



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Programa de Pós-graduação em Física

**INVARIANTES DINÂMICOS, FORMALISMO DE SCHWINGER E UMA NOVA
VISÃO SOBRE QUANTIDADES CONSERVADAS EM MECÂNICA QUÂNTICA**

José Rodrigo Blanco Peleteiro

Salvador
2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Invariantes Dinâmicos, formalismo de Schwinger e uma nova visão sobre quantidades conservadas em Mecânica Quântica

José Rodrigo Blanco Peleteiro

Orientador: Prof. Dr. Mario Cezar Bertin

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFBA (área de concentração: Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Salvador, setembro de 2019

*À minha família, pelo apoio nessa
longa caminhada.*

Agradecimentos

Aos meus pais, Maria Cristina e José Manoel, pelo apoio e presença durante toda a minha vida.

Aos meus irmãos, Fernanda, Vanessa e Rafael que sempre estiveram ao meu lado e, claro, pelas discussões, brincadeiras e perturbações.

À minha família pelos encontros que tivemos ao longo dos anos, nos quais conversamos, jogamos e rimos bastante.

Aos meus amigos, cujos nomes não citarei para não correr o risco de esquecer alguém.

Ao meu orientador, Mário Bertin, pelas discussões, reuniões e por sanar as dúvidas relativas ao trabalho.

À Gabriela Matias, minha amada, pela paciência, carinho e companheirismo todos esses anos.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

*Sou só uma criança tentando entender o
que vejo.*

Autor desconhecido

Resumo

O objetivo do presente trabalho é o cálculo de invariantes dinâmicos utilizando as equações de movimento de um sistema quântico e também através do formalismo de *Schwinger*. As duas abordagens se mostram complementares, sendo a segunda mais fundamental que a primeira. O cálculo dos invariantes é feito, inicialmente, para o oscilador harmônico de frequência variável e depois para o oscilador forçado dissipativo. Com a obtenção dos invariantes dinâmicos lineares associados às equações de movimento e sob a condição da existência de certas soluções para as equações diferenciais dos parâmetros envolvidos, é possível a obtenção de uma nova forma de quantização canônica dos sistemas do tipo oscilador em uma dimensão. Este novo procedimento envolve a identificação dos invariantes lineares com os operadores de escada, que dão origem ao espaço de *Hilbert* do sistema.

Palavras-chave: Invariante dinâmico, invariante de *Ermaikov*, princípio de *Schwinger*, quantização do oscilador.

Abstract

In this work we calculate dynamical invariants using the equations of motion of a quantum mechanical system and the *Schwinger* formalism. Both approaches turn out to be complementary, the second being more fundamental than the first one. The calculations of the invariants are, initially, for the harmonic oscillator with time-dependent frequency and then for the one dimensional time-dependent, damped, driven harmonic oscillator. With the linear invariants associated with the equations of motion and under the existence condition of solutions for the differential equations of the parameters, it is possible to obtain a new way of canonical quantization for the one-dimensional oscillator-type systems. This new procedure requires the identification of the linear invariants with ladder operators, which makes possible to obtain the *Hilbert* space of the system.

Keywords: Dynamical invariant, *Ermakov* invariant, *Schwinger* principle, oscillator quantization.

Sumário

Sumário	i
Introdução	1
1 Invariantes Dinâmicos	5
1.1 Equações de Steen-Ermakov	6
1.1.1 Equações de Steen	7
1.1.2 Invariante de Ermakov	10
1.1.3 Generalização das equações de Steen-Ermakov	13
1.1.4 Interpretação Física do Invariante de Ermakov	15
1.2 Outros Métodos para o Cálculo de Invariantes	16
1.2.1 Teorema de Noether	17
1.2.2 Álgebra Dinâmica	20
1.3 Equações de Steen-Ermakov na Mecânica Quântica	24
1.3.1 Dinâmica na Mecânica Quântica e Sistemas Não Estacionários	24
1.3.2 Uma teoria Exata do Oscilador Dependente do Tempo	27
1.4 Uma Nova Abordagem Para o Calculo de Invariantes	33
1.4.1 Oscilador Harmônico de Frequência Variável	34
2 Formalimo de Schwinger	43
2.1 Transformações Unitárias	43
2.1.1 Variações Infinitesimais das Funções de Transformação	46
2.1.2 Transformações Unitárias Infinitesimais	48
2.2 Dinâmica na Mecânica Quântica	51
2.2.1 Princípio de Ação Quântica de Schwinger	51
2.2.2 Forma dos Termos de Fronteira	53
2.2.3 Relações de Comutação Canônicas	57
2.2.4 Equações de Heisenberg	60
2.2.5 Equação de Schrodinger	60
2.2.6 Equação de Hamilton-Jacobi Quântica	61

2.3	Cálculo das Funções de Transformações	63
2.3.1	Partícula Sujeita a uma Força Constante	64
2.3.2	Oscilador Harmônico com Frequência Dependente do tempo . . .	67
2.3.3	Oscilador Harmônico com Frequência e Força Dependentes do Tempo	71
2.4	Invariantes Dinâmicos via Schwinger	74
2.4.1	Cálculo dos Invariantes Dinâmicos	75
3	Quantização do Oscilador Forçado Dissipativo	81
3.1	Oscilador Forçado Dissipativo	82
3.1.1	Equações de Movimento	82
3.1.2	Invariantes Lineares	82
3.1.3	Invariantes Quadráticos	84
3.1.4	Obtendo o Invariante Quadrático a partir dos Lineares	88
3.1.5	Álgebra do Oscilador Harmônico	89
3.1.6	Oscilador com Termos de Força, Frequência e Dissipação Cons- tantes	93
3.2	Oscilador Harmônico Simples	95
3.3	Oscilador Dissipativo	97
3.4	Oscilador Harmônico Forçado sem Dissipação	99
	Considerações Finais	104
	Referências bibliográficas	108

Introdução

Invariante dinâmico é uma quantidade de um sistema físico que permanece constante à medida que o tempo passa, ou seja, sua derivada temporal é nula. Estas quantidades são de suma importância, tanto na mecânica clássica quanto quântica, pois, normalmente, estão relacionadas a grupos de simetria, que podem definir a integrabilidade do sistema. Esta conexão é estabelecida explicitamente pelo teorema de *Noether* na mecânica clássica [1], o qual relaciona quantidades conservadas (invariantes) a grupos de simetria. Como exemplo, nos casos em que a Hamiltoniana é invariante pelo grupo de simetria da evolução temporal, translação ou rotação, temos, respectivamente, energia, momento linear e momento angular como quantidades conservadas. Isto é o que ocorre, em geral, para sistemas conservativos, *i.e.*, cujas hamiltonianas não dependem explicitamente do tempo.

Nos casos em que a Hamiltoniana do sistema depende explicitamente do tempo, *e.g.*, o oscilador dissipativo, oscilador forçado na mecânica clássica [2] e armadilhas de íons [3,4], na mecânica quântica, a energia não se conserva e, portanto, precisamos procurar outras quantidades conservadas. Para os sistemas de natureza quântica, estes invariantes são ainda mais fundamentais, pois a dependência da Hamiltoniana com o tempo implica na não existência de um espectro bem definido de energia. Uma das possíveis maneiras de contornar essa dificuldade é procurar um invariante quadrático, hermiteano, cujo problema de autovalores seja bem definido e, por consequência, com espectro independente do tempo. Este invariante passa a ter o papel da energia do sistema, pois, é a partir da base de autoestados deste que se constrói a solução do problema [5].

Na literatura disponível sobre o assunto, quem primeiro estabeleceu a conexão entre invariantes e soluções de equações diferenciais foi *Ermakov* [6]. Neste trabalho, publicado em 1880, o autor mostra a relação entre as soluções de duas equações diferenciais, de modo que descobrindo-se a solução de uma delas, a da outra é encontrada em função da primeira. Esta conexão entre as equações se dava por meio do chamado invariante de *Ermakov*, a partir do qual também era possível encontrar a solução das equações diferen-

ciais. Muito tempo depois, na década de 60 do século XX, *Ray* e *Reid* [7–11] propuseram generalizações que permitiram calcular o invariante de *Ermakov* para uma classe bem maior de equações diferenciais, dentre eles o oscilador com dissipação [12] e o oscilador forçado [13]. Na mesma época, *Lutzky* [14], utilizando o teorema de *Noether*, calculou o invariante de *Ermakov* e, posteriormente, *Ray* e *Reid*, aplicando o mesmo procedimento de *Lutzky*, calcularam invariantes utilizando o teorema de *Noether* para uma classe bem maior de sistemas [15, 16].

Além dessas generalizações, existem outros métodos para o cálculo de invariantes, tanto clássicos quanto quânticos. Vale ressaltar que as generalizações feitas por *Ray* e *Reid* e a aplicação do teorema de *Noether*, primeiramente feita por *Lutzky*, apenas se aplicam no caso clássico. Além destes, há também o procedimento adotado por *Sarlet* e *Bahar* [17] e outros que citaremos a seguir, que serviram em ambos os casos, clássico e quântico. No caso quântico, quem primeiro utilizou invariantes foi *Lewis* e *Riesenfeld* [5]. Neste trabalho, mostra-se o invariante quadrático do oscilador harmônico quântico de frequência variável, que toma o papel da Hamiltoniana e, a partir do qual se calcula os autovalores e autovetores, posteriormente utilizados para escrever a solução geral do problema. Este trabalho de *Lewis* e *Riesenfeld* é de grande importância em razão da ideia de utilizar invariantes no caso quântico com as adaptações necessárias, entretanto não mostra como calcular invariantes em outros casos. Para isso, temos o método da álgebra dinâmica [18, 19], que tem utilidade no caso clássico, pois se utiliza da estrutura dos parênteses de Poisson. Ainda se tratando dos casos clássico e quântico, temos também a utilização de transformações canônicas lineares [20] e uma nova abordagem proposta por *Bertin*, *Pimentel* e *Ramirez* [21], que se baseia na combinação das equações de movimento para construção dos invariantes.

A abordagem proposta em [21] é bastante interessante, pois, além de servir nos casos clássico e quântico, nos permite construir invariantes de qualquer ordem e não somente o de segunda ordem, como usualmente feito. A importância de construir os invariantes de ordem menor decorre da sua maior facilidade de obtenção e da possibilidade de escrever os de ordem maior a partir deles. Entretanto, essa abordagem utiliza a combinação das equações de movimento de maneira *ad hoc*. Seria interessante ter um método formal que nos permita construir esses invariantes partindo de uma construção mais bem fundamentada. Classicamente, utilizar combinações das equações de movimento para encontrar quantidades que se conservam (invariantes) é o tema do teorema de *Noether*. Portanto, é razoável pensar que, se conseguirmos construir invariantes a partir das combinações das

equações de movimento no caso quântico, deve haver um teorema de *Noether* subjacente que justifique a abordagem [21]. O formalismo que trata de princípios variacionais na mecânica quântica foi desenvolvido por *Schwinger* e é a partir dele que procuramos um teorema de *Noether* quântico.

Na década de 50 do século passado, *Schwinger* propôs uma formulação alternativa para a mecânica quântica a partir de um princípio variacional [22–24]. Por ser um princípio dinâmico, o agora conhecido princípio de *Schwinger* determina as equações de movimento, funções de transformações (amplitude de probabilidade) dentre outras quantidades relevantes, entretanto, não foi suficiente para produzir os resultados relativos à cinemática quântica. Portanto, *Schwinger*, que acreditava que os resultados da mecânica quântica deveriam ter como base o experimento [23], reescreve a cinemática da mecânica quântica utilizando o conceito de símbolo de medida, que é um objeto matemático equivalente a um aparato do tipo *Stern-Gerlach*. Na prática, este aparato atua como um filtro, no qual um sistema em um estado inicial “a”, relativo a um observável A, é filtrado em um subsistema no estado “b”, relativo ao observável B. Pensando de outra maneira, temos a destruição de um estado "a" relativo ao observável A seguido da construção de um estado "b" correspondente ao observável B. As questões sobre os observáveis A e B serem compatíveis ou não, bem como todos os detalhes relativos à reescrita da cinemática quântica utilizando a álgebra dos símbolos de medida podem ser encontrados em [24–28].

Como foi relatado no parágrafo anterior, *Schwinger* propõe o princípio de ação quântica [22] que caracteriza a dinâmica na mecânica quântica. Diferente do princípio de ação estacionária na mecânica clássica [2], que é um princípio de extremização do funcional ação, *Schwinger* propõe que a variação da ação, no caso quântico, deve depender dos termos de fronteira, fato primeiro notado por *Weiss* [29–31]. A partir deste princípio, *Schwinger* deduz as relações de comutação, as equações de *Heisenberg* e *Schrödinger* e, ainda, equações de *Hamilton-Jacobi* para o caso quântico.

No capítulo 1 da presente dissertação mostramos alguns métodos para o cálculo de invariantes, tanto clássico quanto quântico, e fazemos comparações entre as diferentes abordagens. No caso clássico, mostramos o procedimento introduzido por *Ermakov* [6], as generalizações propostas por *Ray* e *Reid* [7, 8] e, utilizando o teorema de *Noether*, o procedimento de *Lutzky* [14]. No caso quântico, primeiro expomos o procedimento de *Lewis* e *Riesenfeld* [5], pois nele se mostra como montar os autovetores e autovalores a partir do invariante quadrático. Em seguida, expomos o método da álgebra dinâmica desenvolvido por *Korsh* e *Kaushal* [18, 19] e a combinação das equações de movimento

proposto por *Bertin, Pimentel e Ramirez* [21]. Esta última abordagem é feita de maneira mais minuciosa, já que o estudo e extensão desta para outros casos é um dos temas centrais do presente trabalho.

No capítulo 2, apresentamos a formulação da mecânica quântica partindo de um princípio variacional, que é o formalismo de *Schwinger*. Esta exposição tem como objetivo calcular os invariantes encontrados no primeiro capítulo, utilizando o procedimento adotado em [21], e estabelecer uma conexão entre as duas abordagens via um teorema de *Noether* quântico. Mostramos assim que as abordagens são complementares, sendo a segunda mais rigorosa. Esta conexão justifica a maneira com que se faz as combinações das equações de movimento em [21], colocando assim este procedimento em bases mais sólidas.

No capítulo 3, abordaremos a quantização do oscilador forçado dissipativo com termos de frequência, dissipação e força variáveis utilizando o método [21]. Calculamos os invariantes lineares, quadráticos e, a partir destes, construímos a conhecida álgebra do oscilador harmônico simples, a qual nos permite escrever o espectro. Depois, tomamos alguns casos particulares e, seguindo a mesma lógica, calculamos os invariantes lineares e espectro. Por fim, teceremos uma comparação entre os diversos casos tratados ao longo do capítulo.

Capítulo 1

Invariantes Dinâmicos

Invariante dinâmico é uma quantidade que não se altera a medida que o tempo passa. Na mecânica clássica temos os exemplos mais conhecidos, *i.e.*, energia, momento linear e momento angular, para sistemas que apresentam simetrias de translação no tempo, translação no espaço e de rotação, respectivamente. Na mecânica quântica estas quantidades aparecem, por exemplo, em armadilhas de íons [3, 4, 32] e na computação quântica [33].

*Ermakov*¹ em [6], utilizando invariantes, mostrou que soluções de equações diferenciais distintas podem estar relacionadas. Nesse trabalho, ele estabelece a conexão entre as soluções para o par de equações

$$\ddot{r} - Xr = \frac{1}{r^3}, \quad \ddot{u} - Xu = 0, \quad (1.1)$$

a partir do chamado invariante de *Ermakov*. No entanto, *Steen*², já havia estudado [34] a relação entre as soluções do par de equações acima. O trabalho de *Steen* não foi devidamente reconhecido e, portanto, os sistemas do tipo acima foram atribuídos a *Ermakov*. Isto posto, começamos o capítulo com a relação entre as soluções da equação acima do ponto de vista de *Steen* e depois procedemos aos desenvolvimentos de *Ermakov*, bem como suas possíveis generalizações. Posteriormente apresentamos outros métodos desenvolvidos para o cálculo de invariantes, e.g., utilizando o teorema de *Noether* [14] e a álgebra dinâmica [18, 19]. Na sequência, desenvolvemos o método de *Lewis* e *Riesenfeld* [5] para contornar o problema do Hamiltoniano dependente do tempo e, por fim, apresentamos um novo método para o cálculo de invariantes, desenvolvido por *Bertin*,

¹*Vasilij Petrovich Ermakov* (1845-1922) foi um matemático nascido na Bielorrússia.

²*Adolph Steen* (1816-1886) foi um matemático e político dinamarquês.

Pimentel e Ramirez [21].

1.1 Equações de Steen-Ermakov

Em 1874, *Steen* publicou um artigo [34], no qual mostra a relação entre as equações 1.1. Neste trabalho, ele mostra que, dada a solução de uma determinada equação linear, é possível obter a solução da não linear e vice-versa. Pouco tempo depois, *Ermakov* publicou suas notas sobre análise matemática [6], nas quais apresentava resultados similares aos encontrados por *Steen*. O trabalho de *Ermakov*, no entanto, vai além e prova um teorema que permite relacionar uma classe maior de equações não lineares às lineares, do qual o par estudado por *Steen* é um caso particular.

Posteriormente, vários autores redescobriram a relação existente entre o par de equações estudado por *Steen*. Possíveis generalizações foram realizadas e, a menos de poucas referências citadas em [34], nenhum crédito é atribuído a *Steen*. As possíveis razões para isso são discutidas na primeira parte de [34]³, no qual é feito um apanhado histórico sobre o desenvolvimento das equações de *Steen*. Os sistemas desse tipo normalmente são atribuídos a *Ermakov*, pela generalização feita por este em [6], a *Milne* [35] por ter mostrado a mesma relação entre o par de equações que já havia sido descoberto por *Steen*, a *Pinney* [36] por encontrar a solução geral da equação não linear, dentre outros. Dito isto, na tentativa de não perpetuar essa injustiça, denominaremos o par de equações do início do capítulo por equações de *Steen-Ermakov*, pelo pioneirismo e contribuições singulares destes autores no assunto.

Nesta seção, portanto, começamos com os desenvolvimentos feitos por *Steen*, sobre o par de equações apresentados no início do capítulo. Na sequência, mostramos como *Ermakov* estabeleceu as relações entre equações diferenciais através do invariante que leva seu nome. Por fim, apresentamos algumas possíveis generalizações dos trabalhos de *Ermakov* e uma interpretação física para o invariante de *Ermakov*, proposta por *Eliezer e Gray* [37].

³A segunda parte é a tradução para o inglês do artigo original de *Steen*.

1.1.1 Equações de Steen

O par de equações estudado por *Steen*, como foi dito acima, nos permite encontrar a solução de uma equação linear a partir da solução de uma equação não linear e vice-versa. *Steen* estudou dois pares de equações diferenciais. O primeiro é apresentado a seguir

$$\ddot{r} - Xr = \frac{1}{r^3}, \quad \ddot{u} - Xu = 0, \quad (1.2)$$

onde $r = r(t)$, $u = u(t)$, $X = X(t)$ e os pontos representam as derivadas com respeito ao parâmetro contínuo t . Para mostrar a relação entre as equações acima, *Steen* parte de duas soluções linearmente independentes, u_1 e u_2 , da equação homogênea

$$\ddot{u}_1 - Xu_1 = 0, \quad \ddot{u}_2 - Xu_2 = 0, \quad (1.3)$$

e elimina a dependência com a função $X(t)$, subtraindo a primeira multiplicada por u_2 da segunda multiplicada por u_1

$$u_2\ddot{u}_1 - u_1\ddot{u}_2 = \frac{d}{dt}(u_2\dot{u}_1 - u_1\dot{u}_2) = 0. \quad (1.4)$$

A relação acima nos resulta

$$W = u_2\dot{u}_1 - u_1\dot{u}_2, \quad (1.5)$$

onde W é a primeira integral e também o Wronskiano do sistema 1.3, que deve ser constante, já que estamos supondo que u_1 e u_2 são duas soluções linearmente independentes. Se tomarmos o caso particular no qual $W = -1$, podemos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$u_1 = r \cos \theta, \quad u_2 = r \sin \theta, \quad (1.6)$$

com

$$r^2 = u_1^2 + u_2^2. \quad (1.7)$$

Desse modo, 1.5 se torna

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \int \frac{dt}{r^2} + \theta_0, \quad (1.8)$$

o que nos permite escrever as soluções u_1 e u_2 em função de r

$$u_1 = r \cos \left(\int \frac{dt}{r^2} \right), \quad u_2 = r \sin \left(\int \frac{dt}{r^2} \right), \quad (1.9)$$

ou a solução geral que fica escrita como

$$u = A \sin \left(B + \int \frac{dt}{r^2} \right), \quad (1.10)$$

onde A e B são constantes determinadas pelas condições de contorno.

Aqui, percebemos que, se a função r é conhecida, a solução geral da equação homogênea 1.10 fica determinada e, reciprocamente, se u_1 e u_2 são conhecidas, r é determinado por 1.7. Basta agora mostrar que r deve satisfazer à equação não linear de 1.2 para deixar a conexão entre o par de equações explícita. Com esse intuito, derivamos 1.7 duas vezes

$$r\ddot{r} + (\dot{r})^2 = u_1\ddot{u}_1 + (\dot{u}_1)^2 + u_2\ddot{u}_2 + (\dot{u}_2)^2, \quad (1.11)$$

e utilizamos as relações 1.3 e 1.6 para mostrar que

$$u_1\ddot{u}_1 + u_2\ddot{u}_2 = Xr^2, \quad (\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2 = \dot{r}^2 + \frac{1}{r^2}. \quad (1.12)$$

Substituindo as relações 1.12 em 1.11 temos a equação diferencial satisfeita por r , que, como esperado, é a equação não linear de 1.2

$$\ddot{r} - Xr = \frac{1}{r^3}. \quad (1.13)$$

Esse foi o caminho seguido por *Steen* para mostrar a conexão entre o par de equações 1.2. Antes de prosseguir para os desenvolvimentos de *Ermakov*, apresentamos outra equação que *Steen* relacionou à homogênea de 1.2. No fim do seu artigo [34] ele mostra que as soluções das equações abaixo

$$\frac{d^3 r^2}{dt^3} - 4X \frac{dr^2}{dt} - 2 \frac{dX}{dt} r^2 = 0, \quad \frac{d^2 u}{dt^2} - Xu = 0, \quad (1.14)$$

estão conectadas da mesma forma que 1.2. Isso ocorre porque a primeira das equações acima é equivalente à primeira das equações 1.2. Para ver isso, notemos que a equação acima tem uma integral primeira dada por

$$r^2 \frac{d^2 r^2}{dt^2} - 2Xr^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{dr^2}{dt} \right)^2 = \lambda, \quad (1.15)$$

onde λ é uma constante de integração. Se desenvolvermos as derivadas com respeito a r^2 na expressão acima temos

$$r^2 \left[2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2r \frac{d^2 r}{dt^2} \right] - 2Xr^4 - \frac{1}{2} \left(2r \frac{dr}{dt} \right)^2 = \lambda, \quad (1.16)$$

e finalmente

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - Xr = \frac{\lambda}{2r^3}, \quad (1.17)$$

que é precisamente a primeira das equações de *Steen* 1.2 com $\lambda = 2$. Fica evidente, portanto, que as equações são equivalentes. Apresentamos 1.14 aqui, pois, como veremos nas próximas seções, ela aparece em outros trabalhos relacionados a invariantes, nos permitindo assim, fazer uma conexão com os trabalhos de *Steen*.

1.1.2 Invariante de Ermakov

Em 1880, *Ermakov* publicou um trabalho [6], no qual mostra como obter condições de integrabilidade para certos tipos de equações diferenciais. A partir destas, fazendo mudanças nas variáveis independentes e dependentes, ele encontra condições para outras equações diferenciais. Na parte final do seu trabalho ele apresenta os principais resultados, que são referentes à relação entre equações diferenciais lineares e não-lineares. *Ermakov* estudou a relação entre as soluções do par 1.2, estudado por *Steen*, sem impor a condição $W = -1$ em 1.5, ou seja, ele parte do par de equações

$$\ddot{r} - Xr = \frac{\alpha}{r^3}, \quad \ddot{u} - Xu = 0, \quad (1.18)$$

onde α é uma constante e, novamente, $u = u(t)$, $r = r(t)$, $X = X(t)$. Apesar dos resultados serem os mesmos, *Ermakov* segue um caminho diferente e generaliza os resultados para uma classe bem maior de equações diferenciais.

Combinando as equações 1.18, ele calcula uma primeira integral. A constante de movimento que surge é o chamado invariante de *Ermakov*, responsável pela conexão entre as soluções das equações diferenciais. Aqui apresentaremos a versão mais geral, também feita por *Ermakov* e depois tomamos o caso particular 1.18. Começamos pelo par

$$\ddot{r} - Xr = \frac{1}{ur^2} f\left(\frac{u}{r}\right), \quad \ddot{u} - Xu = 0, \quad (1.19)$$

onde f é uma função conhecida. Multiplicando a segunda das equações 1.19 por r , a primeira por u e subtraindo ambas temos

$$u\ddot{r} - r\ddot{u} = \frac{1}{r^2} f\left(\frac{u}{r}\right). \quad (1.20)$$

Ermakov mostra que solução para u é dada em termos de uma quadratura. Para ver isso, notemos que a expressão 1.20 tem uma primeira integral que pode ser calculada como segue

$$\begin{aligned} 2(u\dot{r} - r\dot{u})\frac{d}{dt}(u\dot{r} - r\dot{u}) &= \frac{d}{dt}(u\dot{r} - r\dot{u})^2 = 2\left(\frac{u\dot{r} - r\dot{u}}{r^2}\right)f\left(\frac{u}{r}\right), \\ &= -2f\left(\frac{u}{r}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{r}\right), \end{aligned} \quad (1.21)$$

de onde temos a primeira integral

$$I = (u\dot{r} - r\dot{u})^2 + \phi\left(\frac{u}{r}\right), \quad (1.22)$$

com I sendo uma constante de integração chamada de **invariante de Ermakov**. O termo ϕ que aparece acima é dado por

$$\phi\left(\frac{u}{r}\right) = 2 \int f\left(\frac{u}{r}\right) d\left(\frac{u}{r}\right). \quad (1.23)$$

Para determinar a quadratura que soluciona o problema basta tomar 1.22, tirar a raíz e dividir por u^2 , resultando

$$\frac{r\dot{u} - u\dot{r}}{u^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r}{u}\right) = \frac{1}{u^2}\sqrt{I - \phi\left(\frac{u}{r}\right)}, \quad (1.24)$$

de onde temos a quadratura

$$\int \frac{dt}{u^2} + C = \int \frac{d\left(\frac{r}{u}\right)}{\sqrt{I - \phi\left(\frac{u}{r}\right)}}, \quad (1.25)$$

com C sendo a segunda constante de integração. A quadratura 1.25 calcula r dado f e uma solução particular de u conhecida. Entretanto, nem sempre é possível isolar r na relação 1.25. Para obter u dado f e a solução particular de r , partimos de 1.22 e fazemos o mesmo que foi feito para encontrar a quadratura 1.25

$$\frac{u\dot{r} - r\dot{u}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{u} \right) = \frac{1}{u^2} \sqrt{I - \phi \left(\frac{u}{r} \right)} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dt}{r^2} + C = \int \frac{d \left(\frac{r}{u} \right)}{\sqrt{I - \phi \left(\frac{u}{r} \right)}}. \quad (1.26)$$

Se pudermos fazer $\phi(u/r) = \Phi(r/u)$ temos uma quadratura muito similar a 1.25, que nos permite calcular a solução de u , desde que f e a solução para r sejam conhecidas.

Apesar de *Ermakov* não ter mostrado como obter o par de equações 1.18 a partir de 1.19, isto é bastante simples. Basta tomar a função f de 1.19 como sendo

$$f \left(\frac{u}{r} \right) = \alpha \frac{u}{r}, \quad (1.27)$$

que nos resulta no par 1.18. Utilizando 1.23 podemos calcular ϕ

$$\phi \left(\frac{u}{r} \right) = 2\alpha \int \left(\frac{u}{r} \right) d \left(\frac{u}{r} \right) = \alpha \left(\frac{u}{r} \right)^2, \quad (1.28)$$

e assim obter o invariante de *Ermakov* 1.22 para o caso 1.18

$$I = (u\dot{r} - r\dot{u})^2 + \alpha \frac{u^2}{r^2}. \quad (1.29)$$

Nesse caso mais simples é possível escrever a solução para r sem necessariamente resolver a quadratura 1.25. Para isso, precisamos ter duas soluções u_1 e u_2 , linearmente independentes, da equação homogênea de 1.18. De posse dessas duas soluções podemos escrever o invariante de *Ermakov* para ambas

$$I_1 = (r\dot{u}_1 - u_1\dot{r})^2 + \alpha \frac{u_1^2}{r^2}, \quad I_2 = (r\dot{u}_2 - u_2\dot{r})^2 + \alpha \frac{u_2^2}{r^2}, \quad (1.30)$$

e, manipulando as equações acima, é possível eliminar \dot{r} para encontrar a solução geral r da equação não homogênea de 1.18.

1.1.3 Generalização das equações de Steen-Ermakov

Muito tempo depois dos trabalhos de *Steen e Ermakov*, *Ray e Reid* [7] propuseram algumas generalizações das equações 1.19 e calcularam os invariantes nesses casos. Encontraram também os invariantes para o oscilador harmônico em n dimensões [8] e estudaram a superposição não linear⁴ para vários tipos de sistemas [9, 10, 12, 13]. Vamos apresentar aqui a generalização mais direta dos sistemas de *Steen-Ermakov*.

Partimos do seguinte par de equações

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{x\rho^2}f\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad \ddot{x} + \omega^2(t)x = \frac{1}{\rho x^2}g\left(\frac{\rho}{x}\right), \quad (1.31)$$

onde trocamos u por $x = x(t)$, r por $\rho = \rho(t)$ e X por ω^2 . Para recuperar o par 1.19 basta tomar $g = 0$. Neste caso, podemos construir um invariante seguindo a mesma linha de raciocínio seguida por *Ermakov*. Multiplicamos a primeira das equações 1.31 por ρ , a segunda por x e subtraímos ambas para poder eliminar ω^2 . Agora basta multiplicar pelo fator de integração $\rho\dot{x} - x\dot{\rho}$ para ficarmos com

$$\frac{d}{dt}[(\rho\dot{x} - x\dot{\rho})^2] = g\left(\frac{\rho}{x}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{x}\right) - f\left(\frac{x}{\rho}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{x}\right), \quad (1.32)$$

que nos resulta o seguinte invariante para o par de equações de *Steen-Ermakov* generalizados 1.31

$$I = \frac{1}{2}(\rho\dot{x} - x\dot{\rho})^2 + \int^{x/\rho} f(u)du + \int^{\rho/x} g(u)du. \quad (1.33)$$

Como foi apontado por *Ray e Reid* [9], ω pode depender das variáveis dependentes, ou seja $\omega = \omega(t, \rho, \dot{\rho}, \dots, x, \dot{x}, \dots)$, já que ele é eliminado no processo de construção do invariante. Outro fato relevante é que apesar do invariante de *Ermakov* fazer a conexão entre as soluções das equações 1.18, isso não necessariamente ocorre para os casos mais gerais 1.19 e 1.31. O motivo para isso é que nem sempre conseguimos isolar ρ em 1.33 como fizemos no fim da subseção anterior para calcular a solução geral para r em termos das soluções u_1 e u_2 .

⁴Para algumas equações não lineares é possível combinar soluções de maneira a obter novas soluções.

Dando um passo adiante, *Ray* e *Reid* [9] trataram do caso em que há uma força de atrito no sistema fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$dt = \frac{ds}{\chi(s)}, \quad (1.34)$$

de modo que o par de equações 1.31 se torna

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} + p(s)\frac{d\rho}{ds} + \frac{\omega^2}{\chi^2}\rho = \frac{1}{x\rho^2\chi^2}f\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad (1.35)$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + p(s)\frac{dx}{ds} + \frac{\omega^2}{\chi^2}x = \frac{1}{\rho x^2\chi^2}g\left(\frac{\rho}{x}\right), \quad (1.36)$$

onde $p(s)$ é dado por

$$p(s) = \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{ds} \quad \rightarrow \quad \chi = \exp\left[\int p(s)ds\right], \quad (1.37)$$

e o invariante fica escrito da seguinte forma

$$I = \frac{1}{2}\chi^2 \left(\rho \frac{dx}{ds} - x \frac{d\rho}{ds} \right)^2 + \int^{x/\rho} f(u)du + \int^{\rho/x} g(u)du. \quad (1.38)$$

Vemos assim que o caso incluindo a dissipação, pode ser obtido a partir do caso sem dissipação 1.31. Portanto estudando o segundo, conseguimos resultados para o primeiro.

Para finalizar essa subseção vamos mostrar explicitamente o que seria uma superposição não linear, citada anteriormente. Tomando como base os desenvolvimentos de *Ray* e *Reid* em [10], partimos do invariante 1.33 e fazemos a mudança de variável $r = \rho/x$

$$I = \frac{1}{2}(\rho\dot{x} - x\dot{\rho})^2 + V(r), \quad (1.39)$$

onde $V(r)$ são as integrais das funções f e g encontradas anteriormente em 1.33

$$V(r) = \int^r g(s)ds + \int^{1/r} f(s)ds. \quad (1.40)$$

Fazendo agora a mudança de variáveis

$$d\tau = \frac{dt}{x^2} \quad \rightarrow \quad \tau = \int \frac{dt}{x^2}, \quad (1.41)$$

o invariante fica escrito da seguinte maneira

$$I = \frac{1}{2}r'^2 + V(r), \quad (1.42)$$

onde r' significa a derivada com respeito à variável τ . A expressão acima tem o formato da energia usualmente conhecida, como a parte cinética em r'^2 mais o potencial $V(r)$. Podemos agora transformar a expressão acima em uma quadratura

$$\tau + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{I - V(r)}}, \quad (1.43)$$

de modo que, se tivermos uma solução particular para x em 1.31 e conseguirmos resolver a expressão acima em função de r , temos uma solução geral para ρ em 1.31, utilizando $\rho = xr$. Vale lembrar que podemos fazer o mesmo para obter uma solução para x , bastando ter uma solução particular de ρ e utilizando $x = \rho/r$.

Esse é um exemplo do que se chama de superposição não linear. Em essência o que se faz é combinar soluções particulares das equações diferenciais não lineares, de maneira a formar uma solução geral de outra equação não linear. A expressão 1.43 é muito similar à integral que foi encontrada por *Ermakov*, exposta em 1.25. *Steen* em seu artigo [34] utiliza um método muito similar para obter soluções de equações não lineares.

1.1.4 Interpretação Física do Invariante de Ermakov

Como ultimo resultado desta seção, apresentamos a interpretação física dada por *Eli-ezer* e *Gray* [37] para o invariante de *Ermakov* no caso mais simples 1.29. Os autores

consideram o movimento do oscilador unidimensional como sendo a projeção de um movimento no plano com uma força central. Um exemplo físico disso é o pêndulo com comprimento do fio variável.

A interpretação se baseia em uma mudança de variáveis, a mesma feita por *Steen*, para perceber que o invariante de *Ermakov* está relacionado com a conservação do momento angular. A relação 1.5 pode ser vista aqui como sendo o momento angular, com u_1 e u_2 sendo as posições e suas derivadas como os momentos lineares, a menos de uma constante. Esta equação nos leva a 1.8

$$W = u_2 \dot{u}_1 - u_1 \dot{u}_2 = r^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.44)$$

onde W é o momento angular constante. Fazendo agora a mudança de variáveis no invariante de *Ermakov*, lembrando que $u = r \cos \theta$ temos

$$\begin{aligned} I &= (r(\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}) - \dot{r} r \cos \theta)^2 + W^2 \frac{(r \cos \theta)^2}{r^2}, \\ &= W^2 \sin^2 \theta + W^2 \cos^2 \theta = W^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Ou seja o invariante de *Ermakov* pode ser interpretado como a conservação do momento angular para o caso de um movimento bidimensional, com força central projetado no plano.

1.2 Outros Métodos para o Cálculo de Invariantes

Nesta seção vamos apresentar outros métodos que podem ser utilizados para calcular invariantes dinâmicos. Até aqui, os sistemas do tipo *Steen-Ermakov* são tratados do ponto de vista clássico, ou seja, temos funções e não operadores. Nesta seção, começamos por calcular o invariante 1.29 a partir da aplicação direta do teorema de *Noether* na mecânica clássica. Posteriormente, expomos o método da álgebra dinâmica que serve tanto para o caso clássico quanto quântico, por se utilizar da estrutura dos parênteses de *Poisson*.

1.2.1 Teorema de Noether

A aplicação do teorema de *Noether*, para o calculo do invariante de *Ermakov* 1.29, foi primeiro feita por *Lutzky* [38]. Pouco tempo depois, *Ray* e *Reid*, generalizaram a Lagrangiana utilizada por *Lutzky* e calcularam invariantes para uma classe maior de sistemas [12, 15, 16].

Na abordagem de *Lutzky* partimos da Lagrangiana para o oscilador harmônico de frequência variável

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2(t)q^2), \quad (1.46)$$

e utilizamos o teorema de *Noether* na versão utilizada por *Lutzky* [14]. Se a transformação de simetria dada pelo operador

$$G(q, t) = \varepsilon(q, t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(q, t) \frac{\partial}{\partial q}, \quad (1.47)$$

deixa a ação $S = \int L dt$ invariante e se a quantidade

$$f' = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial f}{\partial q} = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} + \eta \frac{\partial L}{\partial q} + (\eta' - \dot{q}\varepsilon') \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \varepsilon' L, \quad (1.48)$$

é uma derivada total, então a expressão

$$I = (\varepsilon \dot{q} - \eta) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \varepsilon L + f, \quad (1.49)$$

é um invariante de *Noether*. Vamos então substituir a Lagrangiana 1.46 em 1.48 e ver quais condições devemos ter para obter o invariante de *Noether* 1.49

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -q^2 \left(\varepsilon \omega \dot{\omega} + \frac{\dot{\varepsilon} \omega^2}{2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} \right) - \eta \omega^2 q - \frac{\dot{q}^3}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} + \dot{q}^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial q} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} - \frac{\dot{\varepsilon}}{2} \right) + \dot{q} \left(\dot{\eta} - \frac{\partial f}{\partial q} \right), \quad (1.50)$$

onde o ponto significa derivada com respeito ao tempo. Sendo \dot{q}^3 , \dot{q}^2 e \dot{q} linearmente independentes dos demais e $f = f(q, t)$, devemos impor as seguintes condições para que 1.50 seja verdadeira

$$\dot{q}^3 \rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \quad (1.51)$$

$$\dot{q}^2 \rightarrow \left(\frac{\partial \eta}{\partial q} - \frac{\dot{\varepsilon}}{2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \eta(q, t) = \frac{\dot{\varepsilon} q}{2} + \psi(t), \quad (1.52)$$

$$\dot{q} \rightarrow \dot{\eta} - \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \quad f = \frac{\ddot{\varepsilon}}{4} q^2 + \dot{\psi} q + \chi(t). \quad (1.53)$$

Com as condições 1.51, 1.52 e 1.53 a expressão 1.50 fica escrita da seguinte maneira

$$\left(\frac{\ddot{\varepsilon}}{4} + \dot{\varepsilon} \omega^2 + \varepsilon \omega \dot{\omega} \right) q^2 + (\ddot{\psi} + \omega^2 \psi) q + \dot{\chi} = 0. \quad (1.54)$$

Para que a igualdade 1.54 seja verdadeira, precisamos que as equações abaixo sejam satisfeitas

$$\ddot{\varepsilon} + 4\dot{\varepsilon} \omega^2 + 4\varepsilon \omega \dot{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\varepsilon \ddot{\varepsilon} + 4\varepsilon^2 \omega^2 = C + \dot{\varepsilon}^2, \quad (1.55)$$

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0. \quad (1.56)$$

A equação 1.55 acima, é a mesma que 1.14 substituindo X por $-\omega^2$ e ε por r^2 . Como foi dito logo abaixo de 1.14 essa equação tem uma integral que resulta na equação não linear de *Steen-Ermakov*, ou seja, o par 1.18. Esse resultado é esperado, pois, como vimos anteriormente, o invariante de *Ermakov* conecta o par de equações acima. Se esperamos encontrar o invariante utilizando outro método, é natural esperar que as equações acima apareçam como condição para a existência do invariante.

Com as condições 1.55 e 1.56 a igualdade 1.54 fica escrita como $\dot{\chi} = 0$, que implica χ como sendo uma constante, a qual podemos tomar como nula, pois o efeito de χ vai ser o de adicionar um número ao invariante. Com a condição 1.48 satisfeita, podemos agora

calcular, supondo $\psi = 0$, o invariante dado por 1.49

$$I = \frac{1}{2} [\varepsilon \dot{q}^2 + (\ddot{\varepsilon} + \varepsilon \omega^2) q^2 - \varepsilon \dot{q} q]. \quad (1.57)$$

O invariante acima não está exatamente igual ao de *Ermakov*. Para mostrar a igualdade, primeiro tomamos a relação 1.55 e substituímos no invariante acima. Depois tomamos $\varepsilon = \rho^2$ e ficamos com

$$I = \frac{1}{2} \left[(\rho \dot{q} - \dot{\rho} q)^2 + c \frac{q^2}{\rho^2} \right], \quad (1.58)$$

que, a menos do fator $1/2$, é o invariante de *Ermakov* encontrado em 1.29.

Aqui podemos fazer uma comparação entre o procedimento utilizado por *Ermakov*, generalizado por *Ray* e *Reid*, e a aplicação do teorema de *Noether*. No primeiro caso estamos tomando como ponto de partida as equações auxiliares 1.31 e, a partir delas, calculamos o invariante, enquanto que no segundo as equações auxiliares surgem em 1.48 como condições para obtermos um invariante dada uma Lagrangiana. Fica claro que a aplicação do teorema de *Noether* tem suas vantagens, haja visto que não há a necessidade de conhecer as equações auxiliares. Este motivo provavelmente levou *Ray* e *Reid* [12, 15, 16] a tentar construir invariantes para Lagrangianas cada vez mais gerais. Um dos resultados mais importantes parte da Lagrangiana

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2(t) \frac{q^2}{2} + P(q, \dot{q}, t). \quad (1.59)$$

A condição para termos um invariante de *Noether* 1.48 impõe restrições sobre o formato da função P , de modo que a Lagrangiana acima fica escrita da seguinte forma

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega^2(t) \frac{q^2}{2} + \frac{1}{x^2} F\left(\frac{q}{x}, x\dot{q} - q\dot{x}\right), \quad (1.60)$$

com x satisfazendo à equação não linear de *Steen-Ermakov*. Com estas condições satisfeitas, temos o invariante 1.49 escrito da seguinte maneira

$$I = \frac{1}{2}W^2 + \lambda \left(\frac{q}{x}\right)^2 - F + W \frac{\partial P}{\partial W}, \quad (1.61)$$

onde $W = x\dot{q} - q\dot{x}$ é o wronskiano e λ uma constante.

1.2.2 Álgebra Dinâmica

Antes de prosseguir para a apresentação do método que leva o nome desta subseção, vale ressaltar que não utilizaremos os operadores com os usuais chapéus \hat{q} e \hat{p} . No que segue, estaremos supondo que estamos trabalhando do ponto de vista quântico e, portanto, as coordenadas q e p são operadores e não funções no espaço de fase.

O outro método que apresentamos nesta seção, utilizado por *Korsch e Kaushal* [18, 19], faz uso da álgebra dinâmica relativa a um dado Hamiltoniano para obter o invariante do sistema. Normalmente podemos escrever o Hamiltoniano da seguinte forma

$$H = \sum_n h_n(t) \Gamma_n, \quad (1.62)$$

onde os Γ_n não dependem explicitamente do tempo. A álgebra dinâmica é a álgebra de *Lie* dos operadores Γ_n , fechada com respeito ao comutador

$$[\Gamma_n, \Gamma_m] = i\hbar \sum_r C_{nm}^r \Gamma_r, \quad (1.63)$$

com os C_{nm}^r sendo as constantes de estrutura da álgebra. Percebe-se, assim, que uma grande vantagem desse método é a possibilidade de ser utilizado tanto para o caso clássico quanto para o quântico, já que se utiliza da estrutura dos parênteses de *Poisson*.

Procuramos por um invariante que seja membro da álgebra dinâmica, ou seja, vamos supor que

$$I = \sum_n \lambda_n(t) \Gamma_n. \quad (1.64)$$

Para calcular o invariante partimos de sua definição $\dot{I} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = \sum_n \dot{\lambda}_n \Gamma_n + \frac{1}{i\hbar} \sum_{nm} \lambda_n h_m [\Gamma_n, \Gamma_m] = 0, \\ &= \sum_r \dot{\lambda}_r \Gamma_r + \sum_{nmr} \lambda_n h_m C_{nm}^r \Gamma_r = \sum_r \left(\dot{\lambda}_r + \sum_{nm} \lambda_n h_m C_{nm}^r \right) \Gamma_r = 0, \end{aligned} \quad (1.65)$$

de onde tiramos as seguintes condições para que I seja um invariante

$$\dot{\lambda}_r + \sum_{nm} \lambda_n h_m C_{nm}^r = 0. \quad (1.66)$$

Resumindo o método, primeiro escrevemos o Hamiltoniano de forma que os operadores Γ_n formem uma álgebra fechada⁵, depois resolvemos o sistema de equações diferenciais 1.66 e, por fim, construímos o invariante com 1.64. Para exemplificar, vamos calcular o invariante quadrático do oscilador dissipativo, cujo Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2} (e^{-G(t)} p^2 + e^{G(t)} \omega^2(t) q^2), \quad (1.67)$$

onde $G(t)$ é uma função do tempo e q e p são os operadores momento e posição satisfazendo a usual relação de comutação $[q, p] = qp - pq = i\hbar$. Aqui podemos fazer as seguintes identificações

$$\Gamma_1 = \frac{p^2}{2}, \quad h_1(t) = e^{-G(t)}, \quad (1.68)$$

$$\Gamma_3 = \frac{q^2}{2}, \quad h_3(t) = e^{G(t)} \omega^2(t). \quad (1.69)$$

Quando calculamos as relações de comutação, percebemos que a álgebra não é fechada

⁵Isso pode ser feito adicionando termos ao Hamiltoniano com os h_n referentes a esses termos todos nulos.

$$[\Gamma_1, \Gamma_3] = -\frac{i\hbar}{2}\{q, p\}, \quad (1.70)$$

com $\{q, p\} = qp + pq$ sendo o anticomutador. Precisamos então adicionar 1.70 ao Hamiltoniano 1.67

$$H = \frac{1}{2}(e^{-G(t)}p^2 + 0\{q, p\} + e^{G(t)}\omega^2(t)q^2). \quad (1.71)$$

Agora, fazendo as seguintes identificações

$$\Gamma_1 = \frac{p^2}{2}, \quad \Gamma_2 = \frac{\{q, p\}}{2}, \quad \Gamma_3 = \frac{q^2}{2}, \quad (1.72)$$

$$h_1(t) = e^{-G(t)}, \quad h_2(t) = 0, \quad h_3(t) = e^{G(t)}\omega^2(t), \quad (1.73)$$

calculamos novamente as relações de comutação e percebemos que a álgebra é fechada

$$[\Gamma_1, \Gamma_3] = -i\hbar\Gamma_2, \quad [\Gamma_2, \Gamma_3] = -2i\hbar\Gamma_3, \quad [\Gamma_2, \Gamma_1] = 2i\hbar\Gamma_1, \quad (1.74)$$

com as constantes de estrutura dadas por

$$C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1 \quad C_{32}^3 = -C_{23}^3 = C_{21}^1 = -C_{12}^1 = 2, \quad (1.75)$$

e todas as outras nulas.

Agora podemos impor as condições para que tenhamos um invariante. Utilizando 1.66, vemos que as funções λ_n devem satisfazer

$$\dot{\lambda}_1 = -2e^{-G}\lambda_2, \quad (1.76)$$

$$\dot{\lambda}_2 = e^G \omega^2 \lambda_1 - e^{-G} \lambda_3, \quad (1.77)$$

$$\dot{\lambda}_3 = 2e^G \omega^2 \lambda_2, \quad (1.78)$$

que podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\lambda_1 = \rho^2 \quad (1.79)$$

$$\lambda_2 = -e^G \rho \dot{\rho} \quad (1.80)$$

$$\lambda_3 = e^{2G} \dot{\rho}^2 + e^{2G} \rho (\omega^2 \rho + g \dot{\rho} + \ddot{\rho}), \quad (1.81)$$

onde ρ deve satisfazer à seguinte equação diferencial

$$2ge^{2G} \dot{\rho}^2 + 2e^{2G} \rho \ddot{\rho} + 2ge^{2G} \rho A + e^{2G} \dot{\rho} A + e^{2G} \rho \dot{A} = -2e^{2G} \omega^2 \rho \dot{\rho}, \quad (1.82)$$

com $A = (\omega^2 \rho + g \dot{\rho} + \ddot{\rho})$ e $g = \dot{G}$. Podemos manipular a ultima das expressões acima para obter

$$2ge^{2G} \rho^3 A + e^{2G} 3\rho^2 \dot{\rho} A + e^{2G} \rho^3 \dot{A} = 0, \quad (1.83)$$

que nos resulta na seguinte integral

$$\ddot{\rho} + g \dot{\rho} + \omega^2 \rho = \frac{h^2}{\rho^3} e^{-2G}, \quad (1.84)$$

com h sendo a constante de integração. Percebemos que a expressão é precisamente a equação não linear de *Steen-Ermakov* 1.18, no caso em que $G = 0$. Podemos agora escrever o invariante utilizando 1.64 com as funções λ_n dadas por 1.79-1.81

$$I = \frac{1}{2} \left(\rho^2 p^2 - e^G \rho \dot{\rho} \{q, p\} + \left(e^{2G} \dot{\rho}^2 + \frac{h^2}{\rho^2} \right) q^2 \right) = \frac{1}{2} \left((\rho p - e^G \dot{\rho} q)^2 + \frac{h^2}{\rho^2} q^2 \right), \quad (1.85)$$

que, para $G = 0$, é igual ao invariante de *Ermakov* 1.29.

O método da álgebra dinâmica, da mesma forma que a aplicação do teorema de *Noether*, tem a vantagem de obter as condições das funções de maneira bastante natural. Uma vantagem com relação a aplicação do teorema de *Noether* é que, aqui, não precisamos argumentar que os coeficientes das potências de \dot{q} devem se anular para obter o invariante, ou que $\psi = 0$ para encontrar o invariante de *Ermakov*. Além disso, este método pode ser utilizado tanto para o caso clássico quanto para o quântico. Basta completar o Hamiltoniano de maneira que os Γ_n formem uma álgebra fechada pelo comutador⁶, calcular $\dot{I} = 0$ para obter as condições para as funções e escrever o invariante usando 1.64.

1.3 Equações de Steen-Ermakov na Mecânica Quântica

Iniciamos com uma breve revisão sobre mecânica quântica para posteriormente apresentar o caso de sistemas não estacionários e suas dificuldades. Em um segundo momento desenvolvemos a teoria exata para o oscilador de frequência variável utilizando o procedimento proposto por *Lewis e Riesenfeld* [5], que tem como principal elemento o invariante de *Ermakov*.

1.3.1 Dinâmica na Mecânica Quântica e Sistemas Não Estacionários

Na mecânica quântica, o tempo é tratado como um parâmetro real contínuo e a evolução temporal dos estados é dada por um operador unitário satisfazendo às seguintes condições

- $\mathcal{U}^\dagger(t, t_0) = \mathcal{U}^{-1}(t, t_0)$, Unitariedade.
- $\mathcal{U}(t_2, t_0) = \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{U}(t_1, t_0)$, $t_2 > t_1 > t_0$, Composição.
- $\lim_{dt \rightarrow 0} \mathcal{U}(t_0 + dt, t_0) = \mathbf{1}$, Existência da transformação identidade.

A primeira condição é a expressão da conservação da probabilidade ou, dito de outro maneira, se os estados estão normalizados eles devem permanecer normalizados. Em

⁶No caso clássico utiliza-se os parênteses de Poisson $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p}$.

um sistema, que no tempo t_0 é representado pela superposição $|\psi, t_0\rangle = \sum_a c_a(t_0) |a\rangle$ e em tempo posterior é descrito pelo estado $|\psi, t\rangle = \sum_a c_a(t) |a\rangle$, é razoável pensar que $\langle \psi, t_0 | \psi, t_0 \rangle = \langle \psi, t | \psi, t \rangle = 1$, pois, apesar da probabilidade de medir um particular autestado $|a\rangle$ mude com o tempo, a soma das probabilidades de medir qualquer um dos possíveis estados deve continuar sendo a unidade. Em símbolos, podemos escrever

$$\langle \psi', t | \psi', t \rangle = \langle \psi, t_0 | \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) \mathcal{U}(t, t_0) | \psi, t_0 \rangle = 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}. \quad (1.86)$$

A segunda condição é razoável, pois, como foi dito no início, o tempo é tratado como um parâmetro real contínuo. A ultima condição também decorre do tempo ser um parâmetro real contínuo, mas, além disso, se não há evolução temporal, ao aplicar o operador a um estado, nada deve ocorrer. Simbolicamente temos $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{U}(t_0 + \Delta t, t_0) |\psi\rangle = |\psi\rangle$.

Essas propriedades para o operador de evolução temporal o caracterizam como uma transformação unitária infinitesimal que, se for escrita da seguinte maneira

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathbf{1} - \frac{idt}{\hbar} H, \quad (1.87)$$

satisfaz às condições de unitariedade, composição e existência da transformação unidade apresentadas anteriormente. Definimos H como um operador hermiteano denominado Hamiltoniano do sistema em analogia com a mecânica clássica.

A evolução dos estados na mecânica quântica é dada pelo operador exposto acima e as equações de movimento são calculadas a partir da equação de *Schrödinger* ou das equações de *Heisenberg*. Se tomarmos $\mathcal{U}(t + dt, t_0)$ escrito como

$$\mathcal{U}(t + dt, t_0) = \mathcal{U}(t + dt, t) \mathcal{U}(t, t_0) = \left(\mathbf{1} - \frac{idt}{\hbar} H \right) \mathcal{U}(t, t_0), \quad (1.88)$$

e reescrevermos na forma de uma equação diferencial para operadores

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{U}(t, t_0)}{\partial t} = H \mathcal{U}(t, t_0), \quad (1.89)$$

temos a equação que precisamos resolver para encontrar o operador de evolução. Se aplicarmos a equação acima a um estado $|\alpha, t_0\rangle$ temos a famosa equação de *Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t, t_0\rangle = H |\alpha, t, t_0\rangle, \quad (1.90)$$

onde $|\alpha, t, t_0\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$. A equação de *Schrödinger* 1.90 é usualmente referida como representação dos estados, pois são os estados quânticos que evoluem no tempo, enquanto os observáveis permanecem fixos. Na abordagem de *Heisenberg* são os observáveis que evoluem no tempo, enquanto que os estados quânticos permanecem fixos. Nesse caso dado um observável na representação de *Schrödinger* denotado por A^S , podemos escrever o correspondente observável na representação de *Heisenberg* por $A^H(t) = \mathcal{U}^\dagger(t) A^S \mathcal{U}(t)$. Podemos encontrar as equações de *Heisenberg* tomando a derivada total de $A^H(t)$

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}^\dagger}{\partial t} A^S \mathcal{U} + \mathcal{U}^\dagger A^S \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \quad (1.91)$$

Utilizando a equação 1.89 e a unitariedade, a expressão 1.91 se torna

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left(-\mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger A^S \mathcal{U} + \mathcal{U}^\dagger A^S \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} \right) = \frac{1}{i\hbar} [A^H, \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U}]. \quad (1.92)$$

Por fim, vamos supor que $[H, \mathcal{U}] = 0$, que implica

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A^H, H]. \quad (1.93)$$

Como foi dito anteriormente, vemos explicitamente, que na representação de *Heisenberg* a dinâmica é dada pelos observáveis, que é a principal diferença com relação à abordagem de *Schrödinger*.

As duas representações sobre as quais falamos até agora funcionam muito bem para o caso em que o Hamiltoniano não depende do tempo. Entretanto, quando isso não é verdade, algumas complicações começam a aparecer. A principal delas é o fato de que

ao resolvermos o problema de autovalores, o espectro no tempo t_0 difere do espectro em um tempo posterior $t > t_0$. Isso significa que o Hamiltoniano não tem um espectro bem definido, ou seja, o problema de autovalores não é bem definido e, por consequência, não conseguimos escrever uma base de autoestados relativa ao Hamiltoniano do sistema. Além disso, o operador de evolução temporal, que é dado simplesmente por $e^{\frac{(t-t_0)H}{i\hbar}}$ no caso em que o Hamiltoniano não depende explicitamente do tempo, em caso contrário assume a seguinte forma

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt' \right], \quad (1.94)$$

onde a expressão acima supõe que o Hamiltoniano comuta para diferentes tempos, pois caso contrário a expressão acima tem de ser substituída pela série de *Dyson* [39], cuja forma é ainda mais complicada.

Essas são algumas das complicações que a dependência do Hamiltoniano com o tempo apresenta e que pretendemos abordar na próxima subseção.

1.3.2 Uma teoria Exata do Oscilador Dependente do Tempo

Lewis [40] tentou calcular o invariante adiabático para o oscilador harmônico de frequência variável clássico, utilizando o método desenvolvido por *Kruskal* [41], e acabou descobrindo que o invariante encontrado por ele na verdade era um invariante exato⁷. Pouco tempo depois *Lewis* e *Riesenfeld* [5] utilizaram o invariante encontrado anteriormente para construir uma teoria exata do oscilador quântico de frequência variável e, seguindo a mesma linha de raciocínio, para uma partícula carregada em um campo eletromagnético dependente do tempo.

O problema do Hamiltoniano dependente do tempo foi contornado por *Lewis* e *Riesenfeld* tomando o invariante quadrático como a quantidade fundamental. Eles calculam os autovetores relacionados ao invariante quadrático e depois constroem a solução geral para o problema como uma superposição dos autovetores relacionados ao invariante quadrático. Vejamos agora os detalhes dessa abordagem. Primeiro supomos que há um invariante hermiteano I , ou seja, tal que

⁷Que era o invariante de *Ermakov* 1.29.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + [I, H] = 0. \quad (1.95)$$

Sendo $|a, t\rangle$ um estado qualquer do sistema, podemos multiplicar a relação acima por este estado e, com a ajuda da equação de *Schrödinger*, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I|a, t\rangle) = H(I|a, t\rangle). \quad (1.96)$$

Isso significa que o invariante I transforma soluções da equação de *Schrödinger* em outras soluções da mesma equação. Assume-se que o invariante I tem uma base completa de autovetores com autovalores λ , ou seja,

$$I|\lambda, k\rangle = \lambda|\lambda, k\rangle, \quad (1.97)$$

$$\langle \lambda', k' | \lambda, k \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{k'k}, \quad (1.98)$$

onde k são os demais números quânticos necessários para especificar completamente o estado do sistema. Derivando a expressão 1.97 temos

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, k\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k\rangle. \quad (1.99)$$

Com esta relação é possível mostrar que o espectro não depende do tempo. Para isso, partimos de $\langle \lambda', k' | \dot{I} | \lambda, k \rangle = 0$

$$\langle \lambda', k' | \dot{I} | \lambda, k \rangle = i\hbar \langle \lambda', k' | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k \rangle + \langle \lambda', k' | I \dot{H} | \lambda, k \rangle - \langle \lambda', k' | \dot{H} I | \lambda, k \rangle = 0, \quad (1.100)$$

e utilizando 1.97

$$\langle \lambda', k' | \dot{I} | \lambda, k \rangle = i\hbar \langle \lambda', k' | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \lambda', k' | H | \lambda, k \rangle = 0, \quad (1.101)$$

que nos resulta

$$\langle \lambda, k' | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k \rangle = 0. \quad (1.102)$$

Aplicando $\langle \lambda, k |$ em 1.99 e substituindo a relação 1.102 temos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda, k | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k \rangle = 0 \quad (1.103)$$

O resultado 1.103 é muito interessante, pois agora sabemos que os autovetores de I constituem um espectro bem definido. Com o objetivo de ver a conexão entre os autoestados de I e a equação de *Schrödinger*, partimos para a análise da equação 1.99.

$$\frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k \rangle = (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k \rangle \quad (1.104)$$

Fazendo o produto escalar de 1.104 com $\langle \lambda', k' |$ e usando a relação 1.101, temos

$$(\lambda' - \lambda) \langle \lambda', k' | H | \lambda, k \rangle = i\hbar (\lambda' - \lambda) \langle \lambda', k' | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k \rangle, \quad (1.105)$$

e se $\lambda' \neq \lambda$ temos a seguinte igualdade

$$\langle \lambda', k' | H | \lambda, k \rangle = i\hbar \langle \lambda', k' | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k \rangle. \quad (1.106)$$

Como esperado, os autoestados do invariante I , na condição $\lambda' \neq \lambda$, satisfazem à equação de *Schrödinger*. Sendo o estado $|\lambda, k\rangle$ determinado a menos de uma fase, podemos escrever um novo estado $|\lambda, k\rangle_\alpha$ da seguinte forma

$$|\lambda, k\rangle_\alpha = e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\lambda, k\rangle, \quad (1.107)$$

onde $\alpha_{\lambda k}(t)$ são funções do tempo. Substituindo o estado $|\lambda, k\rangle_\alpha$ na equação de *Schrödinger*, percebemos que as fases $\alpha_{\lambda k}$ devem satisfazer à seguinte relação

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda k}}{dt} = \langle \lambda, k | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \lambda, k \rangle, \quad (1.108)$$

que é equivalente a dizer que a relação 1.106 deve ser satisfeita para os novos estados $|\lambda, k\rangle_\alpha$ mesmo no caso em que $\lambda = \lambda'$. Para ver isso basta substituir 1.107 na relação 1.106 e ver que se chega em 1.108. Portanto 1.106 é válida também no caso em que $\lambda = \lambda'$.

De posse dos autoestados do invariante I , podemos construir a solução geral do problema como segue

$$|\Psi\rangle = \sum_{\lambda, k} c_{\lambda k} e^{i\alpha_{\lambda k}(t)} |\lambda, k\rangle, \quad (1.109)$$

com as fases determinadas por 1.108.

Utilizando esse procedimento, podemos agora construir a solução geral para um problema cujo Hamiltoniano depende explicitamente do tempo. Vale ressaltar aqui que a quantidade fundamental nesse caso passa a ser o invariante I , já que são os autoestados dele que calculamos e que servem para construir a solução geral do problema.

Tomaremos agora o caso particular do oscilador harmônico de frequência variável, que pode ser resolvido a partir dos operadores de escada. *Lewis e Riesenfeld* fizeram a suposição de que existe um invariante quadrático da forma $I = \lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2 + \lambda_3 \{q, p\}$ e calcularam $\dot{I} = 0$ para encontrar as relações que as funções λ_1 , λ_2 e λ_3 devem satisfazer. Aqui vamos utilizar o invariante encontrado na seção anterior utilizando o método da álgebra dinâmica, para o caso $G = 0$ e $h = 1$, ou seja

$$I = \frac{1}{2} \left[(\rho p - \dot{\rho} q)^2 + \frac{q^2}{\rho^2} \right], \quad (1.110)$$

com ρ satisfazendo à equação não linear de *Steen-Ermakov* e lembrando que q e p agora são operadores⁸.

Da mesma forma que foi feita por *Dirac*, também é possível definir operadores de

⁸Na próxima seção mostraremos como construir esse operador a partir de combinações das equações de movimento.

escada para o oscilador harmônico de frequência variável

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\frac{1}{\rho} q + i(\rho p - \dot{\rho} q) \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\frac{1}{\rho} q - i(\rho p - \dot{\rho} q) \right), \quad (1.111)$$

que satisfazem à seguinte relação de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (1.112)$$

Procedemos agora à escrita do invariante quadrático, que é quem desempenha o papel fundamental no tratamento de sistemas cujo Hamiltoniano depende explicitamente do tempo, a partir dos operadores de escada 1.111

$$I = \frac{1}{2} \left((\rho p - \dot{\rho} q)^2 + \frac{q^2}{\rho^2} \right) = \hbar \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.113)$$

Aqui percebemos claramente que os autoestados de $a^\dagger a$ são os mesmos de I e os autovalores diferem apenas por $1/2$. Portanto sendo $a^\dagger a |s\rangle = s |s\rangle$, com $s = 1, 2, \dots$, teremos os autovalores de I dados por $\lambda_s = \hbar(s + 1/2)$ e os operadores de escada levam a outros autoestados

$$a |s\rangle = \sqrt{s} |s-1\rangle, \quad a^\dagger |s\rangle = \sqrt{s+1} |s+1\rangle. \quad (1.114)$$

Vamos supor a existência de um estado denotado por $|0\rangle$, denominado estado de vácuo do sistema, de onde podemos construir qualquer outro autoestado através da aplicação do operador de escada a^\dagger . Qualquer estado fica então escrito como

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad |0\rangle = \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.115)$$

Um último passo que precisamos dar é calcular as fases $\alpha_s(t)$ dadas por 1.108. Para isso escrevemos o Hamiltoniano em termos de a e a^\dagger

$$\langle s|H|s\rangle = \frac{\hbar}{4} \left(\dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \langle s|\{a, a^\dagger\}|s\rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \left(s + \frac{1}{2} \right), \quad (1.116)$$

e para calcular a segunda parte de 1.108 basta tomar a derivada de $\sqrt{s}|s\rangle = a^\dagger|s-1\rangle$ e aplicar $\langle s|$

$$\sqrt{s} \langle s|\frac{\partial}{\partial t}|s\rangle = \langle s|a^\dagger \frac{\partial}{\partial t}|s-1\rangle + \langle s|\frac{\partial a^\dagger}{\partial t}|s-1\rangle. \quad (1.117)$$

Lembrando que $\sqrt{s}\langle s-1| = \langle s|a^\dagger$ temos

$$\langle s|\frac{\partial}{\partial t}|s\rangle = \langle s-1|\frac{\partial}{\partial t}|s-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{s}} \langle s|\frac{\partial a^\dagger}{\partial t}|s-1\rangle. \quad (1.118)$$

Podemos escrever a derivada de a^\dagger em termos de a e a^\dagger

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{2\dot{\rho}}{\rho} + i(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] a + i(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)a^\dagger \right\}, \quad (1.119)$$

de modo que 1.118 se torna

$$\langle s|\frac{\partial}{\partial t}|s\rangle = \langle s-1|\frac{\partial}{\partial t}|s-1\rangle + \frac{i}{2}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2). \quad (1.120)$$

De 1.115 podemos escrever

$$\langle s-1| = \langle 0|\frac{a^{s-1}}{\sqrt{(s-1)!}}, \quad |s-1\rangle = \frac{(a^\dagger)^{s-1}}{\sqrt{(s-1)!}}|0\rangle. \quad (1.121)$$

Fazendo com que 1.118 se torne

$$\langle s | \frac{\partial}{\partial t} | s \rangle = \langle 0 | \frac{\partial}{\partial t} | 0 \rangle + \frac{is}{2}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2). \quad (1.122)$$

Como a energia de ponto zero é uma constante, podemos fazer a seguinte escolha para o termo que falta acima

$$\langle 0 | \frac{\partial}{\partial t} | 0 \rangle = \frac{i}{4}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2), \quad (1.123)$$

para finalmente obter

$$\langle s | \frac{\partial}{\partial t} | s \rangle = \frac{i}{2}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)(s + \frac{1}{2}). \quad (1.124)$$

De posse das expressões 1.116 e 1.124 podemos escrever 1.108

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}(s + \frac{1}{2}) \quad \rightarrow \quad \alpha_s = -(s + \frac{1}{2}) \int^t \frac{dt'}{\rho(t')}, \quad (1.125)$$

com os α_s calculados podemos construir a solução geral para o problema dada por 1.109. Poderíamos também calcular as componentes não diagonais do Hamiltoniano tomando $\langle s' |$ ao invés de $\langle s |$ em 1.116.

Resumindo, o procedimento de *Lewis-Riesenfeld* nos permite resolver problemas no qual o Hamiltoniano depende explicitamente do tempo. Primeiro encontramos um invariante quadrático para substituir o Hamiltoniano e resolvemos o problema de autovalores para esse invariante. Na sequência encontramos as fases α_s utilizando 1.108 e por fim escrevemos a solução geral 1.109.

1.4 Uma Nova Abordagem Para o Calculo de Invariantes

Recentemente, *Bertin, Pimentel e Ramirez* [21], desenvolveram um novo método para o cálculo de invariantes dinâmicos para o caso clássico ou quântico, que se assemelha muito ao método desenvolvido por *Sarlet e Bahar* [17], pois se baseia na combinação das equações de movimento para construção dos invariantes do sistema. *Ray e Reid* [42]

generalizaram o método de *Sarlet-Bahar* e chamaram atenção de que, possivelmente, havia uma conexão entre este método e o teorema de *Noether*.

Nesta seção desenvolveremos o método [21] para o caso do oscilador harmônico de frequência variável. No próximo capítulo, mostramos, utilizando o formalismo de *Schwinger*, que há um teorema de *Noether* para o caso quântico subjacente, justificando assim o modo como os invariantes são construídos.

1.4.1 Oscilador Harmônico de Frequência Variável

Equações de Movimento

Partindo do Hamiltoniano para o oscilador harmônico unidimensional com frequência variável

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)q^2}{2}. \quad (1.126)$$

Precisamos primeiro calcular as equações de movimento do sistema, pois o método se baseia na combinação destas para construção de invariantes. As equações de movimento são calculadas a partir das equações de *Heisenberg* com o Hamiltoniano escrito em 1.126

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar}[q, \mathcal{H}] = \frac{p}{m}, \quad (1.127)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{i\hbar}[p, \mathcal{H}] = -m\omega^2 q. \quad (1.128)$$

Se derivarmos a primeira e substituirmos na segunda, obtemos a conhecida equação para o oscilador harmônico

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2(t)q = 0. \quad (1.129)$$

Analogamente se tivéssemos começado com a Lagrangiana do oscilador harmônico e aplicado as equações de *Euler-Lagrange*, obteríamos a equação 1.129 como primeiro

resultado. Vale ressaltar que na construção dos invariantes, que será feita a seguir, não é necessário partir de um Hamiltoniano, ou seja, poderíamos utilizar somente as equações de movimento. Seguimos agora para o cálculo dos invariantes lineares para esse sistema.

Invariantes Lineares

De posse das equações de movimento, partimos para o cálculo dos invariantes lineares multiplicando 1.127 e 1.128 por funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, respectivamente

$$\alpha \frac{dq}{dt} = \alpha \frac{p}{m}, \quad \beta \frac{dp}{dt} = -\beta m \omega^2 q, \quad (1.130)$$

somando as equações acima e tomando as derivadas totais temos

$$\frac{d}{dt}(\beta p + \alpha q) = \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{d\beta}{dt} \right) p + \left(\frac{d\alpha}{dt} - \beta m \omega^2 \right) q. \quad (1.131)$$

Supondo agora que α e β satisfazem às seguintes equações

$$\alpha + m \frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} - \beta m \omega^2 = 0 \quad (1.132)$$

temos o invariante linear

$$I_L = \beta p + \alpha q. \quad (1.133)$$

Com a primeira das equações 1.132, podemos escrever α em termos de β ficando assim com apenas uma função a determinar. Derivando a primeira das equações 1.132 e substituindo na segunda temos que β deve satisfazer à seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \omega^2\beta = 0. \quad (1.134)$$

Poderíamos ter escrito β em termos de α , porém a dependência de ω com t deixa a equação que α deve satisfazer mais complicada.

Se fizermos os mesmos cálculos, substituindo apenas α e β por α^* e β^* encontraremos outro invariante, que é o adjunto do encontrado em 1.133. Além disso, α^* e β^* devem satisfazer às equações 1.132, portanto, temos os seguintes invariantes lineares escritos em função de β e β^*

$$I_L = \beta p - m \frac{d\beta}{dt} q, \quad (1.135)$$

$$I_L^\dagger = \beta^* p - m \frac{d\beta^*}{dt} q, \quad (1.136)$$

onde β e β^* devem satisfazer as seguintes equações

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \omega^2\beta = 0, \quad (1.137)$$

$$\frac{d^2\beta^*}{dt^2} + \omega^2\beta^* = 0. \quad (1.138)$$

Invariantes Quadráticos

Calcularemos os invariantes quadráticos do oscilador de maneira muito similar ao que foi feito para os invariantes lineares. A diferença é que aqui temos combinações entre as coordenadas q e p com as equações de movimento. Primeiro multiplicamos por q , pela esquerda, a equação 1.127 e por p a 1.128, obtendo

$$q \frac{dq}{dt} = q \frac{p}{m}, \quad (1.139)$$

$$p \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 pq. \quad (1.140)$$

Uma ultima combinação que precisamos pode ser obtida multiplicando por p , pela direita, a equação 1.127, por q a 1.128 e somando ambas

$$\frac{p^2}{m} - m\omega^2 q^2 = \frac{dq}{dt} p + \frac{dp}{dt} q. \quad (1.141)$$

Agora tomaremos as derivadas totais de 1.139, 1.140 e 1.141 que acabamos de obter, para ficar com expressões mais convenientes para o cálculo do invariante quadrático. Começando com 1.139 e 1.140

$$\frac{dq^2}{dt} = q \frac{dq}{dt} + \frac{dq}{dt} q \quad \rightarrow \quad q \frac{dq}{dt} = \frac{dq^2}{dt} - \frac{p}{m} q, \quad (1.142)$$

$$\frac{dp^2}{dt} = p \frac{dp}{dt} + \frac{dp}{dt} p \quad \rightarrow \quad p \frac{dp}{dt} = \frac{dp^2}{dt} + m\omega^2 qp, \quad (1.143)$$

onde utilizamos as equações de movimento 1.127 e 1.128.

Substituindo 1.142 e 1.143 em 1.139 e 1.140, respectivamente, obtemos

$$\frac{dq^2}{dt} - \frac{1}{m} pq = \frac{1}{m} qp \quad \rightarrow \quad \frac{dq^2}{dt} = \frac{1}{m} \{q, p\}, \quad (1.144)$$

$$\frac{dp^2}{dt} + m\omega^2 qp = -m\omega^2 pq \quad \rightarrow \quad \frac{dp^2}{dt} = -m\omega^2 \{q, p\}, \quad (1.145)$$

onde $\{q, p\} = qp + pq$ é o anti-comutador.

Realizando o mesmo processo que foi feito acima, só que agora para a relação 1.141, temos as seguintes identidades

$$\frac{dq}{dt} p = \frac{d}{dt}(qp) - q \frac{dp}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{dt} p = \frac{d}{dt}(qp) + m\omega^2 q^2, \quad (1.146)$$

$$\frac{dp}{dt} q = \frac{d}{dt}(pq) - p \frac{dq}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dt} q = \frac{d}{dt}(pq) - \frac{p^2}{m}, \quad (1.147)$$

que podemos substituir em 1.141 para obter

$$2 \frac{p^2}{m} - 2m\omega^2 q^2 = \frac{d}{dt} \{q, p\} \quad (1.148)$$

As relações 1.144, 1.145, 1.148 se tornam

$$\frac{dp^2}{dt} = -m\omega^2\{q, p\}, \quad (1.149)$$

$$\frac{dq^2}{dt} = \frac{1}{m}\{q, p\}, \quad (1.150)$$

$$\frac{d}{dt}\{q, p\} = 2\frac{p^2}{m} - 2m\omega^2q^2. \quad (1.151)$$

Aqui, da mesma maneira que foi feito para os invariantes lineares, vamos multiplicar as equações acima por funções $\gamma(t)$, $\eta(t)$, $\varepsilon(t)$ e somar as três

$$\gamma\frac{dp^2}{dt} + \eta\frac{dq^2}{dt} + \varepsilon\frac{d}{dt}\{q, p\} = \left(\frac{\eta}{m} - \gamma m\omega^2\right)\{q, p\} + 2\varepsilon\left(\frac{p^2}{m} - \varepsilon m\omega^2q^2\right). \quad (1.152)$$

Por fim, tomamos as derivadas totais para obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma p^2 + \eta q^2 + \varepsilon\{q, p\}) &= \left(\frac{d\gamma}{dt} + 2\frac{\varepsilon}{m}\right)p^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} - 2\varepsilon m\omega^2\right)q^2 + \\ &+ \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\eta}{m} - \gamma m\omega^2\right)\{q, p\}. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Se as condições

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{2\varepsilon}{m} = 0, \quad (1.154)$$

$$\frac{d\eta}{dt} - 2\varepsilon m\omega^2 = 0, \quad (1.155)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\eta}{m} - \gamma m\omega^2 = 0, \quad (1.156)$$

são satisfeitas, temos o invariante quadrático

$$I_Q = \gamma p^2 + \eta q^2 + \varepsilon\{q, p\}. \quad (1.157)$$

Da mesma forma que escrevemos o invariante linear em termos somente de β , vamos reescrever as condições 1.154, 1.155 e 1.156 em termos de γ

$$\varepsilon = -m \frac{d\gamma}{dt}, \quad (1.158)$$

$$\eta = m^2 \gamma \omega^2 + m \frac{d^2\gamma}{dt^2}, \quad (1.159)$$

com γ satisfazendo à seguinte equação

$$\frac{d^3\gamma}{dt^3} + 4\omega^2 \frac{d\gamma}{dt} + 2\gamma \frac{d}{dt} (\omega^2) = 0. \quad (1.160)$$

Esta é a primeira das equações 1.14 estudada por *Steen*, equivalente à equação não linear do par de equações de *Steen-Ermakov* 1.18 no caso $\gamma = r^2$. Mostraremos finalmente como obter a primeira integral da equação 1.160

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d^3\gamma}{dt^3} + 4\gamma\omega^2 \frac{d\gamma}{dt} + 2\gamma^2 \frac{d}{dt} (\omega^2) &= 0, \\ \gamma \frac{d^3\gamma}{dt^3} + 2\omega^2 \frac{d\gamma^2}{dt} + 2\gamma^2 \frac{d}{dt} (\omega^2) &= 0, \\ \gamma \frac{d^3\gamma}{dt^3} + \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d}{dt} (2\omega^2\gamma^2) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right) + \frac{d}{dt} (2\omega^2\gamma^2) &= \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2, \\ \frac{d}{dt} \left[\gamma \frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\omega^2\gamma^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.161)$$

Integrando essa ultima expressão surge uma constante que chamaremos de W^2

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \omega^2\gamma = \frac{W^2}{\gamma} + \frac{1}{4\gamma} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2, \quad (1.162)$$

de modo que a equação 1.160 é equivalente a 1.162.

Tendo escrito ε e η em termos de γ , podemos reescrever o invariante quadrático em função de γ , satisfazendo à equação 1.162 (ou equivalentemente 1.160)

$$I_Q = \gamma p^2 + m^2 \left(\gamma \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \right) q^2 - \frac{m}{2} \frac{d\gamma}{dt} \{q, p\}. \quad (1.163)$$

Se substituirmos $\gamma \omega^2 + \ddot{\gamma}/2$ da expressão 1.162 no invariante 1.163 e fizermos as identificações, $\gamma = \rho^2$ e $m = 1$, percebemos que o resultado está de acordo com o invariante 1.85 no caso em que $G = 0$, obtido utilizando o método da álgebra dinâmica.

Obtendo o Invariante Quadrático a partir dos Lineares

Uma última questão interessante que queremos responder é se podemos obter o invariante quadrático a partir dos lineares e se for o caso, sob que condições. Começaremos por calcular o produto $I_L I_L^\dagger$ dos invariantes lineares

$$\begin{aligned} I_L I_L^\dagger &= \left(\beta p - m \frac{d\beta}{dt} q \right) \left(\beta^* p - m \frac{d\beta^*}{dt} q \right), \\ &= \beta \beta^* p^2 - m \beta \frac{d\beta^*}{dt} p q - m \beta^* \frac{d\beta}{dt} q p + m^2 \frac{d\beta}{dt} \frac{d\beta^*}{dt} q^2, \end{aligned} \quad (1.164)$$

e também $I_L^\dagger I_L$

$$\begin{aligned} I_L^\dagger I_L &= \left(\beta^* p - m \frac{d\beta^*}{dt} q \right) \left(\beta p - m \frac{d\beta}{dt} q \right), \\ &= \beta \beta^* p^2 - m \beta^* \frac{d\beta}{dt} p q - m \beta \frac{d\beta^*}{dt} q p + m^2 \frac{d\beta}{dt} \frac{d\beta^*}{dt} q^2. \end{aligned} \quad (1.165)$$

De posse dos produtos entre 1.164 e 1.165, vamos fazer o que chamaremos de combinação antissimétrica e simétrica, dadas, respectivamente, por

$$I_A = \frac{1}{2}[I_L, I_L^\dagger] = \frac{1}{2}(I_L I_L^\dagger - I_L^\dagger I_L) = -i\hbar \frac{m}{2} \left(\beta^* \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\beta^*}{dt} \right) \mathbf{1}, \quad (1.166)$$

$$I_S = \frac{1}{2}\{I_L, I_L^\dagger\} = \frac{1}{2}(I_L I_L^\dagger + I_L^\dagger I_L) = \beta\beta^* p^2 - \frac{1}{2}\{q, p\} m \frac{d}{dt}(\beta^*\beta) + m^2 \frac{d\beta}{dt} \frac{d\beta^*}{dt} q^2, \quad (1.167)$$

com $\mathbf{1}$ sendo o operador identidade.

A combinação assimétrica claramente não é um invariante quadrático, ja que é uma função dependente do tempo. A combinação simétrica entretanto é uma boa opção de invariante quadrático, que é igual ao encontrado em 1.163 se

$$\gamma = \beta^*\beta, \quad (1.168)$$

$$\frac{d\beta}{dt} \frac{d\beta^*}{dt} = \gamma\omega^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \quad (1.169)$$

Na verdade, só precisamos da primeira condição, pois a segunda é automaticamente satisfeita se $\gamma = \beta^*\beta$.

Aqui vale ressaltar que $\gamma = \beta^*\beta$ é um numero real, o que implica no invariante quadrático ser hermiteano, condição que foi exigida quando desenvolvemos o procedimento de *Lewis e Riesenfeld*. O fato de ser possível construir o invariante quadrático a partir dos lineares, coloca estes últimos como as novas quantidades mais importantes a serem construídas no sistema. Mostraremos no capítulo 3 que estas quantidades conservadas estão relacionadas com operadores de escada que nos permitem construir todo o espectro do sistema a partir do primeiro estado, comumente chamado de estado de vácuo. A partir deles construímos o invariante quadrático que é proporcional ao operador número e assim é possível construir o espaço de autoestados do sistema.

O método utilizado nesta seção nos permite obter as equações auxiliares de maneira natural, ao contrário do procedimento de *Ermakov*, no qual elas precisam ser conhecidas. Assim como no método da álgebra dinâmica, pode ser utilizado tanto para o caso clássico quanto para o quântico, entretanto tem a vantagem de se conseguir calcular os invariantes lineares e de ordem maior, bastando para isso fazer as devidas combinações das equações

de movimento.

Como foi dito no início da seção, o modo como os invariantes são construídos, utilizando combinações das equações de movimento com as coordenadas q e p é *ad hoc*. Entretanto, na mecânica clássica, o teorema de *Noether* em uma de suas formulações nos mostra que a combinação das equações de movimento nos resulta em uma derivada total, ou seja, um invariante. Isto e o comentário de *Ray e Reid* [42] indicam que deve haver um teorema de *Noether* para a mecânica quântica por trás do método aqui adotado.

No próximo capítulo desenvolvemos o formalismo de *Schwinger*, pois este é o formalismo adequado para analisar princípios variacionais na mecânica quântica. Este se baseia no princípio de *Schwinger*, do qual decorrem as relações de comutação, equação de *Schrödinger* e *Heisenberg*, a partir de variações adequadas do operador ação quântico⁹. No fim do capítulo utilizamos um teorema de *Noether* quântico, consequência do princípio de *Schwinger*, para calcular os invariantes nos casos tratados nesta seção.

⁹Quantidade análoga à ação na mecânica clássica.

Capítulo 2

Formalismo de Schwinger

No presente capítulo, inicialmente tratamos das transformações unitárias, que são de suma importância para mecânica quântica. Posteriormente será exposto o princípio de *Schwinger* e como este nos permite obter as relações de comutação, as representações de *Schrödinger* e *Heisenberg* e uma equação de *Hamilton-Jacobi* quântica. Utilizaremos este princípio a fim de calcular as funções de transformação para a partícula sujeita a uma força constante, o oscilador harmônico de frequência variável e para o oscilador harmônico com frequência constante e força variável. Por fim, apresentaremos um análogo quântico do teorema de *Noether* para calcular os invariantes dinâmicos discutidos no capítulo 1. Ao longo do capítulo denotaremos os operadores por letras maiúsculas sem o chapéu usualmente adotado, a menos de referência do contrário. O desenvolvimento feito neste capítulo está baseado em [22, 24–27, 43].

2.1 Transformações Unitárias

Um dos importantes aspectos da física clássica é a possibilidade de efetuar medidas sobre qualquer dos observáveis do sistema com precisão arbitrária e sem que essas medidas interfiram no resultado do experimento. Isso se justifica por, experimentalmente, observar-se que os efeitos de uma medida sobre o sistema em consideração são demasiado pequenos. Como exemplo, lembremos que, ao medir a temperatura de uma banheira contendo água, o calor trocado entre a água e o termômetro não afeta, apreciavelmente, o valor da temperatura medida. Para sistemas onde os fenômenos microscópicos tornam-se importantes, a realização de medidas que não causam distúrbios no sistema é impossível,

haja visto que medidas de certas propriedades do sistema podem acarretar na perda de informação referente a outra propriedade. Isto significa que ao efetuar medidas sobre o sistema, estas devem ser levadas em consideração.

Outra peculiaridade de sistemas quânticos, é que, eles são intrinsecamente probabilísticos, ou seja, não podemos prever o resultado de uma medida efetuada sobre o sistema, só podemos afirmar a probabilidade de se medir um certo valor de um observável sobre um ensemble de medidas. A probabilidade de se medir o valor a_i do observável A de um sistema que esta no estado $|\psi\rangle$ é dada por $P_{a_i} = \langle a_i|\psi\rangle \langle \psi|a_i\rangle = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$. Entretanto, se quisermos calcular esta probabilidade utilizando a base de autovetores referente a um segundo observável B , não é esperado que o valor seja diferente. Sendo assim vamos supor que há uma transformação entre as bases referentes aos observáveis A e B da seguinte forma

$$|a_i\rangle = U |b_i\rangle. \quad (2.1)$$

Sendo a probabilidade independente da base escolhida, não é de se esperar que o produto interno seja diferente a depender da base, portanto,

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij} = \langle b_i|U^\dagger U|b_j\rangle = \langle b_i|b_j\rangle. \quad (2.2)$$

Para que a relação acima seja verdadeira precisamos que $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}$, ou seja $U = (U^\dagger)^{-1}$, que é equivalente a $U^\dagger = U^{-1}$. Isto nos mostra que as mudanças de base devem ser realizadas por operadores unitários. Em particular podemos ver que o produto de transformações unitárias é também uma transformação unitária

$$(U_1 U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger = (U_2)^{-1} (U_1)^{-1} = (U_1 U_2)^{-1}. \quad (2.3)$$

A relação acima nos mostra que o conjunto das transformações unitárias é fechada pela operação de multiplicação de matrizes. Podemos ir além e notar que essas transformações formam um grupo, pois a identidade e a inversa são unitárias, e a associatividade vem do conhecido fato do produto de matrizes ser associativo.

Um fato interessante relativo a essas transformações, é que, dado um observável A e

seus correspondentes autovetores $|a_i\rangle$, a mudança de base $|\bar{a}_i\rangle = U|a_i\rangle$ nos leva a um novo observável \bar{A} , cujo espectro é o mesmo de A , ou seja,

$$UA|a_i\rangle = UA\mathbf{1}|a_i\rangle = UAU^{-1}U|a_i\rangle = a_iU|a_i\rangle, \quad (2.4)$$

que nos resulta

$$\bar{A}|\bar{a}_i\rangle = a_i|\bar{a}_i\rangle, \quad (2.5)$$

onde

$$\bar{A} = UAU^{-1} = UAU^\dagger, \quad |\bar{a}_i\rangle = \mathcal{U}|a_i\rangle. \quad (2.6)$$

Reciprocamente, dados dois observáveis A e \bar{A} que compartilham o mesmo espectro e com vetores de base conectados por uma transformação unitária $|\bar{a}_i\rangle = U|a_i\rangle$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \sum_i A|\bar{a}_i\rangle\langle\bar{a}_i| = \sum_i \bar{a}_iU|a_i\rangle\langle a_i|U^\dagger, \\ &= U\sum_i a_i|a_i\rangle\langle a_i|U^\dagger = UAU^\dagger, \end{aligned} \quad (2.7)$$

que, como esperado, é a mesma relação 2.6.

Para finalizar esta seção vamos mostrar a forma destas transformações unitárias. Dados dois observáveis A e B , com respectivos autovetores $|a_i\rangle$ e $|b_j\rangle$, exibimos a transformação que conecta os dois, dada por

$$U_{a \rightarrow b} = \sum_j |a_j\rangle\langle b_j|, \quad U_{b \rightarrow a} = U_{a \rightarrow b}^{-1} = U_{a \rightarrow b}^\dagger = \sum_j |b_j\rangle\langle a_j|. \quad (2.8)$$

Para verificar basta ver que

$$|a_i\rangle = U_{a \rightarrow b} |b_i\rangle = \sum_j |a_j\rangle \langle b_j | b_i\rangle = |a_i\rangle, \quad (2.9)$$

e similarmente para $|b_i\rangle$.

As transformações unitárias são muito importantes na mecânica quântica, pois, como foi visto acima, são através delas que podemos fazer a mudança entre as diferentes bases sem que a probabilidade, medida experimentalmente, se altere. Além disso, o princípio de *Schwinger*, que será apresentado na próxima seção, supõe que a evolução temporal é uma transformação unitária que ocorre continuamente entre dois instantes de tempo, motivo pelo qual trataremos, nas próximas duas subseções, das transformações unitárias infinitesimais. Estes tipos de transformações também são muito úteis para descrever translações e rotações finitas a partir da composição de translações e rotações infinitesimais.

2.1.1 Variações Infinitesimais das Funções de Transformação

Schwinger denominou função de transformação as quantidades usualmente conhecidas como amplitudes de probabilidade, pela característica destas de transformar um estado quântico em outro. Dito de outra maneira, dado um sistema físico que no tempo t_0 é representado por $|a, t_0\rangle$ e em um tempo posterior por $|b, t\rangle$ a função de transformação (amplitude de probabilidade) que transforma o estado $|a, t_0\rangle$ em $|b, t\rangle$ é dada por $\langle a, t_0 | b, t\rangle$.

Dados os observáveis A , B e C , com respectivos autovetores $|a_i\rangle$, $|b_j\rangle$ e $|c_k\rangle$, normalmente se admite que as seguintes propriedades são respeitadas

$$\langle a_i | b_j\rangle = \sum_k \langle a_i | c_k\rangle \langle c_k | b_j\rangle, \quad (2.10)$$

$$\langle a_i | b_j\rangle = \langle b_j | a_i\rangle^*, \quad (2.11)$$

onde a primeira é admitida para que a base de autovetores seja completa e a segunda para que a probabilidade de se medir $|a_i\rangle$ dado que o sistema estava no estado $|b_j\rangle$ seja positiva definida.

Sendo $\delta \langle a_i | c_k\rangle$ e $\delta \langle c_k | b_j\rangle$, variações infinitesimais nas funções de transformação, po-

demos tomar a variação das relações 2.10 e 2.11

$$\delta \langle a_i | b_j \rangle = \sum_k [\delta(\langle a_i | c_k \rangle) \langle c_k | b_j \rangle + \langle a_i | c_k \rangle \delta(\langle c_k | b_j \rangle)], \quad (2.12)$$

$$\delta \langle a_i | b_j \rangle = \delta \langle b_j | a_i \rangle^*. \quad (2.13)$$

Variações infinitesimais são feitas em funcionais, ou seja, quantidades que transformam funções em números. Assim, o funcional linear $\langle a_i |$ transforma o vetor $|b_j\rangle$ nas componentes de uma matriz $z_{ij} = \langle a_i | b_j \rangle$, que são números. Portanto, podemos tomar a variação infinitesimal de $\langle a_i | b_j \rangle$, já que estes são números, com respeito a algum parâmetro como o tempo, posição ou números quânticos. Vamos então assumir que as variações infinitesimais das componentes $\langle a_i | b_j \rangle$ podem ser representadas por um operador infinitesimal δW_{ab} , ou seja,

$$\delta \langle a_i | b_j \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle a_i | \delta W_{ab} | b_j \rangle. \quad (2.14)$$

A relação 2.12 se torna, portanto,

$$\begin{aligned} \delta \langle a_i | b_j \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle a_i | \delta W_{ab} | b_j \rangle = \frac{i}{\hbar} \sum_k (\langle a_i | \delta W_{ac} | c_k \rangle \langle c_k | b_j \rangle + \langle a_i | c_k \rangle \langle c_k | \delta W_{cb} | b_j \rangle), \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle a_i | \delta W_{ac} + \delta W_{cb} | b_j \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

de onde tiramos uma expressão interessante para os operadores infinitesimais

$$\delta W_{ab} = \delta W_{ac} + \delta W_{cb}. \quad (2.16)$$

A relação acima nos mostra que a lei de composição da multiplicação das funções de transformação se manifesta como uma lei de composição aditiva dos operadores infinitesimais. Em particular tomando $a = c$ em 2.16 ficamos com

$$\delta W_{aa} = 0, \quad (2.17)$$

que significa $\delta \langle a|a' \rangle = \delta(\delta_{aa'}) = 0$. Outra informação interessante que podemos tirar de 2.16, fazendo a identificação $a = b$, é

$$\delta W_{bc} = -\delta W_{cb}. \quad (2.18)$$

As relações 2.16 e suas consequências, derivam de 2.12. Vejamos agora as implicações de 2.13. Utilizando a ultima relação acima, temos que

$$\begin{aligned} \delta \langle b_j|a_i \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle b_j|\delta W_{ba}|a_i \rangle \quad \rightarrow \quad \delta \langle b_j|a_i \rangle^* = -\frac{i}{\hbar} \langle b_j|\delta W_{ba}^\dagger|a_i \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle b_j|\delta W_{ab}^\dagger|a_i \rangle, \\ \delta \langle a_i|b_j \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle a_i|\delta W_{ab}|b_j \rangle = \delta \langle b_j|a_i \rangle^* = \frac{i}{\hbar} \langle b_j|\delta W_{ab}^\dagger|a_i \rangle, \end{aligned} \quad (2.19)$$

e assim podemos deduzir de 2.13

$$\delta W_{ab} = \delta W_{ab}^\dagger. \quad (2.20)$$

Esta relação nos mostra que a conjugação complexa das funções de transformação (2.13) implica no fato dos operadores infinitesimais serem auto-adjuntos.

2.1.2 Transformações Unitárias Infinitesimais

É interessante definir transformações infinitesimais, pois através delas vemos como o sistema evolui continuamente ao fazermos translações, rotações ou até mesmo para perceber como ele evolui no tempo. Estudando este tipo de transformação conseguimos também reproduzir, por exemplo, um deslocamento finito no sistema fazendo uma composição de transformações infinitesimais.

Uma transformação unitária infinitesimal é, por definição, aquela que difere da unidade por no máximo termos de primeira ordem

$$U = 1 + \frac{i}{\hbar}G, \quad U^\dagger = 1 - \frac{i}{\hbar}G, \quad (2.21)$$

onde G é um operador auto-adjunto¹ chamado gerador da transformação.

Para ver que 2.21 de fato é unitária calculemos

$$UU^\dagger = \left(1 + \frac{i}{\hbar}G\right)\left(1 - \frac{i}{\hbar}G\right) = 1 + \frac{i}{\hbar}G - \frac{i}{\hbar}G + \frac{1}{\hbar^2}G^2, \quad (2.22)$$

tomando somente os termos primeira ordem

$$UU^\dagger = 1, \quad (2.23)$$

vemos que 2.21 é unitária.

Observemos agora como as transformações do tipo 2.21 atuam nos vetores de base $|a_i\rangle$

$$|\bar{a}_i\rangle = U^\dagger |a_i\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}G\right) |a_i\rangle, \quad (2.24)$$

ou equivalentemente

$$\delta |a_i\rangle = -\frac{i}{\hbar}G |a_i\rangle = |\bar{a}_i\rangle - |a_i\rangle. \quad (2.25)$$

De posse destas relações, podemos agora calcular a variação infinitesimal gerada por um operador genérico X . Começaremos tomando X na base dos $|\bar{a}_i\rangle$ e utilizamos 2.25

$$\langle \bar{a}_i | X | \bar{a}_j \rangle = \langle a_i | X | a_j \rangle + \delta(\langle a_i |) X | a_j \rangle + \langle a_i | X \delta(| a_j \rangle) + \delta(\langle a_i |) X \delta(| a_j \rangle), \quad (2.26)$$

¹O operador G deve ser auto-ajunto por consistência com 2.20.

tomando somente os termos de primeira ordem

$$\langle \bar{a}_i | X | \bar{a}_j \rangle - \langle a_i | X | a_j \rangle = \delta(\langle a_i |) X | a_j \rangle + \langle a_i | X \delta(| a_j \rangle) = \delta \langle a_i | X | a_j \rangle. \quad (2.27)$$

Usando agora a relação 2.24 temos

$$\delta \langle a_i | X | a_j \rangle = \langle \bar{a}_i | X | \bar{a}_j \rangle - \langle a_i | X | a_j \rangle = \langle a_i | U X U^\dagger | a_j \rangle - \langle a_i | X | a_j \rangle, \quad (2.28)$$

ficamos assim com a seguinte relação operatorial

$$\delta X = U X U^\dagger - X. \quad (2.29)$$

Um ultimo passo a se dar é substituir as relações 2.21 na relação acima

$$\delta X = \left(1 + \frac{i}{\hbar} G\right) X \left(1 - \frac{i}{\hbar} G\right) - X = \frac{i}{\hbar} (GX - XG) + GXG, \quad (2.30)$$

desprezando o termo de segunda ordem em G , já que estamos fazendo uma transformação infinitesimal, temos

$$\delta X = \frac{i}{\hbar} [G, X], \quad (2.31)$$

onde $[G, X] = GX - XG$ é o comutador. Esta ultima relação é muito interessante, pois nos permite escrever as variações infinitesimais dos operadores por meio dos geradores G destas variações. Será muito importante também na dedução das relações de comutação e das equações referentes às representações de *Schrödinger* e *Heisenberg*.

2.2 Dinâmica na Mecânica Quântica

Partiremos agora para a análise dinâmica dos sistemas em mecânica quântica. A evolução temporal será abordada como medidas de observáveis em diferentes tempos conectadas por uma função de transformação. Vamos imaginar que temos um sistema no estado $|a\rangle$ do observável A , deixamos o sistema evoluir até o tempo $t > t_0$ e então realizamos a medida do observável B , que nos dá como resposta $|b\rangle$. A conexão entre estes estados será dada pela função de transformação $\langle b, t | a, t_0 \rangle$. Como casos particulares desta expressão, temos a medida de dois observáveis simultaneamente $\langle b, t_0 | a, t_0 \rangle$ e a medida de um mesmo observável em tempos diferentes $\langle a', t | a, t_0 \rangle$.

A evolução temporal de um sistema no tempo t_0 no estado $|\alpha, t_0\rangle$, normalizado, para um tempo posterior $t > t_0$, deve ser dada por uma transformação unitária. Isto se justifica pelo mesmo motivo apresentado na seção 2.1, ou seja, é razoável pensar que o estado $|\alpha, t_0\rangle$ ao evoluir no tempo para $|\alpha, t\rangle$ continue normalizado. Esta exigência implica em

$$\langle \alpha, t_0 | \alpha, t_0 \rangle = 1 = \langle \alpha, t | \alpha, t \rangle. \quad (2.32)$$

Se escrevemos a conexão entre os estados como $|\alpha, t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$ a condição acima é automaticamente satisfeita e portanto a evolução temporal pode ser escrita como uma transformação unitária. Em particular, a evolução pode ser escrita como uma transformação unitária infinitesimal, pois admitimos que o tempo é contínuo.

Nas próximas subseções apresentaremos o princípio de *Schwinger* e suas consequências, tais quais as relações de comutação, as representações de *Schrödinger* e *Heisenberg* e uma equação de *Hamilton-Jacobi* quântica.

2.2.1 Princípio de Ação Quântica de Schwinger

Como foi dito anteriormente, *Schwinger* propôs o princípio variacional para sistemas quânticos, do qual é possível obter as equações de movimento do sistema, ou seja, sua dinâmica. Tomamos como princípio, pela equação 2.14, que a variação da função de transformação $\langle a_i, t | b_j, t_0 \rangle$ pode ser escrita em termos de um operador auto-adjunto com a propriedade aditiva 2.16. Antes de apresentar o princípio de *Schwinger* vamos definir o

operador de ação quântica através do seguinte postulado

Existe uma classe especial de alterações infinitesimais para a qual os operadores associados $\delta S_{t_0,t}$ são obtidos por variações apropriadas de um único operador, o operador de ação $S_{t_0,t}$

$$\delta \langle b, t | a, t_0 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle b, t | \delta S_{t_0,t} | a, t_0 \rangle, \quad (2.33)$$

onde

$$\delta S_{t_0,t} = \delta[S_{t_0,t}]. \quad (2.34)$$

Dada a propriedade aditiva dos operadores infinitesimais 2.16 percebemos que o operador ação S_{t,t_0} pode ser escrito como

$$S_{t_0,t} = \sum_{t_i=t_0}^{t-\Delta t} S_{t_i,t_i+\Delta t}. \quad (2.35)$$

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ temos

$$S_{t,t+dt} = dtL(t), \quad (2.36)$$

a somatória então se torna uma integral e ficamos com

$$S_{t_0,t} = \int_{t_0}^t dtL(t), \quad (2.37)$$

onde $L(t)$ é um operador auto-adjunto chamado Lagrangiano quântico, dependente das variáveis dinâmicas do sistema.

O princípio de *Schwinger* pode ser enunciado da seguinte forma

A variação em primeira ordem da função de transformação depende apenas dos estados inicial e final do sistema, ou seja

$$\langle b, t | \delta S_{t_0, t} | a, t_0 \rangle = \langle b, t | \delta \left[\int_{t_0}^t dt L(q, \dot{q}; t) \right] | a, t_0 \rangle = \langle b, t | G - G_0 | a, t_0 \rangle. \quad (2.38)$$

Este princípio é bastante razoável, pois, como primeiro observou *Weiss*, a ação no caso quântico não necessariamente é um processo de extremização do funcional. Além disso, se lembrarmos da relação 2.25, temos que a variação da função de transformação $\langle b, t | a, t_0 \rangle$ resulta

$$\begin{aligned} \delta \langle b, t | a, t_0 \rangle &= \delta(\langle b, t | | a, t_0 \rangle) + \langle b, t | \delta(| a, t_0 \rangle) = \frac{i}{\hbar} [\langle b, t | G | a, t_0 \rangle - \langle b, t | G_0 | a, t_0 \rangle], \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle b, t | G - G_0 | a, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.39)$$

usando 2.14 ficamos com

$$\langle b, t | \delta S_{t_0, t} | a, t_0 \rangle = \langle b, t | \delta \left[\int_{t_0}^t dt L(q, \dot{q}; t) \right] | a, t_0 \rangle = \langle b, t | G - G_0 | a, t_0 \rangle, \quad (2.40)$$

que é o princípio proposto por *Schwinger*, a variação da ação só depende dos termos de fronteira.

2.2.2 Forma dos Termos de Fronteira

Vamos calcular a forma explícita dos termos de fronteira para o caso de uma ação cuja Lagrangiana depende apenas de q e \dot{q} . Partimos da variação da ação² e tomamos somente os termos de primeira ordem

²Vale lembrar que apesar de muito parecido com o cálculo de variações utilizado em mecânica clássica, a natureza dos objetos aqui é diferente, no caso tratado aqui as variáveis dinâmicas são operadores. Outro fato relevante é que em geral a derivada com respeito a um operador difere se feita pela esquerda ou pela direita. Essa questão será omitida aqui e pode ser encontrada em [26].

$$\begin{aligned}\delta S_{t_0,t} &= \int_{t_0}^t dt' L'(q'(t'), \dot{q}'(t'); t') - \int_{t_0}^t dt L(q(t), \dot{q}(t); t), \\ &= \int_{t_0}^t dt \left(\frac{dt'}{dt} L' - L \right)\end{aligned}\quad (2.41)$$

onde $t' = t + \delta t \rightarrow \frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d\delta t}{dt}$, de modo que

$$\delta S_{t_0,t} = \int_{t_0}^t dt \left\{ \left(1 + \frac{d\delta t}{dt} \right) L' - L \right\}.\quad (2.42)$$

Inicialmente, vamos calcular a chamada variação total do operador q^3 , dada por

$$\delta q = q'(t') - q(t) = (q'(t') - q'(t)) + (q'(t) - q(t)) = (q'(t') - q'(t)) + \delta_0 q,\quad (2.43)$$

onde $\delta_0 q = q'(t) - q(t)$ é chamado variação da forma de q . Expandindo $q'(t')$ em série na expressão acima temos

$$\delta q = \delta t \frac{d}{dt} q'(t) + \delta_0 q = \delta t \frac{d}{dt} (q(t) + \delta_0 q) + \delta_0 q.\quad (2.44)$$

Colecionando somente os termos de primeira ordem

$$\delta q = \dot{q} \delta t + \delta_0 q.\quad (2.45)$$

Prosseguimos agora ao cálculo de $\delta \dot{q}$

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt'} q'(t') - \frac{d}{dt} q(t) = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} q'(t') - \frac{d}{dt} q(t) = \left(1 - \frac{d\delta t}{dt'} \right) \frac{d}{dt} q'(t') - \frac{d}{dt} q(t),$$

³Apesar de não serem representados por letras maiúsculas q e \dot{q} são operadores, enquanto que t é um parâmetro contínuo.

$$= \frac{d}{dt}(q'(t') - q(t)) - \frac{d\delta t}{dt'} \frac{d}{dt} q'(t') = \frac{d}{dt} \delta q - \left(1 - \frac{d\delta t}{dt'}\right) \frac{d\delta t}{dt} \frac{d}{dt} (\delta q + q(t)), \quad (2.46)$$

onde utilizamos 2.45. Tomando agora os termos de primeira ordem temos

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q) - \frac{d\delta t}{dt} \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt}(\dot{q}\delta t + \delta_0 q) - \frac{d\delta t}{dt} \dot{q}. \quad (2.47)$$

Fazendo a expansão em primeira ordem de $L(q'(t'), \dot{q}'(t'); t')$ no ponto $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e t

$$L' = L + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.48)$$

Utilizando 2.47 na expansão acima

$$L' = L + \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \left(\frac{d(\delta q)}{dt} - \frac{d\delta t}{dt} \dot{q}\right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.49)$$

Substituindo a relação acima em 2.42 e tomando os termos de primeira ordem temos

$$\delta S_{t_0, t} = \int_{t_0}^t dt \left\{ \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \left(\frac{d(\delta q)}{dt} - \frac{d\delta t}{dt} \dot{q}\right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d\delta t}{dt} L \right\}, \quad (2.50)$$

tomando as derivadas totais do segundo e quarto termos

$$\begin{aligned} \delta S_{t_0, t} &= \int_{t_0}^t dt \left\{ \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left(\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\delta t \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \delta t \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} + \\ &\quad + \int_{t_0}^t dt \left\{ \delta t \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} (\delta t L) - \delta t \frac{dL}{dt} \right\}, \\ &= \int_{t_0}^t dt \frac{d}{dt} \left\{ \delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \delta t \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) \right\} + \int_{t_0}^t dt \delta q \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} + \\ &\quad - \int_{t_0}^t dt \delta t \left\{ + \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

O ultimo termo da expressão acima pode ser reescrito como

$$\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dot{q} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right), \quad (2.52)$$

de modo que nossa expressão se torna

$$\begin{aligned} \delta S_{t_0,t} = & \int_{t_0}^t dt \frac{d}{dt} \left\{ \delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \delta t \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) \right\} + \int_{t_0}^t dt \delta q \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} + \\ & - \int_{t_0}^t dt \delta t \dot{q} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Lembrando que $\delta q - \delta t \dot{q} = \delta_0 q$ temos

$$\delta S_{t_0,t} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) \delta t \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta_0 q = G - G_0. \quad (2.54)$$

Para o caso em que temos um conjunto de coordenadas q^i e \dot{q}^i as contas são essencialmente as mesmas, as únicas mudanças são os índices que aparecem nas coordenadas e as somatórias em decorrência da soma entre os índices. Assim a variação da ação 2.54 para um conjunto q^i e \dot{q}^i de coordenadas é dada por

$$\delta S_{t_0,t} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) \delta t \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right\} \delta_0 q^i = G - G_0, \quad (2.55)$$

com índices repetidos indicando soma.

Para que a igualdade acima seja verdadeira para qualquer que seja $\delta_0 q^i$ precisamos que o análogo quântico das equações de *Euler-Lagrange* sejam satisfeitas

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0, \quad (2.56)$$

e que os geradores sejam da seguinte forma

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) \delta t. \quad (2.57)$$

Podemos ir além e, em analogia com a mecânica clássica, definir os operadores momento generalizado e Hamiltoniano, respectivamente por,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad H = p_i \dot{q}^i - L, \quad (2.58)$$

onde supomos que o sistema não possui vínculos, para que seja possível escrever os momentos em função das velocidades. De posse das novas definições o gerador G fica reescrito como

$$G = p_i \delta q^i - H \delta t, \quad (2.59)$$

que é a forma Hamiltoniana do princípio de *Schwinger*.

2.2.3 Relações de Comutação Canônicas

De posse do princípio de *Schwinger*, prosseguiremos ao cálculo das relações de comutação que são usualmente tomadas como postulados na mecânica quântica. Na forma Hamiltoniana, este princípio fica escrito como⁴

$$\delta \langle a(t) | b(t_0) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle a(t) | p_i \delta q^i - H \delta t | b(t_0) \rangle. \quad (2.60)$$

Se tomarmos 2.31 para fazer as variações das coordenadas q^i e p_i , nas quais $\delta t = 0$ temos as seguintes relações

⁴Na subseção anterior mostramos a forma dos geradores no caso em que só temos os operadores q e p , entretando os cálculos para o caso em que temos q^i e p^i com $i = 1, 2, \dots, n$ é essencialmente o mesmo.

$$\delta_q q^i = -\frac{i}{\hbar} [q^i, G] = [q^i, p_j \delta_q q^j] = -\frac{i}{\hbar} (p_j [q^i, \delta_q q^j] + \delta_q q^j [q^i, p_j]), \quad (2.61)$$

$$\delta_q p_i = -\frac{i}{\hbar} [p_i, G] = [p_i, p_j \delta_q q^j] = -\frac{i}{\hbar} (p_j [p_i, \delta_q q^j] + \delta_q q^j [p_i, p_j]). \quad (2.62)$$

As variações acima são tomadas com respeito aos q^i , já que o gerador G tem somente termos de δq^i . Para tomar as variações com respeito aos p^i , o gerador precisa ter a variação com respeito a p^i . Com essa motivação, lembremos que a adição de uma derivada temporal não muda a dinâmica do sistema, ou seja L e $\bar{L} = L + \dot{\Gamma}$ nos dão as mesmas equações de movimento. A ação e por consequência os geradores, entretanto, mudam

$$\bar{S}_{t,t_0} = \int_t^{t_0} dt \bar{L}(t) + \Gamma|_{t_0}^t. \quad (2.63)$$

A variação da ação se torna

$$\delta \bar{S}_{t,t_0} = \bar{G} - \bar{G}_0 = (G + \delta \Gamma) - (G_0 + \delta \Gamma_0). \quad (2.64)$$

Escolhendo $\Gamma = p_i q^i$ temos o como novo gerador $\bar{G} = G - \delta(p_i q^i) = -(\delta p_i) q^i - H \delta t$. De posse desse novo gerador podemos realizar as variações relacionadas aos p_i , novamente assumindo $\delta t = 0$

$$\delta_p q^i = -\frac{i}{\hbar} [q^i, \bar{G}] = \frac{i}{\hbar} (\delta_p p_k [q^i, q^k] + [q^i, \delta_p p_k] q^k), \quad (2.65)$$

$$\delta_p p_i = -\frac{i}{\hbar} [p_i, \bar{G}] = \frac{i}{\hbar} (\delta_p p_k [p_i, q^k] + [p_i, \delta_p p_k] q^k). \quad (2.66)$$

Por fim assumiremos que as variações com relação a p_i não devem influenciar na variável q^i e vice-versa, ou seja, $\delta_p q = \delta_q p = 0$, isso é chamado de independência cinemática. Assim as relações 2.61, 2.62, 2.65 e 2.66 se tornam

$$-\frac{i}{\hbar} (p_j [q^i, \delta_q q^j] + [q^i, p_j] \delta_q q^j) = \delta_q q^i, \quad (2.67)$$

$$-\frac{i}{\hbar}(p_j[p_i, \delta_q q^j] + [p_i, p_j] \delta_q q^j) = 0, \quad (2.68)$$

$$\frac{i}{\hbar}(\delta_p p_k[q^i, q^k] + [q^i, \delta_p p_k] q^k) = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{i}{\hbar}(\delta_p p_k[p_i, q^k] + [p_i, \delta_p p_k] q^k) = \delta_p p_i. \quad (2.70)$$

Uma possível solução é dada por

$$[q^i, \delta_q q^j] = [p_i, \delta_q q^j] = [q^i, \delta_p p_k] = [p_i, \delta_p p_k] = 0, \quad (2.71)$$

o que implica

$$-\frac{i}{\hbar}[p_i, p_j] \delta_q q^j = 0, \quad (2.72)$$

$$\frac{i}{\hbar} \delta_p p_k [q^i, q^k] = 0, \quad (2.73)$$

$$-\frac{i}{\hbar}[q^i, p_j] \delta_q q^j = \delta_q q^i, \quad (2.74)$$

$$\frac{i}{\hbar} \delta_p p_k [p_i, q^k] = \delta_p p_i. \quad (2.75)$$

Em geral $\delta_q q^j$ e $\delta_p p_k$ são diferentes de zero, portanto, 2.72 e 2.73 tem como solução $[q^i, q^k] = [p_i, p_j] = 0$. As relações 2.74 e 2.75 se resolvem de maneira similar, vejamos a solução da primeira delas. Neste caso podemos escrever 2.74 da seguinte maneira

$$-\frac{i}{\hbar}[q^i, p_i] \delta_q q^i - \sum_{i \neq j} \frac{i}{\hbar}[q^i, p_j] \delta_q q^j = \delta_q q^i. \quad (2.76)$$

Como $\delta_q q^j$ e $\delta_p p_k$ são em geral diferentes, se $i \neq j$, precisamos que $[q^i, p_j] = 0$. Ficamos então com $(-i[q^i, p_i] - \hbar) \delta_q q^i = 0 \rightarrow [q^i, p_i] = i\hbar$, pois $\delta_q q^i$ em geral não é nulo. Podemos então sumarizar os nossos resultados abaixo

$$[p_i, p_j] = [q^i, q^k] = 0 \quad [q^i, p_j] = i\hbar \delta_j^i, \quad (2.77)$$

que são as conhecidas relações de comutação da mecânica quântica.

2.2.4 Equações de Heisenberg

Anteriormente tomamos variações nas coordenadas p e q , entretanto para analisar a dinâmica, do ponto de vista dos operadores (representação de *Heisenberg*), vamos tomar a variação do parâmetro t de um operador $A = A(q(t), p(t); t)$

$$\delta_t A = A(q(t + \delta t), p(t + \delta t); t) - A(q(t), p(t); t), \quad (2.78)$$

expandindo $A(q(t + \delta t), p(t + \delta t); t)$ em série e lembrando que $q(t + \delta t) = q(t) + \dot{q}(t)\delta t$ temos

$$\delta_t A = \left(\frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} \right) \delta t = \left(\frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \delta t. \quad (2.79)$$

Se lembrarmos agora da expressão 2.31 com $G = -H\delta t$

$$\delta_t A = -\frac{i}{\hbar} [A, H] \delta t = \left(\frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \delta t, \quad (2.80)$$

de onde finalmente temos

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (2.81)$$

que é a equação de *Heisenberg*.

2.2.5 Equação de Schrodinger

Lembremos que na representação de *Schrödinger*, a dinâmica é governada pela evolução dos vetores de estado, portanto vamos tomar variações das funções de transformação.

Tomemos um sistema que se encontra inicialmente no estado $|b, t_0\rangle = |\psi\rangle$ e que evolui para o estado $\langle a(t)| = \langle q, t|$ caracterizado pelas variáveis q e t . Vamos supor que a variação no estado inicial é nula, de maneira que a variação só acontece no estado final

$$\delta \langle q, t | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle q, t | G | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle q, t | p \delta q - H \delta t | \psi \rangle. \quad (2.82)$$

No cálculo das relações de comutação escolhemos $[p, \delta q] = 0$, portanto

$$\delta \langle q, t | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \delta q \langle q, t | p | \psi \rangle - \frac{i}{\hbar} \delta t \langle q, t | H | \psi \rangle. \quad (2.83)$$

Olhando a função de transformação agora como uma função das variáveis q e t temos que sua variação é dada por

$$\delta \langle q, t | \psi \rangle = \delta q \frac{\partial}{\partial q} \langle q, t | \psi \rangle + \delta t \frac{\partial}{\partial t} \langle q, t | \psi \rangle. \quad (2.84)$$

Igualando 2.83 e 2.84 temos as seguintes relações

$$\langle q, t | p | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q, t | \psi \rangle, \quad (2.85)$$

$$\langle q, t | H | \psi \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle q, t | \psi \rangle, \quad (2.86)$$

onde a primeira é a representação dos momentos no espaço de coordenadas e a segunda é a equação de *Schrödinger*.

2.2.6 Equação de Hamilton-Jacobi Quântica

Com a ajuda do princípio de *Schwinger* e de suas consequências, em particular da equação de *Schrödinger*, vamos obter o análogo quântico das equações de *Hamilton-Jacobi*. Seja $F(A, B)$ um operador que é uma combinação dos operadores A e B possível de ser expandido em série, ou seja,

$$F(A,B) = F_0 + a_1A + b_1B + \dots + a_2A^2 + b_2B^2 + \dots + c_{11}AB + c_{12}AB^2 + \dots + c_{111}ABA + \dots \quad (2.87)$$

Se conhecermos as relações de comutação entre A e B podemos escrever o operador $F(A,B)$ na chamada forma bem ordenada de Dirac

$$\mathcal{F}(A,B) = \sum_k c_k f_k(A) g_k(B), \quad (2.88)$$

onde c_k são os coeficientes, $f_k(A)$ e $g_k(B)$ são funções dos operadores A e B , respectivamente. Nesta forma, podemos calcular facilmente os elementos matriciais de $\langle a|F(A,B)|b\rangle$, bastando para isso por $F(A,B)$ na forma ordenada

$$\begin{aligned} \langle a|F(A,B)|b\rangle &= \langle a|\mathcal{F}(A,B)|b\rangle = \langle a|\sum_k c_k f_k(A) g_k(B)|b\rangle = \langle a|\sum_k c_k f_k(a) g_k(b)|b\rangle, \\ &= \langle a|\mathcal{F}(a,b)|b\rangle = \mathcal{F}(a,b) \langle a|b\rangle, \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde $\mathcal{F}(a,b)$ não é um operador, mas uma função dos autovalores a e b referentes às equações de autovalor e autovetor $A|a\rangle = a|a\rangle$ e $B|b\rangle = b|b\rangle$.

Lembremos da relação 2.14, na qual fazemos a variação da função de transformação. Se pudermos colocar o operador ação quântica na forma bem ordenada teremos

$$\begin{aligned} \delta \langle a(t)|b(t_0)\rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle a(t)|\delta S_{t_0,t}|b(t_0)\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle a(t)|\delta W_{t_0,t}|b(t_0)\rangle, \\ &= \frac{i}{\hbar} \delta \mathcal{W}_{t_0,t} \langle a(t)|b(t_0)\rangle, \end{aligned} \quad (2.90)$$

onde $\delta W_{t_0,t}$ é a forma ordenada de $\delta S_{t_0,t}$, $W_{t_0,t}$ é o operador principal de *Hamilton*, em analogia com a mecânica clássica, e $\mathcal{W}_{t_0,t}$ é o análogo de $\mathcal{F}(a,b)$ comentado acima. Esta última relação nos permite uma integração direta da função de transformação

$$\langle a(t)|b(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}_{t_0,t}}. \quad (2.91)$$

O resultado 2.91 nos permite encontrar as equações de *Hamilton-Jacobi* quânticas, bastando para isso substituir 2.91 na equação de Schrodinger 2.86

$$-i\langle q,t|H|\Psi\rangle = \hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle q,t|\Psi\rangle = ie^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}_{t_0,t}}\frac{\partial\mathcal{W}_{t_0,t}}{\partial t} = i\langle q,t|\Psi\rangle\frac{\partial\mathcal{W}_{t_0,t}}{\partial t} = i\langle q,t|\frac{\partial\mathcal{W}_{t_0,t}}{\partial t}|\Psi\rangle, \quad (2.92)$$

de onde concluímos

$$H + \frac{\partial\mathcal{W}_{t_0,t}}{\partial t} = 0. \quad (2.93)$$

Similarmente, tomando 2.85

$$\langle q,t|p|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q,t|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}_{t_0,t}}\frac{\partial\mathcal{W}_{t_0,t}}{\partial q} = \langle q,t|\frac{\partial\mathcal{W}_{t_0,t}}{\partial q}|\Psi\rangle, \quad (2.94)$$

de onde tiramos o momento generalizado

$$p = \frac{\partial\mathcal{W}_{t_0,t}}{\partial q}. \quad (2.95)$$

O par de equações operatoriais 2.93 e 2.95 são as equações de *Hamilton-Jacobi* quânticas, as quais, junto às equações de *Heisenberg* e *Schrödinger*, nos fornecem um novo meio para representar a dinâmica e calcular as funções de transformação do sistema, que será feito na próxima seção.

2.3 Cálculo das Funções de Transformações

Nesta seção vamos utilizar as equações de *Hamilton-Jacobi* para obter as funções de transformação para alguns sistemas de interesse físico. Em particular vamos resolver pri-

meiro a partícula sujeita a uma força constante, em seguida o oscilador harmônico de frequência variável e por fim o oscilador harmônico com frequência e força variáveis. Para o cálculo das funções de transformação temos duas abordagens. Na primeira utilizamos uma função $\phi(t)$ para dar conta da forma bem ordenada do operador principal de *Hamilton* $W_{t_0,t}$ e na segunda escrevemos o operador ação e depois o colocamos na forma bem-ordenada. As duas abordagens são equivalentes e aqui seguiremos a primeira. As referências citadas no início do capítulo apresentam os cálculos utilizando as duas formas.

2.3.1 Partícula Sujeita a uma Força Constante

Tomaremos como ponto de partida a ação quântica como sendo igual à ação clássica do sistema

$$S = \frac{m}{2} \frac{q^2 + q_0^2 + 2qq_0}{\Delta t} + \frac{F\Delta t}{2}(q + q_0) + \frac{F^2(\Delta t)^3}{24m}, \quad (2.96)$$

onde $\Delta t = t - t_0$, m e F são escalares reais, q e q_0 são os operadores posição final e inicial, respectivamente.

Também tomaremos o Hamiltoniano quântico igual à função Hamiltoniana clássica

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fq. \quad (2.97)$$

Consideremos o operador principal de *Hamilton* como sendo

$$W(q, q_0, t) = S(q, q_0, t) + \phi(t), \quad (2.98)$$

onde o $\phi(t)$ é um operador proporcional à unidade dependente explicitamente do tempo com a função de suprir os termos que aparecem no processo de colocar S na forma bem ordenada W .

O momento, definido em 2.95, se torna

$$p = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}} = m \frac{q - q_0}{\Delta t} + \frac{F \Delta t}{2}. \quad (2.99)$$

Com a forma para o momento acima, podemos utilizar as relações de comutação para poder colocar o operador Hamiltoniano na forma bem ordenada

$$[q, p] = \frac{m}{\Delta t} [q_0, q] = i\hbar \quad \rightarrow \quad q_0 q = q q_0 + i \frac{\hbar \Delta t}{m}. \quad (2.100)$$

Com a relação acima calculamos H na forma bem ordenada

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{m}{\Delta t}\right)^2 (q^2 + q_0^2 - q q_0 - q_0 q) + \frac{(F \Delta t)^2}{4} + F m (q - q_0) - F q, \\ &= \left(\frac{m}{\Delta t}\right)^2 \left(q^2 + q_0^2 - 2q q_0 - i \frac{\hbar \Delta t}{m} \right) + \frac{(F \Delta t)^2}{4} + F m (q - q_0) - F q. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Vamos calcular derivada temporal do operador principal de Hamilton para poder usar a equação operatorial de *Hamilton-Jacobi* 2.93

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{\phi} = -\frac{m}{2} \frac{(q^2 + q_0^2 - 2q q_0)}{(\Delta t)^2} + \frac{F}{2} (q + q_0) - \frac{(F \Delta t)^2}{8m} + \dot{\phi}, \quad (2.102)$$

e finalmente

$$H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{i\hbar}{2\Delta t} \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{i\hbar}{2} \ln(A \Delta t), \quad (2.103)$$

onde A é uma constante de integração.

De posse do operador principal na forma bem ordenada podemos, através de 2.91, calcular a função de transformação

$$\langle a, t | b, t_0 \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}} = e^{\frac{i}{\hbar} S} e^{\frac{i}{\hbar} \Phi} = \left(\frac{1}{A \Delta t} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m}{2i\hbar \Delta t} (q - q_0)^2 \right]. \quad (2.104)$$

Para encontrar a constante A basta impor a condição de normalização

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle q, t | q, t_0 \rangle = \delta(q - q_0), \quad (2.105)$$

onde $\delta(q - q_0)$ é a delta de *Dirac*. Uma sequência de funções que satisfaz à condição acima no limite em que $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 y^2} = \delta(y). \quad (2.106)$$

Fazendo as correspondências

$$n^2 = \frac{m}{2i\hbar \Delta t} \quad y = q - q_0, \quad (2.107)$$

temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle a, t | b, t_0 \rangle = \left(\frac{2i\hbar}{Am} \right)^{1/2} \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-n^2 y^2} = \left(\frac{2i\pi\hbar}{Am} \right)^{1/2} \delta(q - q_0), \quad (2.108)$$

de modo que

$$A = \frac{2\pi i \hbar}{m}. \quad (2.109)$$

Ficamos então com a seguinte função de transformação

$$\langle a, t | b, t_0 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m}{2i\hbar \Delta t} (q - q_0)^2 \right]. \quad (2.110)$$

2.3.2 Oscilador Harmônico com Frequência Dependente do tempo

Começamos com o operador Lagrangiano quântico para o oscilador harmônico de frequência variável

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2, \quad (2.111)$$

que por meio das equações de Euler-Lagrange nos resultam nas seguintes equações de movimento

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0. \quad (2.112)$$

Ao contrário do exemplo anterior, no qual conseguimos escrever a forma explícita da ação, qualquer que seja a solução $q(t)$, para o caso que iremos tratar aqui isso não será possível. Isso decorre do fato de não termos uma solução geral para a equação 2.112, pois ω é uma função arbitrária do tempo. Para contornar esse problema vamos supor uma solução para a equação acima, a partir dela encontrar a ação para, por fim, calcular a função de transformação do sistema. A solução proposta para a equação acima é

$$q(t) = af(t) + bg(t), \quad (2.113)$$

onde as funções $f(t)$ e $g(t)$ são soluções linearmente independentes de equações do tipo 2.112 e a e b são operadores que serão definidos pelas condições de contorno de 2.112. Supondo as condições de contorno

$$q(t_0) = q_0 \quad q(t_1) = q_1, \quad (2.114)$$

temos a solução geral

$$q(t) = \frac{1}{f_0g_1 - f_1g_0} [q_0(g_1f(t) - f_1g(t)) + q_1(f_0g(t) - g_0f(t))], \quad (2.115)$$

onde $f(t_{0;1}) = f_{0;1}$, $g(t_{0;1}) = g_{0;1}$ e os operadores a e b ficam escritos da seguinte forma

$$q_0 = af_0 + bg_0, \quad (2.116)$$

$$q_1 = af_1 + bg_1. \quad (2.117)$$

Podemos agora escrever a ação da seguinte forma

$$S = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}; t) dt = \frac{mq_1^2}{2(f_0g_1 - f_1g_0)} [f_0\dot{g}_1 - g_0\dot{f}_1] + \frac{mq_0^2}{2(f_0g_1 - f_1g_0)} [f_1\dot{g}_0 - g_1\dot{f}_0] + \\ - \frac{mq_1q_0}{2(f_0g_1 - f_1g_0)} [f_1\dot{g}_1 - g_1\dot{f}_1] - \frac{mq_0q_1}{2(f_0g_1 - f_1g_0)} [f_1\dot{g}_1 - g_1\dot{f}_1]. \quad (2.118)$$

Como foi dito acima, $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes, portanto seu Wronskiano deve ser uma constante

$$W = f(t)\dot{g}(t) - g(t)\dot{f}(t) = C, \quad (2.119)$$

e em particular

$$C = f_0\dot{g}_0 - g_0\dot{f}_0 = f_1\dot{g}_1 - g_1\dot{f}_1, \quad (2.120)$$

que também é constante.

Escrevemos assim a ação na forma bem ordenada

$$S = \frac{mq_1^2}{2(f_0g_1 - f_1g_0)} [f_0\dot{g}_1 - g_0\dot{f}_1] + \frac{mq_0^2}{2(f_0g_1 - f_1g_0)} [f_1\dot{g}_0 - g_1\dot{f}_0] - mqq_0 \frac{C}{f_0g(t) - f(t)g_0}. \quad (2.121)$$

Procedendo como na seção anterior, vamos calcular o operador principal de Hamilton que tem a forma $W = S + \phi$, onde o ϕ dá conta dos termos que aparecem ao se colocar a

ação na forma bem ordenada. O momento dado por 2.95

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{m}{f_0 g(t) - f(t) g_0} (q[f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)] - q_0 C). \quad (2.122)$$

De posse da expressão para o momento acima podemos, com ajuda das relações de comutação, escrever $q_0 q$ em função de $q q_0$

$$[p, q] = -\frac{m}{f_0 g(t) - f(t) g_0} [q, q_0] = i\hbar \quad \rightarrow \quad q_0 q = q q_0 + i\hbar \frac{f_0 g(t) - f(t) g_0}{m}, \quad (2.123)$$

e assim calcular o operador Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) q^2 \quad (2.124)$$

$$= \frac{m^2}{2m(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} (q^2 [f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)]^2 - (q q_0 + q_0 q) C [f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)] + q_0^2 C^2) + \frac{1}{2} m \omega^2(t) q^2, \quad (2.125)$$

que na forma bem ordenada fica escrito da seguinte maneira

$$H = q^2 \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right)^2 + \omega^2(t) \right\} + q_0^2 \frac{m C^2}{2(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} + q q_0 \frac{(f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t))}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} - \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right). \quad (2.126)$$

Vejamos algumas identidades para reescrever o Hamiltoniano acima. Sendo $f_0 g(t) - f(t) g_0$ outra solução de 2.112, temos a seguinte identidade para o primeiro termo do Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right)^2 + \omega^2(t) &= \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right)^2 - \frac{\left(f_0 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} - g_0 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right)}{f_0 g(t) - f(t) g_0}, \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Lembrando que $C = f(t)\dot{g}(t) - g(t)\dot{f}(t) = f_0\dot{g}_0 - g_0\dot{f}_0$, o segundo termo do Hamiltoniano pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} &= \frac{(f(t)\dot{g}(t) - g(t)\dot{f}(t))(f_0\dot{g}_0 - g_0\dot{f}_0)}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2}, \\ &= \frac{f\dot{g}f_0\dot{g}_0 - f\dot{g}g_0\dot{f}_0 - g\dot{f}f_0\dot{g}_0 + g\dot{f}g_0\dot{f}_0 + \dot{f}\dot{g}_0 f g_0 - f\dot{g}_0 g_0 \dot{f} + \dot{g}\dot{f}_0 f_0 g - g\dot{f}_0 f_0 \dot{g}}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2}, \\ &= -\frac{(f\dot{g}_0 f_0 g - g\dot{f}_0 f_0 \dot{g} - f\dot{g}_0 g_0 \dot{f} + \dot{g}\dot{f}_0 f_0 g_0)}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} + \frac{f\dot{g}f_0\dot{g}_0 - f\dot{g}_0 g_0 \dot{f} - g\dot{f}_0 f_0 \dot{g} + g\dot{f}_0 g_0 \dot{f}}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2}, \\ &= -\frac{(f\dot{g}_0 - \dot{g}\dot{f}_0)(f_0 g - f g_0)}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} + \frac{(f\dot{g}_0 - g\dot{f}_0)(f_0 \dot{g} - g_0 \dot{f})}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2}, \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)\dot{g}_0 - g(t)\dot{f}_0}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.128)$$

O terceiro termo do Hamiltoniano se torna

$$\frac{(f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t))}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right). \quad (2.129)$$

De posse das identidades acima nosso Hamiltoniano fica reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} H &= -q^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) - q_0^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)\dot{g}_0 - g(t)\dot{f}_0}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} \right) + \\ &\quad + qq_0 m \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} \right) - \frac{i\hbar}{2} \frac{d}{dt} \ln(f_0 g(t) - f(t) g_0). \end{aligned} \quad (2.130)$$

Se calcularmos agora a equação operatorial de *Hamilton-Jacobi* temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & +q^2 \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) + q_0^2 \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) + \\ & - q q_0 m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C}{(f_0 g(t) - f(t) g_0)^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = -H, \end{aligned} \quad (2.131)$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2} \frac{d}{dt} \ln(f_0 g(t) - f(t) g_0) \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{i\hbar}{2} A \ln(f_0 g(t) - f(t) g_0). \quad (2.132)$$

Calculado ϕ , podemos finalmente escrever a função de transformação 2.91

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = & \frac{1}{\sqrt{A(f_0 g(t) - f(t) g_0)}} \exp \left[\frac{imq^2}{2\hbar} \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) \right] \\ & \times \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\frac{q_0^2 (f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0) - 2Cq q_0}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Para calcular A faremos como antes, impondo a condição de normalização. Ficamos portanto com a seguinte função de transformação

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = & \sqrt{\frac{mC}{2\pi i \hbar (f_0 g(t) - f(t) g_0)}} \exp \left[\frac{imq^2}{2\hbar} \left(\frac{f_0 \dot{g}(t) - g_0 \dot{f}(t)}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right) \right] \\ & \times \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\frac{q_0^2 (f(t) \dot{g}_0 - g(t) \dot{f}_0) - 2Cq q_0}{f_0 g(t) - f(t) g_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

2.3.3 Oscilador Harmônico com Frequência e Força Dependentes do Tempo

Como antes, começamos com o operador Lagrangiano quântico, dado por

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2 + \lambda F(t)q, \quad (2.135)$$

onde λ é um escalar, e $F(t)$ é uma função real dependente do tempo. A equação de movimento correspondente ao Lagrangiano 2.135 é

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = \frac{\lambda}{m}F(t). \quad (2.136)$$

Pelos mesmos motivos da subseção anterior, neste caso também não é possível escrever a ação explicitamente. Vamos, portanto, supor que a solução da equação acima é dada por

$$q(t) = af(t) + bg(t) + h(t), \quad (2.137)$$

onde novamente a e b são operadores definidos pelas condições de contorno, $f(t)$ e $g(t)$ são funções linearmente independentes da equação diferencial homogênea 2.136 que supomos ter as seguintes condições de contorno

$$f(t_{0;1}) = f_{0;1} \quad g(t_{0;1}) = g_{0;1}. \quad (2.138)$$

A função $h(t)$ é a solução da equação diferencial particular referente a 2.136 escrita como

$$h(t) = \frac{\lambda}{mC} \int_{t_0}^t (f(s)g(t) - f(t)g(s))ds, \quad (2.139)$$

onde $C = f(t)\dot{g}(t) - \dot{f}(t)g(t) \neq 0$, já que as funções f e g são linearmente independentes. Sem perda de generalidade podemos supor que $h(t_0) = 0$ e $h(t_1) = h_1$ de modo que os operadores ficam definidos por

$$q_0 = af_0 + bg_0, \quad (2.140)$$

$$q_1 = af_1 + bg_1 + h_1. \quad (2.141)$$

A solução geral então da equação 2.112 deve ser dada por

$$q(t) = \frac{1}{f_0g_1 - g_0f_1} \{ (f(t)g_1 - g(t)f_1)q_0 + (f_0g(t) - g_0f(t))q_1 - (f_0g(t) - g_0f(t)) \} + h(t). \quad (2.142)$$

De posse de todas as considerações feitas e da solução $q(t)$ da equação 2.112 podemos finalmente escrever a ação da seguinte forma

$$\begin{aligned} S = & \frac{m}{2(f_0g_1 - g_0f_1)} \{ (f_0\dot{g}_1 - g_0\dot{f}_1)q_1^2 + (\dot{g}_0f_1 - \dot{f}_0g_1)q_0^2 - 2Cqq_0 \} + \\ & + \frac{\lambda}{(f_0g_1 - g_0f_1)} \left(q_1 \int_{t_0}^{t_1} (f_0g(s) - g_0f(s))ds + q_0 \int_{t_0}^{t_1} (f(s)g_1 - g(s)f_1)ds \right) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{f_0(g_1h(s) - g(s)h_1) - g_0(f_1h(s) - f(s)h_1)}{f_0g_1 - g_0f_1} \right\} F(s)ds. \end{aligned} \quad (2.143)$$

O operador principal de Hamilton dado por $W = S + \phi(t)$ nos permite calcular o momento

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} = m \left(\frac{(f_0\dot{g}_1 - g_0\dot{f}_1)q_1 - Cq_0}{(f_0g_1 - g_0f_1)} \right) + \frac{\lambda}{(f_0g_1 - g_0f_1)} \int_{t_0}^{t_1} (f_0g(s) - g_0f(s))F(s)ds. \quad (2.144)$$

De posse do momento prosseguimos ao calculo da relação de comutação para as coordenadas em tempos distintos

$$[p_1, q_1] = -\frac{m\omega}{\sin(\omega\Delta t)} [q_0, q_1] = i\hbar \quad \rightarrow \quad q_0q_1 = \frac{i\hbar \sin(\omega\Delta t)}{m\omega} + q_1q_0. \quad (2.145)$$

Podemos fazer a correspondência $t_1 \rightarrow t$, já que t_1 e t são rótulos para um particular instante de tempo. Com a relação acima, podemos calcular o Hamiltoniano na forma bem

ordenada

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)q^2}{2} - \lambda F(t)q = \frac{m\omega^2(t)q^2}{2} - \lambda F(t)q \\
&+ m \left\{ \frac{(f_0\dot{g} - g_0\dot{f})^2}{(f_0g - g_0f)^2} q^2 + \frac{C^2 q_0^2}{(f_0g - g_0f)^2} - \frac{2C(f_0\dot{g} - g_0\dot{f})}{(f_0g - g_0f)^2} qq_0 - \frac{i\hbar}{m} \left(\frac{f_0\dot{g} - g_0\dot{f}}{f_0g - g_0f} \right) \right\} + \\
&+ \left(\frac{(f_0\dot{g} - g_0\dot{f})\lambda q}{(f_0g - g_0f)^2} - \frac{\lambda C q_0}{(f_0g - g_0f)^2} \right) \int_{t_0}^t (f_0g(s) - g_0f(s)) F(s) ds + \\
&+ \frac{\lambda^2}{(f_0g - g_0f)^2} \left[\int_{t_0}^t (f_0g(s) - g_0f(s)) F(s) ds \right]^2. \tag{2.146}
\end{aligned}$$

Podemos agora calcular a derivada temporal do operador principal e utilizar a equação operatorial de *Hamilton-Jacobi* para mostrar que

$$H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = -\frac{i\hbar}{2} \frac{(f_0\dot{g} - g_0\dot{f})}{(f_0g - g_0f)} \quad \rightarrow \quad \phi = -\frac{i\hbar}{2} \ln(f_0g - g_0f). \tag{2.147}$$

Podemos agora escrever a função de transformação

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W\right) = \frac{1}{\sqrt{A(f_0g - g_0f)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \tag{2.148}$$

que, como esperado, para o caso em que $F = 0$ é igual à função de transformação encontrada na subseção anterior.

2.4 Invariantes Dinâmicos via Schwinger

Nesta seção desenvolvemos o teorema de *Noether* quântico utilizando o formalismo de *Schwinger* para calcular os invariantes do oscilador harmônico de frequência variável que é o caso tratado no primeiro capítulo. Mostraremos também a equivalência entre as

duas abordagens e justificaremos a escolha nas combinações das equações de movimento por meio do teorema de *Noether* para a mecânica quântica.

2.4.1 Cálculo dos Invariantes Dinâmicos

Inicialmente, calculamos a variação da ação no formalismo Hamiltoniano onde podemos ter variações em q e p , obtendo assim o seguinte resultado

$$\delta S = \int_{t'_0}^{t'} dt \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \bar{\delta} p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \bar{\delta} q \right] + \frac{1}{2} \int_{t'_0}^{t'} dt \frac{d}{dt} (p \delta q - (\delta p) q - 2H \delta t). \quad (2.149)$$

Esse resultado segue a mesma linha do que foi feito para calcular os termos de fronteira na subseção anterior. Se tomarmos o caso em que $\delta S = 0$ temos o teorema de *Noether* quântico

$$\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \bar{\delta} p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \bar{\delta} q = -\frac{d}{dt} (p \delta q - (\delta p) q - H \delta t), \quad (2.150)$$

ou seja, as combinações das equações de movimento (lado esquerdo de 2.150) nos resulta em um invariante dinâmico (lado direito de 2.150). Supondo que as equações de *Heisenberg* são satisfeitas, fica claro que a combinação das equações de movimento nos resulta em uma derivada total, que é precisamente o que fizemos no capítulo anterior quando apresentamos a nova abordagem proposta em [21].

Com as equações de *Heisenberg* satisfeitas, vamos supor que $\delta t = 0$ e lembrar que nesse caso $\delta p = \bar{\delta} p$ e $\delta q = \bar{\delta} q$. As variações nos operadores momento e posição podem ser escritas a partir de um parâmetro ε e no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$ temos as coordenadas e momento e posição originais, ou seja

$$q^* = \Phi(q, p, t, \varepsilon) \quad \Phi(q, p, t, 0) = q, \quad (2.151)$$

$$p^* = \Psi(q, p, t, \varepsilon) \quad \Psi(q, p, t, 0) = p. \quad (2.152)$$

Podemos fazer a expansão em primeira ordem, em torno de $\varepsilon = 0$, das coordenadas q^* e p^* acima para obter

$$q^* = q + \varepsilon \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = q + \varepsilon \phi(q, p, t) \quad \rightarrow \quad \delta q = \varepsilon \phi(q, p, t), \quad (2.153)$$

$$p^* = p + \varepsilon \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = p + \varepsilon \psi(q, p, t) \quad \rightarrow \quad \delta p = \varepsilon \psi(q, p, t). \quad (2.154)$$

Para calcular os invariantes lineares, encontrados no capítulo 1, para o caso do oscilador harmônico de frequência variável basta tomar $\phi = \beta(t)$ e $\psi = -\alpha(t)$ de modo que o lado direito de 2.150 se torna

$$\frac{d}{dt}(\beta p + \alpha q) = 0 \quad \rightarrow \quad I_L = \beta p + \alpha q. \quad (2.155)$$

Procedendo dessa maneira parece que o Hamiltoniano do sistema não é levado em consideração, ou seja, que o resultado acima é válido qualquer que seja o Hamiltoniano. Entretanto para calcular as condições que as funções α e β devem satisfazer, precisamos do lado esquerdo de 2.150, que é identicamente nulo, pois estamos supondo que as equações de *Heisenberg* são válidas, e é lá que o Hamiltoniano é levada em consideração.

O lado esquerdo da equação 2.150 para o caso do oscilador harmônico de frequência variável se torna

$$-\left(\dot{q} - \frac{p}{m}\right)\alpha - (\dot{p} + m\omega^2 q)\beta = 0. \quad (2.156)$$

Aqui procedemos como foi feito no capítulo 1, tirando as derivadas totais

$$\frac{d}{dt}(\beta p + \alpha q) = 0 = \left(\dot{\beta} + \frac{\alpha}{m}\right)p + (\dot{\alpha} - m\omega^2 \beta)q. \quad (2.157)$$

Para que a igualdade acima seja verdadeira temos que α e β devem satisfazer às seguintes equações

$$\dot{\beta} + \frac{\alpha}{m} = \dot{\alpha} - m\omega^2\beta, \quad (2.158)$$

ou equivalentemente

$$\ddot{\beta} + \omega^2\beta = 0, \quad (2.159)$$

que, como esperado, são os resultados obtidos no primeiro capítulo. Poderíamos ter feito o mesmo procedimento com $\phi = \beta^*(t)$ e $\psi = -\alpha^*(t)$ para obter o invariante linear adjunto e assim ficamos com o par de invariantes lineares

$$I_L = \beta p - m\dot{\beta}q \quad I_L^\dagger = \beta^* p - m\dot{\beta}^* q. \quad (2.160)$$

Se quisermos o invariante quadrático, basta tomar $\phi = \gamma p + \eta q$ e $\psi = -(\epsilon q + \eta p)$ de modo que

$$\frac{d}{dt}(\gamma p^2 + \eta\{q, p\} + \epsilon q^2) = 0 \quad \rightarrow \quad I_Q = \gamma p^2 + \eta\{q, p\} + \epsilon q^2, \quad (2.161)$$

e as condições para as funções novamente são dadas pelo lado esquerdo de 2.150

$$-\left(\dot{q} - \frac{p}{m}\right)(\epsilon q + \eta p) - (\dot{p} + m\omega^2 q)(\gamma p + \eta q) = 0, \quad (2.162)$$

que é equivalente à relação 1.152.

Com o objetivo de adiantar alguns resultados que vamos expor no capítulo 3, no qual vamos aplicar diretamente a abordagem proposta em [21], calculamos aqui, os invariantes lineares e quadrático também para esse caso.

O oscilador forçado dissipativo tem a peculiaridade do termo de força. Portanto vamos tomar a relação 2.150 completa, pois caso contrário o invariante linear análogo ao encontrado anteriormente implicaria um termo de força nulo para as condições sobre as

funções. Assim tomando $\phi = \beta$ e $\psi = \alpha$ para obter a seguinte relação

$$\frac{d}{dt}(\alpha q + \beta p - \mathcal{F}) = \left(\frac{\alpha e^{-G}}{m} + \dot{\beta} \right) p + (\dot{\alpha} - m\beta e^G \omega^2) q, \quad (2.163)$$

onde \mathcal{F} satisfaz

$$\mathcal{F} = \int_{t_0}^t e^{G(\tau)} \beta(\tau) F(\tau) d\tau, \quad \beta(t_0) = 0 \quad \rightarrow \quad e^G \beta F = \frac{d\mathcal{F}}{dt}. \quad (2.164)$$

Podemos agora tirar o invariante linear, da mesma forma que foi feita no capítulo, com as funções α e β satisfazendo às mesmas condições

$$I_L = \alpha q + \beta p - \mathcal{F}. \quad (2.165)$$

O invariante quadrático tem a mesma particularidade do invariante linear acima, ou seja, aqui também precisaremos utilizar a relação 2.150 completa. Tomamos $\phi = c_2 q + c_3 q + c_4$ com $\psi = \phi = c_1 q + c_3 p + c_5$ para obter a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c_1 p^2 + c_2 q^2 + c_3 \{q, p\} + c_4 q + c_5 p - \mathcal{F}) &= \left(\dot{c}_1 + 2c_3 \frac{e^{-G}}{m} \right) p^2 + \\ &+ \left(\dot{c}_2 - 2mc_3 e^G \omega^2 \right) q^2 + \left(\dot{c}_3 + c_2 \frac{e^{-G}}{m} - mc_1 \omega^2 e^G \right) \{q, p\} + \\ &+ \left(\dot{c}_5 + 2c_1 e^G F + c_4 \frac{e^{-G}}{m} \right) p + \left(\dot{c}_4 + 2c_3 e^G F - mc_5 e^G \omega^2 \right) q, \end{aligned} \quad (2.166)$$

que nos dá o seguinte invariante quadrático, cuja as condições são as mesmas encontradas no primeiro capítulo

$$I_Q = c_1 p^2 + c_2 q^2 + c_3 \{q, p\} + c_4 q + c_5 p - \mathcal{F}(c_5, t). \quad (2.167)$$

Neste capítulo mostramos como podemos obter os invariantes lineares a partir de um

teorema de *Noether* quântico, consequência do princípio de *Schwinger*, e deixar evidente a equivalência entre as formulações. O método exposto no capítulo 1 e o teorema de *Noether* neste, resultam ser complementares. A primeira abordagem acaba por ser o cálculo das condições auxiliares decorrentes do lado esquerdo de 2.150 e o lado direito acaba por ser o invariante que desejamos.

Além disso, percebemos que a formulação proposta por *Schwinger*, para a mecânica quântica, consegue dar conta dos problemas nos quais o Hamiltoniano dependente explicitamente do tempo de maneira mais natural do que as abordagens tradicionais. O caso dependente do tempo é tratado substituindo o Hamiltoniano original do problema por um invariante quadrático que, como foi visto acima, pode ser calculado através de 2.150 e, como será visto no próximo capítulo, passa a desempenhar o papel fundamental para a construção dos autoestados do sistema.

Capítulo 3

Quantização do Oscilador Forçado Dissipativo

Osciladores são sistemas que aparecem com bastante frequência na natureza. No caso clássico, uma mola que obedece à lei de *Hooke*, quando posta em movimento, é um oscilador. No caso quântico temos alguns exemplos de sistemas que se comportam como osciladores sob certas condições, como exemplo temos um átomo interagindo com luz. Neste caso, o elétron de valência do átomo pode ser pensado como um oscilador ligado ao átomo sendo excitado pela radiação eletromagnética [44].

Neste capítulo, calcularemos os invariantes lineares e quadrático do oscilador com termos de força, dissipação e frequência variáveis utilizando o método exposto em [21]. Posteriormente, vamos tomar o caso particular, no qual o termo de força é uma função do tempo e os termos de frequência e dissipação são constantes. Além disso, vamos resolver o caso do oscilador harmônico simples, o oscilador com termo dissipativo constante e forçado sem dissipação com frequência constante. Por fim, apresentamos uma comparação entre os diferentes osciladores apresentados ao longo do capítulo.

3.1 Oscilador Forçado Dissipativo

3.1.1 Equações de Movimento

Como realizado ao longo da dissertação, vamos partir da Hamiltoniana do sistema. Vale notar que poderíamos partir das equações de movimento para o caso em que a Hamiltoniana do sistema não existe ou não é conhecida. Dito isso, para o oscilador forçado com termos de força, frequência e dissipação variáveis a Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{e^{-G(t)}}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2(t)e^{G(t)}}{2} q^2 - e^{G(t)} F(t) q, \quad (3.1)$$

onde $G(t)$ depende apenas do tempo e m é uma constante. Calculando as equações de *Heisenberg* do problema temos

$$\dot{q} = \frac{e^{-G}}{m} p, \quad (3.2)$$

$$\dot{p} = e^G F - m\omega^2 e^G q. \quad (3.3)$$

Podemos derivar 3.2 para obter $\dot{p} = me^G \ddot{q} + me^G \dot{G} \dot{q}$ e substituir em 3.3 para encontrar a equação conhecida para o oscilador forçado dissipativo

$$\ddot{q} + g\dot{q} + \omega^2 q = \frac{F}{m}, \quad (3.4)$$

com $g(t) = \dot{G}$.

3.1.2 Invariantes Lineares

De posse das equações de movimento, prosseguimos da maneira usual, ou seja, multiplicamos 3.2 por $\alpha = \alpha(t)$ e 3.3 por $\beta = \beta(t)$. Tomamos as derivadas totais e fazemos a soma das equações para obter o seguinte resultado

$$\frac{d}{dt}(\alpha q + \beta p) = \left(\dot{\beta} + \frac{e^{-G}}{m} \alpha \right) p + (\dot{\alpha} - m e^G \omega^2 \beta) q + e^G F \beta. \quad (3.5)$$

O termo de força implica em um termo linear em q na Hamiltoniana e, por consequência, uma função do tempo nas equações de movimento e na expressão 3.5. Não podemos simplesmente tomar $e^G F \beta = 0$, portanto vamos supor a existência de uma função \mathcal{F} tal que

$$\mathcal{F}(\beta, t) = \int_{t_0}^t e^{G(\tau)} \beta(\tau) F(\tau) d\tau, \quad \beta(t_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \beta e^G F = \frac{d\mathcal{F}}{dt}, \quad (3.6)$$

para poder colocar o termo $e^G F \beta$ como uma derivada em 3.5. Utilizando 3.6 ficamos com

$$\frac{d}{dt}(\alpha q + \beta p - \mathcal{F}) = \left(\frac{\alpha e^{-G}}{m} + \dot{\beta} \right) p + (\dot{\alpha} - m \beta e^G \omega^2) q. \quad (3.7)$$

A expressão 3.7 nos mostra que temos o invariante linear

$$I_L = \alpha q + \beta p - \mathcal{F}, \quad (3.8)$$

se as seguintes equações forem satisfeitas

$$\alpha e^{-G} + m \dot{\beta} = 0, \quad (3.9)$$

$$\dot{\alpha} - m \beta e^G \omega^2 = 0. \quad (3.10)$$

Seria interessante escrever o invariante 3.8 em termos só de α ou só de β . As equações 3.9 e 3.10 são equivalentes à seguinte equação diferencial para β

$$\ddot{\beta} + g \dot{\beta} + \omega^2 \beta = 0, \quad (3.11)$$

que nos permite escrever o invariante 3.8 em termos de β como queríamos¹. A equação 3.11 é a mesma encontrada para o caso do oscilador com dissipação.

Assim, se existe β satisfazendo 3.11, existe também o invariante linear 3.8. Podemos supor que $\beta = \rho(t)e^{i\phi(t)}$ de modo que ρ e ϕ devem satisfazer às seguintes equações

$$\ddot{\rho} + g\dot{\rho} + (\omega^2 - \dot{\phi}^2)\rho = 0, \quad (3.12)$$

$$2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho(\ddot{\phi} + g\dot{\phi}) = 0. \quad (3.13)$$

com ρ e ϕ reais. Se existe $\beta = \rho e^{i\phi}$, é imediato mostrar que existe $\beta^* = \rho e^{-i\phi}$ satisfazendo 3.12 e 3.13. Assim, podemos construir um invariante adjunto, ficando com o par de invariantes lineares para o problema

$$I_L = \beta p - me^G \dot{\beta} q - \mathcal{F}(\beta, t), \quad (3.14)$$

$$I_L^\dagger = \beta^* p - me^G \dot{\beta}^* q - \mathcal{F}(\beta^*, t), \quad (3.15)$$

com β e β^* satisfazendo à equação para o oscilador com dissipação, *i.e.* 3.11.

3.1.3 Invariantes Quadráticos

Para calcular o invariante quadrático fazemos combinações de q e p à esquerda e à direita das equações de movimento. Vamos tomar as seguintes combinações

$$p\dot{p} = e^G F p - m\omega^2 e^G p q, \quad (3.16)$$

$$q\dot{q} = \frac{e^{-G}}{m} q p, \quad (3.17)$$

$$\dot{q}p + \dot{p}q = \frac{e^{-G}}{m} p^2 + e^G F q - me^G \omega^2 q^2. \quad (3.18)$$

¹Poderíamos também ter escrito a equação para α , entretanto esta é mais complicada do que 3.11

Tomando as derivadas totais e substituindo as equações de movimento 3.2 e 3.3 ficamos com as seguintes relações

$$\frac{dp^2}{dt} = 2e^G F p - m\omega^2 e^G \{q, p\}, \quad (3.19)$$

$$\frac{dq^2}{dt} = \frac{e^{-G}}{m} \{q, p\}, \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} \{q, p\} = 2\frac{e^{-G}}{m} p^2 + 2e^G F q - 2me^G \omega^2 q^2, \quad (3.21)$$

onde $\{q, p\} = qp + pq$ é o anticomutador.

Para construir o invariante quadrático mais geral, precisamos incluir as equações de movimento 3.2 e 3.3. Isso ocorre por causa do termo de força que nos resulta em termos lineares nas coordenadas q e p em 3.19 e 3.21. A partir destas equações e das equações de movimento do sistema multiplicadas por funções dependentes do tempo c_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), temos as seguintes relações

$$c_1 \frac{dp^2}{dt} = 2c_1 e^G F p - mc_1 \omega^2 e^G \{q, p\}, \quad (3.22)$$

$$c_2 \frac{dq^2}{dt} = c_2 \frac{e^{-G}}{m} \{q, p\}, \quad (3.23)$$

$$c_3 \frac{d}{dt} \{q, p\} = 2c_3 \frac{e^{-G}}{m} p^2 + 2c_3 e^G F q - 2mc_3 e^G \omega^2 q^2, \quad (3.24)$$

$$c_4 \dot{q} = c_4 \frac{e^{-G}}{m} p, \quad (3.25)$$

$$c_5 \dot{p} = -mc_5 e^G \omega^2 q + c_5 e^G F. \quad (3.26)$$

Para finalmente encontrar o invariante quadrático, precisamos tomar as derivadas totais e somar todas as relações acima de modo a ficarmos com

$$\frac{d}{dt} (c_1 p^2 + c_2 q^2 + c_3 \{q, p\} + c_4 q + c_5 p - \mathcal{F}(c_5, t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\dot{c}_1 + 2c_3 \frac{e^{-G}}{m} \right) p^2 + \left(\dot{c}_2 - 2mc_3 e^G \omega^2 \right) q^2 + \left(\dot{c}_3 + c_2 \frac{e^{-G}}{m} - mc_1 \omega^2 e^G \right) \{q, p\} + \\
&\quad + \left(\dot{c}_5 + 2c_1 e^G F + c_4 \frac{e^{-G}}{m} \right) p + \left(\dot{c}_4 + 2c_3 e^G F - mc_5 e^G \omega^2 \right) q. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Temos assim o invariante quadrático

$$I_Q = c_1 p^2 + c_2 q^2 + c_3 \{q, p\} + c_4 q + c_5 p - \mathcal{F}(c_5, t), \quad (3.28)$$

se as condições abaixo são satisfeitas

$$\dot{c}_1 + 2c_3 \frac{e^{-G}}{m} = 0, \quad (3.29)$$

$$\dot{c}_2 - 2mc_3 e^G \omega^2 = 0, \quad (3.30)$$

$$\dot{c}_3 + c_2 \frac{e^{-G}}{m} - mc_1 \omega^2 e^G = 0, \quad (3.31)$$

$$\dot{c}_5 + 2c_1 e^G F + c_4 \frac{e^{-G}}{m} = 0, \quad (3.32)$$

$$\dot{c}_4 + 2c_3 e^G F - mc_5 e^G \omega^2 = 0. \quad (3.33)$$

Podemos escrever as funções acima em termos de c_1 e c_5 , de modo que c_2, c_3 e c_4 ficam escritas como

$$c_3 = -\frac{me^G \dot{c}_1}{2}, \quad (3.34)$$

$$c_2 = m^2 e^{2G} \left(\omega^2 c_1 + \frac{g \dot{c}_1}{2} + \frac{\ddot{c}_1}{2} \right), \quad (3.35)$$

$$c_4 = -me^G \dot{c}_5 - 2me^{2G} F c_1, \quad (3.36)$$

e as equações que c_1 e c_5 devem satisfazer são as seguintes

$$2ge^{2G} \left(\omega^2 c_1 + \frac{g\dot{c}_1}{2} + \frac{\ddot{c}_1}{2} \right) + e^{2G} \frac{d}{dt} \left(\omega^2 c_1 + \frac{g\dot{c}_1}{2} + \frac{\ddot{c}_1}{2} \right) + e^{2G} \omega^2 \dot{c}_1 = 0, \quad (3.37)$$

$$c_5 e^G \omega^2 + \dot{c}_1 e^{2G} F + \frac{d}{dt} (e^G \dot{c}_5 + 2e^{2G} F c_1) = 0. \quad (3.38)$$

Aqui podemos tomar $c_1 = \rho^2$ da mesma forma que fizemos na seção 1.2.2. Isso nos permite uma integração para 3.37

$$e^{2G} \rho^3 (\omega^2 \rho + g\dot{\rho} + \ddot{\rho}) = h^2. \quad (3.39)$$

que é uma equação do tipo *Steen-Ermakov* com h^2 sendo a constante de integração.

A relação 3.39 é a mesma que foi encontrada para o oscilador dissipativo, resolvido através da álgebra dinâmica. Se olharmos o caso em que $G = 0 \rightarrow g = \dot{G} = 0$ e $F = 0$, ou seja, o oscilador harmônico de frequência variável tratado anteriormente, vemos que as equações acima se reduzem ao par de equações de *Steen-Ermakov*, como era esperado. Com as relações para as funções c_i , podemos reescrever o invariante quadrático utilizando somente c_1 e c_5 , que denotaremos por $c_1 = \gamma = \rho^2$ e $c_5 = \sigma$, portanto,

$$I_Q = \gamma p^2 + m^2 e^{2G} \left(\omega^2 \gamma + \frac{1}{2} g \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \ddot{\gamma} \right) q^2 - \frac{m e^G \dot{\gamma}}{2} \{q, p\} + \\ - m (e^G \dot{\sigma} + 2e^{2G} F \gamma) q + \sigma p - \mathcal{F}(\sigma, t). \quad (3.40)$$

Percebemos aqui que se tomarmos $F = g = \sigma = 0$ o invariante quadrático 3.40 e as equações auxiliares 3.37 e 3.38 se tornam as mesmas encontradas no capítulo 2 para o caso do oscilador harmônico simples.

3.1.4 Obtendo o Invariante Quadrático a partir dos Lineares

Vamos agora construir o invariante quadrático fazendo combinações dos lineares. Calculamos, então, os produtos antissimétrico

$$I_A = \frac{1}{2}[I_L, I_L^\dagger] = \frac{1}{2}(I_L I_L^\dagger - I_L^\dagger I_L) = -\frac{im\hbar}{2}e^G(\beta^* \dot{\beta} - \beta \dot{\beta}^*), \quad (3.41)$$

e simétrico

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{1}{2}\{I_L, I_L^\dagger\} = \frac{1}{2}(I_L I_L^\dagger + I_L^\dagger I_L), \\ &= m^2 e^{2G} |\dot{\beta}|^2 q^2 + |\beta|^2 p^2 - \frac{me^G}{2}(\beta^* \dot{\beta} - \beta \dot{\beta}^*)\{q, p\} + [\dot{\beta} \mathcal{F}(\beta^*, t) + \beta^* \mathcal{F}(\beta, t)]me^G q + \\ &\quad - [\beta \mathcal{F}(\beta^*, t) + \beta^* \mathcal{F}(\beta, t)]p + \mathcal{F}(\beta, t)\mathcal{F}(\beta^*, t). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Assim como para o oscilador de frequência variável no capítulo 2, o produto antissimétrico é uma função do tempo e o produto simétrico é um invariante quadrático, que será igual ao encontrado em 3.40 se

$$\gamma = \beta\beta^*, \quad (3.43)$$

$$\omega^2 \gamma + \frac{1}{2}g\dot{\gamma} + \frac{1}{2}\ddot{\gamma} = \dot{\beta}\dot{\beta}^*, \quad (3.44)$$

$$\dot{\gamma} = \beta^* \dot{\beta} - \beta \dot{\beta}^*, \quad (3.45)$$

$$-(\dot{\sigma} + 2e^G F \gamma) = \dot{\beta} \mathcal{F}(\beta^*, t) + \beta^* \mathcal{F}(\beta, t), \quad (3.46)$$

$$\sigma = -(\beta \mathcal{F}(\beta^*, t) + \beta^* \mathcal{F}(\beta, t)), \quad (3.47)$$

$$\mathcal{F}(\sigma, t) = \mathcal{F}(\beta, t)\mathcal{F}(\beta^*, t). \quad (3.48)$$

A condição 3.43 acima tem como consequência as condições 3.44 e 3.45. A relação 3.47 implica em 3.46 e 3.48, bastando para isso utilizar 3.6. Ficamos então com as seguintes condições

$$\gamma = \beta\beta^*, \quad (3.49)$$

$$\sigma = -(\beta\mathcal{F}(\beta^*, t) + \beta^*\mathcal{F}(\beta, t)). \quad (3.50)$$

Para calcular a primeira integral de 3.37 escolhemos $\gamma = c_1 = \rho^2$. Esta escolha parece mais natural agora que sabemos que $\gamma = \beta\beta^*$.

3.1.5 Álgebra do Oscilador Harmônico

O fato do comutador dos invariantes lineares 3.41 nos resultar uma função do tempo nos sugere reescrever os invariantes lineares da seguinte forma

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}I_L, \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}I_L^\dagger, \quad (3.51)$$

com Ω sendo

$$\Omega = -\frac{i\hbar}{2}e^G(\beta^*\dot{\beta} - \dot{\beta}\beta^*) = m\hbar e^G \text{Im} \left\{ \beta^*\dot{\beta} \right\}, \quad (3.52)$$

e $\text{Im} \left\{ \beta^*\dot{\beta} \right\}$ simbolizando a parte imaginária de $\beta^*\dot{\beta}$.

Aqui vale ressaltar que $\Omega \neq 0$, pois o termo entre parênteses é o *Wronskiano* do sistema linear para as soluções β e β^* e estas são linearmente independentes desde o princípio. Outro fato interessante é que $\dot{\Omega} = 0$, para ver isso basta utilizar a equação diferencial 3.11 que β e β^* devem satisfazer. Percebemos portanto que a e a^\dagger continuam sendo invariantes. Além disso, é evidente da expressão 3.52 que Ω é um número real positivo. Escrevemos agora o comutador entre os novos operadores lineares 3.51

$$[a(t), a^\dagger(t)] = \mathbf{1}, \quad (3.53)$$

onde o comutador é calculado a tempos iguais, haja visto que as posições não necessariamente comutam para tempos diferentes, ou seja, não há garantia de que $[q(t_0), q(t)] = [p(t_0), p(t)] = 0$. Um exemplo disso pode ser visto no capítulo 2 quando calculamos as funções de transformação.

Ao resolver o oscilador harmônico simples encontramos a mesma relação de comutação para os operadores de escada. Isto sugere que devemos definir um operador número e tentar construir a conhecida álgebra do oscilador harmônico para o caso aqui tratado. Definimos portanto o operador número como segue

$$\mathbf{n} \equiv a^\dagger a = \frac{1}{2}([a^\dagger, a] + \{a^\dagger, a\}) = \frac{1}{2} \left(-\mathbf{1} + \frac{1}{\Omega} \{I_L, I_L^\dagger\} \right) = \frac{1}{2} \left(-\mathbf{1} + \frac{2}{\Omega} I_Q \right), \quad (3.54)$$

que nos resulta

$$I_Q = \Omega \left(\mathbf{n} + \frac{1}{2} \mathbf{1} \right). \quad (3.55)$$

Como esperado, \mathbf{n} e I_Q se conservam, pois $\dot{\Omega} = 0$. A relação 3.55 nos mostra que o espectro do invariante quadrático e do operador número são os mesmos a menos da fase Ω e do fator $1/2$. Fica evidente então que os autoestados de ambos são iguais, já que Ω se conserva. Podemos agora calcular as relações de comutação entre os novos operadores de escada e o operador número $\mathbf{n} = a^\dagger a$

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1}, \quad [\mathbf{n}, a] = -a, \quad [\mathbf{n}, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (3.56)$$

Percebemos, portanto, que os invariantes lineares na forma 3.51 são operadores de escada. A partir destes construir o invariante quadrático, que é proporcional ao operador número $\mathbf{n} = a^\dagger a$. Montamos assim a álgebra 3.56 que nos permite calcular o espectro e autoestados, relativos a \mathbf{n} , a partir da aplicação sucessiva de a^\dagger a um estado $|0\rangle$, chamado de estado fundamental ou estado de vácuo do sistema.

Vamos agora descobrir qual o efeito de aplicar a a e a^\dagger a um estado $|n\rangle$. Aplicando o operador número \mathbf{n} em $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ temos

$$\mathbf{n}a|n\rangle = ([\mathbf{n}, a] + a\mathbf{n})|n\rangle = (-a + a\mathbf{n})|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{n}a^\dagger|n\rangle = ([\mathbf{n}, a^\dagger] + a^\dagger\mathbf{n})|n\rangle = (a^\dagger + a^\dagger\mathbf{n})|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle. \quad (3.58)$$

As expressões 3.57 e 3.58 nos mostram que $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ são autovetores de \mathbf{n} com autovalores $n-1$ e $n+1$ respectivamente e, portanto, devemos ter

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle, \quad (3.59)$$

$$a^\dagger|n\rangle = c'|n+1\rangle. \quad (3.60)$$

que justifica o nome de operadores de escada para a e a^\dagger .

Outra consequência de 3.56 é que os autovalores n do operador número devem ser inteiros positivos. A positividade é consequência de

$$n = \langle n|\mathbf{n}|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n|c^* c|n\rangle = |c|^2 \geq 0. \quad (3.61)$$

com c^* sendo o complexo conjugado de c .

A relação 3.61 nos permite calcular as constantes c e c' relativas a 3.59 e 3.60 como segue

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n-1|c^* c|n-1\rangle \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{n}, \quad (3.62)$$

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|([a, a^\dagger] + \mathbf{n})|n\rangle = \langle n-1|c^* c'|n-1\rangle \quad \rightarrow \quad c' = \sqrt{n+1}, \quad (3.63)$$

que nos permite escrever as seguintes relações

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (3.64)$$

Os autovalores de \mathbf{n} devem ser inteiros, pois ao aplicar a sucessivamente em um dado estado $|n\rangle$ vai chegar um momento no qual teremos um estado caracterizado por um autoestado cujo autovalor é negativo. Assim, deve haver um estado fundamental, denotado $|0\rangle$, com a propriedade $a|0\rangle = 0$, chamado estado de vácuo do sistema. Podemos agora escrever todos os autoestados do operador número aplicando a^\dagger em $|0\rangle$, ou seja,

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (3.65)$$

Um último passo é calcular a função de onda para o estado fundamental, ou seja, $\Psi_0 = \langle q'|0\rangle$. Para isso fazemos $\langle q'|a|0\rangle = 0$ e escrevemos a em função dos operadores q e p na representação das posições

$$\begin{aligned} \langle q'|a|0\rangle &= \langle q'|\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\left(\beta p - me^G\dot{\beta}q - \mathcal{F}(\beta, t)\right)|0\rangle, \\ &= -i\hbar\langle q'|\beta\frac{d}{dq}|0\rangle - \langle q'|me^G\dot{\beta}q|0\rangle - \langle q'|\mathcal{F}|0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

que nos resulta

$$q' = -\frac{i\hbar\beta}{me^G\dot{\beta}}\frac{1}{\langle q'|0\rangle}\frac{d}{dq'}\langle q'|0\rangle - \frac{\mathcal{F}}{me^G\dot{\beta}} = -q_0^2\frac{d}{dq'}(\ln\langle q'|0\rangle) - \frac{\mathcal{F}}{me^G\dot{\beta}}, \quad (3.67)$$

com $q_0^2 = \frac{i\hbar\beta}{me^G\dot{\beta}}$. Lembrando que $\beta = \beta(t)$ podemos tomar a primeira integral de 3.67

$$\langle q'|0\rangle = A \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q'}{q_0}\right)^2 - \frac{\mathcal{F}}{i\hbar\dot{\beta}}q'\right], \quad (3.68)$$

com A sendo a constante de integração que pode ser calculada tomando a função de onda $\langle q'|0\rangle$ normalizada à unidade. A forma da constante A depende de $\beta(t)$ e por isso deve ser calculada para cada caso particular.

Para calcular os autoestados $\langle q'|n\rangle$ basta utilizar 3.65

$$\langle q'|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle q'|(a^\dagger)^n|0\rangle, \quad (3.69)$$

e utilizar a^\dagger em função de q e p na representação das posições.

Tudo que foi feito até agora vale para qualquer oscilador forçado dissipativo com termos de frequência, dissipação e força variáveis, desde que exista β , tal que β^* também seja uma solução de 3.11. Precisamos desta condição para que os invariantes lineares estejam bem definidos.

3.1.6 Oscilador com Termos de Força, Frequência e Dissipação Constantes

Para finalizar esta seção vamos aplicar os resultados encontrados até aqui para o caso bastante simples do oscilador com termos dissipativo e de frequência constantes e um termo de força $F(t)$ que não será especificado. O Hamiltoniano neste caso é

$$\mathcal{H} = \frac{e^{-G(t)}}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2 e^{G(t)}}{2} q^2 - e^{G(t)} \sin(\omega t) q, \quad (3.70)$$

cujas equações de movimento são

$$\dot{q} = \frac{e^{-G}}{m} p, \quad (3.71)$$

$$\dot{p} = e^G F - m\omega^2 e^G q, \quad (3.72)$$

com $g = \dot{G}$ sendo constante, ou seja, $G = gt + b$, com b constante.

Neste caso, para obtermos os invariantes lineares 3.14 e 3.15, precisamos encontrar β e β^* satisfazendo 3.11, ou seja,

$$\ddot{\beta} + g\dot{\beta} + \omega^2\beta = 0. \quad (3.73)$$

cuja solução é dada por

$$\beta = \exp \left[\left(\frac{-g + \sqrt{g^2 - 4\omega^2}}{2} \right) t \right]. \quad (3.74)$$

Precisamos supor que $g^2 - 4\omega^2 < 0$ para que β^* também seja uma solução da equação 3.73. Portanto β e β^* são dados por

$$\beta = \exp \left[\left(\frac{-g + i\sqrt{4\omega^2 - g^2}}{2} \right) t \right], \quad \beta^* = \exp \left[\left(\frac{-g - i\sqrt{4\omega^2 - g^2}}{2} \right) t \right]. \quad (3.75)$$

Com as relações para β e β^* podemos calcular Ω dado em 3.52 como segue

$$\Omega = -\frac{i\hbar e^G}{2} (\beta^* \dot{\beta} - \dot{\beta} \beta^*) = m\hbar\bar{\omega}e^b, \quad (3.76)$$

com $\bar{g} = g/2$ e $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \bar{g}^2}$.

Finalmente escrevemos os invariantes lineares para o caso aqui tratado

$$a = e^{(-\bar{g} + i\bar{\omega})t} (p - m(-\bar{g} + i\bar{\omega})e^G q) - \mathcal{F}(\beta, t), \quad (3.77)$$

$$a^\dagger = e^{(-\bar{g}-i\bar{\omega})t} (p - m(-\bar{g} - i\bar{\omega})e^G q) - \mathcal{F}(\beta^*, t). \quad (3.78)$$

Os autovalores \bar{I}_Q referentes ao invariante quadrático ficam escritos da seguinte maneira

$$\bar{I}_Q = m\hbar\bar{\omega}e^b \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.79)$$

3.2 Oscilador Harmônico Simples

No caso do oscilador harmônico simples temos ω constante. A Hamiltoniana do sistema é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (3.80)$$

e os invariantes lineares se tornam

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} (\beta p - m\dot{\beta} q), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} (\beta^* p - m\dot{\beta}^* q), \quad (3.81)$$

onde Ω é dado por

$$\Omega = \frac{i\hbar}{2} (\beta\dot{\beta}^* - \beta^*\dot{\beta}), \quad (3.82)$$

com β e β^* satisfazendo às seguintes equações

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \beta = 0, \quad (3.83)$$

$$\ddot{\beta}^* + \omega^2 \beta^* = 0. \quad (3.84)$$

Neste caso, com ω constante, as soluções de β e β^* são, respectivamente, dadas por

$$\beta = e^{i\omega t}, \quad \beta^* = e^{-i\omega t}. \quad (3.85)$$

Temos assim $\Omega = m\hbar\omega$ e os invariantes se tornam

$$a = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{m\hbar\omega}} (p - im\omega q), \quad a^\dagger = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{m\hbar\omega}} (p + im\omega q) \quad (3.86)$$

que podem ser escritos de maneira mais familiar

$$a = e^{i\omega t - \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(q + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = e^{-i\omega t + \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(q - \frac{ip}{m\omega} \right) \quad (3.87)$$

Escrevemos agora o invariante quadrático já encontrado no primeiro capítulo

$$I_Q = \gamma p^2 + m^2 \left(\gamma \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dt} \right) q^2 - \frac{m}{2} \frac{d\gamma}{dt} \{q, p\} \quad (3.88)$$

Mostramos no primeiro capítulo que $\gamma = \beta\beta^*$. No caso aqui apresentado temos $\gamma = 1$ de modo que o invariante quadrático se torna

$$I_Q = p^2 + m^2 \omega^2 q^2 = \frac{1}{2m} \mathcal{H} \quad (3.89)$$

que é igual ao Hamiltoniano a menos do termo $2m$.

Por fim, escrevemos os possíveis autovalores \bar{I}_Q do invariante quadrático 3.88, escrito em função do operador número

$$\bar{I}_Q = \Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) = m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.90)$$

Fica evidente que a diferença entre o espectro de autovalores relativo ao oscilador forçado dissipativo e o oscilador harmônico simples é o termo Ω . Há diferenças também na função de onda em cada um dos casos. Isso ocorre por causa de Ω e do termo \mathcal{F} que aparece nos invariantes lineares para o caso forçado.

3.3 Oscilador Dissipativo

Trataremos aqui do oscilador harmônico quântico com termos de frequência e dissipação constantes. Fisicamente, o oscilador dissipativo quântico é um sistema no qual a massa é variável. Os proponentes deste modelo foram *Caldirola-Kanai* [45, 46] na primeira metade do século passado. A simplicidade do problema nos permite encontrar alguns resultados que nos serão úteis para posterior comparação com os casos até aqui tratados. A Hamiltoniana para o oscilador dissipativo é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{e^{-G(t)} p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 e^{G(t)} q^2}{2}. \quad (3.91)$$

Na Hamiltoniana 3.91 podemos escrever $m(t) = me^G$ que nos permite pensar neste sistema como um oscilador com massa variável.

Os invariantes lineares diferem do caso anterior apenas pelo fator Ω que nesse caso é dado por

$$\Omega = \frac{im\hbar e^G}{2}(\beta\dot{\beta}^* - \dot{\beta}^*\beta). \quad (3.92)$$

Para o oscilador dissipativo β e β^* devem satisfazer à seguinte equação

$$\ddot{\beta} + g\dot{\beta} + \omega^2\beta = 0, \quad (3.93)$$

$$\ddot{\beta}^* + g\dot{\beta}^* + \omega^2\beta^* = 0, \quad (3.94)$$

com $g = \dot{G} \rightarrow G = gt + b$, já que o termo dissipativo é constante. A solução para β neste caso é dada por

$$\beta = \exp \left[\left(\frac{-g + \sqrt{g^2 - 4\omega^2}}{2} \right) t \right]. \quad (3.95)$$

Da mesma forma que antes, precisamos supor que $g^2 - 4\omega^2 < 0$ para que β^* seja a outra solução e tenhamos um invariante linear adjunto bem definido. Este caso é usualmente chamado de subamortecido. Agora podemos escrever β e β^*

$$\beta = \exp [(-\bar{g} + i\bar{\omega})t], \quad \beta^* = \exp [(-\bar{g} - i\bar{\omega})t], \quad (3.96)$$

onde novamente $\bar{g} = g/2$ e $\bar{\omega} = \sqrt{g^2 - \omega^2}$. As relações acima nos permite escrever Ω

$$\Omega = m\hbar\bar{\omega}e^b. \quad (3.97)$$

Podemos agora escrever os invariantes lineares para o caso aqui tratado

$$a = \frac{e^{-\bar{g} + i\bar{\omega}t - \bar{b}}}{\sqrt{m\hbar\bar{\omega}}} \left[p - m(-\bar{g} + i\bar{\omega})e^G q \right], \quad (3.98)$$

$$a^\dagger = \frac{e^{-\bar{g} - i\bar{\omega}t - \bar{b}}}{\sqrt{m\hbar\bar{\omega}}} \left[p - m(-\bar{g} - i\bar{\omega})e^G q \right], \quad (3.99)$$

com $\bar{b} = b/2$.

Os autovalores \bar{I}_Q do invariante quadrático ficam escritos da seguinte maneira

$$\bar{I}_Q = m\hbar\bar{\omega}e^b \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.100)$$

de forma que o espectro é igual ao caso do oscilador forçado dissipativo, já que β e β^* devem satisfazer à mesma equação em ambos os casos. Isso não significa que o caso aqui tratado e o oscilador forçado dissipativo sejam equivalentes, pois, ao calcular a função de onda para o estado fundamental, o termo \mathcal{F} , presente no invariante linear do caso forçado, nos resulta em funções de onda diferentes das encontradas para o caso desta seção.

3.4 Oscilador Harmônico Forçado sem Dissipação

Um último exemplo que podemos explorar é o oscilador forçado sem dissipação, cuja Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} - F(t)q, \quad (3.101)$$

Tomaremos ω como constante e não especificaremos $F(t)$. Os invariantes lineares são dados por

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} (\beta p - m\dot{\beta}q - \mathcal{F}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} (\beta^* p - m\dot{\beta}^* q - \mathcal{F}^*), \quad (3.102)$$

com β e β^* satisfazendo às seguintes equações

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \beta = 0, \quad (3.103)$$

$$\ddot{\beta}^* + \omega^2 \beta^* = 0. \quad (3.104)$$

As soluções para β e β^* são as mesmas que no caso do oscilador harmônico simples feito anteriormente, ou seja,

$$\beta = e^{i\omega t}, \quad \beta^* = e^{-i\omega t}, \quad (3.105)$$

de modo que os invariantes lineares são dados por

$$a = e^{i\omega t - \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}} \left(q + \frac{ip}{m\Omega} \right) - \mathcal{F}(\beta, t), \quad (3.106)$$

$$a^\dagger = e^{-i\omega t + \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}} \left(q - \frac{ip}{m\Omega} \right) - \mathcal{F}(\beta^*, t). \quad (3.107)$$

Finalmente escrevemos o espectro para o oscilador forçado dissipativo, sendo igual ao do oscilador harmônio simples

$$\bar{I}_Q = m\omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.108)$$

Novamente, as diferenças entre o oscilador forçado e o oscilador harmônio simples ficam evidentes nas funções de onda, em decorrência do termo de força \mathcal{F} presente nos inva-

riantes lineares para o caso forçado. Podemos sumarizar nossos resultados na tabela a seguir, que retrata os casos tratados neste capítulo.

Tabela 3.1: Tabela dos Osciladores

	Espectro	Invariante Linear	Invariante Linear adjunto
OFD	$m\hbar\omega e^b (n + \frac{1}{2})$	$\frac{e^{(-\bar{g}+i\omega)t-\bar{b}}}{\sqrt{m\omega\hbar}} (p - m(-\bar{g} + i\omega)e^G q) - \mathcal{F}$	$\frac{e^{(-\bar{g}-i\omega)t-\bar{b}}}{\sqrt{m\omega\hbar}} (p - m(-\bar{g} - i\omega)e^G q) - \mathcal{F}^*$
OHS	$m\omega\hbar (n + \frac{1}{2})$	$e^{i\omega t - \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} (q + \frac{ip}{m\omega})$	$e^{-i\omega t + \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} (q - \frac{ip}{m\omega})$
OD	$m\hbar\omega e^b (n + \frac{1}{2})$	$\frac{e^{-\bar{g}+i\omega t-\bar{b}}}{\sqrt{m\hbar\omega}} [p - m(-\bar{g} + i\omega)e^G q]$	$\frac{e^{-\bar{g}-i\omega t-\bar{b}}}{\sqrt{m\hbar\omega}} [p - m(-\bar{g} - i\omega)e^G q]$
OF	$m\omega\hbar (n + \frac{1}{2})$	$e^{i\omega t - \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} (q + \frac{ip}{m\omega}) - \mathcal{F}$	$e^{-i\omega t + \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} (q - \frac{ip}{m\omega}) - \mathcal{F}^*$

- OFD - Oscilador Forçado Dissipativo
- OHS - Oscilador Harmônico Simples
- OD - Oscilador Dissipativo
- OF - Oscilador Forçado

Considerações Finais

Ao longo desta dissertação estudamos invariantes dinâmicos, que são quantidades conservadas no tempo. Discorreremos sobre alguns dos métodos utilizados no cálculo de invariantes e focamos na abordagem proposta por *Bertin, Pimentel e Ramirez*. Um dos objetivos era colocar em bases mais sólidas a construção dos invariantes. Isto foi alcançado através do formalismo de *Schwinger*, que nos permite calcular os invariantes a partir de um análogo quântico do teorema de *Noether*, decorrência do princípio de *Schwinger*. Além disso, pretendíamos verificar a possibilidade do procedimento adotado em [21] poder ser aplicado para outros casos. Isto se mostrou verdadeiro, pois conseguimos construir os invariantes para o oscilador forçado dissipativo.

Inicialmente, apresentamos os desenvolvimentos de *Steen* acerca do par de equações que chamamos de *Steen-Ermakov*. Depois apresentamos o estudo dos invariantes dinâmicos de maneira geral, partindo dos primeiros trabalhos acerca do assunto [6] e da apresentação de algumas abordagens para o cálculo de invariantes tais como a aplicação direta do teorema de *Noether* na forma proposta por *Lutzky* [14], o método da álgebra dinâmica [18, 19] e, por fim, a formulação alternativa em [21], sendo o desenvolvimento desta última o objetivo principal desta dissertação.

Uma das vantagens da nova abordagem, é que, da mesma forma que o método da álgebra dinâmica, ela serve tanto para o caso clássico quanto para o quântico. Além disso, também pode ser utilizada para o cálculo de invariantes lineares e de ordem maior. A questão de como fazer as combinações das equações de movimento pode ser resolvida utilizando o formalismo de *Schwinger*, que nos mostra como as combinações das equações de movimento decorrem de um teorema de *Noether* quântico, consequência do princípio de *Schwinger*.

Em um segundo momento foi exposta a formulação proposta por *Schwinger* para a mecânica quântica [24], a qual se baseia no conceito de símbolos de medida. A formulação se baseia no princípio de *Schwinger*, o qual nos mostra que a variação da ação deve

ser um termo de fronteira. A abordagem de *Schwinger* tem algumas vantagens, tais como a possibilidade de se obter as relações de comutação, a equação de *Schrödinger*, a de *Heisenberg* e também as equações de *Hamilton-Jacobi* quânticas, a partir de variações apropriadas do operador ação quântico. As equações de *Hamilton-Jacobi* nos permite calcular a função de transformação do sistema, bastando para isso utilizar a forma bem ordenada de *Dirac* do operador de ação quântico. Este cálculo foi realizado aqui para o caso do oscilador harmônico simples e forçado.

Além disso, foi possível utilizar o formalismo de *Schwinger* para calcular os invariantes lineares, que acabam por se tornar os operadores de escada para os casos aqui tratados, e quadráticos a partir de um teorema de *Noether* quântico. Este último é o caso particular da variação da ação $\delta S = 0$, que nos resulta na equação 2.150, onde o lado direito é o invariante e o lado esquerdo são as equações de *Heisenberg* do sistema que resulta nas condições auxiliares para existência do invariante. A maneira com que se realizava combinações das equações de movimento, citada anteriormente, fica então justificada pelo teorema de *Noether* quântico decorrente do princípio de *Schwinger*.

A possibilidade de se escrever um teorema de *Noether* quântico e a construção dos invariantes dinâmicos a partir dele nos mostra que os invariantes aqui encontrados são invariantes de *Noether*. Isto mostra a importância da formulação de *Schwinger* que nos permite obter esses invariantes a partir do princípio de *Schwinger*. Esta formulação nos permite tratar dos problemas dependentes do tempo tratados aqui de maneira mais simples, calculando o invariante quadrático utilizando 2.150. Este, por sua vez, se torna a quantidade fundamental do problema, pois é a partir dos seus autovetores que será construída a solução geral para a equação de *Schrödinger*, da mesma forma que foi feito por *Lewis e Riesenfeld* [5].

Por fim, utilizamos os invariantes lineares, para construção dos operadores de escada e cálculo do espectro. Para isso, foi necessário fazer uma renormalização destes invariantes de modo que as relações de comutação correspondessem às da álgebra do oscilador harmônico simples. Em particular, isto foi feito para os casos do oscilador forçado dissipativo, oscilador harmônico simples, oscilador dissipativo e oscilador forçado sem dissipação.

Como perspectiva futura há o estudo da relação entre a nova abordagem [21] e os outros métodos para o cálculo de invariantes dinâmicos, tal como a álgebra dinâmica, e estabelecer a equivalência de um ponto de vista mais fundamental entre as abordagens.

Há também a motivação matemática de partir de Hamiltonianos cada vez mais gerais para estabelecer quais são possíveis de se construir invariantes lineares e sob quais condições. A partir destes normalizar para obter os operadores de escada e construir o invariante quadrático para formar a álgebra do oscilador harmônico, que nos permite resolver o problema de autovalores de maneira mais simples, principalmente para o caso em que a Hamiltoniana é explicitamente dependente do tempo. Em outras palavras, seria estabelecer um esquema de classificação para quais Hamiltonianos é possível encontrar o espectro utilizando a álgebra do oscilador harmônico. Esta etapa já se encontra em andamento.

Outra possibilidade é a procura por soluções particulares para β e β^* nos casos em que os termos de frequência, dissipação e força dependem do tempo. Isto é muito útil nas aplicações em que temos termos específicos para frequência, dissipação e força.

Verificar se é possível construir invariantes lineares e quadráticos para potenciais com termos do tipo $1/r$ no Hamiltoniano é outra possibilidade. Sistemas físicos em que isso ocorre são o oscilador harmônico isotrópico e o átomo de hidrogênio.

Um outro ponto bastante interessante é utilizar os invariantes quadráticos (ou de ordem maior) para estabelecer novas álgebras relacionadas ao problema e, por consequência, o grupo de simetria. Um possível candidato para isso é o átomo de hidrogênio, que possui o conhecido grupo de simetria $SO(4)$. Conseguir encontrar os invariantes a partir do procedimento aqui adotado e construir a álgebra $so(4)$ do átomo de hidrogênio seria um grande avanço.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Gelfand and S. Fomin, *Calculus of Variations*. Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2012.
- [2] M. C. Bertin, *Notas de aula em Mecânica Clássica*.
- [3] W. Paul, “Electromagnetic traps for charged and neutral particles,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 62, pp. 531–540, Jul 1990.
- [4] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, “Quantum dynamics of single trapped ions,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 75, pp. 281–324, Mar 2003.
- [5] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, “An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 10, no. 8, pp. 1458–1473, 1969.
- [6] V. P. Ermakov, “Second-order differential equations: Conditions of complete integrability,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 2, no. 2, pp. 123–145, 2008.
- [7] J. R. Ray and J. L. Reid, “More exact invariants for the time-dependent harmonic oscillator,” *Physics Letters A*, vol. 71, no. 4, pp. 317 – 318, 1979.
- [8] J. R. Ray and J. L. Reid, “Exact time-dependent invariants for n -dimensional systems,” *Physics Letters A*, vol. 74, no. 1, pp. 23 – 25, 1979.
- [9] J. L. Reid and J. R. Ray, “Ermakov systems, nonlinear superposition, and solutions of nonlinear equations of motion,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 21, no. 7, pp. 1583–1587, 1980.
- [10] J. R. Ray, “Nonlinear superposition law for generalized ermakov systems,” *Physics Letters A*, vol. 78, no. 1, pp. 4 – 6, 1980.

- [11] J. L. Reid and J. R. Ray, “Nonlinear superposition, higher-order nonlinear equations, and classical linear invariants,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 23, no. 4, pp. 503–509, 1982.
- [12] J. R. Ray and J. L. Reid, “Ermakov systems, velocity dependent potentials, and nonlinear superposition,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 22, no. 1, pp. 91–95, 1981.
- [13] J. R. Ray and J. L. Reid, “Invariants for forced time-dependent oscillators and generalizations,” *Phys. Rev. A*, vol. 26, pp. 1042–1047, Aug 1982.
- [14] M. Lutzky, “Symmetry groups and conserved quantities for the harmonic oscillator,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 11, no. 2, p. 249, 1978.
- [15] J. R. Ray and J. L. Reid, “Noether’s theorem, time-dependent invariants and nonlinear equations of motion,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 20, no. 10, pp. 2054–2057, 1979.
- [16] J. R. Ray, “Noether’s theorem and exact invariants for time-dependent systems,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 13, no. 6, p. 1969, 1980.
- [17] W. Sarlet and L. Bahar, “A direct construction of first integrals for certain non-linear dynamical systems,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 15, no. 2, pp. 133 – 146, 1980.
- [18] H. Korsch, “Dynamical invariants and time-dependent harmonic systems,” *Physics Letters A*, vol. 74, no. 5, pp. 294 – 296, 1979.
- [19] R. S. Kaushal and H. J. Korsch, “Dynamical noether invariants for time-dependent nonlinear systems,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 22, no. 9, pp. 1904–1908, 1981.
- [20] P. G. L. Leach, “On the theory of time-dependent linear canonical transformations as applied to hamiltonians of the harmonic oscillator type,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 18, no. 8, pp. 1608–1611, 1977.
- [21] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, and J. A. Ramirez, “Construction of time-dependent dynamical invariants: A new approach,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 53, no. 4, p. 042104, 2012.

- [22] C. Melo, B.M.Pimentel, and J.A.Ramirez, “Princípio de ação quântica de schwinger,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, pp. 1 – 16, 12 2013.
- [23] J. Schwinger, *Quantum Mechanics: Symbolism of Atomic Measurements*. Springer, 2003.
- [24] J. Schwinger, *Quantum kinematics and dynamics*. Frontiers in physics, W. A. Benjamin, 1970.
- [25] J. A. R. Bedoya, “Formalismo de schwinger para trajetórias temporalmente fechadas,” Master’s thesis, Instituto de Física Teórica - UNESP, 2009.
- [26] C. A. M. de Melo, “Princípio variacional de schwinger e teoria quântica - aplicações à mecânica quântica quaterniônica e ao estudo de sistemas singulares,” Master’s thesis, Instituto de Física Teórica - UNESP, 2002.
- [27] A. del Carmen Sampson Sandia, “Princípio variacional de schwinger em espaços curvos,” Master’s thesis, Instituto de Física Teórica - UNESP, 2009.
- [28] C. Melo, B.M.Pimentel, and J.A.Ramirez, “Teoria algébrica de processos da medida em sistemas quânticos,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, pp. 1 – 13, 09 2011.
- [29] P. Weiss, “On the quantization of a theory arising from a variational principle for multiple integrals with application to born’s electrodynamics,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 156, no. 887, pp. 192–220, 1936.
- [30] P. Weiss, “On the hamilton-jacobi theory and quantization of a dynamical continuum,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 169, no. 936, pp. 102–119, 1938.
- [31] P. Weiss, “On the hamilton-jacobi theory and quantization of generalized electrodynamics,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 169, no. 936, pp. 119–133, 1938.
- [32] E. Torrontegui, S. Ibáñez, X. Chen, A. Ruschhaupt, D. Guéry-Odelin, and J. G. Muga, “Fast atomic transport without vibrational heating,” *Phys. Rev. A*, vol. 83, p. 013415, Jan 2011.
- [33] M. Sarandy, E. Duzzioni, and R. Serra, “Quantum computation in continuous time using dynamic invariants,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 38, pp. 3343 – 3347, 2011.

- [34] R. Redheffer and I. Redheffer, “Steen’s 1874 paper: historical survey and translation,” *aequationes mathematicae*, vol. 61, pp. 131–150, Feb 2001.
- [35] W. E. Milne, “The numerical determination of characteristic numbers,” *Phys. Rev.*, vol. 35, pp. 863–867, Apr 1930.
- [36] E. Pinney, “The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 1, no. 5, pp. 681–681, 1950.
- [37] C. Eliezer and A. Gray, “A note on the time-dependent harmonic oscillator,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 30, no. 3, pp. 463–468, 1976.
- [38] M. Lutzky, “Noether’s theorem and the time-dependent harmonic oscillator,” vol. 68, pp. 3–4, 09 1978.
- [39] J. Sakurai and J. Napolitano, *Mecânica quântica moderna*. Bookman, 2013.
- [40] H. R. Lewis, “Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, no. 11, pp. 1976–1986, 1968.
- [41] M. Kruskal, “Asymptotic theory of hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic,” vol. 3, pp. 806–828, 07 1962.
- [42] J. R. Ray and J. L. Reid, “Ermakov systems, noether’s theorem and the sarlet-bahar method,” *Letters in Mathematical Physics*, vol. 4, pp. 235–240, May 1980.
- [43] J. A. R. Bedoya, *O Princípio de Ação Quântica de Schwinger: Aspectos do tratamento de sistemas dependentes do tempo e interagentes*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica - UNESP, 2013.
- [44] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons*. Oxford University Press, 2006.
- [45] P. Caldirola, “Quantum analysis of modified caldirola-kanai oscillator model for electromagnetic fields in time-varying,” *IL Nuovo Cimento*, vol. 18, pp. 393–400, 1941.
- [46] E. Kanai, “On the Quantization of the Dissipative Systems,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 3, pp. 440–442, 12 1948.