UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Um Estudo Sobre o Princípio de Weiss em Relatividade Geral

Antonio Carlos Gonçalves da Silva

Salvador
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Um Estudo Sobre o Princípio de Weiss em Relatividade Geral

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Mario Cezar Ferreira Gomes Bertin
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Enrique Valcàrcel Flores

Salvador
2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Carlos Gonçalves da Silva, Antonio
Um Estudo Sobre o Princípio de Weiss em Relatividade Geral / Antonio Carlos Gonçalves da Silva. -- Salvador, 2019.
100 f.

Orientador: Mario Cezar Ferreira Gomes Bertin.
Coorientador: Carlos Enrique Valcárcel Flores.
Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) -- Universidade Federal da Bahia, UFBA, 2019.

1. Formalismo Covariante para Campos. 2. Ação de Einstein-Hilbert. 3. Formalismo de Palatini. 4. Gravidade Topologicamente Massiva. 5. Termo de Fronteira de Gibbons-Hawking-York. I. Cezar Ferreira Gomes Bertin, Mario. II. Enrique Valcárcel Flores, Carlos. III. Título.

Dedicatória

À minha mãe,

Carlinda Oliveira (In memoriam).

Agradecimentos

O trabalho de pesquisa para o Mestrado em Física foi por vezes tedioso e solitário. Apesar disso, sinto-me contente em ter muitos a quem agradecer pela realização desse sonho.

Agradeço a Deus, por iluminar minha mente e minha vida;

Agradeço ao professor Mário Bertin por seu trabalho e orientação bem como pela indicação ao uso do princípio variacional de Weiss. Também ao professor Carlos Valcàrcel por sua presença e colaboração nos últimos passos de desenvolvimento desta dissertação;

Agradeço a minha querida grande amiga Cíntia Abreu, por seu incrível exemplo de bondade, fazendo a diferença em minha vida. Com seu intermédio conheci a pessoa de Leandro Lyra, que também tem minha gratidão;

Agradeço a minha querida grande amiga Eliziane Silva, por ser a maior/melhor colega em minha vida acadêmica e, represento nela minha família mineira;

Agradeço ao querido grande amigo professor Pedro Guaranho, por seu pleno exemplo profissional e por acreditar em meu potencial;

Agradeço a minha querida sobrinha Hitana Gonçalves, por seu carinho, amizade e parceria sendo a pessoa mais importante e presente em minha vida nos últimos anos;

Agradeço aos meus irmãos paternos Elicivaldo, Vilma e principalmente ao meu irmão xará Tuni, pelo incentivo aos estudos com suas contribuições à minha graduação em Física;

Agradeço a minha família materna que represento nos primos Anatália, Cristina, Dorizinho, Lucélia e Marcelo, pelos momentos de descontração e pelos grandes jogos de dominó, bem como aos amigos Edivando e Henrique pelas partidas de poker;

Agradeço aos professores Fernando Otávio e Pedro Guaranho pelas cartas de recomendação ao mestrado, e pelas conversas enriquecedoras sobre Física;

À Cofis no Departamento de Ciências Naturais da UFSJ e ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da UFBA;

À agência de fomento Capes, pelo suporte financeiro.

A todos vocês, meu muito obrigado!

Resumo

Esta dissertação aborda a Teoria da Relatividade Geral como teoria de campo, sob o ponto de vista do Princípio Variacional de Weiss. Ele é apresentado e utilizado destacando-se o fato de que ele define as equações de campo e os termos de fronteira do problema variacional. A partir dele, examinaremos as informações codificadas nos termos de fronteira, como as quantidades as conservadas por simetrias. Nosso objetivo é analisar a Relatividade Geral no formalismo em termos da métrica e de Palatini sob a luz deste princípio variacional, aplicando o mesmo ao caso da Gravidade Topologicamente Massiva em três dimensões.

Palavras Chave: Princípio Variacional de Weiss, Ação de Einstein-Hilbert, Formalismo de Palatini

Abstract

This dissertation addresses the General Relativity Theory as field theory, from the point of view of the Weiss Variational Principle. It is presented and used highlighting the fact that it defines the field equations and the boundary terms of the variational problem. From it, we will examine information encoded in terms of boundary, such as the quantities conserved by symmetries. Our objective is to analyze the General Relativity in the formalism in terms of the metric and of Palatini in the light of this variational principle, applying the same to the case of the Topologically Massive Gravity in three dimensions.

Sumário

Introdução

Em 1905 [1], Albert Einstein propôs sua teoria da Relatividade Especial. A teoria reconciliou a física dos corpos em movimento desenvolvida por Galileu Galilei e Sir Isaac Newton com as leis da radiação eletromagnética. A Relatividade Especial postula que a velocidade da luz é sempre a mesma, independentemente do movimento da pessoa que a mede. O espaço e o tempo estão interligados em um grau nunca antes imaginado.

A partir de então, Einstein começou a tentar ampliar a Relatividade Especial para incluir a gravidade. Seu primeiro avanço veio quando estava trabalhando em um escritório de patentes em Berna, na Suíça. "De repente, um pensamento me atingiu", lembrou. "Se um homem cai livremente, ele não sentiria seu peso ... Esse simples experimento mental... me levou à teoria da gravidade"[2]. Ele percebeu que existe uma relação profunda entre os sistemas afetados pela gravidade e os que estão acelerando.

A teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, publicada em novembro de 1915[3], é uma das maiores conquistas da física do século XX. Explica que o que percebemos como a força da gravidade, na verdade, surge da curvatura do espaço-tempo. Ela propõe que objetos como o Sol e a Terra mudam a geometria do espaço. Na presença de matéria e energia, o espaço pode evoluir, esticar e deformar, e fazer com que os corpos se movimentem em curvas. Assim, explica que embora a Terra pareça estar sendo puxada para o Sol por uma força de gravidade, não existe tal força. É simplesmente a geometria do espaço-tempo em torno do Sol dizendo à Terra como se mover. O próximo grande passo de Einstein veio quando ele aprofundou-se à matemática da geometria desenvolvida pelos matemáticos alemães do século XIX, Carl Friedrich Gauss[4] e Bernhard Riemann[5]. Aplicando a então denominada Geometria Riemanniana em seu trabalho, Einstein pode mostrar as equações que relacionam a geometria do espaço-tempo com a quantidade de energia que ele contém. Essas equações são agora conhecidas como as equações de campo de Einstein.

A teoria tem conseqüências de longo alcance. Não só explica o movimento dos planetas, mas pode também descrever a história do universo, a física dos buracos negros e a trajetória curva da luz de estrelas e galáxias distantes.

Vários dos fenômenos previstos pela deformação do espaço-tempo foram confirmados, como por exemplo as lentes gravitacionais. Ocorrem quando a luz ao redor de um objeto massivo, como um buraco negro, é curvada, fazendo com que ele atue como uma lente para as coisas que estão por trás dele. Os astrônomos usam rotineiramente este método para estudar estrelas e galáxias atrás de objetos massivos. Outro exemplo é o Desvio para o Vermelho (Red Shift), que acontece quando a radiação eletromagnética de um objeto é esticada ligeiramente dentro de um campo gravitacional. Pense nas ondas sonoras que emanam de uma sirene em um veículo de emergência. À medida que o veículo se aproxima de um observador, as ondas sonoras são comprimidas, mas à medida que se afasta, elas são esticadas ou deslocadas. Conhecido como o efeito Doppler, o mesmo fenômeno ocorre com ondas de luz em todas as freqüências.

O matemático alemão David Hilbert também chegou às equações de campo da Teoria da Relatividade Geral, desta vez empregando um princípio variacional[6]. Ele começou a trabalhar na teoria de forma independente a Einstein, postulando uma integral fundamental na qual exigia que a Lagrangeana fosse invariante sob difeomorfismos e assumindo também que se dividia em duas partes: uma parte gravitacional dada pelo escalar de curvatura do espaço-tempo e uma parte de matéria que ele deixou não especificada. Assim, Hilbert conseguiu apresentar as equações de campo da teoria ampliando o tratamento matemático da mesma.

Seguindo Hilbert, o matemático italiano Attilio Palatini também contribuiu com a formulação Lagrangeana da relatividade geral[7]. Em seu formalismo, com uma abordagem equivalente a de Hilbert, assumiu que a Lagrangeana é uma densidade escalar dos invariantes da curvatura construída tanto da métrica g como da conexão Γ, onde ambos devam ser tratados como campos independentes. Isto contrasta fortemente com as abordagens campo métrico puro onde essas quantidades não são independentes, como foram tratadas tanto por Einstein quanto por Hilbert em suas deduções originais das equações de campo.

É de grande importancia no estudo de Lagrangeanas o uso de um princípio variacional adequado. A maioria dos textos se utiliza do Princípio de Hamilton [8]. No entanto, o princípio limita a variação da ação ao interior da região de integração do espaço-tempo, deixando de lado as informações sobre o que está ocorrendo na fronteira da região. Como é de nosso interesse abordar essas informações, um princípio variacional adequado é o Princípio Variacional de Weiss[8]. Este foi inicialmente proposto por Weiss para uso em Teoria Clássica de Campos, e também foi introduzido por Schwinger na mecânica quântica[9].

O princípio de Hamilton não é capaz de descrever teorias cujo volume tem fronteira variável, nem teorias cuja fronteira, embora fixa, possui uma topologia não trivial. Os termos de fronteira são importantes ao estudo de muitas teorias físicas, pois só é possível abordar quantidades relevantes, como o tensor de energia-momento, através de uma análise do que ocorre na fronteira. Além disso, algumas teorias trazem uma equivalência com que ocorre na borda da região de integração da ação.

Modelos de gravitação em um espaço-tempo de três dimensões, tem tido grande relevância nesse aspecto. Por não possuírem graus de liberdade de propagação, isso faz deles uma poderosa ferramenta para abordar alguns tipos de problemas. Um desses modelos é o chamado Gravitação Topologicamente Massiva, proposto por Deser, Jackiw e Templeton [10] em 1982. Este modelo modifica as equações de campo da relatividade geral adicionando um novo termo. Seus estudos começaram com a possibilidade de construir teorias invariantes de Gauge que pudessem incluir a gravidade consistentemente. Destacando-se a ação de Chern-Simons que descreve a dinâmica de fronteira de teorias de Gauge mais simples: teorias topológicas. Essas intrigantes teorias de campo existem em espaços-tempos dimensionais e não possuem graus de liberdade de propagação locais. Suas ações são estacionárias sob variações contínuas arbitrárias do campo, desde que seus valores sejam mantidos fixos na fronteira.

As teorias de campos em dimensões inferiores são interessantes majoritariamente porque são sistemas mais simples de se definir e de se encontrar soluções. Por exemplo, a Relatividade Geral em duas dimensões é uma teoria trivial, pois todo espaço-tempo bidimensional é conformalmente plano. Para se ter uma teoria gravitacional relevante em duas dimensões, introduziu-se teorias de dílatons, que são exatamente solúveis e exatamente quantizáveis, portanto, uma teoria quântica gravitacional em duas dimensões é muito simples de se definir.

Ao analisarem as simetrias da Relatividade Geral em 3D em um espaço Anti de Sitter (AdS) [11] descobriram que as simetrias que preservam as condições de fronteira (a fronteira AdS é um cilindro bidimensional) levam a quantidades conservadas que definem uma álgebra especial, denominada Álgebra de Virasoro[12]. A álgebra de Virasoro é a álgebra que define uma teoria quântica de campos conforme em duas dimensões (CFT - Conformal Field Theory). CFTs em duas dimensões são exatamente solúveis e exatamente quantizáveis. Portanto, teremos uma teoria gravitacional AdS em 3D que não tem graus de liberdade propagantes no volume, mas que está relacionada a uma teoria conforme em 2D na fronteira, que tem graus de liberdade propagantes e exatamente determinados. Portanto, quantizar a CFT em 2D deve ser equivalente a quantizar a Relatividade Geral em um espaço AdS em 3D. Isso é chamado Correspondência AdS/CFT[13].

A dissertação se divide em quatro capitulos. O primeiro capítulo é uma revisão da teoria clássica de campos sob o ponto de vista do princípio variacional de Weiss e do primeiro teorema de Noether e serve ao propósito de apresentar o caminho matemático e as ferramentas que utilizaremos durante todo o texto.

No segundo capítulo, apresentamos a forma mais geral do formalismo covariante da variação da ação de Einstein-Hilbert. Inicialmente introduziremos o espaço-tempo, o tensor métrico, a conexão afim e o tensor de Riemman. Em seguida, deduziremos as equações de campo de Einstein e os termos de fronteira da ação a partir do Princípio Variacional de Weiss.

No terceiro capítulo, trataremos de resolver a ação de Einstein-Hilbert sob o formalismo de Palatini, tomando a independência entre métrica e conexão. Mostraremos como no caso particular em que o espaço-tempo tem torção nula, as equações de campo reproduzem as equações de Einstein.

No quarto e último capítulo, introduziremos sinteticamente teorias gravitacionais em três dimensões, resolveremos o termo topológico de Chern-Simons da Gravitação Topologicamnete Massiva, observando como eles modificam as equações de campo. Este é um passo muito importante para se compreender aspectos da correspondência AdS/CFT. Mostraremos como os termos de fronteira que calculamos para a ação de Einstein-Hilbert coincidem com o termo de Gibbons-Hawking-York.

Por fim, apresentaremos nossas considerações finais ao trabalho que contém um apanhado geral de nossos principais resultados e aponta para possíveis direções de pesquisas futuras.

As Referências Bibliográficas aparecem ao final de cada capítulo, com o intuito de tornar a leitura mais dinâmica.

Referências Bibliográficas

[1] Williams, W.S.C., Introducing Special Relativity, Taylor & Francis, 2002.

[2] Topper, D. R., How Einstein Created Relativity out of Physics and Astronomy, Springer, 2013

[3] Renn, J., Schemmel, M., The Genesis of General Relativity. Volume 4: Gravitation in the Twilight of Classical Physics. The Promise of Mathematics, Springer, 2007.

[4] M. B. W. Tent, The Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss, Taylor & Francis, 2006.

[5] Laugwitz, D., Bernhard Riemann 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics, Birkhäuser Basel, 1999.

[6] Corry, L., David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898–1918): From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik, Springer, 2004.

[7] Earman, J., Janssen, M., Norton, J. D., The Attraction of Gravitation: New Studies in the History of General Relativity, Birkhäuser, 1993.

[8] Sudarshan, E.C.G., Mukunda, N. Classical dynamics: a modern perspective, John Wiley & Sons Inc,1974

[9] Esposito, G., Marmo, G., Sudarshan, G., From classical to quantum mechanics: formalism, foundations, applications, Cambridge University Press, 2004

[10] Deser, S. (Brandeis U.), Jackiw, R., Templeton, S. (MIT, LNS), Topologically Massive Gauge Theories, Annals Phys. 140, 198

[11] Gibbons, G.W., Anti-de-Sitter spacetime and its uses, 2011, https://arxiv.org/abs/1110.1206.

[12] Williams, B. R., The Virasoro vertex algebra and factorization algebras on Riemann surfaces, 2017, https://arxiv.org/abs/1603.02349.

[13] Hubeny, V. E., The AdS/CFT Correspondence, 2015, https://arxiv.org/abs/1501.00007.

Capítulo 1

Formalismo Lagrangeano para Campos de Ordem Superior

Introdução

Um campo físico pode ser considerado como a atribuição de uma quantidade física em cada ponto do espaço e do tempo. Por exemplo, em uma previsão do tempo, a velocidade do vento durante um dia em um país é descrita pela atribuição de um vetor a cada ponto no espaço. Cada vetor representa a direção do movimento do ar naquele ponto, então o conjunto de todos os vetores de vento em uma área em um determinado ponto no tempo constitui um campo vetorial. À medida que o dia avança, as direções em que os vetores apontam mudam conforme as direções do "vento" mudam. Assim temos uma teoria de campos explicando o comportamento do vento numa região do espaço com o passar do tempo.

As primeiras teorias de campo, a saber, a gravitação newtoniana e as equações de campos eletromagnéticos de Maxwell foram desenvolvidas na física clássica antes do advento da teoria da relatividade em 1905 e tiveram que ser revisadas para serem consistentes com essa teoria. Consequentemente, as teorias clássicas de campo são geralmente categorizadas como não-relativísticas e relativísticas e ambas são geralmente expressas usando a matemática do cálculo tensorial.

A teoria clássica dos campos não é mais uma teoria da eletrodinâmica e da gravitação como dois tópicos separados que podem ser formal e tecnicamente reunidos em um texto. Em vez disso, os campos clássicos são agora apresentados com uma base física e matemática comum. No presente texto pretendemos realizar essa tarefa apresentando o formalismo Lagrangeano [1].

Nosso tratamento, é portanto, uma teoria de campos, onde é uma teoria física que prevê como um ou mais campos físicos interagem com a matéria por meio de equações de campo. Este tratamento é comumente usado para descrever as teorias físicas que descrevem o eletromagnetismo e a gravitação, duas das forças fundamentais da natureza. Teorias que incorporam a mecânica quântica são chamadas de teorias de campo quântico, mas não as consideramos aqui.

Nas últimas décadas, as teoria de Gauge tornaram-se de grande importância na física teórica. A razão para isso é a percepção, tanto por físicos quanto por matemáticos, de que os campos de gauge são a ferramenta matemática correta para descrever a física de partículas. Como consequência, a teoria da relatividade geral tornou-se um centro de atenção do ponto de vista dos campos de Gauge.

No presente capítulo fundamentaremos o formalismo e os princípios matemáticos que utilizaremos ao longo dos próximos capítulos.

1.1 Sistemas físicos e princípio variacional

Uma configuração de campos pode ser entendida como um conjunto que encerra n funções $\varphi^i(x)$ de classe C^k e suas derivadas, com i variando de 1 a n, que tenham por domínio um volume Ω contido num espaço de configurações formado pelo produto $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{R}^4$. Aqui temos que x é um ponto no espaço-tempo quadridimensional e as funções φ^i são coodenadas de uma variedade diferenciável $\mathbb{Q}^n$ de dimensão n. Ao usarmos um sistema de coordenadas x^μ, diremos que as funções de campos bosônicos são:

$$\varphi^i(x) : \Omega \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}.$$

Para suas derivadas na x^μ ésima coordenada do sistema, usaremos a notação

$$\varphi^i_\mu = \frac{d\varphi^i}{dx^\mu}, \tag{1.1}$$

onde μ varia de 0 a 3 é o índice da variável no sistema de coordenadas no qual estamos derivando.

Construiremos uma configuração de campos genérica Φ, no espaço-tempo quadridimensional de Minkowski, parametrizado pelo sistema de coordenadas x^μ. A coordenada x^0 é a coordenada temporal dada por

$$x^0 = ct,$$

e possui dimensão espacial sendo o tempo vezes a velocidade da luz, que aqui possui valor $c = 2,99792458 \cdot 10^8\ m/s$. As outras coordenadas $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ parametrizam as direções espaciais. Assim essa configuração $\Phi(x)$ pode assumir o valor de um campo escalar $\varphi(x)$, um vetor $A^{\mu}(x)$, ou um tensor de um campo gravitacional $g_{\mu\nu}(x)$, ou de algum outro objeto matemático. De um modo geral, a configuração é formada por tal campo e por suas derivadas

$$\Phi(x) : \left\{ \varphi^i = \varphi^i(x), \partial_\mu \varphi^i = \varphi^i_\mu(x), ... \right\}. \tag{1.2}$$

Sistemas assim são chamados de sistema de ordem superior.

Assumiremos a existência de uma densidade Lagrangeana L, que seja uma função dependente das componentes dos campos e de suas derivadas até a segunda ordem, em cada ponto espaço-tempo, sendo então uma função também local:

$$L = L\left(x^\mu, \varphi^i(x), \varphi^i_\mu(x), \varphi^i_{\mu\nu}(x)\right). \tag{1.3}$$

Partindo dessa densidade Lagrangeana, definiremos também uma integral fundamental $A(\Phi)$, para uma configuração de campos dada na equação (1.2), também chamada de Ação, a saber:

$$A(\Phi) = \int_\Omega d\omega L\left(x^\mu, \varphi^i(x), \varphi^i_\mu(x), \varphi^i_{\mu\nu}(x)\right), \tag{1.4}$$

em que o elemento de volume da integral é

$$d\omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = d^4x. \tag{1.5}$$

Na física a ação é um atributo da dinâmica de um sistema físico a partir da qual as equações de movimento do sistema podem ser derivadas. É um funcional matemático que toma a trajetória, também chamada de caminho ou história, do sistema como seu argumento e tem como resultado um número real. Geralmente, a ação usa valores diferentes para caminhos diferentes, e pode depender de fontes externas.

Modelos físicos quase sempre descrevem sistemas que são isolados de influências externas. Influências externas são modeladas pela introdução de fontes. Estas são perturbações para um sistema fechado de variáveis dinâmicas cujo valor é especificado por algumas condições de contorno. Fontes são às vezes chamadas de forças generalizadas. Normalmente, supõe-se que uma fonte é uma espécie de "objeto imóvel" ou um tipo de banho infinito de energia cujo valor não pode ser alterado pelo sistema em consideração. Fontes são usadas para examinar o que acontece sob condições controladas de fronteira. Uma vez que fontes são introduzidas, as leis de conservação podem ser perturbadas, já que uma fonte efetivamente abre um sistema para um agente externo.

O princípio variacional é central para a teoria de campo covariante. Ele exibe as simetrias, as equações de campo e as condições de continuidade em pé de igualdade. Isto pode ser usado como ponto de partida para todas as análises teóricas de campo. Nos livros, o método usado é chamado de princípio de Hamilton, ou o princípio da mínima ação. Aqui optaremos durante todo o texto em usar outro princípio: o princípio variacional de Weiss, que mostraremos adiante no texto.

1.2 A variação no campo como operador diferencial

Para extrair informações da ação (1.4), faremos A variar em relação a suas variáveis dinâmicas, ou seja, examina-se como a integral muda quando as variáveis do problema são alteradas.

Causaremos uma variação nos campos, por um arraste suave dos mesmos sobre os "tecidos" do espaço-tempo. Essa variação pode ser vista como:

$$\varphi^i\left(x\right) \rightarrow \bar{\varphi}^i\left(y\right).$$

Isso causa uma variação em A através de uma variação nas coordenadas x^μ e nos campos φ. Essa mudança vem de x^μ para y^μ, onde y^μ são coordenadas de um novo ponto y nas vizinhanças de x, no qual podemos tomar uma nova configuração de campos dada por:

$$\overline{\Phi}(y) : \left\{\bar{\varphi}^i = \bar{\varphi}^i\left(y^\mu\right), \bar{\varphi}^i_\mu = \bar{\varphi}^i_\mu\left(y^\mu\right), \ldots\right\}.$$

Podemos escolher uma configuração de campos que torne $\overline{\Phi}(y) = \Phi(x)$, sempre que $y^\mu = x^\mu$. Com isso, definiremos as variações nas coordenadas através das transformações:

$$\delta x^\mu \quad = \quad y^\mu - x^\mu. \tag{1.6}$$

Essas são transformações ativas no ponto de aplicação no espaço-tempo, levando o ponto $x = x^\mu$ a um outro ponto $y = y^\mu$, tornando a variação δx^μ uma função do espaço-tempo. Por outro lado, as variações totais nos campos definiremos através de

$$\delta\varphi^{i} = \bar{\varphi}^{i}(y) - \varphi^{i}(x). \tag{1.7}$$

estas são transformações ativas que levam o campo $\varphi^{i}(x)$ ao campo $\bar{\varphi}^{i}(y)$, considerando uma transformação total no campo e no espaço-tempo.

Expandiremos os campos $\bar{\varphi}^{i}(y)$ em série de potências até a primeira ordem em δx^{μ}, em torno de $\delta x = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^{i}(y) &= \bar{\varphi}^{i}(x + \delta x), \\ &= \bar{\varphi}^{i}(x) + \frac{d\bar{\varphi}^{i}}{dx^{\mu}}\Big|_{\delta x=0} \delta x^{\mu}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Entretanto, como assumimos que em $\overline{\Phi}(y) = \Phi(x)$, sempre que $y^{\mu} = x^{\mu}$, implica-se por esta razão que $\bar{\varphi}(y) = \varphi(x)$. Considerando com isso primeira ordem na variação δx^{μ}, podemos tomar apenas o termo de ordem zero para a derivada da equação, de modo que consequentemente a equação (1.8), torna-se

$$\delta\varphi^{i} = \bar{\varphi}^{i}(x) - \varphi^{i}(x) + \delta x^{\mu}\frac{d\varphi^{i}}{dx^{\mu}}. \tag{1.9}$$

A quantidade que aparece na equação (1.9), $\bar{\varphi}^{i}(x) - \varphi^{i}(x)$ é uma variação única nos campos sem deslocamentos no espaço-tempo, em outras palavras, não é função de ponto. Para tal, definimos um novo operador diferencial $\bar{\delta}$, que atua nos campos sem afetar o ponto no espaço-tempo, a saber:

$$\bar{\delta} = \delta - \delta x^{\mu}\frac{d}{dx^{\mu}}, \tag{1.10}$$

e este atua em φ^{i} como:

$$\bar{\delta}\varphi^{i} = \bar{\varphi}^{i}(x) - \varphi^{i}(x). \tag{1.11}$$

Devemos notar que como δ é um operador diferencial de primeira ordem, que obedece às propriedades de uma derivada ordinária (linear e obedece à regra de Leibniz), então $\bar{\delta}$ também é um operador diferencial com as mesmas propriedades. Adotaremos sempre a convenção de soma de Einstein, que omite a soma do símbolo em qualquer equação onde a soma é realizada em um índice que aparece repetido na forma de um par de subíndices e superíndices, como acontece na equação (1.8) com o índice μ.

Por fim temos um primeiro vínculo descrito na variação total sofrida pelos campos. Ele é dado pela soma de dois operadores diferenciais: um que depende de uma variação parcial nos campos $\left(\bar{\delta}\varphi^{i}\right)$ e outro que depende de uma variação no volume do espaço-tempo (δx^{μ}):

$$\delta\varphi^{i}(x) \;=\; \bar{\delta}\varphi^{i} + \delta x^{\mu}\frac{d\varphi^{i}}{dx^{\mu}}. \tag{1.12}$$

A variação da ação, dependerá desses parâmetros.

1.3 A primeira variação da ação

No cálculo de variações, o problema em questão é encontrar uma função φ para a qual uma ação ou funcional A atinge um valor extremo. O funcional $A(\varphi)$ é composto por uma integral que depende de x, da função $\varphi(x)$ e algumas de suas derivadas. Como definida na equação (1.4), para a configuração de campos $\Phi(x)$, construiremos de mesmo modo outra ação $A(y)$ para uma outra configuração $\bar{\Phi}(y)$, ambas definidas no volume Ω e $\bar{\Omega}$ do espaço-tempo, sendo então:

$$A(\varphi) \;=\; \int_{\Omega} d\omega L\left(x^{\mu}, \varphi^{i}(x), \varphi^{i}_{\mu}(x), \varphi^{i}_{\mu\nu}(x)\right)$$

e

$$A(\bar{\varphi}) \;=\; \int_{\bar{\Omega}} d\bar{\omega} L\left(y^{\mu}, \bar{\varphi}^{i}(y), \bar{\varphi}^{i}_{\mu}(y), \bar{\varphi}^{i}_{\mu\nu}(y)\right).$$

Definimos a primeira variação da ação como:

$$\delta A \;=\; A(\bar{\varphi}) - A(\varphi). \tag{1.13}$$

Agora faremos a ação A variar, considerando as variações dadas em (1.6), (1.7), (1.11) e (1.12):

$$\delta A \;=\; \int_{\Omega} \delta L d\omega + \int_{\Omega} L\delta d\omega. \tag{1.14}$$

No segundo termo do lado direito calculamos a variação total no diferencial de volume

$d\omega$ [2],

$$\delta d\omega \;=\; d\bar{\omega} - d\omega,$$

e para isto notamos que $d\bar{\omega}$, se transforma como

$$d\bar{\omega} \;=\; J d\omega, \tag{1.15}$$

onde J é o Jacobiano da mudança de variável. Prosseguindo com o cálculo, temos:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega} &= det\left[\frac{dy^{\mu}}{dx^{\nu}}\right] d\omega, \\ &= det\left[\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{d}{dx^{\nu}}\delta x^{\mu}\right] d\omega. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Aqui podemos aproximar o determinante para uma expressão mais mensurável considerando-se apenas os termos até a primeira ordem em δx. Os únicos termos do determinante que mantém sua variação em primeira ordem são dados pelo produto dos termos da diagonal principal, como pode-se ver na equação (1.17), dada a seguir.

$$det\left[\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{d}{dx^{\nu}}\delta x^{\mu}\right] = det\begin{bmatrix} 1+\partial_0\delta x^0 & \partial_1\delta x^0 & \partial_2\delta x^0 & \partial_3\delta x^0 \\ \partial_0\delta x^1 & 1+\partial_1\delta x^1 & \partial_2\delta x^1 & \partial_3\delta x^1 \\ \partial_0\delta x^2 & \partial_1\delta x^2 & 1+\partial_2\delta x^2 & \partial_3\delta x^2 \\ \partial_0\delta x^3 & \partial_1\delta x^3 & \partial_2\delta x^3 & 1+\partial_3\delta x^3 \end{bmatrix}, \tag{1.17}$$

Os produto dos demais termos não conservam a primeira ordem em δx^{μ}, de modo que aproximamos o determinante pela soma fechada

$$\begin{aligned} det\left[\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{d}{dx^{\nu}}\delta x^{\mu}\right] &\approx 1 + \frac{d}{dx^0}\delta x^0 + \frac{d}{dx^1}\delta x^1 + \frac{d}{dx^2}\delta x^2 + \frac{d}{dx^3}\delta x^3, \\ &\approx 1 + \frac{d}{dx^{\mu}}\delta x^{\mu}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Assim ao usarmos essa aproximação na variação do elemento do volume no espaço-tempo, teremos:

$$\delta d\omega = d\omega \frac{d}{dx^\mu}\delta x^\mu, \tag{1.19}$$

que resulta em

$$\begin{aligned}\delta A &= \int_\Omega \delta L d\omega + \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\mu}\left(\delta x^\mu L\right) \\ &= \int_\Omega \left[\delta L + \frac{d}{dx^\mu}\left(L\delta x^\mu\right)\right] d\omega. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Usando derivação de produto

$$L\frac{d}{dx^\mu}\delta x^\mu = \frac{d}{dx^\mu}\left(L\delta x^\mu\right) - \delta x^\mu \frac{d}{dx^\mu}L,$$

podemos expor um termo de divergência e condensar a integral a uma forma mais compacta

$$\begin{aligned}\delta A &= \int_\Omega \left[\delta L - \delta x^\mu \frac{dL}{dx^\mu}\right] d\omega + \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\mu}\left(L\delta x^\mu\right), \\ &= \int_\Omega d\omega \bar{\delta} L + \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\mu}\left(L\delta x^\mu\right). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Onde na primeira integral utilizamos o operador diferencial definido na equação (1.10), aplicado à densidade Lagrangeana

$$\bar{\delta} L = \delta L - \delta x^\mu \frac{dL}{dx^\mu}. \tag{1.22}$$

Aqui é interessante notar a apariação do termo de divergência total, na integral. Este é uma parte do que mais adiante nos cálculos identificaremos como sendo o termo de fronteira (ou termo de borda) da ação.

Agora resta calcular $\bar{\delta} L$. Vamos começar calculando a variação direta na densidade Lagrangeana:

$$\delta L = \delta x^\mu \frac{\partial L}{\partial x^\mu} + \delta \varphi^i \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} + \delta \varphi^i_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_\mu} + \delta \varphi^i_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{\mu\nu}}. \tag{1.23}$$

Essa derivada total que aparece em (1.22), é definida por

$$\frac{d}{dx^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \varphi^i_\mu \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \varphi^i_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \varphi^i_\nu} + \varphi^i_{\mu\nu\gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi^i_{\nu\gamma}} + \ldots, \tag{1.24}$$

atendendo ao fato de que campos são, de forma rigorosa, tratados como distribuições do espaço-tempo. No entanto, devemos nos lembrar que estas derivadas são efetuadas sobre funções de campo, não sendo por isso simples derivadas de uma função em relação suas variáveis.

Como pede a variação mista na equação (1.22), expandiremos

$$\delta x^\mu \frac{dL}{dx^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \delta x^\mu \varphi^i_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} + \delta x^\nu \varphi^i_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_\nu} + \delta x^\gamma \varphi^i_{\mu\nu\gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi^i_{\nu\gamma}}. \tag{1.25}$$

Agora calculamos $\bar{\delta} L$ a partir dos resultados nas equações (1.23) e (1.25) substituídos na equação (1.22). Essa operação seguida de algumas manipulações nos leva à equação mais compacta dada por

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} L &= \delta x^\mu \frac{\partial L}{\partial x^\mu} + \delta \varphi^i \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} + \delta \varphi^i_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_\mu} + \delta \varphi^i_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{\mu\nu}} - \\
&\quad - \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \delta x^\mu \varphi^i_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} + \delta x^\nu \varphi^i_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_\nu} + \delta x^\gamma \varphi^i_{\mu\nu\gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi^i_{\nu\gamma}} \ldots \right], \\
\bar{\delta} L &= \bar{\delta} \varphi^i \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} + \bar{\delta} \varphi^i_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_\mu} + \bar{\delta} \varphi^i_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{\mu\nu}}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Com isso acabamos fechando o operador $\bar{\delta}$ apenas às funções de campo e suas derivadas. Para continuar, precisamos saber o que acontece com os elementos $\bar{\delta}\varphi^i_\mu$ e $\bar{\delta}\varphi^i_{\mu\nu}$, ou em outras palavras, saber o que são essas variações. Começaremos a descobrir isso, por reescrever $\bar{\delta}\varphi^i_\mu$ como:

$$\bar{\delta}\varphi^i_\mu = \delta \varphi^i_\mu - \delta x^\nu \varphi^i_{\mu\nu}. \tag{1.27}$$

Agora, sabemos que $\delta\varphi^i_\mu$, obedece a

$$\begin{aligned}
\delta \varphi^i_\mu &= \frac{d\bar{\varphi}^i(y)}{dy^\mu} - \frac{d\varphi^i(x)}{dx^\mu}, \\
&= \frac{d\bar{\varphi}^i}{dx^\nu}\frac{dx^\nu}{dy^\mu} - \frac{d\varphi^i}{dx^\mu}.
\end{aligned}$$

Usando as equações (1.6) e (1.7), obtemos

$$\delta\varphi^i_\mu \;=\; \frac{d}{dx^\mu}\left(\delta\varphi^i\right) - \frac{d}{dy^\mu}\left(\frac{d\bar{\varphi}^i}{dx^\nu}\delta x^\nu\right) + \delta x^\nu \frac{d}{dy^\mu}\left(\frac{d\bar{\varphi}^i}{dx^\nu}\right). \tag{1.28}$$

Aqui desejamos apenas os termos em primeira ordem de δx^ν, portanto ocorre que

$$y^\mu \;\longrightarrow\; x^\mu$$

e implica em

$$\bar{\varphi}^i \;\longrightarrow\; \varphi^i$$

e isso muda a equação (1.28) para

$$\delta\varphi^i_\mu \;=\; \frac{d}{dx^\mu}\left(\bar{\delta}\varphi^i\right) + \delta x^\nu \varphi^i_{\mu\nu}. \tag{1.29}$$

Voltando à equação (1.27), o termo $\delta x^\nu \varphi^i_{\mu\nu}$ acaba desaparecendo, dando lugar à expressão

$$\bar{\delta}\varphi^i_\mu \;=\; \frac{d}{dx^\mu}\left(\bar{\delta}\varphi^i\right). \tag{1.30}$$

Isso mostra que a derivada comuta com o operador $\bar{\delta}$. Com esse resultado, podemos simplesmente afirmar que a variação $\bar{\delta}\varphi^i_{\mu\nu}$, é dada por:

$$\bar{\delta}\varphi^i_{\mu\nu} \;=\; \frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\bar{\delta}\varphi^i. \tag{1.31}$$

Essa aplicação será muito utilizada nos capítulos seguintes.

Agora voltaremos à equação (1.26) e usaremos os resultados contidos nas equações (1.30) e (1.31), onde obteremos

$$\bar{\delta}L \;=\; \bar{\delta}\varphi^i \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} + \frac{d}{dx^\mu}\left(\bar{\delta}\varphi^i\right)\frac{\partial L}{\partial \varphi^i_\mu} + \frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\bar{\delta}\varphi^i \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{\mu\nu}}.$$

Aqui usaremos derivações de produto, e depois um rearranjo de termos para evidenciar os termos de variação:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}L &= \bar{\delta}\varphi^i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^i}-\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_\mu}+\frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_{\mu\nu}}\right)+\\ &+\frac{d}{dx^\mu}\left[\bar{\delta}\varphi^i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_\mu}-\frac{d}{dx^\nu}\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_{\mu\nu}}\right)+\bar{\delta}\varphi^i_\nu\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_{\mu\nu}}\right]. \qquad (1.32)\end{aligned}$$

Aqui na equação (1.32) temos uma coleção de derivadas que juntas forma as derivadas de Lagrange, a saber[3]:

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^i} \equiv \frac{\partial L}{\partial\varphi^i}-\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_\mu}+\frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_{\mu\nu}}, \qquad (1.33)$$

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^i_\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial\varphi^i_\mu}-\frac{d}{dx^\nu}\frac{\partial L}{\partial\varphi^i_{\mu\nu}}, \qquad (1.34)$$

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^i_{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial L}{\partial\varphi^i_{\mu\nu}}. \qquad (1.35)$$

A equação (1.33), representa a i-ésima equação de Euler-Lagrange de 2ª ordem para a Lagrangeana. E a equação (1.34), representa o i-ésimo momento conjugado do campo φ^i.

No formalismo em primeira ordem, devemos observar que o termo da equação (1.35) anula-se, dando origem às equações de Euler-Lagrange da mecânica clássica, a saber

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=0.$$

Uma generalização da equação (1.33) em ordem superior se dá pela soma de termos derivativos com alternância de sinal até a ordem desejada, dadas pela derivada de Lagrange de ordem n a saber

$$\frac{\delta}{\delta\varphi^i}=\frac{\partial}{\partial\varphi^i}-\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial}{\partial\varphi^i_\mu}+\frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial}{\partial\varphi^i_{\mu\nu}}-\frac{d}{dx^\gamma}\frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial}{\partial\varphi^i_{\mu\nu\gamma}}+\ldots. \qquad (1.36)$$

Em posse de todos esses resultados, retornaremos até a integral da equação (1.21) e aplicaremos estes para obter a variação da ação, separando da integral os termos de divergência,

$$\begin{aligned}\delta A &= \int_\Omega d\omega\left[\bar{\delta}\varphi^i\frac{\delta L}{\delta\varphi^i}+\frac{d}{dx^\mu}\left(\bar{\delta}\varphi^i\frac{\delta L}{\delta\varphi^i_\mu}+\bar{\delta}\varphi^i_\nu\frac{\delta L}{\delta\varphi^i_{\mu\nu}}\right)\right]+\int_\Omega d\omega\frac{d}{dx^\mu}\left(L\delta x^\mu\right),\\ &= \int_\Omega d\omega\bar{\delta}\varphi^i\frac{\delta L}{\delta\varphi^i}+\int_\Omega d\omega\frac{d}{dx^\mu}\left(\bar{\delta}\varphi^i\frac{\delta L}{\delta\varphi^i_\mu}+\bar{\delta}\varphi^i_\nu\frac{\delta L}{\delta\varphi^i_{\mu\nu}}+L\delta x^\mu\right). \qquad (1.37)\end{aligned}$$

Nos aproximamos do resultado desejado. Reescrevendo apenas a segunda integral exprimindo a operação da equação (1.10), tem-se

$$\int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\left(\delta\varphi^{i} - \delta x^{\gamma} \frac{d\varphi^{i}}{dx^{\gamma}} \right) \frac{\delta L}{\delta\varphi^{i}_{\mu}} + \left(\delta\varphi^{i}_{\nu} - \delta x^{\gamma} \frac{d\varphi^{i}_{\nu}}{dx^{\gamma}} \right) \frac{\delta L}{\delta\varphi^{i}_{\mu\nu}} + L\delta x^{\mu} \right] \quad .$$

Se separarmos os termos com dependência da variação espacial dos demais, obteremos ao rearranjar

$$\int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\left(L - \varphi^{i}_{\gamma} \frac{\delta L}{\delta\varphi^{i}_{\gamma}} - \varphi^{i}_{\gamma\nu} \frac{\delta L}{\delta\varphi^{i}_{\gamma\nu}} \right) \delta x^{\mu} + \frac{\delta L}{\delta\varphi^{i}_{\mu}} \delta\varphi^{i} + \frac{\delta L}{\delta\varphi^{i}_{\mu\nu}} \delta\varphi^{i}_{\nu} \right].$$

Este é o fim da jornada que iniciamos na equação (1.13), em busca da primeira variação da ação. Aqui a encontramos em sua forma final, a saber:

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \bar{\delta}\varphi^{i} \frac{\delta L}{\delta\varphi^{i}} + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left[-T^{\mu}_{\nu} \delta x^{\nu} + P^{\mu}_{i} \delta\varphi^{i} + Q^{\mu\nu}_{i} \delta\varphi^{i}_{\nu} \right]. \quad (1.38)$$

Onde definimos o tensor densidade de energia-momento, T^{μ}_{ν} por [3]

$$T^{\mu}_{\nu} \equiv \varphi^{i}_{\nu} P^{\mu}_{i} + \varphi^{i}_{\gamma\nu} Q^{\mu\nu}_{i} - L\delta^{\mu}_{\nu}, \quad (1.39)$$

e o momento covariante para segunda ordem, P^{μ} já identificado anteriormente (equação (1.34))por

$$P^{\mu}_{i} = \frac{\delta L}{\delta\varphi_{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial\varphi^{i}_{\mu}} - \frac{dQ^{\mu\nu}_{i}}{dx^{\nu}}, \quad (1.40)$$

com

$$Q^{\mu\nu} = \frac{\delta L}{\delta\varphi_{\mu\nu}}. \quad (1.41)$$

Nesse ponto conseguimos separar a variação da ação em uma integral de volume e em uma integral de uma divergência. Nas próximas seções discutiremos a importância dessa separação. Agora podemos expor através de princípio variacional quais são suas equações de campo. Essas geralmente são as restrições mais importantes em um sistema. Porque nos dizem que as variáveis dinâmicas não podem ter valores arbitrários; elas são restrições dinâmicas que expressam limitações na maneira como os campos podem mudar ou variar.

1.4 Termos de fronteira no princípio variacional

A segunda integral na equação (1.38) é uma integral da divergência total dos campos no quadri-volume Ω. De acordo com o teorema de Gauss integrar uma divergência total no interior de um volume V, corresponde a integrar o campo através da superfície fechada que envolva todo o volume V. No nosso quadri-volume Ω, essa hiper-superfície pode ser a própria fronteira deste, a saber, $\partial\Omega$ por exemplo. Do teorema de Gauss, temos:

$$\int_V d\omega \frac{d}{dx^\mu} F^\mu(x) \quad = \quad \int_{\partial V} d\sigma n_\mu(x) F^\mu(x). \tag{1.42}$$

Portanto a aplicação do teorema de Gauss à segunda integral da equação (1.38), transforma esta em uma integral de superfície sobre a fronteira do volume Ω:

$$\int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\mu}\left[-T^\mu_\nu \delta x^\nu + P^\mu_i \delta\varphi^i + Q^{\mu\nu}_i \delta\varphi^i_\nu\right] \quad = \quad \int_{\partial\Omega} d\sigma n_\mu(x) \delta F^\mu(x)$$

onde

$$d\sigma \quad = \quad d^3x$$

é o elemento de superfície e

$$\delta F^\mu(x) \quad = \quad -T^\mu_\nu \delta x^\nu + P^\mu_i \delta\varphi^i + Q^{\mu\nu}_i \delta\varphi^i_\nu, \tag{1.43}$$

é o campo que flui na hiper-superfície e os n_μ são vetores unitários normais ao plano tangente em cada ponto da hiper-superfície de $\partial\Omega$. Em virtude do teorema de Gauss, os termos de divergência em problemas variacionais são chamados de termos de fronteira ou termos de borda de Ω [4]. Com isso:

$$\delta A = \int_\Omega d\omega \frac{\delta L}{\delta\varphi^i} \bar{\delta}\varphi^i + \int_{\partial\Omega} d\sigma n_\mu(x) \delta F^\mu(x). \tag{1.44}$$

Uma importancia de se considerar os termos de fronteira é que simetrias clássicas são definidas como transformações que apenas alteram a ação no máximo por um termo de superfície. Isso porque, sob condições de contorno apropriadas, os termos de fronteira não contribuem para a variação da ação e, portanto, não alteram as condições para os extremos, e as equações de movimento permanecem as mesmas. A integral de volume da ação desaparece. O problema surge quando as condições de contorno sob as quais se varia a ação não são suficientes para garantir que a integral de superfície desapareça. Pode-se considerar mudar as condições de contorno para garantir que o termo $\delta F^{\mu}(x)$ se anule, mas isso nem sempre é fisicamente aceitável. As condições de contorno sob as quais a ação é variada pode refletir situações reais experimentalmente viáveis, por exemplo, supondo que o espaço-tempo seja assintoticamente plano [5]. Entretanto, sejam quais forem essas condições de contorno acabam por limitar os resultados gerais desejados.

Uma maneira de contornar esse problema seria manter as condições de contorno, e acrescentar mais termos à borda da Lagrangeana. Fazer isso pode parecer inofensivo porque as equações de Euler-Lagrange não são alteradas, mas é uma operação delicada. O fato empírico é que a adição de um termo de derivada total à Lagrangeana em geral muda a expressão para as cargas conservadas de Noether (que veremos adiante), e novamente, alguma informação se perde.

A próxima seção tentará contornar esse problema ao apresentar o princípio variacional no qual nos apoiaremos.

1.5 Princípio Variacional de Weiss

O princípio variacional de Weiss [6, 7], será a ferramenta que irá extrair as informações que precisamos da integral na equação (1.44). Segundo o princípio, dada uma configuração de campos Φ e uma ação A definida a partir de uma densidade lagrangeana

$$L = L\left(x^{\mu}, \varphi^{i}(x), \varphi^{i}_{\mu}(x), \varphi^{i}_{\mu\nu}(x)\right)$$

e, sejam uma variação nos campos

$$\delta\varphi^{i} = \bar{\varphi}^{i}(y) - \varphi^{i}(x) \tag{1.45}$$

e uma variação no volume

$$\delta x = y - x, \tag{1.46}$$

ambas infinitesimais e arbitrárias, então $\varphi^{i}(x)$ será uma configuração física do sistema se a primeira variação da ação depender apenas dos termos de fronteira.

Este é um princípio variacional que inclui variações das fronteiras para a ação integral (1.4). Em particular, a variação de Weiss inclui deslocamentos infinitesimais dos pontos finais para uma ação ou deslocamento dos limites do espaço-tempo para a ação de uma teoria de campo.

Na Relatividade Geral, este princípio explicita que os deslocamentos da fronteira produzem uma contribuição na superfície da integral, sem modificar as equações de campo. Na mecânica, a variação de Weiss pode ser usada para identificar um hamiltoniano sem realizar uma transformação de Legendre. Na teoria de campo clássica, pode-se usar o princípio de Weiss para identificar o Hamiltoniano no termo de fronteira do volume para extrair as variáveis canônicas, e também fornece uma maneira rápida de obter a equação de Hamilton-Jacobi diretamente. Nesse sentido, o princípio variacional de Weiss fornece uma adição complementar ao formalismo covariante existente para termos de fronteira em Relatividade Geral.

Em suma, no princípio de Weiss a variação da ação independe dos termos no interior do quadri-volume, depende apenas dos termos de fronteira. Por isso, foi conveniente a separação da primeira variação da ação, em uma integral de volume e em uma integral de divergência total, como pode ser vista na equação (1.38). Portanto para fazer valer a configuração de campos Φ, com base no princípio de Weiss, a parte da integral a ser integrada no volume deve se anular, de maneira que

$$\int_{\Omega} d\omega \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} \bar{\delta} \varphi^i = 0, \tag{1.47}$$

implicando em

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^i} = 0. \tag{1.48}$$

Uma condição necessária para $\varphi = \varphi(x)$ minimizar o problema variacional definido na equação 1.4 é dada pela solução das n equações diferenciais parciais/funcionais

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^i} - \frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial L}{\partial \varphi^i_\mu} + \frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{\mu\nu}} = 0. \tag{1.49}$$

Essas são as equações de Euler-Lagrange no formalismo de segunda ordem dos campos. Uma solução $\varphi = \varphi(x)$ para a equação (1.49) é chamada de extremo da integral fundamental dada na equação (1.4).

Estas são as soluções estáveis ou estacionárias para o problema variacional. Isso informa-nos que a maioria das leis físicas pode ser pensada como regiões de estabilidade em um espaço-tempo onde estejam todas as soluções. A ação se comportaria como um potencial, ou medida de estabilidade, neste espaço-tempo.

Todavia, o princípio variacional de Weiss não nos entrega somente as equações de campo, mas nos apresenta maiores informações contidas no termo de fronteira da ação. Tratam-se de simetrias e cargas conservadas, que veremos na próxima seção.

1.6 Simetrias

1.6.1 Equação diferencial de Lie

O termo simetria em Física refere-se a um conjunto de transformações definidas num grupo que levam uma expressão ser invariante na sua forma: dizemos então que o sistema é invariante sob aquela transformação ou que ele apresenta uma simetria no parâmetro da transformação.

Simetria pode ser entendida também como uma transformação matemática que deixa as equações dos sistemas físicos inalteradas. Nas leis da física podemos submeter as equações de um sistema a transformações de translação, rotação e evolução temporal, e se ainda assim elas continuarem iguais dizemos que elas são simétricas. Nessa seção veremos que Lagrangeanas (ou Hamiltonianas) com propriedades simétricas implicam a existencia de quantidades conservadas. A descrição formal de conexão entre invariância ou simetria e quantidades conservadas está contida no primeiro Teorema de Noether. Os teoremas de Noether lidam com transformações infinitesimais de sistemas Lagrangeanos [8].

Amalie Emmy Noether foi uma matemática alemã do início do século XX, que fez importantes contribuições para a álgebra abstrata e a física teórica. Ela foi descrita por Albert Einstein como a mulher mais importante na história da matemática [9]. Como uma das principais matemáticas de seu tempo, ela desenvolveu as teorias de anéis e exerceu grande contribuição na teoria dos campos. Na física, o teorema de Noether explica a conexão entre simetrias e as leis de conservação [10].

Retornando às transformações infinitesimais (1.6) e (1.7), dizemos que a ação é invariante sob essas transformações se a primeira variação da ação calculada,

$$A(\varphi(x)) = \int_{\Omega} d\omega L\left(x^{\mu}, \varphi^{i}(x), \varphi^{i}_{\mu}(x), \varphi^{i}_{\mu\nu}(x)\right)$$

for igual à primeira variação da ação calculada para novas variáveis,

$$A(\bar{\varphi}(y)) = \int_{\bar{\Omega}} d\bar{\omega} L\left(y^{\mu}, \bar{\varphi}^{i}(y), \bar{\varphi}^{i}_{\mu}(y), \bar{\varphi}^{i}_{\mu\nu}(y)\right),$$

isso acontecerá sempre que

$$A(\bar{\varphi}(y)) = A(\varphi(x)). \tag{1.50}$$

Isso pode ser visto na expressão (1.13), onde ocorrerá uma simetria na ação A quando δA for identicamente nulo, ou seja

$$\delta A = A(\bar{\varphi}(y)) \quad - \quad A(\varphi(x)) = 0. \tag{1.51}$$

A equação (1.38) mostra a primeira variação da ação em termos das variações dos campos e da variação do volume do espaço-tempo, e nela temos a separação dos termos de fronteira sob a forma de divergências totais. Se consideramos a existência de uma simetria na ação, então temos que a sua primeira variação é nula e isso anularia o integrando da equação, tornando-a em

$$\bar{\delta}\varphi^i \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} \quad = \quad -\frac{d}{dx^\mu}\left[-T^\mu_\nu \delta x^\nu + P^\mu_i \delta\varphi^i + Q^{\mu\nu}_i \delta\varphi^i_\nu\right]. \tag{1.52}$$

A equação diferencial (1.52) é uma equação que encerra, em uma divergência total, combinações lineares das varições dos campos que compõem a Lagrangeana da ação e do espaço-tempo, definidas nas equações (1.6),(1.7) e (1.11). Ela é conhecida como equação diferencial de Lie. E em suma, é a ponte que juntamente com os teoremas de Noether nos fornecerá o caminho para as simetrias da ação, bem como suas quantidades conservadas sendo esta a equação fundamental que determina condições satisfeitas pelos campos quando simetrias estão presentes no sistema.

Com conhecimento apresentado nas variações definidas, é possível utilizar esta equação para deduzir uma Lagrangiana a partir das simetrias de um sistema. Deveras, (1.52) é a identidade mais geral devida à invariância da ação dada em (1.4), sob transformações infinitesimais nos campos e nas coordenadas. Toda configuração de campos deve satisfazer a esta equação, independente de φ ser ou não um extremo e, ainda, condições de contorno não afetam o caráter físico dessa equação, já que não é necessária a especificação de nenhum comportamento de fronteira dos campos.

1.6.2 Cargas conservadas

Considere uma ação integral $A(\varphi)$, tal qual a ação da equação (1.4), para o campo φ no domínio Ω do espaço-tempo (podem existir vários campos, mas φ denota todos eles), que sofra as transformações supracitadas (1.6),(1.7) e (1.11). O Primeiro Teorema de Noether enuncia:

"Se a integral A é invariante com relação a um grupo G_ρ, então as ρ combinações linearmente independentes das expressões de Lagrange tornam-se divergências totais."

Entende-se por grupo de transformação G_ρ, um sistema de transformações tal que para cada transformação, existe uma inversa contida no sistema, onde a composição de quaisquer duas transformações do sistema, por sua vez, também pertence ao sistema. O grupo será chamado de grupo contínuo finito G_ρ se suas transformações estiverem contidas em uma forma mais geral dependendo analiticamente de ρ parâmetros constantes.

Sendo assim, o teorema diz que para cada simetria da ação, existe uma combinação linear das equações de campo e cada combinação é igual a uma divergência total. Para entender esse teorema, vamos estudar o que acontece com a equação de Lie, quando ocorrem transformações exclusivas nos campos e no espaço-tempo. Se a integral fundamental é invariante por um grupo de transformações com ρ parâmetros constantes, então ρ combinações lineares da derivada de Lagrange estão relacionadas a divergências. Dessa forma, a expressão (1.52) carrega o conteúdo matemático do primeiro teorema de Noether.

Nesse caso, podemos reparametrizar as transformações de campo, por parâmetros u^k constantes, de modo que tenhamos a tranformação

$$x^\mu \to y^\mu = y^\mu\left(x^\nu, \delta u^k\right), \tag{1.53}$$

sempre que

$$x^\mu = y^\mu\left(x^\nu, \delta u^k\right) \mid_{\delta u^k=0}. \tag{1.54}$$

Portanto fica explícita a reparametrização de

$$\delta x^\mu = \Upsilon^\mu_k \delta u^k, \tag{1.55}$$

com

$$\Upsilon^\mu_k = \frac{dy^\mu}{du^k} \mid_{\delta u^k=0} . \tag{1.56}$$

Assim temos as seguintes variações nos campos:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \bar{\varphi}(y) - \varphi(x) \\ &= \frac{d\bar{\varphi}}{du^k} \mid_{\delta u^k=0} \delta u^k, \\ &= \phi_k \delta u^k, \end{aligned} \tag{1.57}$$

com

$$\phi_k = \frac{d\bar{\varphi}}{du^k}\,|_{\delta u^k=0}\ . \tag{1.58}$$

Assumiremos que as transformações de variação de derivadas também mudam conforme a equação (1.57):

$$\delta\varphi_\nu = \phi_{\nu k}\delta u^k, \tag{1.59}$$

com

$$\phi_{\nu k} = \frac{d\bar{\varphi_\nu}}{du^k}\,|_{\delta u^k=0}, \tag{1.60}$$

onde nas transformações de campos são usados os mesmos parâmetros de (1.53). Nesse ponto estamos assumindo que os campos se transformam como uma representação do grupo de transformações que age no espaço-tempo. Dizemos que essas transformações são finitas, já que dependem de um número finito de parâmetros.

Então, sendo observadas essas reparametrizações, substituiremos as equações (1.55),(1.57) e (1.59) na equação diferencial de Lie (1.52), para encontrar

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^i}\left(\phi_k - \varphi^i_\nu \Upsilon^\nu_k\right)\delta u^k = -\frac{d}{dx^\mu}\left[\left(-T^\mu_\nu \Upsilon^\nu_k + P^\mu_i \phi^i_k + Q^{\mu\nu}_i \phi^i_{\nu k}\right)\delta u^k\right]. \tag{1.61}$$

Como os parâmetros δu^k são constantes, temos

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi^i}\left(\phi_k - \varphi^i_\nu \Upsilon^\nu_k\right) = -\frac{d}{dx^\mu}\left[-T^\mu_\nu \Upsilon^\nu_k + P^\mu_i \phi^i_k + Q^{\mu\nu}_i \phi^i_{\nu k}\right]. \tag{1.62}$$

Como diz o teorema de Noether, se a integral fundamental é invariante por um grupo de transformações infinitesimais com parâmetros constantes, então as combinações lineares da derivada de Lagrange estão relacionadas a divergências totais, ou em outras palavras, se a a ação é invariante sob transformações infinitesimais, não mudando ou não variando com elas, então há uma quantidade conservada sob a invariância da ação, relacionada a essas transformações, e são dadas pelas divergências totais.

Para configurações de campos que são solução das equações de Euler-Lagrange, ou seja, as equações de campo que formam as superfícies de extremos da ação dadas em (1.49), o primeiro termo de (1.62) anula-se. Por definirmos os objetos, Φ^μ_k,

$$\Phi^{\mu}_{k} = -T^{\mu}_{\nu}\Upsilon^{\nu}_{k} + P^{\mu}\phi_{k} + Q^{\mu\nu}\phi_{\nu k}, \tag{1.63}$$

esses obedecem a equações de continuidade,

$$\frac{d\Phi^{\mu}_{k}}{dx^{\mu}} = 0. \tag{1.64}$$

Essa expressão para Φ^{μ}_{k}, é uma quantidade conservada da ação (1.4). Esses objetos recebem o nome de densidades de corrente de Noether ou densidades de corrente próprias. Portanto, se a integral fundamental for invariante por um grupo de transformações finito, as equações de campo implicam a conservação das densidades de corrente próprias. A equação (1.64) sintetiza o conteúdo físico do primeiro teorema de Noether [11].

Essas são as correntes próprias da ação, retidas à superfície do volume de integração como pode ser visto pelo teorema de Gauss

$$\int_{\Omega} d\omega \frac{d\Phi^{\mu}_{k}}{dx^{\mu}} = \int_{\partial\Omega} d\sigma n(x)\, \Phi^{\mu}_{k} \,|_{x\in\partial\Omega}= 0. \tag{1.65}$$

Estas podem ser obedecidas se as densidades de corrente forem nulas, ou mesmo tangentes à mesma hiper-superfície, para os pontos que a ela pertencem. Neste caso, o fluxo das correntes próprias deve ser restrito ao volume Ω.

Na mecânica clássica, uma grandeza física G é conservada se

$$\frac{dG}{dt} = 0.$$

O termo conservação é utilizado aqui no sentido que uma particular expressão que caracteriza um sistema, efetuada num instante $t = t_0$, é independente de t, ou seja, é uma constante de movimento. Em teoria de campos, consideramos o mesmo para x^{μ}. Em virtude disso, divergências totais se relacionam à conservação.

Consideremos agora os casos particulares das transformações infinitesimais às quais submetemos a ação.

Estudando a equação (1.62) para as transformações exclusivas nas coordenadas do espaço-tempo, ou seja apenas x varia em

$$x \longrightarrow y$$

mas os campos não sofrem variação ($\delta\varphi^{i} = 0$), teremos que

$$\begin{aligned}\delta\varphi^i &= \phi^i_k \delta u^k = 0,\\ \bar{\varphi}^i(y) &= \varphi^i(x),\end{aligned}$$

$$\delta\varphi^i_\nu = \phi^i_k \delta u^k = 0,$$

e com isso ocorrendo que a equação de Lie, torna-se

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi}\varphi_\nu \Upsilon^\nu_k = -\frac{d}{dx^\mu}\left[-T^\mu_\nu \Upsilon^\nu_k\right]. \tag{1.66}$$

Para uma configuração de campos que extremize a ação, a equação de continuidade será

$$\frac{d}{dx^\mu}\left[T^\mu_\nu \Upsilon^\nu_k\right] = 0. \tag{1.67}$$

Essa divergência nula exige a conservação de uma corrente própria, Ψ^μ_k, tal que

$$\Psi^\mu_k = T^\mu_\nu \Upsilon^\nu_k. \tag{1.68}$$

Portanto, Ψ^μ_k é uma simetria da Ação. Mais especificamente, é um invariante por transformações nos campos.

Nos casos onde a densidade Lagrangiana não depende explicitamente de x^μ, ou seja nos casos onde [12]

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0,$$

temos que Ψ^μ_k, representa a densidade do fluxo de energia do sistema, descrito pela densidade Lagrangiana (1.3). Caso contrário, podem acontecer as seguintes situações:

1. Ψ^μ_k pode ser a densidade do fluxo de energia do sistema, mas não é constante.
2. Ψ^μ_k será uma constante do sistema, mas não representa a densidade do fluxo de energia do mesmo.

Procedendo da mesma maneira, no caso de transformações exclusivas no campo, ou seja sem tranformação espacial ($\delta x^\mu = 0$), teremos

$$\delta x^{\mu} = \Upsilon^{\mu}_{k} \delta u^{k} = 0,$$

e isso implica a equação

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^{i}} \phi^{i}_{k} = -\frac{d}{dx^{\mu}} \left[P^{\mu}_{i} \phi^{i}_{k} + Q^{\mu\nu}_{i} \phi^{i}_{\nu k} \right]. \tag{1.69}$$

Para uma configuração de campos que extremize a ação, a divergência será

$$\frac{d}{dx^{\mu}} \left[P^{\mu}_{i} \phi^{i}_{k} + Q^{\mu\nu}_{i} \phi^{i}_{\nu k} \right] = 0,$$

onde a corrente própria de Noether, é dada por

$$\Pi^{\mu}_{k} = P^{\mu}_{i} \phi^{i}_{k} + Q^{\mu\nu}_{i} \phi^{i}_{\nu k}. \tag{1.70}$$

Esta também é uma simetria da ação, mais especificamente, é um invariante por transformações espaciais.

Em vista desses resultados o primeiro Teorema de Noether pode se enunciar também do seguinte modo: "Para cada simetria da ação, existe uma equação de continuidade para um conjunto de correntes próprias."

Equações da continuidade aparecem em toda teoria física com simetrias. Vejamos dois exemplos.

1.6.2.1 Equações de Maxwell da Teoria eletromagnética

As equações de Maxwell são leis especificadas em divergências e rotacionais dos campos elétricos e magnéticos. Elas representam a base da teoria eletromagnética proposta por J. C. Maxwell em meados do século XIX [13]. Delas podemos derivar uma equação da continuidade, a partir das equações de campo da Lagrangeana devida ao campo eletromagnético.

Comecemos com a Lagrangeana proposta para a teoria eletromagnética dada por [2]

$$L_{EM} = J^{\mu} A_{\mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{1.71}$$

definida num volume Ω do espaço-tempo plano de Minkowski.

Na Lagrangeana definimos os tensores antissimétricos de Faraday $F_{\mu\nu}$ por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{1.72}$$

onde temos que o quadri-pontencial A_μ é um covetor função do espaço-tempo escrito como

$$A_\mu(x) = \left(\varphi, -\overrightarrow{A}\right), \tag{1.73}$$

tendo φ como o potencial elétrico e $\overrightarrow{A}$ é o potencial vetor magnético. Também definimos uma quadri-corrente

$$J^\mu = \left(\rho, \overrightarrow{j}\right)$$

Substituindo os índices, achamos as seguintes relações com o campo eletromagnético:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.74}$$

onde

$$\begin{aligned} E_i &= F_{0i}, \\ B_i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}, \end{aligned}$$

e os objetos ϵ_{ijk} são os símbolos de Levi-Civita.

Construímos a ação S_{EM},[2]

$$S_{EM} = \int d\omega \left(J^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \tag{1.75}$$

e a faremos variar sob os critérios

$$\delta x = \bar{x} - x \tag{1.76}$$

e

$$\delta A_\mu = \bar{A}_\mu(\bar{x}) - A_\mu(x). \tag{1.77}$$

A primeira variação da ação começa por

$$\delta S_{EM} = \int_\Omega \delta d\omega L_{EM} + \int_\Omega d\omega \delta L_{EM}, \tag{1.78}$$

onde usando o resultado na equação (1.19), e aplicando o operador $\bar{\delta}$ da equação (1.10), esta resulta em

$$\delta S_{EM} = \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\gamma}\left[L_{EM}\delta x^\gamma\right] + \int_\Omega d\omega \bar{\delta} L_{EM}. \tag{1.79}$$

Calculamos inicialmente $\bar{\delta} L_{EM}$:

$$\bar{\delta} L_{EM} = J^\mu \bar{\delta} A_\mu - \frac{1}{4}\bar{\delta}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \tag{1.80}$$

multiplicamos a métrica para tornar os termos de variação covariantes e condensamos a variação em um único termo

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) &= \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu}\bar{\delta}F_{\alpha\beta} + F^{\mu\nu}\bar{\delta}F_{\mu\nu}, \\
&= \left(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu} + F^{\alpha\beta}\right)\bar{\delta}F_{\alpha\beta}, \\
&= 2F^{\mu\nu}\bar{\delta}F_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Executando a variação e usando a antissimetria do tensor obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) &= 2F^{\mu\nu}\left(\partial_\mu \bar{\delta} A_\nu - \partial_\nu \bar{\delta} A_\mu\right), \\
&= 4F^{\mu\nu}\partial_\mu \bar{\delta} A_\nu.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Explicitando a variação dos campos da derivada obtêm-se

$$\bar{\delta}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = 4\partial_\mu\left(F^{\mu\nu}\bar{\delta}A_\nu\right) - 4\bar{\delta}A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}. \tag{1.83}$$

Usando o resultado da equação (1.83) na variação da ação em (1.79), obteremos

$$
\begin{aligned}
\delta S_{EM} &= \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\gamma}} \left[L_{EM} \delta x^{\gamma} \right] + \int_{\Omega} d\omega \left[J^{\mu} \bar{\delta} A_{\mu} - \partial_{\mu} \left(F^{\mu\nu} \bar{\delta} A_{\nu} \right) + \bar{\delta} A_{\nu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \right], \\
&= \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\gamma}} \left(L_{EM} \delta x^{\gamma} - F^{\gamma\nu} \bar{\delta} A_{\nu} \right) + \int_{\Omega} d\omega \left(J^{\nu} + \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \right) \bar{\delta} A_{\nu},
\end{aligned}
$$

onde separamos a integral por um termo de divergência total que se tranforma num termo de superfície, sobre a fronteira do volume

$$
\begin{aligned}
\delta S_{EM} &= \int_{\partial\Omega} d\sigma n_{\gamma}(x) \left(L_{EM} \delta x^{\gamma} - F^{\gamma\nu} \bar{\delta} A_{\nu} \right) + \int_{\Omega} d\omega \left(J^{\nu} + \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \right) \bar{\delta} A_{\nu} \qquad (1.84) \\
&= \int_{\partial\Omega} d\sigma n_{\gamma}(x) \left[\left(L_{EM} \delta^{\gamma}_{\alpha} - F^{\gamma\nu} \partial_{\alpha} A_{\nu} \right) \delta x^{\alpha} - F^{\gamma\nu} \delta A_{\nu} \right] + \\
&\quad + \int_{\Omega} d\omega \left(J^{\nu} + \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \right) \bar{\delta} A_{\nu}. \qquad (1.85)
\end{aligned}
$$

A partir desse ponto aplicamos o princípio variacional de Weiss para obter as equações de campo, anulando o termo integrado no interior do volume e encontramos que

$$
\partial_{\mu} F^{\nu\mu} = J^{\nu}. \qquad (1.86)
$$

No termo de fronteira temos explicitamente os momentos dos campos covariantes A_{ν}, como $F^{\gamma\nu}$, bem como o tensor de energia momento dos campos dado por

$$
T^{\gamma}_{\alpha} = F^{\gamma\nu} \partial_{\alpha} A_{\nu} - J^{\mu} A_{\mu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \delta^{\gamma}_{\alpha}. \qquad (1.87)
$$

Das equações de campo, chegamos às equações de Maxwell. Na equação (1.86) quando $\nu = 0$, tem-se

$$
\partial_{\mu} F^{0\mu} = \partial_{\mu} E^{\mu} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho. \qquad (1.88)
$$

Quando $\nu = 1$, tem-se por outro lado

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu 1} &= J^1, \\
-\frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= j_x.
\end{aligned}
$$

A componente J^1da equação, combinada para os demais valores de ν, leva à equação vetorial:

$$
-\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{j}. \tag{1.89}
$$

Se tomarmos a divergência da equação (1.89), encontramos uma equação de continuidade envolvendo a densidade de cargas e a densidade de correntes que resultam numa densidade de correntes próprias de Noether, a saber:

$$
\frac{dJ^\mu}{dx^\mu} = 0. \tag{1.90}
$$

O segundo par de equações homogêneas de Maxwell vêm de usarmos o dual tensor $G^{\mu\nu}$ definido por

$$
G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.91}
$$

pois

$$
\partial_\mu G^{\nu\mu} = 0. \tag{1.92}
$$

Da mesma forma como tratamos $F^{\mu\nu}$ chegaremos às duas equações de Maxwell que faltam, a saber

$$
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0, \tag{1.93}
$$

e

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0. \tag{1.94}$$

1.6.2.2 Equação de Schrödinger

A mecânica quântica aborda o problema de determinar a função de onda de uma partícula. Obtemos essa função ao se resolver a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{1.95}$$

Esta equação é para a mecânica quântica, análoga ao que é a segunda Lei de Newton para a mecânica clássica. E como um pilar dessa teoria, esta também pode ser descrita por uma equação de continuidade, se aceitarmos uma densidade de corrente

$$J^\mu = \left(\frac{\rho}{c}, \overrightarrow{j}\right), \tag{1.96}$$

onde

$$\overrightarrow{j} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\Psi^*\overrightarrow{\nabla}\Psi - \Psi\overrightarrow{\nabla}\Psi^*\right) \tag{1.97}$$

e

$$\rho = i\hbar\Psi^*\Psi. \tag{1.98}$$

Em notação covariante podemos encerrar (1.96) em uma divergência total, procedendo como na equação (1.64),

$$\frac{dJ^\mu}{dx^\mu} = 0,$$

que mostra como J^μ da equação (1.87), também é uma corrente própria de Noether para a mecânica quântica, como evidenciado pela conservação em uma divergência total.

Referências Bibliográficas

[1] Carmeli, M., Classical Fields, John Wiley & Sons,1982

[2] Zangwill, A., Modern electrodinamics, CUP, 2009

[3] Logan, J. D., Invariant Variational Principles, Academic Press, 1977

[4] Goldstein, H. Classical mechanics, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1980

[5] Lanczos, C., The variational principles of Mechanics, Fourth edition, Dover Publications, 1949

[6] Sudarshan, E.C.G., Mukunda, N. Classical dynamics: a modern perspective, John Wiley & Sons Inc,1974

[7] Feng, C. J., The Weiss Variation of the gravitational action, ArXiv:1708.04489

[8] Noether, E., Invariant variation problems, tradução por M. A. Travel, arXiv.org > physics > arXiv:physics/0503066

[9] https://www.sciencenews.org/article/emmy-noether-theorem-legacy-physics-mat

[10] https://www.nytimes.com/1935/05/04/archives/the-late-emmy-noether-professor-einstein-writes-in-appreciation-of.html

[11] Cardona, A., Jimenez, C. N., Ocampo H., Paycha S., Lega, A. F. R., Geometric, Algebraic and Topological Methods for Quantum Field Theory, World Scientific, 2013

[12] Khriplovich, I.B., General Relativity, Springer, 2005

[13] Jackson, J. D., Classical electrodynamics, Wiley, 1999

[14] N. P. Konopleva & V. N. Popov, Gauge fields, Harwood Academic Publishers, 1981

Capítulo 2

Ação de Einstein-Hilbert

Introdução

A teoria da Relatividade Geral de Einstein, tem como base o princípio da equivalência, no qual se concebe que estar em uma região com a presença de um campo gravitacional e estar em um referencial com certa aceleração constante são em sua essência, situações equivalentes. Esses efeitos são explicados pelas equações de campo de Einstein, que descrevem uma teoria geométrica de um espaço tetradimensional curvo. O espaço-tempo curvo da teoria da Relatividade Geral implica em que um corpo de prova colocado em repouso em qualquer ponto do espaço sairá do repouso, ou seja, ele "rola" pelo espaço-tempo curvo afora. A situação é análoga ao que ocorre na mecânica newtoniana, quando um corpo de prova é colocado em repouso numa região do espaço onde existe um campo de força. Alternativamente, um corpo de prova colocado em repouso num espaço-tempo plano permanece em repouso, um comportamento análogo ao ditado pela Primeira Lei da mecância newtoniana.

A ação de Einstein-Hilbert na relatividade geral é a ação que produz as equações de campo de Einstein através de um princípio variacional. A parte gravitacional da ação é dada como

$$I = \int_{\Omega} d\omega \sqrt{-g} R, \tag{2.1}$$

onde $g = det(g_{\mu\nu})$, é o determinante da matriz tensorial métrica $g_{\mu\nu}$ de assinatura $(+, -, -, -)$, R é o escalar de curvatura de Ricci, $d\omega$ é o elemento de volume e Ω é a região de integração no espaço-tempo. Se a integral converge, então é tomada em todo o espaço-tempo. Caso contrário, algumas modificações podem ser aplicadas. Se integrada em domínios muito grandes ainda produz as equações de *Einstein* como equações de Euler-Lagrange para a açao de Hilbert. As equações de Einstein com fontes de matéria são conseguidas quando se acrescenta uma Lagrangiana de matéria ao funcional I.

A ação de Hilbert vem da postulação de que a gravidade aparece quando a métrica torna-se dinâmica, sendo que as equações dinâmicas provêm de uma ação, que é um escalar. Existem ações mais complexas e coerentes com essa idéia, e a ação de Hilbert é apenas a mais simples. Os outros termos provavelmente surgem como pequenas correções quânticas em baixa energia, e tornam a teoria perturbativamente não-renormalizável em altas energias [1].

Portanto, passaremos pelo processo de derivar as equações de Einstein para a ação sem fontes, encontrando nos termos de fronteira seus momentos covariantes.

2.1 O espaço-tempo e o formalismo covariante

2.1.1 Vetores, covetores e tensores

As leis fundamentais da física não podem mudar sua forma sob rotações espaciais, já que o espaço deve ser isotrópico. Esta simetria de leis físicas encontra sua realização natural na linguagem vetorial. Por exemplo, as leis de Maxwell, vistas no capítulo anterior, são escritos em termos de vetores $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$, e operadores vetoriais como o rotacional e a divergência. A forma dessas equações não é afetada por uma rotação de eixos cartesianos, porque as operações que as envolvem são independentes da orientação dos eixos. Esta propriedade também é válida para relações incluindo produtos entre escalares ou entre vetores, ou outras operações tensoriais entre tensores de magnitudes como o tensor de inércia e o tensor de Maxwell. Em todos esses casos, apenas os componentes de vetores e tensores são modificados quando os eixos cartesianos giram; mas as equações ou leis que expressam relações entre elas mantêm sua forma. Além disso, as leis de Maxwell também mantêm sua forma sob as transformações de Lorentz (essa é a essência da Relatividade Especial), e o mesmo acontece com as leis da dinâmica relativista como a energia relativistica e as leis dinâmicas de conservação. No entanto, esta covariância da física fundamental relativistica, as leis sob as transformações de Lorentz, só serão evidentes na linguagem que aqui será usada [2].

Minkowski desenvolveu uma linguagem quadri-tensorial, que é a linguagem natural para escrever as leis da física relativistica. Usando esta linguagem, a covariância das leis da física sob transformações de Lorentz se tornará evidente. As transformações de Lorentz são lineares. Portanto, a ação de qualquer elemento nas coordenadas de evento t,x,y e z podem ser escritas como

$$\bar{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}(x)\, x^{\nu}, \tag{2.2}$$

onde x^{ν} são as coordenadas cartesianas de um evento no espaço-tempo medidas por um referencial S e $\bar{x}^{\mu}$ são as recpectivas coordenadas do mesmo evento em um outro referencial $\bar{S}$. As quantidades $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ são os coeficientes que caracterizam uma transformação de Lorentz e são dados por

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}.$$

Para cada transformação de $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$, mudando as coordenadas do referencial S, para as respectivas coordenadas no referencial $\bar{S}$, existe outra transformação de Lorentz executando o processo inverso, voltando de $\bar{S}$ para S. Esta transformação inversa será denotada com o símbolo $\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}$.

Um quadri-vetor contravariante é qualquer objeto V com componentes cartesianas V^{μ} que se transforma sob transformações de Lorentz como

$$\bar{V}^{\mu}(\bar{x}) = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu}(x). \tag{2.3}$$

Uma vez que o grupo de Lorentz inclui rotações, as três componentes cartesianas espaciais de um quadri-vetor contravariante V^1,V^2 e V^3 formam um vetor ordinário

$$\overrightarrow{V} = \left(V_x, V_y, V_z\right), \tag{2.4}$$

de modo que

$$V^{\nu} = \left(V^0, \overrightarrow{V}\right). \tag{2.5}$$

No capítulo anterior, vimos um tipo de vetor contravariante: a densidade de corrente de Noether no eletromagnetismo e na mecânica quântica (j^{μ}). Assim, as leis de conservação de energia entrelaçadas ao momento correspondem a conservação de um objeto geométrico único.

Consideremos também um objeto C, cujas componentes C_{μ} se transformam de S para $\bar{S}$ sob transformações de Lorentz como

$$\overline{C}_{\mu}(\bar{x}) = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}(\bar{x})\, C_{\nu}(x), \tag{2.6}$$

onde os coeficientes da matriz transformação $\Lambda^{\nu}_{\ \mu}$ são dados por

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^{\nu}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{\mu}}.$$

Note que a transformação ocorre de forma inversa ao caso do vetor contravariante, de modo que sempre que ocorrer uma combinação do tipo $C_{\nu}A^{\nu}$, resultará ser invariante sob as tranformações de Lorentz, pois independe da transformações de coordenadas, a saber,

$$\overline{C}_{\mu}\bar{A}^{\mu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu} C_{\nu}\Lambda^{\mu}_{\ \gamma}A^{\gamma} = C_{\nu}A^{\nu}. \tag{2.7}$$

A operação descrita é chamada de contração. E a contração sempre envolve um par de indíces covariantes e contravariantes.

Derivadas parciais cartesianas podem ser tratadas como componentes de um quadrivetor covariante ∂_{μ} chamado de gradiente. A contração de um vetor gradiente com um campo contravariante $A^{\mu}(x)$ é um caso particular que leva a um invariante chamado de divergência do campo $A^{\mu}(x)$

$$\partial_{\mu}A^{\mu}(x) = divA. \tag{2.8}$$

Os operadoradores ∂_{μ} podem ser considerados como os componentes de um quadri-vetor covariante apenas sob transformações linear de coordenadas. Em um caso mais geral, os coeficientes $\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}$ em (2.6) não são constantes, portanto suas derivadas afetam a transformação de $\partial_{\mu}A^{\mu}$.

Ainda sobre vetores, note que a derivada de um escalar invariante $\varphi(x)$ em relação a uma coordenada é um vetor covariante,

$$\varphi_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}}.$$

Componentes contravariantes e covariantes juntamente com invariantes são casos particulares de componentes de um objeto chamado de tensor, cujas componentes cartesianas são identificadas através de n índices contravariantes e m índices covariantes e se transformam como

$$\bar{T}^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}(\bar{x}) = \Lambda^{\alpha}_{\ a}(x)\Lambda^{\beta}_{\ b}(x)\ldots T^{ab\ldots}_{pq\ldots}(x)\left(\Lambda^{-1}\right)^{p}_{\ \mu}(\bar{x})\left(\Lambda^{-1}\right)^{q}_{\ \nu}(\bar{x})\ldots. \tag{2.9}$$

Também podemos considerar que os componentes de um tensor generalizam o conceito e a forma geométrica de uma matriz. Uma ilustração do pressuposto é considerar um tensor de segunda ordem em um espaço tridimensional, sua representação matricial conteria nove números $\left(3^2 = 9\right)$, ou seja, uma matriz de três linhas e três colunas (fazendo uso da linguagem da álgebra linear, temos uma matriz com nove entradas).

Dois componentes de tensores de uma mesma ordem e um mesmo tipo, podem ser adicionados e juntos geram um novo tensor. Suponha, por exemplo, que as quantidades $A^r{}_{st}$ e $B^r{}_{st}$ sejam componentes tensoriais, e as quantidades $C^r{}_{st}$ sejam definidas por

$$C^r{}_{st} = A^r{}_{st} + B^r{}_{st}.$$

Torna-se visível que $C^r{}_{st}$ é tambem um componente tensorial. Qualquer combinação linear, com coeficientes invariantes, de tensores do mesmo tipo resultam em outro coeficiente tensorial de mesmo tipo. A soma das quantidades de índices covariantes e contravariantes determina a ordem do tensor. O produto de tensores é uma operação entre vários tensores de vários tipos que resultam que em um outro tensor.

Componentes de tensores podem também sofrer contração. Ela ocorre quando um indíce covariante se iguala a um índice contravariante, tornando uma soma fechada e reduzindo a ordem do tensor. Por exemplo, no componente tensorial de sétima ordem T^{ijkl}_{mnp}, se o índice contravariante i for igual ao índice covariante p, teremos uma contração, a saber

$$T^{ijkl}_{mnp} \underset{i=p}{\longrightarrow} T^{pjkl}_{mnp} = T^{jkl}_{mn}, \tag{2.10}$$

que o reduz a um componente tensorial de quinta ordem. Diremos então que ele foi “contraído”. Dizemos que o componente tensorial antes da contração é do tipo $(4, 3)$, ou seja possui quatro índices contravariantes e três índices covariantes. Quando contraído na equação (2.10) é do tipo $(3, 2)$.

Há aqui um detalhe importante a ser considerado: tensores apresentam componentes covariantes (índice subescrito), contravariantes (índice sobrescrito) e mistos (índices subescrito e sobrescrito). Estas podem ser convertidas uma nas outras dentro do mesmo sistema. Essa conversão depende de um dos tensores importantes na Relatividade Geral, o tensor métrico. Uma das funções desse tensor é atuar como um operador para levantar ou abaixar índices. O fato é que tensor métrico está por trás dos principais tensores da Relatividade Geral, isso porque está presente no comportamento da conexão métrica, que, por sua vez, está presente no comportamento do tensor de Riemann (falaremos de todos estes adiante).

Existem tensores com componentes simétricos em um dado par de índices de mesmo tipo. Por exemplo, o componente do tensor covariante A_{mn} é simétrico nos índices contravariantes m e n se

$$A_{mn} = A_{nm}. \tag{2.11}$$

Também existem os componentes antissimétricos em um dado par de índices de mesmo tipo. Por exemplo, A_{mn} é antissimétrico nos índices covariantes m e n se

$$A_{mn} = -A_{nm}. \tag{2.12}$$

A simetria e a antissimetria não são afetadas por transformações lineares. Essas observações sobre simetria e antissimetria, não se aplicam ao caso de componentes tensoriais mistos do tipo A^r_s, pois em geral a relação $A^r_s = A^s_r$ não transita de um sistema de coordenadas para outro.

Qualquer tensor de segunda ordem (contravariante ou covariante) pode ser expresso pela soma de tensores simétricos e antissimétricos. Por exemplo, para um tensor contravariante A^{rs}, tem-se

$$A^{rs} = \frac{1}{2}\left(A^{rs} + A^{sr}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{rs} - A^{sr}\right). \tag{2.13}$$

Ademais, é importante termos em mente que os tensores apresentam características muito importantes para a Relatividade Geral, como por exemplo: a conservação da natureza tensorial quando há mudanças de sistemas de coordenadas de S para $\bar{S}$. A característica de transformação dos tensores é uma lei que deve ser respeitada para que o objeto possa ser considerado um tensor.

2.1.2 Derivada covariante

O senso comum nos faz pensar que a derivada parcial de um componente tensorial, com respeito à uma coordenada, será também um componente de um tensor. Mas não é bem assim. Porém adicionando termos de conexão dados pelos símbolos Γ para ajustar a derivada obteremos um objeto que se transforma como um tensor. Isso é uma idéia muito importante em cálculo tensorial. Para uma região do espaço, podemos definir o que chamaremos de derivada covariante de um tensor.

Na física, a derivada covariante é a derivada que, sob uma transformação de coordenadas gerais, se transforma covariantemente, isto é, linearmente através da matriz jacobiana da transformação de coordenadas. Atua como uma generalização da derivada direcional do cálculo vetorial.

Desejamos que as leis sejam formuladas em termos de equações diferenciais que precisam ser covariantes, isto é, que relacionem grandezas mantendo seu caráter tensorial. Numa base natural de coordenadas x^{μ}, onde um campo vetorial é dado por seus componentes $V^{\mu}(x)$, podemos calcular as derivadas parciais desses componentes $\partial_{\nu}V^{\mu}$. Numa outra base de coordenadas $\bar{x}^{\mu}$, teremos

$$\bar{\partial}_{\nu}\bar{V}^{\mu}(\bar{x}) = \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}}\partial_{\xi}V^{\gamma}(x)\frac{\partial x^{\xi}}{\partial\bar{x}^{\nu}} + \frac{\partial^{2}\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\xi}\partial x^{\gamma}}V^{\gamma}(x)\frac{\partial x^{\xi}}{\partial\bar{x}^{\nu}}. \tag{2.14}$$

Como em geral ocorre que

$$\frac{\partial^{2}\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\xi}\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial x^{\xi}}\frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \neq 0, \tag{2.15}$$

temos que a equação (2.14) perde seu caráter tensorial, de modo que $\bar{\partial}_{\nu}\bar{V}^{\mu}(\bar{x})$ não formam os componentes de um tensor do tipo $(1,1)$.

Procedendo de mesmo modo, ao calcular a derivada parcial para um covetor, de componentes $\bar{C}_{\mu}(\bar{x})$, temos

$$\bar{\partial}_{\nu}\bar{C}_{\mu}(\bar{x}) = \partial_{\xi}C_{\gamma}(x)\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\xi}}{\partial\bar{x}^{\nu}} + C_{\gamma}(x)\frac{\partial x^{\xi}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\frac{\partial^{2}x^{\gamma}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^{\xi}\partial\bar{x}^{\mu}}. \tag{2.16}$$

Também temos que $\bar{\partial}_{\nu}\bar{C}_{\mu}(\bar{x})$ não se transforma como componentes de um tensor do tipo $(0,2)$.

Porém, é interessante notar que o termo suplementar nas equações é linear nos campos de modo que podemos definir uma conexão Γ, para que a derivada torne-se covariante em relação à direção da coodenada x^{ν}. Para o vetor contravariante V^{μ}, a derivada covariante será:

$$\nabla_{\nu}V^{\mu} = \partial_{\nu}V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\xi}V^{\xi}. \tag{2.17}$$

O termo Γ é chamado de conexão afim e é uma propriedade do espaço-tempo que se faz necessária para manter a derivação covariantemente conservada por transformações de coordenadas. A noção de conexão afim tem suas origens no estudo da Geometria de Superfícies, mas sua definição geral e sua teoria básica foram criadas por Gerhard Hessenberg em 1917 [3]. Na década de 1920, em vários trabalhos, essa noção foi sistematizada e estendida por Elie Cartan, que introduziu entre outras a noção de torção, da qual falaremos adiante, em 1922 [4]. Um ponto importante a se notar é que todos esses artigos fazem referência aos trabalhos de Einstein sobre a Teoria da Relatividade Geral, atestando assim a importância dessa teoria no desenvolvimento da Geometria Diferencial e, consequentemente, da Matemática.

A noção de conexão é fundamental por permitir introduzir uma noção de paralelismo entre vetores de espaços tangentes distintos e por permitir formalizar a noção de curvatura no contexto de variedades diferenciáveis. Em certas condições (que discutiremos no próximo capítulo), a conexão é dada pelos símbolos de Christoffel, que veremos adiante.

Para o covetor C_μ, a derivada seria:

$$\nabla_\nu C_\mu = \partial_\nu C_\mu - \Gamma^{\xi}_{\nu\mu} C_\xi. \tag{2.18}$$

Em ambos os casos, exigimos que a conexão se transforme de uma base de coordenadas para outra de modo que derivada se transforme como um tensor, forçando com que ocorra a covariância

$$\bar{\nabla}_\nu \bar{V}^\mu(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma} \nabla_\alpha V^\gamma(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu}. \tag{2.19}$$

Isso porque, Γ transforma-se como

$$\bar{\Gamma}^\mu_{\nu\xi}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\xi} + \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\xi}, \tag{2.20}$$

e como o termo $\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\xi}$ é simétrico em ν e ξ, a diferença

$$\bar{T}^\mu_{\nu\xi} = \Gamma^\mu_{\nu\xi} - \Gamma^\mu_{\xi\nu}, \tag{2.21}$$

se transforma como um tensor e define o que chamamos de torção da conexão. Discutiremos sobre isso no próximo capítulo.

Finalmente, podemos definir que para um tensor misto T^α_β, a derivada covariante com respeito à coordenada x^ν é dada por

$$\nabla_\nu T^\alpha_\beta = \partial_\nu T^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\nu\xi} T^\xi_\beta - \Gamma^\xi_{\nu\beta} T^\alpha_\xi. \tag{2.22}$$

2.1.3 Tensor métrico

Um produto escalar entre dois vetores contravariantes A e B é uma operação $A \cdot B$, com as seguintes propriedades[2]:

1. comutatividade: $A \cdot B = B \cdot A$;

2. linearidade: $(A + C) \cdot B = A \cdot B + C \cdot B$;

3. homogeneidade: $(aA) \cdot B = A \cdot (aB) = a(A \cdot B)$, a é uma constante real;

4. Não-negatividade: $A \cdot A \geq 0$, sendo igual a zero apenas se o vetor é nulo.

Tal produto pode ser definido por meio do contração do par de vetores e um tensor simétrico de 2 índices, a saber

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}. \tag{2.23}$$

Os componentes simétricos $g_{\mu\nu}$ são componentes de um tensor chamado tensor métrico e será apresentado de tal forma que o produto $A \cdot B$ seja igual a um invariante quadrático. Por exemplo, no espaço-tempo plano de Minkowski, o produto $A \cdot A$ será:

$$A \cdot A = \eta_{ab} A^a A^b = \left(A^0\right)^2 - \left|\overrightarrow{A}\right|^2, \tag{2.24}$$

onde

$$\left|\overrightarrow{A}\right|^2 = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} \tag{2.25}$$

é o produto escalar de um vetor por ele mesmo no espaço euclidiano, e onde

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

é o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski. No caso do espaço-tempo plano, a métrica de Minkowski é dada na expressão:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{2.27}$$

Entretanto essa métrica não cumpre a condição de positividade, sendo por essa razão chamada de pseudo-métrica.

A invariância da forma quadrática (2.6) são transformações de Lorentz. É uma propriedade correspondente à invariância do intervalo tal quando $A = ds$, e também é válido para qualquer quadri-vetor porque todos eles podem se transformar da mesma maneira.

Por outro lado, é claro que as rotações espaciais não afetam o produto $A \cdot A$, pois cada termo no lado direito da equação é invariante sob rotações espaciais.

Um espaço é dito métrico quando é possível definir uma distância infinitesimal ds (ou ds^2) entre dois pontos, denominada de forma métrica ou intervalo, ou ainda de elemento de linha e este, não importando qual o sistema de coordenadas ou referencial seja usado, mantenha-se invariante. A métrica é dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \tag{2.28}$$

em função de um tensor covariante simétrico, $g_{\mu\nu}$ que são funções de x. Se mantivermos um ponto fixo e variarmos o outro, então dx^{μ} será um vetor contravariante arbitrário desse espaço-tempo. Como segue da equação (2.23), o tensor $g_{\mu\nu}$ (ou sua forma inversa $g^{\mu\nu}$), positivo definido é chamado de tensor métrico ou tensor fundamental do espaço-tempo.

A partir do tensor covariante simétrico $g_{\mu\nu}$, podemos obter um outro tensor também de segunda ordem mas contravariante. Considere o determinante

$$g = \det\left(g_{\mu\nu}\right) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.29}$$

Assumiremos que g não seja nulo. Tomaremos $c^{\mu\nu}$ como sendo componentes da matriz cofator de g, de modo que cumpra

$$g_{\mu\alpha} c^{\alpha\nu} = g_{\alpha\mu} c^{\nu\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu} g. \tag{2.30}$$

Isso segue as regras comuns para desenvolvimento de determinantes. Agora vamos definir a forma inversa da métrica $g^{\mu\nu}$ pela equação

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} c^{\mu\nu}. \tag{2.31}$$

Segue de (2.30) que

$$g_{\mu\alpha} g^{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} g^{\nu\mu} = \delta^{\nu}_{\alpha}. \tag{2.32}$$

Sua forma inversa também preserva a simetria em seus índices.

O tensor métrico é um tensor simétrico positivo-definido de ordem 2 que é usado para medir a distância em um espaço-tempo e também descrever a geometria desse espaço-tempo. Porém, na Relatividade Geral o tensor métrico ou simplesmente métrica, não é positivo-definido, e corresponde ao que, em matemática, é chamado de pseudométrica. Transmite todas as informação sobre estrutura causal e geométrica do espaço-tempo. Usando a métrica pode-se definir noções como distâncias, volume, ângulos, passado e futuro. É a variável fundamental para a teoria da Relatividade Geral. Por isso a importância da existência de um tensor métrico. Esta possibilita estabelecer um relação bi-unívoca entre vetores covariantes e contravariantes em um sistema. Esta relação também requer o uso do tensor contravariante simétrico $g^{\mu\nu}$.

Um espaço-tempo métrico onde a distância medida de 2 pontos é dada por $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$, possui uma propriedade de conexão entre seus tensores covariantes e contravariantes, a saber

$$U^{\alpha} = g^{\alpha\beta}U_{\beta} \text{ e } U_{\alpha} = g_{\alpha\beta}U^{\beta}. \tag{2.33}$$

Portanto a métrica é utilizada para levantar ou abaixar índices de tensores por contração.

Além disso algumas propriedades do espaço-tempo podem ser ditadas por sua métrica. Por exemplo: se a métrica é a mesma em cada ponto do espaço-tempo, este é dito homogêneo; em outras palavras o espaço-tempo é o mesmo visto de qualquer ponto de referência dado um tempo fixo.

Suponha que seja dada uma curva qualquer no espaço com a seguinte equação:

$$x^{\mu} = x^{\mu}(u), \tag{2.34}$$

onde u é um parâmetro. Se nós escrevermos um vetor tangente

$$\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{du}, \tag{2.35}$$

então um deslocamento infinitesimal nessa curva seria

$$dx^{\mu} = \dot{x}^{\mu}(u)\,du. \tag{2.36}$$

O comprimento desse deslocamento é dado através de (2.28) por

$$ds = \left(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} du, \tag{2.37}$$

de modo que o comprimento da curva entre pontos u_1e u_2 é

$$S = \int_{u_1}^{u_2} du \left(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.38}$$

Utilizando cálculos de variações no funcional S, sob métrica fixada, obteremos as equações de campo de Euler-Lagrange em primeira ordem, a saber

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = 0, \tag{2.39}$$

pois a Lagrangeana é $L = L\left(x^{\mu}, \dot{x}^{\mu}, u\right)$

$$L = \left(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.40}$$

Multiplicando a equação de campo por $2L$, podemos transformá-la em

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^{\alpha}} - 2L\frac{d}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = 0. \tag{2.41}$$

Mas

$$\frac{d}{du}\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = 2\frac{dL}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} + 2L\frac{d}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}}, \tag{2.42}$$

e por isso

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^{\alpha}} - \frac{d}{du}\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^{\alpha}} + 2\frac{dL}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = 0. \tag{2.43}$$

Cada termo é facilmente calculado como segue

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}; \tag{2.44}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = 2\frac{d}{du}\left(g_{\alpha\nu}\dot{x}^{\nu}\right) = 2\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + 2g_{\alpha\nu}\ddot{x}^{\nu}; \tag{2.45}$$

Para calcularmos o produto $\frac{dL}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}}$, considere que

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \frac{ds}{du} = L,\\ \ddot{s} &= \frac{d^2 s}{du^2} = \frac{dL}{du},\end{aligned}$$

para que

$$\frac{dL}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} g_{\alpha\nu}\dot{x}^{\nu}. \tag{2.46}$$

Portanto, a equação (2.43), torna-se

$$g_{\alpha\nu}\ddot{x}^{\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu\alpha}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} g_{\alpha\nu}\dot{x}^{\nu}, \tag{2.47}$$

onde os objetos

$$\gamma_{\mu\nu\alpha} = -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}, \tag{2.48}$$

são os símbolos de Christoffel de primeiro tipo, definidos com derivadas da métrica [5]. Ao multiplicarmos a equação pela métrica inversa $g^{\alpha\beta}$, obteremos

$$\ddot{x}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\nu}\dot{x}^{\nu}, \tag{2.49}$$

onde

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu\alpha}, \tag{2.50}$$

são os símbolos de Christoffel do segundo tipo. O lado direito da equação (2.49), é uma força generalizada.

Na teoria da relatividade geral os termos conexão afim são dados pela equação (2.50). A equação (2.49), para o caso em que a força generalizada é nula, torna-se uma equação de geodésica para a curva em (2.34) no espaço-tempo curvo.

2.2 Curvatura

2.2.1 Espaço plano e espaço curvo

A ideia de curvatura é simples e familiar na geometria euclidiana. Uma linha é curva se ela se desvia de uma linha reta e uma superfície é curva se se desviar de um plano. No entanto, normalmente é possível descobrir se uma superfície é ou não curvada por operações puramente intrínsecas na superfície. Vamos pensar na mais simples das superfícies curvas - uma esfera. Imagine um ser bidimensional que se move na superfície esférica e não consegue perceber nada fora dessa superfície. As operações que ele realiza consistem unicamente de medidas de distâncias (e eixos) na superfície. De sua propriedade geodésica (de menor distância) ele pode construir os grandes círculos em sua esfera. Se ele mede os ângulos de um triângulo esférico formado por grandes círculos, ele descobre que a soma dos ângulos é maior que dois ângulos retos. Este resultado diz a ele que sua região bidimensional não é um plano.

Este exemplo simples ilustra nosso ponto de vista ao discutir a curvatura de um espaço Riemanniano. A curvatura é considerada algo intrínseco ao espaço, e não como algo a ser medido pela comparação do espaço com outro. Não pensamos como algo incorporado em um espaço euclidiano, como somos tentados a fazer quando discutimos a geometria intrínseca de uma esfera.

A noção de curvatura tem uma longa história na Geometria Diferencial, especialmente no estudo da geometria de curvas e superfícies, existindo em diversas variantes relacionadas entre si de maneiras diversas [6]. Concentraremos no estudo do chamado tensor de curvatura, de importância central na Geometrias Riemanniana, em particular, na Teoria da Relatividade Geral.

Ao criar uma teoria geométrica num espaço Riemanniano, temos que generalizar nossos conceitos familiares de duas maneiras. Primeiro, temos que passar de três para N dimensões; em segundo lugar, temos considerar a possibilidade de uma curvatura intrínseca, como encontrado em uma superfície desenhada em um espaço-tempo euclidiano tridimensional.

Dizemos que o "nivelamento" do espaço-tempo, ou seja, o espaço-tempo é dito plano se sempre for possível escolher coordenadas para as quais a forma da métrica é

$$ds^2 = \epsilon_i \left(dx^i\right)^2, \tag{2.51}$$

com i variando de 1 a N, e onde os coeficientes ϵ_i assumem valores de $+1$ ou -1.

Portanto a questão é: dada uma métrica ds^2 qualquer, podemos por transformações de coordenadas reescrever ds^2 como na equação (2.51)? Sempre que isso for possível, teremos o espaço-tempo plano.

Explorando o significado da derivada covariante vista na equação (2.22), para um covetor qualquer de componentes V_μ, em relação à coordenada x^ν, temos

$$\nabla_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\beta_{\nu\mu} V_\beta. \tag{2.52}$$

Esta derivada é um tensor covariante de segunda ordem do tipo (0,2). Novamente, tomando a derivada covariante da expressão, mas dessa vez em relação à coordenada x^α, temos:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\nabla_\nu V_\alpha) &= \partial_\mu \partial_\nu V_\alpha - \partial_\mu \Gamma^\beta_{\nu\alpha} V_\beta - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \partial_\mu V_\beta - \Gamma^\beta_{\mu\nu} \partial_\beta V_\alpha + \\ &+ \Gamma^\beta_{\mu\nu} \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} V_\gamma - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} \partial_\nu V_\beta + \Gamma^\beta_{\mu\alpha} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} V_\gamma. \end{aligned} \tag{2.53}$$

De forma similar repetimos o processo, permutando a ordem de derivação, e obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \left(\nabla_\mu V_\alpha\right) &= \partial_\nu \partial_\mu V_\alpha - \partial_\nu \Gamma^\beta_{\mu\alpha} V_\beta - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} \partial_\nu V_\beta - \Gamma^\beta_{\nu\mu} \partial_\beta V_\alpha + \\ &+ \Gamma^\beta_{\nu\mu} \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} V_\gamma - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \partial_\mu V_\beta + \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \Gamma^\gamma_{\mu\beta} V_\gamma. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Definindo um tensor e fechando os temos de torção em $\bar{T}^\beta_{\nu\mu}$, o comutador $\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] V_\alpha$ é equivalente a

$$(\nabla_\alpha \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\alpha) V_\mu = R^\beta_{\ \nu\mu\alpha} V_\beta + \bar{T}^\beta_{\nu\mu} \nabla_\beta V_\alpha, \tag{2.55}$$

onde temos a origem do tensor de curvatura, também chamado de tensor de Riemann, dado por

$$R^\beta_{\ \alpha\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \Gamma^\beta_{\nu\mu} + \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} \Gamma^\beta_{\nu\gamma} - \Gamma^\gamma_{\nu\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}. \tag{2.56}$$

O tensor de Riemann é responsável por descrever a curvatura do espaço-tempo tendo esse qualquer número de dimensões. Esse objeto tensorial surge graças a uma peculiaridade do operador derivada covariante vista em (2.55). Graças a não comutação das derivadas covariantes de um tensor podemos construir o comportamento do tensor de Riemann. A importância desse tensor está, também, no fato de que ele é responsável pelo surgimento dos objetos: tensor de Ricci e escalar de curvatura.

Na equação (2.55) devemos notar que quando houver houver simetria nos índices α e ν, o membro esquerdo da igualdade se anula e, além do mais, também implica que não ocorre torção no espaço, levando o tensor de curvatura a se tornar identicamente nulo. Portanto, uma condição necessária para que o espaço seja plano é dada pela nulidade do tensor de curvatura, a saber

$$R^{\beta}_{\ \alpha\nu\mu} = 0. \tag{2.57}$$

A propósito, o tensor de curvatura apresenta algumas propriedades interessantes [7]:

- É antissimétrico nos dois últimos índices covariantes

$$R^{\beta}_{\ \alpha\nu\mu} = -R^{\beta}_{\ \alpha\mu\nu}; \tag{2.58}$$

- Possui uma simetria cíclica, chamada identidade de Bianchi

$$R^{\beta}_{\ \alpha\nu\mu} + R^{\beta}_{\ \nu\mu\alpha} + R^{\beta}_{\ \mu\alpha\nu} = 0. \tag{2.59}$$

Podemos abaixar o indice contravariante com o auxílio do tensor métrico e obter um tensor covariante de quarta ordem

$$R^{\beta}_{\ \alpha\nu\mu} = g^{\beta\gamma} R_{\gamma\alpha\nu\mu}, \tag{2.60}$$

$$R_{\gamma\alpha\nu\mu} = g_{\gamma\beta} R^{\beta}_{\ \alpha\nu\mu}. \tag{2.61}$$

De modo que a equação (2.59) se reescreve na forma covariante da identidade de Bianchi para o tensor de curvatura

$$R_{\gamma\alpha\nu\mu} + R_{\gamma\nu\mu\alpha} + R_{\gamma\mu\alpha\nu} = 0. \tag{2.62}$$

Quando a conexão afim é simétrica em seus índices inferiores, podemos inferir da equação (2.56) que a identidade em (2.62) pode assumir a forma em derivadas covariantes

$$\nabla_{\kappa} R_{\gamma\alpha\nu\mu} + \nabla_{\mu} R_{\gamma\alpha\kappa\nu} + \nabla_{\nu} R_{\gamma\alpha\mu\kappa} = 0, \tag{2.63}$$

conhecida por identidade de Bianchi do segundo tipo.

2.2.2 Tensor de Ricci, escalar de curvatura e tensor de Einstein

Objetos que surgem do tensor de Riemann aparecem diretamente no comportamento do tensor de Einstein, principal tensor da Relatividade Geral. Eles surgem a partir de contrações específicas dos índices do tensor de Riemann.

A contração interna do tensor de Riemann, no índice contravariante e no segundo covariante, com o tensor métrico resulta no tensor de Ricci. Este é um tensor covariante de segunda ordem simétrico

$$R_{\alpha\nu} = R^{\beta}_{\ \alpha\nu\beta}. \tag{2.64}$$

O invariante de curvatura R, ou escalar de curvatura, é definido como sendo a contração obtida pelo traço do produto tensorial entre o tensor métrico e o tensor de Ricci,

$$R = g^{\alpha\nu}R_{\alpha\nu} = R^{\alpha}_{\alpha}. \tag{2.65}$$

Contraindo os índices γ e ν com o auxílio do tensor métrico e explorando a antissimetria do tensor de curvatura, teremos:

$$\nabla_{\kappa}R_{\alpha\mu} - \nabla_{\mu}R_{\alpha\kappa} - \nabla_{\nu}R^{\nu}_{\ \alpha\kappa\mu} = 0, \tag{2.66}$$

Contraindo dessa vez os índices α e μ, chegaremos a

$$\nabla_{\kappa}R = 2\nabla_{\mu}R^{\mu}_{\kappa}.$$

Ao isolarmos a derivada covariante, obtemos

$$\nabla_{\kappa}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = \nabla_{\kappa}G_{\mu\nu} = 0. \tag{2.67}$$

onde surge um tensor simétrico $G_{\mu\nu}$, chamado de tensor de Einstein dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{2.68}$$

Como vimos em (2.67), esse tensor deve se conservar covariantemente. Quando o tensor $G_{\mu\nu}$ anula-se, obtemos as equações de Einstein. Estas podem ser consideradas como um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem para o campo tensorial métrico $g_{\mu\nu}$. Existem dez equações independentes (já que ambos os lados são tensores de dois índices simétricos).

Veremos na próxima seção que esse resultado é fundamental para a teoria da Relatividade Geral.

2.3 Ação de Einstein-Hilbert

2.3.1 Construção da integral fundamental

Nesta secão, encontraremos as equações de Einstein, a partir da variação da ação de Einstein-Hibert. A derivação da ação de um conjunto de equações de movimento é muito difícil, nem sempre possível, e não há maneira sistemática de fazê-lo [8]. Então, primeiro procuramos por invariantes ou escalares na teoria da gravitação, ou seja, precisamos montar uma ação como

$$I = \int_{\Omega} d\omega L.$$

Onde L é uma densidade lagrangeana que é um escalar, e $d\omega$ é o elemento de volume do espaço-tempo e Ω é o quadri-volume da regiaõ de integração neste espaço-tempo. Uma transformação de coordenadas leva à

$$d\bar{\omega} = J d\omega.$$

onde

$$J = \det\left(\frac{d\bar{x}^{\alpha}}{dx^{\beta}}\right).$$

Sob a transformação de métrica, devemos ter

$$g_{\mu\nu} = \frac{d\bar{x}^{\alpha}}{dx^{\mu}}\frac{d\bar{x}^{\beta}}{dx^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}.$$

O determinante dessa expressão nos entrega

$$\begin{aligned}
\det\left(g_{\mu\nu}\right) &= \det\left(\frac{d\bar{x}^{\alpha}}{dx^{\mu}}\right)\det\left(\frac{d\bar{x}^{\beta}}{dx^{\nu}}\right)\det\left(\eta_{\alpha\beta}\right), \\
&= J \cdot J\,(-1),
\end{aligned}$$

de modo que

$$J = \sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu}\right)} = \sqrt{-g}. \tag{2.69}$$

Portanto $\sqrt{-g}$ é o jacobiano da mudança na integral volume, e único campo básico para Lagrangeana é a métrica, que agora tratamos como variável dinâmica. Logo mais discutiremos também outra ação: a ação de Palatini. Então notaremos que enquanto a ação de Einstein-Hilbert dá ênfase à metrica, a ação de Palatini da ênfase à conexão.

A Lagrangeana L mais simples como função escalar da métrica $\left(g_{\mu\nu}\right)$ e suas derivadas que podemos escolher é o escalar de curvatura de Ricci $R,$ visto na equação (2.65), por ser um invariante sob mudança de coordenadas. Isso tendo em vista que ele pode ser obtido a partir do tensor de Riemann. Nossa densidade Lagrangeana então é $L = \sqrt{-g}R$. Portanto a ação de Einstein-Hilbert será dada pela integral de R vezes o elemento invariante de volume $d\omega\sqrt{-g}$, a saber:

$$I = \int_{\Omega} d\omega\sqrt{-g}R, \tag{2.70}$$

de modo a ação será construída com

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},$$

onde

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}, \tag{2.71}$$

e

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu\beta}, \tag{2.72}$$

é a conexão métrica, chamada de conexão de Levi-Civita ou símbolos de Christtofel com

$$\gamma_{\mu\nu\beta} = \partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}. \tag{2.73}$$

Para a ação (2.70), também consideramos que a métrica é covariantemente conservada, ou seja sua derivada covariante se anula.

2.3.2 A primeira variação da ação e as equações de campo de Einstein

Tal qual fundamentamos no capítulo anterior, o tratamento variacional será dado a partir de variações infinitesimais contínuas no espaço-tempo e nos campos, que neste caso serão os componentes do tensor métrico, a saber

$$\begin{aligned} \delta x^{\mu} &= \bar{x}^{\mu} - x^{\mu}; & (2.74) \\ \delta g^{ab} &= \bar{g}^{ab}(\bar{x}) - g^{ab}(x). & (2.75) \end{aligned}$$

Faremos variar a ação I, encontraremos a sua primeira variação na forma das variações (2.74) e (2.75), utilizando em seguida o princípio variacional de Weiss, para encontrar as equaçoes de campo da ação e por fim estudaremos os termos de borda encontrando quantidades conservadas.

Procedento da equação (2.70), a primeira variação da ação começa por

$$\delta I = \delta \int_{\Omega} d\omega \sqrt{-g} R = \int_{\Omega} \delta d\omega \sqrt{-g} R + \int_{\Omega} d\omega \delta \left[\sqrt{-g} R\right]. \tag{2.76}$$

Mas como vimos no primeiro capítulo, na equação (1.19)

$$\delta d\omega = d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \delta x^{\mu}, \tag{2.77}$$

portanto,

$$\delta I = \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \delta x^{\mu} \sqrt{-g} R + \int_{\Omega} d\omega \delta \left[\sqrt{-g} R\right]. \tag{2.78}$$

Trabalhando a primeira integral, notamos que

$$\frac{d}{dx^{\mu}} \delta x^{\mu} \sqrt{-g} R = \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\sqrt{-g} R \delta x^{\mu}\right] - \delta x^{\mu} \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\sqrt{-g} R\right]. \tag{2.79}$$

Isso pode ser substituído na integral gerando a expressão

$$\delta I = \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\sqrt{-g} R \delta x^{\mu}\right] + \int_{\Omega} d\omega \left\{\delta \left[\sqrt{-g} R\right] - \delta x^{\mu} \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\sqrt{-g} R\right]\right\}, \tag{2.80}$$

onde o operador diferencial $\bar{\delta}$, da equação (1.11) do capítulo anterior, reaparece deixando exposta uma parte do termo de fronteira na divergência total

$$\delta I = \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\sqrt{-g} R \delta x^{\mu}\right] + \int_{\Omega} d\omega \bar{\delta} \left[\sqrt{-g} R\right]. \tag{2.81}$$

O problema continua por calcularmos a variação $\bar{\delta}\left[\sqrt{-g}R\right]$. Esta se expande em

$$\bar{\delta}\left[\sqrt{-g}R\right] = \bar{\delta}\left(\sqrt{-g}\right) R + \sqrt{-g}\bar{\delta}R. \tag{2.82}$$

Onde primeiro a buscaremos a variação de $\sqrt{-g}$:

$$\bar{\delta}\left(\sqrt{-g}\right) = \bar{\delta}\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(-g\right)^{-\frac{1}{2}} \bar{\delta} g. \tag{2.83}$$

Aqui atendemos ao fato de que g é um determinante, mas $\bar{\delta}g$ é um operador diferencial que atua em um determinante. Portanto se comporta como uma derivada de determinante, que será dada por

$$\bar{\delta} g = g g^{\mu\nu} \bar{\delta} g_{\mu\nu}. \tag{2.84}$$

Como a variação de $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ é nula, devemos ter que

$$g^{\mu\alpha} \bar{\delta} g_{\alpha\mu} = -g_{\mu\alpha} \bar{\delta} g^{\mu\alpha}, \tag{2.85}$$

e por isso

$$\bar{\delta} g = -g g_{\mu\nu} \bar{\delta} g^{\mu\nu}. \tag{2.86}$$

Usando a equação (2.86) na (2.83), chegaremos ao resultado:

$$\bar{\delta}\left[\sqrt{-g}\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \bar{\delta} g^{\mu\nu}. \tag{2.87}$$

Calcularemos agora a variação no escalar de curvatura. Esta se expande para a expressão

$$\bar{\delta}R = \bar{\delta}\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) = R_{\mu\nu}\bar{\delta}g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\bar{\delta}R_{\mu\nu}. \tag{2.88}$$

O maior problema torna-se calcular a variação do tensor de Ricci, que envolverá variações nas derivadas do tensor métrico. Começaremos por

$$\bar{\delta}R_{\mu\nu} = \bar{\delta}\left(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right) + \bar{\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right) - \bar{\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu}\right). \tag{2.89}$$

Mas o que é a variação da derivada de $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$? Talvez ajude se soubermos que o operador $\bar{\delta}$, comuta com a derivação. Vejamos se isso é válido. A definição da variação desejada é dada pela diferença

$$\delta\left(\partial_\beta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) = \frac{\partial\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}}{\partial\bar{x}^\beta} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial\bar{x}^\beta}. \tag{2.90}$$

Continuamos com

$$\delta\left(\partial_\beta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial\bar{x}^\beta}\frac{\partial\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}, \tag{2.91}$$

e com o auxílio da equação (2.74), consegue-se expandir a variação para

$$\delta\left(\partial_\beta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) = \frac{\partial\left(\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial\bar{x}^\beta}\left(\delta x^\gamma\frac{\partial\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma}\right) + \delta x^\gamma\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\beta}\left(\frac{\partial\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma}\right). \tag{2.92}$$

Para uma variação em primeira ordem de δx^γ, chegamos a

$$\delta\left(\partial_\beta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) = \partial_\beta\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) + \delta x^\gamma\partial_\beta\partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \tag{2.93}$$

Com esse resultado encontramos,

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}\left(\partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) &= \delta\left(\partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \delta x^\gamma \partial_\gamma \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \\
&= \partial_\beta\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) + \delta x^\gamma \partial_\beta \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \delta x^\gamma \partial_\gamma \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \\
&= \partial_\beta\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{2.94}
$$

e descobrimos portanto, que para uma aproximação em primeira ordem, os operadores $\bar{\delta}$ e ∂_μ comutam. No entanto, o operador δ, não comuta com ∂.

Agora com o conhecimento de (2.94), retornamos para a variação do tensor de Ricci, na equação (2.89). Continuamos o cálculo inferindo

$$
\bar{\delta}R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \bar{\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right) - \bar{\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\right). \tag{2.95}
$$

Continuamos a expressão expandindo os termos cruzados

$$
\bar{\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right) = \left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\right)\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\left(\bar{\delta}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right), \tag{2.96}
$$

e

$$
\bar{\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\right) = \bar{\delta}\left(\Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\right)\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\bar{\delta}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\right). \tag{2.97}
$$

Note que a derivada covariante em em relação a x^α de $\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ é

$$
\nabla_\alpha\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) = \partial_\alpha\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\left(\bar{\delta}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right) - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\right) - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\right). \tag{2.98}
$$

E a derivada covariante em relação a x^ν de $\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}$ é:

$$
\nabla_\nu\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right) = \partial_\nu\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right) + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\left(\bar{\delta}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\right) - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\right) - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\right). \tag{2.99}
$$

Podemos, então, escrever a equação (2.95), em termos de derivadas covariantes. Chegaremos a isso isolando as derivadas parciais nessas equações anteriores,

$$
\partial_\alpha\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) = \nabla_\alpha\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\left(\bar{\delta}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right) + \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\right) + \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\left(\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\right), \tag{2.100}
$$

e

$$\partial_\nu \left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) = \nabla_\nu \left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\left(\bar{\delta}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\right) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}\right) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\right). \quad (2.101)$$

Por fim, ao somarmos as equações (2.96),(2.97),(2.100) e 2.101 com a ordem de sinais dada na equação (2.95) todos os termos se cancelam, restando apenas os termos de derivada covariante, reduzindo a variação a

$$\bar{\delta}R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu \left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right). \quad (2.102)$$

Para o caso particular em que $\delta x^\alpha = 0$, esta torna-se a equação de Palatini [5].

Agora, de posse dessas novas expressões, retornaremos à equação (2.82) e aplicaremos os resultados obtidos nas equações (2.87) , (2.88) e (2.102). Ao executar o processo, teremos

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\left[\sqrt{-g}R\right] &= \bar{\delta}\left[\sqrt{-g}\right]R + \sqrt{-g}\bar{\delta}R, \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\bar{\delta}g^{\mu\nu}R + \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}\bar{\delta}g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\bar{\delta}R_{\mu\nu}\right), \\
&= G_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\bar{\delta}g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\nabla_\alpha\left[g^{\mu\nu}\left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\alpha}\left(\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right)\right]. \quad (2.103)
\end{aligned}$$

Mas o primeiro termo em parenteses é o tensor de Einstein, que vimos anteriormente por meio da identidade de Bianchi, a saber

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R.$$

Aqui devemos observar a existência de uma relação matemática interessante ao nosso estudo. Note que o objeto no interior da derivada covariante da expressão (2.103) é um vetor. Agora observe que derivando um produto $\sqrt{-g}A^a$ onde A^a é um um vetor, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\partial_a\left(\sqrt{-g}A^a\right) &= A^a\partial_a\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\partial_a A^a, \\
&= \sqrt{-g}\nabla_a A. \quad (2.104)
\end{aligned}$$

A derivada covariante é convertida em uma derivada ordinária, pelo fator $\sqrt{-g}$.

Portanto, o termo sob a derivada covariante na equação (2.103) é mais uma parte do termo de fronteira, que destacaremos agora, pois todo esse termo será incluído em uma divergência total, tornando-se

$$\bar{\delta}\left[\sqrt{-g}R\right] = G_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\bar{\delta}g^{\alpha\beta} + \frac{d}{dx^{a}}\left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right)\right], \tag{2.105}$$

Enfim, podemos retornar até a equação (2.81) e encontrar a primeira variação da ação em sua forma completa

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\alpha}}\left[\sqrt{-g}\left(R\delta x^{\alpha} + g^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right)\right] \\ &+ \int_{\Omega} d\omega\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\bar{\delta}g^{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{2.106}$$

A integral da divergência total, é o termo de fronteira da ação. De modo que transformaremos a mesma em uma integral de superfície sobre a fronteira do volume, para obter

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\partial\Omega} d\sigma n_{\alpha}(x)\left[\sqrt{-g}\left(R\delta x^{\alpha} + g^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right)\right] + \\ &+ \int_{\Omega} d\omega\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\bar{\delta}g^{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{2.107}$$

A aplicação do princípio variacional de Weiss, nos diz que a variação da ação depende unicamente dos termos de fronteira. Sendo por esta razão, a integral de volume se anula

$$\int_{\Omega} d\omega G_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\bar{\delta}g^{\alpha\beta} = 0, \tag{2.108}$$

e obtemos assim as equações de campo de Einstein, para a ação de Hilbert, sem fontes de matéria

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0. \tag{2.109}$$

A forma completa das equações de campo de Einstein, nasce quando consideramos também uma Lagrangeana de matéria, na ação. Essas são as equações que na Teoria da Relatividade Geral mostram como a curvatura do espaço-tempo gera gravidade. Em sua forma completa, descreve como a matéria gera gravidade e, inversamente, como a gravidade afeta a matéria. As equações de campo de Einstein se reduzem à lei de Newton da Gravitação Universal no limite não-relativístico, isto é, a velocidades baixas e campos gravitacionais pouco intensos.

No entanto, a identidade Bianchi (2.67) representam quatro restrições nas funções $R_{\mu\nu}(x)$, portanto existem apenas seis equações verdadeiramente independentes em (2.68). Na verdade, isso é apropriado, pois se uma métrica é uma solução para a equação de Einstein em um sistema de coordenadas x^{μ}, ela também deve ser uma solução em qualquer outro sistema de coordenadas $\bar{x}^{\mu}$. Isso significa que existem quatro graus de liberdade não físicos no tensor $g_{\mu\nu}$, representados por quatro funções $\bar{x}^{\mu}(x)$, e devemos esperar que as equações de Einstein se restrinjam apenas aos seis graus de liberdade independentes de coordenadas.

Como equações diferenciais, estas são extremamente complicadas, pois o escalar e o tensor de Ricci são contrações do tensor de Riemann, que envolve derivadas e produtos dos símbolos de Christoffel, que por sua vez envolvem a métrica inversa e derivadas da métrica. Além disso, o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ geralmente envolverá também a métrica. As equações também não são lineares, de modo que duas soluções conhecidas não podem ser superpostas para encontrar uma terceira. Portanto é muito difícil resolver as equações de Einstein em qualquer tipo de generalidade e geralmente é necessário fazer algumas suposições simplificadoras. Mesmo no vácuo, onde definimos o tensor de energia-momento de matéria é igual a zero, a equação resultante (2.68) é muito difícil de resolver.

2.3.3 Termo de fronteira e quantidades conservadas

Nos termos de fronteira, ainda temos que estudar o que acontece nas variações $\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ e $\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}$. Para isso usaremos os símbolos de Christtofel da definição da equação (2.72). Mas antes, para simplificar a cadeia de cálculos por vir, definiremos o vetor

$$A^{\alpha} = g^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}. \tag{2.110}$$

Agora podemos calcular quem são os $\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ e $\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}$. Começaremos por $\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$. Temos

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \bar{\delta}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\nu\gamma}\right], \\
&= \frac{1}{2}\bar{\delta}g^{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\nu\gamma} + \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\bar{\delta}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\gamma} + \partial_{\nu}g_{\mu\gamma} - \partial_{\gamma}g_{\mu\nu}\right),
\end{aligned} \tag{2.111}$$

mas em virtude do que descobrimos na equação (2.94), o operador e a derivada comutam, de modo que

$$\partial_\mu \left(\bar{\delta} g_{\nu\gamma}\right) = \bar{\delta}\left(\partial_\mu g_{\nu\gamma}\right) \tag{2.112}$$

resulta que

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\bar{\delta} g^{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\nu\gamma} + \\ &+\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma}\left(\partial_\mu \bar{\delta} g_{\nu\gamma} + \partial_\nu \bar{\delta} g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \bar{\delta} g_{\mu\nu}\right).\end{aligned} \tag{2.113}$$

Guardamos essa equação e também outra, obtida por uma contração de α com ν encontraremos $\bar{\delta}\Gamma^\nu_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\Gamma^\nu_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\bar{\delta} g^{\nu\gamma}\gamma_{\mu\nu\gamma} + \\ &+\frac{1}{2} g^{\nu\gamma}\left(\partial_\mu \bar{\delta} g_{\nu\gamma} + \partial_\nu \bar{\delta} g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \bar{\delta} g_{\mu\nu}\right), \\ &= \frac{1}{2}\bar{\delta} g^{\nu\gamma}\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \frac{1}{2} g^{\nu\gamma}\partial_\mu \bar{\delta} g_{\nu\gamma}.\end{aligned} \tag{2.114}$$

Tentamos reduzir A^α a uma forma mais simples tanto quanto pudermos, explorando sinais e a simetria de suas partes

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\bar{\delta} g^{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\nu\gamma} + \\ &+\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\gamma}\left(\partial_\mu \bar{\delta} g_{\nu\gamma} + \partial_\nu \bar{\delta} g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \bar{\delta} g_{\mu\nu}\right), \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(2\partial_\mu g_{\nu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}\right)\bar{\delta} g^{\alpha\gamma} + \\ &+\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\gamma}\left(2\partial_\mu \bar{\delta} g_{\nu\gamma} - \partial_\gamma \bar{\delta} g_{\mu\nu}\right).\end{aligned} \tag{2.115}$$

O termo com $g^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^\nu_{\mu\nu}$ é mais simples:

$$\begin{aligned}g^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^\nu_{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha}\left[\frac{1}{2}\bar{\delta} g^{\nu\gamma}\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \frac{1}{2}\bar{\delta} g^{\nu\gamma}\partial_\mu \bar{\delta} g_{\nu\gamma}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\gamma}\right) g^{\mu\alpha}\bar{\delta} g^{\nu\gamma} + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\gamma}\partial_\mu \bar{\delta} g_{\nu\gamma}.\end{aligned} \tag{2.116}$$

Subtraindo a equação (2.116) da (2.115), resolvemos o termo A^{α},

$$
\begin{aligned}
A^{\alpha} \;=\;& \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{\delta}g^{\alpha\gamma}\left(2\partial_{\mu}g_{\nu\gamma}-\partial_{\gamma}g_{\mu\nu}\right)+\\
&+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\gamma}\left(2\partial_{\mu}\bar{\delta}g_{\nu\gamma}-\partial_{\gamma}\bar{\delta}g_{\mu\nu}\right)+\\
&-\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\gamma}\right)g^{\mu\alpha}\bar{\delta}g^{\nu\gamma}-\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\gamma}\partial_{\mu}\bar{\delta}g_{\nu\gamma},
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

que ao ser simplificado gera a expressão

$$
A^{\alpha} \;=\; \Theta^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\bar{\delta}g^{\kappa\gamma}+\Psi^{\mu\nu\alpha\gamma}\partial_{\mu}\bar{\delta}g_{\gamma\nu}, \tag{2.118}
$$

onde o objeto $\Psi^{\mu\nu\alpha\gamma}$ é definido como

$$
\Psi^{\mu\nu\alpha\gamma} \;=\; g^{\mu\nu}g^{\alpha\gamma}-g^{\gamma\nu}g^{\alpha\mu}, \tag{2.119}
$$

e o objeto $\Theta^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}$ como

$$
\Theta^{\alpha}_{\ \kappa\gamma} \;=\; \left(\partial_{\mu}g_{\nu\gamma}-\frac{1}{2}\partial_{\gamma}g_{\mu\nu}\right)g^{\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\kappa}-\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\partial_{\mu}g_{\kappa\gamma}. \tag{2.120}
$$

No entanto, empregaremos as transformações nas variações nos campos em (2.118) como segue [9],

$$
\bar{\delta}g_{\gamma\nu} \;=\; -g_{m\nu}g_{n\gamma}\bar{\delta}g^{mn}, \tag{2.121}
$$

para obter as variações das velocidades dos campos em componentes contravariantes. Com isso, continuamos da equação (2.118) que se modifica por:

$$
\begin{aligned}
A^{\alpha} &= \Theta^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\bar{\delta}g^{\kappa\gamma}-\Psi^{\mu\nu\alpha\gamma}\partial_{\mu}\left(g_{m\nu}g_{n\gamma}\bar{\delta}g^{mn}\right),\\
&= \Theta^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\bar{\delta}g^{\kappa\gamma}-\Psi^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\mu}\left(g_{\kappa\nu}g_{\gamma\beta}\right)\bar{\delta}g^{\kappa\gamma}-g_{m\nu}g_{n\gamma}\Psi^{\mu\nu\alpha\gamma}\partial_{\mu}\left(\bar{\delta}g^{mn}\right),\\
&= P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\bar{\delta}g^{\kappa\gamma}+Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\bar{\delta}\left(\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right),
\end{aligned}
\tag{2.122}
$$

onde condensamos todo o termo que multiplica a variação do tensor métrico no objeto

$$P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma} = \Theta^{\alpha}_{\ \kappa\gamma} + g_{\kappa\nu}g_{\gamma\beta}\partial_{\mu}\left(\Psi^{\mu\nu\alpha\beta}\right) - \partial_{\mu}Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}. \tag{2.123}$$

Além disso empregamos que

$$Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma} = g_{\kappa\nu}g_{\gamma\beta}\Psi^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{2.124}$$

Estes coeficientes representam os momentos covariantes dos campos e de suas "velocidades", respectivamente.

Retornemos à ação para substituir os resultados obtidos da equação (2.122) no termo de fronteira da ação que deixamos na equação (2.107). Assim

$$\begin{aligned} \delta I_{front} &= \int_{\partial\Omega} d\sigma n_{\alpha}(x)\sqrt{-g}\left(R\delta x^{\alpha} + A^{\alpha}\right), \\ &= \int_{\partial\Omega} d\sigma n_{\alpha}(x)\sqrt{-g}F^{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.125}$$

onde

$$F^{\alpha} = R\delta x^{\alpha} + P^{\alpha}_{\kappa\gamma}\bar{\delta}g^{\kappa\gamma} + Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\bar{\delta}\left(\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right), \tag{2.126}$$

lembrando que o termo de volume desapareceu com aplicação do princípio de Weiss. Resta resolver o operador diferencial $\bar{\delta}$, para separar o termo de fronteira em suas variações de campo e espaço. Seguindo nisso, teremos

$$\bar{\delta}g^{\kappa\gamma} = \delta g^{\kappa\gamma} - \delta x^{\beta}\partial_{\beta}g^{\kappa\gamma}; \tag{2.127}$$

$$\bar{\delta}\left(\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right) = \delta\left(\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right) - \delta x^{\beta}\partial_{\beta}\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}. \tag{2.128}$$

Na variação da ação em (2.125), podemos decompor o operador $\bar{\delta}$ no integrando de modo que

$$\begin{aligned} R\delta x^{\alpha} + P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\bar{\delta}g^{\kappa\gamma} + Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\bar{\delta}\left(\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right) &= \left(\delta^{\alpha}_{\beta}R - P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\partial_{\beta}g^{\kappa\gamma} - Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\partial_{\beta}\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right)\delta x^{\beta} + \\ &+ P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\delta g^{\kappa\gamma} + Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\delta\left(\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right). \end{aligned} \tag{2.129}$$

Aqui definiremos um último objeto, dado pelo coeficiente da variação em δx^{β}:

$$t^{\alpha}_{\ \beta} = P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\partial_{\beta}g^{\kappa\gamma} + Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\partial_{\beta}\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma} - \delta^{\alpha}_{\ \beta}R. \tag{2.130}$$

Este deveria ser o tensor de energia-momento dos campos $g^{\kappa\gamma}$. No entanto, este objeto depende não apenas dos campos $g^{\kappa\gamma}$ mas também de suas derivadas, dependendo assim do sistema de coordenadas e sendo covariante por este motivo. De modo que por não admitirem uma lei de conservação, fora do sistema de coordenadas, não sabemos do que esse termo trata.

A equação (2.125) passa a ser

$$\delta I_{front} = \int_{\partial\Omega} d\sigma n_{\alpha}(x)\sqrt{-g}\left[P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\delta g^{\kappa\gamma} + Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\delta\left(\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma}\right) - t^{\alpha}_{\ \beta}\delta x^{\beta}\right], \tag{2.131}$$

em analogia com a equação (1.38)

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}}\left[P^{\mu}_{\ i}\delta\varphi^{i} + Q^{\mu\nu}_{\ \ i}\delta\varphi^{i}_{\nu} - t^{\mu}_{\ \nu}\delta x^{\nu}\right].$$

encontrada do primeiro capítulo. Para a Lagrangeana dada pelo escalar de Ricci, R, os campos φ são dados aqui pelas componentes do tensor métrico $g^{\alpha\beta}$. Essa é a forma final do termo de fronteira da variação da ação para o campo gravitacional dada na equação (2.1), com os coeficientes das variações do espaço-tempo, dos campos e das velocidades sendo:

$$\begin{aligned}
t^{\alpha}_{\ \beta} &= P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma}\partial_{\beta}g^{\kappa\gamma} + Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}\partial_{\beta}\partial_{\mu}g^{\kappa\gamma} - \delta^{\alpha}_{\ \beta}R, \\
P^{\alpha}_{\ \kappa\gamma} &= \Theta^{\alpha}_{\ \kappa\gamma} + g_{\kappa\nu}g_{\gamma\beta}\partial_{\mu}\left(\Psi^{\mu\nu\alpha\beta}\right) - \partial_{\mu}Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma}, \\
Q^{\mu\alpha}_{\ \ \kappa\gamma} &= g_{\kappa\nu}g_{\gamma\beta}\Psi^{\mu\nu\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] Logan, J. D., Invariant Variational Principles, Academic Press, 1977;

[2] Synge, J. L., Schild, A.Tensor calculus, Dover Publications, 1978;

[3] Hessenberg, G. Vektorielle Begründung der Differential geometrie, Mathematische Annalen, 1917;

[4] Cartan, E. "Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion", C. R. Acad. Sci. Paris, 1922;

[5] d'Inverno, R. Introducing Einstein's relativity, Clarendon Press; Oxford University Press, 1992;

[6] Khriplovich, I.B., General Relativity, Springer, 2005;

[7] Bertschinger, E. Symmetry Transformations, the Einstein-Hilbert Action, and Gauge Invariance, MIT Department of Physics, 2002;

[8] Ferraro, R, Einstein's space-time: an introduction to special and general relativity, Springer, 2007;

[9] Carrol, S., Lecture Notes on General Relativity, 2011;

[10] Landau L.D., Lifshitz E.M., The classical theory of fieldsl, Butterworth Heinemann, 1980.

Capítulo 3

O Formalismo de Palatini

Introdução

A ação de Hilbert, tem como função de Lagrange o escalar de curvatura de Ricci, R, que inclui termos de derivadas de segunda ordem no tensor métrico $g_{\mu\nu}$ através de derivadas nas conexões, além do próprio tensor métrico. O matemático italiano Attilio Palatini esteve envolvido no cálculo diferencial absoluto e na Relatividade Geral [1]. Dentro deste último assunto, ele deu uma generalização sólida do princípio variacional, que fornece uma nova abordagem para a formulação variacional das equações de campo gravitacional de Einstein. Ao considerar a versão de Palatini da Lagrangiana de Einstein-Hilbert, a conexão e a métrica são tratadas como variáveis independentes e os símbolos de Christoffel aparecem apenas quando as equações de movimento são usadas. A partir desse formalismo variacional encontraremos as equações de campo de Einstein e a relação que deve existir entre o tensor métrico e sua conexão.

Desde o advento da Relatividade Geral, tentativas foram feitas para generalizá-la. As motivações originais para isso estavam relacionadas à unificação da gravitação e do eletromagnetismo, que hoje foram substituídos pelo desejo de se construir uma teoria unificadora de gravitação quântica.

Os formalismos de primeira ordem e segunda ordem não necessariamente são equivalentes, para a ação de Hilbert. Isso porque na formulação que trabalhamos da relatividade geral, a conexão é definida em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, pelos símbolos de Christoffel. Na formulação de Palatini, a métrica e a conexão são tomadas como variáveis independentes. A conexão não é, portanto, a conexão do Levi-Civita. Assume-se que é livre de torção, e nenhuma outra propriedade (compatibilidade métrica, por exemplo) é assumida. A ação de primeira ordem contém apenas derivadas da conexão e é linear nelas. Para obter as equações de movimento, agora é preciso variar a métrica e a conexão de forma independente. A equação de movimento da conexão nos dá a relação padrão entre a conexão e a métrica, e a equação métrica é após a substituição da solução para a outra equação, nada além da equação de Einstein [2].

Nessa abordagem, ocorre uma separação na estrutura causal do espaço-tempo e de sua estrutura afim (que determina quais geodésicas são seguidas por partículas), de modo que devemos diminuir a ordem do formalismo lagrangeano que construímos no primeiro capítulo para desenvolvermos a variação da ação.

3.1 Formalismo Lagrangeano de primeira ordem

3.1.1 Variação da ação, equações de campo e termos de fronteira

A formulação de Palatini da Relatividade Geral alivia o problema matemático do fato da existência de derivadas de segunda ordem nas componentes do tensor métrico. A Lagrangeana passa a ser uma função dependente apenas dos campos e das suas derivadas primeiras. Portanto, o problema variacional é tal que pode ser modelado por uma Lagrangeana do tipo:

$$L = L\left(x^{\mu}, \psi, \partial_{\mu}\psi\right). \tag{3.1}$$

Assim como fizemos no primeiro capítulo, desenvolveremos o formalismo matemático da variação da ação para uma Lagrangeana dada na equação (3.1).

Começamos por definir as variações que ocorrem no volume do espaço Ω

$$\delta x^{\mu} = \bar{x}^{\mu} - x^{\mu}. \tag{3.2}$$

e as variações infinitesimais nos campos ψ

$$\delta\psi = \bar{\psi}\left(\bar{x}\right) - \psi\left(x\right), \tag{3.3}$$

Construiremos uma ação I_P numa região Ω do espaço com uma função Lagrangeana L tal como em (3.1), por

$$I_P = \int_{\Omega} d\omega L. \tag{3.4}$$

A primeira variação da ação nos traz

$$\delta I_P = \int_\Omega d\omega \bar{\delta} L + \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\mu}\left(L\delta x^\mu\right), \tag{3.5}$$

a mesma expressão que encontramos na equação (1.21).

Agora, calculamos a primeira variação da Lagrangeana da equação (3.1) diretamente para obter

$$\bar{\delta} L = \bar{\delta}\psi \frac{\partial L}{\partial \psi} + \bar{\delta}\psi_\nu \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu}. \tag{3.6}$$

Porém, já sabemos que $\bar{\delta}$ comuta com as derivadas, de modo que podemos simplesmente rearranjar a derivada nesses termos obtendo

$$\bar{\delta} L = \bar{\delta}\psi \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dx^\nu}\frac{\partial L}{\partial \psi_\nu}\right) + \frac{d}{dx^\nu}\left(\bar{\delta}\psi \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu}\right). \tag{3.7}$$

Com o resultado em (3.7), voltamos à primeira variação da ação em (3.5) para separar os termos de divergência no volume

$$\delta I_P = \int_\Omega d\omega \bar{\delta}\psi \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{dQ^\nu}{dx^\nu}\right) + \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\nu}\left(L\delta x^\nu + \bar{\delta}\psi Q^\nu\right), \tag{3.8}$$

onde os Q^ν são os momentos conjugados dos campos ψ, e são dados por

$$Q^\nu = \frac{\partial L}{\partial \psi_\nu}. \tag{3.9}$$

Podemos expandir os elementos na divergência decompondo o operador $\bar{\delta}$ em suas variações individuais para encontrar os coeficientes. A primeira variação da ação em sua forma final será:

$$\delta I_P = \int_\Omega d\omega \bar{\delta}\psi \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{dQ^\nu}{dx^\nu}\right) + \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\nu}\left(-T^\nu_\mu \delta x^\mu + \delta\psi Q^\nu\right). \tag{3.10}$$

Aqui, o elemento T^ν_μ é o tensor de energia-momento dos campos, dado sob a forma

$$T^{\nu}_{\mu} = \psi_{\mu} Q^{\nu} - \delta^{\nu}_{\mu} L. \tag{3.11}$$

A segunda integral da equação (3.10) é uma integral de uma divergência total no volume integrado Ω. Esta pode ser transformada em uma integral de superfície sobre a borda do volume $\partial\Omega$, apresentando-nos os termos de fronteira

$$\int_{\Omega} d\omega \frac{dF^{\nu}}{dx^{\nu}} = \int_{\partial\Omega} d\sigma n_{\nu}(x) F^{\nu}, \tag{3.12}$$

onde

$$F^{\nu} = -T^{\nu}_{\mu} \delta x^{\mu} + \delta\psi Q^{\nu}. \tag{3.13}$$

Uma aplicação do princípio variacional de Weiss na primeira variação da ação na equação (3.7), leva-nos às equações de campo (para cada campo ψ) admitindo que as integrais sobre o volume se anulam restando apenas a integral de superfície sobre a fronteira do volume, portanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{dQ^{\nu}}{dx^{\nu}} = 0. \tag{3.14}$$

3.2 A ação de Palatini

3.2.1 A primeira variação da ação

A variação devida a Palatini em 1919 [3], utiliza da mesma ação de Hilbert, todavia considera uma conexão generalizada, não necessariamente métrica, e que seja considerada variável independente na variação da ação,

$$I_P = \int_{\Omega} d\omega \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma, \partial\Gamma). \tag{3.15}$$

Dessa forma, diferente da ação métrica de Hilbert que deve ser carregada até a segunda derivada da variável dinâmica, aqui a ação métrica-afim depende somente da métrica, da conexão afim e de suas derivadas primeiras. Veremos que as equações de campo devida a variação $\delta g^{\mu\nu}$ serão as mesmas que encontramos no outro formalismo, combinadas com a solução das equações de campo que acompanham $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$.

Portanto, sob o formalismo de Palatini, tomamos a ação de Einstein-Hilbert e a faremos variar sob seu campo métrico e sobre suas conexões de forma independente. O escalar de curvatura de Ricci é definido por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

e o tensor de Ricci, definido por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta}. \tag{3.17}$$

Assim, a Lagrangeana é função do ponto do espaço-tempo, x, das componentes do tensor métrico e de suas conexões afins, $g^{\mu\nu}$e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, respectivamente e das derivadas de primeira ordem das conexões, $\partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Ao tomar a primeira variação da ação devemos esperar encontrar para essa Lagrangeana, equações de campo e termos de fronteira.

Supondo que ocorram as variações δx^μ no volume do espaço tempo, as variações $\delta g^{\mu\nu}$ nas componentes do tensor métrico e as variações $\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ nas conexões, todas definidas como

$$\delta x^\mu = \bar{x}^\mu - x^\mu, \tag{3.18}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - g^{\mu\nu}(x), \tag{3.19}$$

e

$$\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}(\bar{x}) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x), \tag{3.20}$$

faremos variar a ação de Einstein-Hilbert sob esses critérios.

Como fizemos antes, a primeira variação da expressão (3.15), nos leva a

$$\delta I_P = \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\alpha} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta x^\alpha \right) + \int_\Omega d\omega \bar{\delta} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right). \tag{3.21}$$

A partir desse ponto, os resultados serão diferentes. Começamos definindo uma densidade métrica por

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \tag{3.22}$$

pois toda a dependência da ação com a métrica está concentrada no fator $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, enquanto que o tensor de Ricci depende apenas da conexão e suas derivadas como mostrado na equação (3.17).

Resolvendo $\bar{\delta}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)$, teremos:

$$\bar{\delta}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) = \bar{\delta}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}R_{\mu\nu}. \tag{3.23}$$

No entanto, a variação em $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ se expande para

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\mathfrak{g}^{\mu\nu} &= \bar{\delta}\left(\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\bar{\delta}g^{\mu\nu} \\
&= \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\right)\sqrt{-g}\bar{\delta}g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Separadamente, calculamos o termo $\bar{\delta}R_{\mu\nu}$. Este já havíamos calculado no capítulo anterior, considerando a torção do espaço tempo nula, onde obtivemos

$$\bar{\delta}R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}\left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\nu}\left(\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right). \tag{3.24}$$

No entanto, este resultado só é possível no caso de existência da simetria na conexão $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$, à qual atribuímos a propriedade de torção nula no espaço ou espaço sem torção. Consideraremos a princípio a existência de torção no espaço-tempo. Como vimos a torção é dada pela diferença assimétrica

$$\bar{T}^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}. \tag{3.25}$$

Portanto, ao utilizarmos a expressão (3.17) a variação no tensor $R_{\mu\nu}$ torna-se

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}R_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \\
&\quad +\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\bar{\delta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \\
&\quad -\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\bar{\delta}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Por outro lado tomamos derivadas covariantes

$$\nabla_{\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\bar{\delta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}, \tag{3.27}$$

e

$$\nabla_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \partial_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \Gamma^\beta_{\nu\mu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}. \tag{3.28}$$

Obtemos a diferença

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} &= \partial_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\bar{\delta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \\ &\quad -\partial_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha},\end{aligned} \tag{3.29}$$

para separar as derivadas ordinárias

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} &= \nabla_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \\ &\quad +\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\bar{\delta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\bar{\delta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \\ &\quad +\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \Gamma^\beta_{\nu\mu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ao substituirmos as derivadas ordinárias na variação do tensor de curvatura da equação (3.26), alguns termos cancelam-se restando

$$\bar{\delta}R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \bar{T}^\beta_{\alpha\nu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}. \tag{3.31}$$

Note que um termo de torção aparece em comparação à equação (3.24).

Porém, por conveniência, não empregaremos o uso de torção ao considerar que a conexão métrica possui a simetria $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$, que resulta em $\bar{T}^\beta_{\alpha\nu} = 0$. Retornando à variação em (3.21), teremos:

$$\begin{aligned}\delta I_P &= \int_\Omega d\omega \frac{d}{dx^\alpha}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta x^\alpha\right) + \int_\Omega d\omega\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\right)R_{\mu\nu}\bar{\delta}g^{\mu\nu} + \\ &\quad + \int_\Omega d\omega\mathfrak{g}^{\mu\nu}\left(\nabla_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Trabalhando um pouco mais a última integral, com o auxílio das equações (3.27) e (3.28), podemos separar os termos de fronteira das equações de campo. Teremos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}R_{\mu\nu} &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}\partial_\alpha \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\bar{\delta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \\ &\quad -\mathfrak{g}^{\mu\nu}\partial_\nu \bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\nu\mu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha},\end{aligned} \tag{3.33}$$

e separando termos para a fronteira chegamos a forma

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}R_{\mu\nu} &= \partial_\alpha\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right) + \\
&\quad + \left(\delta^\nu_\alpha\partial_\beta\mathfrak{g}^{\mu\beta} - \partial_\alpha\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} + \delta^\nu_\alpha\mathfrak{g}^{\gamma\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\beta}\right)\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Ao usarmos essa relação na primeira variação da ação em (3.32), teremos

$$\begin{aligned}
\delta I_P &= \int_\Omega d\omega\frac{d}{dx^\alpha}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta x^\alpha + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right) + \\
&\quad + \int_\Omega d\omega\sqrt{-g}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\right)\bar{\delta}g^{\alpha\beta} + \\
&\quad + \int_\Omega d\omega\left(\delta^\nu_\alpha\partial_\beta\mathfrak{g}^{\mu\beta} - \partial_\alpha\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} + \delta^\nu_\alpha\mathfrak{g}^{\gamma\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\beta}\right)\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

A aplicação do princípio variacional de Weiss, nos trará as equações de campo.

3.2.2 Equações de Campo

Como o termo de volume é dado como uma combinação linear de $\bar{\delta}g^{\mu\nu}$ e $\bar{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}$, e ambos são independentes um do outro, para anulá-lo, quando utilizarmos o princípio de Weiss, devemos ter duas equações de campo: uma para a métrica

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.36)$$

e outra para a conexão

$$\delta^\nu_\alpha\partial_\beta\mathfrak{g}^{\mu\beta} - \partial_\alpha\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} + \delta^\nu_\alpha\mathfrak{g}^{\gamma\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\beta} = 0. \quad (3.37)$$

Na equação de campo métrico, obtemos uma equação combinando métrica e curvatura. Sem o conhecimento da forma dos termos de conexão, não temos como avançar na equação.

Na equação de campo da conexão, no caso em que $\nu = \alpha$, ocorre que

$$(N-1)\,\partial_\beta\mathfrak{g}^{\mu\beta} + (N-1)\,\mathfrak{g}^{\beta\alpha}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.38)$$

implicando

$$\partial_\beta \mathfrak{g}^{\mu\beta} = -\mathfrak{g}^{\beta\alpha}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}. \tag{3.39}$$

Substituindo esse resultado em (3.37), resulta em

$$-\partial_\alpha \mathfrak{g}^{\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.40}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \mathfrak{g}^{\mu\nu} &= \partial_\alpha\sqrt{-g}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\alpha g^{\mu\nu}, \\ &= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\beta\gamma} + \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\gamma\right)\partial_\alpha g^{\beta\gamma},\end{aligned} \tag{3.41}$$

escrevendo a relação (3.40) em termos da métrica, o fator $\sqrt{-g}$ desaparece restando a expressão

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\beta\gamma}\partial_\alpha g^{\beta\gamma} - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\gamma\partial_\alpha g^{\beta\gamma} + g^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.42}$$

Multiplicando por $g_{\mu\nu}$, obtemos

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)g_{\beta\gamma}\partial_\alpha g^{\beta\gamma} + (N-2)\,\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.43}$$

implicando que

$$g_{\beta\gamma}\partial_\alpha g^{\beta\gamma} = -2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}. \tag{3.44}$$

Substituindo esse resultado na equação (3.42), chegamos à relação de compatibilidade métrica.

$$\partial_\alpha g^{\mu\nu} + g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0. \tag{3.45}$$

3.3 Os símbolos de Christoffel

Vimos no capítulo anterior que uma métrica num espaço Riemanniano é dada por um tensor simétrico $g_{\beta\mu}(x)$ do tipo $(0,2)$ não degenerado tal que exista um inverso que faça

$$g_{\beta\mu}g^{\mu\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{3.46}$$

onde δ^{α}_{β} é um tensor constante do tipo $(1,1)$ delta de Kronecker. Portanto, sendo a derivada covariante do tensor métrico nula, conforme a equação (3.45), podemos inferir que para a sua inversa $g_{\beta\mu}$ vale

$$\nabla_{\alpha}g_{\beta\mu} = 0. \tag{3.47}$$

Isso leva a

$$\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} = \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}. \tag{3.48}$$

Permutando os índices teremos outras expressões análogas,

$$\partial_{\beta}g_{\alpha\mu} = \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}, \tag{3.49}$$

$$\partial_{\mu}g_{\alpha\beta} = \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}. \tag{3.50}$$

Somando as equações (3.48) e (3.49) , e subtraindo a equação (3.50) tem-se:

$$\begin{aligned}\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta}g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta} &= \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + \\ &\quad + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} + \\ &\quad - \left(\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}\right)\end{aligned} \tag{3.51}$$

Cancelamos quase todos os termos restando

$$2\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} = \partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta}g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}. \tag{3.52}$$

Utilizando a métrica inversa para isolar o termo de conexão obtemos

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\delta^{\gamma}_{\nu} \;=\; \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\left(\partial_{\alpha}g_{\beta\mu}+\partial_{\beta}g_{\alpha\mu}-\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\right), \tag{3.53}$$

e chegamos à uma solução para $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, a saber

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \;=\; \left\{\begin{matrix}\nu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_{\alpha}g_{\beta\mu}+\partial_{\beta}g_{\alpha\mu}-\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\right). \tag{3.54}$$

Os objetos $\left\{\begin{matrix}\nu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}$ são os chamados de símbolos de Christoffel [4]. Estes foram aqui usados no capítulo anterior para o cálculo da ação de Einstein-Hilbert no formalismo de segunda ordem. Essa conexão métrica, torna as equações de campo para a métrica em (3.36), nas equações de Einstein-Hilbert para a ação, que obtivemos na equação (2.109).

A conexão será dada pelos símbolos de Christoffel sempre que houver compatibilidade métrica no espaço-tempo sem torção .

3.4 Termos de fronteira da ação de Palatini

Como evidenciado pela equação (3.13), o termo de fronteira guarda entidades físicas relevantes, que encontramos na combinação linear das variações dos campos. Seguindo com a equação (3.35), com a aplicação do princípio variacional de Weiss a primeira variação da ação, a mesma reduz-se a:

$$\delta I_P \;=\; \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\alpha}}\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta x^{\alpha}+\mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right). \tag{3.55}$$

Os termos de fronteira são portanto dados pelo gerador

$$F^{\alpha} \;=\; \mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta x^{\alpha}+\mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}. \tag{3.56}$$

Evidenciando a variação do termo de conexão, $\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, temos que

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\bar{\delta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} \;=\; \left(\delta^{\alpha}_{\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu}-\delta^{\nu}_{\beta}\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\right)\bar{\delta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}. \tag{3.57}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F^\alpha &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta x^\alpha + \left(\delta^\alpha_\beta \mathfrak{g}^{\mu\nu} - \delta^\nu_\beta \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\right)\bar{\delta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}, \\ &= \mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta x^\alpha + \mathfrak{p}^{\alpha\mu\nu}_\beta \bar{\delta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Os objetos $\mathfrak{p}^{\alpha\mu\nu}_\beta$ são densidades, mais precisamente os componentes dos momentos covariantes dos campos de conexão [6],

$$\mathfrak{p}^{\alpha\mu\nu}_\beta = \delta^\alpha_\beta \mathfrak{g}^{\mu\nu} - \delta^\nu_\beta \mathfrak{g}^{\mu\alpha}. \tag{3.59}$$

Ao decompormos o operador $\bar{\delta}$ na equação, teremos

$$F^\alpha = \mathfrak{p}^{\alpha\mu\nu}_\beta \delta\Gamma^\beta_{\mu\nu} - t^\alpha_\gamma \delta x^\gamma. \tag{3.60}$$

Como vimos na seção 3 do capítulo 1, os termos de fronteira são assim chamados por serem divergências totais integradas no volume, mostrando serem correntes conservadas de Noether. Estes são os campos presentes na borda $\partial\Omega$ da região de integração.

Os objetos t^α_γ, deveriam ser os componentes de um pseudo-tensor que se relacionam ao tensor densidade de energia-momento. No entanto não sabemos do que se tratam visto que não são totalmente covariantes e não admitem conservação, em transformação de coordenadas. São dados por

$$t^\alpha_\gamma = \mathfrak{p}^{\alpha\mu\nu}_\beta \partial_\gamma \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\gamma \mathfrak{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{3.61}$$

Para o caso em que a conexão é igual aos símbolos de Christtofel, o gerador de fronteira F^α, tende ao gerador da equação (2.126), nos levando aos resultados vistos no capítulo anterior.

Veremos no próximo capítulo que se trabalharmos com condições de fronteira fixas e com variação de campo nula na borda, os termos de fronteira que calculamos para a ação de Einstein-Hilbert e para a ação modificada de Palatini se reduzirão ao termo de Gibbons-Hawking-York.

Referências Bibliográficas

[1] Carmeli, M., Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory, World Scientific Publishing, 1981.

[2] Ortin, T., Gravity and Strings, Cambridge University Press, 2004.

[3] Earman, J., Janssen, M., Norton, J. D., The Attraction of Gravitation: New Studies in the History of General Relativity, Birkhäuser, 1993.

[4] Carroll, S., Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity, Benjamin Cummings, 2004.

[5] Álvaro de la Cruz-Dombriz, a Francisco J. Maldonado Torralba, Birkhoff's theorem for general stable torsion theories, arXiv:1811.11021v1.

[6] Bertin, M.C. F. G., Formalismo de Hamilton-Jacobi generalizado: Teorias de campos com derivadas de ordem superior, Universidade Estadual Paulista, 2010.

Capítulo 4

Gravidade Topologicamente Massiva e o Termo de Fronteira de Gibbons-Hawking-York

Introdução

O interesse em desenvolver teorias de gravitação em menos de quatro dimensões do espaço-tempo está crescendo, pois modelos de dimensões inferiores têm sido de enorme utilidade em praticamente todos os outros ramos da física. Na mecânica quântica, os potenciais em uma dimensão espacial fornecem os exemplos mais simples de quantização e tunelamento de energia [1]. Na mecânica estatística, o modelo bidimensional de Ising é um sistema exatamente solúvel que exibe uma transição de fase [1]. Exemplos em teorias de campos incluem o campo escalar em duas dimensões do espaço-tempo, usadas para descrever efeitos como quebra espontânea de simetria, e a eletrodinâmica quântica bidimensional de Schwinger. Modelos como esses são importantes porque ajudam a gerar novas ideias e a estimular novas intuições sobre suas contrapartes de dimensões mais altas. Além disso, fornecem um cenário simples no qual certos fenômenos físicos podem ser facilmente demonstrados, evitando as complexidades matemáticas freqüentemente encontradas em quatro dimensões. Aí reside a motivação para o estudo da gravidade em duas e três dimensões do espaço-tempo. Se os modelos de menor dimensão forem tão úteis para a teoria da gravitação quanto foram em outras áreas da física, então a sua busca é certamente válida.

A gravidade em duas dimensões [2] atraiu pouco interesse no passado, talvez porque a teoria da Relatividade Geral de Einstein pareça trivial em menos de quatro dimensões. Em três dimensões, a Teoria da Relatividade Geral não contém graus dinâmicos de liberdade e, correspondentemente, a versão quântica dessa teoria não conteria grávitons.

No entanto, a falta de qualquer conteúdo dinâmico verdadeiro em uma teoria não exclui necessariamente a possibilidade de aplicações interessantes, como foi mostrado com as teorias bidimensionais de Yang-Mills. Ao contrário, a gravidade tridimensional contém características interessantes em comum com a gravidade quadridimensional, por exemplo, efeitos globais e topológicos não triviais podem surgir na teoria. Além disso, o grupo de simetria da Relatividade em três dimensões é o grupo de difeomorfismos e, em particular, a ausência de dinâmica pode muito bem deixar o papel de difeomorfismos na teoria quântica não-obscurecido e mais facilmente compreendido.

A perspectiva de desenvolver modelos úteis parece ser ainda pior em duas dimensões do espaço-tempo, onde a teoria da Relatividade Geral é trivial. Mas isso simplesmente abre a oportunidade de criar uma teoria da gravidade bidimensional desde o começo. Tal desenvolvimento ocorreu [3], estabelecendo a teoria bidimensional como uma teoria de campo legítima. Trata-se da teoria de Dílatons.

4.1 Gravidade Tridimensional

A Relatividade Geral em três dimensões [4] exibe algumas características incomuns, que podem ser deduzidas das propriedades das equações de campo de Einstein e do tensor de curvatura. Em qualquer número de dimensões, as equações de Einstein para relatividade geral são lidas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

onde Λ é a constante cosmológica e em um espaço-tempo tridimensional a constante de acoplamento k tem dimensão de $(massa)^{-1}$(usando-se $c = 1$).

Por outro lado, as simetrias do tensor de curvatura $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ mostram que em três dimensões existem apenas seis componentes independentes, que são o mesmo número de componentes contidos no tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. De fato [5], o tensor de curvatura pode ser escrito em termos do tensor de Ricci como,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} R_{\nu\beta} + g_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta} R_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha} R_{\mu\beta} - \frac{1}{2} R \left(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \right). \tag{4.2}$$

Com as equações de campo da ação de Einstein-Hilbert, pode-se mostrar que o tensor de curvatura é totalmente determinado pela distribuição local de matéria $T_{\mu\nu}$ e pela constante cosmológica Λ. Em particular, para regiões do espaço-tempo sem fontes de matéria com $T_{\mu\nu} = 0$, devemos ter que o tensor de curvatura é

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \Lambda\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right), \tag{4.3}$$

e o escalar de curvatura $R = 6\Lambda$. Isso significa que quaisquer efeitos de curvatura produzidos pela matéria não se propagam pelo espaço-tempo, pois não existem graus dinâmicos de liberdade.

A falta de dinâmica na gravidade tridimensional de Einstein também pode ser vista do ponto de vista canônico pela contagem de graus de liberdade. A métrica espacial bidimensional e seu conjugado contêm, cada um, três componentes algebricamente independentes. Destes seis componentes, um é necessário para especificar a escolha de hipersuperfícies espaciais, enquanto outros dois são necessários para especificar coordenadas nessas hipersuperfícies bidimensionais. Finalmente, existem três restrições de valores iniciais que determinam completamente os componentes restantes.

Embora a curvatura local nas regiões livres de fontes não seja afetada por nenhuma matéria no espaço-tempo, é importante entender que a matéria ainda pode causar efeitos globais não triviais. Por exemplo, quando $\Lambda = 0$, a equação (4.3) diz que o tensor de curvatura desaparece sem fontes externas, e isso implica que podem ser encontradas coordenadas nas quais a métrica é $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Mas a transformação que faz isso não é, em geral, bem definida em todos os lugares, e a região fora das fontes como um todo pode não ser idêntica a uma região do espaço-tempo de Minkowski.

Efeitos geométricos globais não são triviais na gravidade tridimensional de Einstein, mesmo nas mais simples circunstâncias, incluindo casos com uma única massa pontual como fonte de curvatura.

Uma alternativa à gravidade de Einstein em três dimensões é a Gravidade Topologicamente Massiva, primeiramente discutida por Deser, Jackiw e Templeton [6]. Essa teoria é obtida incluindo-se na ação gravitacional a o termo secundário de Chern-Simons

$$I_{CS} = \int_\Omega d\omega\sqrt{-g}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\left(\partial_\nu\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\right) = \int_\Omega d\omega\epsilon^{\mu\nu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\left(\partial_\nu\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\right). \tag{4.4}$$

Aqui temos que $\varepsilon^{\mu\nu\alpha} = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{-g}}$, e $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ são os símbolos de Levi-Civita. Os termos Γ são os símbolos habituais de Christoffel e $\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$ é o tensor densidade totalmente antissimétrico.

4.2 Variação da ação de Chern-Simons

A ação completa é dada por acrescentamos à ação de Einstein-Hilbert o termo topológico de Chern-simons. Este termo é caracterizado pelo fato de não depender da métrica, mas apenas da conexão

$$A = I_{EH} + \frac{1}{2\mu} I_{CS}, \tag{4.5}$$

em que

$$I_{CS} = \int_{\Omega} d\omega \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \left(\partial_{\nu} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \Gamma^{\gamma}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} \right), \tag{4.6}$$

onde o elemento de volume é tridimensional $d\omega = d^3x$, com as conexões dadas pelos símbolos de Christtofel

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} \left(\partial_{\alpha} g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta} g_{\alpha\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\alpha\beta} \right). \tag{4.7}$$

A ação (4.6), possui um formalismo de segunda ordem no campo métrico, contudo possui uma característica especial que Relatividade Geral não possui. Ela é quadrática na velocidade.

Definindo as variações espacias para esse problema variacional as integrais podem ser resolvidas separadamente, pois são independentes. Como já resolvemos a primeira parte no capítulo 2, só precisamos calcular agora a segunda parte. Neste caso definiremos as variaçãoes

$$\delta g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - g^{\mu\nu}(x), \tag{4.8}$$

$$\delta x^{\mu} = \bar{x}^{\mu} - x^{\mu}. \tag{4.9}$$

Com a primeira variação da ação chegaremos em

$$\delta I_{CS} = \int_{\Omega} d\omega \partial_{\alpha} \left(L_{CS} \delta x^{\alpha} \right) + \int_{\Omega} d\omega \bar{\delta} L_{CS}, \tag{4.10}$$

com

$$L_{CS} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \left(\partial_{\nu} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \Gamma^{\gamma}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} \right). \tag{4.11}$$

Continuando

$$\bar{\delta} L_{CS} = \epsilon^{\mu\nu\alpha} \left[\bar{\delta} \left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \partial_{\nu} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \right) + \frac{2}{3} \bar{\delta} \left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} \right) \right]. \tag{4.12}$$

Separadamente resolvemos o termo $\bar{\delta}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right)$ para

$$\bar{\delta}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) = \bar{\delta}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) - \bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\partial_{\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}. \tag{4.13}$$

Com o auxílio dos $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$, conseguimos condensar o termo em

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\delta}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) = 2\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\bar{\delta}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right). \tag{4.14}$$

O termo $\bar{\delta}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\right)$ é mais simples e direto

$$\bar{\delta}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\right) = \bar{\delta}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\bar{\delta}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}, \tag{4.15}$$

e condensamos o termo com $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ em

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\delta}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\right) = 3\epsilon^{\mu\nu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}.$$

Então a variação da Lagrangeana é dada por

$$\bar{\delta}L_{CS} = 2\epsilon^{\mu\nu\alpha}\left[\partial_{\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}\right]\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta} + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right). \tag{4.16}$$

Note que a partir do tensor de curvatura

$$R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\beta}_{\gamma\mu}, \tag{4.17}$$

com o auxílio dos símbolos de Levi-Civita, chegaremos em:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\lambda\mu\nu}R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} &= \epsilon^{\lambda\mu\nu}\left(\partial_{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\beta}_{\gamma\mu}\right)\\ &= \epsilon^{\lambda\mu\nu}\left(-\partial_{\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\beta}_{\gamma\mu}\right),\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde utilizamos a simetria de tensor de Riemman e a antissimetria do símbolo de Levi-Civita. De modo que a variação da Lagrangeana pode ser escrita por

$$\bar{\delta} L_{CS} = -2\epsilon^{\lambda\mu\nu} R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} \bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right). \quad (4.19)$$

Utilizando a identidade de Bianchi

$$R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} + R^{\beta}_{\alpha\mu\nu} + R^{\beta}_{\nu\mu\alpha} = 0,$$

encontraremos

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu} R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu} R^{\beta}_{\alpha\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Com isso temos

$$\bar{\delta} L_{CS} = -\epsilon^{\lambda\mu\nu} R^{\beta}_{\alpha\mu\nu} \bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right). \quad (4.21)$$

Para continuar é interessante reescrever o $\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}$ em termos de derivadas covariantes. Prosseguindo então, primeiro mostramos essa expansão:

$$\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\bar{\delta}g^{\gamma\epsilon}\gamma_{\mu\beta\epsilon} + \frac{1}{2}g^{\gamma\epsilon}\left(\partial_{\mu}\bar{\delta}g_{\epsilon\beta} + \partial_{\beta}\bar{\delta}g_{\mu\epsilon} - \partial_{\epsilon}\bar{\delta}g_{\mu\beta}\right). \quad (4.22)$$

Transformando as derivadas ordinárias em covariantes, utilizando-se da compatibilidade métrica, alguns termos cancelam-se gerando

$$\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta} = \bar{\delta}g^{\gamma\epsilon}\Gamma^{\kappa}_{\mu\beta}g_{\kappa\epsilon} + g^{\gamma\epsilon}\Gamma^{\kappa}_{\mu\beta}\bar{\delta}g_{\kappa\epsilon} + \frac{1}{2}g^{\gamma\epsilon}\left(\nabla_{\mu}\bar{\delta}g_{\epsilon\beta} + \nabla_{\beta}\bar{\delta}g_{\mu\epsilon} - \nabla_{\epsilon}\bar{\delta}g_{\mu\beta}\right). \quad (4.23)$$

Mas como

$$\bar{\delta}g^{\gamma\epsilon}g_{\kappa\epsilon} + g^{\gamma\epsilon}\bar{\delta}g_{\kappa\epsilon} = \delta\left(\delta^{\gamma}_{\kappa}\right) = 0, \quad (4.24)$$

temos simplesmente que

$$\bar{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\epsilon}\left(\nabla_{\lambda}\bar{\delta}g_{\epsilon\beta} + \nabla_{\beta}\bar{\delta}g_{\lambda\epsilon} - \nabla_{\epsilon}\bar{\delta}g_{\lambda\beta}\right). \quad (4.25)$$

Lançando esse resultado na variação da Lagrangeana, poderemos condensar tudo na expressão

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}L_{CS} &= -\frac{1}{2}\left(g^{\alpha\iota}\epsilon^{\beta\mu\nu}R^{\kappa}_{\alpha\mu\nu} + g^{\alpha\iota}\epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta}_{\alpha\mu\nu} - g^{\alpha\beta}\epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\iota}_{\alpha\mu\nu}\right)\nabla_{\beta}\bar{\delta}g_{\iota\kappa} + \\
&\quad +\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right). \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Explicitando a variação no campo, separamos mais uma parte do termo de fronteira, ampliando a equação para

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}L_{CS} &= \frac{1}{2}\nabla_{\beta}\left(-\epsilon^{\beta\mu\nu}R^{\iota\kappa}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\iota\mu\nu}R^{\beta\kappa}_{\ \ \mu\nu}\right)\bar{\delta}g_{\iota\kappa} + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\nabla_{\beta}\left[\left(-\epsilon^{\beta\mu\nu}R^{\iota\kappa}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu}\right)\bar{\delta}g_{\iota\kappa}\right],
\end{aligned}
$$

resultando em

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}L_{CS} &= \epsilon^{\kappa\mu\nu}\left(\nabla_{\mu}R^{\iota}{}_{\nu} - \nabla_{\nu}R^{\iota}{}_{\mu}\right)\bar{\delta}g_{\iota\kappa} + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\nabla_{\beta}\left[\left(-\epsilon^{\beta\mu\nu}R^{\iota\kappa}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu}\right)\bar{\delta}g_{\iota\kappa}\right].
\end{aligned}
$$

Como o tensor de Cotton é definido por

$$
C^{\iota\kappa} = \varepsilon^{\kappa\mu\nu}\nabla_{\mu}\left(R^{\iota}{}_{\nu} - \frac{1}{4}\delta^{\iota}_{\nu}R\right) = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{-g}}\nabla_{\mu}\left(R^{\iota}{}_{\nu} - \frac{1}{4}\delta^{\iota}_{\nu}R\right),
$$

podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}L_{CS} &= \sqrt{-g}\varepsilon^{\kappa\mu\nu}\nabla_{\mu}\left(R^{\iota}{}_{\nu} - \frac{1}{4}\delta^{\iota}_{\nu}R\right)\bar{\delta}g_{\iota\kappa} + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\nabla_{\beta}\left[\left(-\epsilon^{\beta\mu\nu}R^{\iota\kappa}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu}\right)\bar{\delta}g_{\iota\kappa}\right], \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

usando a forma

$$
\delta g_{\iota\kappa} = -g_{\beta i}g_{\epsilon\kappa}\delta g^{\beta\epsilon}, \qquad (4.28)
$$

de modo que a integral torna-se

$$
\begin{aligned}
\delta I_{CS} &= -\int_{\Omega} d\omega\sqrt{-g}2C^{\iota\kappa}g_{\beta i}g_{\epsilon\kappa}\bar{\delta}g^{\beta\epsilon} + \int_{\Omega} d\omega\partial_{\alpha}\left(L_{CS}\delta x^{\alpha}\right) + \\
&\quad + \int_{\Omega} d\omega\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}\bar{\delta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\Omega} d\omega\nabla_{\beta}\left[\left(-\epsilon^{\beta\mu\nu}R^{\iota\kappa}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\nu}R^{\beta\iota}_{\ \ \mu\nu}\right)\bar{\delta}g_{\iota\kappa}\right]. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Note que o único termo que contribui efetivamente para as equações de campo é o termo explícito em $\bar{\delta}g^{\beta\epsilon}$ dado pelo tensor de Cotton. É fácil ver que os demais termos tratam-se de termos de fronteira.

Portanto, temos que a primeira variação da ação em (4.5) submetida ao princípio variacional de Weiss, gera as equações de campo

$$
G_{ik} - g_{ik}\Lambda + \frac{1}{2\mu}C_{ik} = 0. \qquad (4.30)
$$

Aqui C_{ik} é uma contração do tensor de Cotton.

4.3 Termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York

No capítulo 2, calculamos a primeira variação da ação de Hilbert e obtivemos objetos fisicamente estranhos no termo de fronteira. Comparemos o resultado do termo de fronteira que obtido com o termo de fronteira para a mesma ação conhecido como termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York. Antes vejamos a importância deste.

4.3.1 Um exemplo ilustrativo

Vamos considerar um campo escalar sem massa φ em uma região quadri-dimensional V do espaço-tempo com fronteira $\partial V = \Sigma$. E suponhamos que uma ação S que descreva a dinâmica desse campo seja da forma

$$
S(\varphi) = -\frac{1}{2}\int_{V} d^{4}x\,(\nabla\varphi)^{2}\sqrt{-g}. \qquad (4.31)
$$

Sua variação com respeito a φ é

$$
\begin{aligned}
\delta S(\varphi) &= -\frac{1}{2}\int_V d^4x\delta(\nabla\varphi)^2\sqrt{-g}, \\
&= -\frac{1}{2}\int_V d^4x\cdot 2\nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\delta\varphi\sqrt{-g}, \\
&= -\int_V d^4x\nabla^\mu\left(\delta\varphi\nabla_\mu\varphi\right)\sqrt{-g}+\int_V d^4x\delta\varphi\nabla^\mu\nabla_\mu\varphi\sqrt{-g}, \\
&= -\int_{\partial V=\Sigma} d^3\sigma^\mu\delta\varphi\nabla_\mu\varphi+\int_V d^4x\delta\varphi\,\Box\,\varphi\sqrt{-g}.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Se fixarmos os valores de φ na fronteira e forçarmos que $\delta\varphi\mid_\Sigma= 0$, então o problema variacional é bem definido porque o termo na fronteira se anula. Como a variação $\delta\varphi$ é arbitrária no volume total, temos neste as equações para o campo escalar

$$
\Box\varphi = 0, \tag{4.33}
$$

com

$$
\Box = \nabla^\mu\nabla_\mu.
$$

No entanto, é possível modificar a ação adicionando um termo de fronteira extra a ela. Isso não altera a variação da ação no volume. A diferença será apenas nas variações de limite. Para dar um exemplo, vamos considerar a seguinte ação

$$
S_\alpha(\varphi)=-\frac{1}{2}\int_V d^4x(\nabla\varphi)^2\sqrt{-g}+\alpha\int_\Sigma d^3\sigma^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi.
$$

A segunda integral pode ser escrita como uma integral de divergência total integrada no volume. Isso dá outra forma equivalente da ação como

$$
S_\alpha(\varphi) = -\frac{1}{2}\int_V d^4x\sqrt{-g}\left[(1-2\alpha)(\nabla\varphi)^2-2\alpha\varphi\,\Box\,\varphi\right].
$$

Sua variação traz

$$
\delta S_\alpha(\varphi) = \int_V d^4x\delta\varphi\,\Box\,\varphi\sqrt{-g}+(\alpha-1)\int_\Sigma d^3\sigma^\mu\delta\varphi\nabla_\mu\varphi+\alpha\int_\Sigma d^3\sigma^\mu\varphi\nabla_\mu\delta\varphi. \tag{4.34}
$$

Para $\alpha = 0$ reproduzimos a variação $\delta S(\varphi)$, e o problema variacional é bem definido pelas condições de contorno de Dirichlet $\delta\varphi\mid_\Sigma= 0$. Para $\alpha = 1$, o problema variacional é também bem definido por condições de contorno de Newmann $n^\mu\nabla_\mu\delta\varphi\mid_\Sigma= 0$. No caso geral, para tornar o procedimento de variação auto-consistente, é necessário impor a seguinte condição

$$\left[(\alpha - 1)\,\delta\varphi + n^{\mu}\nabla_{\mu}\delta\varphi\right] \quad |_{\Sigma} \quad = 0. \tag{4.35}$$

O que queremos mostrar com este exemplo é que o termo de fronteira na ação e as condições de contorno estão relacionadas entre si e devem ser consistentes. As condições de contorno naturais são aquelas que implicam o desaparecimento dos termos de fronteira na primeira variação da ação para um problema livre, isto é, quando as funções de campo não estão sujeitas a restrições nos limites da fronteira do volume de integração.

4.3.2 Termo de fronteira da ação de Einstein-Hilbert

A ação de Einstein-Hilbert contém as segundas derivadas da métrica e, portanto, é semelhante à ação $S(\varphi)$ para o campo escalar. Na maioria dos problemas físicos a métrica na fronteira do volume é assumida como dada, isto é, o problema de Dirichlet para a métrica é geralmente considerado. Neste caso, a variação da métrica na fronteira é definida como zero $\delta g^{\mu\nu} \;|_{\Sigma}= \delta g_{\mu\nu} \;|_{\Sigma}= 0$. Para ser mais preciso, é a métrica induzida, $h_{\mu\nu}$ na fronteira que deve ser fixada em vez de todos os componentes de $\delta g^{\mu\nu}$. Para que as condições de contorno de Dirichlet sejam condições de contorno naturais, deve-se determinar a forma do termo de contorno na ação. Isso significa que as derivadas normais das variações métricas no limite não devem aparecer na variação da ação total, incluindo a contribuição de superfície, porque caso contrário o problema variacional não será consistente [7].

No capítulo 2, haviamos calculado a primeira variação da ação de Einstein-Hilbert, chegando nas equações de campo da ação bem como nos termos de fronteira.

Na variação da ação de Einstein, da equação somente o termo $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ contém as derivadas segundas da variação da métrica. Após a integração eles serão resumidos a uma integral de superfície que não seja superior às variações da derivada de primeira ordem. Já os escrevemos explicitamente por

$$\delta I_{front} \quad = \quad \int_{\partial\Omega} d^3x \cdot n_{\alpha}(x)\sqrt{-g}\left[P^{\alpha}_{\kappa\gamma}\delta g^{\kappa\gamma} + Q^{\mu\alpha}_{\kappa\gamma}\partial_{\mu}\delta g^{\kappa\gamma} - T^{\alpha}_{\beta}\delta x^{\beta}\right]. \tag{4.36}$$

Temos que adicionar à ação de Einstein-Hilbert uma integral de superfície, cuja variação cancela o termo $Q^{\mu\alpha}_{\kappa\gamma}\partial_{\mu}\delta g^{\kappa\gamma}$. Vamos determinar essa integral. Os demais termos desaparecem naturalmente, com fronteira fixa $\delta x = 0$ e $\delta g = 0$ na fronteira de Ω.

Alternativamente, podemos obter o termo de fronteira com uma forma condensada em derivadas covariantes, continuando de

$$\delta I_{front} = \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{4.37}$$

Lembrando que

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,} \tag{4.38}$$

a equação (4.37) resulta em

$$\delta I_{front} = \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\nabla_{\alpha}\delta A^{\alpha}, \tag{4.39}$$

na qual

$$\delta A^{\alpha} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}. \tag{4.40}$$

Usando $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ em derivadas covariantes obteremos

$$\begin{aligned}
\delta A^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\epsilon}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\epsilon\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\epsilon} - \nabla_{\epsilon}\delta g_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\epsilon}\nabla_{\mu}\delta g_{\epsilon\nu}, \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\epsilon}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\epsilon\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\epsilon}\right) - \frac{1}{2}\left(g^{\epsilon\alpha}g^{\nu\mu} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\epsilon}\right)\nabla_{\epsilon}\delta g_{\mu\nu}, \\
&= g^{\mu\nu}g^{\alpha\epsilon}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\epsilon\nu} - \nabla_{\epsilon}\delta g_{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Definiremos

$$\int_{\Omega} d^4x\cdot\sqrt{-g}\nabla_{\alpha}\delta A^{\alpha} = \int_{\partial\Omega} d^3y\cdot Nn_{\alpha}\sqrt{h}\delta A^{\alpha}, \tag{4.42}$$

e que a métrica se decompõe na métrica induzida na fronteira e no produto de versores normais, a saber

$$g^{\mu\nu} = Nn^{\mu}n^{\nu} + h^{\mu\nu}. \tag{4.43}$$

Na superfície Σ, temos à mão a métrica em si, o vetor unitário normal n^{μ}, e suas primeiras derivadas. Variações de outros termos possíveis são de ordem superior em derivados de δg, então não precisamos incluí-los.

Um candidato para a integral de superfície, que é linear em derivadas, tem a forma

$$\int_{\Sigma} d\sigma^{\mu} n_{\mu} \nabla_{\alpha} n^{\alpha}.$$

A orientação é definida pelo requisito de que n^{μ} seja um campo vetorial unitário apontando para fora da fronteira, com o elemento de superfície como

$$d\sigma^{\mu} = N n^{\mu} \sqrt{|h|} d^3 y. \tag{4.44}$$

Aqui os y^i são as coordenadas da fronteira, h_{ij} é a métrica induzida na fronteira $\partial\Omega$ e

$$h = \det\left(h_{ij}\right).$$

Estamos excluindo o caso especial em que a superfíce da fronteira é nula. Em virtude disto temos

$$N = n_{\beta} n^{\beta} = \pm 1, \tag{4.45}$$

onde o vetor n^{μ} pode ser do tipo espacial, ou do tipo temporal. Para tal argumento, dizemos que a variedade M^4 que contem o espaço-tempo de volume Ω é envolvida por uma subvariedade N^3 no qual descrevemos a fronteira $\partial\Omega$ do espaço-tempo. Relacionamos as coordenadas x e y pelas relações

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}\left(y^i\right).$$

A métrica $g_{\mu\nu}$ no volume do espaço-tempo permite gerar um intervalo entre dois pontos de N^3. De tal modo que essa restrição da métrica na fronteira do volume gera a métrica induzida h. De modo que o intervalo é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^j} dy^i dy^j, \tag{4.46}$$

e transformado na fronteira pela métrica induzida é

$$dl^2 = h_{ij}dy^i dy^j, \quad (4.47)$$

com

$$h_{ij} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \quad (4.48)$$

A métrica induzida permite-nos definir uma derivada covariante e uma curvatura nesse subespaço, a saber, o tensor de curvatura $\mathcal{R}_{ijkl}$, o tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{jl} = h^{ik}\mathcal{R}_{ijkl}$ e o escalar de curvatura $\mathcal{R} = h^{ik}\mathcal{R}_{ik}$. Ela determina propriedades geométricas internas da subvariedade e a torna em um espaço Riemanniano. A quantidade que serve para caracterizar como a subvariedade é incorporada é chamada de curvatura extrínseca K.

Se tomamos um vetor normal n^α em Σ que obedeça à condição

$$n_\alpha \cdot \frac{\partial x^\alpha\left(y^i\right)}{\partial y^i} = 0, \quad (4.49)$$

de modo que na fronteira tenhamos

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \delta g_{\kappa\beta} &= 0, \\ h^{\alpha\beta}n_\beta &= h_{\alpha\beta}n^\beta = 0, \end{aligned}$$

e definirmos a condição na superfície Σ

$$f\left(x^\alpha\right) = 0, \quad (4.50)$$

nesse caso

$$n^\alpha \backsim f\left(x^\alpha\right),$$

e a curvatura extrínseca é definida pelo tensor simétrico

$$K_{\mu\nu} = -\nabla_\mu n_\nu. \quad (4.51)$$

É interessante notar que temos nessa relação dois espaços independentes de coordenadas que podem se transformar de formas independentes. Por esta razão objetos conectados à subvariedade possuem várias leis de transformação com respeito às coordenadas x ou y.

Portanto, com a aplicação das condições discutidas $\delta x = 0$ e $\delta g = 0$ ao termo de fronteira que calculamos no capítulo 2, reduziremos o termo a

$$\begin{aligned} \delta I_{front} &= \int_{\partial\Omega} d^3x \cdot n_\alpha(x)\sqrt{-g}Q^{\mu\alpha}_{\kappa\gamma}\partial_\mu\delta g^{\kappa\gamma}, \\ &= \int_{\partial\Omega} d^3y \cdot Nn_\alpha\sqrt{h}g^{\mu\nu}g^{\alpha\epsilon}\left(\nabla_\mu\delta g_{\nu\epsilon} - \nabla_\epsilon\delta g_{\mu\nu}\right). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Para ter um problema variacional bem definido para as flutuações totais da métrica, dada a variação da métrica em fronteira fixa, devemos insistir que após a integração não existam termos de fronteira proporcionais a $\partial_\alpha\delta g_{\mu\nu}$ (estamos impondo condições de fronteira de Dirichlet na métrica).

Calculamos separadamente o termo δA^α. Temos por uma contração no índice α, com a métrica que

$$\delta A_\lambda = g_{\lambda\alpha}\delta A^\alpha = \delta^\epsilon_\lambda g^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu\delta g_{\nu\epsilon} - \nabla_\epsilon\delta g_{\mu\nu}\right), \tag{4.53}$$

$$= g^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\right). \tag{4.54}$$

Tomando agora uma contração nessa expressão com o vetor normal n^λ, e utilizando a métrica induzida na superfície, chegaremos em

$$\begin{aligned} n^\lambda\delta A_\lambda &= n^\lambda\left(Nn^\mu n^\nu + h^{\mu\nu}\right)\left(\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\right), \\ &= n^\lambda n^\mu n^\nu N\left(\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\right) + n^\lambda h^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\right). \\ &= n^\lambda h^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu\delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{4.55}$$

onde o termo dos produtos $n^\lambda n^\mu n^\nu$ desaparece devido a antissimetria. Redistribuindo a derivada covariante no primeiro termo, ocorre que

$$n^\lambda\delta A_\lambda = n^\lambda\left[\nabla_\mu\left(h^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda}\right) - \delta g_{\nu\lambda}\nabla_\mu h^{\mu\nu}\right] - n^\lambda h^{\mu\nu}\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}, \tag{4.56}$$

o termo no interior dos colchetes se anula devido à condição $\delta g = 0$ e ortogonalidade na fronteira. Portanto,

$$\delta I_{front} = -\int_{\Sigma} d^3y \cdot \sqrt{h} N h^{\mu\nu} n^{\lambda} \nabla_{\lambda} \delta g_{\mu\nu}. \tag{4.57}$$

Gibbons, Hawking e York mostraram que é preciso regularizar a ação de Einstein-Hilbert com um termo de fronteira chamado termo de Gibbons-Hawking-York. Este deve possuir variação igual à encontrada na última equação.

Nós temos a relação dada pelo traço da curvatura extrínseca,

$$K = h^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta}. \tag{4.58}$$

A superfície será convexa sempre que $K > 0$ e concava sempre que $K < 0$. O tensor $K_{\alpha\beta}$ é intimamente relacionado com a derivada normal do tensor métrico. Enquanto $h^{\alpha\beta}$ se preocupa unicamente com aspectos intrínsecos puramente geométricos da hipersuperfície, $K_{\alpha\beta}$ se preocupa com os aspectos extrínsecos [8]. Tomados juntos estes tensores providenciam uma caracterização completa da hipersuperfície.

Em termos da métrica induzida,

$$K = -h^{\alpha\beta} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} n_{\gamma}. \tag{4.59}$$

Sua variação será

$$\delta K = -h^{\alpha\beta} \delta \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} n_{\gamma}. \tag{4.60}$$

Utilizando-se a equação (4.25) e usando o fato de que as derivadas tangenciais de $\delta g^{\gamma\epsilon}$ se anulam na fronteira, temos

$$\begin{aligned} \delta K &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} n_{\gamma} g^{\gamma\epsilon} \left(\nabla_{\alpha} \delta g_{\beta\epsilon} + \nabla_{\beta} \delta g_{\alpha\epsilon} - \nabla_{\epsilon} \delta g_{\alpha\beta} \right), \\ &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} n_{\gamma} g^{\gamma\epsilon} \nabla_{\epsilon} \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Escrevendo $g^{\gamma\epsilon}$ em termos da métrica induzida

$$\begin{aligned} \delta K &= \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}n_\gamma\left(h^{\gamma\epsilon}+Nn^\gamma n^\epsilon\right)\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta}, \\ &= \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}n_\gamma h^{\gamma\epsilon}\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}N^2n^\epsilon\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

podemos anular o primeiro termo por ortogonalidade,

$$\delta K = \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}n^\epsilon\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.62}$$

Portanto,

$$S_{GHY} = 2\int_\Sigma d^3y\sqrt{h}NK, \tag{4.63}$$

construído com a curvatura extrínseca, regulariza a ação de Einstein-Hilbert sem afetar as equações de campo.

Os termos de fronteira que havíamos calculado no capítulo 2 para a ação de Einstein-Hilbert, nas condições de borda propostas aqui, levam ao termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York. Para a maioria das escolhas de uma métrica induzida na fronteira $\sum$, as equações de Einstein devem produzir uma solução única em Ω, até os difeomorfismos que desaparecem na fronteira. Nesses casos, a ação de Einstein-Hilbert mais o termo de Gibbons-Hawking-York é bem aplicado. A contagem em quatro dimensões é a seguinte: das dez equações de campo para os dez componentes da métrica, existem quatro restrições. E as seis componentes da métrica induzida podem ser tomados como componentes irrestritas.

Para os termos de fronteira que calculamos no formalismo de Palatini no capítulo 3, no espaço sem torção, submetido às mesmas condições de fronteira vistas na subseção 4.3.1 reduzem-se à equação (4.63).

Referências Bibliográficas

[1] Ikeda, N., Two-Dimensional Gravity and Nonlinear Gauge Theory, 1993, https://arxiv.org/abs/hep-th/9312059.

[2] Brown, J. D., Lower Dimensional Gavity, World Scientific, 1988.

[3] Justin R. D., Minwalla, S., Nunez, C. Fermions in Bosonic String Theories, 2001, https://arxiv.org/abs/hep-th/0107165.

[4] Christensen, S. M., Quantum Theory of Gravity, A. Hilger, 1984.

[5] Eisenhart, L. P., Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1997.

[6] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Topologically massive gauge theories, Ann. Phys. 1982.

[7] Frolov, V. P., Zelnikov, A., Introduction to Black Hole Physics, Oxford University Press, 2011.

[8] Poisson, E., A Relativist's Toolkit - The Math of Black Hole Mechanics, Cambridge, 2004.

[9] Curry, S., Gover, A. R., An Introduction to Conformal Geometry and Tractor Calculus, with a view to aplications in General Relativity, 2015, https://arxiv.org/abs/1412.7559.

[10] Kuzenko, S. M. and Ponds, M. Topologically massive higher spin gauge theories, 2018, https://arxiv.org/abs/1806.06643.

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos a teoria da Relatividade Geral como teoria de campos em fronteira variável aplicando o princípio de Weiss em diferentes contextos. Como trata-se de um problema variacional, tivemos muitas vantagens em usar esse princípio variacional ao invés do princípio de Hamilton, que limita o estudo da ação ao interior do volume. Além disso o princípio de Weiss torna-se extremamente necessário quando contruímos a teoria em espaços não triviais [1].

No primeiro capítulo fizemos uma revisão da teoria clássica de campos utilizando o princípio variacional de Weiss e o primeiro teorema de Noether, no qual traçamos um caminho matemático que seguimos utilizando nas ações dos demais capítulos. Foi importante fazer isso pois a partir das equações calculadas, pudemos prever onde encerraríamos nossos cálculos nos termos de fronteira da ação de Einstein-Hilbert.

No segundo capítulo, calculamos a variação da ação de Einstein-Hilbert seguindo o formalismo já desenvolvido no capítulo anterior. Obtivemos com sucesso as equações de campo de Einstein, conforme pode ser encontrada na literatura, além de calcularmos os termos de fronteira, em condições de fronteira variável. Um problema maior a ser discutido é a conservação do tensor de energia-momento do campo gravitacional em ausência de matéria, que não apresenta uma lei geral de conservação [2]. É nosso interesse em pesquisas futuras compreender melhor a natureza dessa quantidade física.

O terceiro capítulo nos serviu para apresentar o formalismo de Palatini, no qual tomamos a métrica e a conexão como variáveis independentes da ação de Einstein-Hilbert, variando-a em relação a ambas. Curiosamente, calculamos que as equações de Euler-Lagrange para a conexão eram a condição que levava justamente aos símbolos de Christoffel [3]. Essa coincidência implica que a circunstância exata para a recuperação das equações de campo de Einstein seja a conexão de Levi-Civita. Isso torna os resultados equivalentes ao que foi cálculo no segundo capítulo. Em trabalhos futuros desejamos calcular uma conexão geral para espaços-tempo com torção e densidades métricas não simétricas.

O quarto capítulo serviu para aplicarmos o formalismo ao modelo de gravitação tridimensional com o termo de Chern-Simons e apresentamos um modo de regularizar a ação de Einstein-Hilbert com o termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York. Desejamos obter futuramente um termo análogo a este para o modelo de Gravitação Topologicamente Massiva.

Referências Bibliográficas

[1] Earman, J., Glymour, C. N., Stachel, J.J. Foundations of Space-Time Theories, University of Minnesota Press, 1977.

[2] Faraoni, V., Capozziello, S., Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics, Springer, 2011.

[3] Ortin, T., Gravity and Strings, Cambridge University Press, 2004.