



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**Perturbações em um Modelo Cosmológico com
Interação no Setor Escuro**

Humberto de Almeida Borges

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Perturbações em um Modelo Cosmológico com
Interação no Setor Escuro**

Humberto de Almeida Borges

Orientador: Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva

Tese apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal da Bahia para a
obtenção do título de Doutorado em Física.

Salvador - 2010

Resumo

In this thesis we investigate a Friedmann cosmology with interaction in the dark sector, in which the vacuum term decays linearly with the Hubble parameter, with a concomitant matter production at late times. We show that, from a qualitative point of view, such a cosmology is in accordance with the standard, spatially flat Λ CDM model. We then present a perturbative analysis of the model, including perturbations in the vacuum term and entropic perturbations. The obtained matter power spectrum leads to a relative matter density in accordance with the background tests of the model.

Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva
Dissertation Committee Chair

Resumo

Neste trabalho estudamos uma cosmologia de Friedmann no contexto de um modelo com interação entre energia escura e matéria escura, no qual o termo de vácuo decai linearmente com o parâmetro de Hubble, com conseqüente produção de matéria. Mostramos que tal cosmologia, no nível da base, está em acordo qualitativo com o modelo Λ CDM. Apresentamos uma análise perturbativa para o modelo de interação, incluindo perturbações no termo de vácuo e perturbações entrópicas, mostrando que condições iniciais adiabáticas podem ser usadas para a construção do espectro de potência da matéria. O valor obtido para a densidade relativa de matéria concorda com aquele encontrado em uma análise combinada de supernovas tipo Ia, oscilações acústicas bariônicas e a posição do primeiro pico do espectro de anisotropias da radiação cósmica de fundo.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	O modelo cosmológico	4
2.1	Equações de Friedmann	4
2.2	O Modelo Λ CDM Espacialmente Plano	11
2.3	Modelo com Λ proporcional a H	15
2.3.1	Fase de radiação	19
2.3.2	Fase de matéria	20
3	Perturbações newtonianas	25
3.1	A equação de Arcuri-Waga	25
3.2	Evolução das perturbações no caso $\Lambda \propto H$	29
4	Perturbações relativísticas	33
4.1	Transformações de coordenadas e invariantes de gauge	34
4.2	Equações de Einstein	38
4.2.1	Equações no gauge síncrono	38
4.2.2	Equações no gauge longitudinal	42
4.2.3	Equações no gauge comóvel	43
5	Perturbações no modelo com interação	45
5.1	O espectro de potência	46
5.2	Termo cosmológico homogêneo ($\delta\Lambda = 0$)	49
5.3	Perturbando Λ no gauge síncrono	54
5.4	Não-adiabaticidade	61
5.5	Perturbações entrópicas	65
5.6	Perturbando Λ no gauge comóvel	66
5.6.1	O potencial gravitacional	69
5.6.2	Quantificando $\delta\Lambda$ e a não-adiabaticidade	71
5.7	Perturbando Λ no gauge longitudinal	73
5.7.1	Condições iniciais adiabáticas	75

5.8 O modelo como um gás de Chaplygin	78
6 Conclusão	82
Bibliografia	85

Capítulo 1

Introdução

A relação distância-luminosidade de supernovas com altos redshifts proporciona evidências diretas de que nosso universo está em expansão acelerada na presente época [1, 2, 3]. Para explicar teoricamente tal aceleração no contexto da Relatividade Geral, um termo cosmológico com pressão negativa, conhecido também como energia escura [4] e normalmente associado ao vácuo [5, 6, 7], é reintroduzido nas equações de Einstein. Além disso, pequenas flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo dão fortes evidências de que vivemos num universo espacialmente plano. Acredita-se que a constante cosmológica dirige a expansão acelerada, com aproximadamente 70% da composição total do universo espacialmente plano, que uma matéria escura sem pressão contribua com 25% e que os 5% restantes está na forma de matéria bariônica também sem pressão. O cenário cosmológico no qual as duas componentes dominantes evoluem separadamente é conhecido como o modelo padrão da cosmologia ou modelo Λ CDM (constante cosmológica + matéria escura fria), e tal modelo é consistente com os testes observacionais.

Este cenário, entretanto, apresenta problemas do ponto de vista teórico quando associamos a constante cosmológica à densidade de energia do vácuo, $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$. O problema, conhecido como "problema da constante cosmológica", é que as estimativas da densidade de energia do vácuo obtidas pela teoria quântica de campos indicam

um valor muito alto quando comparado com o observado [7]. Um outro problema, conhecido como "problema da coincidência cósmica", está em compreender porque a densidade da energia escura hoje é tão próxima da densidade da matéria escura. Uma proposta para aliviar tais problemas, que será abordada neste trabalho, é supor que o termo cosmológico não é uma constante e sim uma quantidade dinâmica, dependente das coordenadas, que decai com a expansão do universo desde um alto valor inicial até o pequeno valor hoje observado. Para que a conservação covariante da energia total seja assegurada é necessário que o termo cosmológico dependente das coordenadas esteja acoplado à matéria. Num universo homogêneo e isotrópico tal quantidade dinâmica é uma função apenas do tempo. Várias propostas para a evolução do termo cosmológico são de fato encontradas na literatura [8]-[12].

Neste trabalho investigamos uma cosmologia de Friedmann com uma lei particular para o decaimento do termo de vácuo, proporcional ao parâmetro de Hubble [13, 14], válida para tempos tardios e obtida fenomenologicamente com diferentes argumentos. Tal ansatz leva a um cenário cosmológico em acordo qualitativo com o modelo Λ CDM, com uma fase inicial dominada por radiação seguida por uma fase dominada pela matéria, longa o bastante para dar conta das grandes estruturas hoje formadas no universo. O modelo apresenta também, no limite assintótico, uma fase dominada por constante cosmológica, ou seja, no limite de tempos longos tende para o universo de de Sitter [15]. A diferença com relação ao modelo padrão, no background, é que a lei de conservação covariante do momento e da energia, que está contida nas equações de Einstein, leva a um processo de produção de matéria às custas do decaimento da densidade de energia do vácuo. Ou seja, as componentes do setor escuro possuem uma interação e não são separadamente conservadas.

Do ponto de vista quantitativo, uma análise combinada de supernovas tipo Ia, oscilações acústicas bariônicas (BAO) e a posição do primeiro pico das flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo (CMB) [16, 17] leva a uma boa concordância com respeito aos parâmetros cosmológicos. Um outro teste importante é o estudo

das pequenas flutuações na densidade de matéria em torno do universo homogêneo e sua comparação com o espectro de potência observado.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, realizamos uma revisão das equações de Friedmann e das características qualitativas do modelo Λ CDM. Depois, apresentamos as soluções de base do modelo com densidade do vácuo proporcional ao parâmetro de Hubble e suas principais características.

No capítulo 3, analisamos a evolução das pequenas perturbações na densidade de matéria não-relativística na fase dominada por matéria. Usamos a teoria newtoniana das perturbações, e supomos que a energia escura é estritamente homogênea no universo perturbado.

No capítulo 4, revisamos a teoria relativística das perturbações lineares, apresentando as transformações de gauge, algumas quantidades invariantes e as equações de Einstein nos gauges síncrono, longitudinal (ou newtoniano) e comóvel.

No capítulo 5, apresentamos uma análise perturbativa do modelo com interação no setor escuro, incluindo perturbações no termo cosmológico, perturbações entrópicas e o stress anisotrópico. Finalmente, o capítulo 6 apresenta as conclusões e comentários finais.

Capítulo 2

O modelo cosmológico

Neste capítulo vamos investigar as soluções das equações de Einstein para um modelo específico de interação energia escura-matéria escura num universo com curvatura espacial nula, homogêneo e isotrópico, preenchido com um fluido perfeito. A densidade da energia escura que será investigada neste texto possui dependência linear com o parâmetro de Hubble. Nós mostramos que a lei de conservação covariante do momento e da energia, que está contida nas equações de Einstein, leva a um processo de produção de matéria às custas do decaimento da densidade de energia do vácuo. As soluções obtidas mostram que o modelo está em acordo com recentes medidas do parâmetro de desaceleração e da idade do universo. Além disso, as características do modelo de Einstein-de Sitter e da fase completamente dominada pela radiação são recuperadas quando tomamos o limite de tempos pequenos. O modelo apresenta também, no limite assintótico, uma fase dominada por constante cosmológica, ou seja, no limite de tempos longos tende para o universo de de Sitter [15].

2.1 Equações de Friedmann

O ponto de partida é escrever a equação que relaciona as componentes do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, que descreve a geometria do espaço-tempo, com a energia contida

no universo, representada pelo tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda_0 g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Aqui, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico [24]-[26], Λ_0 é a constante cosmológica introduzida por Einstein e vamos adotar $8\pi G = 1$ e $c = 1$.

Sabemos que as observações de supernovas tipo Ia (SNe Ia) proporcionam evidências diretas de uma expansão acelerada na presente época, precedida por uma expansão desacelerada [1, 4]. Tal expansão acelerada é atribuída a uma componente de energia com pressão negativa, conhecida como energia escura. Um candidato plausível para esta energia com pressão negativa é a constante cosmológica de Einstein, Λ_0 , que aparece nas equações acima e que é normalmente associada com a energia do vácuo. Entretanto, um importante problema teórico é que predições da teoria quântica de campos para a densidade de energia do vácuo conduzem a um valor muito alto quando comparado com a densidade hoje observada [5, 7]. Para abordar este problema, conhecido como problema da constante cosmológica, acrescentamos ao lado direito de (2.1) o tensor momento-energia do vácuo, $T_{\mu\nu}^{(v)} = \rho_v g_{\mu\nu}$, definindo a energia efetiva do vácuo como $\Lambda = \rho_v - \Lambda_0 = \rho_\Lambda$, tal que a equação (2.1) tome a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

No espaço-tempo de Minkowisk, onde os cálculos da teoria quântica de campos são realizados, o tensor momento-energia efetivo do vácuo na equação (2.2) é igual a zero, sendo ρ_v cancelado pela constante cosmológica Λ_0 . Por outro lado, se o cálculo for feito no espaço em expansão, o lado esquerdo das equações de Einstein não será nulo, e esperamos, após a subtração da constante cosmológica Λ_0 , uma densidade de energia efetiva do vácuo dependente da curvatura. Assim, num universo homogêneo e isotrópico preenchido com vácuo e matéria, o termo cosmológico Λ será uma função do tempo. Desta forma, o problema da constante cosmológica pode ser aliviado se propusermos um termo cosmológico decaindo com a expansão do universo, desde um

valor inicialmente alto até o pequeno valor hoje observado.

Tomando a derivada covariante de (2.2), com $T_{\mu\nu}$ representando o tensor momento-energia da matéria, encontramos a lei de conservação covariante

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = -\Lambda_{;\nu} = -\Lambda_{,\nu}, \quad (2.3)$$

onde $\Lambda_{,\nu}$ é a derivada ordinária de Λ , mostrando que um termo cosmológico dependente das coordenadas está sempre necessariamente acoplado à matéria.

Vamos agora escrever as equações de Einstein para a métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) com curvatura espacial nula. Num sistema de coordenadas cartesiano, tal métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.4)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, e as componentes do tensor métrico são $g_{00} = 1$, $g_{0i} = 0$ e $g_{ij} = -a(t)^2\delta_{ij}$. Com ela é fácil verificar que as únicas conexões não nulas, obtidas via

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right), \quad (2.5)$$

são

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}, \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad (2.7)$$

onde δ_j^i é o símbolo de Kronecker, com componentes iguais a 1 se $i = j$ e nulas em caso contrário.

No lado direito das equações de Einstein, introduzimos um fluido perfeito expresso pelo tensor momento-energia

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} - p\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (2.8)$$

onde ρ é a densidade de matéria e p a pressão, u^{μ} é a 4-velocidade do fluido, cujas componentes em coordenadas comóveis são $u_0 = u^0 = 1$ e $u_i = u^i = 0$. Desta forma,

as componentes do tensor momento-energia ficam dadas por

$$T_0^0 = \rho, \quad T_j^i = -p\delta_j^i, \quad T_0^i = T_i^0 = 0. \quad (2.9)$$

As equações de movimento do fluido estão contidas na lei de conservação covariante (2.3), que pode ser escrita na forma

$$T_{\nu;\mu}^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda T_\lambda^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda = -\partial_\nu \Lambda. \quad (2.10)$$

Daí seguem, respectivamente, as equações para as componentes $\nu = 0$ e $\nu = i$,

$$T_{0;\mu}^\mu = \partial_\mu T_0^\mu - \Gamma_{0\mu}^\lambda T_\lambda^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda = -\dot{\Lambda}, \quad (2.11)$$

$$T_{i;\mu}^\mu = \partial_\mu T_i^\mu - \Gamma_{i\mu}^\lambda T_\lambda^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_i^\lambda = -\partial_i \Lambda, \quad (2.12)$$

onde o ponto representa a derivada com relação ao tempo cosmológico. Usando (2.6), (2.7) e (2.9), chegamos nas equações de balanço de energia e momento,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = -\dot{\Lambda}, \quad (2.13)$$

$$T_{i;\mu}^\mu = -\partial_i \Lambda = 0. \quad (2.14)$$

Devemos ressaltar que estas equações de balanço energia-momento independem da introdução da constante de curvatura $k = \pm 1$ na métrica de FLRW. A segunda das equações acima mostra que, em um universo espacialmente homogêneo e isotrópico não há transferência de momento, logo o termo cosmológico pode apenas ser função do tempo, como seria de esperar. A primeira equação, conhecida como equação da continuidade, mostra por sua vez que o decaimento de um termo cosmológico dependente do tempo leva a produção de matéria. Ela contém quatro funções desconhecidas, $\rho(t)$, $\Lambda(t)$, $p(t)$ e $a(t)$, que podem ser reduzidas a duas, bastando para isso inferir uma equação de estado para a matéria e um ansatz para o decaimento de Λ .

Precisamos, portanto, de mais uma equação, que, juntamente com a equação da continuidade, a equação de estado da matéria e a lei de decaimento do termo

cosmológico, descreva completamente a evolução do fator de escala $a(t)$ e da densidade de matéria $\rho(t)$. Tomemos então as equações de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S, \quad (2.15)$$

onde S é o traço do tensor momento-energia total do fluido cósmico, definido como $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$, onde $\Lambda g_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia do vácuo, o qual possui densidade de energia $\rho_\Lambda = \Lambda$ e pressão negativa $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. As componentes de $S_{\mu\nu}$ e o seu traço são respectivamente dadas por

$$S_{00} = \rho_T, \quad S_{ij} = a(t)^2 p_T \delta_{ij}, \quad S = \rho_T - 3p_T, \quad (2.16)$$

com

$$\rho_T = \rho + \rho_\Lambda, \quad (2.17)$$

$$p_T = p + p_\Lambda. \quad (2.18)$$

Para a métrica de FLRW, as componentes tempo-tempo e espaço-espaço do tensor de Ricci são escritas, respectivamente, como

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0j}^j - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.19)$$

$$R_{kk} = \partial_0 \Gamma_{kk}^0 + \Gamma_{kk}^0 \Gamma_{0j}^j - \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{k0}^j - \Gamma_{k0}^i \Gamma_{ki}^0 = \ddot{a}a + 2\dot{a}^2, \quad (2.20)$$

onde usamos

$$R_{\mu\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda. \quad (2.21)$$

Com ajuda das expressões acima, as componentes tempo-tempo e espaço-espaço das equações de Einstein são dadas por

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2}(\rho_T + 3p_T), \quad (2.22)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{3}{2}(\rho_T - p_T), \quad (2.23)$$

e, combinando-as, obtemos finalmente a equação que nos faltava, chamada equação de Friedmann,

$$\rho_T = 3H^2, \quad (2.24)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble, que mede a taxa de expansão do universo e é estimado hoje em $H_0 \approx 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$. Seu inverso H^{-1} nos dá uma escala de tempo cosmológica.

Dado H podemos definir a densidade crítica como

$$\rho_c = 3H^2. \quad (2.25)$$

A razão entre a densidade de energia total e a densidade crítica é chamada de parâmetro densidade de energia total,

$$\Omega_T \equiv \frac{\rho_T}{\rho_c}, \quad (2.26)$$

que é igual a 1 para o universo espacialmente plano. A equação (2.22), escrita como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho_T + 3p_T), \quad (2.27)$$

é conhecida como equação da aceleração. Note que, se \ddot{a} é positivo, a expansão do universo é acelerada, e se \ddot{a} é negativo a expansão é desacelerada. A equação inclui a densidade de energia total e a pressão total do fluido que preenche o universo. Dividindo ambos os membros pelo quadrado do parâmetro de Hubble, podemos escrevê-la na forma

$$-\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3H^2} \right] (\rho_T + 3p_T). \quad (2.28)$$

O termo entre colchetes é justamente o inverso da densidade de energia crítica, e, usando uma equação de estado do tipo $p_T = \omega\rho_T$, chegamos a

$$q = \frac{1}{2}\Omega_T(1 + 3\omega), \quad (2.29)$$

onde $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2 = -\ddot{a}/aH^2$ é o parâmetro de desaceleração.

Uma informação importante sobre o fator de escala $a(t)$ é obtida através da observação dos deslocamentos nas frequências da luz emitida por objetos muito distantes. Estes deslocamentos nos dizem qual era o fator de escala na época em que a luz foi emitida. Definimos o desvio para o vermelho (ou *redshift*, no jargão corrente) como

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (2.30)$$

onde λ_1 é o comprimento de onda medido no instante t_1 da emissão do sinal luminoso, e λ_0 é o comprimento de onda medido no instante t_0 da recepção.

Para obter a relação entre o redshift e o fator de escala, consideremos o ponto de emissão do sinal como sendo (r, θ, ϕ) e nos coloquemos como observadores na origem das coordenadas, $(0, 0, 0)$. O elemento de intervalo para a propagação do sinal luminoso é nulo, e sua trajetória se dá radialmente, com θ e ϕ constantes. Fazendo $ds = 0$ e $d\theta = d\phi = 0$ na métrica de FLRW, obtemos a equação de movimento

$$dr = \pm \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.31)$$

onde o sinal positivo corresponde a uma frente de onda que parte da origem das coordenadas, e o sinal negativo a uma frente de onda que chega à origem. Neste último caso, integrando (2.31) entre os tempos de emissão t_1 e recepção t_0 , encontramos

$$r = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.32)$$

Considerando agora uma segunda frente de onda emitida logo após a primeira, no instante $t_1 + \delta t_1$, e observada no instante $t_0 + \delta t_0$, chegamos a

$$r = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.33)$$

Comparando as equações (2.32) e (2.33), obtemos

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.34)$$

Se subtrairmos a integral

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.35)$$

de ambos os lados da equação (2.34) e notarmos que durante os intervalos de tempo entre as emissões ou recepções das duas frentes de onda consecutivas o fator de escala não se altera significativamente, obtemos a relação

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.36)$$

O comprimento de onda observado λ_0 está relacionado ao comprimento de onda emitido λ_1 através da expressão

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0}. \quad (2.37)$$

Então, usando a definição (2.30) e as expressões (2.36) e (2.37), encontramos que o redshift z da luz emitida por uma fonte distante está relacionado com o fator de escala $a(t_1)$ na época da emissão através da equação

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \quad (2.38)$$

Se $a(t_1)$ cresce (universo em expansão) nota-se que λ_0 é maior que λ_1 e, observando o espectro da luz emitida por galáxias distantes, veremos todas as linhas deslocadas para o vermelho.

2.2 O Modelo Λ CDM Espacialmente Plano

Nesta seção consideramos uma fase do universo espacialmente plano contendo constante cosmológica e matéria escura, com parâmetros de densidade de energia respectivamente dados por $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ e $\Omega_m \approx 0,3$. Este é o chamado modelo Λ CDM, ou modelo padrão da cosmologia.

A equação de Friedmann (2.24) nos leva à expressão

$$\rho_m = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \Lambda, \quad (2.39)$$

com $\rho_T = \rho_m + \Lambda$. Por outro lado, a equação da continuidade (2.13) nos mostra que, para Λ constante, a evolução da densidade de matéria ρ_m é dada por

$$\rho_m = Ba^{-3}. \quad (2.40)$$

onde B é uma constante positiva. Usando esta lei de evolução na expressão (2.39), obtemos uma equação diferencial não-linear para a evolução do fator de escala,

$$3\dot{a}^2 = \frac{B}{a} + \Lambda a^2, \quad (2.41)$$

cuja solução é dada por

$$a(t) = \left(\frac{B}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.42)$$

onde B é uma constante positiva de integração. Tomando uma série de potência na forma $\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) = 1 + \frac{3\Lambda t^2}{2} + \frac{(3\Lambda)^2 t^4}{8} + \dots$, a equação (2.42) torna-se

$$a(t) = \left(\frac{B}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3\Lambda t^2}{2} + \frac{(3\Lambda)^2 t^4}{8} + \dots \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.43)$$

e, no limite $\Lambda \rightarrow 0$, encontramos a lei de evolução do fator de escala do universo de Einstein-de Sitter,

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (2.44)$$

Por outro lado, escrevendo a equação (2.42) na forma

$$a(t) = \left(\frac{B}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{e^{(\sqrt{3\Lambda})t} + e^{-(\sqrt{3\Lambda})t}}{2} - 1 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.45)$$

e tomando o limite $t \rightarrow \infty$, encontramos a solução para o universo dominado por constante cosmológica,

$$a(t) \propto e^{H_0 t}. \quad (2.46)$$

Com ajuda da expressão (2.42), deduzimos que o parâmetro de Hubble e a densidade de matéria são respectivamente dados por

$$H(t) = \frac{\alpha}{3} \frac{\sinh \alpha t}{\cosh \alpha t - 1}, \quad (2.47)$$

$$\rho_m(t) = \frac{2\alpha^2}{3} (\cosh \alpha t - 1)^{-1}, \quad (2.48)$$

onde $\alpha \equiv \sqrt{3\Lambda}$. Portanto, a razão entre a densidade de matéria e a densidade crítica é

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m}{3H^2} = 2 \frac{(\cosh \alpha t - 1)}{\sinh^2 \alpha t}. \quad (2.49)$$

De posse da identidade $\cosh^2 \alpha t - \sinh^2 \alpha t = 1$, podemos reescrever a expressão (2.49) como

$$\cosh \alpha t = \frac{2}{\Omega_m} - 1. \quad (2.50)$$

Usando este resultado e, novamente, a identidade acima em (2.47), o parâmetro de Hubble pode ser expresso como função do parâmetro densidade de matéria,

$$H = \frac{\alpha}{3} \frac{1}{(1 - \Omega_m)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.51)$$

Isolando o tempo na equação (2.50) e multiplicando pela expressão acima, obtemos a idade do universo em termos do parâmetro densidade de matéria,

$$H_0 t_0 = \frac{1}{3(1 - \Omega_{m,0})^{\frac{1}{2}}} \cosh^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_{m,0}} - 1 \right), \quad (2.52)$$

onde o índice 0 indica que estamos tomando os valores atuais para os parâmetros de Hubble e de densidade de matéria. Então, conhecendo a quantidade de matéria escura existente em nosso universo, podemos estimar a sua idade. No modelo Λ CDM com $\Omega_{m,0} \approx 0,3$, obtemos $H_0 t_0 \approx 0,96$, o que corresponde, tomando $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$, a aproximadamente 13,5 bilhões de anos.

É útil também escrever a idade do universo como função do redshift e do parâmetro densidade de matéria. Escrevendo a relação entre o redshift e o fator de escala, dada por (2.38), na forma

$$a(t) = \frac{a_0}{z + 1}, \quad (2.53)$$

onde a_0 é o fator de escala atual, e usando-a na equação (2.42), encontramos facilmente a expressão

$$t = \frac{1}{\alpha} \cosh^{-1} \left[\frac{2}{3} \alpha^2 \left(\frac{a_0^3}{B} \right) \frac{1}{(z + 1)^3} + 1 \right]. \quad (2.54)$$

Sabendo que o parâmetro de densidade de matéria atual é dado pela razão $\Omega_{m,0} = \rho_{m,0}/3H_0^2$ e que $\rho_{m,0} = B/a_0^3$, encontramos uma das constantes que aparece nos colchetes da equação acima,

$$\frac{a_0^3}{B} = \frac{1}{3H_0^2 \Omega_0}. \quad (2.55)$$

A equação (2.51), por sua vez, permite obter o valor de α em termos dos valores atuais de H e Ω ,

$$\alpha = 3H_0(1 - \Omega_{m,0})^{\frac{1}{2}}. \quad (2.56)$$

Substituindo (2.55) e (2.56) em (2.54), chegamos à idade do universo em termos de H_0 , $\Omega_{m,0}$ e z ,

$$t = \frac{1}{3H_0(1 - \Omega_{m,0})^{\frac{1}{2}}} \cosh^{-1} \left[2 \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \frac{1}{(z + 1)^3} + 1 \right]. \quad (2.57)$$

Com esta equação podemos estimar qual era a idade do universo quando um certo objeto com redshift z emitiu a luz que hoje observamos. Note que para o tempo presente ($z = 0$), a equação acima se reduz à expressão para a idade atual do universo.

Com a ajuda de (2.42) e (2.50) podemos deduzir o parâmetro de desaceleração $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$. Ele é dado por

$$q = \frac{3}{2}\Omega_m - 1. \quad (2.58)$$

Podemos também escrevê-lo em função de z . Usando (2.50) em (2.42), o fator de escala é posto na forma

$$a = \left(\frac{B}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{2 - 2\Omega_m}{\Omega_m} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2.59)$$

O fator de escala atual a_0 é obtido tomando-se o valor para o parâmetro densidade de matéria $\Omega_{m,0}$ medido hoje, de modo que

$$a_0 = \left(\frac{B}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{2 - 2\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2.60)$$

Substituindo as duas expressões acima na relação (2.53), encontramos a equação que relaciona o parâmetro densidade de matéria medido em uma época qualquer com o redshift z e o parâmetro densidade medido hoje,

$$\Omega_m = \frac{\Omega_{m,0}(z + 1)^3}{1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(z + 1)^3}. \quad (2.61)$$

Então, o fator de desaceleração (2.58) toma a forma

$$q(z) = \frac{3}{2} \left[\frac{\Omega_{m,0}(z + 1)^3}{1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(z + 1)^3} \right] - 1. \quad (2.62)$$

Observe que para o tempo presente, $z = 0$, e para $\Omega_{m,0} \approx 0,3$, o universo possui uma expansão acelerada, com $q_0 \approx -0,55$. Com a expressão acima nós podemos

calcular o redshift para o qual $q = 0$, isto é, quando a expansão muda da fase desacelerada para a fase acelerada. Igualando a zero o lado esquerdo da equação (2.62), o redshift de transição é dado por

$$z_T = \left(\frac{2}{\Omega_{m,0}} - 2 \right)^{\frac{1}{3}} - 1. \quad (2.63)$$

Usando $\Omega_{m,0} \approx 0,3$, encontramos $z_T \approx 0,67$, correspondendo a $t_T \approx 7,28$ Ganos de acordo com a expressão (2.57), onde usamos $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$.

Portanto, no modelo Λ CDM espacialmente plano ($k = 0$), na etapa em que a contribuição da radiação para a densidade de energia total é desprezível, o universo evolui em duas etapas distintas: uma fase dominada por matéria, numa expansão desacelerada, com $a(t) \propto t^{2/3}$; e uma fase dominada por constante cosmológica, que tende assintoticamente para o universo de de Sitter, com expansão acelerada $a(t) \propto e^{Ht}$. O parâmetro da idade atual do universo é dada por $H_0 t_0 \approx 0,96$, e sua expansão se dá de forma acelerada na presente época. A transição da fase desacelerada para a acelerada ocorre numa época correspondente a 7,28 bilhões de anos.

2.3 Modelo com Λ proporcional a H

Agora passaremos a investigar as características de um modelo cosmológico de Friedmann no qual o termo cosmológico é proporcional ao parâmetro de Hubble. Procederemos a uma análise comparativa entre as soluções encontradas e o cenário padrão de evolução do universo.

O ansatz investigado é [13, 14]

$$\rho_\Lambda(t) = \Lambda(t) = \sigma H(t), \quad (2.64)$$

onde σ é uma constante positiva.

Como vimos na seção anterior, as equações de Einstein no contexto de um universo espacialmente plano, homogêneo e isotrópico, são dadas por

$$\rho = 3H^2 - \Lambda, \quad (2.65)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -\dot{\Lambda}, \quad (2.66)$$

onde p e ρ são a pressão e a densidade de matéria, respectivamente. A componente de matéria é descrita pela equação de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho. \quad (2.67)$$

Para bárions e matéria escura, o parâmetro de estado assume o valor $\gamma = 1$, enquanto para radiação ($p = \rho/3$) temos $\gamma = 4/3$.

Derivando a equação (2.65) com respeito ao tempo cosmológico e substituindo em seguida a equação da continuidade (2.66), obtemos

$$2\dot{H} = -(\rho + p). \quad (2.68)$$

Após introduzir a equação de estado (2.67), a densidade de energia (2.65) e a forma funcional para a densidade de energia do vácuo (2.64), encontramos a equação diferencial que descreve a evolução temporal do parâmetro de Hubble,

$$2\dot{H} + 3\gamma H^2 - \gamma\sigma H = 0. \quad (2.69)$$

Uma simples integração nos conduz à solução geral

$$t = \frac{2}{\gamma\sigma} \ln \left| \frac{H}{H - \sigma/3} \right| + K. \quad (2.70)$$

Uma escolha natural da constante de integração, para que tenhamos a origem dos tempos quando $H \rightarrow \infty$ ou $a = 0$, é $K = 0$. Dessa forma, a solução acima pode ser separada em duas,

$$H(t) = \frac{\sigma/3}{1 + \exp(-\sigma\gamma t/2)}, \quad (2.71)$$

$$H(t) = \frac{\sigma/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}. \quad (2.72)$$

A primeira delas corresponde à condição $3H - \sigma < 0$, e a segunda satisfaz a condição $3H - \sigma \geq 0$.

Vamos primeiro analisar a solução (2.71). Integrando-a novamente com relação ao tempo cosmológico, encontramos

$$a(t) = C[1 + \exp(\sigma\gamma t/2)]^{\frac{2}{3\gamma}}, \quad (2.73)$$

onde C é uma constante de integração.

Para a época dominada por radiação, $\gamma = 4/3$, a equação acima é escrita como

$$a(t) = C[1 + \exp(2\sigma t/3)]^{1/2}. \quad (2.74)$$

Tomando o limite de tempos pequenos, $\sigma t \ll 1$, esta expressão se reduz a

$$a(t) \approx C(2 + 2\sigma t/3)^{1/2}. \quad (2.75)$$

Por outro lado, para a fase de matéria temos $\gamma = 1$, e o fator de escala assume a forma

$$a(t) = C[1 + \exp(\sigma t/2)]^{2/3}, \quad (2.76)$$

de modo que para tempos pequenos (se comparados com o tempo presente) pode ser aproximado por

$$a(t) \approx C(2 + \sigma t/2)^{2/3}. \quad (2.77)$$

Portanto, notamos claramente que a dependência do fator de escala na época da radiação, (2.75), e na época dominada por matéria, (2.77), não reproduz o cenário da cosmologia padrão, que deveria conter apenas o segundo termo de cada expressão.

Um outro problema que pode ser notado é que a equação (2.65), escrita na forma

$$\rho = (3H - \sigma)H, \quad (2.78)$$

sempre nos dá uma densidade de energia da matéria negativa, pois, para essa solução, $3H - \sigma < 0$ e estamos supondo que há expansão, ou seja, que o parâmetro de Hubble é sempre positivo.

Por outro lado, com a ajuda de (2.17), (2.18) e (2.67), pomos facilmente a equação da aceleração (2.27) na forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho}{6}(3\gamma - 2) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.79)$$

com $3\gamma - 2 > 0$ e $\Lambda > 0$, e vemos claramente que, como $\rho < 0$, a expansão do universo se mantém acelerada em toda a sua história, tendendo assintoticamente para de Sitter quando $\rho \rightarrow 0$. Este resultado entra em contradição com as recentes observações de supernovas tipo Ia, que indicam uma fase desacelerada seguida de uma acelerada. Por todas essas razões, a solução (2.71) não nos interessa.

Consideremos então a solução (2.72). Integrando-a com relação ao tempo, obtemos o fator de escala

$$a(t) = C[\exp(\sigma\gamma t/2) - 1]^{\frac{2}{3\gamma}}, \quad (2.80)$$

onde C é uma constante de integração.

Por outro lado, com ajuda de (2.72), as expressões (2.64) e (2.65) nos permitem obter, respectivamente, o termo cosmológico Λ e a densidade de energia ρ como funções do tempo,

$$\Lambda = \frac{\sigma^2/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}, \quad (2.81)$$

$$\rho = \frac{\sigma^2}{3} \frac{\exp(-\sigma\gamma t/2)}{[1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)]^2}. \quad (2.82)$$

A expressão (2.80) pode ser reescrita como

$$\exp(-\sigma\gamma t/2) = \frac{C^{3\gamma/2}}{C^{3\gamma/2} + a^{3\gamma/2}}. \quad (2.83)$$

Substituindo-a em (2.81) e (2.82), é possível escrever, respectivamente, o termo cosmológico e a densidade de energia como funções do fator de escala,

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C}{a} \right)^{3\gamma/2} \right], \quad (2.84)$$

$$\rho = \frac{\sigma^2}{3} \left(\frac{C}{a} \right)^{3\gamma/2} \left[1 + \left(\frac{C}{a} \right)^{3\gamma/2} \right]. \quad (2.85)$$

Somando as equações acima, obtemos

$$\rho + \Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C}{a} \right)^{3\gamma/2} \right]^2. \quad (2.86)$$

É interessante notar que, para a fase dominada por matéria ($\gamma = 1$), encontramos uma densidade de energia total dada por

$$\rho_m + \Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \frac{\sigma^2 C^{3/2}}{3a^{3/2}} \right]^2, \quad (2.87)$$

cuja dependência com o fator de escala é a mesma da densidade de energia de um gás de Chaplygin generalizado, com equação de estado

$$p_{ch} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sigma \rho_{ch}^{1/2}. \quad (2.88)$$

2.3.1 Fase de radiação

Se a densidade de energia do universo é dominada por matéria relativística e radiação, o parâmetro de estado é $\gamma = 4/3$, e o fator de escala é dado por

$$a(t) = [\exp(2\sigma t/3) - 1]^{1/2}, \quad (2.89)$$

que no limite de tempos pequenos, isto é, $\sigma t \ll 1$, assume a forma

$$a(t) \approx (2C^2\sigma t/3)^{1/2}. \quad (2.90)$$

Por outro lado, as densidades de energia do vácuo e da radiação tornam-se respectivamente

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C^2}{3a^2}, \quad (2.91)$$

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 C^2}{3a^2} + \frac{\sigma^2 C^4}{3a^4}. \quad (2.92)$$

Tomando-se o limite $a \rightarrow 0$, notamos que o segundo termo no membro direito de ambas as expressões acima domina sobre o primeiro, de modo que podemos escrever

$$\Lambda \approx \frac{\sigma^2 C^2}{3a^2}, \quad (2.93)$$

$$\rho_r \approx \frac{\sigma^2 C^4}{3a^4}, \quad (2.94)$$

ou ainda, com ajuda de (2.90),

$$\Lambda \approx \frac{\sigma}{2t}, \quad (2.95)$$

$$\rho_r \approx \frac{3}{4t^2}. \quad (2.96)$$

Então, para tempos pequenos o fator de escala e a densidade de energia da radiação, dados por (2.90) e (2.94), possuem a mesma dependência funcional que no modelo padrão espacialmente plano dominado por radiação. Usando nosso ansatz para a densidade de energia do vácuo em (2.95), encontramos que a idade do universo na época dominada por radiação é dada por $Ht = 1/2$. Notemos também que, neste limite, quando somamos (2.95) e (2.96) para encontrar a densidade de energia total $\rho_{total} = \rho_r + \Lambda$, a densidade da energia escura ou do vácuo é subdominante com relação à densidade de energia da radiação, $\rho_{total} \approx \rho_r \approx 3/4t^2$, mostrando que na fase de radiação a produção de matéria devido ao decaimento da energia escura com a expansão é desprezível. Outra forma de ver isto é notar que o termo adicional em (2.92) é devido ao processo de produção de matéria decorrente do decaimento da densidade de energia escura. Assim, no limite de tempos pequenos, este termo não apresenta contribuição alguma para os processos físicos que ocorrem nessa época.

2.3.2 Fase de matéria

Vamos agora considerar a fase dominada por matéria. Nesta etapa da expansão a pressão é nula e o parâmetro de estado assume o valor $\gamma = 1$. Assim, o fator de escala (2.80) possui a forma

$$a(t) = C[\exp(\sigma t/2) - 1]^{\frac{2}{3}}, \quad (2.97)$$

onde a constante de integração C não é a mesma que aparece nas equações da fase de radiação.

As densidades de energia da matéria e do vácuo ficam escritas, respectivamente, como

$$\rho_m = \frac{\sigma^2 C^3}{3a^3} + \frac{\sigma^2 C^{3/2}}{3a^{3/2}}, \quad (2.98)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C^{3/2}}{3a^{3/2}}. \quad (2.99)$$

Note que o primeiro termo de (2.98) corresponde à dependência usual da densidade de energia da matéria no caso de Λ constante, e para tempos pequenos domina sobre o segundo termo. Este último, por sua vez, está relacionado com a produção de matéria às custas do decaimento da densidade de energia do vácuo, pois, como já discutimos, a conservação do tensor momento-energia total leva à equação de continuidade

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\dot{\Lambda} \quad (2.100)$$

(onde fizemos $p_m = 0$), na qual $-\dot{\Lambda}$ pode ser interpretado como uma fonte.

Para fins de comparação com os resultados do modelo Λ CDM, será conveniente expressar as quantidades observadas em termos do parâmetro densidade de energia da matéria Ω_m , definido como

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m}{3H^2} = \exp(-\sigma t/2). \quad (2.101)$$

O fator de escala (2.97) nos permite escrever a relação

$$\exp(\sigma t/2) = \left(\frac{a}{C}\right)^{3/2} + 1 = \frac{1}{\Omega_m}, \quad (2.102)$$

de forma que o parâmetro densidade de matéria observado hoje, $\Omega_{m,0}$, é obtido tomando-se o fator de escala atual a_0 , ou seja,

$$\left(\frac{a_0}{C}\right)^{3/2} = \frac{1}{\Omega_{m,0}} - 1. \quad (2.103)$$

O parâmetro de desaceleração $q \equiv -\ddot{a}/\dot{a}^2$ toma a forma

$$q = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{(a/C)^{3/2} + 1} \right] - 1, \quad (2.104)$$

onde usamos (2.102) e a expressão para o fator de escala (2.97). Com ajuda da relação entre o fator de escala e o redshift, $z = a_0/a - 1$, e da relação (2.103), nós facilmente o reescrevemos em termos do parâmetro densidade de matéria atual e de z ,

$$q(z) = \frac{3}{2} \left[\frac{\Omega_{m,0}(z+1)^{3/2}}{1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(z+1)^{3/2}} \right] - 1. \quad (2.105)$$

Observemos que para o tempo presente ($z = 0$), temos

$$q_0 = \frac{3}{2}\Omega_{m,0} - 1, \quad (2.106)$$

a mesma expressão do modelo Λ CDM. Notemos também que a expansão do universo é atualmente acelerada para qualquer valor de $\Omega_{m,0}$ menor que $2/3$. Por outro lado, fazendo $q(z) = 0$ na equação (2.105), o redshift de transição z_T para o qual o universo deixa de ser desacelerado para ser acelerado é dado por

$$z_T = \left(\frac{2}{\Omega_{m,0}} - 2 \right)^{2/3} - 1 \simeq 1,8. \quad (2.107)$$

onde usamos $\Omega_{m,0} = 0,3$.

Vamos agora obter o parâmetro da idade do universo neste modelo. Usando (2.103) em (2.102), encontramos o tempo cosmológico e o parâmetro densidade de matéria expressos em termos do redshift $z = a_0/a - 1$ e do parâmetro densidade de matéria atual $\Omega_{m,0}$,

$$t = \frac{2}{\sigma} \ln \left[\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}(z+1)^{3/2}} + 1 \right], \quad (2.108)$$

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_{m,0}(z+1)^{3/2}}{1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(z+1)^{3/2}}. \quad (2.109)$$

O parâmetro de Hubble (2.72), com $\gamma = 1$, juntamente com (2.101), nos permite obter o valor de σ , dado por

$$\sigma = 3H_0(1 - \Omega_{m,0}). \quad (2.110)$$

Substituindo-o em (2.108), a idade do universo para um redshift qualquer torna-se

$$t(z) = \frac{2}{3H_0(1 - \Omega_{m,0})} \ln \left[\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}(z+1)^{3/2}} + 1 \right]. \quad (2.111)$$

Para $z = 0$ o parâmetro da idade atual é

$$H_0 t_0 = \frac{2 \ln(\Omega_{m,0})}{3(\Omega_{m,0} - 1)}, \quad (2.112)$$

e usando o valor $\Omega_{m,0} = 0,3$ para a densidade de matéria encontramos $H_0 t_0 \simeq 1,15$ que está em acordo com as estimativas do parâmetro da idade atual [18].

Tomando o limite de tempos pequenos (se comparados com o tempo atual), podemos aproximar o fator de escala pela expressão

$$a(t) \approx C(\sigma t/2)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.113)$$

e verificamos que a dependência temporal é a mesma encontrada para o universo contendo apenas matéria. Nesse limite, o parâmetro de densidade é $\Omega_m = 1$, e os parâmetros de desaceleração e de idade são, respectivamente, $q = 1/2$ e $Ht \approx 2/3$, os mesmos do modelo de Einstein-de Sitter. Portanto, a fase de radiação do modelo é seguida por uma época dominada pela matéria, com expansão desacelerada, fato que permite a formação de estruturas tais como galáxias e aglomerados.

No limite de tempos longos, isto é, $\sigma t \gg 1$ e $a \rightarrow \infty$, as equações (2.97), (2.98) e (2.99) tornam-se

$$a \approx e^{Ht}, \quad (2.114)$$

$$\rho_m \approx 0, \quad (2.115)$$

$$\Lambda \approx \frac{\sigma^2}{3}, \quad (2.116)$$

com $H = \sigma/3 = \sqrt{\Lambda/3}$, como pode ser verificado com ajuda de (2.72) e (2.64). Neste limite encontramos um universo acelerado, com $q = -1$. Estes resultados são característicos de um universo de de Sitter.

Podemos expressar o parâmetro de Hubble como função do redshift $z = a_0/a - 1$, usando-se na equação de Friedmann $3H^2 = \rho_m + \Lambda$ as expressões (2.87), (2.102), (2.109) e (2.110), o que nos leva a

$$H(z) = H_0 [1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0}(z + 1)^{3/2}]. \quad (2.117)$$

Com esta expressão foi feita uma análise da relação distância-redshift para supernovas tipo Ia obtendo-se bons ajustes para os parâmetros livres H_0 e $\Omega_{m,0}$ do modelo [16].

Vimos nesta seção que a introdução do ansatz $\Lambda = \sigma H$ nas equações de Einstein leva a um cenário da expansão do universo que está em acordo com a cosmologia padrão, isto é, uma fase inicial dominada por radiação, seguida por uma fase dominada por matéria e por uma fase de expansão acelerada para tempos tardios. Usando-se o parâmetro da densidade de matéria atual igual a $\Omega_{m,0} = 0,3$, estimamos o parâmetro da idade atual que está em acordo com os limites impostos pelas observações. Verificamos também que a produção de matéria presente no modelo é desprezível na fase dominada pela radiação e, portanto, não afeta os processos físicos que ocorreram na época da nucleossíntese primordial.

Capítulo 3

Perturbações newtonianas

Neste capítulo iremos analisar, no contexto newtoniano, o crescimento de pequenas perturbações na densidade de matéria devido a instabilidades gravitacionais, as quais originam as diferentes estruturas hoje observadas. Em particular, analisaremos os efeitos da produção de matéria associada ao decaimento do termo cosmológico, importante para tempos tardios, com a suposição de que o mesmo seja estritamente homogêneo [19, 20]. Isto equivale a negligenciar os efeitos de pressão existentes nas equações que descrevem a dinâmica dos fluidos. Veremos que tal suposição implica em uma supressão no espectro de potência da matéria em tempos tardios. Um tratamento relativístico, desenvolvido nos capítulos subseqüentes, incluirá também perturbações no termo cosmológico.

3.1 A equação de Arcuri-Waga

A grandeza que vamos usar para descrever o crescimento das perturbações é o contraste de densidade, definido como

$$\delta(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0(t)}{\rho_0(t)}, \quad (3.1)$$

o qual caracteriza a variação relativa da densidade de matéria em torno de um dado ponto, no qual localizamos a origem de nosso sistema de coordenadas. Desde que as flutuações sejam pequenas ($\delta \ll 1$), sua evolução pode ser tratada no regime linear.

Considerando o universo preenchido com um fluido não relativístico, as equações newtonianas que descrevem sua dinâmica são a equação de Euler (ou equação de conservação do momento), a equação da continuidade e a equação de Poisson do campo gravitacional [21] e [24],

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = \Psi, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho + \Lambda, \quad (3.4)$$

respectivamente. Aqui as derivadas são parciais, com o ponto representando derivada com relação ao tempo cosmológico, \mathbf{v} é a velocidade do fluido, ρ é sua densidade, \mathbf{g} é o campo gravitacional, e $\Psi = -\dot{\Lambda}$ é o termo fonte devido à transferência de energia entre vácuo e matéria. Notemos que a introdução do termo cosmológico não afeta a equação de Euler, pois vamos supor que as partículas produzidas devido ao seu decaimento possuem a mesma velocidade do fluido, caso contrário um termo adicional deve ser incluído [19]. Além disso, estamos desconsiderando os efeitos dissipativos devido à viscosidade ou condutividade térmica do fluido.

Podemos introduzir agora pequenas perturbações na densidade de matéria, na velocidade e no campo gravitacional,

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho(\mathbf{r}, t), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} + \delta\mathbf{g}(\mathbf{r}, t). \quad (3.7)$$

Aqui, $\bar{\rho}$, $\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{g}}$ são soluções de ordem zero, com a velocidade de recessão $\bar{\mathbf{v}}$ dada pela lei de Hubble

$$\bar{\mathbf{v}} = H\mathbf{r}, \quad (3.8)$$

onde H é o parâmetro de Hubble e \mathbf{r} é a distância própria à origem. Estamos supondo ainda que não temos flutuações na densidade de energia do vácuo, o que significa também dizer que a criação de partículas se dá de maneira estritamente uniforme.

As equações de Euler, da continuidade e do campo gravitacional, após o uso de (3.5)-(3.8), são reescritas como

$$\dot{\delta\mathbf{v}} + H(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + H(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \delta\mathbf{g}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\delta\rho} + \bar{\rho}(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\delta\rho + 3H\delta\rho = 0, \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{g} = -4\pi G\delta\rho. \quad (3.11)$$

Para obter as equações acima nós desprezamos os termos de segunda ordem, pois estamos no regime linear, e fizemos uso das equações de base

$$\dot{\bar{\rho}} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}}) = \Psi, \quad (3.12)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{g}}, \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{g}} = -4\pi G\bar{\rho} + \Lambda. \quad (3.14)$$

Como as equações perturbadas são espacialmente homogêneas, nós esperamos encontrar soluções do tipo onda plana, cuja dependência espacial é dada por

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \delta\rho_k(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a}, \quad (3.15)$$

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{v}_k(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a}, \quad (3.16)$$

$$\delta\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{g}_k(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a}. \quad (3.17)$$

O termo $1/a$ aparece na exponencial porque o comprimento de onda físico aumenta com a expansão do universo. Usando estas soluções nas equações (3.9)-(3.11), obtemos agora equações diferenciais ordinárias acopladas para cada vetor de onda comóvel,

$$\dot{\delta\mathbf{v}}_k + H\delta\mathbf{v}_k = \delta\mathbf{g}_k, \quad (3.18)$$

$$\delta\dot{\rho}_k + 3H\delta\rho_k + \frac{i\bar{\rho}\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_k}{a} = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{g}_k}{a} = -4\pi G\bar{\rho}\delta_k. \quad (3.20)$$

Lembrando da definição do contraste de densidade, $\delta\rho_k = \bar{\rho}\delta_k$, e derivando-o com relação ao tempo, encontramos

$$\delta\dot{\rho}_k = \bar{\rho}\dot{\delta}_k + (\Psi - 3H\bar{\rho})\delta_k, \quad (3.21)$$

onde usamos a equação (3.12). Substituindo a expressão acima em (3.19), obtemos

$$\dot{\delta}_k = -\frac{\Psi}{\bar{\rho}}\delta_k - \frac{i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_k}{a}. \quad (3.22)$$

Derivando esta última com respeito ao tempo, e com ajuda das equações (3.22), (3.20) e (3.18), finalmente obtemos a equação de Arcuri-Waga [19],

$$\ddot{\delta}_k + \left(2H + \frac{\Psi}{\bar{\rho}}\right)\dot{\delta}_k + \left[2H\frac{\Psi}{\bar{\rho}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\Psi}{\bar{\rho}}\right) - 4\pi G\bar{\rho}\right]\delta_k = 0. \quad (3.23)$$

O termo $2H\dot{\delta}_k$ é algumas vezes chamado de termo de fricção, pois atua no sentido de diminuir o crescimento das perturbações. O termo $4\pi G\bar{\rho}\delta_k$ é devido à interação gravitacional responsável pelo crescimento das flutuações de densidade, e os termos $(\Psi/\bar{\rho})\dot{\delta}_k$, $2H(\Psi/\bar{\rho})\delta_k$ e $(\Psi/\bar{\rho})\delta_k$ estão associados à produção de matéria. Usando um sistema de unidades em que $8\pi G = 1$, a equação acima se torna

$$\ddot{\delta}_k + \left(2H + \frac{\Psi}{\bar{\rho}}\right)\dot{\delta}_k + \left[2H\frac{\Psi}{\bar{\rho}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\Psi}{\bar{\rho}}\right) - \frac{\bar{\rho}}{2}\right]\delta_k = 0. \quad (3.24)$$

Notemos que, se $\Psi = 0$, a equação de evolução para o contraste de densidade assume a forma conhecida

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k - \frac{3\Omega_m H^2}{2}\delta_k = 0, \quad (3.25)$$

onde usamos a definição do parâmetro densidade de energia, $\Omega_m = \bar{\rho}/3H^2$. Num universo espacialmente plano dominado por matéria (universo de Einstein-de Sitter) temos $\Omega_m = 1$ e $Ht = 2/3$, e a equação (3.25) assume a forma

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{3t^2}\delta_k = 0. \quad (3.26)$$

Sua solução geral é dada pela soma de dois modos, um crescente e o outro decrescente,

$$\delta_k(t) = C_1 t^{2/3} + \frac{C_2}{t}, \quad (3.27)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração que podem ser obtidas a partir das condições iniciais para o contraste de densidade $\delta_k(t)$. Vamos escolher $C_2 = 0$, pois no limite $t \rightarrow 0$ o modo $C_2 t^{-1}$ cresce indefinidamente. Assim, as perturbações de densidade no universo de Einstein-de Sitter crescem com o tempo de acordo com a lei

$$\delta_k(t) \propto t^{2/3} \propto a(t). \quad (3.28)$$

3.2 Evolução das perturbações no caso $\Lambda \propto H$

Estamos particularmente interessados em verificar a viabilidade do modelo com termo cosmológico variável, proporcional ao parâmetro de Hubble [15], com conseqüente produção de matéria, como descrito no capítulo anterior.

Nesse contexto, a razão entre o termo fonte, associado à transferência de energia entre o vácuo e a matéria, e a densidade de energia da mesma é constante. De fato, usando as equações (2.81) e (2.82), temos

$$\frac{\Psi}{\bar{\rho}} = -\frac{\dot{\Lambda}}{\bar{\rho}} = \frac{\sigma}{2}. \quad (3.29)$$

Assim, reescrevemos a equação de evolução do contraste de densidade na forma

$$\ddot{\delta}_k + \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3(1 - e^{-\sigma t/2})} \right] \dot{\delta}_k + \frac{\sigma^2}{3} \left[\frac{1}{1 - e^{-\sigma t/2}} - \frac{e^{-\sigma t/2}}{(1 - e^{-\sigma t/2})^2} \right] \delta_k = 0, \quad (3.30)$$

onde usamos o parâmetro de Hubble (2.72), com $\gamma = 1$. Notemos que, tomando o limite de tempos pequenos, com $\exp(-\sigma t/2) \approx 1 - \sigma t/2$, recuperamos a equação de evolução do contraste do universo de Einstein-de Sitter.

Para integrar a equação acima podemos fazer uma mudança de variáveis de t para x , com $x = \exp(-\sigma t/2)$, o que nos leva a

$$3x^2(x-1)^2 \frac{\partial^2 \delta_k}{\partial x^2} + 4x(x-1) \frac{\partial \delta_k}{\partial x} - 2(3x-2)\delta_k = 0. \quad (3.31)$$

A solução geral desta equação diferencial é dada por

$$\delta_k = \frac{x}{(x-1)^{1/3}} \left[D_1(x-1)^{-2/3} + D_2x^{1/3} + \frac{2}{3}D_2(x-1)^{-2/3}\beta(x, 1/3, 2/3) \right], \quad (3.32)$$

onde D_1 e D_2 são constantes de integração e $\beta(x, p, q)$ é a função beta incompleta, definida por

$$\beta(x, p, q) = \int_0^x y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy. \quad (3.33)$$

Como a equação de evolução do contraste se reduz, no limite de tempos pequenos, à equação do modelo Einstein-de Sitter, esperamos que nesse mesmo limite a solução acima se comporte da mesma forma que a solução (3.27). Para verificá-lo, é preciso antes expandir a função β em uma série de Laurent em torno do ponto $x = 1$, correspondente a $t = 0$. Fazendo tal expansão, podemos aproximá-la pela expressão

$$\beta(x, 1/3, 2/3) \approx \beta(1, 1/3, 2/3) - \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} + \frac{2}{5}(x-1)^{5/3}. \quad (3.34)$$

Dessa forma, no limite de tempos pequenos a solução geral (3.32) se reduz a

$$\delta_k(t) \approx -2 \left[D_1 + \frac{2}{3}D_2\beta(1, 1/3, 2/3) \right] \frac{1}{\sigma t} - \frac{16^{1/3}}{15}D_2(\sigma t)^{2/3}, \quad (3.35)$$

a qual de fato apresenta a dependência temporal esperada.

Como no caso de Einstein-de Sitter, estamos interessados apenas no modo crescente. Portanto, devemos fazer o termo entre colchetes igual a zero, ou seja, devemos tomar

$$D_1 = -\frac{2}{3}D_2\beta(1, 1/3, 2/3). \quad (3.36)$$

Com isso, obtemos a solução particular

$$\frac{\delta_k}{D_2} = \frac{2x}{3} \left[\frac{\beta(1, 1/3, 2/3) - \beta(x, 1/3, 2/3)}{1-x} \right] - \frac{x^{4/3}}{(1-x)^{1/3}}. \quad (3.37)$$

Podemos também, com ajuda de (2.101) e (2.109), expressar a solução acima como função do redshift, fazendo

$$x = \Omega_m(z) = \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}}{1 - \Omega_{m,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^{3/2}}. \quad (3.38)$$

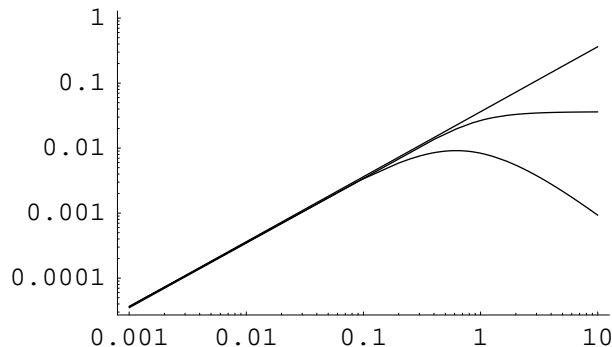


Figura 3.1: O contraste de densidade como função do fator de escala. A curva superior corresponde ao modelo Einstein-de Sitter, a intermediária ao modelo padrão e a inferior ao modelo com interação.

Ou ainda, com ajuda da definição do redshift, $1 + z = 1/a$ (onde fizemos $a_0 = 1$), expressá-la como função do fator de escala.

As figuras 3.1 e 3.2 apresentam a evolução do contraste de matéria em função do fator de escala e do redshift, respectivamente. Nelas traçamos também as curvas correspondentes ao modelo Einstein-de Sitter e ao modelo padrão Λ CDM. Para o modelo padrão tomamos $\Omega_{m,0} = 0.27$, enquanto que para o modelo em estudo usamos $\Omega_{m,0} = 0.32$. Como condição inicial, utilizada para determinar a constante de integração D_2 , usamos a anisotropia observada na radiação cósmica de fundo, ou seja, $\delta \approx 10^{-5}$ para $z \approx 1100$.

Vemos que para tempos pequenos nossa solução coincide com a de Einstein-de Sitter, como discutido acima. No entanto, para tempos tardios há uma clara supressão do contraste, o qual atinge seu máximo pouco antes do tempo atual ($z \approx 0.6$), decrescendo monotonamente a partir de então. Tal supressão leva a um valor atual cerca de 1/3 do previsto pelo modelo padrão, o que poderia se constituir, de um ponto de vista observacional, em uma séria limitação do modelo.

Notemos que essa supressão é uma consequência natural da hipótese de que Λ e, portanto, a produção de matéria são estritamente homogêneos, hipótese utilizada na

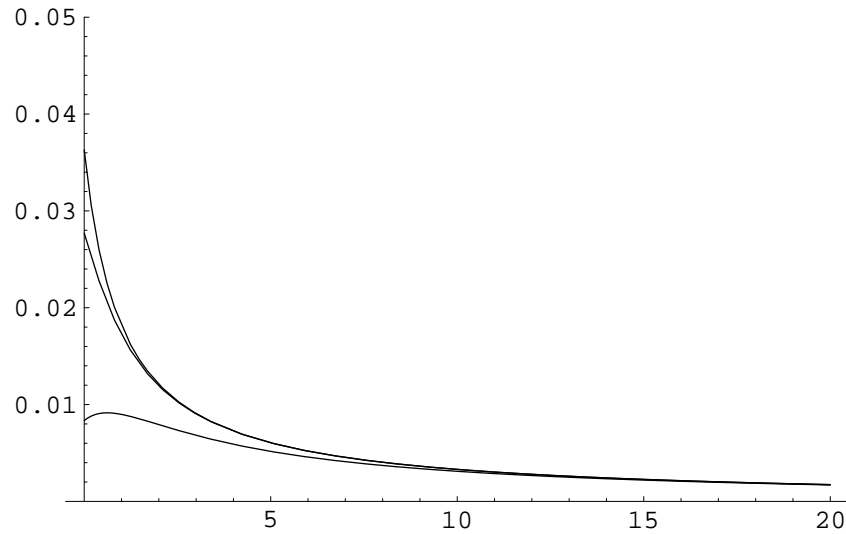


Figura 3.2: O contraste de densidade como função do redshift. A curva superior representa o modelo Einstein-de Sitter, a intermediária o modelo padrão e a inferior o modelo com interação.

dedução de nossa equação de evolução do contraste.

A suposição de que Λ não é perturbado é uma hipótese *ad hoc*, simplificadora de nossa análise, porém sem justificativa a priori. Num contexto em que há interação entre o vácuo e a matéria, a possibilidade de perturbação do primeiro não pode ser descartada. Nesse caso, como a pressão associada ao vácuo é não nula, uma análise consistente e definitiva requer um tratamento relativístico das perturbações. Além disso, o tratamento newtoniano descrito acima também não é suficiente para descrever os efeitos da radiação na formação das estruturas, já que os termos de pressão estão ausentes. Podemos realizar modificações apropriadas nas equações da dinâmica dos fluidos para introduzir tais termos de modo consistente com o tratamento relativístico. Isto não será feito aqui, e devotaremos os próximos capítulos à análise relativística para o crescimento das perturbações da densidade de matéria.

Capítulo 4

Perturbações relativísticas

No capítulo anterior, vimos as perturbações gravitacionais lineares na teoria newtoniana e estudamos os efeitos da produção homogênea de matéria, devido ao decaimento da densidade de energia escura, sobre o contraste de densidade da matéria escura. Entretanto, a teoria newtoniana somente se aplica a escalas que não excedam o raio de Hubble. Devido a essa limitação, temos que realizar um tratamento mais completo e geral que permita tratar componentes relativísticas e não-relativísticas em todas as escalas. Este tratamento leva em conta as equações de Einstein da Relatividade Geral, que serão expandidas perturbativamente em torno do universo homogêneo, ou universo da base. O problema que surge ao expandir até primeira ordem de aproximação as equações de Einstein é que não existe um sistema de coordenadas privilegiado para descrever as perturbações, ao contrário do que acontece num universo homogêneo e isotrópico. Esta liberdade residual na escolha do sistema de coordenadas, ou liberdade do gauge (termo que será usado para distinguir das transformações de coordenadas realizadas no universo da base), leva ao aparecimento de modos espúrios nas quantidades perturbadas, que são devidos apenas ao sistema de coordenadas usado. Para resolver o problema do gauge, precisamos escrever quantidades tais como os elementos da métrica, a densidade de matéria, campo de velocidades etc como quantidades invariantes. Faremos isto na primeira seção, e

na seguinte encontraremos o conjunto de equações de Einstein que descrevem as pequenas flutuações em torno do universo de FLRW para três gauges: o gauge síncrono, o gauge longitudinal e o gauge comóvel.

4.1 Transformações de coordenadas e invariantes de gauge

Iniciamos com uma pequena perturbação em torno da métrica da base, com a qual o elemento de linha fica representado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= (g_{\mu\nu}^{(b)} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = \\ &= a(\eta)^2 [-(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i + (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j + 2E_{,ij}dx^i dx^j]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aqui, $a(\eta)$ é o fator de escala em função do tempo conforme, $dt = a(\eta)d\eta$, a vírgula representa derivada ordinária no espaço 3-dimensional e somente quantidades escalares são introduzidas na métrica $\delta g_{\mu\nu}$.

Agora, nós temos um espaço-tempo da base definido pela métrica $g_{\mu\nu}^{(b)}$ e um espaço-tempo perturbado definido pelas funções escalares ϕ , ψ , B e E . Escolhemos dois sistemas de coordenadas x^μ e \tilde{x}^μ neste espaço-tempo perturbado. Portanto, a perturbação da métrica ao se passar do espaço-tempo da base para o primeiro sistema de coordenadas do espaço-tempo perturbado é

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}^{(b)}(x). \quad (4.2)$$

De forma semelhante, para o segundo sistema de coordenadas temos

$$\tilde{\delta} g_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - g_{\mu\nu}^{(b)}(\tilde{x}). \quad (4.3)$$

A transformação $\delta g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{\delta} g_{\mu\nu}(\tilde{x})$ é chamada uma transformação de gauge [28]-[30], associada à mudança de coordenadas

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (4.4)$$

em que ξ^μ é um 4-vetor infinitesimal, isto é

$$\tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, x^i), \quad \tilde{x}^i = x^i + \partial^i \xi(\eta, x^i) + \xi^i(\eta, x^i), \quad (4.5)$$

onde ξ^0 determina hipersuperfícies com η constante, enquanto que $\partial^i \xi$ e ξ^i determinam os sistemas de coordenadas nestas hipersuperfícies, sendo o último um 3-vetor com divergência nula.

Por outro lado, sob uma mudança das coordenadas o tensor métrico se transforma segundo a lei

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (4.6)$$

onde $x \equiv (\eta, x^i)$. Tomando as derivadas parciais de (4.4) e pondo-as na lei acima, obtemos em primeira ordem de aproximação a expressão

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \approx g_{\mu\nu}(x) - \xi_{,\nu}^\beta(x) g_{\mu\beta} - \xi_{,\mu}^\alpha(x) g_{\nu\alpha}. \quad (4.7)$$

Expandindo a métrica da base $g_{\mu\nu}^{(b)}(\tilde{x})$ em torno do ponto x , encontramos a relação

$$g_{\mu\nu}^{(b)}(\tilde{x}) \approx g_{\mu\nu}^{(b)}(x) + g_{\mu\nu,\alpha}^{(b)}(x) \xi^\alpha, \quad (4.8)$$

que, usada junto com (4.2) e (4.3) na expressão (4.7), nos leva à lei de transformação

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \delta g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\alpha}^{(b)} \xi_{,\nu}^\alpha - g_{\nu\alpha}^{(b)} \xi_{,\mu}^\alpha - g_{\mu\nu,\alpha}^{(b)} \xi^\alpha. \quad (4.9)$$

O tensor momento-energia se transforma da mesma maneira, bastando fazer a substituição $g_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu}$. Com ajuda da relação $\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu$, é fácil escrever o resultado acima em termos covariantes,

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \delta g_{\mu\nu}(x) - (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}), \quad (4.10)$$

onde

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_\lambda. \quad (4.11)$$

Agora, é direto verificar que, sob a transformação (4.5), as funções escalares ϕ , ψ , B e E definidas no elemento de linha (4.1) são levadas nas novas funções

$$\tilde{\phi} = \phi - \mathcal{H} \xi^0 - \xi^{0'}, \quad (4.12)$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \mathcal{H}\xi^0, \quad (4.13)$$

$$\tilde{E} = E - \xi, \quad (4.14)$$

$$\tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad (4.15)$$

onde usamos (4.10), $\mathcal{H} = a'/a$, e a linha representa derivada com relação ao tempo conforme. Note que as perturbações escalares da métrica dependem apenas das duas funções ξ^0 e ξ , e desta forma podemos eliminar via combinação linear duas das quatro funções ϕ , ψ , B e E para construir grandezas que são invariantes de gauge. A combinação mais simples leva aos potenciais de Bardeen [23]

$$\Phi_B = \phi + \mathcal{H}(B - E') + (B - E)', \quad (4.16)$$

$$\Psi_B = \psi - \mathcal{H}(B - E'), \quad (4.17)$$

que são, evidentemente, quantidades invariantes de gauge sob as transformações (4.12)-(4.15). Isto significa que, se Φ_B e Ψ_B assumem um determinado valor num sistema de coordenadas, eles terão o mesmo valor em qualquer outro sistema.

A densidade de energia e a pressão se transformam como

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho - \rho'\xi^0, \quad (4.18)$$

$$\tilde{\delta p} = \delta p - p'\xi^0, \quad (4.19)$$

e dependem apenas da escolha da coordenada temporal que define a hipersuperfície com η constante. O potencial velocidade $\delta u_i \equiv \partial_i v$ se transforma como

$$\tilde{v} = v + \xi', \quad (4.20)$$

e depende somente da escolha de ξ .

Como as quantidades obtidas dependem apenas de ξ^0 e ξ , podemos escolher o gauge para fixar o sistema de coordenadas. Nesta tese, vamos rever três gauges - o síncrono, o longitudinal (ou newtoniano) e o comóvel - e escrever as equações de Einstein correspondentes.

(i) Gauge Síncrono

O gauge síncrono corresponde a fazer a escolha $\delta g_{0\mu} = 0$, ou seja, $\tilde{\phi} = 0$ e $\tilde{B} = 0$. Neste gauge não conseguimos fixar unicamente o sistema de coordenadas definidos por ξ^0 e ξ , e modos espúrios estarão presentes nas soluções das equações de Einstein. Além disso, não é possível construir quantidades invariantes de gauge.

(ii) Gauge Longitudinal ou Newtoniano

O gauge longitudinal fica definido pela escolha $\tilde{B} = 0$ e $\tilde{E} = 0$ em (4.15) e (4.14), o que fixa completamente o sistema de coordenadas ξ^0 e ξ . Nessas condições, as funções escalares da métrica e a densidade de energia se transformam como

$$\tilde{\phi} = \phi + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')', \quad (4.21)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H}(B - E'), \quad (4.22)$$

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho + \rho'(B - E'). \quad (4.23)$$

Notemos que as funções escalares da métrica no gauge longitudinal coincidem com os potenciais invariantes de Bardeen e, portanto, estas quantidades são invariantes de gauge.

(iii) Gauge Comóvel

O gauge comóvel (ortogonal) fica definido ao se fazer a escolha $\tilde{v} = 0$ e $\tilde{B} = 0$ em (4.20) e (4.15). Desta forma, as perturbações se transformam como

$$\tilde{\phi} = \phi + \mathcal{H}(B + v) + (B + v)', \quad (4.24)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H}(B + v), \quad (4.25)$$

$$\tilde{E}' = E' + v, \quad (4.26)$$

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho + \rho'(v + B). \quad (4.27)$$

Notemos que os potenciais de Bardeen coincidem com as funções $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ quando $E' = -v$, o que implica em $\tilde{E}' = 0$.

4.2 Equações de Einstein

Agora, apresentamos as equações que governam a evolução das perturbações em três gauges: o síncrono, onde as quantidades que surgem não são invariantes de gauge; o longitudinal (ou newtoniano) e o comóvel.

4.2.1 Equações no gauge síncrono

Neste gauge a métrica será dada por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(\delta_{ij} + \delta g_{ij})dx^i dx^j, \quad (4.28)$$

onde δ_{ij} é o tensor de Kronecher, δg_{ij} é uma pequena perturbação na parte espacial da métrica da base, e escrevemos as equações em tempo cosmológico. O procedimento para se chegar às equações de Einstein [24] para o universo com pequenas inhomogeneidades será o de encontrar as perturbações nas componentes do tensor de Ricci (2.21) e nos símbolos de Christoffel (2.5), as quais estão contidas no lado esquerdo das equações de Einstein, enquanto no lado direito das equações encontraremos as perturbações nas componentes do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$.

Uma pequena perturbação no tensor métrico $g_{\mu\nu}$, levando-o a $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, onde $\delta g_{\mu\nu}$ é uma quantidade muito pequena, nos permite obter, em primeira ordem de aproximação em $\delta g_{\mu\nu}$, a perturbação correspondente no tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma + \delta \Gamma_{\gamma\lambda}^\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\gamma - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda. \quad (4.29)$$

Os símbolos de Christoffel, por sua vez, ficam

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \delta g^{\lambda\rho} [\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu \delta g_{\rho\mu} + \partial_\mu \delta g_{\rho\nu} - \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}], \quad (4.30)$$

o que, com ajuda da relação

$$\delta g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = -g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\nu}, \quad (4.31)$$

pode ser posto na forma

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\rho} \left[\frac{1}{2}(\partial_{\nu}\delta g_{\rho\mu} + \partial_{\mu}\delta g_{\rho\nu} - \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu}) - \delta g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \right]. \quad (4.32)$$

Como já sabemos, as equações de Einstein são satisfeitas pelo tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ e a métrica do campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ não perturbados, e as soluções obtidas para a métrica de FLRW com curvatura espacial nula constituem as nossas soluções de base. Com o campo gravitacional e o tensor momento-energia perturbados, isto é, $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$, das equações de Einstein obtemos

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}T - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta T, \quad (4.33)$$

onde $T = T_{\lambda}^{\lambda}$ é o traço do tensor momento-energia. Este obedece à lei de conservação covariante

$$\delta(T^{\mu\nu}{}_{;\mu}) = 0. \quad (4.34)$$

Nós vamos daqui por diante mudar a notação e considerar uma perturbação na qual a métrica é alterada para $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com a condição, característica do gauge síncrono, de que

$$\tilde{h}_{\mu 0} = 0. \quad (4.35)$$

Substituindo nas equações de Einstein perturbadas $\delta g_{\mu\nu}$ por $h_{\mu\nu}$ (estamos omitindo o til), as componentes de (4.32), para a métrica não perturbada de FLRW e o sistema de coordenadas escolhido, são dadas por

$$\delta\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2a^2} \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} \right], \quad (4.36)$$

$$\delta\Gamma_{jk}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{jk}}{\partial t}, \quad (4.37)$$

$$\delta\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{2\dot{a}}{a} h_{ij} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right], \quad (4.38)$$

$$\delta\Gamma_{0i}^0 = \delta\Gamma_{00}^i = \delta\Gamma_{00}^0 = 0, \quad (4.39)$$

onde fizemos uso da relação $g^{\lambda\mu}g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ para obter a componente contravariante do tensor métrico. Lembramos que os índices latinos representam as coordenadas espaciais, o índice 0 a coordenada temporal com $c = 1$, e $a(t)$ é o fator de escala.

Com ajuda destes resultados, a perturbação na componente temporal do tensor de Ricci (ver (4.29)) torna-se

$$\delta R_{00} = -\frac{\partial\delta\Gamma_{0k}^k}{\partial t} - \frac{2\dot{a}}{a}\delta\Gamma_{0i}^i = \frac{1}{2a^2} \left[\ddot{h}_{kk} - \frac{2\dot{a}}{a}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{kk} \right]. \quad (4.40)$$

Definindo $h = h_{kk}/a^2$, é possível escrevê-la como

$$\delta R_{00} = \frac{\ddot{h}}{2} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{h}. \quad (4.41)$$

No que diz respeito ao lado direito das equações de Einstein, vamos introduzir o tensor momento-energia total, expresso como

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} T_{\alpha}^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} [(\rho_{\alpha} + p_{\alpha})u_{\alpha}^{\mu}u_{\alpha}^{\nu} - p_{\alpha}g^{\mu\nu}], \quad (4.42)$$

onde o índice α representa cada componente do fluido cósmico. As componentes de T_{ν}^{μ} são as seguintes:

$$T_0^0 = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \equiv \rho, \quad (4.43)$$

$$T_j^k = -\sum_{\alpha} p_{\alpha}g_j^k \equiv -pg_j^k, \quad (4.44)$$

$$T_0^k = T_k^0 = 0. \quad (4.45)$$

A perturbação correspondente possui a forma

$$\begin{aligned} \delta T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} [(\delta\rho_{\alpha} + \delta p_{\alpha})u_{\alpha}^{\mu}u_{\alpha}^{\nu} + (\rho_{\alpha} + p_{\alpha})\delta u_{\alpha}^{\mu}u_{\alpha}^{\nu} + \\ + (\rho_{\alpha} + p_{\alpha})u_{\alpha}^{\mu}\delta u_{\alpha}^{\nu} - \delta p_{\alpha}g^{\mu\nu} - p_{\alpha}\delta g^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Perturbando a relação $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$, podemos escrever a perturbação no tensor métrico nas componentes contravariantes,

$$\delta g^{\mu\alpha} = -h^{\mu\alpha}. \quad (4.47)$$

Por outro lado, da relação $u^\mu u_\nu = g^{\mu\nu} u_\nu u_\mu = 1$, verificamos que, com a escolha do gauge síncrono ($h^{\mu 0} = 0$) e com $u_0 \neq 0$ e $g^{00} \neq 0$, a componente temporal da 4-velocidade não contribui para a perturbação no tensor momento-energia neste gauge, ou seja,

$$\delta u^0 = \delta u_0 = 0. \quad (4.48)$$

De posse desses resultados, encontramos as componentes

$$\delta T^{00} = \sum_{\alpha} \delta \rho_{\alpha}, \quad (4.49)$$

$$\delta T^{0i} = \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} + p_{\alpha}) \delta u_{\alpha}^i, \quad (4.50)$$

$$\delta T^{ij} = \sum_{\alpha} (p_{\alpha} h^{ij} - \delta p_{\alpha} g^{ij}). \quad (4.51)$$

As componentes covariantes são obtidas através da relação

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma}. \quad (4.52)$$

Perturbando-a encontramos

$$\delta T_{00} = \delta T^{00} = \sum_{\alpha} \delta \rho_{\alpha}, \quad (4.53)$$

$$\delta T_{0i} = \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} + p_{\alpha}) \delta u_{i\alpha}, \quad (4.54)$$

$$\delta T_{ij} = - \sum_{\alpha} (p_{\alpha} h_{ij} - \delta p_{\alpha} g_{ij}). \quad (4.55)$$

Da relação $\delta T = \delta(g_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma})$, e com ajuda dos resultados acima, encontramos o traço da perturbação do tensor momento-energia,

$$\delta T = \delta \rho - 3\delta p. \quad (4.56)$$

Então, a componente temporal da equação (4.33), usando-se (4.56), (4.53) e (4.41), nos dá uma equação diferencial de segunda ordem que relaciona a métrica h com as flutuações na densidade total e na pressão total,

$$\ddot{h} + 2H\dot{h} = \sum_{\alpha} (\delta \rho_{\alpha} + 3\delta p_{\alpha}). \quad (4.57)$$

O passo seguinte é encontrar as perturbações na lei de conservação $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, o que nos proporciona equações independentes que serão adicionadas à equação acima.

Temos

$$\delta(T^{\mu\nu}_{;\mu}) = \partial_\mu \delta T^{\mu\nu} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu \delta T^{\lambda\nu} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \delta T^{\mu\lambda} = 0. \quad (4.58)$$

Para a componente $\nu = 0$, encontramos a equação de balanço da energia

$$\frac{\partial(\delta T^{00})}{\partial t} + \partial_i \delta T^{i0} + \delta \Gamma_{i0}^i T^{00} + \Gamma_{i0}^i \delta T^{00} + \delta \Gamma_{ij}^0 T^{ij} + \Gamma_{ij}^0 \delta T^{ij} = 0, \quad (4.59)$$

equivalente a

$$\sum_\alpha [\delta \dot{\rho}_\alpha + (\rho_\alpha + p_\alpha)(\theta_\alpha - \frac{\dot{h}}{2}) + 3\frac{\dot{a}}{a}(\delta \rho_\alpha + \delta p_\alpha)] = 0, \quad (4.60)$$

onde $\theta \equiv \partial_i \delta u^i$.

Por outro lado, para a componente $\nu = j$, correspondente à equação de balanço do momento, encontramos

$$\frac{\partial(\delta T^{0j})}{\partial t} + \partial_i \delta T^{ij} + \delta \Gamma_{ik}^i T^{kj} + \Gamma_{i0}^i \delta T^{0j} + \delta \Gamma_{ik}^j T^{ik} + \Gamma_{0i}^j \delta T^{0i} + \Gamma_{ik}^j \delta T^{ik} + \Gamma_{i0}^j \delta T^{i0} = 0, \quad (4.61)$$

que pode ser posta, após alguma álgebra, na forma

$$\sum_\alpha [(\rho_\alpha + p_\alpha)\dot{\theta}_\alpha + 5H(\rho_\alpha + p_\alpha)\theta_\alpha + (\dot{\rho}_\alpha + \dot{p}_\alpha)\theta_\alpha - \frac{k^2}{a^2}\delta p_\alpha] = 0. \quad (4.62)$$

Então, o conjunto de equações no gauge síncrono que dá a evolução das flutuações na densidade de energia, na métrica e na velocidade são (4.62), (4.60) e (4.57). Estas equações são representadas no espaço de Fourier, onde k é o vetor de onda comóvel, o que significa que cada perturbação representada por uma transformada de Fourier evolui independente uma da outra enquanto as flutuações são lineares.

4.2.2 Equações no gauge longitudinal

Neste gauge e no próximo, nós somente apresentamos as equações invariantes de gauge que descrevem as pequenas flutuações, já que o procedimento para se chegar a

tais equações é similar ao apresentado na seção anterior. O elemento de linha é dado por

$$ds^2 = a(\tilde{\eta})^2[-(1 + 2\tilde{\phi})d\tilde{\eta}^2 + (1 - 2\tilde{\psi})\delta_{ij}d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j]. \quad (4.63)$$

Notemos que a função $\tilde{\phi}$ pode ser identificada, no limite newtoniano, com o potencial gravitacional newtoniano.

Das equações de Einstein encontramos

$$\tilde{\psi} - \tilde{\phi} = a^2\tilde{\pi}, \quad (4.64)$$

$$3\mathcal{H}(\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi}) + k^2\tilde{\psi} = -\frac{a^2}{2}\tilde{\delta\rho}, \quad (4.65)$$

$$\tilde{\psi}'' + 2\mathcal{H}\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi}' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\tilde{\phi} = \frac{a^2}{2}(\tilde{\delta p} - \frac{2}{3}k^2\tilde{\pi}), \quad (4.66)$$

$$\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi} = -\frac{a^2}{2}(\rho + p)\tilde{v}, \quad (4.67)$$

onde introduzimos o stress anisotrópico $\tilde{\pi}$ no tensor momento-energia [27]-[29], não-nulo no caso de componentes relativísticas, e a linha representa derivada com relação ao tempo conforme. As quantidades que entram no lado direito das equações são manifestamente invariantes de gauge, já que no lado esquerdo as funções escalares da métrica são os próprios potenciais de Bardeen.

Da equação de conservação do momento-energia encontramos

$$\tilde{\delta\rho}' + 3\mathcal{H}(\tilde{\delta\rho} + \tilde{\delta p}) - 3\tilde{\psi}'(\rho + p) - k^2(\rho + p)\tilde{v} = 0, \quad (4.68)$$

$$[(\rho + p)\tilde{v}]' + \tilde{\delta p} - \frac{2}{3}k^2\tilde{\pi} + (\rho + p)(\tilde{\phi} + 4\mathcal{H}\tilde{v}) = 0. \quad (4.69)$$

4.2.3 Equações no gauge comóvel

Agora escrevemos as equações invariantes neste gauge particular, onde $\tilde{v} = 0$ e $\tilde{B} = 0$. As equações de Einstein ficam dadas por

$$\tilde{E}'' + 2\mathcal{H}\tilde{E}' + \tilde{\psi} - \tilde{\phi} = a^2\tilde{\pi}, \quad (4.70)$$

$$\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi} = 0, \quad (4.71)$$

$$3\mathcal{H}(\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi}) + k^2\tilde{\psi} + k^2\mathcal{H}\tilde{E}' = -\frac{a^2}{2}\tilde{\delta\rho}, \quad (4.72)$$

$$\tilde{\psi}'' + 2\mathcal{H}\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi}' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\tilde{\phi} = \frac{a^2}{2}(\tilde{\delta p} - \frac{2}{3}k^2\tilde{\pi}), \quad (4.73)$$

e identificamos as funções escalares da métrica com os potenciais de Bardeen quando $\tilde{E}' = 0$. Nestas condições, as equações são manifestamente invariantes de gauge.

Da conservação do momento e energia podemos obter, no gauge comóvel, as equações de balanço momento-energia,

$$\tilde{\delta\rho}' + 3\mathcal{H}(\tilde{\delta\rho} + \tilde{\delta p}) - (\rho + p)(3\tilde{\psi}' + k^2\tilde{E}') = 0, \quad (4.74)$$

$$\tilde{\delta p} - \frac{2}{3}k^2\tilde{\pi} + (\rho + p)\tilde{\phi} = 0. \quad (4.75)$$

Neste capítulo, expandimos perturbativamente as equações de Einstein e encontramos um conjunto de equações acopladas que descrevem, em primeira ordem de aproximação, as pequenas flutuações em torno do universo homogêneo e isotrópico em três gauges. Estas equações serão usadas no próximo capítulo para obter o espectro de potência da matéria observada.

Capítulo 5

Perturbações no modelo com interação

No capítulo anterior, obtivemos um conjunto de equações de Einstein que descrevem as pequenas flutuações em torno do universo homogêneo e isotrópico, de forma a dar conta da formação das estruturas em larga escala hoje observadas. Tais equações serão numericamente integradas a fim de construir o espectro de potência de massa para o modelo com interação. Vimos da análise newtoniana das pequenas flutuações que, para tempos tardios, onde a densidade da energia escura é importante, ocorre uma supressão na evolução do contraste de densidade de matéria com relação ao contraste obtido no modelo Λ CDM. Tal supressão, associada à hipótese de que a energia escura se distribui uniformemente no universo inhomogêneo, se manifestará no espectro de potência. Isso sugere que tal hipótese deve ser relaxada e uma análise mais completa deve ser realizada para incluir possíveis perturbações do termo cosmológico. Isto é razoável, pois perturbações na matéria escura podem induzir perturbações no termo de vácuo, já que ambos estão interagindo. Veremos também que tal análise necessita incluir perturbações não-adiabáticas, mas que, no entanto, condições iniciais adiabáticas podem ser usadas para a construção do espectro.

5.1 O espectro de potência

Para descrever a distribuição de matéria no universo, definimos o espectro de potência de matéria $P(k)$. Como sabemos, as perturbações podem ser representadas no espaço de Fourier como uma superposição de ondas planas. Sendo assim, uma pequena flutuação da densidade de matéria $\delta(\vec{r}, t)$ em torno de um dado ponto, origem do sistema de coordenadas, pode ser expresso por

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k, \quad (5.1)$$

onde V é um determinado volume. Cada modo de Fourier $\delta_k(t)$ no volume escolhido pode ser obtido através da integral

$$\delta_k(t) = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (5.2)$$

Agora, se escolhermos um outro volume V' , as flutuações da densidade de matéria continuam sendo representadas por uma transformada de Fourier, mas com coeficientes $\delta_k(t)$ diferentes. Isto significa que se idealizamos o universo como um número infinito de tais volumes, os coeficientes $\delta_k(t)$ variam em amplitude e fase de uma região para outra. Como $\delta_k(t)$ varia de região para região, o valor médio da perturbação $\delta(\vec{r}, t)$ será nulo, pois teremos regiões ligeiramente mais densas que outras e vice-versa. Entretanto, como a média do quadrado da perturbação não é nula, podemos definir a variância

$$\langle \delta^2(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk, \quad (5.3)$$

onde a média do quadrado da amplitude das componentes de Fourier define o espectro de potência [21, 30]

$$P(k) = \langle \delta_k^2 \rangle, \quad (5.4)$$

onde considera-se que a média é independente da direção do vetor de onda e as fases dos modos não são correlacionadas.

Para construir o espectro de potência observado é necessário integrar as equações de Einstein partindo de um espectro de potência primordial. Um espectro primordial adequado para a formação das estruturas observadas tem sua origem no cenário inflacionário. A fim de explicar como modos que hoje parecem não estar conectados causalmente possuem aproximadamente a mesma temperatura, a inflação prediz que tais modos estiveram em contato causal no universo primordial e foram jogados para fora do horizonte de Hubble comóvel durante uma expansão acelerada. As condições iniciais foram produzidas por flutuações quânticas ainda quando estes modos estavam dentro do horizonte. A amplitude das perturbações permanece congelada durante a expansão inflacionária, passando a evoluir somente após a sua reentrada no horizonte.

O espectro primordial para o potencial gravitacional ϕ oriundo da época de inflação é [31]

$$\langle \phi^2 \rangle \propto \frac{H^2}{k^3}, \quad (5.5)$$

onde o parâmetro de Hubble é dado no instante de saída do horizonte. O espectro de potência primordial para a densidade de matéria, correspondente a esse espectro invariante de escala, é

$$P(k) = \langle \delta_k^2 \rangle \propto k, \quad (5.6)$$

e será usado como condição inicial para a construção do espectro de potência hoje observado.

Como dissemos, inicialmente todos os modos que estão fora do horizonte possuem suas amplitudes constantes, com comprimento de onda muito maior que a distância de Hubble, $k \ll aH/c$. Após a reentrada no horizonte, as perturbações passam a evoluir e seu crescimento depende da época da evolução, se dominada por radiação ($a \ll a_{eq}$) ou por matéria ($a \gg a_{eq}$). Para a matéria escura, por exemplo, na fase de radiação o crescimento da contraste de densidade é logarítmico, enquanto que na fase dominada por matéria δ cresce como uma potência do tempo. Em outras palavras, modos que entram no horizonte na época dominada por radiação possuem evolução diferente dos modos que entram na época dominada por matéria.

Então, a forma do espectro de potência depende principalmente do momento de equilíbrio entre radiação e matéria, dado pela igualdade dos parâmetros de densidade da radiação e da matéria $\Omega_R = \Omega_m$. Para o modelo Λ CDM, onde

$$\Omega_R = \frac{\Omega_{R0}}{a^4} = \Omega_{R0}(1+z)^4, \quad (5.7)$$

$$\Omega_m = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} = \Omega_{m0}(1+z)^3, \quad (5.8)$$

o redshift de equilíbrio é dada por

$$z_{eq} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{R0}} - 1. \quad (5.9)$$

Por outro lado, o momento em que as perturbações entram no horizonte ocorre quando

$$k = \frac{a}{d_H}, \quad d_H = \frac{c}{H} = \frac{c a}{\dot{a}}, \quad (5.10)$$

onde d_H é o raio de Hubble, dado por

$$d_H = \frac{c}{H_0} \left\{ \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0} \right\}^{-1/2}. \quad (5.11)$$

Desta forma,

$$[(1+z)k l_{H0}]^2 = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}, \quad (5.12)$$

onde l_{H0} é o raio de Hubble hoje, $l_{H0} = c/H_0 = 3000h^{-1}$ Mpc ($1 \text{ Mpc} \simeq 3,26 \times 10^6$ anos-luz $\simeq 3,08 \times 10^{24}$ cm). Substituindo em z a expressão para o z_{eq} , encontramos o número de onda correspondente ao momento de equilíbrio radiação-matéria,

$$k_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\Omega_{R0}} \frac{\Omega_{m0}}{l_{H0}}}. \quad (5.13)$$

Para o modelo que estudamos nesta tese, com o decaimento do vácuo especificado pelo ansatz $\Lambda = \sigma H$, é importante notar que a expressão para o parâmetro de Hubble (2.117) vale somente para tempos tardios, quando a radiação é desprezível. Uma expressão aproximada, que também inclua radiação, pode ser obtida simplesmente

somando a densidade de radiação, que se conserva separadamente, à densidade total na equação de Friedmann $3H^2 = \rho$. Sendo assim, o raio de Hubble fica determinado por

$$\left[k l_{H0} (1+z) \right]^2 = \frac{1}{\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0}} \left[\Omega_{\Lambda0} + \Omega_{m0}(1+z)^{3/2} \right]^2 + \Omega_{R0}(1+z)^4. \quad (5.14)$$

Sendo Ω_{R0} da ordem de 10^{-5} , podemos fazer $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} \approx 1$. A menos deste fator no denominador, ao tomarmos o limite de altos redshifts, quando o termo de vácuo é desprezível, o termo entre colchetes no lado direito da expressão acima toma a forma $\Omega_m(z) = \Omega_{m0}^2(1+z)^3$. Isto indica que para termos a mesma densidade de matéria hoje é preciso que a densidade de matéria para altos redshifts seja menor, e vice-versa, o que resulta do processo de produção de matéria. Dito isso, o z_{eq} para o modelo com interação fica determinado por

$$z_{eq} = \frac{\Omega_{m0}^2}{\Omega_{R0}} - 1, \quad (5.15)$$

enquanto que o número de onda no equilíbrio fica deslocado para grandes escalas (pequenos k 's),

$$k_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\Omega_{R0}} \frac{\Omega_{m0}^2}{l_{H0}}}, \quad (5.16)$$

quando comparado com o modelo Λ CDM. Este resultado mostra que o espectro de potência para o modelo com interação aparecerá deslocado para pequenos k 's quando comparado com o espectro do modelo Λ CDM, o que originará uma perda de potência além daquela obtida da análise newtoniana.

5.2 Termo cosmológico homogêneo ($\delta\Lambda = 0$)

Dadas as condições iniciais geradas pelo mecanismo inflacionário, podemos construir o espectro de potência da matéria para testar o modelo cosmológico apresentado nesta tese, integrando numericamente as equações de Einstein desde um redshift z para o qual o espectro primordial é invariante de escala, $\delta \propto \sqrt{k}$, até hoje ($z = 0$).

O passo inicial será escrever, no gauge síncrono, as equações de Einstein e as equações de balanço momento-energia para um fluido contendo radiação que se conserva separadamente e matéria e energia escuras que interagem entre si:

$$\ddot{h} + 2H\dot{h} = \sum_{\alpha} (\delta\rho_{\alpha} + 3\delta p_{\alpha}), \quad (5.17)$$

$$\sum_{\alpha} [(\rho_{\alpha} + p_{\alpha})\dot{\theta}_{\alpha} + 5H(\rho_{\alpha} + p_{\alpha})\theta_{\alpha} + (\dot{\rho}_{\alpha} + \dot{p}_{\alpha})\theta_{\alpha} - \frac{k^2}{a^2}\delta p_{\alpha}] = 0, \quad (5.18)$$

$$\sum_{\alpha} [\delta\dot{\rho}_{\alpha} + (\rho_{\alpha} + p_{\alpha})(\theta_{\alpha} - \frac{\dot{h}}{2}) + 3\frac{\dot{a}}{a}(\delta\rho_{\alpha} + \delta p_{\alpha})] = 0. \quad (5.19)$$

Aqui relembremos que o índice α representa uma determinada componente do fluido.

Fazendo isso, com a hipótese de que o termo de vácuo é estritamente homogêneo, ($\delta\Lambda = 0$), encontramos o conjunto de equações acopladas

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = \rho_m\delta_m + 2\rho_R\delta_R, \quad (5.20)$$

$$\dot{\delta}_m - \frac{\dot{\Lambda}}{\rho_m}\delta_m = \frac{\dot{h}}{2}, \quad (5.21)$$

$$\dot{\delta}_R + \frac{4}{3}\left\{\frac{v}{a} - \frac{\dot{h}}{2}\right\} = 0, \quad (5.22)$$

$$\dot{v} = \frac{k^2}{4a}\delta_R, \quad (5.23)$$

onde

$$\delta p_R = \frac{1}{3}\delta\rho_R, \quad (5.24)$$

$$\delta p_m = 0. \quad (5.25)$$

Estamos desprezando o stress anisotrópico da radiação, δ_m e δ_R são o contraste de densidade para matéria escura e radiação, respectivamente, e $v = a\theta$ é a velocidade peculiar da radiação. Para $\dot{\Lambda} = 0$, as equações acima se reduzem às do Λ CDM.

Podemos eliminar a variável \dot{h} na primeira equação usando a (5.21). Depois de dividir todos os termos por H_0^2 , introduzimos nas equações o redshift $z = a_0/a - 1$

como nova variável, fazendo ainda $a_0 = 1$. Então, as equações para o modelo tornam-se:

$$\delta_m'' - \left\{ \frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_m} + \frac{g_1[z]}{f_1[z]} \frac{1}{(1+z)^2} \right\} \delta_m' + \left\{ \frac{g_1[z]}{f_1[z]} \frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_m} \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{\Omega''_\Lambda}{\Omega_m} + \frac{\Omega'_m \Omega'_\Lambda}{\Omega_m^2} \right\} \delta_m = \frac{3}{2} \frac{1}{f_1[z](1+z)^4} \left\{ \Omega_m \delta_m + 2\Omega_R \delta_R \right\}, \quad (5.26)$$

$$\delta_R' - \frac{4}{3} \left\{ \frac{v}{(1+z)\sqrt{f_1[z]}} + \delta_m' - \frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_m} \delta_m \right\} = 0, \quad (5.27)$$

$$v' = - \left(\frac{k l_{H0}}{2} \right)^2 \frac{\delta_R}{(1+z)\sqrt{f_1[z]}}, \quad (5.28)$$

onde a linha sobre as variáveis representa derivada com relação a z , e $l_{H0} = c/H_0 = 3000h^{-1}$ Mpc é o raio de Hubble estimado hoje. As funções $\Omega_i \equiv \rho_i/3H_0^2$, $f_1[z]$ e $g_1[z]$ são as soluções de base do modelo, dadas por

$$f_1[z] = \dot{a}^2 = \frac{1}{(\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0})(1+z)^2} \left\{ \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0}(1+z)^{3/2} \right\}^2 + (1+z)^2 \Omega_{R0}, \quad (5.29)$$

$$g_1[z] = \ddot{a} = -\frac{(1+z)^2}{2} f_1'[z], \quad (5.30)$$

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_{\Lambda 0} \Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0}} \left\{ \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}} (1+z)^3 + (1+z)^{\frac{3}{2}} \right\}, \quad (5.31)$$

$$\Omega_\Lambda(z) = \frac{\Omega_{\Lambda 0}^2}{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0}} \left\{ 1 + \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}} (1+z)^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (5.32)$$

Para obter o espectro de potência precisamente, seria necessário fazer uma análise mais completa, integrando o sistema completo das equações de Einstein-Boltzmann [31]. No caso do Λ CDM, isso é feito com ajuda da função transferência BBKS [32],

$$P_m(k) = |\delta_m(k)|^2 = AT(k) \frac{g^2(\Omega_{m0})}{g^2(\Omega_T)} k, \quad (5.33)$$

onde A é uma constante de normalização, $T(k)$ é dado por

$$T(k) = \frac{\ln(1 + 2.34q)}{2.34q} \left[1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.64q)^3 + (6.71q)^4 \right]^{-\frac{1}{4}}, \quad (5.34)$$

$$q = \frac{k}{h\Gamma} \text{Mpc}^{-1}, \quad \Gamma = \Omega_{dm0} h e^{-\Omega_{b0} - \frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{dm0}}}, \quad (5.35)$$

e Ω_{m0} , Ω_{dm0} , Ω_{b0} e Ω_T são, respectivamente, os parâmetros de densidade atuais da matéria sem pressão (bariônica + escura), matéria escura, bárions e energia total. A função $g(\Omega)$ é dada por

$$g(\Omega) = \frac{5}{2}\Omega \left[\Omega^{\frac{4}{7}} - \Omega_{\Lambda 0} + \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{70}\right) \right]^{-1}. \quad (5.36)$$

No entanto, pode-se obter uma versão simplificada da função transferência integrando numericamente as equações acopladas para o modelo Λ CDM

$$\delta_m'' - \frac{g[z]}{f[z]} \frac{\delta_m'}{1+z} = \frac{3}{2f[z]} \left\{ \Omega_{m0}(1+z)\delta_m + 2\Omega_{R0}(1+z)^2\delta_R \right\}, \quad (5.37)$$

$$\delta_R' - \frac{4}{3} \left\{ \frac{v}{\sqrt{f[z]}} + \delta_m' \right\} = 0, \quad (5.38)$$

$$v' = - \left(\frac{kl_{H0}}{2} \right)^2 \frac{\delta_R}{\sqrt{f[z]}}, \quad (5.39)$$

desde um redshift $z = 10^{12}$, quando o espectro primordial é suposto ser invariante de escala, $\delta_m, \delta_R \propto \sqrt{k}$, até hoje. As funções da base $f[z]$ and $g[z]$ são agora dadas por

$$f[z] = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}, \quad (5.40)$$

$$g[z] = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}\Omega_{m0}(1+z)^3 - \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}. \quad (5.41)$$

Apresentamos nas Figuras 5.1 e 5.2 o espectro de potência de matéria oriundo da análise numérica exata do modelo Λ CDM, obtido com ajuda da função transferência (curva azul), a correspondente análise aproximada (em vermelho) e a análise aproximada para o modelo com interação (em violeta) [20]. Os dados observacionais são obtidos do projeto 2dFGRS [33], que cobre a faixa de escalas $0.01 \text{ Mpc}^{-1} < kh^{-1} < 0.185 \text{ Mpc}^{-1}$. Para o modelo com interação, na Figura 5.1 usamos para a densidade de matéria atual $\Omega_{m0} = 0,36$, o valor de concordância obtido de uma análise combinada de supernovas tipo Ia, oscilações acústicas bariônicas e da posição do primeiro pico do espectro da CMB [17]. Vemos que temos perda de potência no espectro quando comparado com o modelo padrão. Isto se deve a dois efeitos: o deslocamento do espectro para pequenos k 's e a supressão de potência devido à produção homogênea

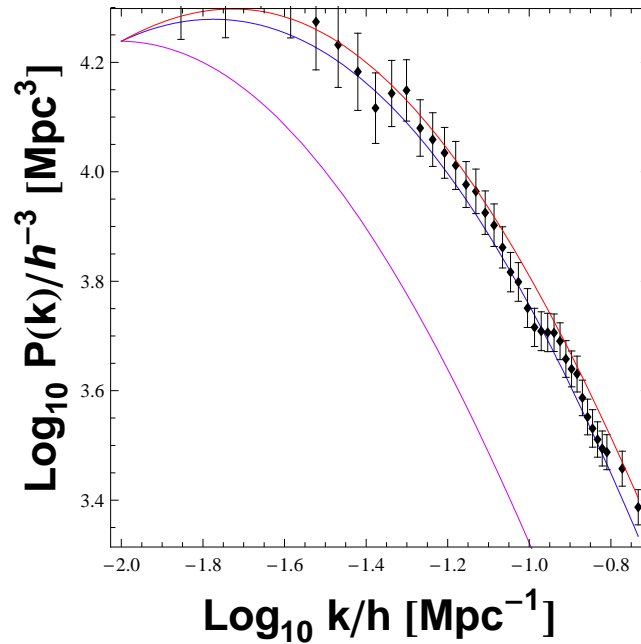


Figura 5.1: O espectro de potência de matéria dado pela função transferência BBKS (curva azul), a análise numérica aproximada usada para o modelo Λ CDM (curva vermelha) e para o modelo com interação (curva violeta). Os dados são obtidos do projeto 2dFGRS [33]. Usamos $\Omega_{m0} = 0.36$ para o modelo com interação e $\Omega_{m0} = 0.27$ para o Λ CDM.

de matéria. Entretanto, podemos deslocar o espectro para a direita se aumentarmos o valor do parâmetro densidade de matéria atual para, por exemplo, $\Omega_{m0} = 0.48$, como mostra a Figura 5.2. Dessa forma, não chegamos a um bom acordo com o espectro observado quando usamos a suposição de um termo de vácuo estritamente homogêneo, a menos que o valor de Ω_{m0} seja sensivelmente maior que o parâmetro densidade de matéria do modelo Λ CDM. Nas próximas seções, vamos relaxar a hipótese de um termo de vácuo estritamente homogêneo e realizar uma análise relativística mais completa, incluindo perturbações na densidade de energia escura.

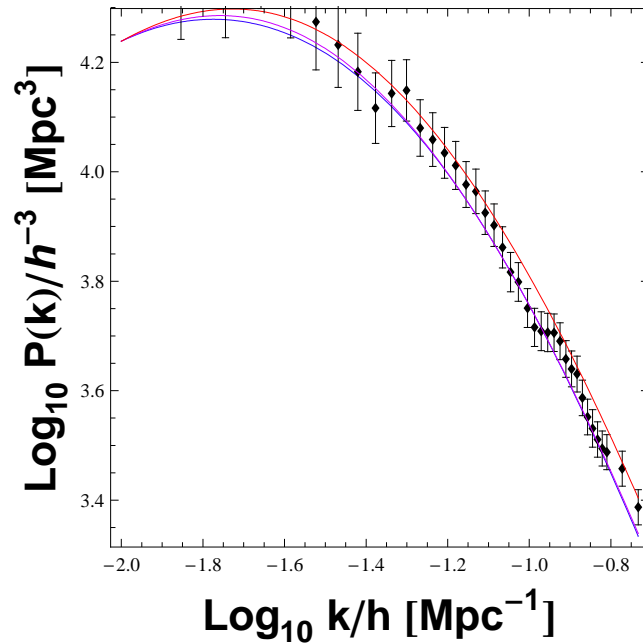


Figura 5.2: O espectro de potência de matéria dado pela função transferência BBKS (curva azul), a análise numérica aproximada usada para o modelo Λ CDM (curva vermelha) e para o modelo com interação (curva violeta). Os dados são obtidos do projeto 2dFGRS [33]. Usamos $\Omega_{m0} = 0.48$ para o modelo com interação e $\Omega_{m0} = 0.27$ para o Λ CDM.

5.3 Perturbando Λ no gauge síncrono

Para incluímos nas equações de Einstein as perturbações no termo de vácuo, primeiro devemos escrevê-lo numa forma covariante. Uma possibilidade é tomar a derivada covariante da 4-velocidade do fluido,

$$u^\mu_{;\sigma} \equiv \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} u^\nu, \quad (5.42)$$

e, usando a métrica de FLRW, expressar o termo de vácuo, dado pelo ansatz $\Lambda = \sigma H$, como

$$\Lambda = \frac{\sigma}{3} u^\nu_{;\nu}, \quad (5.43)$$

onde os observadores são comóveis e $u^\nu_{;\nu}$ é a divergência covariante da 4-velocidade.

Desta forma podemos perturbar esse ansatz, o que nos leva a

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\delta u^\nu}{\partial x^\nu} + \delta\Gamma_{\nu\alpha}^\nu u^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu \delta u^\alpha. \quad (5.44)$$

No gauge síncrono, usando as componentes dos símbolos de Christoffel perturbados (4.36), (4.37), (4.39) e $\delta u^0 = 0$, encontramos um ansatz para o termo cosmológico perturbado,

$$\delta\Lambda = \frac{\sigma}{3} \left(\theta - \frac{\dot{h}}{2} \right), \quad (5.45)$$

onde $\theta = \partial_i \delta u^i$ e a perturbação da métrica $h = h_{kk}/a^2$.

O próximo passo é escrever as equações de Einstein usando novamente o gauge síncrono. Além da radiação - que se conserva separadamente - e das componentes interagentes (termo de vácuo + matéria escura), vamos introduzir bárions, que também se conservam separadamente. Isso torna a análise numérica mais precisa, mas, como veremos, não mudará de forma significativa o espectro de potência correspondente.

Então, o conjunto de equações de Einstein acopladas escritas no gauge síncrono fica

$$\ddot{h} + 2H\dot{h} = \rho_{dm}\delta_{dm} + \rho_b\delta_b + 2\rho_R\delta_R - 2\Lambda\delta_\Lambda, \quad (5.46)$$

$$\dot{\delta}_R + \frac{4}{3} \left(\frac{v_R}{a} - \frac{\dot{h}}{2} \right) = 0, \quad (5.47)$$

$$\dot{v}_R = \frac{k^2}{4a} \delta_R, \quad (5.48)$$

$$\dot{\delta}_{dm} - \frac{\dot{\Lambda}}{\rho_{dm}} \delta_{dm} + \frac{v_{dm}}{a} - \frac{\dot{h}}{2} = -\frac{\dot{\Lambda}}{\rho_{dm}} \delta_\Lambda - \frac{\Lambda}{\rho_{dm}} \dot{\delta}_\Lambda, \quad (5.49)$$

$$\dot{v}_{dm} + \left(\frac{\dot{\rho}_{dm}}{\rho_{dm}} + 4H \right) v_{dm} = -\frac{k^2 \Lambda}{a \rho_{dm}} \delta_\Lambda, \quad (5.50)$$

$$\dot{\delta}_b = \frac{\dot{h}}{2}. \quad (5.51)$$

Nestas equações k é o número de onda; ρ_{dm} e ρ_b são as densidades de energia para a matéria escura e os bárions, respectivamente; $v_{dm} = a\theta$ e v_R são as velocidades

peculiares da matéria escura e radiação, respectivamente. A velocidade peculiar dos bárions desacopla e tende a zero, não contribuindo para as inhomogeneidades.

Podemos eliminar a métrica h das equações acima usando $\dot{\delta}_b = \dot{h}/2$, introduzir o ansatz (5.45) e eliminar v_{dm} . Feito isso, realizamos uma mudança na variável independente, do parâmetro de tempo cosmológico $H_0 t$ para o fator de escala $a(t)$, com $a_0 = 1$. Assim, encontramos o sistema de equações

$$\delta_b'' + \left(\frac{g}{f^2} + \frac{2}{a} \right) \delta_b' = \frac{3}{2f^2} (2\Omega_R \delta_R + \Omega_b \delta_b + \Omega_m \delta_m - 2\Omega_\Lambda \delta_\Lambda), \quad (5.52)$$

$$\delta_R' + \frac{4}{3} \left(\frac{v_R}{af} - \delta_b' \right) = 0, \quad (5.53)$$

$$v_R' - \frac{k^2}{4af} \delta_R = 0, \quad (5.54)$$

$$\delta_m' - \frac{1}{1+r} \left(r' - \frac{3r}{a} \right) \delta_m = - \left[\frac{1}{1+r} \left(r' - \frac{3r}{a} \right) + \frac{3}{a} \right] \delta_\Lambda - r \delta_\Lambda', \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda' + \left\{ \frac{f'}{f} + \left[\frac{1+4r}{(1+r)a} - \frac{r'}{1+r} \right] + \frac{k^2 r}{3af^2} \right\} \delta_\Lambda &= \\ &= \frac{a}{3} \left\{ \delta_b'' + \left[\frac{f'}{f} + \frac{2+5r}{(1+r)a} - \frac{r'}{1+r} \right] \delta_b' \right\}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde a linha sobre as quantidades representa agora derivada com relação ao fator de escala a , e não mais derivada com relação ao redshift z como na seção anterior. Aqui estamos usando as definições

$$\Omega_R = \frac{\Omega_{R0}}{a^4}, \quad (5.57)$$

$$\Omega_b = \frac{\Omega_{b0}}{a^3}, \quad (5.58)$$

$$\Omega_{dm} = \frac{1}{a^3} (\Omega_{dm0} - \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\Lambda 0}^2) + \frac{1}{a^{3/2}} (\Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{\Lambda 0}^2), \quad (5.59)$$

$$\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda 0}^2 + \frac{1}{a^{3/2}} (\Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{\Lambda 0}^2), \quad (5.60)$$

$$r = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{dm}}, \quad (5.61)$$

$$g = a \left(-\Omega_R - \frac{\Omega_b}{2} - \frac{\Omega_{dm}}{2} + \Omega_\Lambda \right), \quad (5.62)$$

$$f = a (\Omega_R + \Omega_b + \Omega_{dm} + \Omega_\Lambda)^{1/2}, \quad (5.63)$$

que são nossas soluções de base.

Notemos que ao escrever as equações perturbadas estamos fazendo uma suposição: as partículas que são produzidas devido ao decaimento do termo de vácuo possuem a mesma velocidade do fluido pré-existente, formado pelas componentes matéria escura e energia escura, isto é, $\theta = \theta_{dm}$. Por outro lado, nas soluções de base tomamos $\Omega_{b0} + \Omega_{dm0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$, já que $\Omega_{R0} \approx 8,4 \times 10^{-5}$ é desprezível quando comparado com os demais parâmetros de densidade atuais.

O sistema de equações acopladas obtida deve ser integrado desde redshifts muito altos - da ordem por exemplo de $z = 10^{12}$, de modo que as perturbações apresentem espectros invariantes de escala - até o presente momento, quando $z = 0$. Nesta seção consideraremos que as perturbações no termo de vácuo possuem um espectro inicial invariante de escala, com mesma amplitude das perturbações da matéria, ou seja, $\delta_\Lambda \propto \delta_{dm} \propto \sqrt{k}$.¹ O espectro obtido será normalizado com ajuda da função transferência BBKS. Quatro combinações possíveis serão consideradas a fim de analisar a concordância do modelo com o espectro observado: com ou sem perturbação no termo de vácuo, com ou sem inclusão de bárions.

A figura 5.3 mostra os espectros de potência com o melhor ajuste para o modelo Λ CDM, para o caso em que o termo de vácuo não é perturbado e para o caso em que é perturbado quando os bárions não são incluídos, o que significa fazer $\Omega_{b0} = 0$ nas equações de evolução das pequenas flutuações. Nas figuras 5.4 e 5.5 mostramos também as correspondentes funções de distribuição de probabilidade (PDF), definidas por

$$F = A \exp(-\chi^2/2), \quad (5.64)$$

¹A condição inicial $\delta\Lambda = 0$ também foi utilizada, mas sem alteração significativa em nossos resultados.

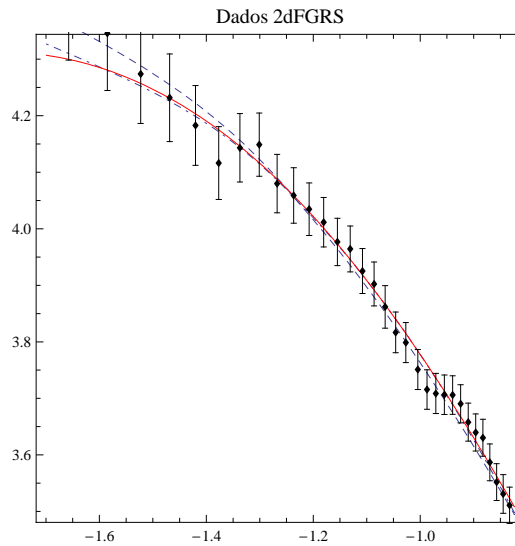


Figura 5.3: Melhores ajustes para o modelo Λ CDM (linha contínua), para o modelo com interação sem perturbações em Λ (linha tracejada) e com perturbações em Λ (linha ponto-tracejada), quando os bárions são excluídos.

onde A é uma constante de normalização. O χ^2 estatístico na exponencial é dado por

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{\mathcal{P}_i^o - \mathcal{P}_i^t}{\sigma_i} \right)^2, \quad (5.65)$$

onde \mathcal{P}_i^o é o dado observacional para o i -ésimo valor de k , σ_i é a barra de erro observacional e \mathcal{P}_i^t é o correspondente valor teórico.

	$\delta\Lambda \neq 0, \Omega_{b0} = 0$	$\delta\Lambda = 0, \Omega_{b0} = 0$	$\delta\Lambda \neq 0, \Omega_{b0} = 0.04$	$\delta\Lambda = 0, \Omega_{b0} = 0.04$
χ_r^2	0.31	0.35	0.31	0.35
Ω_{dm0}	0.96	0.55	0.86	0.49
$\Omega_{\Lambda 0}$	0.04	0.45	0.10	0.47

Fazemos o mesmo nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8, mas agora incluímos bárions com $\Omega_{b0} = 0,044$. Como é evidente, a introdução de perturbações no termo cosmológico da forma como é feita aqui piora os nossos resultados [34], sendo preciso uma grande quantidade de matéria escura para ajustar o espectro de potência com o do modelo Λ CDM. A tabela acima mostra os melhores ajustes para as quatro combinações.

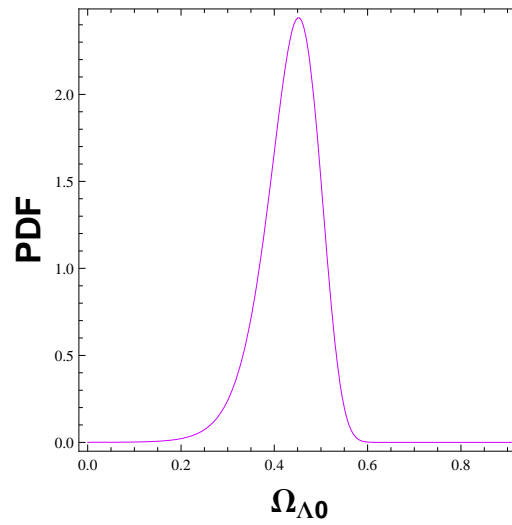


Figura 5.4: Função de distribuição de probabilidade (PDF) do parâmetro de densidade da energia escura quando o termo cosmológico não é perturbado para o caso em que os bárions são excluídos.

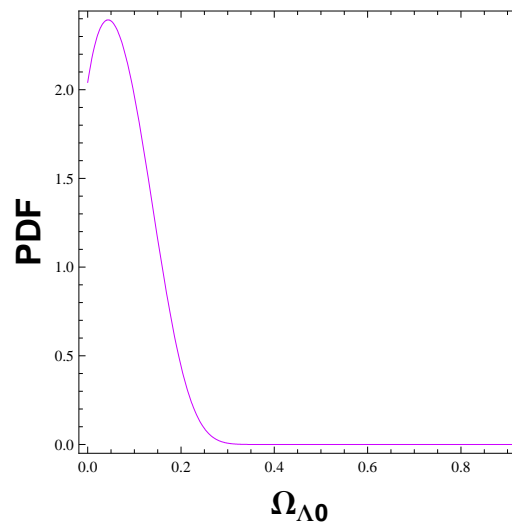


Figura 5.5: Função de distribuição de probabilidade (PDF) do parâmetro de densidade da energia escura quando o termo cosmológico é perturbado para o caso em que os bárions são excluídos.

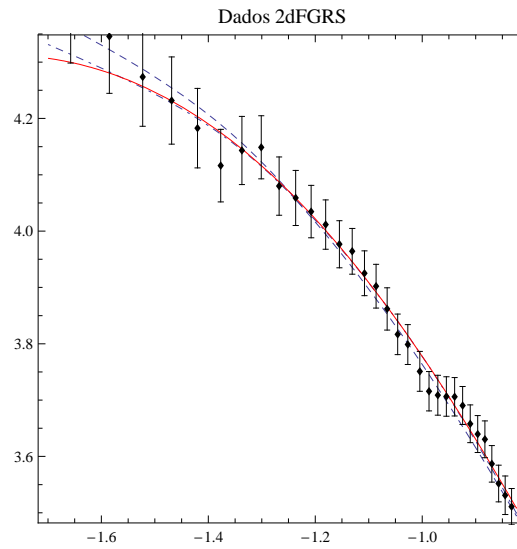


Figura 5.6: Melhores ajustes para o modelo Λ CDM (linha contínua), para o modelo com interação sem perturbações em Λ (linha tracejada) e com perturbações em Λ (linha ponto-tracejada), quando os bárions são incluídos.

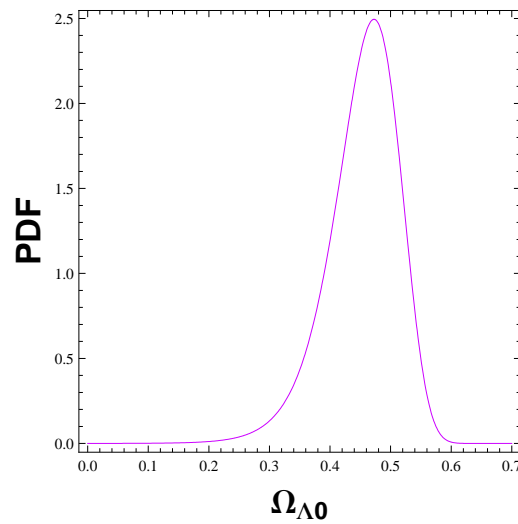


Figura 5.7: Função de distribuição de probabilidade (PDF) do parâmetro de densidade da energia escura quando o termo cosmológico não é perturbado para o caso em que os bárions são incluídos.

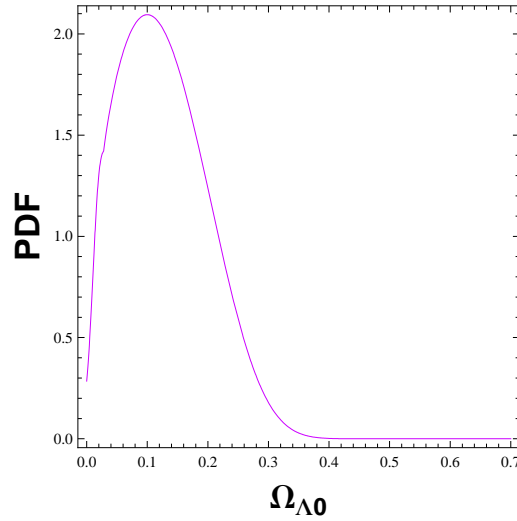


Figura 5.8: Função de distribuição de probabilidade (PDF) do parâmetro de densidade da energia escura quando o termo cosmológico é perturbado para o caso em que os bárions são incluídos.

Vale ressaltar que não conseguimos integrar as equações desde redshifts muito altos, e o espectro foi construído integrando-as desde $z = 1100$ (redshift de último espalhamento), utilizando-se como condições iniciais o espectro do Λ CDM neste redshift. Uma possível origem para a dificuldade de integração das equações desde redshifts muito altos é a utilização do gauge síncrono, pois modos espúrios podem estar presentes em escalas maiores que o horizonte.

5.4 Não-adiabaticidade

Podemos evidenciar o termo de interação entre as componentes do setor escuro na equação da continuidade da seguinte forma: da equação de Friedmann $3H^2 = \rho_m + \rho_\Lambda$ e da equação da continuidade $\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\rho_\Lambda$, encontra-se

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\rho_m, \quad (5.66)$$

e, usando o ansatz da base $\Lambda = \sigma H$, chegamos às equações de balanço de energia para as componentes matéria escura e energia escura,

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \frac{\sigma}{2}\rho_m = Q, \quad (5.67)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = -\frac{\sigma}{2}\rho_m = -Q, \quad (5.68)$$

onde o ponto representa derivada com respeito ao tempo cosmológico. Aqui, Q é a taxa de transferência de energia do termo de vácuo para a matéria escura.

Agora vamos escrever a equação de conservação covariante do tensor momento-energia para cada componente na forma

$$(T^{\mu\nu};_{;\mu})_m = Q^\nu, \quad (5.69)$$

$$(T^{\mu\nu};_{;\mu})_\Lambda = -Q^\nu. \quad (5.70)$$

O termo de interação covariante Q^ν pode ser decomposto com relação à 4-velocidade total u^μ do fluido [29],

$$Q^\mu = Qu^\mu + \bar{Q}^\mu, \quad u^\mu \bar{Q}^\mu = 0, \quad (5.71)$$

onde Q é a taxa de transferência de energia e \bar{Q}^μ é a taxa de transferência de momento.

Perturbando o termo de interação acima, usando o gauge síncrono, onde $\delta u^0 = 0 = \delta u_0$ e $h_{00} = 0 = h_{0i}$, e um sistema de observadores comóveis ($u^\mu = (1, 0)$), encontramos as componentes

$$\delta Q^0 = \delta Q, \quad (5.72)$$

$$\delta Q^i = \delta u^i Q + \delta \bar{Q}^i. \quad (5.73)$$

As equações (5.108) e (5.70) perturbadas até a primeira ordem de aproximação no gauge síncrono são dadas por

$$\delta \dot{\rho}_\alpha + (\rho_\alpha + p_\alpha)\theta_\alpha - (\rho_\alpha + p_\alpha)\frac{\dot{h}}{2} + 3H(\delta\rho_\alpha + \delta p_\alpha) = \pm\delta Q, \quad (5.74)$$

$$(\rho_\alpha + p_\alpha)\dot{\theta}_\alpha + 5H(\rho_\alpha + p_\alpha)\theta_\alpha + (\dot{\rho}_\alpha + \dot{p}_\alpha)\theta_\alpha + \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta p_\alpha = \pm(\theta Q + \delta\bar{Q}^i_{;i}). \quad (5.75)$$

A primeira equação para a α -ésima componente (que pode ser matéria escura ou energia escura) é obtida tomando-se $\nu = 0$, a segunda $\nu = i$.

Para a matéria escura ($p_m = 0 = \delta p_m$) temos

$$\delta \dot{\rho}_m + \left(\theta_m - \frac{\dot{h}}{2} \right) \rho_m + 3H \delta \rho_m = \delta Q, \quad (5.76)$$

$$\rho_m \dot{\theta}_m + 2H \rho_m \theta_m + Q \theta_m = Q \theta + \delta \bar{Q}^i_{,i}. \quad (5.77)$$

Similarmente, para a energia escura com equação de estado $p_x = -\rho_x$ obtemos

$$\delta \dot{\rho}_\Lambda + 3H(\delta \rho_\Lambda + \delta p_\Lambda) = -\delta Q, \quad (5.78)$$

$$\frac{\nabla^2 \delta p_\Lambda}{a^2} = -(Q \theta + \delta \bar{Q}^i_{,i}). \quad (5.79)$$

A fim de determinar os termos de interação δQ e $\delta \bar{Q}^i$ que entram no membro direito das equações acima, precisamos de uma forma covariante para o termo de acoplamento Q^μ que seja válida no universo inhomogêneo e se reduza à forma da base para a métrica de FLRW. Vamos tomar o ansatz

$$Q^\mu = \frac{\sigma}{2} u_m^\mu T_{\nu(m)}^\nu, \quad (5.80)$$

onde $T_{\nu(m)}^\nu$ é o traço do tensor momento-energia da matéria escura, u_m^μ é a 4-velocidade da matéria escura, e na base $Q^\mu = (\frac{\sigma}{2} \rho_m, 0)$. Perturbando o ansatz acima e usando $\delta T_{\nu}^\nu = \delta \rho_m$, encontramos as componentes

$$\delta Q^0 = \frac{\sigma}{2} \delta \rho_m, \quad (5.81)$$

$$\delta Q^i = Q \delta u_m^i. \quad (5.82)$$

Comparando-as com as componentes (5.72) e (5.73) encontramos

$$\delta Q = \frac{\sigma}{2} \delta \rho_m, \quad (5.83)$$

$$\delta \bar{Q}^i = Q(\delta u_m^i - \delta u^i). \quad (5.84)$$

Observemos que, substituindo (5.84) nos membros direitos das expressões (5.79) e (5.77), a 4-velocidade total θ é eliminada, o que significa dizer que não há transferência de momento no nível perturbativo neste formalismo, já que fazer $\delta u^i = \delta u_m^i$ nos leva aos mesmos resultados. Então, com os termos de acoplamento já determinados, as equações (5.76)-(5.79) tornam-se

$$\dot{\delta}_m = \frac{\dot{h}}{2} - \theta_m, \quad (5.85)$$

$$\dot{\theta}_m + 2H\theta_m = 0, \quad (5.86)$$

$$\dot{\delta}_\Lambda + \left(\frac{\dot{\rho}_\Lambda}{\rho_\Lambda} + 3H \right) \delta_\Lambda + 3H \frac{\delta p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -\frac{\sigma}{2} \frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} \delta_m, \quad (5.87)$$

$$\frac{k^2}{a^2} \delta p_\Lambda = \frac{\sigma}{2} \theta_m, \quad (5.88)$$

onde usamos a definição $\delta = \delta\rho/\rho$ do contraste de densidade.

A solução da equação (5.86) é $\theta_m = ca^{-2}$ e decai com o fator de escala. Podemos escolher a constante c tomando como condição inicial $\theta_m(a_0 = 1) = c = 0$, e desta forma a perturbação na velocidade da matéria escura não contribui para o crescimento das pequenas flutuações na densidade de energia. Assim, a equação (5.85) nos dá a relação entre a métrica e o contraste de densidade da matéria escura,

$$\dot{\delta}_m = \frac{\dot{h}}{2}, \quad (5.89)$$

enquanto a (5.88) nos diz que a perturbação na pressão da componente de energia escura é igual a zero neste formalismo. Isso significa que, se há perturbações na componente de energia escura, as mesmas não são adiabáticas. Por outro lado, como a quantidade θ_m não é um invariante de gauge, pois no gauge síncrono não conseguimos construir quantidades invariantes [35], é possível que ao fazê-la igual a zero estejamos negligenciando algum termo físico na velocidade ($\theta_{físico} + \theta_{espúrio} = ca^{-2}$). Este problema nos motiva a escolher gauges onde as quantidades construídas são invariantes, como é o caso do gauge longitudinal e do gauge comóvel.

5.5 Perturbações entrópicas

Como as componentes do setor escuro possuem interação, perturbações entrópicas devem ser incluídas. Consideremos o caso em que a pressão do sistema é uma função das densidades de energia ρ e entropia s . Uma perturbação na pressão leva à expressão

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial p}{\partial s} \delta s, \quad (5.90)$$

que pode ser posta na forma

$$\delta p_{nad} = \delta p - c_a^2 \delta \rho, \quad (5.91)$$

onde introduzimos a velocidade sonora adiabática

$$c_a^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \quad (5.92)$$

e identificamos a perturbação na pressão não adiabática (entrópica) como

$$\delta p_{nad} \equiv \frac{\partial p}{\partial s} \delta s. \quad (5.93)$$

Portanto, se a diferença $\delta p - c_a^2 \delta \rho$ for zero, temos perturbações adiabáticas, caso contrário, o sistema é entrópico. Vemos então que o único grau de liberdade adiabático é a densidade de energia, qualquer outro grau de liberdade poderá contribuir para as perturbações entrópicas.

Em geral, a perturbação entrópica pode ser separada em duas partes [29]:

$$\delta p_{nad} = \delta p_{int} + \delta p_{rel}. \quad (5.94)$$

A primeira é devida a uma perturbação intrínseca em cada componente do fluido, associada à sua estrutura interna, e a segunda parte é uma perturbação entrópica relativa entre as componentes interagentes.

Uma forma invariante de gauge para a perturbação intrínseca pode ser encontrada partindo-se da definição da velocidade sonora efetiva de cada componente, $c_{s\alpha}^2$, como a velocidade de propagação das flutuações de pressão no sistema de repouso [36, 37],

$$c_{s\alpha}^2 = \left. \frac{\delta p_\alpha}{\delta \rho_\alpha} \right|_{repouso}. \quad (5.95)$$

Passando para um sistema qualquer obtemos

$$\delta p_\alpha = c_{a\alpha}^2 \delta \rho_\alpha + \delta p_{int,\alpha} = c_{s\alpha}^2 \delta \rho_\alpha + (c_{s\alpha}^2 - c_{a\alpha}^2)[3H(\rho_\alpha + p_\alpha) - Q_\alpha] \frac{\theta_\alpha}{k^2}, \quad (5.96)$$

onde $c_{a\alpha}^2$ é a velocidade sonora adiabática, k é o vetor de onda e θ_α é a velocidade peculiar.

A perturbação entrópica relativa é uma quantidade invariante de gauge dada por [27, 29, 40]

$$\delta p_{rel} = \sum_\alpha (c_{a\alpha}^2 - c_a^2) \delta \rho_\alpha, \quad (5.97)$$

onde a velocidade sonora adiabática total é uma média ponderada das velocidades sonoras adiabáticas de cada componente em interação,

$$c_a^2 = \sum_\alpha \frac{\dot{\rho}_\alpha}{\dot{\rho}} c_{a\alpha}^2. \quad (5.98)$$

Combinando as duas últimas expressões acima, para uma interação entre matéria escura e energia escura, encontramos a perturbação entrópica relativa

$$\delta p_{rel,\Lambda m} = \frac{\dot{\rho}_m \dot{\rho}_\Lambda}{3H \dot{\rho}} (c_{a\Lambda}^2 - c_{am}^2) S_{\Lambda m}, \quad (5.99)$$

$$S_{\Lambda m} = 3H \left(\frac{\delta \rho_\Lambda}{\dot{\rho}_\Lambda} - \frac{\delta \rho_m}{\dot{\rho}_m} \right). \quad (5.100)$$

5.6 Perturbando Λ no gauge comóvel

Lembramos da seção 5.3 que, ao introduzir perturbações no termo de vácuo usando o ansatz $\rho_\Lambda \propto u_{;\nu}^\nu$, surgia um problema: não conseguíamos integrar as equações desde z muito altos. Associamos tal dificuldade à utilização do gauge síncrono. Agora, sem nos determos em todos os detalhes técnicos, iremos apresentar uma equação de evolução para o contraste de matéria obtida de uma análise manifestamente invariante de gauge, a qual explora apenas o setor escuro [76].

Como vimos, a equação de balanço da energia para as componentes escuras são

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q, \quad (5.101)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = -Q, \quad (5.102)$$

com o ansatz covariante

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\frac{\sigma}{3}\Theta, \quad (5.103)$$

onde Q é a taxa de transferência de energia e $\Theta = u^\nu_{;\nu}$ é o escalar de expansão, cuja evolução é governada pela equação de Raychaudhuri

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - \dot{u}^a_{;a} + 4\pi G\rho_M - \frac{8\pi G}{3}\sigma\Theta = 0. \quad (5.104)$$

A equação de estado (5.103) é semelhante a um modelo com um fluido viscoso de coeficiente $\zeta = \sigma/3$ (ver [57]) e cuja dinâmica de base coincide com um gás de Chaplygin com equação de estado $p = -A/\rho^\alpha$, com $\alpha = -1/2$, conforme veremos na seção 5.7.

Para cada componente escura temos

$$(T^{\mu\nu};_{;\mu})_m = Q^\nu, \quad (5.105)$$

$$(T^{\mu\nu};_{;\mu})_\Lambda = -Q^\nu, \quad (5.106)$$

com

$$Q^\mu = Qu^\mu + \bar{Q}^\mu, \quad u^\mu\bar{Q}^\mu = 0, \quad (5.107)$$

e

$$(T^{\mu\nu};_{;\mu})_m + (T^{\mu\nu};_{;\mu})_\Lambda = T^{\mu\nu};_{;\mu}. \quad (5.108)$$

As equações de balanço energia-momento para cada componente são, respectivamente,

$$-u_\mu T^\mu_{\alpha;\nu} = \rho_{\alpha,\gamma}u^\gamma + \Theta_\alpha(\rho_\alpha + p_\alpha) = \pm u_\gamma Q^\gamma, \quad (5.109)$$

$$h^\gamma_{\alpha\mu} T^\mu_{\alpha;\nu} = (\rho_\alpha + p_\alpha)\dot{u}^\gamma + p_{\alpha,\mu}h^{\gamma\mu}_\alpha = \pm h^\gamma_{\alpha\mu} Q^\mu, \quad (5.110)$$

onde α pode ser matéria ou termo de vácuo. Aqui, $u_\nu h^{\mu\nu} = 0$, $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ e $\dot{\rho}_\alpha = \rho_{\alpha,\gamma}u^\gamma$. Para determinar os termos de interação, se faz uma análise de consistência entre o balanço da energia total e da energia da matéria (perturbados), encontrando-se

$$Q = -\frac{\sigma}{3}\dot{\Theta}, \quad \delta Q = -\frac{\sigma}{3}\delta\dot{\Theta}. \quad (5.111)$$

Fazendo o mesmo para o balanço do momento total e do momento da matéria, obtêm-se

$$\delta\bar{Q}_0 = 0, \quad \delta\bar{Q}_i = \frac{\sigma}{3} \left[\delta\Theta_{,i} + \delta u_i \dot{\Theta} \right]. \quad (5.112)$$

Uma combinação das equações de balanço momento-energia e da equação de Raychaudhuri perturbadas nos permite obter uma equação diferencial de segunda ordem para o contraste de matéria,

$$\delta_m'' + g(a)\delta_m' + f(a)\delta_m^c = 0, \quad (5.113)$$

onde introduzimos a quantidade invariante de gauge

$$\delta_m^c = \frac{\delta\rho_m}{\rho_m} + \frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} v, \quad (5.114)$$

v é o potencial velocidade (em tempo cosmológico), a linha representa derivada com relação ao fator de escala e c significa comóvel.

As funções de base são

$$g(a) = \frac{1}{a} \left[\frac{3}{2} + 8\pi G \frac{\sigma}{H} - \frac{L}{K} + \frac{\sigma H}{3\rho_m} \frac{k^2}{a^2 H^2} \right], \quad (5.115)$$

$$f(a) = -\frac{1}{a^2} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{4\pi G\sigma}{H} \right) K + \frac{8\pi G\sigma}{3H} \left(\frac{L}{K} - 2 - \frac{4\pi G\sigma}{3H} - \frac{\sigma H}{3\rho_m} \frac{k^2}{a^2 H^2} \right) \right], \quad (5.116)$$

onde (não estamos fazendo $8\pi G = 1$)

$$K = 1 + \frac{\sigma H}{3\rho_m} \left(1 - \frac{4\pi G\sigma}{3H} - \frac{\sigma H}{3\rho_m} \frac{k^2}{a^2 H^2} \right), \quad (5.117)$$

$$L = \frac{\dot{K}}{H} = \frac{4\pi G\sigma}{3H} + \left(\frac{4\pi G\sigma}{3H} \right)^2 \frac{\sigma H}{\rho_m} + \left(\frac{\sigma H}{3\rho_m} \right)^2 \left(8\pi G \frac{\sigma}{H} - 4 \right) \frac{k^2}{a^2 H^2}, \quad (5.118)$$

com $\sigma = 3H_0\Omega_{\Lambda 0} = 3H_0(1 - \Omega_{m,0})$.

Para δ_Λ^c encontramos a expressão

$$\delta_\Lambda = \frac{2\dot{\rho}_\Lambda}{3\rho_m\rho_\Lambda K} (aH\delta_m' + H_0\Omega_{\Lambda 0}\delta_m) \quad (5.119)$$

(onde omitimos o índice c).

Vale ressaltar que supusemos $c_s^2 = -1$, ou seja, que a energia escura apresenta perturbação entrópica intrínseca desprezível. Além disso, é possível mostrar que condições iniciais adiabáticas podem ser usadas em altos redshifts, como veremos na subseção 5.6.1.

5.6.1 O potencial gravitacional

Considere o elemento de linha com todas as perturbações escalares

$$ds^2 = a(\eta)^2 [-(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i + (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j + 2E_{,ij}dx^i dx^j]. \quad (5.120)$$

Os potenciais de Bardeen são definidos como

$$\Phi_B = \phi + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')', \quad (5.121)$$

$$\Psi_B = \psi - \mathcal{H}(B - E'). \quad (5.122)$$

Por outro lado, no gauge comóvel as funções escalares da métrica e a densidade de energia se transformam como

$$\tilde{\phi} = \phi + \mathcal{H}(B + v) + (B + v)', \quad (5.123)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H}(B + v), \quad (5.124)$$

$$\tilde{E}' = E' + v, \quad (5.125)$$

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho + \rho'(v + B), \quad (5.126)$$

onde a linha agora representa derivada com relação ao tempo conforme. Notemos que os potenciais de Bardeen coincidem com as funções $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ quando $E' = -v$, o que implica em $\tilde{E}' = 0$. Notemos também que, para $B = 0$, temos $\tilde{\delta\rho} = \delta\rho^c$.

Da conservação do momento e energia podemos obter, no gauge comóvel, as equações de balanço momento-energia para componentes com interação,

$$\tilde{\delta\rho}'_\alpha + 3\mathcal{H}(\tilde{\delta\rho}_\alpha + \tilde{\delta p}_\alpha) - (\rho_\alpha + p_\alpha)(3\tilde{\psi}' + k^2\tilde{E}') = aQ_\alpha\tilde{\phi} + a\tilde{\delta Q}_\alpha, \quad (5.127)$$

$$\delta\tilde{p}_\alpha - \frac{2}{3}k^2\tilde{\pi} + (\rho_\alpha + p_\alpha)\tilde{\phi} = aQ_\alpha v + a\delta\tilde{q}_\alpha, \quad (5.128)$$

onde

$$Q_m = -Q_\Lambda = \frac{\sigma}{2}\rho_m, \quad (5.129)$$

$$\delta\tilde{Q}_m = -\delta\tilde{Q}_\Lambda = \frac{\sigma}{2}\delta\tilde{\rho}_m, \quad (5.130)$$

$$\delta\tilde{q}_m = -\delta\tilde{q}_\Lambda = Q_m(\tilde{v}_m - v), \quad (5.131)$$

e $\tilde{\pi}$ é o stress anisotrópico. Estes termos de acoplamento são equivalentes a (5.111) e (5.112), com

$$\frac{\sigma}{3}\delta\Theta_{,i} = Q\delta u_i^{(m)} - \frac{2}{3}\pi_{,i}, \quad (5.132)$$

e $\delta u_i = a\partial_i v$.

Das equações de Einstein temos

$$\tilde{E}'' + 2\mathcal{H}\tilde{E}' + \tilde{\psi} - \tilde{\phi} = a^2\tilde{\pi}, \quad (5.133)$$

$$\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi} = 0, \quad (5.134)$$

$$3\mathcal{H}(\tilde{\psi}' + \mathcal{H}\tilde{\phi}) + k^2\tilde{\psi} + k^2\mathcal{H}\tilde{E}' = -\frac{a^2}{2}\delta\tilde{\rho}. \quad (5.135)$$

Combinando as duas últimas equações encontra-se

$$k^2\tilde{\psi} = -\frac{a^2}{2}(\delta\tilde{\rho} + \frac{2k^2\mathcal{H}}{a^2}\tilde{E}'), \quad (5.136)$$

e, no caso em que $\tilde{E}' = 0$, identificamos

$$k^2\Psi_B = -\frac{a^2}{2}\delta\tilde{\rho}. \quad (5.137)$$

Esse potencial fica portanto determinado pela perturbação na energia total.

Da equação (5.128) para a componente da energia escura, com $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ e $c_s^2 = -1$, encontra-se

$$\tilde{\pi} = -\frac{3\delta\tilde{\rho}_\Lambda}{2k^2}, \quad (5.138)$$

onde fizemos $\tilde{v}_m = 0$ na (5.131) (pois estamos no gauge comóvel). Finalmente, usando este resultado em (5.133) com $\tilde{E}' = 0$, encontramos o outro potencial de Bardeen,

$$k^2\Phi_B = -\frac{a^2}{2}(\delta\tilde{\rho}_m - 2\delta\tilde{\rho}_\Lambda), \quad (5.139)$$

o qual pode ser identificado com o potencial gravitacional newtoniano.

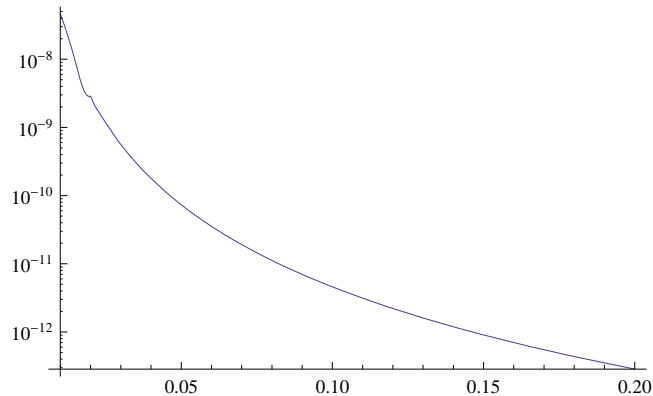


Figura 5.9: A razão $\delta_\Lambda^2/\delta_m^2$ em função de k , para $\Omega_{m0} = 0,3$.

5.6.2 Quantificando δ_Λ e a não-adiabaticidade

Na integração da equação (5.113) usamos condições iniciais adiabáticas, tomando o espectro primordial invariante de escala $\delta_m \propto \sqrt{k}$ para $z \sim 10^{12}$. Nesta análise não consideramos a presença de bárions nem radiação. A ausência dos bárions pode ser considerada uma boa aproximação, já que eles representam apenas 5% do conteúdo energético total. Por outro lado, a inclusão de radiação pode afetar os modos com pequenos comprimentos de onda, aqueles que entram mais cedo no horizonte.

Como sabemos, o espectro de potência observado refere-se à matéria bariônica luminosa. No modelo Λ CDM a distribuição dos bárions é aproximadamente determinada pela distribuição da matéria escura, cujo espectro de potência é dado por δ_m^2 . No entanto, no presente modelo a distribuição dos bárions - se tratados como partículas de prova - é determinada pelo potencial gravitacional Φ_B , o qual resulta das perturbações na matéria escura e no termo cosmológico. Em outras palavras, o espectro de potência dos bárions fica aproximadamente determinado pelo poço de potencial resultante produzido pelo setor escuro. É somente no caso de $\delta\rho_\Lambda$ ser desprezível que podemos identificar δ_m com o espectro observado.

Mostramos na figura 5.5 a razão $\delta_\Lambda^2/\delta_m^2$ em função de k , obtida através das

equações (5.119) e (5.113) com $\Omega_{m0} = 0,3$. Vemos que ela é desprezível. Variando Ω_{m0} , pudemos verificar que essa razão é tanto maior quanto maior a densidade de matéria. No entanto, mesmo para $\Omega_{m0} \approx 1$, obtemos uma razão menor que 5%. Notamos também que a perturbação na componente de energia escura é tanto maior quanto maior o comprimento de onda, o que sugere que Λ só é perturbado em escalas muito grandes.

Dessa forma, a análise feita na seção 5.2, com $\delta\rho_\Lambda = 0$, pode ser considerada uma boa aproximação. O que implica que um bom ajuste do espectro observado só é mesmo possível com uma densidade relativa de matéria da ordem de 0,48, alta quando comparada ao valor de concordância do Λ CDM. O acordo entre este resultado e outros testes observacionais no contexto do presente modelo será discutido no capítulo de conclusões.

Contudo, não podemos aqui estabelecer uma conclusão definitiva a esse respeito, pois a presente análise não inclui os efeitos da matéria bariônica nem, especialmente, os da radiação. Além disso, lembremos que a perturbação entrópica relativa não foi considerada na seção 5.2, e que sua contribuição não é nula. De fato, fazendo $\delta\rho_\Lambda = 0$ em (5.99), obtemos

$$\frac{\delta p_{rel}}{\delta\rho_m} = \frac{\dot{\rho}_\Lambda}{\dot{\rho}} = \frac{\sigma}{6H} = \frac{H_0\Omega_{\Lambda 0}}{2H}. \quad (5.140)$$

Dessa forma, a não-adiabaticidade do modelo cresce com o tempo, e seu valor máximo é dado por $\Omega_{\Lambda 0}/2$. Usando $\Omega_{m0} \approx 0,48$, obtemos um limite superior para a não-adiabaticidade da ordem de 25%. Por outro lado, substituindo (2.117) em (5.140) temos

$$\frac{\delta p_{rel}}{\delta\rho_m} = \frac{\Omega_{\Lambda 0}/2}{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0}(1+z)^{3/2}}. \quad (5.141)$$

Integrando esta última expressão entre $z = 0$ e $z = 5$ (redshift abaixo do qual o decaimento do vácuo começa a ter importância - ver figura 3.2), obtemos uma não-adiabaticidade média da ordem de 8%.

5.7 Perturbando Λ no gauge longitudinal

Agora vamos incluir nas equações de evolução das perturbações a contribuição dos bárions e da radiação, os quais supomos se conservar independentemente. Nos propomos usar o gauge longitudinal, no qual as quantidades são invariantes. A métrica com perturbações escalares é dada por

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1 + 2\phi)d\eta^2 + (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (5.142)$$

onde η é o tempo conforme. A 4-velocidade na base, no sistema de referência comóvel, é dada por $u^\mu = (a^{-1}, 0)$, e a 4-velocidade perturbada é dada por $\delta u^\mu = a^{-1}(-\phi, \partial^i v)$ e $\delta u_\mu = a(-\phi, \partial_i v)$, onde $v \equiv \delta v$ é o potencial da velocidade perturbada.

Perturbando o termo de interação (5.107), obtemos as componentes

$$\delta Q_0 = -a(\delta Q + Q\phi), \quad (5.143)$$

$$\delta Q_i = a\partial_i(Qv + \delta q). \quad (5.144)$$

Para cada componente α , as equações de balanço de energia-momento perturbados são

$$\delta\rho'_\alpha + 3\mathcal{H}(\delta\rho_\alpha + \delta p_\alpha) - 3(\rho_\alpha + p_\alpha)\psi' - k^2(\rho_\alpha + p_\alpha)v_\alpha = aQ_\alpha\phi + a\delta Q_\alpha, \quad (5.145)$$

$$[(\rho_\alpha + p_\alpha)v_\alpha]' + 4\mathcal{H}(\rho_\alpha + p_\alpha)v_\alpha + (\rho_\alpha + p_\alpha)\phi + \delta p_\alpha - \frac{2}{3}k^2\pi_\alpha = aQ_\alpha v + a\delta q_\alpha, \quad (5.146)$$

onde $\mathcal{H} = a'/a$, a linha representa derivada com respeito ao tempo conforme e π_α é o stress anisotrópico de uma determinada componente relativística.

As componentes da perturbação do termo de interação covariante $Q^\mu = -\frac{\sigma}{2}u_m^\mu T_{\nu(m)}^\nu$ ficam dadas por

$$\delta Q_0 = -a(Q\phi + \frac{\sigma}{2}\delta\rho_m), \quad (5.147)$$

$$\delta Q_i = aQ\partial_i v_m, \quad (5.148)$$

e, comparando-as com (5.143) e (5.144), obtemos

$$\delta Q = \frac{\sigma}{2}\delta\rho_m, \quad (5.149)$$

$$\delta q = Q(v_m - v), \quad (5.150)$$

onde $\delta q = \delta q_m = -\delta q_\Lambda$ e $\delta Q = \delta Q_m = -\delta Q_\Lambda$.

Com isto, as equações de balanço de energia e momento perturbados para matéria escura e energia escura ficam determinadas por

$$\delta'_m - k^2 v_m - 3\psi' = a \frac{\sigma}{2} \phi, \quad (5.151)$$

$$v'_m + \mathcal{H} v_m = -\phi, \quad (5.152)$$

$$\delta'_\Lambda + \left(\frac{\rho'_\Lambda}{\rho_\Lambda} + 3\mathcal{H} \right) \delta_\Lambda + 3\mathcal{H} \frac{\delta p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -\frac{a\sigma}{2} \frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} (\phi + \delta_m), \quad (5.153)$$

$$\delta p_\Lambda = -\frac{a\sigma}{2} \rho_m v_m + \frac{2}{3} k^2 \pi_\Lambda = \delta p_{ad,\Lambda} + \delta p_{int,\Lambda}. \quad (5.154)$$

A perturbação intrínseca da energia escura fica determinada pela última equação acima, e não precisamos fazer nenhuma escolha referente à velocidade sonora efetiva c_s^2 ou à velocidade da energia escura v_Λ .

Por sua vez, as componentes 0-0 e i-j das equações de Einstein perturbadas, para o setor escuro, são dadas por

$$3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) + k^2\psi = -\frac{a^2}{2}(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda), \quad (5.155)$$

$$\psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = \frac{a^2}{2}(\delta p_\Lambda - \frac{2}{3}k^2\pi_\Lambda). \quad (5.156)$$

Com isso, o conjunto final de equações escritas no gauge longitudinal, incluindo bárions e radiação conservados separadamente, fica dado por

$$\dot{a}\delta'_m - \frac{k^2}{a}v_m - 3\dot{a}\psi' = \frac{\sigma}{2}\phi, \quad (5.157)$$

$$\dot{a}v'_m + H v_m = -\frac{\phi}{a}, \quad (5.158)$$

$$\dot{a}\delta'_\Lambda + \dot{a}\frac{\rho'_\Lambda}{\rho_\Lambda}\delta_\Lambda = -\frac{\sigma}{2}\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda}(\phi + \delta_m), \quad (5.159)$$

$$\rho_\Lambda\delta_\Lambda = \frac{a\sigma}{2}\rho_m v_m - \frac{2}{3}k^2\pi, \quad (5.160)$$

$$\dot{a}\delta'_b - \frac{k^2}{a}v_b - 3\dot{a}\psi' = 0, \quad (5.161)$$

$$\dot{a}v'_b + Hv_b = -\frac{\phi}{a}, \quad (5.162)$$

$$\dot{a}\delta'_R - \frac{4}{3a}k^2v_R = 4\dot{a}\psi', \quad (5.163)$$

$$\dot{a}v'_R + \frac{1}{4a}v_R = -\frac{\phi}{a}, \quad (5.164)$$

$$\psi - \phi = a^2\pi, \quad (5.165)$$

$$3H(\dot{a}\psi' + H\phi) + \frac{k^2}{a^2}\psi = -\frac{3}{2}(\Omega_m\delta_m + \Omega_\Lambda\delta_\Lambda + \Omega_R\delta_R + \Omega_b\delta_b), \quad (5.166)$$

onde a linha sobre as quantidades agora representa derivada com relação ao fator de escala, e as soluções de base são dadas por

$$\Omega_R = \frac{\Omega_{R0}}{a^4}, \quad (5.167)$$

$$\Omega_b = \frac{\Omega_{b0}}{a^3}, \quad (5.168)$$

$$\Omega_m = \frac{1}{a^3}(\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\Lambda 0}^2) + \frac{1}{a^{3/2}}(\Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{\Lambda 0}^2), \quad (5.169)$$

$$\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda 0}^2 + \frac{1}{a^{3/2}}(\Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{\Lambda 0}^2), \quad (5.170)$$

$$\sigma = 3\Omega_{\Lambda 0}, \quad (5.171)$$

$$f(a) = \dot{a} = a(\Omega_R + \Omega_b + \Omega_m + \Omega_\Lambda)^{1/2}, \quad (5.172)$$

$$g(a) = \ddot{a} = a(-\Omega_R - \frac{\Omega_b}{2} - \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_\Lambda). \quad (5.173)$$

A integração numérica destas equações e a construção do espectro de potência correspondente ainda é um problema em aberto.

5.7.1 Condições iniciais adiabáticas

No limite de tempos pequenos, $\eta \ll 1$, as soluções de base acima ficam aproximadas por

$$a(\eta) \simeq C\eta^2, \quad (5.174)$$

$$\mathcal{H}(\eta) \simeq \frac{2}{\eta}, \quad (5.175)$$

$$\rho_m(\eta) \simeq \frac{12}{C^2 \eta^6}, \quad (5.176)$$

$$\rho_\Lambda(\eta) \simeq \frac{2\sigma}{C \eta^3}, \quad (5.177)$$

$$\eta = \frac{3}{C} t^{1/3}, \quad (5.178)$$

onde C é uma constante de integração. Então, a equação (5.156) toma a forma

$$\phi'' + \frac{6}{\eta} \phi' = \frac{\sigma}{2} C^3 \eta^6 v_m, \quad (5.179)$$

onde usamos (5.154) e desprezamos o stress anisotrópico neste limite, fazendo $\phi = \psi$. O termo no membro direito da equação acima é subdominante para tempos pequenos com relação aos dois termos no membro esquerdo. Logo,

$$\phi'' + \frac{6}{\eta} \phi' \simeq 0. \quad (5.180)$$

A solução desta equação diferencial é

$$\phi(\eta) = C_1 + \frac{C_2}{\eta^5}, \quad (5.181)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

Por outro lado, usando as soluções da base em (5.155) encontramos

$$\frac{6}{\eta} \phi' + \frac{12}{\eta^2} \phi + k^2 \phi = -\frac{6}{\eta^2} \delta_m - \sigma C \eta \delta_\Lambda. \quad (5.182)$$

O segundo termo do lado direito pode ser desprezado com relação a todos os outros, e usando a solução para ϕ chegamos a

$$\delta_m(\eta) \simeq -\frac{1}{6} (k\eta)^2 \left(C_1 + \frac{C_2}{\eta^5} \right) + \left(\frac{3C_2}{\eta^5} - 2C_1 \right). \quad (5.183)$$

Considerando apenas modos dentro do horizonte, $k\eta \gg 1$, encontramos a solução para o contraste de densidade de matéria do universo de Einstein-de Sitter,

$$\delta_m(\eta) = C_3 \eta^2 + C_4 \eta^{-3}, \quad (5.184)$$

na qual reteremos apenas o modo crescente.

Nesta aproximação, a equação (5.153) se reduz a

$$\delta'_\Lambda + \frac{3}{\eta}\delta_\Lambda \simeq -\frac{3}{\eta}(\delta_m + \phi), \quad (5.185)$$

e, após usarmos $\phi = C_1$ e $\delta_m = C_3\eta^2$ (soluções do universo dominado por matéria), encontramos

$$\delta'_\Lambda + \frac{3}{\eta}\delta_\Lambda \simeq -\frac{3C_1}{\eta}, \quad (5.186)$$

cujas soluções são

$$\delta_\Lambda = \frac{A}{\eta^3} - \phi, \quad (5.187)$$

onde A é uma constante de integração que escolhemos igual a zero. Desta forma,

$$\delta_\Lambda = -\phi, \quad (5.188)$$

e podemos usá-la como condição inicial adiabática para o contraste de densidade da energia escura.

Até aqui, a análise perturbativa do modelo com termo de vácuo proporcional ao parâmetro de Hubble foi realizada usando-se três gauges distintos. As duas primeiras análises descritas nesta tese foram realizadas dentro do gauge síncrono em dois casos:

1) sem perturbar o termo de vácuo integramos as equações de Einstein desde z muito alto com espectro primordial invariante de escala até $z=0$ e encontramos que o melhor ajuste para o espectro de potência de matéria ocorre para o parâmetro densidade de matéria atual $\Omega_{m0} \approx 0,48$;

2) ao perturbar o termo de vácuo necessitamos de um parâmetro densidade de matéria atual muito alto para ajustar o espectro de potência de matéria que foi construído integrando-se as equações de Einstein desde o redshift do último espalhamento ($z=1000$), com as condições iniciais dadas pelo espectro do modelo Λ CDM, até o presente ($z=0$). Como citado neste texto, é possível que tal resultado negativo está associado a utilização do gauge síncrono, o que nos motivou a mudar de formalismo.

Em seguida, para simplificar a análise nos restringimos apenas a investigar a dinâmica perturbativa do setor escuro (energia escura+matéria escura), encontrando uma única equação diferencial de segunda ordem para o contraste de densidade de matéria (5.113) e uma expressão que determina o contraste de densidade da energia escura em termos da matéria escura e sua primeira derivada (5.119), quantidades estas definidas no gauge comóvel. O principal resultado obtido é que as perturbações na energia escura podem ser desprezadas, com respeito às perturbações na matéria escura, sobre todas as escalas observáveis. Isto indica que a análise descrita em 1) pode ser considerada como uma boa aproximação e que o espectro de potência de matéria é consistente com o valor $\Omega_{m0} \approx 0,48$. Mostramos também que o modelo é não adiabático e que condições iniciais adiabáticas podem ser usadas. Por fim, uma possibilidade de acoplamento do setor escuro surge quando escolhermos o 4-vetor covariante $Q^\mu \propto u_m^\mu T_{\nu(m)}^\nu$, mas a integração das equações obtidas no gauge longitudinal fica como trabalho futuro.

5.8 O modelo como um gás de Chaplygin

Podemos explorar o modelo apresentado nesta tese tratando a interação entre as componentes escuras como manifestação de uma única substância, como sugerido pelas equações (2.87) e (2.88).

De fato, consideremos um gás de Chaplygin com equação de estado²

$$p_{ch} = -A\rho_{ch}^{1/2}, \quad (5.189)$$

onde

$$A \equiv \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma. \quad (5.190)$$

²No gás de Chaplygin [47, 48], o fluido cósmico é descrito pela equação de estado $p = -A/\rho^\alpha$, onde ρ e p são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão do fluido no sistema de referência comóvel, com $\rho > 0$.

Das equações de Friedmann, $3H^2 = \rho_{ch}$, e da continuidade, $\dot{\rho}_{ch} + 3H(\rho_{ch} + p_{ch}) = 0$, encontramos a equação de evolução para o parâmetro de Hubble,

$$2\dot{H} + 3H^2 - \sigma H = 0. \quad (5.191)$$

Esta é a mesma equação de evolução obtida para o modelo com acoplamento entre matéria escura e energia escura,

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = \frac{\sigma}{2}\rho_m = Q, \quad (5.192)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = -\frac{\sigma}{2}\rho_m = -Q, \quad (5.193)$$

$$\rho_\Lambda = \sigma H, \quad (5.194)$$

com

$$\sigma = 3H_0(1 - \Omega_{m,0}). \quad (5.195)$$

A solução da equação diferencial (5.191) é

$$H(t) = \frac{\sigma/3}{1 - \exp(-\sigma t/2)}, \quad (5.196)$$

e o fator de escala fica determinado por

$$a(t) = C[\exp(\sigma t/2) - 1]^{2/3}, \quad (5.197)$$

onde C é uma constante de integração. Com ajuda destas soluções e da equação de Friedmann, obtemos facilmente a densidade de energia do gás de Chaplygin,

$$\rho_{ch}(a) = A^2 \left[1 + \left(\frac{C}{a} \right)^{3/2} \right]^2. \quad (5.198)$$

A constante de integração pode ser obtida escolhendo-se o fator de escala atual igual à unidade ($a_0 = 1$), isto é,

$$C^{3/2} = \frac{\rho_{ch,0}^{1/2} - A}{A}, \quad (5.199)$$

tal que

$$\rho_{ch}(a) = \left(A + \frac{\rho_{ch,0}^{1/2} - A}{a^{3/2}} \right)^2. \quad (5.200)$$

Vamos considerar aqui um universo composto de radiação e gás de Chaplygin na base. Desta forma, podemos escrever

$$\rho_{ch,0}^{1/2} = H_0 \sqrt{3\Omega_{ch,0}} \simeq \sqrt{3}, \quad (5.201)$$

onde fizemos $H_0 = 1$ e tomamos $\Omega_{ch,0} \simeq 1$, pois $\Omega_{R,0} \sim 10^{-5}$. O parâmetro de estado e a velocidade sonora adiabática para o gás de Chaplygin são dados por

$$\omega_{ch}(a) = \frac{p_{ch}}{\rho_{ch}} = -\frac{Aa^{3/2}}{(\sqrt{3} - A) + Aa^{3/2}}, \quad (5.202)$$

$$c_{a,ch}^2 = \frac{p'}{\rho'} = \frac{1}{2}\omega_{ch}(a), \quad (5.203)$$

onde a linha representa derivada com relação ao fator de escala.

Assim, podemos obter

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = (\Omega_{ch} + \Omega_R)^{1/2}, \quad (5.204)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}[(1 + 3\omega_{ch})\Omega_{ch} + 2\Omega_R], \quad (5.205)$$

$$\Omega_R = \frac{\Omega_{R,0}}{a^4}, \quad (5.206)$$

$$\Omega_{ch} = \frac{1}{3}[A + (\sqrt{3} - A)/a^{3/2}]^2. \quad (5.207)$$

Modelos com gás de Chaplygin adiabático apresentam instabilidades e oscilações no espectro de potência. Porém, em [51] mostra-se, no gauge síncrono, que a inclusão e uma escolha conveniente da perturbação entrópica intrínseca reduzem essas instabilidades. Aqui, além da perturbação entrópica intrínseca iremos supor que o stress anisotrópico π do gás é não nulo.

As equações de Einstein perturbadas no gauge comóvel são

$$\psi - \phi = a^2 \pi, \quad (5.208)$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi = 0, \quad (5.209)$$

$$3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) + k^2\psi = -\frac{a^2}{2}\delta\rho, \quad (5.210)$$

$$\psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = \frac{a^2}{2}(\delta p - \frac{2}{3}k^2\pi), \quad (5.211)$$

onde as funções da métrica ϕ e ψ são os próprios potenciais de Bardeen (ver o capítulo 4), a linha representa derivada com relação ao tempo conforme, e $\mathcal{H} = a'/a$. Usando (5.208), (5.209) e sua derivada em (5.211), e passando de tempo conforme para fator de escala, encontramos uma equação diferencial de primeira ordem para o potencial ψ ,

$$(\dot{a}^2 - \ddot{a}a + \frac{k^2}{3})\frac{d\psi}{da} + \frac{k^2}{3a}\psi = \frac{a}{2}\delta p_{ch}, \quad (5.212)$$

juntamente com

$$\phi = -a\frac{d\psi}{da}, \quad (5.213)$$

$$\delta_{ch} = -\frac{2k^2}{3a^2\Omega_{ch}}\psi. \quad (5.214)$$

A perturbação entrópica intrínseca do gás de Chaplygin, invariante de gauge [27], é dada por

$$\delta p_{int} \equiv \dot{p}'_{ch} \left(\frac{\delta p_{ch}}{p'_{ch}} - \frac{\delta \rho_{ch}}{\rho'_{ch}} \right) = \delta p_{ch} - \frac{1}{2}\omega_{ch}\delta\rho_{ch} = \left(c_s^2 - \frac{1}{2}\omega_{ch} \right) \delta\rho_{ch}, \quad (5.215)$$

onde definimos a velocidade sonora efetiva no sistema de repouso do fluido como $c_s^2 = \delta p_{ch}/\delta\rho_{ch}$. Uma escolha conveniente desta velocidade - um novo parâmetro livre do modelo - corresponde a uma determinada escolha da perturbação entrópica intrínseca.

O conjunto final de equações perturbadas pode então ser escrito como

$$(\dot{a}^2 - \ddot{a}a + \frac{k^2}{3})\frac{d\psi}{da} + \left(\frac{1}{3} + c_s^2\right)\frac{k^2}{a}\psi = 0, \quad (5.216)$$

$$\delta_{ch} = -\frac{2k^2}{3a^2\Omega_{ch}}\psi, \quad (5.217)$$

$$\phi = -a\frac{d\psi}{da}. \quad (5.218)$$

Sua integração, com A e c_s como parâmetros livres, permite, em princípio, a obtenção do espectro de potência para $k^2\phi$ e δ_{ch} .

Capítulo 6

Conclusão

O decaimento do termo cosmológico com a expansão do universo é uma proposta teórica para aliviar o problema da constante cosmológica, conciliando o alto valor previsto pela teoria quântica de campos com o pequeno valor hoje observado. Uma cosmologia com $\Lambda \propto H$ leva a um cenário de interação entre as componentes do setor escuro em acordo qualitativo com os limites impostos pelas observações. No que diz respeito aos testes da base, uma análise combinada de supernovas tipo Ia, BAO e primeiro pico da CMB tem proporcionado uma boa concordância para os únicos parâmetros livres do modelo, H_0 e Ω_{m0} . Um passo importante para avaliar o modelo de interação frente ao modelo padrão da cosmologia é realizar um estudo abrangente das pequenas flutuações na densidade de energia em torno do universo homogêneo, já que as grandes estruturas hoje observadas, tais como galáxias e aglomerados de galáxias, se formaram a partir do crescimento gravitacional de pequenas flutuações no universo primordial.

Inicialmente nos propusemos avaliar tais flutuações com a hipótese de estrita homogeneidade do termo cosmológico, e como resultado encontramos uma supressão de potência no espectro de matéria quando comparado com o espectro do modelo padrão. Contudo, uma perturbação no termo cosmológico, devido a sua interação com a matéria escura, não podia ser desprezada a priori. Além disso, as perturbações

entrópicas eram um ingrediente a ser levado em conta, o qual se mostrou indispensável para a avaliação da importância das perturbações em Λ . Mostramos que a não adiabaticidade do modelo é desprezível para altos redshifts e que condições iniciais adiabáticas podem ser usadas. Avaliando apenas o setor escuro, num formalismo manifestamente invariante de gauge, mostramos que as perturbações na energia escura são na verdade desprezíveis no intervalo de comprimentos de onda observados.

Desse modo, o espectro de potência obtido com $\delta\Lambda = 0$ [20] pode ser considerado uma boa aproximação, o que implica que um bom ajuste corresponde a uma alta densidade relativa de matéria, $\Omega_{m0} \approx 0,48$, se comparada com o valor de concordância do Λ CDM. O importante, contudo, é comparar esse resultado com outros testes observacionais no contexto do presente modelo, em particular os testes clássicos de background. Uma anterior análise combinada de supernovas Ia, oscilações acústicas bariônicas e a posição do primeiro pico do espectro da radiação cósmica de fundo [17, 16] levou a um valor de concordância para Ω_{m0} em torno de 0.36, quando se utilizava o Legacy Survey de supernovas, e um valor mais alto com o Gold Sample. O melhor valor encontrado para o parâmetro de Hubble atual foi $h \approx 0.7$, valor utilizado na presente análise. No entanto, uma atualização desta análise combinada, utilizando-se os mais recentes conjuntos de supernovas Ia (Union Compilation, Constitution Sample e SDSS) [72, 73], está levando a um valor de concordância para Ω_{m0} entre 0.38 e 0.51, dependendo do conjunto de supernovas utilizado e da forma como as oscilações acústicas bariônicas são incluídas na análise [74, 75].

É interessante notar que esse valor para o parâmetro de densidade de matéria faz com que o modelo em estudo seja indistinguível do Λ CDM em altos redshifts. Como vimos, a densidade de matéria em altos redshifts difere da do modelo padrão por um fator Ω_{m0} , o mesmo ocorrendo para o redshift de igualdade entre radiação e matéria (ver (5.9) e (5.15)). Como $0,5^2 = 0,25$, essas duas grandezas ficam aproximadamente coincidentes nos dois modelos. Por outro lado, calculando o parâmetro de idade e o redshift de transição do modelo em estudo, através de (2.112) e (2.107), obtemos os

mesmos valores que no Λ CDM com $\Omega_{m0} \approx 0,3$, ou seja, $t_0 H_0 \approx 0.94$ e $z_T \approx 0.67$.

Finalmente, mostramos também que é possível tratar o modelo de interação como um gás de Chaplygin cujas soluções são as mesmas na base. Um tratamento perturbativo foi realizado no gauge comóvel, e uma escolha específica para a perturbação entrópica intrínseca do gás pode aliviar oscilações e instabilidades que surgem no caso adiabático.

Bibliografia

- [1] P. Astier et al., *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006).
- [2] A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [3] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [4] M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004).
- [5] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [6] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003).
- [7] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [8] M. Ozer, O. Taha, *Phys. Lett. B* **171**, 363 (1986). *Nucl. Phys. B* **287**, 776 (1987).
- [9] O. Bertolami, *Nuovo Cimento* **93**, 36 (1986); K. Freese *et al*, *Nucl. Phys. B* **287**, 797 (1987).
- [10] I. Shapiro, J. Solà, H. Stefancic, *JCAP* **0501**, 012 (2005).
- [11] J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, *Phys. Rev. D* **72**, 063516 (2005).
- [12] J. C. Fabris, I. Shapiro, J. Sola, *JCAP* **0702**, 016 (2007).
- [13] S. Carneiro, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 2241 (2006).
- [14] R. Schützhold, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 081302 (2002); *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 4359 (2002).
- [15] H. A. Borges, S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1385 (2005).
- [16] S. Carneiro, C. Pigozzo, H. A. Borges, J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D* **74**, 23532 (2006).
- [17] S. Carneiro, M. A. Dantas, C. Pigozzo, J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D* **77**, 083504 (2008).

- [18] B. M. S. Hansen et.al, *Astrophys. J.* **574**, L155 (2002).
- [19] R. C. Arcuri, I. Waga, *Phys. Rev. D* **50**, 4 (1994).
- [20] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, C. Pigozzo, *Phys. Rev. D* **77**, 043513 (2008).
- [21] P. Coles, F. Lucchin, (Wiley, 2002).
- [22] K. A. Malik, David R. Matravers, *Class. Quantum. Grav.* **25**, 193001 (2008).
- [23] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 8 (1980).
- [24] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology* (Wiley, New York, 1972).
- [25] L. Landau, E. Lifshitz, *Field Theory* (Editora Mir, Moscou, 1980).
- [26] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford, New York, 1996).
- [27] K. A. Malik, PHD. thesis, University Portsmouth, astro-ph/0101563.
- [28] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, H. R. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
- [29] H. Kodama, M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984).
- [30] V. F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, (2005).
- [31] S. Dodelson, *Modern cosmology* (Academic Press, London, 2003).
- [32] J. Martin, A. Riazuelo and M. Sakellariadou, *Phys. Rev.* **D61**, 083518 (2000);
J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).
- [33] S. Cole *et al.*, *MNRAS* **362**, 505 (2005).
- [34] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, *Phys. Rev. D* **78**, 123522 (2008).
- [35] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).
- [36] R. Bin, O. Doré, *Phys Rev. D* **69**, 083503 (2004).
- [37] E. Majerotto, J. Väliviita, R. Maartens, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl)* **194** (2009).
- [38] Jian-Hua He, B. Wang, E. Abdalla, *Phys. Lett.* **B671**, 139 (2009).
- [39] K. A. Malik, D. Wands, arXiv:gr-qc/9804046 (1998).

- [40] K. A. Malik, D. Wands and Carlo Ungarelli, *Phys Rev. D* **67**, 063516 (2003).
- [41] K. A. Malik, D. Wands, *Phys. Rep.* **475**, 1 (2009).
- [42] V. Sahni and A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D.* **9**, 373 (2000).
- [43] S. Carneiro, *J. Phys. A* **40**, 6841 (2007).
- [44] W. Chen, Y. S. Wu, *Phys. Rev. D* **41**, 695 (1990).
- [45] J. A. S. Lima, J. C. Carvalho, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 909 (1994).
- [46] R. Colistete Jr., J. C. Fabris, J. Tossa, W. Zimdahl, *Phys. Rev. D* **76**, 103516 (2007).
- [47] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002).
- [48] O. Bertolami, *astro-ph/0504275* (2005).
- [49] A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *Phys. Lett. B* **511**, 256 (2001).
- [50] B. M. S. Hansen et al., *Astrophys. J.* **574**, L155 (2002).
- [51] R. R. R. Reis, I. Waga, M. O. Calvão, S. E. Jorás, *Phys. Rev. D* **68**, 061302(R) (2003).
- [52] J. F. Jesus, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 791 (2008)
- [53] J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, J. V. Cunha, *MNRAS* **340**, L39 (2003).
- [54] D. Jain, A. Dev, *Phys. Lett. B* **633**, 436 (2006).
- [55] J. V. Cunha, R. C. Santos, *Int. J Mod. Phys. D* **13**, 1321 (2004).
- [56] J. C. Carvalho, J. A. S. Lima, I. Waga, *Phys. Rev. D* **46**, 2404 (1992).
- [57] W. S. Hipolito-Hicaldi, H. S. Velten, W. Zimdahl, *JCAP* **0906**, 016 (2009).
- [58] W. Zimdahl, D. Pavón, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 413 (2003).
- [59] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Addison Wesley, 2003).
- [60] W. Rindler, *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological* (Springer-Verlag, Dallas, 1979).
- [61] J. Grande, A. Pelinson, J. Solá, *Phys. Rev. D* **79**:043006 (2009).
- [62] J. Hwang, C. Park, J. Lee, H. Noh, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 151303 (2009).

- [63] W. Zimdahl, J. C. Fabris, *Class. Quantum Grav.* **22**, 4311 (2005).
- [64] J. D. Barrow, T. Clifton, *Phys. Rev. D* **73**, 103520 (2006).
- [65] R. Opher, A. Pellison, *Phys. Rev. D* **70**, 063529 (2004).
- [66] S. Carneiro, *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 1669 (2003).
- [67] H. Sandvik *et al.*, *Phys. Rev. D* **69**, 123524 (2004).
- [68] B. M. S. Hansen *et al.*, *Astrophys. J.* **574**, L155 (2002).
- [69] R. Colistete Jr., J. C. Fabris, J. Tossa, W. Zimdahl, *Phys. Rev. D* **76**, 103516 (2007).
- [70] S. Chongchitnan, *Phys. Rev. D* **79**, 043522 (2009).
- [71] B. M. Jackson, A. Taylor, A. Berera, *Phys. Rev. D* **79**, 043526 (2009).
- [72] M. Kowalski *et al.*, *Astrophys. J.* **686**, 749 (2008).
- [73] R. Kessler *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **185**, 32 (2009).
- [74] J. S. Alcaniz, S. Carneiro, M. A. Dantas, C. Pigozzo, arXiv:1007.5290.
- [75] C. Pigozzo, Tese de Doutorado.
- [76] W. Zimdahl, H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, W. S. Hipolito-Ricardi, em preparação.