidade, a Mecânica Quântica Supersimétrica ($SUSY$, sigla em inglês) propiciou novos procedimentos em diferentes ramos da Física podendo-se citar a Física Nuclear, a Física Atômica, a Matéria Condensada e a Física Estatística, aparecendo nessas áreas como um método de resolução da equação de Schrodinger para certas classes de potencial [40] É neste contexto que desenvolvemos a extensão da álgebra da Mecânica Quântica Supersimétrica para a Mecânica Quântica Simpletica Relativística considerando a equação de Dirac nessa formulação e mostrando para o caso $N = 2$, uma realização da álgebra supersimétrica em termos do produto estrela e soluções $\psi(q, p)$ da equação de Dirac simplética. Neste sentido ampliamos trabalhos anteriores [13-17] [41], [42], que trataram da Mecânica Quântica Supersimétrica Não-Relativística e Relativística, da Mecânica Quântica Simplética e da Mecânica Quântica Simplética Supersimétrica Não Relativística.

Neste capítulo, apresentamos o essencial da Álgebra Supersimétrica na Mecânica Quântica usual . Nesta apresentação seguiremos Rodrigues [16], Rodrigues [43] e Menezes et al [41], considerando especificamente o modelo de Witten, a construção do espaço de Hilbert na formulação supersimétrica e a quebra de supersimetria com a análise dos três casos possíveis.

4.2 MODELO DE WITTEN: CASO GERAL.

4.2.1 Mecânica Quântica Simplética e o Espaço de Hilbert Supersimétrico.

O caso geral da supersimetria é delimitado por Witten [4] na álgebra abaixo

$$\left[D_a, \hat{H}_{ss}\right]_{(-)} = 0, \qquad [D_a, D_b]_{(+)} = 2\hat{H}_{ss}, \tag{4.1}$$

onde os operadores D_a ($a = 1, 2, \ldots, N$) são os geradores das transformações de simetria definidos num espaço de Hibert $M_C^N \otimes H$, construido como um espaço produto sendo M_C o espaço de matrizes quadradas de ordem N e H o espaço de Hilbert a ser explicitado ; denominaremos D_a de operadores carga.

Na Mecânica Quântica Simplética tem-se para o superespaço de Hilbert $M_C^N \otimes H$, a definição

$$H_\Gamma = M_C^N \otimes H, \tag{4.2}$$

sendo um elemento típico de H_Γ

$$\psi^{SS}(q,p,t) = \begin{bmatrix} \psi^{(1)}(q,p,t) \\ \psi^{(2)}(q,p,t) \\ \vdots \\ \psi^{(N)}(q,p,t) \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

onde cada elemento $\psi^{(\alpha)}(q,p,t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$ pertence ao espaço H; o produto escalar em H_Γ é definido como:

$$\left(\psi^{(SS)}, \psi^{(SS)}\right)_\Gamma = \int dqdp \sum_{n=1}^{N} \left[\psi^{(n)*}(q,p,t) * \psi^{(n)}(q,p,t)\right] < \infty. \tag{4.4}$$

Neste contexto se notarmos por $\hat{T}$ um operador de simetria, na supersimetria escreve-se

$$\hat{T}(\xi) = e^{i\sum_a^N \xi_a D_a}, \tag{4.5}$$

onde ξ_α são variáveis de Grassmann; esse operador $\hat{T}(\xi)$ é unitário e assim preserva o produto escalar (4.4). Em consequência os geradores supersimétricos D_a serão hermitianos. Agora, as transformações desejadas são aquelas que não alteram a quantidade de *quanta* num mesmo estado de energia, o que necessariamente implica na possibilidade de criação e aniquilação simultânea de um *quantum* de energia, tal como uma troca de um bóson por um férmion e *vice-versa*. Ou seja, operadores carga do tipo $\hat{D}_+ \equiv \hat{F}_- \otimes \hat{B}_+$ (aniquilação de um férmion $\hat{F}_-$ e criação de um bóson $\hat{B}_+$) ou $\hat{D}_- \equiv \hat{F}_+ \otimes \hat{B}_-$ (aniquilação de um bóson $\hat{B}_-$ e criação de um férmion $\hat{F}_+$) são opções imediatas.

4.2.2 Supersimetria Quebrada

Da álgebra da supersimetria reconhece-se que o Hamiltoniano será dado por $H_{ss} = \hat{D}_\alpha^2$, e como tal o estado fundamental do sistema físico será o estado de menor energia. No caso em que este estado é de energia nula teremos a denominada supersimetria exata ou não quebrada dada pelas condições abaixo

$$\hat{T}(\xi)\psi^{ss}(q,p) = \psi^{ss}(q,p) \implies \hat{D}_\alpha\psi^{ss}(q,p) = 0 \iff \hat{H}_{ss}\psi^{ss}(q,p) = 0 \ . \tag{4.6}$$

Vale salientar que uma condição assim não é satisfeita necessariamente, uma vez que nem sempre o estado fundamental de sistemas físicos corresponde a um estado de energia nula.

A supersimetria será considerada quebrada se ao contrário satisfizer à condição abaixo

$$\hat{T}(\xi)\psi^{ss}(q,p) \neq \psi^{ss}(q,p) \implies \hat{D}_\alpha\psi^{ss}(q,p) \neq 0 \iff \hat{H}_{ss}\psi^{ss}(q,p) \neq 0. \tag{4.7}$$

4.2.3 Supersimetria com dois geradores: $\hat{D}_1$ e $\hat{D}_2$.

Dados $\hat{D}_1$ e $\hat{D}_2$ dois geradores de supersimetria, a álgebra é dada por

$$\left[D_a, \hat{H}_{ss}\right]_{(-)} = 0, \qquad [D_a, D_b]_{(+)} = 2\delta_{ab}\hat{H}_{ss}; \quad a,b = 1,2. \tag{4.8}$$

Esses geradores podem ser reescritos como $\hat{D}_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{D}_1 \pm i\hat{D}_2\right)$ e assim as relações acima ficam

$$\left[D_\pm, \hat{H}_{ss}\right]_{(-)} = 0, \qquad [D_-, D_+]_{(+)} = \hat{H}_{ss}. \tag{4.9}$$

Em particular consideremos o caso citado anteriormente de supersimetria quando temos a aniquilação e criação simultânia de um *quantum*, ora aniquilando um férmion e criando um bóson, ora o contrário.

Assim os operadores são definidos como $\hat{D}_- \equiv \hat{F}_+ \otimes \hat{B}_-$ e $\hat{D}_+ \equiv \hat{F}_- \otimes \hat{B}_+$. Definindo, então, os operadores fermiônicos a partir das matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

temos os operadores

$$\hat{F}_+ \equiv \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 - i\sigma_2\right), \qquad \hat{F}_- \equiv \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 + i\sigma_2\right), \tag{4.11}$$

e assim

$$\hat{F}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{F}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

e como consequência os operadores $\hat{D}_+$ e $\hat{D}_-$ ficam expressos como

$$\hat{D}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \hat{B}_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \hat{D}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{B}_- & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Neste caso usando (4.9),

$$\hat{D}_-\hat{D}_+ + \hat{D}_+\hat{D}_- = \hat{H}_{ss} = \begin{pmatrix} \hat{B}_+\hat{B}_- & 0 \\ 0 & \hat{B}_-\hat{B}_+ \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

e temos:

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_+\hat{B}_- & 0 \\ 0 & \hat{B}_-\hat{B}_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^-(q,p) \\ \psi^+(q,p) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^-(q,p) \\ \psi^+(q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_-\psi^-(q,p) \\ E_+\psi^+(q,p) \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

onde ψ^- é dito ser o setor bosônico e ψ^+ o setor fermiônico.

Devido a álgebra dos operadores bosônicos temos que

$$\begin{aligned} \left[\hat{B}_-, \hat{B}_+\right]_{(-)} = \hat{1} \quad \Rightarrow \quad & \hat{B}_-\hat{B}_+ = \hat{B}_+\hat{B}_- + \hat{1}, \\ & \hat{H}_+ = \hat{H}_- + \hat{1}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

a partir das definições

$$\hat{B}_-\hat{B}_+ \equiv \hat{H}_+ \quad e \quad \hat{B}_+\hat{B}_- \equiv \hat{H}_-. \tag{4.17}$$

Decorre também desta álgebra que $\psi_{n-1}^{(+)}(q,p) = \psi_n^{(-)}(q,p)$, ou seja, $E_n^{(-)} = E_{n-1}^{(+)}$.

Tendo a expressão para H_{ss}, passemos à analise dos casos de simetria exata e quebrada. No caso de simetria exata, tem-se

$$\hat{T}(\xi)\psi_{ss}(q,p) = \psi_{ss}(q,p) \quad \Longrightarrow \hat{D}_-\psi_{ss}(q,p) = 0, \quad \hat{D}_+\psi_{ss}(q,p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \hat{H}_{ss}\psi_{ss}(q,p) = 0,$$

ou seja, a simetria exata reclama a investigação de dois casos, a saber

$$\begin{array}{lll} Caso \quad 1 & \Longrightarrow \hat{B}_-\psi_0^-(q,p) = 0 & \Longleftrightarrow \hat{H}_-\psi_0^-(q,p) = 0, \\ Caso \quad 2 & \Longrightarrow \hat{B}_+\psi_0^+(q,p) = 0 & \Longleftrightarrow \hat{H}_+\psi_0^+(q,p) = 0. \end{array} \tag{4.18}$$

No caso de supersimetria quebrada, tem-se que

$$\hat{T}(\xi)\psi_{ss}(q,p) \neq \psi_{ss}(q,p) \Rightarrow \hat{D}_a\psi_{ss}(q,p) \neq 0, \tag{4.19}$$

ou seja

$$Caso \quad 3 \quad \Rightarrow H_{ss}\psi_{ss}(q,p) \neq 0. \tag{4.20}$$

4.2.3.1 Casos 1 e 2 : Temos que

$$\left\{ \begin{array}{llll} Caso & 1 & \hat{B}_-\psi_0^-(q,p) = 0 & \Longrightarrow \hat{B}_+\hat{B}_-\psi_0^-(q,p) = \hat{H}_-\psi_0^-(q,p) = 0, \\ Caso & 2 & \hat{B}_+\psi_0^+(q,p) = 0 & \Longrightarrow \hat{B}_-\hat{B}_+\psi_0^+(q,p) = \hat{H}_+\psi_0^+(q,p) = 0. \end{array} \right. \tag{4.21}$$

Essas expressões correspondem ao estado fundamental do Hamiltoniano $\hat{H}_-$ ou $\hat{H}_+$ conforme o caso, e a energia neste estado é dada por $E_0^{(-)} = 0$ ou $E_0^{(+)} = 0$, respectivamente, embora o mesmo estado não corresponda ao estado fundamental do Hamiltoniano parceiro como podemos notar abaixo

$$\begin{cases} \hat{B}_+\psi_0^-(q,p) \Longrightarrow \hat{B}_-\hat{B}_+\psi_0^-(q,p) = \hat{H}_+\psi_0^-(q,p) & = \left(\hat{H}_- + 1\right)\psi_0^-(q,p) = +\psi_0^-(q,p), \\ \hat{B}_-\psi_0^+(q,p) \Longrightarrow \hat{B}_+\hat{B}_-\psi_0^+(q,p) = \hat{H}_-\psi_0^+(q,p) & = \left(\hat{H}_+ - 1\right)\psi_0^+(q,p) = -\psi_0^+(q,p), \end{cases} \tag{4.22}$$

na realidade, o estado fundamental de um Hamiltoniano é o primeiro estado excitado do outro Hamiltoniano (o parceiro).

A partir desta álgebra os estados fundamentais ψ_0^+ e ψ_0^-, correspondem a estados de máximo e mínimo respectivamente, de maneira que a construção de novos estados deve ser feita a partir deles ora aumentando estados a partir do mínimo ψ_0^- pela aplicação sucessiva do operador $\hat{B}_+$, ora abaixando estados a partir do máximo ψ_0^+ pela aplicação sucessiva do operador $\hat{B}_-$, conforme o caso.

A relação entre os autoestados dos Hamiltonianos parceiros pode ser estabelecida tomando um caso em que

$$\hat{H}_+\psi_n = E_n^{(+)}\psi_n, \qquad \hat{H}_-\psi_n = E_n^{(-)}\psi_n, \tag{4.23}$$

com a álgebra e definições em (4.16), temos que

$$[H_\pm, B_+]_{(-)} = +B_+ \quad ; \quad [H_\pm, B_-]_{(-)} = -B_-, \tag{4.24}$$

e daí que

$$H_\pm [B_+\psi_n] = \left(E_n^{(S)} + 1\right)[B_+\psi_n] \quad ; \quad H_\pm [B_-\psi_n] = \left(E_n^{(S)} - 1\right)[B_-\psi_n], \tag{4.25}$$

ou seja, os operadores B_+ e B_- atuam de maneira similare sobre os estados dos Hamiltonianos parceiros H_+ e H_-.

De maneira geral temos que

$$H_\pm [(B_+)^n\psi_n] = \left(E_n^{(S)} + n\right)[(B_+)^n\psi_n] \quad ; \quad H_\pm [(B_-)^n\psi_n] = \left(E_n^{(S)} - n\right)[(B_-)^n\psi_n], \tag{4.26}$$

4.2.3.2 Caso 3

Temos que

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_+\hat{B}_- & 0 \\ 0 & \hat{B}_-\hat{B}_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_n^-(q,p) \\ \psi_n^+(q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_n^-(q,p) \\ \psi_n^+(q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n^-\psi_n^-(q,p) \\ E_n^+\psi_n^+(q,p) \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

onde

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \hat{B}_-\psi_n^-(q,p) \neq 0 \iff \hat{H}_-\psi_n^-(q,p) \neq 0, \\ &\Longrightarrow \hat{B}_+\psi_n^+(q,p) \neq 0 \iff \hat{H}_+\psi_n^+(q,p) \neq 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Consideremos $\hat{H}_{-}\psi_n^{(-)}(q,p) = E_n^{(-)}\psi_n^{(-)}(q,p)$ da equação (4.28) e apliquemos o operador $\hat{B}_{-}$; temos então $\hat{H}_{+}\left[\hat{B}_{-}\psi_n^{(-)}(q,p)\right] = E_n^{(-)}\left[\hat{B}_{-}\psi_n^{(-)}(q,p)\right]$, indicando que os vetores $\left[\hat{B}_{-}\psi_n^{(-)}(q,p)\right]$ são autovetores do hamiltoniano $\hat{H}_{+}$.

Deste desenvolvimento observa-se que os resultados dependem fundamentalmente da fatoração de H e da álgebra dos operadores carga. Em consequência pode-se propor um método para encontrar o espectro de auto-valores e o conjunto de auto-vetores de operadores que possam ser fatorados e admitem a álgebra dos operadores carga da supersimetria.

Em suma, para uma álgebra com dois geradores carga supersimétricos foi adotada uma operação de simetria que corresponde à troca de um *quantum* de férmion por um *quantum* de bóson ou *vice-versa*. E em virtude disto o operador hamiltoniano pode ser escrito a partir de operadores hamiltonianos parceiros, cada qual construido por um produto de operadores bosônicos. Assim se for possível reproduzir essa álgebra considerando alguma equação de interresse, poderemos seguir o mesmo método. Particularmente, estamos interessados na aplicação deste método para resolver a equação de Dirac na formulação simplética da teoria quântica.

Capítulo 5

FATORAÇÃO E HIERARQUIZAÇÃO DO HAMILTONIANO DE DIRAC.

5.1 INTRODUÇÃO.

A importância da equação de Dirac na Física é de reconhecimento unânime. Formulada para acomodar os princípios da mecânica quântica com a invariância relativística sua exploração ultrapasssou esses limites propiciando melhor entender o espectro do átomo de hidrogênio, e a interação da radiação com a matéria, por exemplo. Assim ela vem sendo estudada sob vários aspectos; em particular um dos domínios de interesse tem sido seu estudo com a teoria quântica no espaço de fase [39]. Nesta tese, visando obter as funções de Wigner para essa equação sujeita a potenciais, desenvolvemos o método da supersimetria para aplicar na obtenção de suas soluções, considerando sua formulação com a Mecânica Quântica Simplética.

Para isto, neste capítulo, na secção 5.2 apresentamos de forma resumida o processo de fatoração e hierarquização via supersimetria com a condição de invariância da forma para os potenciais parceiros e na secção 5.3 mostramos como realizar este processo com a equação de Dirac (3.17) sujeita a diferentes potenciais.

5.2 FATORAÇÃO E HIERARQUIZAÇÃO DE HAMILTONIANOS: A INVARIÂNCIA NA FORMA

Como foi exposto no capítulo 4, usando os superoperadores carga $\hat{D}_-$ e $\hat{D}_+$, dados por (4.13), o Hamiltoniano supersimétrico é escrito como

$$H_{ss} = \hat{D}_-\hat{D}_+ + \hat{D}_+\hat{D}_- = \begin{pmatrix} \hat{B}_+\hat{B}_- & 0 \\ 0 & \hat{B}_-\hat{B}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

sendo $\hat{H}_-$ e $\hat{H}_+$ os Hamiltonianos parceiros. Os Hamiltonianos $\hat{H}_-$ e $\hat{H}_+$ dependem de potenciais parceiros $V_-(x)$ e $V_+(x)$, respectivamente. Esses potenciais, em geral, são invariantes na forma e diferem somente em parâmetros a_i dos quais dependem. Nessas condições pode-se escrever com Gendenshtein [21] que se $V_-(x, a_1)$ for qualquer potencial ajustado de forma que a energia do estado fundamental de seu Hamiltoniano $E_0^{(-)}$ seja nula, seu potencial parceiro $V_+(x, a_1)$ deve satisfazer a condição

$$V_+(x, a_1) = V_-(x, a_2) + R(a_2) \quad , \quad a_2 = f(a_1), \tag{5.2}$$

onde a_1 é um conjunto de parâmetros, a_2 é uma função dos parâmetros a_1 e $R(a_2)$ é um termo complementar independente da variável x. Segue, então, que $\hat{B}_+$ e $\hat{B}_-$ também dependem desses parâmetros, guardando uma relação do tipo

$$\left[\hat{B}_-(a), \hat{B}_+(a)\right]_{(-)} = R(a), \tag{5.3}$$

já que ao definir esses operadores para fatorar o Hamiltoniano inicial, eles dependem do superpotencial que tem relação direta com $V_\pm(x)$. Assim, na primeira etapa tem-se

$$\hat{H}_+ = \hat{H}_- + R, \tag{5.4}$$

e repetindo-se o processo de fatoração com a condição de invariância na forma para os potenciais parceiros tem-se

$$V_+(x, a_n) = V_-(x, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} R(a_i), \tag{5.5}$$

onde $a_n = f^{(n-1)}(a_1)$ com $f^{(n-1)}$ significando que a função f é aplicada $(n-1)$ vezes. Em consequência obtém-se uma hierarquia de Hamiltonianos dada por

$$H_+^{(n)} = H_-^{(n+1)} + R^{(n+1)}, \tag{5.6}$$

com energias $E_{m+1}^{(n)} = E_m^{(n+1)}$ para algum auto-estado m dos Hamiltonianos parceiros exceto para o estado fundamental.

Para a aplicação do método acima resumido um dos pontos importantes é a determinação dos potenciais nos Hamiltonianos parceiros $\hat{H}_+$ e $\hat{H}_-$ para a partir daí construir a hierarquia dos Hamiltonianos; é este processo que iremos, pela primeira vez, mostrar como construir para a equação de Dirac no espaço de fase com potenciais.

5.3 FATORAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NO ESPAÇO DE FASE.

5.3.1 Fatoração.

Consideremos a equação de Dirac (3.17) sujeita a um potencial vetor $V_\mu(q*)$ e um potencial escalar $V_s(q*)$. Então temos:

$$\begin{aligned} \left\{\gamma^\mu \left[p_\mu * + V_\mu\left(q_\mu *\right)\right] + V_s\left(q_\mu *\right)\right\} \Psi(q,p) &= m * \Psi(q,p), \\ \left\{\gamma^\mu \left[p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + V_\mu\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right] + V_s\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right\} \Psi(q,p) &= m\Psi(q,p), \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde usamos as expressões (4.6) para $p*$ e $q*$, e consideramos $\hbar = c = 1$.

Aplicando a transformação

$$\Psi \equiv e^{-2ip_\alpha q^\alpha}\psi \qquad \alpha = 0,1,2,3; \tag{5.8}$$

temos que

$$\left\{\gamma^\mu\left[p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + V_\mu\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right] + V_s\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right\} e^{-2ip_\alpha q^\alpha}\psi \;=\; m e^{-2ip_\alpha q^\alpha}\psi.$$

e aplicando agora $e^{2ip_\alpha q^\alpha}$ a esquerda segue que:

$$e^{+2ip_\alpha q^\alpha}\left\{\gamma^\mu\left[p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + V_\mu\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right] + V_s\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right\} e^{-2ip_\alpha q^\alpha}\psi \;=\; m\psi,$$

como

$$e^{+2ip_\alpha q^\alpha}\left(p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right)e^{-2ip_\alpha q^\alpha} = \left(-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right) \tag{5.9}$$

temos

$$-\frac{i\gamma^\mu}{2}\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu} + e^{+2ip_\alpha q^\alpha}\left\{\gamma^\mu V_\mu\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right) + V_s\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right\} e^{-2ip_\alpha q^\alpha}\psi \;=\; m\psi. \tag{5.10}$$

Usando a propriedade

$$\left(q + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n = e^{+2ip_\alpha q^\alpha}\left(2q + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n e^{-2ip_\alpha q^\alpha}, \tag{5.11}$$

para qualquer potencial $V\left(q + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)$ segue que

$$V\left(q + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) = e^{+2ip_\alpha q^\alpha} V\left(2q + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) e^{-2ip_\alpha q^\alpha} \tag{5.12}$$

e temos que

$$\begin{aligned} e^{2ip_\alpha q^\alpha} V_\mu\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right) e^{-2ip_\alpha q^\alpha} &= V_\mu\left(2q_\mu + \frac{i}{2}\frac{2\partial}{\partial p^\mu}\right) \\ e^{2ip_\alpha q^\alpha} V_s\left(q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right) e^{-2ip_\alpha q^\alpha} &\equiv V_s\left(2q_\mu + \frac{i}{2}\frac{2\partial}{\partial p^\mu}\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Temos entâo

$$\left\{\gamma^\mu\left[-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + V_\mu\left(2q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\right)\right] + V_s\left(2q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)\right\}\psi \;=\; m\psi. \tag{5.14}$$

Fazendo a mudança de variável seguinte

$$\left(2q_\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) \equiv \eta_\mu, \tag{5.15}$$

e observando que:

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu} = \frac{\partial \eta_\mu}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial \eta_\mu} = 2\frac{\partial}{\partial \eta_\mu}, \tag{5.16}$$

temos de (5.14)

$$\left\{\gamma^\mu\left[-i\frac{\partial}{\partial \eta^\mu} + V_\mu(\eta_\mu)\right] + V_s(\eta_\mu)\right\}\psi = m\psi \tag{5.17}$$

que multiplicado por γ^0 dá

$$\left\{-i\gamma^0\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial \eta^\mu} + \gamma^0\gamma^\mu V_\mu(\eta_\mu) + \gamma^0 V_s(\eta_\mu)\right\}\psi = m\gamma^0\psi, \tag{5.18}$$

ou ainda

$$\left\{-i\frac{\partial}{\partial \eta^0} - i\gamma^0\gamma^j\frac{\partial}{\partial \eta^j} + V_0(\eta_\mu) + \gamma^0\gamma^j V_j(\eta_\mu) + \gamma^0 V_s(\eta_\mu)\right\}\psi = m\gamma^0\psi. \tag{5.19}$$

E reescrevendo a equação (5.19) sob a forma que vamos usá-la, alterando o índice $\mu = 0, 1, 2, 3$ para os índice 0 e $j = 1, 2, 3$, ou seja,

$$-i\frac{\partial}{\partial \eta^0}\psi = \left\{i\gamma^0\gamma^j\frac{\partial}{\partial \eta^j} - V_0(\eta_\mu) - \gamma^0\gamma^j V_j(\eta_\mu) - \gamma^0 V_s(\eta_\mu) + m\gamma^0\right\}\psi, \tag{5.20}$$

podemos escolher uma representação especial para as matrizes de Dirac. Com efeito sendo

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

temos de (5.20)

$$i\frac{\partial}{\partial \eta^0}\psi = \left\{(\rho_1 \otimes \sigma^j)\left[-i\frac{\partial}{\partial \eta_j} + \Gamma^l A^l_j(\eta)\right] + (\rho_3 \otimes 1)\left[m + V_s(\eta)\right] + (1 \otimes 1)V_r(\eta)\right\}\psi \tag{5.22}$$

que, como $i\frac{\partial}{\partial \eta^0}\psi = E\psi$,

$$\left\{(\rho_1 \otimes \sigma^j)\left[-i\frac{\partial}{\partial \eta_j} + \Gamma^l A^l_j(\eta)\right] + (\rho_3 \otimes 1)\left[m + V_s(\eta)\right] + (1 \otimes 1)\left(V_r(r) - E\right)\right\}\psi(\eta, p) = 0, \tag{5.23}$$

onde σ^j é dado por (4.10), os potenciais $V_j \equiv \Gamma^l A^l_j$ (compreende-se soma em l, $l = 1, 2, 3, \ldots$ com $j = 1, 2, 3$) correspondem a algum tipo de potencial vetor e $V_0 \equiv V_r$ corresponde a algum tipo de potencial escalar , Γ^l é a matriz real $\begin{pmatrix} \Gamma^l_{11} & \Gamma^l_{12} \\ \Gamma^l_{21} & \Gamma^l_{22} \end{pmatrix}$ e A^l_j são funções de η, assim como V_r e V_s. O potencial V_s corresponde a mais uma possibilidade pensando em tornar o método o mais geral possível, e é justificada como uma interação que altera a massa efetiva, por exemplo.

Assumindo que o espinor solução de (5.23) pode ser escrito como

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i\frac{G}{\eta}\phi \\ \frac{F}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})\phi \end{pmatrix},$$

e simplificando chegamos a

$$\left\{\left[\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{kG}{\eta} - i\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j G(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})\right] - \left[E + m + V_s - V_r + \sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right] F\right\}\phi = 0,$$
$$\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{kF}{\eta} + i\sigma^j\Gamma^l_{22}A^l_j F(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})\right] + \left[E - m - V_s - V_r - \sigma^j\Gamma^l_{21}A^l_j\right] G\right\}\phi = 0.$$

Na expressão do espinor, $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ e estamos adotando, formalmente como Li e Lu [44] coordenadas esféricas (η, θ, φ) para expressar o ente $\vec{\eta}$.

Considerando o ente

$$\Phi = \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix},$$

a equação de Dirac acima pode ser reescrita como

$$\left[\frac{d}{d\eta} + \lambda_0 + \vec{\Lambda}\cdot\vec{\rho} - \vec{W}\cdot\vec{\rho}\right]\Phi = 0, \tag{5.24}$$

onde, adotando que $\Gamma^l_{11} = \nu\Gamma^l_{22}$ e $\Gamma^l_{21} = \beta\Gamma^l_{12}$, com $\nu, \beta \equiv \pm 1$, definimos

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &\equiv \frac{i(1-\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta}), \\
\vec{\Lambda}\cdot\vec{\rho} &\equiv \left[V_s - \frac{1+\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]\rho_1 + i\left[V_r - \frac{1-\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]\rho_2 \\
&+ \left[\frac{k}{\eta} + \frac{i(1+\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})\right]\rho_3, \\
\vec{W}\cdot\vec{\rho} &\equiv m\rho_1 + iE\rho_2 + 0\rho_3,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

ou seja $\vec{W} = (m, iE, 0)$ e $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, com

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= V_s - \frac{1+\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j, \\
\Lambda_2 &= i\left(V_r - \frac{1-\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right), \\
\Lambda_3 &= \frac{k}{\eta} + \frac{i(1+\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta}).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Aplicando uma transformação de Similaridade tal que $S^{-1}\left(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\rho}\right)S = \lambda\rho_3$, onde $\lambda \equiv \sqrt{\Lambda_3^2+\Lambda_+\Lambda_-}$, com $\Lambda_\pm \equiv (\Lambda_1 \pm i\Lambda_2)$, a equação (5.24) torna-se:

$$\left[\frac{d}{d\eta} + \lambda_0 + \lambda\rho_3 - \vec{W}'\cdot\vec{\rho}\right]\Phi = 0, \tag{5.27}$$

com $\vec{W}'\cdot\vec{\rho} = S^{-1}\left(\vec{W}\cdot\vec{\rho}\right)S = W_1'\rho_1 + W_2'\rho_2 + W_3'\rho_3$, ou usando $W_+' \equiv W_1' + iW_2'$, $W_-' \equiv W_1' - iW_2'$, $\rho_+ \equiv \frac{\rho_1+i\rho_2}{2}$, $\rho_- \equiv \frac{\rho_1-i\rho_2}{2}$, temos que $\vec{W}'\cdot\vec{\rho} = W_+'\rho_- + W_-'\rho_+ + W_3'\rho_3$ (vide Apêndice A para os cálculos).

A equação (5.27), usando que $W_3' = \frac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda}$ (vide Apêndice A), possibilita definir os operadores

$$A_+ \equiv +\left(\frac{d}{d\eta}+\lambda_0\right) + \lambda - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda}, \quad A_- \equiv -\left(\frac{d}{d\eta}+\lambda_0\right) + \lambda - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda}, \tag{5.28}$$

que satisfazem às relações

$$A_+G = +\hat{W}_-'F, \quad A_-F = -\hat{W}_+'G. \tag{5.29}$$

Segue então que

$$A_-A_+G = -\hat{W}_-'\hat{W}_+'G; \quad A_+A_-F = -\hat{W}_-'\hat{W}_+'F, \tag{5.30}$$

ou definindo $H_+ \equiv A_-A_+$ e $H_- \equiv A_+A_-$ temos

$$H_+G = E_+G; \quad H_-F = E_-F, \tag{5.31}$$

onde E_+ e E_- são os autovalores dos Hamiltonianos parceiros que são os mesmos exceto para o estado fundamental. Chamaremos F e G autovetores de H_- e H_+, respectivamente.

Dos operadores A_- e A_+ obtemos para os Hamiltonianos parceiros

$$\begin{aligned} H_+ = A_-A_+ &= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{d}{d\eta}\left(\lambda+\lambda_0-\frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right) + \left(\lambda-\frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right)^2 - 2\lambda_0\frac{d}{d\eta} - \lambda_0^2, \\ H_- = A_+A_- &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta}\left(\lambda-\lambda_0-\frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right) + \left(\lambda-\frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right)^2 - 2\lambda_0\frac{d}{d\eta} - \lambda_0^2, \end{aligned} \tag{5.32}$$

e

$$[A_-, A_+]_{(-)} = -2\frac{d}{d\eta}\left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right), \tag{5.33}$$

E assim:

$$\begin{aligned} H_- F &= E_- F, \\ H_+ F &= \left\{ E_- - 2\frac{d}{d\eta}\left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right)\right\} F, \end{aligned} \tag{5.34}$$

e

$$\begin{aligned} H_+ G &= E_+ G, \\ H_- G &= \left\{ E_+ + 2\frac{d}{d\eta}\left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right)\right\} G. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Das relações (5.34) e (5.35) observa-se que os Hamiltonianos parceiros aplicados ao mesmo autovetor correspondem a autovalores diferentes; o mesmo ocorre para $(A_\pm)^n F$ e $(A_\pm)^n G$, $n = 1, 2, \ldots$ como pode-se notar facilmente por aplicações sucessivas; para F, por exemplo, temos usando o princípio da indução infinita.

$$\begin{aligned} H_+ (A_+ F) &= E_+ (A_+ F), \\ H_+ \left[(A_+)^p F\right] = E_+^p \left[(A_+)^p F\right] &\Rightarrow H_{-\alpha}\left[(A_+)^{p+1} F\right] = E_+^p \left[(A_+)^{p+1} F\right], \\ H_+ \left[(A_+)^{p+1} F\right] &= \left\{ E_\alpha^p - 2\frac{d}{d\eta}\left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right)\right\}\left[(A_+)^{p+1} F\right]. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Resultado similar ocorre para G, considerando $H_-(A_- G)$. Depreende-se dessa equações que este método só conduz a uma Hierarquia de Hamiltonianos para potenciais que dependam de λ, sendo independente de λ_0. Assim nossos potenciais escolhidos para a aplicação serão aqueles em que λ_0 seja nulo.

O estado fundamental para o operador H_+ é determinado por

$$H_+ \Phi = 0 \;\;\Rightarrow\;\; A_+ \Phi = 0. \tag{5.37}$$

Assim temos de (5.28) que

$$\begin{aligned} \left[+\frac{d}{d\eta} + \lambda - W_3' \right] \Phi = 0 \;\;&\Rightarrow\;\; \frac{d\Phi}{d\eta} = -\left[\lambda - W_3'\right]\Phi, \\ \int \frac{d\Phi}{\Phi} = -\int \left[\lambda - W_3'\right] d\eta \;\;&\Rightarrow\;\; \Phi = \Phi_0 e^{-\int\left[\lambda - W_3'\right] d\eta}; \end{aligned} \tag{5.38}$$

para H_- teremos o resultado similar $\Phi = \Phi_0 e^{+\int\left[\lambda - W_3'\right] d\eta}$; a partir do qual pode-se construir todo o conjunto de autofunções e espectro de autovalores dos Hamiltonianos considerando aqueles três casos abordados no capítulo precedente.

5.3.2 Álgebra dos Hamiltonianos.

A teoria desenvolvida na secção anterior foi construida considerando a possibilidade de interação com três tipos de potenciais distintos dados em $\vec{A}(\eta) \equiv \Gamma^l(\sigma^j)\vec{A}^l$, $V_s(\eta)$ e $V_r(\eta)$; é a partir destes que determinamos os parâmetros Λ_j e λ_0; em resumo temos com $\beta = \pm 1$, a depender do tipo de potencial, os parâmetros:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &\equiv \frac{i\,(1-\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta}),\\
\vec{\Lambda}\cdot\vec{\rho} &\equiv \left[V_s - \frac{1+\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]\rho_1 + i\left[V_r - \frac{1-\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]\rho_2\\
&+ \left[\frac{k}{\eta} + \frac{i\,(1+\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right]\rho_3,\\
\lambda^2 &\equiv \left[V_s - \frac{1+\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]^2 - \left[V_r - \frac{1-\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]^2\\
&+ \left[\frac{k}{\eta} + \frac{i\,(1+\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right]^2,\\
\vec{W}\cdot\vec{\Lambda} &= m\Lambda_1 + iE\Lambda_2 \equiv -\frac{mZ_1 + iEZ_2}{\eta},
\end{aligned}
$$

onde $Z_1 = \eta\Lambda_1$ e $Z_2 = \eta\Lambda_2$, a equação de Dirac como

$$
\left[\frac{d}{d\eta} + \lambda\rho_3 - \vec{W}'\cdot\vec{\rho}\right]\hat{\Phi} = 0, \tag{5·39}
$$

e os operadores

$$
A_+ \equiv +\tfrac{d}{d\eta} + \lambda - \tfrac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda}, \quad A_- \equiv -\tfrac{d}{d\eta} + \lambda - \tfrac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda}. \ . \tag{5·40}
$$

Fazendo a mudança de variável $\lambda \equiv \frac{a}{\eta}$, onde o parâmetro a pode ou não ser uma constante, a depender do tipo de potencial, temos os Hamiltonianos parceiros.

$$
\begin{aligned}
H_+ = A_-A_+ &= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{d}{d\eta}\left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right) + \left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right)^2,\\
&= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{d}{d\eta}\left(\frac{a}{\eta} - \frac{(mZ_1+iEZ_2)}{a}\right) + \left(\frac{a}{\eta} - \frac{(mZ_1+iEZ_2)}{a}\right)^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
H_+(a) &= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{2\,(mZ_1+iEZ_2)}{\eta} + \frac{a\,(a+1)}{\eta^2}\\
&- \left[\frac{1}{\eta} + \frac{mZ_1+iEZ_2}{a^2}\right]\frac{da}{d\eta} + \left[\frac{mZ_1+iEZ_2}{a}\right]^2 \equiv H_1(a),
\end{aligned} \tag{5·41}
$$

e

$$
\begin{aligned}
H_- = A_+A_- &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta}\left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right), + \left(\lambda - \frac{\vec{\Lambda}\cdot\vec{W}}{\lambda}\right)^2, \\
&= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta}\left(\frac{a}{\eta} - \frac{(mZ_1 + iEZ_2)}{a}\right) + \left(\frac{a}{\eta} - \frac{(mZ_1 + iEZ_2)}{a}\right)^2,
\end{aligned}
$$

i. e,

$$
\begin{aligned}
H_-(a) &= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{2\left(mZ_1 + iEZ_2\right)}{\eta} + \frac{a\left(a-1\right)}{\eta^2} \\
&+ \left[\frac{1}{\eta} + \frac{mZ_1 + iEZ_2}{a^2}\right]\frac{da}{d\eta} + \left[\frac{mZ_1 + iEZ_2}{a}\right]^2 \equiv H_0(a). \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

Comparando (5.41) e (5.42) obtemos, usando a condição de invariância na forma, que a hierarquia dos hamiltonianos a partir do parâmetro a é dada por

$$
H_+(a) \equiv H_-(a+1) + R(a+1), \qquad (5.43)
$$

com

$$
\begin{aligned}
R(a+1) &= -\left[\frac{2}{\eta} + \frac{mZ_1 + iEZ_2}{a^2} + \frac{mZ_1 + iEZ_2}{(a+1)^2}\right]\frac{da}{d\eta} \\
&+ \left[\frac{mZ_1 + iEZ_2}{a}\right]^2 - \left[\frac{mZ_1 + iEZ_2}{(a+1)}\right]^2,
\end{aligned}
$$

e por iterações sucessivas

$$
H_n(a) \equiv H_0(a+n) + \sum_{j=1}^{n} R(a+j), \qquad (5.44)
$$

o que pode ser reescrito com a introdução de novos operadores $B_+(a) \equiv A_+(a)e^{-\frac{\partial}{\partial a}}$ que reproduzem como mostrado por [16] os mesmos autovalores, ou seja, os Hamiltonianos parceiros podem ser representados por meio de

$$
B_-(a)B_+(a) = B_+(a)B_-(a) + R(a+1). \qquad (5.45)
$$

Assim o comutador entre os operadores $B_+(a)$ e $B_-(a)$ fica

$$
[B_-(a), B_+(a)]_{(-)} = R(a+1), \qquad (5.46)
$$

e a partir deles temos definida a àlgebra dada por

$$
[A_+(a)A_-(a), (B_+)^n(a)]_{(-)} = \sum_{i=1}^{n} R(a+i)\,(B_+)^n(a), \qquad (5.47)
$$

que permite obter a energia para todo o conjunto dos autovetores $(B_+)^n\,\psi(a)$.

Dado que os operadores Hamiltonianos estão relacionados por meio de (5.44), assumindo que o estado fundamental é dado por $H_0\psi_0 = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} H_n(a) &= H_{n-1}(a+1) + R(a+1), \\ &= H_{n-2}(a+2) + R(a+1) + R(a+2), \\ &= H_{n-3}(a+3) + R(a+1) + R(a+2) + R(a+3), \\ &\vdots \\ H_n(a) &= H_0(a+n) + \sum_{j=1}^{n} R(a+j), \end{aligned} \tag{5.48}$$

que aplicado sobre o estado fundamental nos dá

$$H_n(a)\psi_0 = H_0(a+n)\psi_0 + \sum_{j=1}^{n} R(a+j)\psi_0 = \sum_{j=1}^{n} R(a+j)\psi_0 = E_n\psi_0. \tag{5.49}$$

A energia total em (5.49) é o autovalor do Hamiltoniano $H_-\,(a) \equiv A_+(a)A_-(a)$, dado por

$$E_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} R(a+i). \tag{5.50}$$

Adotando que as soluções da equação de Dirac no espaço de fase sejam do tipo $\phi(\eta,p) \equiv \xi(\eta)C(p)$, e desta forma com variáveis separáveis, tomamos $C(p) \equiv e^{-2ipb_0}$ tal como pode ser visto em [44], onde b_0 é uma constante a determinar, e temos que os operador $\xi(\eta)$ atua sobre $C(p)$ de maneira que

$$\eta^n C(p) = (r - b_0)^n\, C(p), \tag{5.51}$$

e assim $\phi(\eta,p) \equiv \phi(r,p)$ em cada expressão definida em η, que passa a ser expressa em r.

Agora os autovalores de energia destes Hamiltonianos Hierarquizados estão relacionados aos autovalores de energia da equação de Dirac por meio de (A.19), sendo dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} R(a_0+i) &= \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \left\{\left[m^2 - E^2\right]\left[(\lambda+\Lambda_3)^2 + \left(\lambda^2-\Lambda_3^2\right)^2 + 2\lambda^2 - 2\Lambda_3^2\right] + \right. \\ &- \left. 2\left[m\Lambda_1 + iE\Lambda_2\right]^2\right\}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

que nos oferece uma equação em E a ser resolvida em cada caso com o uso das expressões de W'_- e W'_+ na equação (A.19) (vide Apêndice).

Capítulo

6

APLICAÇÕES.

Neste capítulo realizamos a aplicação da MQRSS resolvendo a Equação de Dirac nos casos em que o sistema está submetido a alguns potenciais exemplares.

A álgebra da supersimetria estabelece que $H_+ \equiv A^+A^-$ e $H_- \equiv A^-A^+$, tem-se à relação de comutação $[B_-(a), B_+(a)]_{(-)} = R(a)$ e $H_+(a) = H_-(a+1) + R(a+1)$; com essas relações determina-se o espectro de autovalores dado por $E_n^{(m+1)} = E_{n+1}^{(m)}$, e tem-se:

$$E_{n-1} \equiv E_{n-1}^{(1)} = E_0^{(n)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.1}$$

Agora como os operadores bosônicos correspondem à criação ou aniquilação de um quantum de energia, temos que os estados de energia no espaço de fase são dados pela aplicação sucessiva de operadores de criação ao estado fundamental do hamiltoniano mais baixo da hierarquia corrigido por um fator de normalização. Assim temos

$$\psi_n(q,p) \equiv \psi_n^{(1)}(q,p) = \frac{1}{\sqrt{N_{n-1}}}\hat{B}^+_{(1)} \ldots \frac{1}{\sqrt{N_1}}\hat{B}^+_{(n)}\psi_0^{(n+1)}(q,p). \tag{6.2}$$

A partir destes vetores de estado construimos as funções de Wigner que nos oferecem a distribuição de frequências mensuráveis com os quais podemos testar os resultados a serem obtidos.

6.1 FUNÇÃO DE WIGNER E OPERADORES BOSÔNICOS EM GERAL.

Uma das características principais da Mecânica Quântica Simplética é que a função de Wigner pode ser obtida diretamente das equações de Schroedinger (no caso não relativístico) e de Dirac (no caso realtivístico), considerando o produto estrela entre suas soluções. Assim no presente caso, temos que, com $B^+ = \left(+\frac{\partial}{\partial\eta} + \lambda - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda}\right)e^{-\frac{\partial}{\partial a}}$, a função de Wigner é dada por

$$\begin{aligned} f_W(q,p) = &\left[\frac{1}{\sqrt{N_{n-1}}}\hat{B}^+_{(1)} \ldots \frac{1}{\sqrt{N_1}}\hat{B}^+_{(n)}\psi_0^{(n+1)}(q,p)\right] \star \\ &\star \left[\frac{1}{\sqrt{N_{n-1}}}\hat{B}^+_{(1)} \ldots \frac{1}{\sqrt{N_1}}\hat{B}^+_{(n)}\psi_0^{(n+1)}(q,p)\right]^*. \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.2 EQUAÇÃO DE DIRAC PARA PARTÍCULA LIVRE.

6.2.1 Equação de Dirac no espaço de fase.

A equação de Dirac para o elétron no espaço de fase livre de interações é dada por

$$\left\{\left(\rho_3 \otimes \sigma^j\right)\left[-i\frac{\partial}{\partial \eta_j}\right] + (\rho_3 \otimes 1)\, m - (1 \otimes 1)\, E\right\}\Psi = 0, \tag{6.4}$$

que corresponde por (5.29) às equações

$$A_+ F = -W'_+ G; \qquad A_- G = +W'_- F, \tag{6.5}$$

com os operadores definidos por (5.28) da seguinte maneira

$$A_+ = +\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta}; \qquad A_- = -\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta}, \tag{6.6}$$

onde λ está subsituido por $\frac{a}{\eta}$ com $a = k$ onde k é o autovalor do operador K referente ao momento angular. A equação (6.4) trata de uma partícula livre.

Os Hamiltonianos parceiros são dados por

$$\begin{aligned} A^- A^+ &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{a}{\eta^2} + \left(\frac{a}{\eta}\right)^2, \\ H^+ &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{a\,(a+1)}{\eta^2}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

e

$$\begin{aligned} A^+ A^- &= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{a}{\eta^2} + \left(\frac{a}{\eta}\right)^2, \\ H^- &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{a\,(a-1)}{\eta^2}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

com

$$H^+(a) \equiv H^-(a+1) + R(a+1), \tag{6.9}$$

o que resulta, por comparação de (6.8) e (6.9) em

$$R(a+j) = 0. \tag{6.10}$$

6.2.2 Autovalores dos Hamiltonianos.

O espectro de autovalores dos hamiltonianos são dados considerando as expressões (5.50) e (5.52), por

$$E_0^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} R(a+j) = 0 = \left[m^2 - E^2\right], \tag{6.11}$$

cuja solução é dada por

$$E = m. \tag{6.12}$$

Na relação (6.12) podemos observar que o resultado está de acordo com o esperado.

6.2.3 Autovetores dos Hamiltonianos.

Os autovetores do estado são dados considerando (5.38) por $\Phi_0^{(n)} = \sqrt{N^{(0)}}\eta^{-\alpha a_n}C(p)$, e o conjunto de autovetores a partir deste fica dado por

$$\phi_0^{(v)}(\eta,p) = \sqrt{N^{(v)}}\sum_{q=0}^{n} S_q^{(n)}\eta^{-(q+\alpha a_n)}C(p), \tag{6.13}$$

com $N^{(v)}$ a constante de normalização e

$$S_q^{(v)} = \sum_{q=0}^{v}\prod_{j=1}^{q}\left[a_0 + v - j + 1 + \alpha\,(j-q)\right], \tag{6.14}$$

conforme mostramos no Apêndice B.

6.2.4 Funções de Wigner.

Usando a expressão (1.8) e a (5.38) calculamos as funções de Wigner no Apêndice B e obtivemos (vide Apêndice B para os cálculos).

$$f_w^{(n)}(r,p) = \frac{e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\left[\frac{(2r-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}-(-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}}{2(n+\alpha k_n)+j+1}\right]}{\sum_{j=0}^{1}\left[\frac{2(b_0)^{3-2(n+\alpha k_n)}}{2j+1-2(n+\alpha k_n)}\right]}. \tag{6.15}$$

Então pelas as propriedade da função de Wigner obtemos a densidade de probabilidade por $\int f_w(q,p)dp = \rho(q)$, assim como a condição de normalização por $\int\int f_w(q,p)dpdq \equiv 1$.

Temos assim a densidade de probabilidade explicitamente por

$$\rho(r) = \frac{\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\left[\frac{(2r-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}}{j+1-2(n+\alpha k_n)} - \frac{(-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}}{j+1-2(n+\alpha k_n)}\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}[\pi(r-b_0)]\right)}{\frac{2}{\hbar}(r-b_0)}\right]}{\sum_{j=0}^{1}\left[\frac{2(b_0)^{3-2(n+\alpha k_n)}}{2j+1-2(n+\alpha k_n)}\right]}. \tag{6.16}$$

6.3 EQUAÇÃO DE DIRAC SOB POTENCIAL TIPO $-\frac{A_2}{r}$ EXTERNO.

6.3.1 Equação de Dirac no espaço de fase.

A equação de Dirac para o elétron no espaço de fase sob um potêncial do tipo $-\frac{A_2}{\eta}$, que corresponde a uma interação colombiana, é dada por

$$\left\{\left(\rho_3\otimes\sigma^j\right)\left[-i\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right] + \left(\rho_3\otimes 1\right)m + \left(1\otimes 1\right)\left[-\frac{A_2}{\eta} - E\right]\right\}\Psi = 0, \tag{6.17}$$

que corresponde por (5.29) às equações

$$A_+F = -W'_+G; \qquad A_-G = +W'_-F, \tag{6.18}$$

com os operadores definidos por (5.28) da seguinte maneira

$$A_+ = +\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta} - \tfrac{EA_2}{a}; \qquad A_- = -\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta} - \tfrac{EA_2}{a}, \tag{6.19}$$

onde λ está subsituido por $\frac{a}{\eta}$ com $a = \sqrt{k^2 - A_2^2}$ onde k é o autovalor do operador K referente ao momento angular. A equação (6.17) trata de uma partícula sujeita a um potencial onde A_2 é relativo à interação radial que corresponde a uma interação colombiana.

Os Hamiltonianos parceiros são dados por

$$\begin{aligned} A^-A^+ &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{a}{\eta^2} + \left(\frac{a}{\eta} + \frac{EA_2}{a}\right)^2 \\ H^+ &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2\,(EA_2)}{\eta} + \frac{a\,(a+1)}{\eta^2} + \left(\frac{EA_2}{a}\right)^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^+A^- &= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{a}{\eta^2} + \left(\frac{a}{\eta} + \frac{EA_2}{a}\right)^2 \\ H^- &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2\,(EA_2)}{\eta} + \frac{a\,(a-1)}{\eta^2} + \left(\frac{EA_2}{a}\right)^2, \end{aligned}$$

com

$$H^+\,(a) \;\equiv\; H^-\,(a+1) + R\,(a+1)\,, \tag{6.20}$$

o que resulta em

$$R\,(a+j) \;=\; \left(\frac{E_nA_2}{a+j}\right)^2 - \left(\frac{E_nA_2}{a+j-1}\right)^2.$$

6.3.2 Autovalores dos Hamiltonianos.

O espectro de autovalores dos hamiltonianos é dado considerando as expressões (5.50) e (5.52) por

$$\begin{aligned} E_0^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n} R(a+j) = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{E_nA_2}{a+j}\right)^2 - \left(\frac{E_nA_2}{a+j-1}\right)^2\right] = \\ &= \left(\frac{E_nA_2}{a_0+n}\right)^2 - \left(\frac{E_nA_2}{a_0}\right)^2, \\ &= \left(\frac{1}{2(a_0+n)}\right)^2 \left\{\left[m^2 - E_n^2\right]\left[(a_0+n+k)^2 + A_2^4 + 2A_2^2\right] - 2\left[E_nA_2\right]^2\right\}, \\ E_n &= m\sqrt{\frac{(a_0+n+k)^2 + A_2^4 + 2A_2^2}{8A_2^2 - \left(\frac{2A_2}{a_0}\right)^2 + (a_0+n+k)^2 + A_2^4}}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

onde E_n são os autovalores da equação de Dirac, e os $E_0^{(n)}$ são os autovalores dos Hamiltonianios parceiros.

6.3.3 Autovetores dos Hamiltonianos.

Os autovetores do estado fundamental é dado considerando (5.38) por

$$\Phi_0^{(n)} = \sqrt{N^{(0)}}\eta^{-\alpha a_n} e^{-\alpha(\frac{EA_2}{a_n})\eta} C(p), \tag{6.22}$$

e o conjunto de autovetores a partir deste fica dado por

$$\phi_0^{(n)}(\eta,p) = \sqrt{N^{(n)}} \sum_{q=0}^{n} S_q^{(n)} \eta^{-(q+\alpha a_n)} e^{-\alpha\left(\frac{EA_2}{a_0+n}\right)\eta} C(p), \tag{6.23}$$

assumindo que

$$\begin{aligned} S_q^{(n)} &= \sum_{c=1}^{arranjos} \left\{ \prod_{d_1=o_1}^{n_1-q_1} \left(\frac{E_n A_2}{a_0+n-d_1+1} \right) \prod_{j=n_1-q_1+1}^{q_1} \left[a_0+n-j_1+1+\alpha\left(j_1-q_1\right) \right] \ldots \right. \\ &\left. \ldots \prod_{d_f=o_f}^{n_f-q_f} \left(\frac{E_n A_2}{a_0+n-d_f+1} \right) \prod_{j=n_f-q_f+1}^{q_f} \left[a_0+n-j_f+1+\alpha\left(j_f-q_f\right) \right] \right\}_{(c)} \end{aligned} \tag{6.24}$$

conforme mostramos no Apêndice B.

6.3.4 Funções de Wigner.

Usando a expressão (1.8) e a (5.38) calculamos as funções de Wigner no Apêndice B obtivemos (vide Apêndice B para os cálculos).

$$\begin{aligned} f_w^{(n)}(r,p) &= N^{(n)} \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} b_0^{2-j} \left\{ \sum_{x=1}^{j-(q+s+2\alpha a_n)} \frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x} \right. \\ &\prod_{l=0}^{x-1} \left[(1-\delta_{l,0}) \left[j-(q+s+2\alpha a_n) \right] - l + 1 \right] \left[u^{[j-(q+s+2\alpha a_n)]-x+1} e^{2\Omega u} \right]_{-b_0}^{2r-b_0} + \\ &+ \left. \frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x} \prod_{l=0}^{j-(q+s+2\alpha a_n)-1} \left[(1-\delta_{l,0}) \left[j-(q+s+2\alpha a_n) \right] - l + 1 \right] \left[\frac{e^{2\Omega u}}{\Omega} \right]_{-b_0}^{2r-b_0} \right\} \end{aligned} \tag{6.25}$$

onde $\Omega \equiv \frac{mA_1 - iEA_2}{a}$, e $u]_a^b = b - a$.

Então pelas as propriedade da função de Wigner obtemos a densidade de probabilidade por $\int f_w(q,p)dp = \rho(q)$, assim como a condição de normalização por $\int\int f_w(q,p)dpdq \equiv 1$.

Temos assim a densidade de probabilidade explicitamente por

$$\rho(r) = N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} \sum_{j=0}^{2}\left(\begin{array}{c}2\\ j\end{array}\right) b_0^{2-j}\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}\left[\pi\left(r-b_0\right)\right]\right)}{\frac{2}{\hbar}\left(r-b_0\right)}\right]\left\{\sum_{x=1}^{j-(q+s+2\alpha a_n)}\frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right.$$
$$\prod_{l=0}^{x-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[u^{[j-(q+s+2\alpha a_n)]-x+1}e^{2\Omega u}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}+$$
$$\left. + \frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{j-(q+s+2\alpha a_n)-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[\frac{e^{2\Omega u}}{\Omega}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}\right\}. \tag{6.26}$$

6.4 OSCILADOR HARMÔNICO DE DIRAC TIPO $\vec{A}(\vec{\eta}) = -im\omega^2\vec{\eta}\,(\rho_3\otimes 1)$.

6.4.1 Introdução.

A investigação do oscilador harmônico de Dirac [45], com o nosso desenvolvimento pode ser feito aplicando um potencial vetor acrescido às componentes dos *momenta* dado por $\vec{A}(\vec{\eta}) = -im\omega^2\vec{\eta}\,(\rho_3\otimes 1)$, ou seja

$$\left\{(\rho_3\otimes\sigma_j)\left[-i\frac{\partial}{\partial\eta_j} - im\omega^2\eta\,(\rho_3\otimes 1)\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right] + (\rho_3\otimes 1)\,m - (1\otimes 1)\,E\right\}\Psi = 0. \tag{6.27}$$

que corresponde por (5.29) às equações

$$A_+F = -W'_+G; \qquad A_-G = +W'_-F, \tag{6.28}$$

com os operadores definidos por (5.28) da seguinte maneira

$$A_+ = +\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta} - \tfrac{Em\omega^2\eta^3}{2a}; \qquad A_- = -\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta} - \tfrac{Em\omega^2\eta^3}{2a}, \tag{6.29}$$

onde λ está subsituido por $\frac{a}{\eta}$ com $a = k + m\omega^2\eta^2\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})$. O autovalor do operador K, que se refere ao momento angular, e a interação externa tipo oscilador harmônico entra como um termo de *momentum*, ao contrário da secção precedente onde o potencial entra como como uma interação externa .

Os Hamiltonianos parceiros abaixo, que possuem o mesmo conjunto de autovalores e autovetores exceto para o estado fundamental são

$$H^+(a) = -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{a\,(a+1)}{\eta^2} - \frac{m\omega^2\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}{\eta}, \tag{6.30}$$

e

$$H^-(a) = -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{a\,(a-1)}{\eta^2} + \frac{m\omega^2\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}{\eta}, \tag{6.31}$$

com

$$H^{+}(a) \equiv H^{-}(a+1) + R(a+1), \tag{6.32}$$

o que resulta em

$$R(a+1) = \frac{2m\omega^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}{\eta}. \tag{6.33}$$

6.4.1.1 Autovalores dos Hamiltonianos.

O espectro de autovalores dos hamiltonianos é dado considerando as expressões (5.50) e (5.52) por

$$E_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} R(a_0+i) = \frac{2nm\omega^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}{\eta} = \left[m^2 - E_n^2\right], \tag{6.34}$$

cuja solução fica

$$E_n = m\sqrt{1 - \frac{2n\omega^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}{m\eta}}, \tag{6.35}$$

onde $E'^{(n)}$ são os autovalores da equaçâo de Dirac, e os E_n são os autovalores dos Hamiltonianios parceiros.

Usando (5.38) temos que

$$E'^{(n)} = m\sqrt{1 - \frac{2n\omega^2}{m\,(2r-b_0)}}. \tag{6.36}$$

6.4.1.2 Autovetores dos Estados Fundamentais.

Os estados fundamentais do Hamiltoniano são dados por meio das equação (5.38), i.e. $\Psi_0^{\alpha}(\eta,p) = N\left[e^{-\alpha\int\left[\frac{k}{\eta}+m\omega^2\eta(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right]d\eta}\right]C(p) = N\left[\eta^{-\alpha k}e^{+m\omega^2\frac{\eta^2}{2}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}\right]C(p)$. e o conjunto dos autovetores é dado por

$$\phi_0^{(v)}(\eta,p) = \sqrt{N^v}\sum_{q=0}^{n} S_q^{(v)}\eta^{n-2q-\alpha k_0}e^{-\alpha m\omega_0^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\frac{\eta^2}{2}}C(p) \tag{6.37}$$

com $N^{(v)}$ a constante de normalização e

$$\begin{aligned} S_q^{(v)} = \sum_{c=1}^{arranjos}\Bigg\{&\left[m\omega_0^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right]^{v_1-q_1}\prod_{j_1=v_1-q_1+1}^{q_1}\left[k_0+v-j_1+1+\alpha\,(t+j_1-v_1+q_1)\right]\ldots \\ &\ldots\left[m\omega_0^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right]^{v_f-q_f}\prod_{j_f=v_f-q_f+1}^{a_b}\left[k_0+v-j_f+1+\alpha\,(t+j_f-v_f+q_f)\right]\Bigg\}_{(c)} \end{aligned} \tag{6.38}$$

conforme mostramos no Apêndice B.

6.4.1.3 Funções de Wigner.

Usando a expressão (1.8) e a (5.38) calculamos as funções de Wigner no Apêndice B obtivemos (vide Apêndice B para os cálculos).

$$\begin{aligned}
f_w^{(n)}(r,p) &= N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\int_{-b_0}^{2r-b_0} u^{n-2q-\alpha k_n+j} e^{2\Omega u^2} du \\
&= N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\left\{\left(\sum_{x=1}^{n-(q+s)+\alpha k_n+\frac{j}{2}} \frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right.\right. \\
\prod_{l=0}^{x-1} & \left[(1-\delta_{l,0})\left[2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j\right]-2l+1\right]\left[u^{[2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j]-2x+1} e^{\Omega u^2}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} + \\
&+ \left.\frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{v-1}\left[(1-\delta_{l,0})\left[2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j\right]-2l+1\right]\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right)\times \\
&\times \left.\left(1-\delta_{2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j,0}\right)+\delta_{2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j,0}\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right\} \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

onde $\Omega \equiv \frac{-\alpha m\omega_0^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}{2}$, e $u]_a^b = b-a$.

Temos assim a densidade de probabilidade explicitamente por

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}\left[\pi\left(r-b_0\right)\right]\right)}{\frac{2}{\hbar}\left(r-b_0\right)}\right]\left\{\left(\sum_{x=1}^{n-(q+s)+\alpha k_n+\frac{j}{2}} \frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right.\right. \\
\prod_{l=0}^{x-1} & \left[(1-\delta_{l,0})\left[2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j\right]-2l+1\right]\left[u^{[2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j]-2x+1} e^{\Omega u^2}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} + \\
&+ \left.\frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{v-1}\left[(1-\delta_{l,0})\left[2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j\right]-2l+1\right]\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right)\times \\
&\times \left.\left(1-\delta_{2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j,0}\right)+\delta_{2n-2(q+s)+2\alpha k_n+j,0}\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right\}.
\end{aligned} \qquad (6.40)$$

6.5 PARTÍCULA SOB UM POTENCIAL QUE ALTERA A MASSA.

6.5.1 Equação de Dirac no espaço de fase.

A equação de Dirac para o elétron no espaço de fase sob um potencial do tipo $-\frac{A_1}{\eta}$, que corresponde a alteração da massa, é dada por

$$\left\{\left(\rho_3\otimes\sigma^j\right)\left[-i\frac{\partial}{\partial\eta}\right]+\left(\rho_3\otimes 1\right)\left[m-\frac{A_1}{\eta}\right]+\left(1\otimes 1\right)\left[-E\right]\right\}\Psi = 0, \qquad (6.41)$$

que corresponde por (5.29) às equações

$$A_{+}\Phi_{-} = -W'_{+}\Phi_{+}; \qquad A_{-}\Phi_{+} = +W'_{-}\Phi_{-}, \tag{6.42}$$

com os operadores definidos por (5.28) da seguinte maneira

$$A_{+} = +\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta} - \tfrac{mA_1}{a}; \qquad A_{-} = -\tfrac{d}{d\eta} + \tfrac{a}{\eta} - \tfrac{mA_1}{a}, \tag{6.43}$$

a partir da definção de $a = \sqrt{A_1^2 + k^2}$. Trata-se de uma interação radial que corresponde a uma alteração de massa, e o autovalor do operador K, que se refere ao momento angular.

Os Hamiltonianos parceiros são dados por

$$\begin{aligned} A^{-}A^{+} &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{a}{\eta^2} + \left(\frac{a}{\eta} + \frac{mA_1}{a}\right)^2, \\ H^{+} &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2\,(mA_1)}{\eta} + \frac{a\,(a+1)}{\eta^2} + \left(\frac{mA_1}{a}\right)^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^{+}A^{-} &= -\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{a}{\eta^2} + \left(\frac{a}{\eta} + \frac{mA_1}{a}\right)^2, \\ H^{-} &= -\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2\,(mA_1)}{\eta} + \frac{a\,(a-1)}{\eta^2} + \left(\frac{mA_1}{a}\right)^2, \end{aligned}$$

com

$$H^{+}(a) \equiv H^{-}(a+1) + R\,(a+1)\,, \tag{6.44}$$

que resulta em

$$R\,(a+j) = \left(\frac{mA_1}{a+j}\right)^2 - \left(\frac{mA_1}{a+j-1}\right)^2.$$

6.5.2 Autovalores dos Hamiltonianos.

O espectro de autovalores dos hamiltonianos são dados considerando as expressões (5.50) e (5.52), por

$$\begin{aligned} E_0^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n} R(a+j) = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{mA_1}{a+j}\right)^2 - \left(\frac{mA_1}{a+j-1}\right)^2\right] = \\ &= \left(\frac{mA_1}{a_0+n}\right)^2 - \left(\frac{mA_1}{a_0}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2(a_0+n)}\right)^2 \left\{\left[m^2 - E^2\right]\left[(a_0+n+k)^2 + \left((a_0+n)^2 - k^2\right)^2 + 2(a_0+n)^2 - 2k^2\right] + \right. \\ &- \left. 2\,[mA_1]^2\right\}, \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$E = m\sqrt{1 - A_1^2\left\{\frac{3a_0^2 - 2\left(a_0+n\right)^2}{2a_0^2\left(a_0+n\right)\left[\left(a_0+n+k\right)^2 + A_1^4 + 2A_1^2\right]}\right\}}, \tag{6.45}$$

com $A_1 = 0$, temos $E = m$.

6.5.3 Autovetores dos Hamiltonianos.

Os autovetores do estado são dados considerando (5.38) por $\Phi_0^{(n)} = \sqrt{N^{(0)}}\eta^{-\alpha a_n}e^{-\alpha\left(\frac{mA_1}{a_n}\right)\eta}C(p)$, e o conjunto de autovetores a partir deste fica dado por

$$\phi_0^{(v)}(\eta,p) = \sqrt{N^{(v)}}\sum_{q=0}^{n} S_q^{(v)}\eta^{-(q+\alpha a_n)}e^{-\alpha\left(\frac{mA_1}{a_0+n}\right)\eta}C(p), \tag{6.46}$$

com $N^{(v)}$ a constante de normalização e

$$\begin{aligned} S_q^{(v)} = & \sum_{c=1}^{arranjos}\left\{\prod_{d_1=o_1}^{v_1-q_1}\left(\frac{mA_1}{a_0+v-d_1+1}\right)\prod_{j=v_1-q_1+1}^{q_1}\left[a_0+v-j_1+1+\alpha\left(j_1-q_1\right)\right]\ldots\right.\\ & \left.\ldots\prod_{d_f=o_f}^{n_f-q_f}\left(\frac{mA_1}{a_0+v-d_f+1}\right)\prod_{j=n_f-q_f+1}^{q_f}\left[a_0+v-j_f+1+\alpha\left(j_f-q_f\right)\right]\right\}_{(c)}. \end{aligned} \tag{6.47}$$

6.5.4 Funções de Wigner.

Usando a expressão (1.8) e a (5.38) calculamos as funções de Wigner no Apêndice B e obtivemos (vide Apêndice B para os cálculos).

$$\begin{aligned} f_w^{(n)}(r,p) = & N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)}e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}}\sum_{j=0}^{2}\left(\begin{array}{c}2\\j\end{array}\right)b_0^{2-j}\left\{\sum_{x=1}^{j-(q+s+2\alpha a_n)}\frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right.\\ & \textstyle\prod_{l=0}^{x-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[u^{[j-(q+s+2\alpha a_n)]-x+1}e^{2\Omega u}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} +\\ & \left. + \frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{j-(q+s+2\alpha a_n)-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[\frac{e^{2\Omega u}}{\Omega}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}\right\}. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Então pelas as propriedade da função de Wigner obtemos a densidade de probabilidade por $\int f_w(q,p)dp = \rho(q)$, assim como a condição de normalização por $\int\int f_w(q,p)dpdq \equiv 1$

Temos assim a densidade de probabilidade explicitamente por

$$
\begin{aligned}
\rho(r) \quad = \quad & N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} \sum_{j=0}^{2}\left(\begin{array}{c}2\\ j\end{array}\right) b_0^{2-j}\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}\left[\pi\left(r-b_0\right)\right]\right)}{\frac{2}{\hbar}\left(r-b_0\right)}\right]\left\{\sum_{x=1}^{j-(q+s+2\alpha a_n)}\frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right. \\
& \textstyle\prod_{l=0}^{x-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[u^{[j-(q+s+2\alpha a_n)]-x+1}e^{2\Omega u}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}+ \\
+ \quad & \left.\frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{j-(q+s+2\alpha a_n)-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[\frac{e^{2\Omega u}}{\Omega}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}\right\}.
\end{aligned}
\tag{6.49}
$$

Capítulo

7

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.

A teoria quântica no espaço de fase foi proposta por Wigner [24]; esta formulação, também conhecida como quantização de Moyal, baseia-se na função quasi-distribuição de Wigner $f_w(q,p)$, na aplicação Ω de Weyl que associa operadores quânticos $\hat{A}$, $\hat{B}$ a c-funções $a_w(q,p)$ e $b_w(q,p)$, respectivamente, definidas sobre o espaço de fase $\Gamma \equiv (q,p)$ e leva ao produto estrela $(*)$ tal que se tem

$$\Omega : \hat{A}\hat{B} \Rightarrow a_w(q,p) * b_w(q,p) = a_w(q,p) e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} b_w(q,p). \tag{7.1}$$

Desde os trabalhos originais de Wigner e Weyl esforços foram realizados a fim de desenvolver essa formulação quântica. Um desses desenvolvimentos foi realizado por Oliveira et al [25] que usaram os operadores a_w* para obter uma representação unitária da álgebra de Lie do grupo de Galilei considerando o espaço de Hilbert H_Γ de funções de quadrado integrável $\psi(q^i, p_i)$, $i =, 1, 2, \ldots, n$ definidas sobre Γ e compatível com o produto estrela. Nesta representação os operadores fundamentais $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ são obtidos como

$$\begin{aligned} \hat{P}\psi(q,p) &= p * \psi(q,p) = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right)\psi(q,p), \\ \hat{Q}\psi(q,p) &= q * \psi(q,p) = \left(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right)\psi(q,p), \end{aligned} \tag{7.2}$$

e o gerador das translações temporais h conduz a uma equação do tipo Schroedinger no espaço de fase, a saber

$$\hat{H}\psi(q,p) = h * \psi(q,p) = E\psi(q,p), \tag{7.3}$$

onde $h*$ depende de $p*$ e $q*$, sendo a interpretação física obtida por intermédio da função de Wigner construida com as soluções de (7.3), i. e.

$$f_w(q,p) = \psi(q,p) * \psi^\dagger(q,p). \tag{7.4}$$

A generalização relativística dessa formulação denominada de Mecânica Quântica Simplética foi realizada por Amorim et al [39] que partindo do grupo de Poincaré, consideraram sua álgebra de Lie, funções $\phi(q,p)$ sobre o espaço de fase $\Gamma = (q^\mu, p_\mu)$, $\mu = 0,1,2,3$, e com os operadores coordenada $\hat{Q}^\mu$ e momentum $\hat{P}_\mu$ dados por

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_\mu \phi(q,p) &= p_\mu * \phi(q,p) = \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\partial_{q^\mu}\right)\phi(q,p), \\
\hat{Q}^\mu \phi(q,p) &= q^\mu * \phi(q,p) = \left(q^\mu + \frac{i\hbar}{2}\partial_{p_\mu}\right)\phi(q,p),
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

obtiveram equações relativísticas; em particular determinaram a equação de Dirac no espaço de fase como

$$
\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\right)\phi(q,p) = m\phi(q,p), \tag{7.6}
$$

sendo, como no caso não relativístico, a interpretação física obtida via função de Wigner, ou seja

$$
f_w(q,p) = \phi(q,p) * \phi^\dagger(q,p). \tag{7.7}
$$

A equação (7.6) na presença de potenciais vetor e escalar torna-se

$$
\gamma^\mu \left[p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu} + V_\mu\left(q^\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)\right]\phi(q,p) = \left[m + V_s\left(q^\mu - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)\right]\phi(q,p), \tag{7.8}
$$

e obter sua solução é um dos problemas centrais dessa formulação relativística devido a presença da coordenada Q^μ ser um operador que envolve a derivada. Neste trabalho nós consideramos este problema para alguns tipos de potencial usando, pela primeira vez, o método supersimétrico aplicado à equação (7.8). Partindo então dessa equação utilizamos a fatoração, a condição de invariância na forma, construimos os Hamiltonianos parceiros, obtivemos o espectro de autovalores e o conjunto de autofunções para com elas obter, de forma inédita, as correspondentes funções de Wigner. Especificamente resolvemos e analisamos os casos livre e interagentes do Oscilador Harmônico de Dirac, de um potencial externo tipo $-\frac{A}{Q}$ e um potencial adicionado a um termo de massa que pode ser interpretado como uma massa efetiva dependende da posição.

Considerando que o método aqui desenvolvido é geral, o mesmo pode ser aplicado a outros potenciais em conjunto ou separados, o que como existe uma grande demanda para analisar tipos de potenciais de interesse em física de alta energia é esta uma das perspectivas. Neste contexto podem citar potenciais-modelo que explorem o confinamento quark [46] e os átomos exóticos [47], por exemplo.

Estender o presente desenvolvimento a outras equações relativísticas no espaço de fase, tais como Klein-Gordon e Weyl também constitui parte de projeto posterior.

Apêndice A

SOBRE A FATORAÇÃO DO HAMILTONIANO.

A.1 FATORAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NO ESPAÇO DE FASE.

A.1.1 Fatoração.

Neste apêndice nos baseamos em Rodrigues [16] e generalizamos o método proposto. Neste sentido consideramos a equação de Dirac incluindo potenciais de maneira a torná-la a mais geral possível no espaço de fase o que resulta na seguinte equação

$$\left\{(\rho_1 \otimes \sigma^j)\left[-i\frac{\partial}{\partial \eta_j} + \Gamma^l A^l_j(\eta)\right] + (\rho_3 \otimes 1)\left[m + V_s(\eta)\right] + (1 \otimes 1)V_r(\eta)\right\}\psi(\eta, p) = 0$$

O termo $\sigma^j p_j$, usando a notação de soma sobre índices repetidos, pode ser reescrito usando a propriedades que seguem das matrizes de Pauli

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) &= \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})^2 &= \vec{\eta}^2\end{aligned} \tag{A.1}$$

tomando um vetor $\vec{\eta}$ definido como o raio vetor no espaço de fase, temos assim

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}\cdot\vec{p} &= \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})}{\eta^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\\ &= \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})}{\eta^2}\left\{\vec{\eta}\cdot\vec{p} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{\eta}\times\vec{p})\right\}\\ &= (\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\left[\hat{\eta}\cdot(-i\nabla) + \frac{i\vec{\sigma}\cdot\vec{L}}{\eta}\right]\end{aligned}$$

Assumindo ainda que o vetor solução pode ser escrito como algo do tipo

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i\frac{G}{\eta}\varphi \\ \frac{F}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})\varphi\end{pmatrix}$$

onde F e G são funções a determinar, temos então que

$$\begin{aligned}\rho_1 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Psi &= \rho_1 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\left[-i\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{i\,(K-1)}{\eta}\right]\Psi = 0 \\ &= -\frac{i}{\eta}\rho_1 \otimes (\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\left[\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + 1 - K\right]\Psi = 0\end{aligned}$$

onde usamos que $K \equiv 1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{L}$, e sabendo que $(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\varphi = \varphi$ e $\hat{K}\varphi = -k\varphi$ [com $k = \pm\left(j - \frac{1}{2}\right)$], assim como $\left[(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta}), -i\frac{\partial}{\partial\eta}\right]_{(-)} = 0$ e $\left[(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta}), 1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{L}\right]_{(+)} = 0$ podemos reescrever este termo.

Propondo uma solução geral do tipo $\frac{f(\eta,p)}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})^n\varphi$, onde o F e G correspondem a funções do tipo $f(\eta,p)$, e a presença ou não do termo $(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})$ é dada en função de atribuir valores diferentes para um expoente n em $(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})^n$.

temos

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(\frac{f(\eta,p)}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})^n\varphi\right) &= -\frac{i}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\left[\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + 1 - K\right]\left(\frac{f(\eta,p)}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{r})^n\varphi\right) \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(\frac{f(\eta,p)}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})^n\varphi\right) &= -\frac{i}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\left[\frac{\partial f}{\partial\eta} - \frac{fK}{\eta}\right](\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})^n\varphi\end{aligned}$$

que se restrige a duas possibilidades

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(\frac{f(\eta,p)}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\varphi\right) &= -\frac{i}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\left[\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{fK}{\eta}\right](\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\varphi \\ &= -\frac{i}{\eta}\left[\frac{\partial f}{\partial\eta} - \frac{kf}{\eta}\right]\phi \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(\frac{f(\eta,p)}{\eta}\varphi\right) &= -\frac{i}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\left[\frac{\partial f}{\partial\eta} - \frac{fK}{\eta}\right]\varphi \\ &= -\frac{i}{\eta}\left[\frac{\partial f}{\partial\eta} + \frac{kf}{\eta}\right](\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\varphi \\ &= -\frac{i}{\eta}\left[\frac{\partial f}{\partial\eta} + \frac{kf}{\eta}\right]\varphi\end{aligned}$$

Temos assim o seguinte sistemas de equações em função do vetor Ψ.

$$\sigma^j\left(-i\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)\psi_a - \left[E + m + V_s(\eta) - V_r(\eta)\right]\psi_b + \sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\eta)\psi_A + \sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j(\eta)\psi_B = 0$$
$$\sigma^j\left(-i\frac{\partial}{\partial\eta_j}\right)\psi_b - \left[E - m - V_s(\eta) - V_r(\eta)\right]\psi_a + \sigma^j\Gamma^l_{21}A^l_j(\eta)\psi_A + \sigma^j\Gamma^l_{22}A^l_j(\eta)\psi_B = 0$$

e assim temos que

$$\left\{\left[\frac{1}{\eta}\left[\frac{\partial G}{\partial\eta} + \frac{kG}{\eta}\right](\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta}) - \left[E + m + V_s(\eta) - V_r(\eta) - \sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]\frac{F}{\eta}\right](\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta}) + i\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j\frac{G}{\eta}\right\}\varphi = 0$$
$$\left\{-\frac{i}{\eta}\left[\frac{\partial F}{\partial\eta} - \frac{kF}{\eta}\right] - i\left[E - m - V_s(\eta) - V_r(\eta) - \sigma^j\Gamma^l_{21}A^l_j\right]\frac{G}{\eta} + \sigma^j\Gamma^l_{22}A^l_j\frac{F}{\eta}(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right\}\varphi = 0$$

simplificando temos

$$\left\{\left[\frac{\partial G}{\partial \eta}+\frac{kG}{\eta}-i\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_jG(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right]-\left[E+m+V_s-V_r+\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]F\right\}\varphi=0$$
$$\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial \eta}-\frac{kF}{\eta}+i\sigma^j\Gamma^l_{22}A^l_jF(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})\right]+\left[E-m-V_s-V_r-\sigma^j\Gamma^l_{21}A^l_j\right]G\right\}\varphi=0$$

Tomando o vetor

$$\Phi = \begin{pmatrix} G\varphi \\ F\varphi \end{pmatrix}$$

e assumindo que para qualquer uma das matrizes da álgebra das matrizes Γ^l, temos que $\Gamma^l_{11}=\nu\Gamma^l_{22}$ e temos $\Gamma^l_{12}=\beta\Gamma^l_{21}$, onde $\nu,\beta\equiv\pm1$, e com isto ficamos com a seguinte equação

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{i\,(1+\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})\right]+\rho_3\left[\frac{k}{\eta}+\frac{i\,(1-\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})\right]+\right.$$
$$\left.-i\rho_2\left[E-V_r+\frac{1-\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]-\rho_1\left[m+V_s+\frac{1+\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]\right\}\Phi=0$$

Adotando

$$\begin{aligned}\vec{\Lambda}\cdot\vec{\rho}= & -\rho_1\left[V_s(\eta)+\frac{1+\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]+i\rho_2\left[V_r(\eta)-\frac{1-\beta}{2}\sigma^j\Gamma^l_{12}A^l_j\right]+\\ & +\rho_3\left[\frac{k}{\eta}+\frac{i\,(1-\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})\right]\end{aligned} \tag{A.2}$$

$\lambda_0\equiv\frac{i(1+\nu)}{2}\sigma^j\Gamma^l_{11}A^l_j(\vec{\sigma}\cdot\vec{\eta})$ e $\vec{W}\cdot\vec{\rho}=m\rho_1+iE\rho_2+0\rho_3$, a equação de Dirac pode ser reescrita desta maneira

$$\left[\frac{d}{d\eta}+\lambda_0+\vec{\Lambda}\cdot\vec{\rho}-\vec{W}\cdot\vec{\rho}\right]\hat{\Phi}=0 \tag{A.3}$$

Aplicando uma transformação de Similaridade tal que $S^{-1}\Lambda S=\lambda\rho_3$, onde $\lambda^2=\Lambda_3+\Lambda_+\Lambda_-$ onde definimos $\Lambda_+\equiv\Lambda_1+i\Lambda_2$ e $\Lambda_-\equiv\Lambda_1-i\Lambda_2$, a equação fica

$$\left[\frac{d}{d\eta}+\lambda_0+\lambda\rho_3-\vec{W}'\cdot\vec{\rho}\right]\hat{\Phi}=0 \tag{A.4}$$

faremos isto na sequência.

A.2 TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE NO CASO GERAL.

Propondo uma expressão geral para uma transformação de similaridade com quatro constantes arbitrárias, e uma inversa definida em termos de quatro constantes a determinar, aplicamos a definição de inversas, ou seja

$$S \equiv \begin{pmatrix} c & da \\ cb & d \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

$$\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & da \\ cb & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

$$d\,(N + Ma) = 0 \implies N = -Ma \tag{A.7}$$

$$c\,(P + Qb) = 0 \implies P = -Qb \tag{A.8}$$

$$cM\,(1 - ab) = 1 \quad ; \quad dQ\,(1 - ab) = 1 \tag{A.9}$$

$$M \equiv d \quad ; \quad Q \equiv c \tag{A.10}$$

$$S^{-1} \equiv \begin{pmatrix} d & -da \\ -cb & c \end{pmatrix} \quad ; \quad cd\,(1 - ab) = 1 \tag{A.11}$$

e obtemos uma expressão para a matriz de transformação e sua inversa bem como relações entre as constantes.

A.2.1 Transformando ρ_3 no caso geral.

Usando estas expressões temos que a trasformação da matriz de Pauli ρ_3 é dada por

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} d & -da \\ -cb & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & da \\ cb & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d & da \\ -cb & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & da \\ cb & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cd\,(1+ab) & 2ad^2 \\ -2bc^2 & -cd\,(1+ab) \end{pmatrix} \\
&= cd\,(1+ab)\,\rho_3 + 2\begin{pmatrix} 0 & ad^2 \\ -bc^2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A.2.2 Transformando $(\rho_1)_{N=1,M=1}$ e $(\rho_2)_{N=-i,M=-1}$ no caso geral.

Fazendo o mesmo com as outras matrizes de Pauli temos definidas como a matriz ρ_1 para os valores de $N = 1$ e $M = 1$, e a matriz ρ_2 quando $N = -i$ e $M = -1$, temos então

$$\begin{aligned}
N\begin{pmatrix} d & -da \\ -cb & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ M & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & da \\ cb & d \end{pmatrix} &= N\begin{pmatrix} -adM & d \\ cM & -cb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & da \\ cb & d \end{pmatrix} \\
&= N\begin{pmatrix} cd\,(b - aM) & d^2\,(1 - a^2M) \\ c^2\,(M - b^2) & -cd\,(b - aM) \end{pmatrix} \\
&= Ncd\,(b - aM)\,\rho_3 + N\begin{pmatrix} 0 & d^2\,(1 - a^2M) \\ c^2\,(M - b^2) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A.2.3 Transformando $\vec{\Lambda} \cdot \vec{\rho}$ no caso geral.

Por fim a transfomação do termo $\vec{\Lambda} \cdot \vec{\rho}$ usando todos os resultados anteriores é dado por

$$\begin{aligned}
& S^{-1}\left(\vec{\Lambda}\cdot\vec{\rho}\right)S = cd\left[\Lambda_3\left(1+ab\right)+\Lambda_1\left(b-a\right)-i\Lambda_2\left(b+a\right)\right]\rho_3 + \\
+ & \begin{pmatrix} 0 & 2ad^2\Lambda_3+\Lambda_1 d^2\left(1-a^2\right)-i\Lambda_2 d^2\left(1+a^2\right) \\ -2bc^2\Lambda_3+\Lambda_1 c^2\left(1-b^2\right)+i\Lambda_2 c^2\left(1+b^2\right) & 0 \end{pmatrix} = \\
= & \frac{\Lambda_3\left(1+ab\right)+b\Lambda_- - a\Lambda_+}{1-ab}\rho_3 + \begin{pmatrix} 0 & d^2\left[2a\Lambda_3+\Lambda_- - \Lambda_+ a^2\right] \\ c^2\left[-2b\Lambda_3+\Lambda_+ - \Lambda_- b^2\right] & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A.2.4 Exigindo que o segundo termo da expressão seja nulo.

Como a transformação que estamos usando é totalmente arbitrária podemos aplicar algumas restrições e adotar uma transformação conveniente; desta maneira, de forma a eliminar o último termo do da expressão anterior exigimos que as expressões que nele figuram sejam nulos e determinamos a partir disto os valores das constantes a e b, como segue abaixo; em a temos

$$a^2 - \frac{2\Lambda_3}{\Lambda_+}a - \frac{\Lambda_-}{\Lambda_+} \equiv 0 \tag{A.12}$$

$$a = \frac{1}{\Lambda_+}\left(+\Lambda_3 \pm \sqrt{\Lambda_3^2+\Lambda_-\Lambda_+}\right) = \frac{\alpha}{\Lambda_+}\left(\lambda+\alpha\Lambda_3\right) = \frac{1}{\Lambda_+}\left(\Lambda_3+\alpha\lambda\right); \tag{A.13}$$

em b temos

$$b^2 + \frac{2\Lambda_3}{\Lambda_-}b - \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} \equiv 0 \tag{A.14}$$

$$b = \frac{1}{\Lambda_-}\left(-\Lambda_3 \pm \sqrt{\Lambda_3^2+\Lambda_-\Lambda_+}\right) = \frac{\beta}{\Lambda_-}\left(\lambda-\beta\Lambda_3\right) = -\frac{1}{\Lambda_-}\left(\Lambda_3-\beta\lambda\right) \tag{A.15}$$

onde usamos constantes $\alpha \equiv \pm 1$ e $\beta \equiv \pm 1$, de maneira que $\alpha^2 = \beta^2 = 1$.

Como consequência

$$\begin{aligned}
ab = \frac{(\Lambda_3 - \beta\lambda)(\Lambda_3 + \alpha\lambda)}{(\Lambda_3 - \lambda)(\Lambda_3 + \lambda)} \neq 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \neq \beta \\
b \quad &= \quad -\frac{1}{\Lambda_-}(\Lambda_3 + \alpha\lambda) \\
-\Lambda_- b = +\Lambda_+ a \quad &\equiv \quad -\frac{\Lambda_+\Lambda_-}{\gamma} = (\Lambda_3 + \alpha\lambda) \\
\gamma \quad &= \quad \frac{(\Lambda_3 + \lambda)(\Lambda_3 - \lambda)}{(\Lambda_3 + \alpha\lambda)} = (\Lambda_3 - \alpha\lambda) \\
\Lambda_- b - \Lambda_+ a \quad &= \quad -2(\Lambda_3 + \alpha\lambda) \\
a \quad &\equiv \quad -\frac{\Lambda_-}{\gamma} \\
b \quad &\equiv \quad +\frac{\Lambda_+}{\gamma} \\
ab \quad &\equiv \quad \frac{\Lambda_3^2 - \lambda^2}{\gamma^2} = \frac{\Lambda_3^2 - \lambda^2}{(\Lambda_3 - \alpha\lambda)^2} = \frac{(\Lambda_3 + \alpha\lambda)}{(\Lambda_3 - \alpha\lambda)} \\
1 \pm ab \quad &= \quad \frac{(\Lambda_3 - \alpha\lambda \pm \Lambda_3 \pm \alpha\lambda)}{(\Lambda_3 - \alpha\lambda)} \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

e aplicando os resultados obtidos temos que

$$\begin{aligned}
\vec{\Lambda} \cdot \left(S^{-1}\vec{\rho}S\right) = \frac{\Lambda_3 \frac{2\Lambda_3}{\Lambda_3 - \alpha\lambda} - 2(\Lambda_3 + \alpha\lambda)}{\frac{-2\alpha\lambda}{\Lambda_3 - \alpha\lambda}}\rho_3 = \frac{2\Lambda_3^2 - 2\Lambda_3^2 + 2\lambda^2}{-2\alpha\lambda}\rho_3 = -\frac{\lambda}{\alpha}\rho_3 \\
\Rightarrow (\alpha \equiv -1) \rightarrow S^{-1}\Lambda S = \lambda\rho_3 \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}$$

conforme desejávamos.

A.2.5 Transformando $\vec{W} \cdot \vec{\rho}$.

A transfomação do termo $\vec{W} \cdot \vec{\rho}$ usando a mesma transformação de similaridade, e lembrando que $W_3 = 0$ nos leva a novos termos W' transformados.

$$\vec{W}' \cdot \vec{\rho} \quad = \quad \frac{(W_3(1 + ab) + bW_- - aW_+)\rho_3}{1 - ab} + \begin{pmatrix} 0 & d^2\left[2aW_3 + W_- - W_+a^2\right] \\ -c^2\left[2bW_3 + W_+ - W_-b^2\right] & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A.18)}$$

$$
\begin{aligned}
W_3' &= \frac{2W_3\Lambda_3 + \Lambda_+ W_- + \Lambda_- W_+}{2\lambda} = \frac{\Lambda_+ W_- + \Lambda_- W_+}{2\lambda} \\
W_+' &= +d^2\left[2aW_3 + W_- - W_+ a^2\right] = +d^2\left[W_- - \frac{W_+\Lambda_-^2}{\lambda+\Lambda_3}\right] \\
W_-' &= -c^2\left[2bW_3 + W_+ - W_- b^2\right] = -c^2\left[W_+ - \frac{W_-\Lambda_+^2}{\lambda+\Lambda_3}\right] \\
W_+'W_-' &= -\left(\frac{\lambda+\Lambda_3}{2\lambda}\right)^2\left[2aW_3 + W_- - W_+ a^2\right]\left[2bW_3 + W_+ - W_- b^2\right] \\
&= -\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2\left\{W_- W_+\left[(\lambda+\Lambda_3)^2 + \left(\lambda^2-\Lambda_3^2\right)^2\right] - W_+^2\Lambda_-^2 - W_-^2\Lambda_+^2\right\} \\
&= -\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 W_- W_+\left[(\lambda+\Lambda_3)^2 + \left(\lambda^2-\Lambda_3^2\right)^2 + 2\lambda^2 - 2\Lambda_3^2\right] + W_3'^2 \\
-W_+'W_-' &= \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2\left\{\left[M^2-E^2\right]\left[(\lambda+\Lambda_3)^2 + \left(\lambda^2-\Lambda_3^2\right)^2 + 2\lambda^2 - 2\Lambda_3^2\right] - 2\left[M\Lambda_1 + iE\Lambda_2\right]^2\right\}
\end{aligned}
$$

e a equação de Dirac fica reescrita por meio da definição dos termos como esta dada a seguir em função dos espinores F e G

$$
\begin{array}{ll}
A^+ \equiv +\left(\frac{d}{d\eta} + \lambda_0\right) + \lambda - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda} & A^- \equiv -\left(\frac{d}{d\eta} + \lambda_0\right) + \lambda - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\Lambda}}{\lambda} \\
A^+ G = +\hat{W}_- F & A^- F = -\hat{W}_+ G
\end{array}
\tag{A.19}
$$

com os quais são construidos os Hamiltonianos parceiros abaixo, que possuem o mesmo conjunto de autovalores e autovetores exceto pelos extremos (máximo ou mínimo).

$$
\begin{array}{ll}
A^- A^+ G = -\hat{W}_-\hat{W}_+ G; & A^+ A^- F = -\hat{W}_-\hat{W}_+ F \\
H^+ G = E^+ G; & H^- F = E^- F
\end{array}
\tag{A.20}
$$

Apêndice

B

FUNÇÔES DE WIGNER.

Neste apêndice apresentamos a resolução dos sistemas físicos em que aplicamos o método por nós desenvolvido; sua importância é evidente e a opção de expor os resultados no Apêndice visa evitar o acúmulo de cálculos específicos no corpo da Tese.

B.1 CONJUNTO DE AUTOVETORES DOS ESTADOS FUNDAMENTAIS.

Adotando os estados fundamentais dos Hamiltonianos $\Phi_0^{-\alpha,n} = e^{-\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta}$ e os operadores $B_n^+(a) = A_n^+(a)e^{-\frac{\partial}{\partial a}}$ e $B_n^-(a) = e^{+\frac{\partial}{\partial a}}A_n^-(a)$, onde

$$A^+ \equiv +\frac{d}{d\eta} + \left(\frac{(a_0+n)}{\eta} - \frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right) \quad A^- \equiv -\frac{d}{d\eta} + \left(\frac{(a_n+n)}{\eta} - \frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right) \tag{B.1}$$

temos que o conjunto de autovetores será dado por $\phi_0^{(n)}(\eta,p) = B_n^+(a)\phi_0^{(0)}$

$$
\begin{aligned}
\phi_0^{(n)} &= e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} \\
\phi_1^{(n)} &= \left\{\alpha\frac{d}{d\eta}+\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)\right\} e^{-\frac{\partial}{\partial a}} e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n+1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n+1)}\right)d\eta} \\
&= \left\{\alpha\frac{d}{d\eta}+\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)\right\} e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} \\
&= 2\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right) e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} \\
\phi_2^{(n-1)}(r,p) &= \left\{\alpha\frac{d}{d\eta}+\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right)\right\} e^{-\frac{\partial}{\partial a}} \times \\
&\times\ 2\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right) e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} \\
&= \left\{\alpha\frac{d}{d\eta}+\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right)\right\} \times \\
&\times\ 2\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right) e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right)d\eta} \\
&= \left\{2\alpha\frac{d}{d\eta}\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right)+2\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right)\right\} \times \\
&\times\ 2\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right) e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n-1)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n-1)}\right)d\eta} \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}
$$

e daí seguem os outros estados $\phi_k^{(n)}(\eta,p)$ a menos de uma constante de normalização por meio da seguinte relação de recursividade definida em termos de uma função $f^{(n)}(\eta)$ a determinar.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \left\{\alpha\frac{d}{dr}+\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)\right\}^n e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} \equiv \\
&\equiv\ f^{(n)}(\eta)e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

e como consequência

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(\eta)e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} = \\ = & \left\{\alpha\frac{d}{d\eta}+\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)\right\}\left(f^{(n-1)}(\eta)e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta}\right) = \\ = & \left\{2\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)f^{(n-1)}(\eta)+\alpha\frac{df^{(n-1)}}{d\eta}\right\}e^{+\alpha\int\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)d\eta} \end{aligned} \quad (B.4)$$

e assim

$$\begin{aligned} f^{(0)}(\eta) &= 1 \\ f^{(1)}(\eta) &= 2\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(\eta) &= \left[2\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)\right]f^{(n-1)}(\eta)+\alpha\frac{df^{(n-1)}(\eta)}{d\eta} \end{aligned} \quad (B.5)$$

Propondo uma solução polinomial do tipo $f^{(n)}(\eta) = \sum A_t^n \eta^t$ com $A_t^0 \equiv \delta_{t,0}$ satisfazendo ao caso $f^{(0)}(\eta) = 1$, e assumindo que o termo $2\left(\frac{(a_0+n)}{\eta}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{\Lambda})\eta}{(a_0+n)}\right)$ é do tipo $F_n\eta^{-y}+G_n^{(0)}+G_n^{(x)}\eta^{+x}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum A_t^n\eta^t &= \left[F_t\eta^{-y}+G_n^{(0)}+G_t^{(x)}\eta^{+x}\right]\sum A_t^{n-1}\eta^t+\alpha\frac{d}{d\eta}\sum A_t^{n-1}\eta^t \\ A_t^n &= F_nA_{t+y}^{n-1}+G_n^{(0)}A_t^{n-1}+G_n^{(x)}A_{t-x}^{n-1}+\alpha\,(t+1)\,A_{t+1}^{n-1} \end{aligned} \quad (B.6)$$

onde para os sistemas que nos interessam tem-se

	Livre	$-\frac{A}{Q}$	*OHD*
F_n	$2\,(k_0+n)$	$2\,(a_0+n)$	$2\,(k_0+n)$
$G_n^{(0)}$		$2\left(\frac{mA_1-EA_2}{a_0+n}\right)$	
$G_n^{(x)}$			$2m\omega_0^2\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})$

Com $y=1$ temos todos os casos em estudo, e A_t^n fica

$$A_t^n = [F_n+\alpha\,(t+1)]\,A_{t+1}^{n-1}+G_n^{(0)}A_t^{n-1}+G_n^{(x)}A_{t-x}^{n-1} \quad (B.7)$$

com o qual construimos a expressão geral de $f^{(n)}(\eta)$, assumindo que $\sum_f n_f = n$, $\sum_f q_f =$

q e $\sum_f s_f = s$, como segue

$$f^{(n)}(\eta) = \sum_t A_t^n \eta^t = \sum_{s=0}^{n} \sum_{q=0}^{s} \sum_{c=1}^{arranjos} \left\{ \prod_{d_1=o_c}^{n_1-s_1} G_{n-d_1+1}^{(0)} \prod_{l_1=n_1-s_1+1}^{s_1-q_1} G_{n-l_1+1}^{(x)} \times \right.$$
$$\times \prod_{j_1=s_1-q_1+1}^{q_1} [F_{n-j+1} + \alpha\,(t + j - (s_1 - q_1)x)] \ldots \prod_{d=o}^{n_f-s_f} G_{n-d+1}^{(0)} \prod_{l=n_1-s_f+1}^{s_f-q_f} G_{n-l+1}^{(x)} \times$$
$$\times \left. \prod_{j_f=s_f-q_f+1}^{q} [F_{n-j+1} + \alpha\,(t + j - (s_f - q_f)x)] \right\}_{(c)} \eta^{x(s-q)-q} \qquad \text{(B.8)}$$

onde os arranjos dizem respeito à ordem em que as funções aparecem na expressão; teríamos, por exemplo, para $n = 3$ arranjos como $[G_2^{(0)} G_1^{(0)} \delta_{0,t}]$, $[G_2^{(x)} G_1^{(x)} \delta_{0,t-2x}]$, $[G_2^{(0)} G_1^{(x)} \delta_{0,t-x}]$, $[G_2^{(x)} G_1^{(0)} \delta_{0,t-x}]$ entre outros arranjos. Cada escolha dos termos e cada ordem em que os termos aparecem configura uma arranjo diferente, e todos eles são somados na expressão.

Definindo

$$H_{q,s}^{(n)} \equiv \sum_{c=1}^{arranjos} \left\{ \prod_{d_1=o_c}^{n_1-s_1} G_{n-d_1+1}^{(0)} \prod_{l_1=n_1-s_1+1}^{s_1-q_1} G_{n-l_1+1}^{(x)} \times \right.$$
$$\times \prod_{j_1=s_1-q_1+1}^{q_1} [F_{n-j+1} + \alpha\,(t + j - (s_1 - q_1)x)] \ldots \prod_{d=o}^{n_f-s_f} G_{n-d+1}^{(0)} \prod_{l=n_1-o_f+1}^{o_f-q_f} G_{n-l+1}^{(x)} \times$$
$$\times \left. \prod_{j_f=s_f-q_f+1}^{q} [F_{n-j+1} + \alpha\,(t + j - (s_f - q_f)x)] \right\}_{(c)} \qquad \text{(B.9)}$$

temos

$$f^{(n)}(\eta) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{q=0}^{s} H_{q,s}^{(n)} \eta^{x(s-q)-q} \qquad \text{(B.10)}$$

Segue que a solução no espaço de fase para cada sistema físico é dada por

$$\begin{aligned}
\phi_0^{(n)}(\eta, p) &\equiv f^{(n)}(\eta) e^{-\alpha \int \left(\frac{F_n}{\eta} + G_n^{(0)} + G_n^{(x)} \eta^x \right) d\eta} C(p) \\
&= f^{(n)}(\eta) \eta^{-\alpha F_n} e^{-\alpha \left(G_n^{(0)} \eta + G_n^{(x)} \frac{\eta^{x+1}}{x+1} \right)} C(p) \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{q=0}^{s} H_{q,s}^{(n)} \eta^{x(s-q)-q-\alpha F_n} e^{-\alpha \left(G_n^{(0)} \eta + G_n^{(x)} \frac{\eta^{x+1}}{x+1} \right)} C(p) \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

onde toda a dependência dos momenta fica numa função $C(p)$. Assumiremos $C(p) \equiv \frac{e^{i(\vec{p}\cdot\vec{\eta})}}{\sqrt{2\pi}}$ a partir daqui.

Assim, temos as soluções gerais de cada sistema que nos interessa as quais apresentaremos a seguir.

B.1.1 Partícula Livre.

Nesta seção e nas seções B.1.2 e B.1.3, para simplificar a notação notaremos $H_{0,0}^{(n)}$ por $H_0^{(n)}$ e $H_{q,0}^{(n)}$ por $H_q^{(n)}$. Assim para a partícula livre temos que o conjunto de vetoresé dado por

$$H_0^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} [k_0 + n - j + 1 + \alpha (j - n)] \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned} \phi_0^{(n)}(\eta, p) &= \sqrt{\tilde{N}_n} H_0^{(n)} \eta^{-n(1+\alpha)-\alpha k_0} C(p) \\ &= \sqrt{\tilde{N}_n} \prod_{j=1}^{n} [k_0 + n - j + 1 + \alpha (j - n)] \, \eta^{-n(1+\alpha)-\alpha k_0} C(p) \end{aligned} \tag{B.13}$$

B.1.2 Sob um potencial do tipo $-\frac{A}{Q}$ externo.

Para esse caso temos que o conjunto de vetores é definido por uma redução de dois índices de soma a um só por só figurarem só duas das três expressões do caso geral, dado por

$$\begin{aligned} H_q^{(n)} &= \sum_{c=1}^{arranjos} \Bigg\{ \prod_{d_1=o_1}^{n_1-q_1} \left(\frac{2(mA_1 + iEA_2)}{a_0 + n - d_1 + 1} \right) \prod_{j=n_1-q_1+1}^{q_1} [a_0 + n - j_1 + 1 + \alpha (j_1 - q_1)] \ldots \\ &\ldots \prod_{d_f=o_f}^{n_f-q_f} \left(\frac{2(mA_1 + iEA_2)}{a_0 + n - d_f + 1} \right) \prod_{j=n_f-q_f+1}^{q_f} [a_0 + n - j_f + 1 + \alpha (j_f - q_f)] \Bigg\}_{(c)} \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\phi_0^{(n)}(\eta, p) = \sqrt{N^{(n)}} \sum_{q=0}^{n} H_q^{(n)} \eta^{-(q+\alpha a_n)} e^{-\alpha \left(\frac{(mA_1+iEA_2)}{a_0+n} \right) \eta} C(p) \tag{B.15}$$

B.1.3 Oscilador Harmônico de Dirac.

E para o Oscilador Harmônico de Dirac temos que o conjunto de vetores é definido por uma redução de dois índices de soma a um só por só figurarem só duas das três expressões do caso geral, dado por

$$\begin{aligned} H_q^{(n)} &= \sum_{c=1}^{arranjos} \Bigg\{ \left[2m\omega_0^2 \left(\vec{\sigma} \cdot \hat{\eta} \right) \right]^{n_1-q_1} \prod_{j_1=n_1-q_1+1}^{q_1} [k_0 + n - j_1 + 1 + \alpha (t + j_1 - n_1 + q_1)] \ldots \\ &\ldots \left[2m\omega_0^2 \left(\vec{\sigma} \cdot \hat{\eta} \right) \right]^{n_f-q_f} \prod_{j_f=n_f-q_f+1}^{a_b} [k_0 + n - j_f + 1 + \alpha (t + j_f - n_f + q_f)] \Bigg\}_{(c)} \end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\phi_0^{(n)}(\eta, p) = \sqrt{N^n} \sum_{q=0}^{n} H_q^{(n)} \eta^{n-2q-\alpha k_0} e^{-\alpha m \omega_0^2 (\vec{\sigma} \cdot \hat{\eta}) \frac{\eta^2}{2}} C(p) \tag{B.17}$$

B.2 FUNÇÕES DE WIGNER.

Nesta seção vamos começar desenvolvendo o produto das vetores de estado não normalizados obtidos anteriormente e que nos serão úteis para calcular as funções de Wigner $f_w^{(n)}(r,p)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\phi_0^{(n)*}(\eta',p')\phi_0^{(n)}(\eta'',p'') &= \left(f^{(n)}(\eta')\right)^* \left(f^{(n)}(\eta'')\right) \left(\eta'^{\alpha F_n} e^{\alpha G_n \frac{\eta'^{x+1}}{x+1}} C(p')\right)^* \left(\eta''^{\alpha F_n} e^{\alpha G_n \frac{\eta''^{x+1}}{x+1}} C(p'')\right) \\
\left(f^{(n)}(\eta)\right)^* \left(f^{(n)}(\eta)\right) &= \sum_{s=0}^{n}\sum_{q=0}^{s}\sum_{s'=0}^{n}\sum_{q'=0}^{s'} H_{q,s}^{(n)} H_{q',s'}^{(n)} \eta^{x(s+s')-(x+1)(q+q')} \\
\phi_0^{(n)*}(\eta',p')\phi_0^{(n)}(\eta'',p'') &= \sum_{s=0}^{n}\sum_{q=0}^{s}\sum_{s'=0}^{n}\sum_{q'=0}^{s'} H_{q,s}^{(n)} H_{q',s'}^{(n)} \eta'^{xs-(x+1)q-\alpha F_n^*} \eta''^{xs'-(x+1)q'-\alpha F_n} \times \\
&\times \; e^{-\alpha\left(G_n^* \frac{\eta'^{x+1}}{x+1} + G_n \frac{\eta''^{x+1}}{x+1}\right)} C^*(p')C(p'') \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}$$

E considerando $C(p) \equiv e^{i\frac{pb_0}{\hbar}}$, temos então

$$\begin{aligned}
\phi_0^{(n)*}(r',p')\phi_0^{(n)}(r'',p'') &= \sum_{s=0}^{n}\sum_{q=0}^{s}\sum_{s'=0}^{n}\sum_{q'=0}^{s'} H_{q,s}^{(n)} H_{q',s'}^{(n)} \times \\
&\times \; (2r'-b_0)^{xs-(x+1)q-\alpha F_n^*} (2r''-b_0)^{xs'-(x+1)q'-\alpha F_n} \times \\
&\times \; e^{-\alpha\left(G_n^* \frac{(2r'-b_0)^{x+1}}{x+1} + G_n \frac{(2r''-b_0)^{x+1}}{x+1}\right)} e^{\frac{ib_0(p''-p')}{\hbar}} \qquad \text{(B.19)}
\end{aligned}$$

Com esses resusltados podemos obter as funções de Wigner usando a propriedade 6 do produto estrela indicada na seção 2.2.3 do Capítulo 2, ou seja, o que para uma função geral $\psi(r,p)$ nos dá

$$\begin{aligned}
f_w^{(n)}(r,p) &= \psi^*(r,p) * \psi(r,p) = \\
&= \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dr'dr''dp'dp''\psi^*(r',p')\psi(r'',p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(r'-r'')+p'(r''-r)+p''(r-r')]}
\end{aligned} \qquad \text{(B.20)}$$

Considerando as definições de $a \equiv xs-(x+1)q-\alpha F_n^*$ e $l \equiv xs'-(x+1)q'-\alpha F_n$ é possível escrever as funções de Wigner em termos de integrais do tipo $g_0^{al}(r,p)$ dadas abaixo como uma soma $f_w^{(n)}(r,p) = \sum_{al} Q_{al}^{(n)} \cdot g_0^{(al)}(r,p)$ onde $Q_{al}^{(n)}$ são constantes

$$\begin{aligned}
g_0^{al}(r,p) &= \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dr'dp'h(r')h(r'') \left[(2r'-b_0)^a\, e^{\Omega^*(2r'-b_0)^{x+1}}\right] dr''dp'' \times \\
&\times \left[(2r''-b_0)^l\, e^{\Omega(2r''-b_0)^{x+1}}\right] e^{-\frac{2i}{\hbar}\{p(r'-r'')+p'(r''-r-r'+b_0)+p''(r-r'+r''-b_0)\}} \\
g_0^{al}(r,p) &= \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dr'h(r') \left[(2r'-b_0)^a\, e^{\Omega^*(2r'-b_0)^{x+1}}\right] \frac{\pi\hbar \sin\left[\pi\,(r''-r-r'+b_0)\right]}{\pi\,(r''-r-r'+b_0)} \times \\
&\times \int dr''h(r'') \left[(2r''-b_0)^l\, e^{\Omega(2r''-b_0)^{x+1}}\right] \frac{\pi\hbar \sin\left[\pi\,(r-r'+r''-b_0)\right]}{\pi\,(r-r'+r''-b_0)} e^{-\frac{2i}{\hbar}\{p(r'-r'')\}} \\
g_0^{al}(r,p) &= \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right) e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \int dr'h(r') \left[(2r'-b_0)^a\, e^{\Omega^*(2r'-b_0)^{x+1}}\right] \times \\
&\times \left[(2f(r')-b_0)^l\, e^{\Omega(2f(r')-b_0)^{x+1}}\right] \frac{\pi\hbar \sin\left[\pi\,(2b_0-2r)\right]}{(2b_0-2r)} \\
g_0^{(al)}(r,p) &= e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \int dr'h(r') \left[(2r'-b_0)^{a+l}\, e^{(\Omega^*+\Omega)(2r'-b_0)^{x+1}}\right]
\end{aligned} \tag{B.21}$$

onde os termos $h(r')$ dependem da dimensão D ao escolher coordenadas polares ($1D \rightarrow h(r') = 1; 2D \rightarrow h(r') = 2\pi; 3D \rightarrow h(r') = 4\pi$) e tomamos $u \equiv 2r - b_0 \Rightarrow r = \frac{u+b_0}{2} \Rightarrow dr = \frac{du}{2}$, para fazermos a substituição de variável, obtendo

$$\begin{aligned}
g_0^{(al)}(r,p) &= e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \int dr'h_0 r'^z \left[(2r'-b_0)^{a+l}\, e^{(\Omega^*+\Omega)(2r'-b_0)^{x+1}}\right] \\
g_0^{(al)}(r,p) &= h_0 e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \left(\frac{1}{2}\right)^{z+1} \int du'\,(u'+b_0)^z \left[u'^{a+l} e^{(\Omega^*+\Omega)u'^{x+1}}\right] \\
g_0^{(al)}(q,p) &= h_0 e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \left(\frac{1}{2}\right)^{z+1} \sum_{j=0}^{z} \begin{pmatrix} z \\ j \end{pmatrix} b_0^{z-j} \int_{-b_0}^{2r-b_0} du' \left[u'^{a+l+j} e^{(\Omega^*+\Omega)u'^{x+1}}\right]
\end{aligned}$$

Reunindo os resultados acima as funções de Wigner podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
f_w^{(n)}(r,p) &= \sum_{q,s=0}^{n} H_{q,s}^{(n)} h_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{z+1} \sum_{j=0}^{z} \begin{pmatrix} z \\ j \end{pmatrix} b_0^{z-j} e^{+\frac{2i}{\hbar}[p(r-b_0)]} \int_{-b_0}^{2r-b_0} du' \left[u'^{a+l+j} e^{(\Omega^*+\Omega)u'^{x+1}}\right] \\
&\equiv K(r) e^{\left[+\frac{2i}{\hbar}p(r-b_0)\right]}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

onde definimos de maneira auxiliar uma função exclusiva de r dada por $K(r)$ de maneira a facilitar o desenvolvimento dos resultados.

Por meio delas temos que a função densidade de probabilidade fica

$$
\begin{aligned}
\rho(r) &= \int_{-\pi}^{+\pi} f_w(r,p)dp = \int_{-\pi}^{+\pi} K(r)e^{+\frac{2i}{\hbar}[p(r-b_0)]}dp = \left[\frac{K(r)e^{+\frac{2i}{\hbar}[p(r-b_0)]}}{+\frac{2i}{\hbar}(r-b_0)}\right]_{-\pi}^{+\pi} \\
&= K(r)\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}\left[\pi\left(r-b_0\right)\right]\right)}{\frac{2}{\hbar}\left(r-b_0\right)}\right] \\
&= \sum_{q,s=0}^{n} H_{q,s}^{(n)} h_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{z+1} \sum_{j=0}^{z} \left(\begin{array}{c} z \\ j \end{array}\right) b_0^{z-j} \int_{-b_0}^{2r-b_0} du' \left[u'^{a+l+j} e^{2\left(\Omega u'^{x+1}\right)}\right] \left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}\left[\pi\left(r-b_0\right)\right]\right)}{\frac{2}{\hbar}\left(r-b_0\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{B.23}
$$

A constante de normalização é notada por $N^{(n)}$ e definida por

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv N^{(n)} \int_0^{\infty} \rho(r)dr = N^{(n)} \int_0^{\infty} \left[\frac{K(r)\sin\left(\frac{2}{\hbar}\pi(r-b_0)\right)}{\frac{2}{\hbar}(r-b_0)}\right] dr = N^{(n)} K(b_0) \\
\left(N^{(n)}\right)^{-1} &\equiv K(b_0) = \sum_{q,s=0}^{n} H_{q,s}^{(n)} h_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{z+1} \sum_{j=0}^{z} \left(\begin{array}{c} z \\ j \end{array}\right) b_0^{z-j} \int_{-b_0}^{+b_0} du' \left[u'^{a+l+j} e^{2\left(\Omega u'^{x+1}\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{B.24}
$$

Nas seções a seguir, B.2.1, B.2.2 e B.2.3, apresentaremos as funções de Wigner e as densidades de probabilidade por nós obtidas para os casos de interesse: a partícula de Dirac livre, a partícula de Dirac sujeita a um potencial do tipo $-\frac{A}{Q}$ e o oscilador harmônico de Dirac.

B.2.1 Partícula Livre.

No caso da *partícula de Dirac livre* temos

$$
\begin{aligned}
g_0^{(-n-\alpha k_n,-n-\alpha k_n)} &= \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \sum_{j=0}^{2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ j \end{array}\right) b_0^{2-j} \int_{-b_0}^{2r-b_0} du' u'^{j-2(n+\alpha k_n)} \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \sum_{j=0}^{2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ j \end{array}\right) b_0^{2-j} \left[\frac{(2r-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)} - (-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}}{j+1-2(n+\alpha k_n)}\right] \\
\left(N^{(n)}\right)^{-1} &\equiv \sum_{j=0}^{1} \left[\frac{2(b_0)^{3-2(n+\alpha k_n)}}{2j+1-2(n+\alpha k_n)}\right]
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

e como consequência a função de Wigner é dada por

$$
f_w^{(n)}(r,p) = \frac{e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \sum_{j=0}^{2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ j \end{array}\right) b_0^{2-j} \left[\frac{(2r-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)} - (-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}}{2(n+\alpha k_n)+j+1}\right]}{\sum_{j=0}^{1} \left[\frac{2(b_0)^{3-2(n+\alpha k_n)}}{2j+1-2(n+\alpha k_n)}\right]}
\tag{B.26}
$$

Então segue que a função densidade de probabilidade é

$$\rho(r) = \frac{\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\left[\frac{(2r-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}}{j+1-2(n+\alpha k_n)} - \frac{(-b_0)^{j+1-2(n+\alpha k_n)}}{j+1-2(n+\alpha k_n)}\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}[\pi(r-b_0)]\right)}{\frac{2}{\hbar}(r-b_0)}\right]}{\sum_{j=0}^{1}\left[\frac{2(b_0)^{3-2(n+\alpha k_n)}}{2j+1-2(n+\alpha k_n)}\right]} \tag{B.27}$$

B.2.2 Sob um potencial do tipo $-\frac{A}{Q}$ externo.

Neste caso, definindo $\Omega \equiv \frac{mA_1 - iEA_2}{a}$ temos

$$\begin{aligned} g_0^{-(q+2\alpha a_n),-(s+2\alpha a_n)} &= \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\int_{-b_0}^{2r-b_0} du'\left[u'^{j-(q+s+2\alpha a_n)}e^{2\Omega u'}\right] \\ N^{(n)} &\equiv \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\int_{-b_0}^{+b_0} du'\left[u'^{j-(q+s+2\alpha a_n)}e^{2\Omega u'}\right]} \end{aligned} \tag{B.28}$$

e sabendo que

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-b_0}^{2r-b_0} u^w e^{\Omega u} du &= \sum_{x=1}^{w}\frac{(-1)^{x-1}}{\Omega^x}\prod_{l=0}^{x-1}\left[(1-\delta_{l,0})\,w - l + 1\right]\left[u^{w-x+1}e^{\Omega u}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} + \\ &+ \frac{(-1)^x}{\Omega^x}\prod_{l=0}^{w-1}\left[(1-\delta_{l,0})\,w - l + 1\right]\left[\frac{e^{\Omega u}}{\Omega}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} \end{aligned} \tag{B.29}$$

temos como consequência a função de Wigner é dada por

$$\begin{aligned} f_w^{(n)}(r,p) &= N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\left\{\sum_{x=1}^{j-(q+s+2\alpha a_n)}\frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right. \\ &\prod_{l=0}^{x-1}\left[(1-\delta_{l,0})\left[j-(q+s+2\alpha a_n)\right] - l + 1\right]\left[u^{[j-(q+s+2\alpha a_n)]-x+1}e^{2\Omega u}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} + \\ &+ \left.\frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{j-(q+s+2\alpha a_n)-1}\left[(1-\delta_{l,0})\left[j-(q+s+2\alpha a_n)\right] - l + 1\right]\left[\frac{e^{2\Omega u}}{\Omega}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}\right\} \end{aligned} \tag{B.30}$$

sendo o correspondente densidade de probabilidade dada por

$$\rho(r) = N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix} b_0^{2-j}\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}\left[\pi\left(r-b_0\right)\right]\right)}{\frac{2}{\hbar}\left(r-b_0\right)}\right]\left\{\sum_{x=1}^{j-(q+s+2\alpha a_n)}\frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right.$$
$$\prod_{l=0}^{x-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[u^{[j-(q+s+2\alpha a_n)]-x+1}e^{2\Omega u}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}+$$
$$\left.+\frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{j-(q+s+2\alpha a_n)-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[j-\left(q+s+2\alpha a_n\right)\right]-l+1\right]\left[\frac{e^{2\Omega u}}{\Omega}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}\right\} \tag{B.31}$$

B.2.3 Oscilador Harmônico de Dirac.

No caso do *Oscilador Harmônico de Dirac*, com $\Omega=\frac{m\omega_0^2(\vec{\sigma}\cdot\hat{\eta})}{2}$, temos

$$g_0^{(al)}(q,p) = \left(\frac{\pi}{2}\right)e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}b_0^{2-j}\int_{-b_0}^{2r-b_0}du'\left[u'^{2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j}e^{2\left(\Omega u'^2\right)}\right]$$

$$\left(N^{(n)}\right)^{-1} \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n}H_{q,s}^{(n)}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}b_0^{2-j}\left\{\left(\sum_{x=1}^{n-(q+s)-\alpha k_n+\frac{j}{2}}\frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right.\right.$$
$$\prod_{l=0}^{x-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j\right]-2l+1\right]\left[u^{[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j]-2x+1}e^{\Omega u^2}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}+$$
$$\left.+\frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{v-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)\left[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j\right]-2l+1\right]\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right)\times$$
$$\left.\times\left(1-\delta_{2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j,0}\right)+\delta_{2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j,0}\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right\} \tag{B.32}$$

E usando que

$$\Rightarrow\int_{-b_0}^{2r-b_0}u^w e^{\Omega u^2}du = \left(1-\delta_{w,0}\right)\sum_{x=1}^{\frac{w}{2}}\frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{x-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)w-2l+1\right]\left[u^{w-2x+1}e^{\Omega u^2}\right]_{-b_0}^{2r-b_0}+$$
$$+\left\{\left(1-\delta_{w,0}\right)\frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{v-1}\left[\left(1-\delta_{l,0}\right)w-2l+1\right]+\delta_{w,0}\right\}\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}} \tag{B.33}$$

obtemos que a função de Wigner é

$$
\begin{aligned}
f_w^{(n)}(r,p) \quad = \quad & N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} e^{+\frac{2i}{\hbar}\{p(r-b_0)\}} \sum_{j=0}^{2}\left(\begin{array}{c}2\\ j\end{array}\right) b_0^{2-j}\left\{\left(\sum_{x=1}^{n-(q+s)-\alpha k_n+\frac{j}{2}} \frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right.\right. \\
\textstyle\prod_{l=0}^{x-1} \quad & [(1-\delta_{l,0})\,[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j]-2l+1]\left[u^{[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j]-2x+1} e^{\Omega u^2}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} + \\
+ \quad & \frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{v-1}[(1-\delta_{l,0})\,[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j]-2l+1]\left.\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right)\times \\
\times \quad & \left(1-\delta_{2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j,0}\right)+\delta_{2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j,0}\left.\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right\} \qquad \text{(B.34)}
\end{aligned}
$$

e que a correspondente função densidade de probabilidade é

$$
\begin{aligned}
\rho(r) \quad = \quad & N^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{q,s=0}^{n} S_{q,s}^{(n)} \sum_{j=0}^{2}\left(\begin{array}{c}2\\ j\end{array}\right) b_0^{2-j}\left[\frac{\sin\left(\frac{2}{\hbar}\left[\pi\left(r-b_0\right)\right]\right)}{\frac{2}{\hbar}\left(r-b_0\right)}\right]\left\{\sum_{x=1}^{n-(q+s)-\alpha k_n+\frac{j}{2}} \frac{(-1)^{x-1}}{(2\Omega)^x}\right. \\
\textstyle\prod_{l=0}^{x-1} \quad & [(1-\delta_{l,0})\,[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j]-2l+1]\left[u^{[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j]-2x+1} e^{\Omega u^2}\right]_{-b_0}^{2r-b_0} + \\
+ \quad & \frac{(-1)^x}{(2\Omega)^x}\prod_{l=0}^{v-1}[(1-\delta_{l,0})\,[2n-2(q+s)-2\alpha k_n+j]-2l+1]\left.\sqrt{\left[\frac{\pi e^{\Omega u^2}}{\Omega}\right]_{2b_0^2}^{2(2r-b_0)^2}}\right\} \qquad \text{(B.35)}
\end{aligned}
$$

REFERÊNCIAS

[1] Y. A. Gelffand and E. P. Likktman. *JETP Lett* ***13*** *323*, 1971.

[2] D. Volkov and V. Akulov. *Phys. Lett* ***46B*** *109*, 1973.

[3] J. Wess and B. Zumino. *Nucl. Phys* ***B70*** *39*, 1974.

[4] E. Witten. *Nucl. Phys.* ***B188*** *513*, 1981.

[5] F. Cooper and B. Freedman. *Ann. Phys.* ***146*** *262*, 1983.

[6] F. Cooper, A. Khare, R. Musto, and A. Wipf. *Ann. Phys.* ***187****, 1 - 28*, 1988.

[7] F. Cooper, J. N. Ginocchio, and A. Khare. *Phys. Rev.* ***D 36*** *2458*, 1987.

[8] J. W. Dubrowska, A. Khare, and U. P. Sukhatme. *J. Phys. A: Math. Gen.* ***21*** *L195 - L200*, 1988.

[9] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme. *Physics Reports.* ***251*** *267 - 385*, 1995.

[10] A. Lahiri, P. K. Roy, and B. Bagchi. *Int. J. Modern Phys.* ***A 5*** *1383*, 1990.

[11] R. Musto and A. Wipf. *Ann. Phys.* ***187*** *1*, 1983.

[12] Y. Nogami and F. M. Toyama. *Phys. Rev.* ***A47*** *1708*, 1993.

[13] X. Zou, L-Z. Yi, and Jia C-S. *Phys Lett* ***A 346*** *54*, 2005.

[14] R. L. Rodrigues, V. B. Bezerra, and A. N. Vaidya. *Phys Lett* ***A 287*** *45-49*, 2002.

[15] R. L. Rodrigues and A. N. Vaidya. *arXiv:hep-th/0308189v1*, 2003.

[16] R de L. Rodrigues and A. F. de Lima. *arXiv:math-ph/1301.6148v1*, 2013.

[17] R de Lima Rodrigues. *Supersimetria: Da Mecânica Clássica à Mecânica Quântica, in Anais da IV Escola do CBPF.* Rio de Janeiro, RJ, 2002.

[18] E. D. Filho and R. M. Ricotta. *arXiv hep-th/0111023v1*, 2001.

[19] E. D. Filho and R. M. Ricotta. *Tend. Math. Apl. Comput.* ***6*** *73*, 2005.

[20] E. Schroedinger. *Proc. Roy. Iresh. Acad.* ***A46*** *9*, 1940.

[21] L E. Gendenshtein. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* ***38****, 299-302*, 1983. (JETP Lett. **38** 356-359, 1983).

[22] S. Chaturvedi, U. Dutt, R. Gangopadhyaya, P. Panigrahi, C. Rasinariu, and L. Sukhatme. *Phys Lett* ***A 251*** *406*, 1999.

[23] R. P. Feynman. *Rev. Mod. Phys.* ***20*** *367*, 1948.

[24] E. Wigner. *Physical Review* ***40*** *749*, 1932.

[25] M. D. Oliveira, M. C. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna. *Ann. Phys.* ***312*** *492*, 2004.

[26] R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna. *Physica* ***A 388*** *3771*, 2009.

[27] M. B. Menezes, M. C. B. Fernandes, M. G. R. Martins, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna. *Ann Phys* ***389*** *111-135*, 2018.

[28] J. D. M. Vianna. *Rev. Bras de Ens. Fis* ***vol 40*** *n4 e 4206*, 2018.

[29] E. Schroedinger. *Collected Papers of Wave Mechanics.* AMS Chelsea Publishing London, 1928.

[30] W. Heisenberg. *The Physical Principles of the Quantum Theory.* University of Chicago/ Dover, Chicago, USA, 1950.

[31] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford University Press, New York, USA, 1947.

[32] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* New Jersey, 1955.

[33] W. A. Fedak and J. J. Prentis. *Am. J. Phys.* ***77*** *129*, 2004.

[34] J. E. Moyal. *Proc. Camb. Phil. Soc.* ***45*** *99*, 1949.

[35] H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics.* Dover, NY, 1950.

[36] J. D. M. Vianna. *Teoria de Grupos Aplicados a Física.* Brasilia DF, 2006.

[37] J. M. F. Bassalo and M. S. D. Cattani. *Teoria de Grupos.* São Paulo, SP, 2006.

[38] Herald J. W. Muller-Kiersten and A. Wiedemann. *Supersymmetry: an Introduction with Conceptual and Calculational Details.* World Scientific Publishing Co., Singapore, 1987.

[39] R. G. G. Amorim, M. C. B. Fernandes, A. R. Queiroz, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna. *Rev. Bras. Ens. Fis.* ***35*** *3604.*, 2013.

[40] Y. S. Kim and M. E. Noz. *Phase Space Picture and Quantum Mechanics: Group Theoretical Approach.* World Scientific Lecture, London, 1991.

[41] M. B. Menezes. *Mecânica Quântica Simplética Supesimétrica.* Tese de Doutoramento, Instituto de Física - UFBA, Salvador, BA, 2015.

[42] M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, M. G. R. Martins, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna. *Physica* ***A 389*** *3409-3419*, 2010.

[43] R de Lima Rodrigues and A. N. Vaidya. *The Relativistic Dirac-Morse Problem via SUSY QM.* in CBPF-Notas de Física 006/2003, Rio de Janeiro, RJ e Proceedings of the XXIII ENFPC (Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos), Águas de Lindóia, SP, 2003.

[44] Li. Quian and Lu. Shun. *Chem Phys Lett* ***336*** *118*, 2001.

[45] R. P. Martinez-y-Romero, H. N. Nunes-Yepez, and A. L. Salas-Brito. *Relativistic Quantum Mechanics of a Dirac Oscillator.* Eur. J. Phys. **16** 135, 1995.

[46] K. Wilson. *Phys. Rev.* ***D 10*** *2445*, 1974.

[47] Ricardo D'Elia Matheus. *Partículas Exóticas em Regras de Soma da QCD.* Tese de Doutoramento, Instituto de Física - USP, São Paulo, SP, 2006.