



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**Jorge Ferreira Dantas Junior**

**Estatística Mediana no Contexto da Restrição de  
Parâmetros e Seleção de Modelos Cosmológicos**

Salvador-BA

2021

**JORGE FERREIRA DANTAS JUNIOR**

**ESTATÍSTICA MEDIANA NO CONTEXTO DA RESTRIÇÃO DE  
PARÂMETROS E SELEÇÃO DE MODELOS COSMOLÓGICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pesquisa e Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

SALVADOR-BA  
2021

**JORGE FERREIRA DANTAS JUNIOR**

**ESTATÍSTICA MEDIANA NO CONTEXTO DA RESTRIÇÃO DE  
PARÂMETROS E SELEÇÃO DE MODELOS COSMOLÓGICOS**

Salvador-BA, 12/02/2021

Comissão Examinadora

---

**Prof. Dr. Cássio Bruno Magalhães Pigozzo**

(Orientador)

---

**Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva**  
UFBA

---

**Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi**  
UFES

---

**Prof. Dr. Luciano Melo Abreu**  
UFBA

---

**Prof. Dr. André Luis Batista Ribeiro**  
UESC

*Aos meus filhos Jorge Neto, Guilherme e Ana Flor.  
E ao amor da minha vida, Mariana.*

# AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que fizeram parte deste processo, que culminou na realização de mais um sonho.

Agradeço aos meus Orixás e guias espirituais, que sempre estiveram ao meu lado, orientando e protegendo-me de todo infortúnio.

À minha família, ao meu saudoso e queridos pai(em memória), e a minha saudosa mãe(em memória) que sempre foi a minha inspiração acadêmica. Aos meus filhos Jorge Neto, Guilherme e Ana Flor, luzes da minha vida.

À minha amada esposa Mariana, não apenas pelo seu amor e carinho, mas por ser meu alicerce e principal incentivadora acadêmica. Meus dias tornaram-se mais belos quando me apaixonei por seu lindo sorriso.

A Cássio Pigozzo, pela confiança, parceria e compreensão. Além de um excelente professor, uma pessoa maravilhosa.

Aos meu amigos e colegas do Instituto de Física, Patrícia Hepp, Maróivo Pereira, Rosana Andrade, Luan Orion e aos demais colegas do curso de pós-graduação em Física. Ao grande amigo e colega de trabalho Flávio Costa pelo grande apoio que me deu, principalmente no que diz respeito as dificuldades encontradas neste trabalho.

A Pró-reitoria de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação (PRPGI) pela concessão da minha licença para o doutorado. Aos colegas professores, funcionários e gestores do IFBA - Campus Eunápolis, por todo o apoio e compreensão, possibilitando a realização dessa tese. Agradeço em especial, ao colega e amigo Fabíolo Amaral, pelo apoio e incentivo a mim e a todos que lutam por uma carreira acadêmica.

Ao Colegiado da Pós-Graduação em Física da UFBA por toda a atenção, cuidado e respeito aos alunos.

À FAPESB pela bolsa de estudos e por incentivar a vida acadêmica de tantos estudantes.

*"Existem três tipos de mentiras: mentiras,  
mentiras detestáveis e estatística".  
(Benjamin Disraeli)*

## RESUMO

Nas últimas décadas, a cosmologia vêm sendo guiada por um volume crescente de dados observacionais e suas complexidades. Em casos diversos, a Inferência Bayesiana mostrou-se superior às ferramentas estatísticas mais tradicionais por sua eficiência e base conceitual consistente. Utilizamos essa poderosa ferramenta estatística como alicerce em nosso trabalho, procurando melhorar a eficácia do método da Estatística Mediana, sugerido por J. R. Gott [1], para restrição de parâmetros e comparação de modelos cosmológicos. Para isso, contamos com o algoritmo UltraNest, que é uma biblioteca baseada em amostragem aninhada (do inglês, *Nested Sampling* [2]) de alto desempenho que ajusta e compara rapidamente modelos complexos. [3–6]. A construção da densidade de probabilidade alvo também é discutida na restrição de parâmetros cosmológicos, comparando a eficácia da Estatística Mediana com o método  $\chi^2$ , comumente utilizado. Para obter o melhor refinamento no tratamento dos dados para a restrição de parâmetros cosmológicos, aproveitamos a compilação JLA (sigla em inglês de *Joint Light-curve Analysis*) com amostras de 740 de Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia) dos projetos SDSS-II/SNLS3 [7], e o conjunto Pantheon [8] com 1048 SNe Ia; e por fim, analisamos as amostras de 1598 Quasares [9]. Aplicamos os métodos aos modelos cosmológicos:  $\Lambda$ CDM (padrão plano e com curvatura), e os modelos alternativos  $w$ CDM e CPL planos. Os resultados da pesquisa apontam que o método da Estatística Mediana consegue restringir parâmetros e selecionar modelos cosmológicos de forma satisfatória, e em alguns casos, mais restritivo que o método  $\chi^2$ . A Estatística Mediana mostrou-se consistente nas análises, principalmente quando a quantidade de dados das amostras possuía um tamanho significativo como, por exemplo, o catálogo Pantheon.

**Palavras-chave:** Supernova Tipo Ia. Estatísticas Medianas.  $\chi^2$ . UltraNest.

# ABSTRACT

In the last few decades, the main cosmology being guided by an increasing volume of observational data and its complexities. In several cases, the Bayesian Inference is shown to be superior to the most traditional statistical tool due to its efficiency and consistent conceptual basis. We use this powerful statistical tool as a foundation in our work, seeking to improve the effectiveness of the method of Average Statistics, suggested by J. R. Gott [1], for restricting parameters and comparing cosmological models. For this, we have the UltraNest algorithm, which is a library based on nested sampling (from English, *Nested Sampling* [2]) of high performance that quickly adjusts and compares complex models [3–6]. The construction of the target density is also be discussed in the constraining of cosmological parameters, and the effectiveness of the Median Statistics is compared against the commonly used  $\chi^2$  method. In order to obtain the best refinement in the treatment of the data for the restriction of cosmological parameters, we enjoy the compilation JLA (acronym in English of *Joint Light-curve Analysis*) with samples of 740 of Type Ia Supernovae (SNe Ia) of SDSS-II / SNLS3 projects [7], and the Pantheon [8] ensemble with 1048 SNe Ia; and finally, we analyzed the samples from 1598 Quasars [9]. We use the cosmological models:  $\Lambda$ CDM (flat and curved), and the alternative models  $w$ CDM and CPL flat. The results show that the method of Median Statistics can constraining parameters and select cosmological models in a satisfactory way, and in some cases, more constraining than the  $\chi^2$  method. The method of the Median statistics proved to be consistent in the analyzes, mainly when the amount of data of the samples had a significant size, like the Pantheon.

**Keywords:** Type Ia Supernovae. Median Statistics.  $\chi^2$ . UltraNest.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Histograma de compartimentos mostra as 10 medidas de $x$ que estão nos "compartimentos". A área do retângulo acima de cada intervalo indica a fração da medida daquele intervalo. E no caso da área do retângulo sombreada, indica que $3/10 = 0,3$ de todas as medições estão entre 23 e 24 [10, p.125].	4
Figura 2.2 – Histograma de compartimentos mostra as 100 medidas de $x$ que estão nos "compartimentos". A área do retângulo acima de cada intervalo indica a fração da medida daquele intervalo. E no caso da área do retângulo sombreado, indica que $40/100 = 0,4$ de todas as medições entre 24 e 25 [10, p.126].	5
Figura 2.3 – Histograma para as 1000 medições da mesma grandeza, sobreposto pela curva tracejada, com o formato de sino, referene a distribuição limite [10, p.127].	5
Figura 2.4 – Distribuição limite $f(x)$ : <b>(a)</b> Após muitas medições, a fração cai no intervalo entre $x$ e $x + dx$ , onde a coluna sombreada corresponde a área $f(x)dx$ ; <b>(b)</b> A área sombreada corresponde a fração limitada entre os valores $x = a$ e $x = b$ [10, p.127].	6
Figura 2.5 – Distribuição limite para um conjunto de medidas cujo os erros aleatórios são pequenos. É uma distribuição contínua em forma de sino, centrada no valor verdadeiro $x$ [10, p.130].	7
Figura 2.6 – Distribuição binomial $\mathcal{B}_{N,p}(n)$ mostra a probabilidade de se obter $n$ caras no lançamento de quatro moedas, com $N = 4$ e $p = q = \frac{1}{2}$ [10, p.231].	9
Figura 2.7 – Distribuição binomial $\mathcal{B}_{N,p}(n)$ mostra a probabilidade para $n = 3, 12$ e $48$ , com $p = \frac{1}{4}$ . A curva contínua para cada figura, corresponde a normal com a mesma média e desvio padrão [10, p.233].	10
Figura 2.8 – Ilustração de uma distribuição de pontos acima e abaixo da curva teórica.	22
Figura 2.9 – Ilustração dos possíveis agrupamentos distribuídos dos pontos acima ou abaixo da curva teórica.	23
Figura 3.1 – Diagrama de Hubble de SNe Ia da compilação JLA (pontos cianos) e quasares (pontos amarelos). Os pontos vermelhos representam a média do módulo de distâncias de subamostras de quasares. Em azul, são quasares com observações XMM-Newton dedicada com $z > 3$ [11].	41
Figura 5.1 – Gráficos resultantes dos ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de credibilidade, para os métodos das Estatísticas Mediana e o $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda$ CDM plano com a compilação de dados JLA.	55
Figura 5.2 – Gráficos resultantes dos ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de credibilidade, para os métodos das Estatísticas Mediana e o $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda$ CDM plano com a compilação de dados PAN.	56

Figura 5.3 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda\text{CDM}_k$ com a compilação JLA. . . . .	57
Figura 5.4 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda\text{CDM}_k$ com a compilação Pantheon. . . . .	58
Figura 5.5 – Comparando os ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ da credibilidade para Estatísticas Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda\text{CDM}$ plano entre as compilações JLA e PAN. . . . .	59
Figura 5.6 – Comparando os melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para Estatísticas Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda\text{CDM}_k$ entre as compilações JLA e PAN. . . . .	60
Figura 5.7 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $w\text{CDM}$ plano com a compilação JLA. . . . .	61
Figura 5.8 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $w\text{CDM}$ plano com a compilação PAN. . . . .	63
Figura 5.9 – Comparando os melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para Estatísticas Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $w\text{CDM}$ entre as compilações JLA e PAN. . . . .	64
Figura 5.10–Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $CPL$ plano com a compilação JLA. . . . .	65
Figura 5.11–Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $CPL$ plano com a compilação PAN. . . . .	66
Figura 5.12–Comparando os melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para Estatísticas Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $CPL$ entre as compilações JLA e PAN. . . . .	67
Figura 5.13–Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda\text{CDM}$ plano com a compilação QSO. . . . .	68
Figura 5.14–Função de distribuição posterior de probabilidade do parâmetro $\Omega_m$ resultante dos ajustes com a Estatística Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda\text{CDM}$ plano, com as compilações QSO, PAN e PAN + QSO. . . . .	70
Figura 5.15–Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda\text{CDM}_k$ com a compilação QSO. . . . .	71

Figura 5.16–Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros $\Omega_m$ (esquerda) e $\Omega_k$ (direita) resultante dos ajustes com a Estatística Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $\Lambda CDM_k$ com o compilação QSO, PAN e PAN + QSO. . . . .	72
Figura 5.17–Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $wCDM$ com a compilação QSO. . . . .	73
Figura 5.18–Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros $\Omega_m$ (esquerda) e $w$ (direita) resultante dos ajustes com a Estatística Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $wCDM$ com a compilação QSO, PAN e PAN + QSO. . . . .	74
Figura 5.19–Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com $1\sigma$ e $2\sigma$ de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste $\chi^2$ aplicados ao modelo $CPL$ com a compilação QSO. . . . .	75
Figura 5.20–Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros $\Omega_m$ (esquerda), $w$ (meio) e $w_a$ (direita) resultantes dos ajustes com a Estatística Mediana e $\chi^2$ aplicados ao modelo $CPL$ com a compilação QSO, PAN e PAN + QSO. . .	76
Figura 5.21–Seleção de os modelos estudados aplicando a compilação JLA com os métodos Estatística Mediana e $\chi^2$ . . . . .	77
Figura 5.22–Seleção de os modelos estudados aplicando a compilação Pantheon com os métodos Estatística Mediana e $\chi^2$ . . . . .	78
Figura 5.23–Seleção de os modelos estudados aplicando a compilação Quasar com os métodos Estatística Mediana e $\chi^2$ . . . . .	79
Figura 5.24–Comparação entre os modelos estudados aplicando as complicações Quasar e Pantheon + Quassar com os métodos Estatística Mediana e $\chi^2$ . . . . .	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Organização das 10 medidas da (2.1) em compartimentos [10, p.125]. . . . .	4
Tabela 2.2 – Escala empírica para avaliar a força da evidência ao comparar dois modelos, $\mathcal{M}_0$ versus $\mathcal{M}_1$ (a chamada "escala de Jeffreys") [12]. . . . .	19
Tabela 5.1 – Parâmetros Incômodos com seus respectivos valores centrais e desvio padrão para a construção de suas distribuições gaussianas, a priori. . . . .	53
Tabela 5.2 – Parâmetros Cosmológicos com suas respectivas distribuições, a priori. . . . .	53
Tabela 5.3 – Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM usando a compilação JLA. . . . .	54
Tabela 5.4 – Valor médio da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM usando a compilação Pantheon. . . . .	55
Tabela 5.5 – Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> usando a compilação JLA. . . . .	57
Tabela 5.6 – Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> usando a compilação Pantheon. . . . .	59
Tabela 5.7 – Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos $\Lambda$ CDM e $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> com Supernovas do tipo Ia. . . . .	60
Tabela 5.8 – Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $w$ CDM usando a compilação JLA. . . . .	62
Tabela 5.9 – Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $w$ CDM usando a compilação Pantheon. . . . .	62
Tabela 5.10–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos $w$ CDM e CPL com Supernovas do Tipo Ia. . . . .	63
Tabela 5.11–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo CPL usando a compilação JLA. . . . .	64
Tabela 5.12–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo CPL usando a compilação Pantheon. . . . .	66
Tabela 5.13–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM usando a compilação de Quasares. . . . .	68
Tabela 5.14–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM usando a compilação Pantheon + Quasares. . . . .	69
Tabela 5.15–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> usando a compilação de Quasares. . . . .	70
Tabela 5.16–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> usando a compilação Pantheon + Quasares. . . . .	72
Tabela 5.17–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos $\Lambda$ CDM e $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> com Quasares e Supernovas. . . . .	72

Tabela 5.18–Valor médio da posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $wCDM$ usando a compilação de Quasares. . . . .	73
Tabela 5.19–Valor médio da posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $wCDM$ usando a compilação Pantheon + Quasares. . . . .	74
Tabela 5.20–Valor médio da posteriori, para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $CPL$ usando a compilação de Quasares. . . . .	75
Tabela 5.21–Valor da médio da posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo $CPL$ usando a compilação Pantheon + Quasares. . . . .	76
Tabela 5.22–Valor médio do posteriori da Mediana e $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos $wCDM$ e $CPL$ com Quasar e Supernovas. . . . .	77

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SNe Ia	Supernova do Tipo Ia
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
PDF	Probability Distribution Function
UV	Ultra Violeta
MV	Mediana Verdadeira
FRLW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
ESA	Agência Espacial Européia
CCD	Charge-Coupled Device
UBV	Ultraviolet, Blue and Visual
UBVRI	Ultraviolet, Blue, Visual, Red and Infrared
SNLS3	Supernova Legacy Survey
SDSS	Sloan Digital Sky Survey
SCP	Supernova Cosmology Project
MLCS2k2	Multicolor Light-Curve Shape
SALT2	Spectral Adaptive Lightcurve 2
JLA	Joint Light-curve Analysis
PAN	Compilação Pantheon
QSO	Compilação de Quasares
BEAMS	Bayesian Estimation Applied to Multiple Species
TRG	Teoria da Relatividade Geral
CDM	Cold Dark Matter
CMB	Cosmic Microwave Background
BAO	baryon acoustic oscillations
CPL	Chevallier-Polarski-Linder
HST	Hubble Space Telescope

# SUMÁRIO

<b>Lista de figuras</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>Lista de tabelas</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>1 – Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 – Métodos Estatísticos</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 Distribuição de Probabilidades . . . . .	3
2.2 Distribuição normal . . . . .	6
2.2.1 Aproximação Gaussiana para a Distribuição Binomial . . . . .	7
2.3 Inferência Bayesiana . . . . .	10
2.3.1 Marginalização . . . . .	13
2.3.2 Estimação de Parâmetros . . . . .	14
2.3.3 Fator de Bayes . . . . .	17
2.4 Estatística Mediana . . . . .	19
2.5 UltraNest . . . . .	24
<b>3 – Distâncias e Observações Cosmológicas</b> . . . . .	<b>26</b>
3.1 Métrica FLRW . . . . .	26
3.2 Fótons emitidos e a Expansão do Universo . . . . .	27
3.2.1 Redshift cosmológico . . . . .	27
3.2.2 Redshift e a dilatação temporal . . . . .	28
3.2.3 Distância Própria . . . . .	29
3.2.4 Distância Comovel . . . . .	31
3.2.5 Distância de um objeto luminoso . . . . .	31
3.2.5.1 Distância Luminosidade . . . . .	31
3.2.5.2 Distância Diâmetro Angular . . . . .	34
3.3 Supernova do Tipo Ia . . . . .	35
3.3.1 Classificação . . . . .	36
3.3.2 Padronização da SNe Ia . . . . .	37
3.3.3 Joint Light-curve Analysis (JLA) . . . . .	38
3.3.4 Compilação Pantheon . . . . .	39
3.4 Quasares . . . . .	39
<b>4 – Modelos Cosmológicos</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1 Equação de Friedmann . . . . .	43
4.2 Parâmetros Cosmológicos . . . . .	46

4.2.1	Parâmetros da Equação de Estado . . . . .	46
4.2.2	Parâmetros de Densidades . . . . .	48
4.3	Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	49
4.4	Modelos Cosmológicos Alternativos . . . . .	50
4.4.1	$w$ CDM . . . . .	50
4.4.2	Parametrização Chevallier-Polarski-Linder (CPL) . . . . .	51
<b>5</b>	<b>– Análises e Discussões . . . . .</b>	<b>52</b>
5.1	Supernovas do Tipo Ia . . . . .	54
5.1.1	Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	54
5.1.1.1	Compilação JLA . . . . .	54
5.1.1.2	Compilação Pantheon . . . . .	55
5.1.2	Modelo $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> . . . . .	56
5.1.2.1	Compilação JLA . . . . .	56
5.1.2.2	Compilação Pantheon . . . . .	58
5.1.3	Comparando as compilações JLA e Pantheon . . . . .	59
5.1.4	Modelo $w$ CDM . . . . .	61
5.1.4.1	Compilação JLA . . . . .	61
5.1.4.2	Compilação Pantheon . . . . .	62
5.1.5	Comparando as compilações JLA e Pantheon . . . . .	63
5.1.6	Parametrização Chevallier-Polarski-Linder (CPL) . . . . .	64
5.1.6.1	Compilação JLA . . . . .	64
5.1.6.2	Compilação Pantheon . . . . .	66
5.1.7	Comparando as compilações JLA e Pantheon . . . . .	67
5.2	Quasares . . . . .	67
5.2.1	Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	67
5.2.1.1	PAN + QSO . . . . .	69
5.2.2	Modelo $\Lambda$ CDM <sub>k</sub> . . . . .	70
5.2.2.1	PAN + QSO . . . . .	71
5.2.3	Modelo $w$ CDM . . . . .	72
5.2.3.1	PAN + QSO . . . . .	74
5.2.4	Parametrização Chevallier-Polarski-Linder (CPL) . . . . .	74
5.2.4.1	PAN + QSO . . . . .	76
5.3	Fator de Bayes . . . . .	77
5.3.1	Compilações JLA . . . . .	77
5.3.2	Compilação Pantheon . . . . .	78
5.3.3	Compilação Quasar . . . . .	79
5.3.4	Compilações Quasar e PAN+QSO . . . . .	79
<b>6</b>	<b>– Conclusões . . . . .</b>	<b>81</b>



**Referências . . . . . 84**

# 1 INTRODUÇÃO

Desde de que o primeiro ser humano olhou para o céu e se perguntou o que seriam aqueles pontos brilhantes, a humanidade procura compreender o surgimento do cosmos e sua composição. Foi no início do século XX que o astrônomo Vesto Slipher (1917), utilizando técnicas acuradas de observação combinadas com telescópios avançados conseguiu analisar os espectros de nebulosas constatando um desvio espectral para o vermelho (*redshift*), que interpretado por W. Sitter, sugeriu uma teoria de um Universo em expansão.

Com os avanços tecnológicos das últimas décadas e um volume cada vez maior de dados com altíssima precisão, associados com técnicas estatísticas de inferências Bayesianas, melhorando a acurácia dos dados observados, foi possível as maiores descobertas na cosmologia. Como por exemplo, em 1998, Riess [13] utilizando Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia) como velas padronizáveis, descobriu que a taxa de expansão do Universo está aumentando, implicando que a maior parte da energia do universo é uma espécie de *energia escura* [14]. Portanto, alinhado ao grande volume de dados observacionais cada vez mais precisos nos últimos anos com um aumento exponencial do poder computacional, surge uma necessidade latente no aperfeiçoamento de técnicas de análise de dados, com o intuito de aumentar a proximidade entre o valor obtido experimentalmente e o valor verdadeiro na medição.

Assim, a utilização de métodos estatísticos para o tratamento de dados observacionais aplicados em cosmologia e astrofísica floresceu ao longo das últimas décadas motivado pelo aumento do conjunto de dados e suas complexidades. Em muitos casos, o método Bayesiano mostrou-se muito superior às ferramentas estatísticas mais tradicionais, devido ao grau de maior eficiência e de uma base conceitual consistente. A forma de coletar, manipular e analisar observações e compará-las com modelos teóricos torna essa ferramenta estatística o instrumento central no estudo da cosmologia moderna. Além do mas, no contexto cosmológico, temos apenas uma pequena amostra do Universo, onde precisamos estimar parâmetros que o descreva como um todo, algo que a Inferência Frequentista (ou Clássica) não dá conta.

Das ferramentas utilizadas pelo método de Bayes, destacamos o teste  $\chi^2$  como principal instrumento de estimação de parâmetros, em que se pode calcular a distribuição esperada dos dados, supondo que os erros associados aos dados possuam uma distribuição gaussiana. Como resultado dessa análise, extraímos os parâmetros cosmológicos que nos possibilita uma ideia de como o universo é composto e como evolui desde os primórdios até hoje.

Outro método para obtenção de parâmetros cosmológicos, além do teste  $\chi^2$ , foi sugerido por J. R. Gott [1] chamado de Estatística Mediana. Nesse método, utiliza-se a distribuição binomial para encontrarmos a distribuição esperada dos dados. E ao contrário do  $\chi^2$  que pertence a um termo que é considerado proporcional a verossimilhança (ver seção 2.2), a Mediana

resulta na própria verossimilhança (ver seção 2.4). Por conta disso, não há a necessidade de considerarmos que os erros experimentais sigam uma distribuição de Gauss, apesar de não haver evidências que comprovem ou descartem que esses erros sigam esse tipo de distribuição [15].

O que nos motivou a estudar a eficiência da Estatística Mediana, foi perceber que ele poderia ser um possível substituto ao método  $\chi^2$  em casos que os erros associados as medidas poderiam ser desconhecidos ou teriam pouca influência sobre os resultados. Mas precisávamos refinar a aplicabilidade do método. Pensando nisso, procuramos estabelecer um parâmetro que avalie a qualidade do ajuste a depender do método de construção da função densidade de probabilidade posterior; implementar os métodos  $\chi^2$  e Mediana na construção de cadeias de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) por meio do algoritmo UltraNest [4, 5], verificando e comparando a eficiência computacional da Mediana e  $\chi^2$ , incluindo o tempo necessário para a convergência das cadeias.

Para este trabalho, temos a necessidade de avaliar qual estatística melhor descreve os dados observacionais obtidos, pois os mesmos levam a conclusões sobre a composição e evolução do universo, bem como norteiam as investigações a serem feitas em seguida. Assim, se faz importante confrontar um dos métodos mais utilizados atualmente (teste  $\chi^2$ ) com a Estatística Mediana, aplicado aos modelos cosmológicos existentes na literatura, tais como: o  $\Lambda$ CDM plano e com curvatura e alternativos como  $w$ CDM e CPL. Usaremos dados de Supernova do Tipo Ia (SNe Ia) e amostras de Quasares.

O nosso trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo **Métodos Estatísticos** procuramos descrever os métodos que são trabalhados para o tratamento de dados observacionais e apresentamos o método de análise de dados proposto nesta Tese; em **Distâncias e Observações Cosmológicas**, procuramos de forma básica mostrar os conceitos e definições no âmbito da cosmologia; **Modelos Cosmológicos**, explanamos as equações e parâmetros que dão base aos modelos de universo estudados na literatura, desde o modelo padrão  $\Lambda$ CDM até os alternativos; na sequência, em **Análises de Discussões**, discutimos os resultados encontrados ao aplicamos os métodos estatísticos nos modelos cosmológicos propostos utilizando dados de Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia), bem como Quasares; e por fim, encerramos o trabalho no capítulo **Conclusão** onde refletimos sobre o estudo e principais resultados analisados em nosso trabalho.

## 2 MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Nas últimas décadas, os estudos em cosmologia vêm sendo inundados por uma quantidade grande e crescente de dados observacionais. Para que os cosmólogos e astrofísicos possam extrair informações relevantes desses conjuntos de dados para suas pesquisas, a utilização de ferramentas e métodos estatísticos cada vez mais sofisticados faz-se necessária. Pois essa relação intrínseca entre a cosmologia e a estatística possibilita aos cosmólogos uma forma de coletar, manipular e analisar observações e compará-las em modelos teóricos.

Neste capítulo, introduziremos os métodos estatísticos que nos guiaram em nosso trabalho, começando com uma breve introdução sobre as distribuições *binomial* e de *Gauss* (gaussiana) e discutiremos quando essas se aproximam, ou seja, quando atingem a *distribuição limite* (distribuição obtida quando o número de  $N$  medições torna-se infinitamente grande). Em seguida, discutiremos um pouco sobre as técnicas de inferência baseada na estatística Bayesiana, confrontando previsão teórica com dados observacionais. E por fim, falaremos sobre o método Estatística Mediana que é o tema central desse trabalho, bem como uma pequena explanação sobre o algoritmo UltraNest que utilizamos para o processamento dos dados observacionais.

### 2.1 Distribuição de Probabilidades

Uma *distribuição de probabilidades* é um modelo matemático que associa a probabilidade de ocorrência a cada resultado numérico de um experimento, ou seja, mostra a probabilidade de cada valor de uma variável aleatória. Podendo a distribuição ser de dois tipos: **(a) discreta**, quando as variáveis aleatórias que estão sendo medidas só poderão assumir certos valores, sendo esses finitos; **(b) contínuas**, descreve as probabilidades possíveis de valores de uma variável aleatória com um conjunto de valores possíveis, em um intervalo de valores, que é infinito e incontável [16].

Em uma análise estatística de um determinado experimento, faz-se necessário que muitas medições sejam realizadas para que tenhamos um peso estatístico melhor definido para cada medida. Primeiramente, precisamos utilizar um método de armazenagem e exibição de um grande número de medidas. Usando o exemplo dado por Taylor [10], vamos supor que foram realizadas 10 medições de um comprimento  $x$ , que corresponde a distância entre uma lente e a imagem formada por ela:

$$25, 1; \quad 23, 9; \quad 24, 6; \quad 23, 8; \quad 26, 4; \quad 22, 7; \quad 25, 1; \quad 25, 3; \quad 25, 4; \quad 23, 9 \quad (2.1)$$

Compartimentos	22 a 23	23 a 24	24 a 25	25 a 26	26 a 27	27 a 28
Observações nos compartimentos	1	3	1	4	1	0

Tabela 2.1 – Organização das 10 medidas da (2.1) em compartimentos [10, p.125].

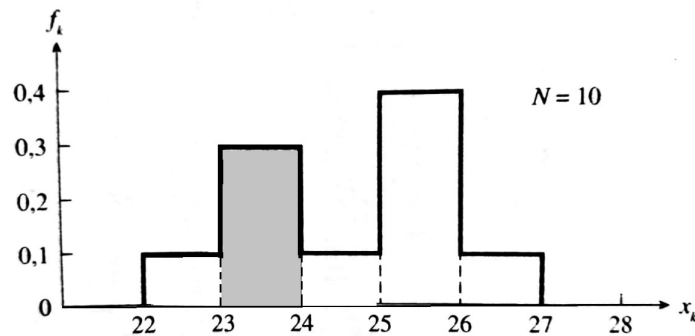


Figura 2.1 – Histograma de compartimentos mostra as 10 medidas de  $x$  que estão nos "compartimentos". A área do retângulo acima de cada intervalo indica a fração da medida daquele intervalo. E no caso da área do retângulo sombreada, indica que  $3/10 = 0,3$  de todas as medições estão entre 23 e 24 [10, p.125].

Como mostra a Tabela 2.1, procuramos dividir os valores em um número de *intervalos* convenientes, que chamaremos de "compartimentos" e contamos quantos valores caem dentro de cada "compartimento" ("*bins*"). Uma maneira prática de visualizarmos essa distribuição de dados é por meio de um gráfico chamado de *histograma de compartimentos*, como ilustramos na Figura 2.1. Nesse gráfico, podemos ver que, por exemplo, o retângulo sombreado acima do intervalo 23 a 24 possui uma área  $0,3 \times 1 = 0,3$ ; indicando que 30% de todas as medidas estão nesse intervalo. Isso significa que a fração das medidas que estão em cada compartimento é indicada pelo produto da altura  $f_k$  do retângulo pela largura do  $k$ -ésimo compartimento  $\Delta_k$ . Ou seja,  $f_k \Delta_k =$  fração das medidas no  $k$ -ésimo compartimento. Em outras palavras, podemos dizer que  $f_k \Delta_k$  especificam a *distribuição* dos resultados, pois descrevem como as medidas foram *distribuídas* dentre os possíveis valores distintos [10].

Como discute Taylor [10], quanto maior for o número de medidas, o histograma começa a tomar uma forma única bem definida e aproximadamente simétrica, algo que podemos verificar ao aumentarmos para 100 o número de medidas (ver Figura 2.2). Com 1000 medições (ver Figura 2.3), o comportamento do histograma tem a tendência de se mostrar mais suave e regular. E à medida que o número de dados coletados se aproximam do infinito, a distribuição tende a uma curva muito mais definida e contínua, que é chamada de *distribuição limite*. A Figura 2.3 mostra uma superposição de gráficos em que a curva tracejada é a distribuição limite, que se parece com a forma simétrica de um sino. Esse tipo de distribuição define uma função que chamaremos  $f(x)$ , que a medida que aumentamos o número de medições de uma grandeza  $x$ , o histograma torna-se indistinguível da distribuição limite  $f(x)$ . Assim, a fração das medidas

que estará em um intervalo de  $x$  a  $x + dx$ , será a área  $f(x)dx$  (ver Figura 2.4(a)), ou melhor, é a probabilidade de que uma medida esteja entre  $x$  e  $x + dx$ . Apesar da distribuição limite ser uma construção teórica (que não poderá ser medida exatamente), acredita-se que toda medição possui uma distribuição limite.

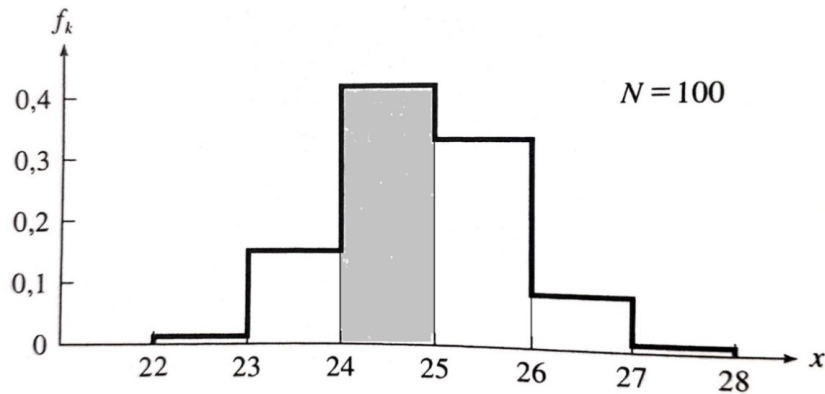


Figura 2.2 – Histograma de compartimentos mostra as 100 medidas de  $x$  que estão nos "compartimentos". A área do retângulo acima de cada intervalo indica a fração da medida daquele intervalo. E no caso da área do retângulo sombreado, indica que  $40/100 = 0,4$  de todas as medições entre 24 e 25 [10, p.126].

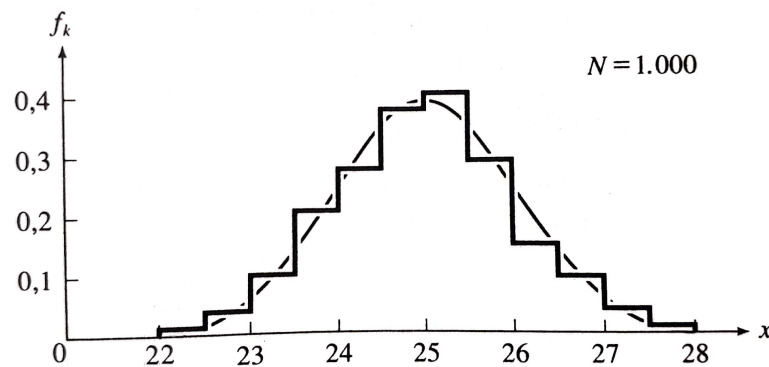


Figura 2.3 – Histograma para as 1000 medições da mesma grandeza, sobreposto pela curva tracejada, com o formato de sino, refere-se a distribuição limite [10, p.127].

Portanto, a fração das medidas que estão entre quaisquer intervalo de dois valores,  $x = a$  e  $x = b$ , a área total sob o gráfico nesse intervalo é a *integral definida*  $\int_a^b f(x)dx =$  fração das medições que caem entre  $x = a$  e  $x = b$  (ver Figura 2.4(b)). É similar o que foi dito no parágrafo anterior, em relação a  $f(x)dx$ , a integral  $\int_a^b f(x)dx$  informa a probabilidade de que uma medida qualquer caia entre  $x = a$  e  $x = b$ . Assim, temos uma importante conclusão: conhecendo a distribuição limite  $f(x)$  para as medições de uma grandeza  $x$ , teremos condições de saber a probabilidade de obtermos uma medida em qualquer intervalo  $a \leq x \leq b$  [10].

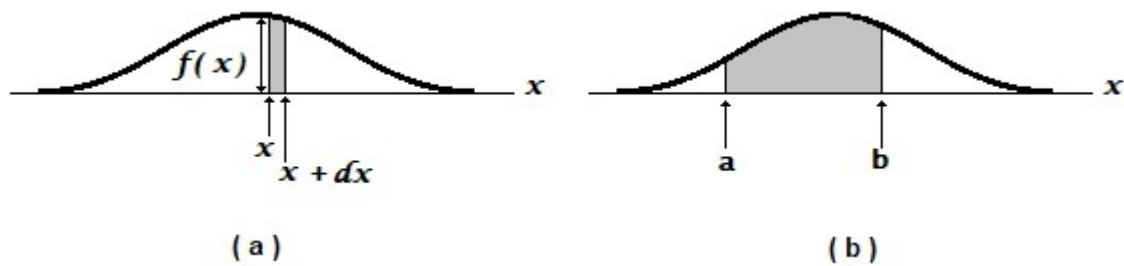


Figura 2.4 – Distribuição limite  $f(x)$ : **(a)** Após muitas medições, a fração cai no intervalo entre  $x$  e  $x+dx$ , onde a coluna sombreada corresponde a área  $f(x)dx$ ; **(b)** A área sombreada corresponde a fração limitada entre os valores  $x = a$  e  $x = b$  [10, p.127].

## 2.2 Distribuição normal

Diferentes tipos de medições podem apresentar distribuições limites distintas como, por exemplo, a forma de sino simétrica (ver Figura 2.1), as distribuições binomiais (Seção 2.2.1) e de Poisson. Entretanto, se uma medição está sujeita a muitas fontes pequenas de erros aleatórios e sistemáticos desprezíveis, os valores estão distribuídos em uma curva em forma de sino e centrada em um *valor verdadeiro*<sup>1</sup>  $x$  (Figura 2.5). É importante observarmos que se as medições tiverem erros sistemáticos apreciáveis, a distribuição limite não será mais centrada sobre o valor verdadeiro, pois provavelmente esses erros puxarão as medidas para cima (ou para baixo) do valor verdadeiro<sup>2</sup>.

Se todos os erros forem aleatórios, depois de muitas medições o número de observações acima do valor verdadeiro será o mesmo do que aqueles abaixo dele, e a distribuição dos resultados estará, portanto, centrada sobre o valor verdadeiro [10, p.130].

Se temos medidas de  $x$  que estejam sujeitas a um grande número de erros aleatórios (porém, com erros sistemáticos desprezíveis) a função que descreve a distribuição limite em formato de sino é normalmente chamada de *distribuição normal* ou *função de Gauss* ("Gaussiana")

$$f(x) = G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (2.2)$$

onde  $\mu$  é o centro da distribuição que também podemos considera como sendo o valor médio  $\langle x \rangle = \mu$ , e  $\sigma$  que é o parâmetro de largura da distribuição, que corresponde exatamente ao desvio padrão obtido após a realização de inúmeras medições. A função  $G_{\mu,\sigma}(x)$  descreve a distribuição limite dos valores de  $x$  com  $\mu$  correspondendo ao valor verdadeiro (ver Figura 2.5), quando as medições estão sujeitas apenas a erros aleatórios.

<sup>1</sup>Podemos imaginar que o "valor verdadeiro" de uma grandeza física é uma idealização matemática que só será alcançada quando, em teoria, aumentamos significativamente o número de medições [10].

<sup>2</sup>Em nosso trabalho, assumiremos que todos os erros sistemáticos foram reduzidos a um nível que podemos desprezá-los.

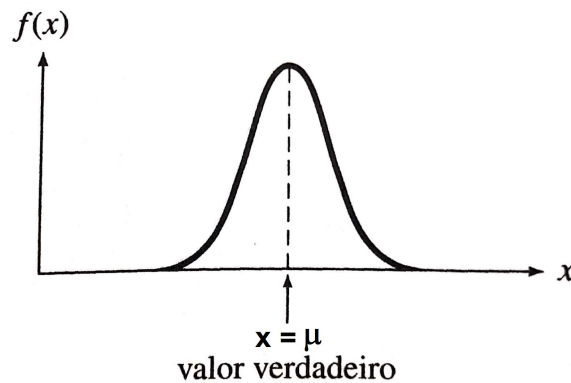


Figura 2.5 – Distribuição limite para um conjunto de medidas cujo os erros aleatórios são pequenos. É uma distribuição contínua em forma de sino, centrada no valor verdadeiro  $x$  [10, p.130].

De acordo com Gerhard Bohm [17], há algumas razões que torna a distribuição normal tão popular na Estatística:

1. A soma das quantidades normalmente distribuídas são também normalmente distribuídas:  

$$\mu = \sum \mu_i \text{ e } \sigma^2 = \sum \sigma_i^2;$$
2. Distribuições discretas como a binomial e de Poisson, e também a distribuição  $\chi^2$ , no limite de um grande número e muitos graus de liberdade, respectivamente, esses se aproximam da distribuição normal;
3. Muitas das distribuições encontradas na natureza se aproximam das distribuições normais;
4. Certos procedimentos estatísticos analiticamente simples para estimativas de parâmetros e propagação de erros são válidos apenas para erros normalmente distribuídos.

Os itens 2 e 3 são melhor justificados pelo *teorema do limite central*, que nos diz que o valor médio de um grande número  $N$  de variáveis aleatórias independentes obedecem à mesma distribuição com variância  $\sigma_0^2$  e aproxima-se de uma distribuição normal com variância  $\sigma^2 = \sigma_0^2/N$ . Um ponto importante é que esse teorema será válido para distribuições bastante arbitrárias, desde possua uma variância finita, condição que praticamente sempre será cumprida, caso necessário, cortando grandes valores absolutos das variáveis [17].

### 2.2.1 Aproximação Gaussiana para a Distribuição Binomial

Para descrever uma distribuição binomial geral, devemos introduzir uma sequência de ensaios de Bernoulli<sup>3</sup>  $n$  vezes, ou de maneira alternativa, uma amostra de tamanho  $n$  de uma

<sup>3</sup>“Experimentos que resultam numa variável aleatória (v.a.) de Bernoulli são chamadas de *ensaios de Bernoulli*” [18, p.154].



distribuição, em que supomos que as repetições sejam independentes, ou seja, não pode haver influência nenhuma do resultado de qualquer outro ensaio. Por exemplo, o lançamento de  $n$  dados, cada dado pode mostrar apenas uma das faces (1 a 6), ou o lançamento de  $n$  moedas, que tem como resultado *cara* ou *coroa*. Assim, iremos nos referir aos resultados nos quais estamos interessados como "*sucesso*". Portanto, o "*sucesso*" pode ser obtido de uma *quadra* em um dos lados de um dado ou uma *cara* em uma moeda. Uma distribuição comum nos dá a chance de  $n$  sucessos em  $N$  tentativas, onde a probabilidade de um sucesso é a mesma e independente [18, 19].

Chamaremos a probabilidade de sucesso de um experimento de  $p$ , e  $q = 1 - p$  de "falha" (ou seja, a chance se obter qualquer coisa exceto aquilo que se espera). Com essas definições, temos que a probabilidade de obter  $n$  com  $N$  experimentações é dada pela *distribuição binomial*:

$$\mathcal{P}(n) = \mathcal{B}_{N,p}(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}. \quad (2.3)$$

Os subscritos  $N$  e  $p$  em  $\mathcal{B}_{N,p}(n)$  nos diz que a distribuição depende do número de experimentações  $N$  realizadas e da probabilidade de sucesso  $p$  em uma experimentação.

O termo  $\binom{N}{n}$  é o coeficiente combinatório que fornece o número de maneiras distintas de escolher  $n$  itens fora de  $N$ ,

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (2.4)$$

O  $N!$  significa que existem maneiras equivalentes de organizar os  $N$  ensaios. Porém, existem  $n!$  permutações dos sucessos e  $(N - n)!$  permutações das falhas, que correspondem ao mesmo resultado. Não precisamos apenas da probabilidade ( $p^n$ ) para  $n$  sucessos, mas precisamos da probabilidade  $q^{N-n}$  de  $(N - n)$  falhas.

Considerando o número médio de sucessos em um tentativa, dado por  $p$ , e seguindo as regras para valores esperados para  $N$  tentativas independentes, temos

$$\bar{n} = Np. \quad (2.5)$$

Podemos encontrar a variância utilizando argumento semelhante: para  $N = 1$ , calculamos diretamente a diferença quadrática esperada  $\sigma_1^2$ . Tendo  $\langle n \rangle = p$  e  $n = 1$ , encontraremos a probabilidade  $\mathcal{P}(1) = p$  e com  $n = 0$  temos  $\mathcal{P}(0) = 1 - p$  [17], teremos

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle \\ &= p(1 - p)^2 + (1 - p)(0 - p)^2 \\ &= p(1 - p). \end{aligned} \quad (2.6)$$

A soma da variância de variáveis identicamente independentes é dado por

$$\sigma^2 = N\sigma_1^2 = Np(1 - p). \quad (2.7)$$

A distribuição binomial em geral não é sempre simétrica, pois  $p \neq q$ . Para um caso em que a probabilidade de sucesso é mesma de fracasso (como no experimento de lançamento de uma moeda), temos 50% de chance de dar *cara* ou *coroa*. Ou seja, temos  $p = q = \frac{1}{2}$ . Assim, teremos uma distribuição binomial simétrica em relação ao valor médio  $N/2$ , como vemos no exemplo da Figura 2.6. Onde supomos um lançamento de quatro moedas ( $N = 4$ ) e contamos o número de caras obtidas,  $n$ , nos casos em que temos  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . E podemos constatar pela Figura 2.6 que o mais provável de dar cara é com  $n = 2$ .

A aproximação da distribuição normal (Gaussiana) com a distribuição binomial é bastante boa quando  $N$ , o número de provas, é grande e a probabilidade de sucesso individual,  $p$ , está próxima de  $\frac{1}{2}$ . Apesar das diferenças, pois a binomial é uma distribuição discreta, enquanto a normal é contínua, essas distribuições possuem uma importante conexão. Pois, ao considerarmos a distribuição  $\mathcal{B}_{N,p}(n)$  para qualquer valor fixo  $p$ , com  $N$  suficiente grande, teremos uma aproximação com a  $G_{X,\sigma}(x)$  com a mesma média e o mesmo desvio padrão [10].

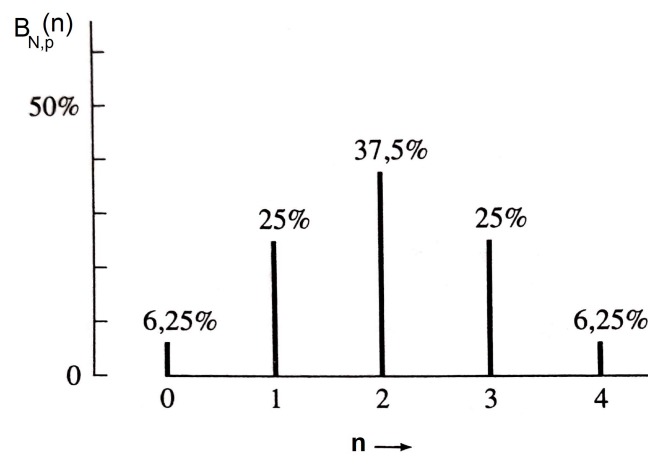


Figura 2.6 – Distribuição binomial  $\mathcal{B}_{N,p}(n)$  mostra a probabilidade de se obter  $n$  caras no lançamento de quatro moedas, com  $N = 4$  e  $p = q = \frac{1}{2}$  [10, p.231].

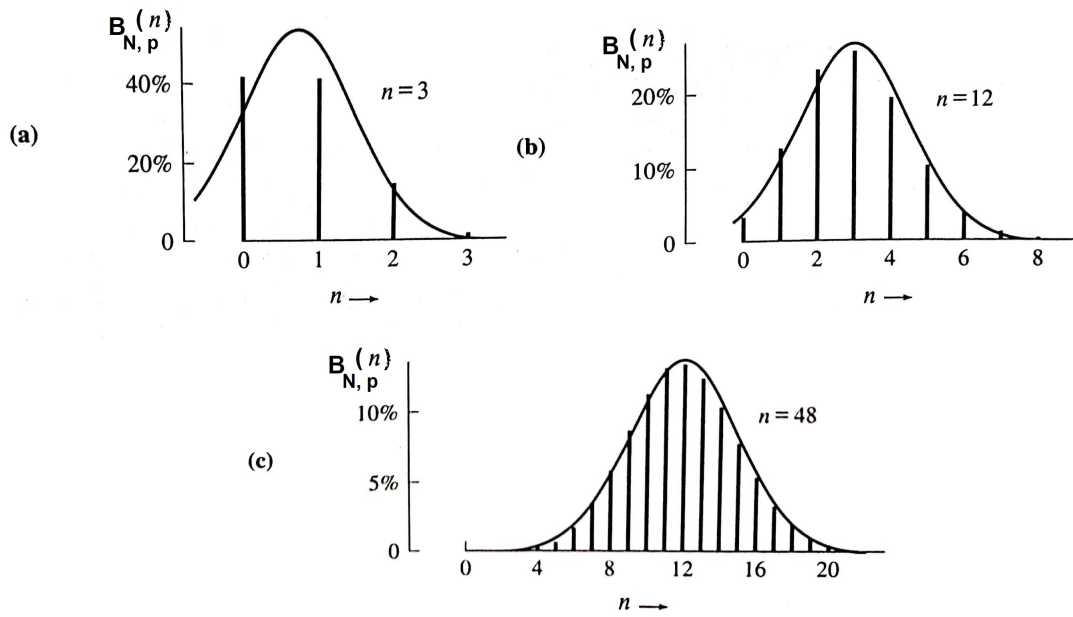


Figura 2.7 – Distribuição binomial  $\mathcal{B}_{N,p}(n)$  mostra a probabilidade para  $n = 3, 12$  e  $48$ , com  $p = \frac{1}{4}$ . A curva contínua para cada figura, corresponde a normal com a mesma média e desvio padrão [10, p.233].

Não nos prenderemos a demonstração matemática da aproximação das duas distribuições, pois não é o foco do nosso trabalho<sup>4</sup>, mas podemos verificar a sua veracidade ao vermos claramente a ilustração da Figura 2.7, que mostra uma distribuição binomial com  $p = \frac{1}{4}$  para três valores de  $N$  ( $N = 3, 12$  e  $48$ ). Podemos ver que a distribuição normal, com a mesma média e desvio padrão, está sobreposta para cada distribuição binomial. Percebamos que com  $N = 3$  (experimentações) há uma diferença visível em comparação a Gaussiana, devido a distribuição assimétrica da binomial em relação a normal que é perfeitamente simétrica. A partir do momento que aumentamos o número de experimentos,  $\mathcal{B}_{N,p}(n)$  se aproxima da simetria de  $G_{X,\sigma}(x)$  e notamos que a diferença entre elas torna-se bem sutil quando  $N = 48$ , que são praticamente indistinguíveis na escala da figura 2.7(c) [10].

## 2.3 Inferência Bayesiana

A estatística é basicamente definida por duas vertentes: Inferência Frequentista (ou clássica) que define que a probabilidade é o limite para o número de ensaios independentes que tendem ao infinito ou "a razão entre os momentos em que o evento ocorre em uma série de testes e o número de tentativas na série" [21]; e a Inferência Bayesiana como sendo o grau de crença de que um evento ocorrerá [22].

<sup>4</sup>Para as demonstrações, veja [20, p.187].

E qual inferência devemos escolher? Em nosso trabalho, a probabilidade frequentista mostra-se insatisfatória em alguns aspectos. Pois ao assumirmos que ensaios têm a mesma probabilidade de resultados, não podemos lidar com situações em que os testes não são passíveis de repetição. Como exemplo em cosmologia, temos uma pequena amostra do universo onde precisamos estimar parâmetros que possam descrever um universo como um todo [22].

Desenvolvimentos recentes de algoritmos de amostragens eficientes torna a implementação da inferência bayesiana mais direta e confiável do que a frequentista. A principal razão disso, está no que os Bayesianos e Frequentistas consideram de mais importante nas distribuições de probabilidade. A escola bayesiana considera a massa de probabilidade<sup>5</sup> como a mais importante; em contra partida, os frequentistas consideram o valor de ponto da probabilidade como primário. Assim, com uma dada distribuição de probabilidade, uma inferência bayesiana integra-se na distribuição para identificar regiões do espaço de parâmetros que contenham a maior probabilidade integrada, enquanto os frequentistas visam identificar o/os ponto/os no espaço de parâmetros com maior probabilidade. Usando a termodinâmica como analogia, os bayesianos se concentram no calor enquanto os frequentistas na temperatura [23].

Chamaremos um evento de variável aleatória  $A$ , que possui uma certa probabilidade de assumir um valor específico, de *função de distribuição de probabilidades*  $\mathcal{P}(A)$ . Caso os valores possíveis de  $A$  sejam contínuos, temos o que chamamos de *densidade de probabilidade* dada pela expressão  $\mathcal{P}(A)dA$ , que é a probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor entre  $A + dA$ .

Ao assumirmos que  $A$  seja uma variável aleatória ou uma preposição pontual e sua negação  $\bar{A}$ , a *regra da soma*<sup>6</sup> é escrita como sendo

$$\mathcal{P}(A|I) + \mathcal{P}(\bar{A}|I) = 1, \quad (2.8)$$

onde  $\mathcal{P}(A|I)$  significa que a atribuição de probabilidade de que  $A$  seja verdadeira (ou ocorra) está condicionada as informações  $I$  (caso  $I$  seja verdadeira). E a (2.8) deve ser lida como a soma da probabilidade da hipótese  $A$  ser verdadeira com a probabilidade da hipótese  $A$  ser falsa ( $\bar{A}$ ) é igual a 1 (100%) [24].

Outra regra importante é a *regra do produto*<sup>7</sup>, que escrevemos como

$$\mathcal{P}(A, B|I) = \mathcal{P}(A|I)\mathcal{P}(B|A, I) = \mathcal{P}(B|I)\mathcal{P}(A|B, I), \quad (2.9)$$

que diz que a *probabilidade conjunta* de  $A$  e  $B$  (hipóteses independentes) sejam verdades simultâneas, caso a informação  $I$  seja verdade, é a probabilidade de que  $A$  (ou  $B$ ) seja verdadeira, condicionada a ocorrência de  $I$ , com o produto da probabilidade de que  $B$  (ou  $A$ ) seja verdade, condicionada a  $A$  (ou  $B$ ) e  $I$  ocorrerem simultaneamente [12].

<sup>5</sup>A *função massa de probabilidade*, na teoria estatística, diz respeito a uma função que associa um valor de probabilidade a cada valor de uma variável aleatório.

<sup>6</sup>Mais detalhes sobre a definição da *regra da soma* pode ser vista em [22, p. 21]

<sup>7</sup>Mais detalhes sobre a definição da *regra do produto* pode ser vista em [22, p. 21]

Caso estejamos interessados só na probabilidade de  $B$ , independente de  $A$ , as regras de soma e produto juntas implicarão em

$$\mathcal{P}(B|I) = \sum_A \mathcal{P}(A, B|I), \quad (2.10)$$

onde a soma percorre os possíveis resultados para  $A$  e a quantidade de  $B$  (lado esquerdo) é chamada de probabilidade marginal [12].

Desde que  $\mathcal{P}(A, B|I) = \mathcal{P}(B, A|I)$ , a regra do produto (2.9) pode ser reescrita no que é conhecida como o *Teorema de Bayes*:

$$\mathcal{P}(B|A, I) = \frac{\mathcal{P}(A|B, I)\mathcal{P}(B|I)}{\mathcal{P}(A|I)}. \quad (2.11)$$

Portanto, a inferência Bayesiana é baseada no Teorema de Bayes que nos proporciona ficar atualizado sobre o conhecimento de um determinado modelo (ou hipótese) à luz de dados disponíveis. Assim, para tornar mais simples a interpretação do teorema, substituiremos  $A$  por um determinado conjunto amostral (dados observacionais)  $D$  e  $B$  por um conjunto de parâmetros  $\theta = \{\theta_i\}$ , a luz de um determinado modelo  $\mathcal{M}$ . Por fim, ficamos com a expressão

$$\mathcal{P}(\theta|D, \mathcal{M}) = \frac{\mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})\mathcal{P}(\theta|\mathcal{M})}{\mathcal{P}(D|\mathcal{M})}. \quad (2.12)$$

Do lado esquerdo temos  $\mathcal{P}(\theta|D, \mathcal{M})$  que é a probabilidade *posterior* (ou *posteriori*) que representa a quantidade relevante para inferência bayesiana, pois representa nosso estado de crença sobre a hipótese ( $\theta$ ) depois de termos considerado a informação nos dados. Sendo este proporcional à distribuição amostral de dados  $\mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})$ , comumente escrito como  $\mathcal{L}(\theta) \equiv \mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})$  chamada de *função de verossimilhança* (ou *Likelihood*), multiplicado pela *probabilidade a priori*  $\mathcal{P}(\theta|\mathcal{M})$  (ou *prior*), que pode também ser escrito como  $\pi(\theta) \equiv \mathcal{P}(\theta|\mathcal{M})$ , condiciona a informação dada pelo modelo  $\mathcal{M}$  e que representa o nosso estado de conhecimento antes de vermos os dados. E por fim, o  $\mathcal{P}(\theta|D, \mathcal{M})$  é normalizado por  $\frac{1}{\mathcal{P}(D|\mathcal{M})}$  onde  $\mathcal{P}(D|\mathcal{M})$  é a verossimilhança marginal, também chamada de "*evidência bayesiana*", que pode ser calculada usando a fórmula seguinte:

$$\mathcal{P}(D|\mathcal{M}) = \begin{cases} \sum_{\theta} \mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})\mathcal{P}(\theta|\mathcal{M}) = \sum_{\theta} \mathcal{L}(\theta)\pi(\theta), & \text{caso } \theta \text{ seja discreto,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})\mathcal{P}(\theta|\mathcal{M})d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\theta)\pi(\theta)d\theta, & \text{caso } \theta \text{ seja contínuo.} \end{cases} \quad (2.13)$$

A soma (ou integral) percorre todos os resultados possíveis para o espaço de parâmetros  $\theta$ . Assim, evidência Bayesiana pode ser considerada a média da verossimilhança ponderado pelo *prior* para a escolha de um modelo específico. Portanto, a evidência Bayesiana é central para a seleção de modelos [12].

### 2.3.1 Marginalização

O procedimento de marginalização (ou distribuição marginal) é a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias de um subconjunto de variáveis. O termo **variável marginal** se refere às variáveis no subconjunto de variáveis sendo retidas, como por exemplo, podemos marginalizar parâmetros inconvenientes (em inglês *nuisance parameters*) com o intuito de estudarmos outros parâmetros de forma independente. Como exemplo, podemos admitir que possuímos alguns dados,  $D$ , e que determinadas informações de um modelo,  $M$ , indicam que conterão um sinal periódico. Esse nosso modelo de sinal possui parâmetros contínuos: uma frequência angular  $\omega$  e uma amplitude  $A$  [22].

Considerando que  $\omega$  e  $A$  sejam dois parâmetros distintos, podemos escrever a probabilidade conjunta deles com os dados  $D$  e o modelo  $M$ , como sendo  $\mathcal{P}(\omega, A|D, M)$ . A regra do produto para dois parâmetros distintos pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\omega, A|D, M) &= \mathcal{P}(\omega|D, M) \times \mathcal{P}(A|\omega, D, M) \\ &= \mathcal{P}(A|D, M) \times \mathcal{P}(\omega|A, D, M).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Vamos supor que desejamos eliminar a variável  $A$ . Para simplificar, assumiremos que o parâmetro  $A$  seja discreto. Assim, quantificaremos todas as possibilidades acerca de  $A$ , assumindo qualquer dos valores:  $A_1$  ou  $A_2$  ou  $A_3$  etc. Como estamos assumindo que o modelo é verdadeiro, a proposição representada por  $A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$ , onde “+” representa a operação lógica “ou”, passando por todos os possíveis valores independentes entre si, o que resulta na unidade:

$$\mathcal{P}(A_i|M) = 1.\tag{2.15}$$

O parâmetro  $\omega$  será verdadeiro para cada possível valor de  $A$ . Considerando a probabilidade  $\mathcal{P}(\omega, A_i|D, M)$  verdadeira, e aplicando as equações (2.14) e (2.15), teremos,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\omega, A_i|D, M) &= \mathcal{P}(A_i|D, M) \times \mathcal{P}(\omega|A_i, D, M) \\ &= 1 \times \mathcal{P}(\omega|D, M) \\ &= \mathcal{P}(\omega|D, M).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Como consideramos eventos independentes, reescrevemos a (2.16)

$$\mathcal{P}(\omega|D, M) = \mathcal{P}(\omega, A_i|D, M).\tag{2.17}$$

Referente ao lado direito da equação (2.17), aplicamos a propriedade distributiva do produto lógico<sup>8</sup>:

$$\mathcal{P}(\omega, A_i|D, M) = \mathcal{P}(\{\omega, A_1\} + \{\omega, A_2\} + \{\omega, A_3\} + \dots |D, M),\tag{2.18}$$

<sup>8</sup>Cercamos os termos  $\{\omega, A_1\} + \{\omega, A_2\} + \dots$  com colchetes para ajudar na interpretação, mas não são necessárias para a operação lógica, pois a vírgula entre as proposições tem precedência sobre a operação “ou” designada pelo sinal “+” [22].

como os  $A_i$  são independentes entre si, temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\omega|D, M) &= \mathcal{P}(\omega, A_1|D, M) + \mathcal{P}(\omega, A_2|D, M) + \mathcal{P}(\omega, A_3|D, M) + \dots \\ &= \sum_j \mathcal{P}(\omega, A_j|D, M).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Estendendo essa ideia para o caso em que o parâmetro  $A$  seja uma variável contínua ao invés de discreta, podemos escrever

$$\mathcal{P}(\omega|D, M) = \int \mathcal{P}(\omega, A|D, M)dA, \quad (2.20)$$

onde a quantidade  $\mathcal{P}(\omega|D, M)$  corresponde à distribuição posterior marginal para  $\omega$ . Para um parâmetro contínuo do tipo  $\omega$ , teremos a função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *Probability Distribution Function*) marginal *a posteriori*. [22]

Portanto, em Cosmologia, podemos restringir simultaneamente os parâmetros de um modelo. Como exemplo, se tivermos dois parâmetros  $\theta = \{\Omega_m, \Omega_\Lambda\}$  e quisermos saber a distribuição de probabilidade individual de  $\Omega_m$ , teremos

$$\mathcal{P}(\Omega_m|D, M) = \int \mathcal{P}(\Omega_m, \Omega_\Lambda|D, M)d\Omega_\Lambda. \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Estimação de Parâmetros

Em uma tentativa de melhor compreender o surgimento, evolução e comportamento do universo, formulamos uma classe de modelos descritos por parâmetros, e com um conjunto de dados observacionais, buscamos ajustar às classes de modelos cosmológicos aos dados coletados. O modelo é motivado por argumentos físicos e descritos por uma função que utilizamos para verificar o quão próximo o modelo possa estar do que é observado na natureza. O modelo que confrontamos com os dados é descrito pelo parâmetro de Hubble-Lemaître  $H(z_i, \theta)$  em função dos redshift<sup>9</sup>  $z_i$  e dos parâmetros cosmológicos  $\theta$ .

Os conjuntos de dados que serão basicamente utilizados em nosso trabalho usam o conceito de distância luminosidade (Seção 3.2.5.1), que se baseia no conhecimento do brilho absoluto de uma fonte. No caso de uma amostra de Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia), lançaremos mão da magnitude aparente de um objeto  $\mu_{obs.}(z_i)$  e chamaremos o valor previsto do modelo teórico de  $\mu(z_i|\theta)$  (3.38). Procuramos interpretá-lo em termos dos modelos cosmológicos que assumimos como verdadeiros. As restrições surgem ao compararmos os módulos teóricos  $\mu(z_i|\theta)$  com o módulo da distância observacional  $\mu_{obs.}(z_i)$ .

Os parâmetros  $\theta$  utilizados podem variar com o modelo que adotamos e/ou conjunto de amostras utilizado. Para os conjunto de dados que abordaremos em nosso trabalho, temos os parâmetros para o modelo padrão ( $\Lambda$ CDM)  $\theta_1 = \{H_0, \Omega_{b,0}h^2, \Omega_{dm,0}h^2\}$  e  $\theta_2 =$

<sup>9</sup>ver mais detalhes no Capítulo 3

$\{\alpha_{SNe}, \beta_{SNe}, M, \Delta_M\}$ , sendo que  $\theta_2$  é considerado um conjunto de *parâmetros incômodos*<sup>10</sup> mas que são necessários devido as correções nas curvas de luz das SNe Ia, para a compilação *Joint Light-curve Analysis* (JLA) [7]. Para a compilação Pantheon teremos o  $\theta_2 = \{M\}$  [8]. Por fim, para os tipos de conjunto de dados que iremos trabalhar, teremos os parâmetros de modo que  $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ . Como também utilizaremos amostras de Quasares, teremos  $\theta_2 = \{\gamma_{QSO}, \beta_{QSO}\}$  [9].

Uma das características mais comuns da estimativa de parâmetros que são baseadas em modelos é que geralmente são problemas de otimização (ou "ajustes"). A ideia é otimizar uma determinada função, seja ela, por exemplo, minimizar resíduos ou maximizar a função de verossimilhança. A estimativa por máxima verossimilhança é um método para estimarmos os parâmetros de um determinado modelo estatístico, ou seja, a partir de um conjunto de dados independentes  $D = \{D_i\}$  e de um determinado modelo  $\mathcal{M}$ , a estimativa por máxima verossimilhança estima valores para os diferentes parâmetros  $\theta$ . E assim como foi mencionado na Secção 2.2, temos uma PDF  $\mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})$  cuja a densidade de probabilidade conjunta de se obter  $\{D_i\}$  dado  $\theta$  é

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^N \mathcal{P}(D_i|\theta, \mathcal{M}) \quad (2.22)$$

onde  $\mathcal{L}(\theta)$  é a verossimilhança.

O método de *Máxima Verossimilhança* estima os valores dos parâmetros  $\theta_j$  de acordo com o conjunto de dados finitos  $D_i$ . Assim, supondo que  $\mathcal{L}(\theta)$  é uma função diferenciável em  $\theta_j$  e que seu máximo esteja nos limites de domínio desses parâmetros, podemos maximizar a função  $\mathcal{L}(\theta)$  derivando seu logaritmo [25]

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.23)$$

Há duas fortes razões para maximizar o  $\ln \mathcal{L}(\theta)$  e não  $\mathcal{L}(\theta)$ : a)  $\ln \mathcal{L}(\theta)$  normalmente assume uma forma matemática bem mais conveniente, o que nos permite resolver o problema de maximização analiticamente; b)  $\mathcal{L}(\theta)$  é um produto de  $N$  números potencialmente pequenos e se  $N$  for grande, isso pode causar uma divergência numérica. Como o logaritmo é uma função estritamente monotônica, as posições dos máximos de  $\ln \mathcal{L}(\theta)$  e  $\mathcal{L}(\theta)$  serão idênticos [26].

A verossimilhança é um elemento que liga os dados observados, e basicamente quantifica os desvios entre os valores medidos experimentalmente (observações) e os valores preditos pelo modelo teórico (estimador). A quantificação pode ser feita por qualquer função matemática que descreva desvios. Sabendo quais são os parâmetros, podemos calcular a distribuição esperada dos dados. As funções de distribuição de probabilidade mais comuns são as distribuições **Binomiais**, **Poisson** e **Gaussiana** [22].

Considerando que nossas observações  $\mu_{obs}(z_i)$  são estatisticamente independentes e que seguem uma distribuição Gaussiana, podemos utilizar a equação (2.2), onde  $\sigma$  está associado aos

<sup>10</sup>Chamado em inglês de *nuisance parameters* que serão marginalizados.



erros das medidas. Logo, podemos escrever

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\mu_{obs}(z_i) - \mu(z_i|\theta))^2}{2\sigma_i^2} \right), \quad (2.24)$$

A função de verossimilhança logarítmica é dada por

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \sum_i^N -\frac{(\mu_{obs}(z_i) - \mu(z_i|\theta))^2}{2\sigma_i^2} - \sum_i^N \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_i). \quad (2.25)$$

Como consideramos que  $\sigma_i$  não depende dos parâmetros  $\{\theta_j\}$ , derivando  $\ln \mathcal{L}(\theta)$  e igualando a zero para obtermos a maximização da equação 2.25, encontramos os valores de  $\{\theta_j\}$  que minimizam a função

$$-2\ln \mathcal{L}(\theta) = \chi^2 = \sum_i^N \frac{(\mu_{obs}(z_i) - \mu(z_i|\theta))^2}{\sigma_i^2}. \quad (2.26)$$

Vemos nesse resultado que o método de máxima verossimilhança coincide com *método dos mínimos quadrados*. O termo  $\chi^2$  é a soma quadrática dos resíduos, também conhecida como *Teste  $\chi^2$* , que possibilita dizer se há diferenças significativas entre as amostras de dados observacionais e o modelo teórico.

Caso tenhamos dois ou mais parâmetros e queiramos estimar a região de confiança, as coisas se tornariam consideravelmente mais difíceis. Essa dificuldade decorre em grande parte pelo fato de que vários parâmetros, geralmente, exibem correlações mútuas. E como o gasto computacional para calcular as regiões de confiança com muitos parâmetros simultaneamente é alto, um método muito usado com baixo custo computacional é o método da *Matriz de Fisher*.

Esse método se baseia no teorema do limite central, que nos diz que se certas condições regulares forem atendidas, qualquer função de verossimilhança é assintoticamente gaussiana próxima ao seu máximo (mais detalhes ver em [26]). Mas seu uso é limitado, pois a matriz de Fisher fornece apenas uma aproximação da matriz de covariância dos parâmetros  $\{\theta_j\}$ .

Se estimarmos um vetor  $\vec{\theta}$  pelo método da máxima verossimilhança, os componentes do vetor estimado se distribuem assintoticamente em torno do valor verdadeiro, como uma Gaussiana multivariada [19]. Portanto, podemos escrever

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |C|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)^T \cdot C^{-1} \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \right]. \quad (2.27)$$

Observemos que  $\chi^2 = (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)^T \cdot C^{-1} \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)$ .

A expressão (2.27) corresponde a um Gaussiano P - dimensional com a média  $\vec{\theta}_0$ , onde  $(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)^T$  é a transposta da matriz, e  $C$  corresponde a matriz de covariância que é a estimativa de erro desejada. Em suas diagonais contém as estimativas de variação de cada  $\theta_P$  individual e fora das diagonais são as estimativas das covariâncias [26].

Baseado nos conceitos discutidos até aqui, a expressão que utilizaremos para encontrar o  $\chi^2$ , para o caso das amostras JLA e Pantheon de SNe Ia será dada por

$$\chi^2 = (\mu_{obs}(z_i) - \mu(z_i|\theta))^T C^{-1} (\mu_{obs}(z_i) - \mu(z_i|\theta)), \quad (2.28)$$

onde  $C$  corresponde à matriz de covariância das medições  $\mu_{obs}(z_i)$  que é o total estimado para várias incertezas estatísticas e sistemáticas [7] [27].

Para o caso do conjunto de dados de Quasares, o método é baseado na relação de não linearidade entre as luminosidades dos raios-X e ultravioleta (UV) [28], como será visto com mais detalhes na seção 3.4.

Utilizaremos expressão

$$\chi_{QSO}^2 = \frac{(\mathcal{F}_X - \mathcal{F}_{Xth})^2}{\sigma_{UV}^2 + \sigma_X^2 + \delta_{intr}^2}, \quad (2.29)$$

onde  $\mathcal{F}_X$  é o fluxo de raio-X de  $2keV$  e  $\mathcal{F}_{Xth}$  é estimado usando a equação (3.49) para um dado fluxo UV em  $2.500 \text{ \AA}$ , e os valores de  $\sigma_{UV}$ ,  $\sigma_X$  são as incertezas do fluxo do UV e raio-X, respectivamente, e  $\delta_{intr}$  é a dispersão intrínseca [29].

Como o objetivo é maximizar o *posteriori*, ao escolhermos a Gaussiana para a verossimilhança, queremos obter valores para que os parâmetros da  $\mathcal{L}(\theta)$  sejam maximizados (2.25). Assim, para as estimativas, consideramos que os erros de medição são normalmente distribuídos.

### 2.3.3 Fator de Bayes

Na secção 2.3.2 onde fazíamos a estimação de parâmetros, o fator de normalização  $\mathcal{P}(D|\mathcal{M})$  era praticamente ignorado, mas para a seleção de modelos ele é crucial. Portanto, vamos reconhecer explicitamente que nossas probabilidades serão condicionadas não apenas aos dados, mas também ao modelo  $\mathcal{M}$  assumido.

Considerando a equação

$$\mathcal{P}(\theta|D, \mathcal{M}) = \frac{\mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})\mathcal{P}(\theta|\mathcal{M})}{\mathcal{P}(D|\mathcal{M})}, \quad (2.30)$$

onde o seu denominador é por definição a probabilidade do modelo, também é conhecido como *evidência Bayesiana*.

Para obtermos uma expressão para a evidência, iremos integrar sobre todo o espaço de parâmetros  $\theta$  da equação (2.30). A parte esquerda da equação integra-se a unidade, enquanto a evidência no denominador é independente de  $\theta$  e igual a integral do produto entre a verossimilhança e o *prior*:

$$\mathcal{P}(D|\mathcal{M}) = \int \mathcal{P}(D|\theta, \mathcal{M})\mathcal{P}(\theta|\mathcal{M})d\theta. \quad (2.31)$$

Em outras palavras, a evidência é a verossimilhança média dos parâmetros calculados em relação ao prior [30].

A evidência Bayesiana tende a recompensar o modelo mais preditivo. E para isso, as quantidades observacionais derivadas de determinado modelo não devem depender muito dos parâmetros. Se o modelo se ajusta bem aos dados observacionais para uma escolha particular de parâmetros, espera-se que se ajuste bem em uma fração significativa de seu intervalo de parâmetros *prior*, levando a uma alta na verossimilhança média. Caso o modelo seja imprevisível, pode se ajustar bem aos dados observacionais em alguma parte do espaço de parâmetros, mas como outras regiões as previsões são muito diferentes, ele se ajustará mal, puxando a média para baixo. E para um modelo, preditivo ou não, que não se ajusta bem aos dados em qualquer lugar em seu espaço de parâmetros, obterá uma evidência pobre [30].

A previsibilidade está frequentemente relacionada à simplicidade do modelo. Normalmente, quanto menor for o número de parâmetros de um determinado modelo, mais limitada será a variedade de previsões que ele poderá fazer. Por consequência, a seleção do modelo é frequentemente retratada como um tensionamento da qualidade do ajuste em relação ao número de parâmetros do modelo. Isso porque, na análise Bayesiana está embutida a *Navalha de Ockham*<sup>11</sup> [31] que ajuda a selecionar modelos penalizando aqueles que venham possuir parâmetros que são desnecessários. Do ponto de vista estatístico, a técnica beneficia modelos que são menos complicados [30, 32].

No entanto, a conexão entre a previsibilidade e simplicidade nem sempre é forte. Por exemplo, pode ocorrer uma situação em que as previsões revelem uma dependência desprezível de um dos parâmetros (ou uma combinação degenerada de parâmetros). Isso nos diz que as nossas observações não possuem sensibilidade para nos informar qualquer coisa sobre aquele parâmetro (ou combinação de parâmetros). Portanto, neste caso, a evidência não irá penalizar o parâmetro extra, pois não altera a previsibilidade do modelo [30].

Suponha que tenhamos dois modelos  $\mathcal{M}_0$  e  $\mathcal{M}_1$  e não sabemos qual dos dois explicará melhor os dados. Para que possamos fazer a seleção de um deles usaremos o *Fator de Bayes*, que é a razão das evidências dos modelos  $\mathcal{M}_0$  e  $\mathcal{M}_1$  [33]. Da equação (2.31) podemos escrever o fator de Bayes ( $B_{01}$ ) como sendo

$$B_{01} \equiv \frac{\mathcal{P}(D|\mathcal{M}_0)}{\mathcal{P}(D|\mathcal{M}_1)} = \frac{\int \mathcal{P}(D|\theta_0, \mathcal{M}_0)\mathcal{P}(\theta_0|\mathcal{M}_0)d\theta_0}{\int \mathcal{P}(D|\theta_1, \mathcal{M}_1)\mathcal{P}(\theta_1|\mathcal{M}_1)d\theta_1}. \quad (2.32)$$

O valor de  $B_{01} > (<)1$  representa um aumento (diminuição) do suporte a favor do modelo  $\mathcal{M}_0$  em relação a  $\mathcal{M}_1$  de acordo com os dados observacionais [12]. A convenção usual é especificar os logaritmos da evidência e do fator de Bayes [30].

Os fatores de Bayes são normalmente interpretados em comparação a escala de Jeffreys [34] com a força da evidência. Dada a tabela 2.2, os valores limites são definidos empiricamente e ocorrem para logaritmos do fator de Bayes ( $|\ln B_{01}|$ ) e calibrados com limiares em valores

<sup>11</sup>A técnica *Navalha de Ockham* (atribuída a um filósofo medieval Willan de Ockham) parte do princípio de que, entre hipóteses diferentes sobre mesmas evidências, é mais racional acreditar na mais simples. Em outras palavras, diante de várias explicações para um mesmo problemas, a mais simples tende a ser a mais correta [31].

$ \ln B_{01} $	Odds	Probabilidade	Força da Evidência
$< 1.0$	$\lesssim 3 : 1$	$< 0.750$	Inconclusivo
1.0	$\sim 3 : 1$	0.750	Evidência Fraca
2.5	$\sim 12 : 1$	0.923	Evidência Moderada
5.0	$\sim 150 : 1$	0.993	Evidência Forte

Tabela 2.2 – Escala empírica para avaliar a força da evidência ao comparar dois modelos,  $\mathcal{M}_0$  versus  $\mathcal{M}_1$  (a chamada "escala de Jeffreys") [12].

de *odds*<sup>12</sup>, que podemos pensar em termos de apostas em que, por exemplo, uma *odds* 150 : 1 são um desincentivo bastante forte para apostar uma grande soma de dinheiro no resultado. A última coluna (à direita) fornece convenção denotando os diferentes níveis de evidência acima desses limites. A coluna de probabilidade se refere à probabilidade posterior do modelo favorecido, ou seja,  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0) = \mathcal{P}(\mathcal{M}_1) = 1/2$  e que os dois modelos esgotam o espaço do modelo,  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0|D) + \mathcal{P}(\mathcal{M}_1|D) = 1$  [12].

## 2.4 Estatística Mediana

Ao tentarmos analisar estatisticamente um conjunto de dados, surge a necessidade de escolhermos o melhor tratamento que se adequará aos nossos interesses. Dependendo da natureza dos dados, podemos apresentá-los em forma tabular ou por meio de gráficos [16].

Assim como a média, a **mediana**<sup>13</sup> é uma medida de tendência central de um conjunto de dados, que procura indicar exatamente, dentre os valores da amostra, aquela que ocupará a posição central dos dados. Com o intuito de evitar que números discrepantes (valores muito pequenos ou muito grandes) de uma amostra possam deturpar a análise dos dados, a mediana vem para indicar o "meio" ou "centro" de uma amostra. Portanto, a mediana é uma medida de posição que separa em duas partes iguais um conjunto com mesmos números de elementos, ou seja, 50% dos dados são superiores à mediana e 50% são inferiores [36].

Partindo do conceito básico de mediana, J. R. Gott et al. [1] propõe um método que seria alternativo ao Teste  $\chi^2$  para a análise de dados cosmológicos, chamado de *Estatística Mediana* (do inglês, *Median Statistics*). O método consiste, basicamente, de dois requisitos estatísticos: (1) todas as medições devem ser estatisticamente independentes; e (2) não devem existir erros sistemáticos para um conjunto de dados como um todo. O contrário do que ocorre ao teste  $\chi^2$  que além de se valer dos dois requisitos mencionados, acrescenta-se mais dois: (3) os

<sup>12</sup>Podemos chamar de *razão de chances* (do inglês *odds ration*) que corresponde a chance de um evento ocorrer em um determinado grupo e a chance de ocorrer em outro. Muito utilizado em medicina na identificação de fatores associados a doenças ou em jogos de apostas.

<sup>13</sup>Em estatística e teoria de probabilidade, a **mediana** é o valor numérico que separa a metade superior dos dados de uma amostra (ou distribuição) ordenada de forma crescente a partir da metade inferior [35].

erros devem seguir uma distribuição Gaussiana; e (4) o desvio padrão dos erros estatísticos é igual à incerteza da observação.

Como foi mencionado nos tópicos anteriores, o teste  $\chi^2$  pode ser generalizado levando em conta as correlações entre os parâmetros, podendo descartar a hipótese (1), utilizando uma matriz de covariância. Quanto a suposição de Gaussianidade, ela não é necessária para a estimativa de parâmetros, pois vimos que basta maximizar a verossimilhança, mas essa suposição faz-se necessária para se calcular a região de confiança dos parâmetros [1]. E até o presente trabalho, não há fortes evidências que sustentem (ou descartem) que os erros de magnitude das SNe Ia sejam Gaussianamente distribuídos, sendo assim, as hipóteses (3) e (4) podem ser consideradas para o caso do teste  $\chi^2$ . Portanto, em comparação com o  $\chi^2$ , a Mediana possui uma certa vantagem por não depender dos erros de medição, o que é positivo quando há suspeita sobre os erros associados aos dados [37].

Do ponto de vista da estatística, quanto menos pressupostos fizermos sobre uma determinada amostra, maior será a nossa confiança nos resultados que delas derivam. Assim, ao compararmos com  $\chi^2$ , a Mediana leva certa vantagem estatística por utilizar menos pressupostos. Além do mais, valores "defeituosos" (muito distantes dos valores coletados - "outliers") podem distorcer severamente o  $\chi^2$ , enquanto que os resultados da Mediana não seriam influenciados na presença desses "outliers". J. R. Gott [1] fornece alguns exemplos de como um ou mais pontos de dados "defeituosos" podem distorcer seriamente uma análise  $\chi^2$  e explica porque a Estatística Mediana é muito menos vulnerável a tais efeitos [15, 37].

Sobre os valores "defeituosos", ao assumir o limite de uma distribuição normal, Gott [1] discuti citando uma parábola sobre a pesagem de pinguins imperadores adaptada de uma discussão de Hill [38], que foi utilizada para exemplificar o efeito de "outliers" na Estatística Mediana. Ele imaginou que se alguém medisse o peso de, por exemplo, um milhão de pinguins imperadores adultos, encontraria um peso médio entorno de  $40kg$ <sup>14</sup> com um desvio padrão de  $0,4kg$ , e poderia deduzir com base nos dados observados que os valores seguiriam uma distribuição Gaussiana. Supondo esse tipo de distribuição, e que o mais pesado pese  $52kg$ , qual a probabilidade de se pesar o próximo pinguim adulto (1.000.001) com peso superior a  $75kg$  ("outliers")? De acordo com Hill [38], independente da hipótese (3), a probabilidade do 1.000.001º pesar mais do que qualquer um dos milhões de pinguins medidos é de  $\mathcal{P} = \frac{1}{1.000.001}$ . Uma vez que, de acordo com a hipótese (1) de que os dados são independentes, após a pesagem dos 1.000.001 pinguins, cada um deles deve ter chances iguais de ser o mais pesado. Portanto, o último pinguim tem a probabilidade  $\mathcal{P} = 10^{-6}$  de pesar mais que  $52kg$ , pois os dados em si não revelam nada. Assim, se fizermos uma analogia da pesagem de pinguins utilizando um conjunto de supernovas, podemos encontrar em uma amostra aquela que é "estranha" em relação as demais que, por exemplo, pode apresentar uma magnitude 400 vezes maior que a

---

<sup>14</sup>A unidade de massa utilizada por Gott em seu artigo, foi em libras. Nós convertemos em quilogramas e utilizamos o peso médio de um pinguim imperador de acordo com o site "Mundo Entre Patas" [39].

normal [40] [41], correndo o risco de poluirmos indevidamente os nossos dados por não sermos capazes de reconhecê-la como uma classe separada. Algo que não ocorre ao utilizarmos a Estatística Mediana pois, como não fazemos suposições sobre a distribuição dos dados, existe menos influência de valores extremos. Portanto, se tivermos informações suficientes sobre uma supernova, devemos ser capazes de identificá-las como uma classe de supernova diferente, evitando distorções nos resultados. Distribuições  $\chi^2$  são particularmente propensas a esses tipos de erros, pois a distribuição Gaussiana cai rapidamente com grandes valores (ver equação (2.2)) [1].

Lembrando o que foi dito por Taylor [10] na Seção 2.1, se uma distribuição de medidas está sujeita a muitas fontes pequenas de erros aleatórios e sistemáticos desprezíveis, e se a quantidade de medições for suficientemente grande, a distribuição estará centrada sobre o valor verdadeiro, com o mesmo número de observações acima e abaixo desse valor. Assim, considerando que os nossos resultados experimentais são estatisticamente independentes e que não existam erros sistemáticos, poderemos esperar que após a realização de um número grande e finito de medições, possamos encontrar a **Mediana Verdadeira (MV)**.

Por hipótese, o valor da MV será obtido com o número  $N$  de medidas tendendo ao infinito, equivalendo a hipótese de que não haverá erros sistemáticos, pois se tomarmos um número suficientemente grande de medições, poderíamos esperar que naturalmente metade (50%) das medidas estaria acima ou abaixo do valor Verdadeiro da Mediana [42]. O comportamento da Estatística Mediana é típico de uma **distribuição binomial**. E como vimos na Seção 2.3.2 que a quantificação da verossimilhança, como elemento que liga os dados medidos, pode ser feita por qualquer função matemática que descreva desvios, assim, podemos utilizar a distribuição binomial em lugar da Gaussiana (como foi discutido na Seção 2.2.1) para o caso da Estatística Mediana.

Admitindo um conjunto de dados com  $N$  medições para uma quantidade que atenda aos requisitos (1) e (2) (mencionados acima), organiza-se as  $N$  medidas ( $M_N$ ) do menor valor para o maior, de tal maneira que teremos  $M_k < M_{k+1}$ , sendo  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ . Por exemplo, para o conjunto de dados de SNe Ia ordenamos do menor redshift<sup>15</sup> para o maior. De acordo com a hipótese (1), cada medida individual será estatisticamente independente uma da outra, portanto, cada uma tem 50% de chance de estar acima ou abaixo do valor da MV da distribuição, que estará situada entre os valores  $M_k$  e  $M_{k+1}$  (Figura 2.8). Assim, das  $N$  medições, a probabilidade de uma quantidade  $k$  de medidas estarem acima (ou abaixo) da MV será dada pela distribuição binomial

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{P}_{binomial}(k, N) = \frac{2^{-N} N!}{k! (N - k)!}. \quad (2.33)$$

onde consideramos  $M_0 = -\infty$  e  $M_{N+1} = +\infty$ . Devemos observar que a expressão<sup>16</sup> (2.33) faz o papel da verossimilhança [1].

<sup>15</sup>Sobre a definição de *redshift* ver Seção 3.2.1.

<sup>16</sup>Como a distribuição binomial se aproxima da Gaussiana, temos da (2.3)  $p = q = \frac{1}{2}$ .

Uma dos grandes benefícios de assumir erros gaussianos, está no fato de que os erros diminuem por um fator de  $1/N^{1/2}$  (como foi discutido na Seção 2.2), sendo  $N$  o número de medições. Com isso é possível estimar parâmetros que são mais precisos do que com uma única medição. Algo que a Estatística Mediana tira proveito de um fator  $1/N^{1/2}$  similar para produzir resultados precisos, mesmo sem depender das hipóteses (3) e (4) de que os erros são gaussianos com desvios padrão conhecidos. Para a Mediana, ao descartarmos as suposições (3) e (4) (que são significativas e talvez questionáveis), as hipóteses (1) e (2) são suficientemente poderosas e confiáveis para produzir resultados que são apenas pouco menos restritivos ao compararmos com o teste  $\chi^2$  [1].

Devido ao *teorema do limite central* (ver seção 2.2), podemos afirmar que no limite de  $N$  muito grande, o valor esperado  $x$  da distribuição para a MV será  $\langle x \rangle = 1/2$  e desvio padrão  $(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2} = 1/(4N)^{1/2}$ . Com o aumento do número de medidas  $N$  tendendo ao infinito, uma distribuição Gaussiana é atingida e a Estatística Mediana recupera a proporcionalidade usual do desvio padrão para  $1/N^{1/2}$  [1].

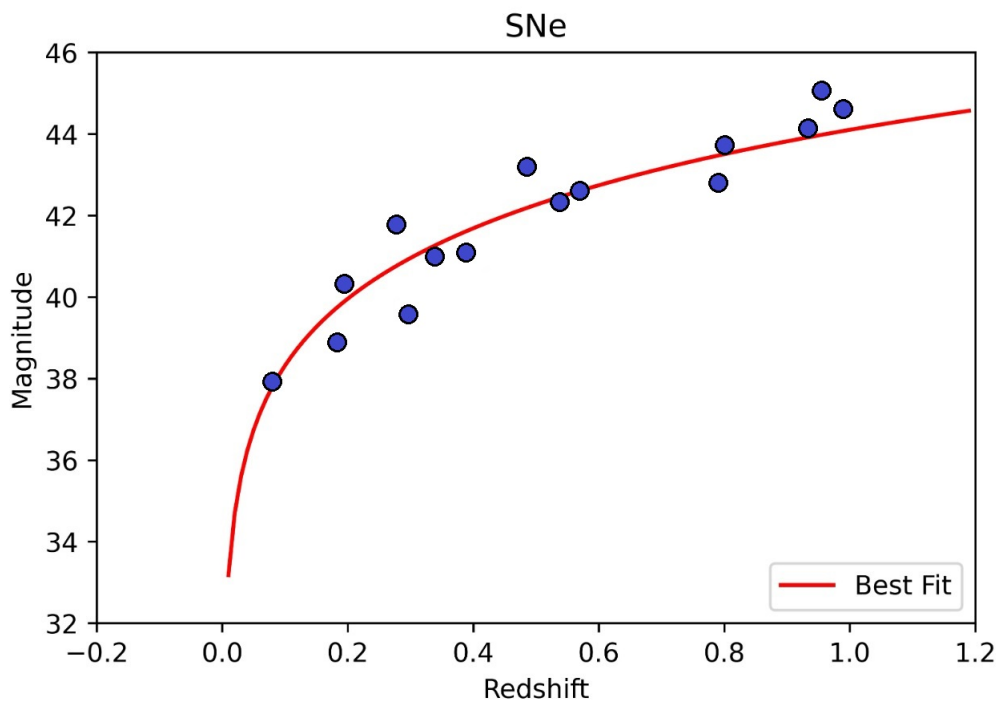


Figura 2.8 – Ilustração de uma distribuição de pontos acima e abaixo da curva teórica.

Considerando o conjunto de dados do módulo da distância observacional dado por  $\mu_{obs}(z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), a verossimilhança dos parâmetros cosmológicos  $\theta$  é obtido pela contagem do número de valores das observações que estarão acima (ou abaixo) da curva teórica dada pela equação (3.38) [37]

É preciso ter cuidado com o fato de que, ao calcular probabilidades, a Estatística Mediana é responsável apenas por contar o número de pontos experimentais que estão acima (ou abaixo)

da curva teórica. A Estatística Mediana não diferencia as várias formas pelas quais esses pontos possam ser distribuídos. A probabilidade de uma sequência de pontos estarem acima e outra sequência abaixo é a mesma. Como exemplo, se tivermos um gráfico de 15 magnitudes *versus* redshift (ver Figura 2.8), ordenadas por  $z$ , a distribuição binomial associa uma probabilidade para o caso em que as primeiras cinco SNe são mais brilhantes do que o esperado e as últimas dez mais fracas. Ou caso a primeira é mais brilhante, a segunda mais fraca, a terceira mais brilhante e assim por diante até a décima quinta. Esses dois casos não devem ser diferentes, mesmo que o primeiro possa ser um ajuste ruim para os dados. O problema de não conseguir "enxergar" a sequência também existe, até certo ponto, para o teste  $\chi^2$ . Porém, a diferença essencial é que, nesse caso, as barras de erro são conhecidas, o que atenua substancialmente o problema [15].

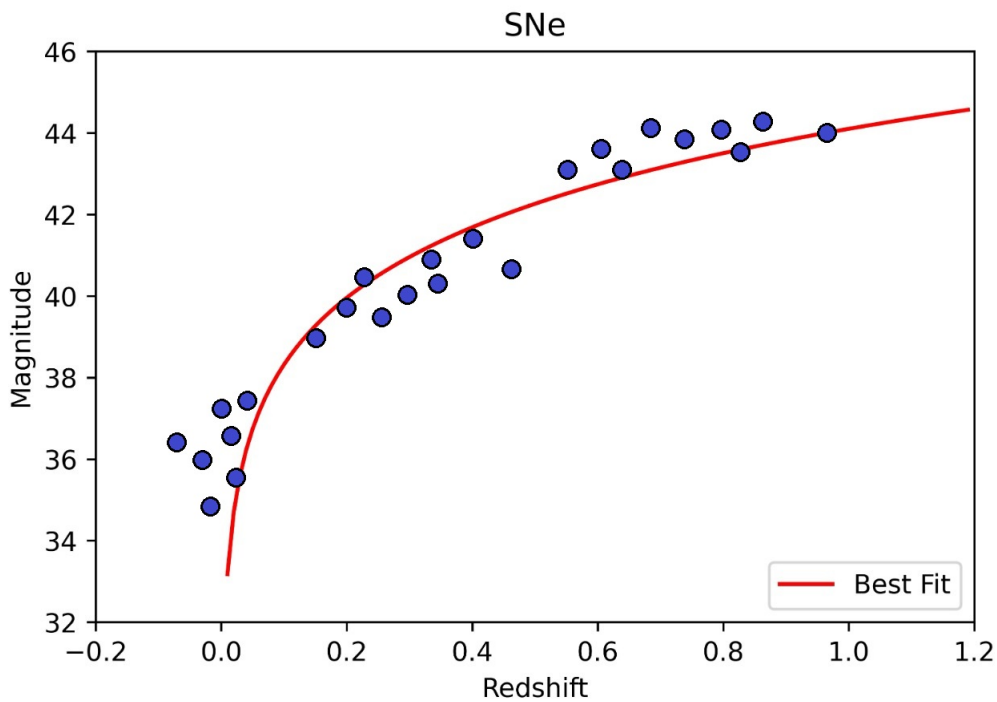


Figura 2.9 – Ilustração dos possíveis agrupamentos distribuídos dos pontos acima ou abaixo da curva teórica.

Com o intuito de contornarmos esse problema, seguimos a sugestão proposta por Avelino et al. [15], em não apenas utilizarmos as contagens dos pontos acima (ou abaixo) da previsão teórica, mas levamos em conta o tamanho da maior sequência contínua encontrada, ou o número total de sequências obtidas (ver Figura 2.9). Para isso, ordenamos o conjunto de dados (supernovas/quasares) do menor redshift para o maior, para em seguida fazermos a divisão dos dados em intervalos menores  $n$ , com  $N_j$  sendo o número dados no intervalo  $j = 1, 2, \dots, n$ . Assim, a probabilidade global dos parâmetros  $\theta$  será

$$\mathcal{P}_{total} = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}_{binomial}(k_j, N_j), \quad (2.34)$$



sendo  $k_j$  o número de pontos acima (ou abaixo) dentro do intervalo  $j$  dados pelos parâmetros [15] [37].

Dessa forma, ao dividir adequadamente o conjunto de dados em grupos de supernovas/quasares, temos maior probabilidade de evitar resultados destoantes, nas quais sequências muito grandes de SNe Ia/Quasar acima (ou abaixo) do valor da Mediana. [37].

Para facilitar o cálculo da Mediana, escrevemos a equação (2.4) na forma logarítmica,

$$\log \mathcal{P}_{total} = \sum_{j=1}^n \log \mathcal{P}_{binomial}(k_j, N_j). \quad (2.35)$$

Desta forma, facilita a análise utilizando o algoritmo UltraNest que abordaremos na próxima seção.

## 2.5 UltraNest

Em nosso trabalho, acreditamos que se pudermos aplicar um algoritmo que melhore a eficiência da Estatística Mediana e que possamos utilizar  $N$  amostras cada vez maiores, conseguiremos mostrar que a Mediana pode ser tão confiável quanto o teste  $\chi^2$ . Pois, além das vantagem em relação ao  $\chi^2$  mencionado acima, contaremos com o algoritmo UltraNest que ajusta e compara modelos complexos de forma rápida e confiável com técnicas de amostragem avançadas.

Comparando dados observacionais a modelos científicos, busca-se restringir parâmetros e comparar modelos. Apesar da disponibilidade de vários pacotes de ajustes baseado em modelos bayesianos, de código aberto, os resultados são confiáveis mas a interação com o usuário é limitada. O problema é que pode ocorrer, por exemplo, na convergência de uma Cadeia de Markov e Monte Carlo (**MCMC**, sigla em inglês) bons resultados, mas outros picos posteriores distantes (talvez até mais importantes), não sejam percebidos pelo método [6]. O **UltraNest** [3–6] surge com a promessa de sanar este e outros tipos de lacunas na análise de restrição de parâmetros e seleção de modelos.

O algoritmo UltraNest é uma biblioteca baseada na amostragem aninhada (do inglês, *Nested Sampling*) de alto desempenho para modelos escritos nas linguagens de programação Python, C, C++, Fortran, Julia ou R [43]. A amostragem aninhada possui várias variantes que foram desenvolvidas nas últimas décadas, das quais o UltraNest absorveu algumas características dessas variantes: isto inclui procurar melhorar os ajustes respeitando os *priors*, permite voltar e verificas piores ajustes e explorar mais espaços de parâmetros e diagnosticar por meio de testes e visualizações. Além disso, o UltraNest implementa algoritmo de autodiagnóstico e propagação de incerteza melhorada, ou seja, prioriza a robustez e exatidão [6].

O UltraNest é capaz de acomodar posteriores com múltiplos modos e/ou grandes degenerescências (curvas). O algoritmo se destina a ajustar modelos físicos complexos com avaliações

de probabilidades lentas de parâmetros, e tem a pretensão de substituir métodos heurísticos como a amostragem aninhada tipo *multi-ellipsoid*, e procura fornecer paridade de recursos em comparação com outros pacotes (como o MultiNest) [3]. Uma discussão mais completa e detalhada sobre o método Nested Sampling e o algoritmo UltraNest é encontrada nas seguintes referências: [2, 4–6, 43].

Sobre a configuração do UltraNest, trabalhamos com a versão 3.2.0 e utilizamos o verificador de amostras (*Sampler*) com o módulo "***ReactiveNestedSampler***" que possui várias opções para especificar qual registro e saída de arquivo deve produzir ( nome dos parâmetros, tipos de *likelihood* e tipos de *priors*). Uma das vantagens do UltraNest é trabalhar com pontos livres (*live points*) dinâmicos, em que, de acordo com a necessidade de processamento da amostra, o algoritmo pode aumentar o número de pontos livres a partir de um número mínimo estipulado pelo o usuário. Em nosso trabalho, usamos o número mínimo de 1.000 pontos livres. E uma precisão desejada para a incerteza da evidência configurado em 0.5 [3].

### 3 DISTÂNCIAS E OBSERVAÇÕES COSMOLÓGICAS

Ao iniciarmos os estudos dos conceitos básicos da cosmologia moderna, vamos utilizar as hipóteses mais importantes do nosso Universo que são a sua homogeneidade e isotropia <sup>1</sup> em grande escala. Estas características garantem que observações feitas do nosso ponto de vista sejam representativas do universo como um todo. O conceito de um universo homogêneo e isotrópico foi considerado, em boa parte do século XX, como sendo uma suposição chamada de "*Princípio Cosmológico* (ou *Princípio de Copérnico*) [44]. Este pensamento foi motivado pela necessidade de simplificar as equações e descrições teóricas do Universo [45].

O *Princípio Cosmológico* deixou de ser uma suposição quando estudos realizados por Wu e Rees [46] confirmaram a homogeneidade e isotropia em grande escala. Os estudos sugerem que o universo seja homogêneo e isotrópico em escalas da ordem de  $100Mpc$  ( $1Mpc \simeq 3,26 \times 10^6$  anos-luz  $\simeq 3,086 \times 10^{22}m$ ); em escalas menores há grande inhomogeneidades, como galáxias, aglomerados e superaglomerados. Portanto, o Princípio Cosmológico só é válido dentro de uma faixa limitada de escalas [44].

#### 3.1 Métrica FLRW

Considerando a homogeneidade e isotropia do Universo, necessitamos de um sistema de coordenadas cuja métrica do espaço-tempo possua uma máxima simetria espacial, significando que sua evolução poderá ser representada por uma sequência temporal de hipersuperfícies do tipo espaço tridimensional. Soluções das equações de campo da teoria relativística da gravitação desenvolvidas por Alexander Friedmann mostraram um Universo não mais estático como sugeria Einstein, e sim dinâmico, sugerindo que o universo esteja contraindo-se ou em expansão [14, 44]. Anos após os resultados de Friedmann, trabalhos independentes feitos por Georges Lemaître, Robertson e Walker chegaram a mesmas soluções para um universo dinâmico. [47]. Hoje a cosmologia moderna padrão baseia-se na métrica denominada Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker (FLRW).

O elemento de linha que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico quadridimensional é chamado de espaço-tempo FLRW, dado por [48]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>"A homogeneidade significa que as condições físicas são as mesmas em toda a hipersuperfície. Isotropia significa que as condições físicas são idênticas em todas as direções quando vistas de um determinado ponto da hipersuperfície." [44]

sendo  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico, onde os índices  $\mu$  e  $\nu$  correm de 0 a 3, com  $x^0$  correspondendo a *coordenada do tipo tempo* e os valores  $(x^1, x^2, x^3)$  são *coordenadas do tipo espaço* independentes do tempo, que podem ser escritas em coordenadas polares  $(r, \theta, \phi)$ . Essas coordenadas (cartesianas e/ou polares) também são chamadas de *coordenadas comoveis*. O sistema de coordenadas comoveis acompanham a expansão do Universo, de tal maneira que qualquer observador estacionário que participe da expansão possuirá a mesma coordenada em qualquer instante. A constante  $c$  é velocidade da luz no vácuo,  $a(t)$  é um fator de escala com o tempo cósmico  $t$ , e  $k$  é a curvatura espacial do universo, sendo que este último pode assumir três valores:

- $k = 0$ , Universo espacialmente plano;
- $k = 1$ , Universo espacialmente fechado;
- $k = -1$ , Universo espacialmente aberto.

## 3.2 Fótons emitidos e a Expansão do Universo

Para medirmos a distância entre dois objetos, por exemplo, entre nós e uma galáxia, precisamos levar em conta que a luz emitida por ela leva um certo intervalo de tempo para percorrer esse caminho. Além disso, devemos contar com a dinâmica do Universo, pois o espaço entre a fonte e o observador muda com o tempo. Em um Universo em expansão, a separação entre dois pontos é uma quantidade dinâmica que depende da geometria do espaço-tempo e esse, por sua vez, depende do conteúdo energético (matéria) que o preenche. A definição de distância adequada entre observador e fonte, será obtida usando a métrica FLRW [49].

### 3.2.1 Redshift cosmológico

Ao tentarmos detectar o fluxo luminoso de um objeto distante como uma galáxia, por exemplo, estamos detectando a luz emitida pelas estrelas que ela hospeda. O espectro de luz das galáxias (ou de pulsares, gases ionizados etc.) possui um conjunto de linhas de absorção e emissão<sup>2</sup> características com frequências bem determinadas, que estão associadas à composição química de suas estrelas e poeira interestelar. Assim, ao observarmos o espectro visível de uma determinada galáxia que se aproxima de nós, detectamos um aumento da frequência de suas linhas de emissão (ou absorção) de seu espectro, em relação a um espectro de referência (galáxias próximas ou espectros medidos em laboratório). Como a cor azul está na extremidade do espectro de alta frequência, esse deslocamento para o azul é conhecido como *blueshift*. Caso a galáxia esteja se afastando do observador, observa-se um deslocamento das linhas características

<sup>2</sup>Geralmente, linhas de absorção se originam na fotosfera das estrelas, que são mais frias do que o seu interior, provocando a absorção das linhas atômicas dos elementos químicos existentes na atmosfera da estrela. As linhas de emissão são massas de gás ionizados que permeiam o meio interestelar e são excitadas pela radiação de estrelas quentes presentes na vizinhança [45].

para a extremidade vermelha do espectro visível. Esse desvio para o vermelho é chamado de *redshift*<sup>3</sup> [50]. A interpretação clássica desse fenômeno é conhecido como *efeito Doppler*, que é observado devido à velocidade de afastamento (ou aproximação) provocando um deslocamento sistemático das linhas espectrais que são medidas por meio de uma observação espectroscópica suficientemente acurada [45].

Quando se identifica o padrão de emissão (ou absorção) de um elemento químico, espera-se que as linhas ocorram em comprimentos de onda  $\lambda_0$  bem característico desse elemento. Caso as mesmas linhas seja observadas em um espectro de radiação emitida por um determinado objeto em outro comprimento de onda  $\lambda$ , podemos definir um parâmetro associado ao desvio relativo (deslocamento espectral) do comprimento de onda observado. Quando um objeto está aparentemente afastando-se de um observador, dizemos que ela possui um redshift<sup>4</sup>  $z$ , que é dado pela relação [45]

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \quad (3.2)$$

### 3.2.2 Redshift e a dilatação temporal

Consideremos que um observador esteja na origem de um sistema de coordenadas posicionado na Terra ( $r_{obs} = 0$ ), onde ele recebe um feixe de luz emitida por uma galáxia distante ( $r_{em}$ ). De acordo com a Relatividade, o intervalo do espaço-tempo ao longo da trajetória de um fóton (partícula sem massa) que viaja a velocidade da luz é uma geodésica<sup>5</sup> nula. Sendo esse percurso radial em direção a origem, não havendo desvio para os valores  $\theta$  e  $\phi$ , pois assumimos a hipótese de um Universo homogêneo e isotrópico. Assim, da equação (3.1) temos,

$$ds^2 = 0 = -(cdt)^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (3.3)$$

Integrando (3.3) ao longo de um caminho radial ( $d\theta = d\phi = 0$ ), a distância percorrida pelo fóton é dado por,

$$c \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_{em}} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.4)$$

onde  $t_{em}$  e  $t_{obs}$  são, respectivamente, os instantes de emissão e observação do sinal luminoso na Terra.

Após um determinado intervalo de tempo  $\delta t_{em}$  um novo sinal é emitido pela fonte, sendo recebido pelo observador em  $r_{obs} = 0$  no instante  $t_{obs} + \delta t_{obs}$ :

$$c \int_{t_{em} + \delta t_{em}}^{t_{obs} + \delta t_{obs}} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_{em}} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.5)$$

<sup>3</sup>A análise dos espectros luminosos foi realizada pela primeira vez pelo astrônomo Vesto Slipher, por volta de 1912 [50].

<sup>4</sup>Para valores em que  $z < 0$  (objeto aproximando-se aparentemente de um observador), chamamos de *blueshift*.

<sup>5</sup>O termo geodésica descreve a trajetória que liga dois pontos sobre uma superfície curva. No caso plano, a geodésica é uma reta.

Como o segundo membro de (3.4) e (3.5) são integrais em coordenadas comoveis, resultando no mesmo valor, temos

$$c \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_{obs}+\delta t_{obs}} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.6)$$

que podemos reescrever como

$$\int_{t_{em}}^{t_{em}+\delta t_{em}} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{em}+\delta t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_{obs}}^{t_{obs}+\delta t_{obs}} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.7)$$

Temos assim,

$$\int_{t_{em}}^{t_{em}+\delta t_{em}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{obs}}^{t_{obs}+\delta t_{obs}} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.8)$$

Assumindo que os intervalos entre as emissões de um fóton e outro são muito pequenos ( $\delta t_{obs} \sim \delta t_{em} \ll 1$ ) podemos considerar que nesse curto instante o fator de escala permanece o mesmo. Assim, da equação (3.8) podemos escrever

$$\frac{\delta t_{em}}{a(t_{em})} = \frac{\delta t_{obs}}{a(t_{obs})} \quad (3.9)$$

Usando a relação  $\delta t = 1/\nu$  e  $c = \lambda\nu$ , onde  $\nu$  é a frequência e  $c$  a velocidade da luz, e comparando com a (3.2),

$$\frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = \frac{\delta t_{obs}}{\delta t_{em}} = \frac{\nu_{em}}{\nu_{obs}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = 1 + z \quad (3.10)$$

Portanto, temos a relação entre o redshift da radiação observada de um objeto distante com o fator de escala, no momento em que a luz foi emitida:

$$1 + z = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (3.11)$$

onde a presente época corresponde a  $z = 0$ . Por convenção, podemos considerar o fator de escala atual  $a_0 = 1$ . Quanto mais no passado a radiação for emitida,  $z$  ficará cada vez maior, considerando que o Universo sempre se expandiu [48].

### 3.2.3 Distância Própria

Levando em conta que o espaço está em expansão, a distância própria entre dois objetos aumentará com o tempo. Assim, consideramos um observador na origem de um sistema de coordenadas que recebe um sinal hoje ( $t_{obs} = t_0$ ) emitido por uma fonte luminosa em uma posição de coordenada comovel ( $r; \theta; \phi$ ) suficientemente distante de forma que possamos ignorar possíveis perturbações de pequena escala do espaço, pois estamos considerando o espaço homogêneo e isotrópico em grande escala. A distância entre fonte e observador será igual ao comprimento da

geodésica espacial<sup>6</sup> entre eles quando o fator de escala é fixado em  $a(t)$ . Considerando essas condições neste sistema de coordenadas, podemos escrever a distância própria utilizando a equação (3.1) com  $ds^2 = 0$ , tal que  $r$  independa do tempo, o espaço entre o objeto observado e a origem do sistema de coordenadas comoveis aumenta (ou diminui) com o fator de escala  $a(t)$  [49]

$$cdt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.12)$$

Integrando a (3.12), temos a *distância própria* como sendo,

$$d_p(r, t) \equiv a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}. \quad (3.13)$$

Como solução da integral,

$$d_p(r, t) = a(t)S_k(r) \quad \therefore \quad S_k(r) = \begin{cases} \text{sen}^{-1}r, & \text{se } k = 1; \\ \text{senh}^{-1}r, & \text{se } k = -1; \\ r, & \text{se } k = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Portanto, temos a distância própria  $d_p(r, t)$  definida como o produto entre o fator de escala  $a(t)$  e o valor  $S_k(r)$ . O valor da  $d_p(r, t)$  entre o observador e a fonte aumenta (ou diminui) com  $a(t)$ .

Como a coordenada comovel é invariante no tempo, a taxa de variação temporal da distância própria entre o observador e a fonte é dada por

$$v_p(t) = \dot{d}_p = \dot{a}(t)S_k(r) = \dot{a}(t) \frac{d_p}{a(t)} = H(t)d_p(t) \quad \therefore \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (3.15)$$

O valor  $H(t)$  é conhecido como *parâmetro de Hubble-Lemaître* e  $v_p(t)$  é chamado de *velocidade de recessão*. Então a equação (3.15) nos dá a relação entre a distância própria e sua velocidade de recessão, que é a conhecida **Lei de Hubble - Lemaître**<sup>7</sup>.

Na época atual, para  $t = t_0$ , a relação linear entre a distância própria e sua velocidade de recessão nos leva a:

$$v_p(t_0) = H_0 d_0(t_0) \quad \therefore \quad H_0 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0}, \quad (3.16)$$

onde  $H_0$  é a *constante de Hubble - Lemaître*.

<sup>6</sup>Os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são constantes.

<sup>7</sup>O astrônomo americano Edwin Hubble, ao pesquisar as galáxias e seus movimentos, observou a dependência linear do redshift de uma galáxia com a sua distância entre nós. Hoje sabemos que esta relação linear só é válida para baixos redshifts. Por conta da teoria sobre a origem do universo (*Big Bang*) proposta por Georges Lemaître, atualmente a lei proposta por Hubble foi rebatizada como **Lei de Hubble - Lemaître**.

### 3.2.4 Distância Comovel

Consideremos um sinal luminoso que viaja na direção  $r$  satisfazendo a geodésica  $ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t)S_k^2(r) = 0$ , foi emitido no instante  $t_{em} = t_1$  com  $r = r_1$  (redshift  $z$ ) e detectado por um observador no tempo  $t_{obs} = t_0$  com  $r = 0$  (correspondendo a  $z = 0$ ). Integrando

$$d_c \equiv \int_0^{r_1} dr = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{a(t)} dt, \quad (3.17)$$

temos  $d_c$  com sendo a distância comovel.

Diferenciando a (3.11),

$$dz = - \left( \frac{a_0}{a} \right) \left( \frac{da/dt}{a} \right) dt = -(1+z)H(t)dt \Rightarrow dt = - \frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad (3.18)$$

e substituindo na (3.17) teremos,

$$d_c = \int_0^z \frac{c}{a} \frac{dz'}{(1+z')H(z')} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (3.19)$$

onde temos  $E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}$  é o parâmetro de Hubble-Lemaître adimensional [48].

Expandindo a função  $\int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$  entorno do  $z = 0$ , teremos:

$$\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = z - \frac{1}{2} \frac{dE(0)}{dz} z^2 + \frac{1}{6} \left\{ 2 \frac{d^2 E(0)}{dz^2} - \frac{d^2 E(0)}{dz^2} \right\} z^3 + \mathcal{O}(z^4), \quad (3.20)$$

sendo  $\mathcal{O}(z^4)$  correspondendo a termos de ordem superior. Para valores  $z \ll 1$ , temos [48]

$$d_c \simeq \frac{c}{a_0 H_0} z. \quad (3.21)$$

### 3.2.5 Distância de um objeto luminoso

Em cosmologia são utilizados dois métodos para uma descrição cosmográfica: *Distância luminosidade*, que mede as distâncias cosmológicas relacionada com o fluxo bolométrico<sup>8</sup> emitida de um objeto; e *Distância do diâmetro angular* que é como a razão entre o tamanho transversal físico de um objeto em relação ao seu tamanho angular, em radianos.

#### 3.2.5.1 Distância Luminosidade

O método mais comum para a determinação de distância em cosmologia é baseado na medição da luminosidade observada ou aparente (fluxo de energia) de objetos de *luminosidade absoluta* (energia por unidade de tempo) conhecida, ou supostamente conhecida. [14]. A distância luminosidade  $d_L$  é definida como sendo

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi \mathcal{F}}, \quad (3.22)$$

<sup>8</sup>"O bolômetro é um termômetro extremamente sensível capaz de detectar a radiação eletromagnética em uma ampla faixa de comprimentos de onda, que foi inventado em 1881 pelo astrônomo Samuel Langley, que a usou para medir a radiação solar" [49].



onde  $L_s$  é a luminosidade absoluta da fonte e  $\mathcal{F}$  é o fluxo observado. A luminosidade estimada no momento da observação  $L_o$  (detectada em  $r = 0$ ) é diferente da luminosidade absoluta  $L_s$  no momento da emissão da fonte (emitida de uma distância comovel  $r$ ).

Definimos o fluxo como sendo

$$\mathcal{F} = \frac{L_o}{A_p} = \frac{L_o}{4\pi(a_0 S_k(r))^2}, \quad (3.23)$$

onde  $A_p$  é a área esférica própria em  $z = 0$ .

Assim, a equação (3.22) será

$$d_L^2 = (a_0 S_k(r))^2 \frac{L_s}{L_o}. \quad (3.24)$$

Considerando que a energia da luz emitida em um intervalo de tempo  $\Delta t_1$  é dada por  $\Delta E_1$ , e similarmente, a energia da luz recebida  $\Delta E_0$  com  $\Delta t_0$ . Podemos então definir a luminosidade absoluta e aparente, respectivamente, como sendo

$$L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} \quad (3.25)$$

$$L_o = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}. \quad (3.26)$$

Como a energia do fóton é inversamente proporcional ao comprimento de onda  $\lambda$ , e usando a equação (3.11), temos

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = (1 + z), \quad (3.27)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_0$  são, respectivamente, o comprimento de onda da luz no ponto de emissão e detecção.

Considerando a constância da velocidade da luz  $c = \lambda/\Delta t$  implica que podemos escrever,

$$\frac{\lambda_1}{\Delta t_1} = \frac{\lambda_0}{\Delta t_0} \Rightarrow \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = (1 + z). \quad (3.28)$$

Portanto, encontramos

$$\frac{L_s}{L_o} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = (1 + z)^2 \quad (3.29)$$

Usando as equações (3.24) e (3.29), a distância luminosidade será dada por

$$d_L = a_0 S_k(r)(1 + z). \quad (3.30)$$

Portanto, das equações (3.14) e (3.19) em (3.30), teremos a distância luminosidade para o caso, em particular, de um universo plano como sendo

$$d_L(z) = \frac{c(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (3.31)$$

Generalizando para um universo com curvatura,

$$d_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \begin{cases} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \text{sen} \left[ \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = 1. \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \text{senh} \left[ \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = -1 \end{cases} \quad (3.32)$$

O termo  $\Omega_k$  é o parâmetro de densidade associado a curvatura do espaço que será melhor discutido no próximo capítulo.

Há mais de 2.000 anos, o grego Hiparco (16 – 125 a.C.) criou um sistema que classifica as estrelas pelo seu brilho (magnitude) que serviu de base para os estudos de Ptolomeu ( $\approx 140$ ). Esse sistema é utilizado até hoje na astronomia, que considera o valor 1 de magnitude para os mais brilhantes (visíveis a olho nú, logo após o por-do-sol) e o valor 6 para as menos brilhantes (no limite do visível). Em 1856, foi observado que estrelas que possuem um fluxo correspondente a magnitude  $m = 1$  era 100 vezes mais intenso que a de magnitude  $m = 6$ . Por essa observação, foi proposto que a diferença de magnitude seguiria uma escala logarítmica [51]. Assim, considerando  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 6$ , podemos definir a magnitude aparente como sendo,

$$m_1 - m_2 = K \log_{10} \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} \implies 1 - 6 = K \log_{10}(100) \implies K = -2.5. \quad (3.33)$$

Ou seja,

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log_{10} \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} \quad (3.34)$$

Podemos definir a *magnitude aparente* de um astro escolhendo um valor de referência na escala, assim temos

$$m = -2.5 \log_{10} \mathcal{F} + A, \quad (3.35)$$

onde o valor  $A = 2.5 \log_{10} \mathcal{F}_r$  define o zero da escala. Para o valor do zero da escala, foi escolhida a magnitude da estrela Vega ( $m \approx 0$ ). Portanto, valores de magnitude menores que o de Vega ( $m < 0$ ) são mais brilhantes, e em contrapartida, astros invisíveis a olho nú possuem valores de magnitude  $m > 6$ .

A escala de magnitude de um astro mede sua luminosidade aparente, e essa informação não é suficiente para descrever plenamente a fonte luminosa, pois nada nos diz sobre a distância da fonte. Para compararmos as magnitudes intrínsecas de duas estrelas, precisamos de uma medida de fluxo que "independa" da distância da fonte. Vamos introduzir o conceito de *magnitude absoluta* ( $M$ ) que é a magnitude de uma determinada fonte, considerando que ela esteja  $10pc^9$  de distância de nós.

A diferença entre as magnitudes aparente e absoluta é dada por,

$$m - M = -2.5 \log_{10} \left[ \frac{L_s}{4\pi d_L^2} \right] + 2.5 \log_{10} \left[ \frac{L_s}{4\pi (10pc)^2} \right], \quad (3.36)$$

<sup>9</sup>Um *parsec* ( $1pc$ ) é a distância de um determinado objeto que apresenta paralaxe heliocêntrica de 1" do observador,  $M = -2.5 \log_{10} \left[ \frac{L}{4\pi (10pc)^2} \right] + const$  [51].

com  $d_L$  em unidades de pc. Chamaremos essa relação de *módulo da distância* da fonte

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right) + 25. \quad (3.37)$$

Da equação (3.32), e considerando  $c = 3 \times 10^5 \text{km/s}$  e  $H_0 = h \times 100 \text{km/s/Mpc}$  (sendo  $h$  a parametrização da constante  $H_0$ ), reescreveremos a equação (3.37), como sendo

$$\mu = 5 \log_{10} \left( \frac{H_0 d_L}{c} \right) - 5 \log_{10} h + 42.384. \quad (3.38)$$

A equação (3.38) relaciona a distância com  $\mu$ , mas se faz necessário encontrar um objeto que possua a magnitude absoluta que tenha um comportamento luminoso padrão ou padronizável, de forma a ser utilizada como calibrador de medidas de distância. Tal objeto será definido como "*vela-padrão*". Inicialmente, foi utilizadas estrelas super gigantes e altamente luminosas, conhecidas como variáveis *Cefeidas*. Henrietta Levitt mediu as distâncias e luminosidades aparentes de várias Cefeidas em aglomerados abertos e suas luminosidades absolutas, tornando possível calibrar a relação entre período e luminosidade de Cefeidas próximas [52]. Se podemos validar a mesma relação de período e luminosidade para todas as Cefeidas, em todas as galáxias, elas poderão ser utilizadas como velas padrão. Contudo, as supernovas do tipo Ia mostraram-se excelentes, no lugar das Cefeidas, como "velas-padrão" por conta do limite de distância que se consegue estimar com as Cefeidas.

### 3.2.5.2 Distância Diâmetro Angular

A *distância diâmetro angular* ( $d_A$ ) é definida como sendo a razão entre o tamanho real  $\Delta x$  de um objeto astronômico ortogonal à linha de visão e o seu tamanho angular  $\Delta\theta$  (em raios) [52].

$$d_A \equiv \frac{\Delta x}{\Delta\theta}. \quad (3.39)$$

Considerando que a fonte esteja em uma superfície de uma esfera com raio  $S_k(r)$ , onde o observador esteja no centro, o tamanho  $\Delta x$  no instante  $t_1$  em um espaço-tempo FLRW (3.1) com (3.14) é dado por

$$\Delta x = a(t) S_k(r) \Delta\theta = \frac{a(t_0) S_k(r) \Delta\theta}{(1+z)}. \quad (3.40)$$

Substituindo (3.40) em (3.39), temos a distância diâmetro angular dado por

$$d_A = \frac{\Delta x}{\Delta\theta} = \frac{a(t_0) S_k(r)}{(1+z)}. \quad (3.41)$$

Comparando (3.41) com (3.30), obtemos a relação entre a distância luminosidade e o diâmetro angular,

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) na (3.31), teremos a distância diâmetro angular em termos do parâmetro de Hubble-Lemaître:

$$d_A(z) = \frac{c}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.43)$$

Generalizando para um Universo com curvatura,

$$d_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0} \begin{cases} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[ \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = 1. \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[ \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = -1 \end{cases} \quad (3.44)$$

Há grandes dificuldades observacionais em se encontrar esse tipo de distância, pois são necessárias algumas considerações sobre os objetos astronômicos observados: se o comprimento próprio é conhecido para ser utilizado como régua-padrão (desde que suas dimensões sejam as mesmas) independente da expansão do Universo; o objeto astronômico escolhido como régua-padrão precisa ser largo o suficiente para que a abertura angular seja medida com boa precisão (como galáxias e aglomerados); e determinar as extremidades desse objeto é bastante difícil.

### 3.3 Supernova do Tipo Ia

Observações de *Supernovas* (SNe) são registradas desde tempos antigos, como objetos transitórios que brilham intensamente e aparecem como "*novas estrelas*" em relação as estrelas "estáticas" de um fundo imutável, apenas para desaparecerem após cerca de um mês ou mais. Os primeiros registros datam do ano 185 d.C., na direção de Alpha Centauri<sup>10</sup>. O termo "*nova*" foi utilizado pela primeira vez por Tycho Brahe (1546 - 1601) para descrever uma "nova estrela" que havia aparecido na constelação de Cassiopeia em 11 de novembro de 1572.

Foi somente no século XX que sua natureza foi melhor compreendida, e os estudos de Baade [55] e Zwicky [56] especularam que a energia das SNe vem do colapso nuclear como mecanismo de transição de estrelas de grande massa para estrelas de nêutrons. Fizeram também a diferenciação entre "dois tipos bem definidos de novas estrelas ou novas que poderiam ser distinguidas como novas e super-novas" [23]. Foi então que em 1938, Baade mostrou que as luminosidades dessas estrelas as tornavam adequadas como indicadores de distância extragalácticas. Assim, as supernovas foram pensadas como ferramentas para medir distâncias no Universo [52].

<sup>10</sup>Os observatórios XMM-Newton da Agência Espacial Europeia (ESA) e de Raios-X Chandra da Nasa, descobriram evidências que ajudam a confirmar a identificação dos restos de uma das primeiras explosões estelares registradas por seres humanos. Estudos mostram que a remanescente de supernova RCW86 seja mais jovem do que se pensava, sugerindo que seja o que resta da supernova observada pelos chineses em 185 dC [53, 54]

Somente a partir do final da década de 1990, na era dos telescópios CCD<sup>11</sup>, que as SNe contribuíram para a cosmologia moderna. A pesquisa de Hamuy [57] mostrou que é possível padronizar com sucesso os dados de SNe de múltiplas bandas, com base em suas luminosidades, iniciando a história das "velas cosmológicas padrão" viáveis [23].

### 3.3.1 Classificação

O estágio final do ciclo de vida de uma estrela massiva, maior que dez vezes a massa solar, é uma supernova. O surgimento de uma SNe é determinado pela massa, pois quanto maior a estrela, maior é a temperatura em seu núcleo, que por consequência, tornará a fusão termonuclear do hidrogênio ( $H$ ) em hélio ( $He$ ) mais rápido e eficaz, mantendo o equilíbrio hidrostático da estrela e impedindo o seu colapso gravitacional. Com o aumento de  $He$  em seu núcleo, a estrela começará a fundir  $He$  em carbono e oxigênio, e, com o passar do tempo, surgirão núclídeos mais pesados até a produção de ferro ( $Fe$ ). Como a estrela não consegue fundir o  $Fe$  em outro elemento, o acúmulo cada vez maior de  $Fe$  fará com que a estrela não consiga mais sustentar a própria massa gravitacional, resultando em um colapso do seu núcleo formando uma estrela de nêutron ou um buraco negro [51].

A energia total liberada por uma SNe dependerá das características particulares de cada estrela, resultando em uma variedade de tipos de supernovas. A luminosidade que uma SNe emite é extremamente alta, liberando uma grande quantidade de radiação. Observando as linhas de absorção de elementos químicos das supernovas, foi possível classificá-las em grupos. Se o espectro de uma SNe não incluísse linhas espectrais de hidrogênio, esta era classificada como *Tipo I*. Caso houvesse presença de hidrogênio em seu espectro, era classificada como *Tipo II* [58]. Em 1985 [59], foi detectado um tipo distinto de supernova caracterizado de *Tipo Ia*, pois continha uma linha de absorção de silício ionizado. Há também a do *Tipo Ib*, que contém uma linha de hélio e o *Tipo Ic* que não possui linhas de silício nem hélio [52].

A explicação física da explosão de uma supernova do tipo Ia (SNe Ia) ainda não está clara. A hipótese mais conhecida é que uma SNe Ia é uma explosão termonuclear em anãs brancas de carbono e oxigênio em um sistema binário [60, 61]. Estudo feito por Thielemann [62] mostrou que a quantidade de energia das explosões de SNe Ia é aproximadamente a energia necessária para a conversão de oxigênio e carbono em ferro. Mas para que esse processo ocorra é necessário que a anã branca esteja próxima ao *Limite de Chandrasekhar*<sup>12</sup> [63], para que a ignição por carbono possa começar. Para que o limite de Chandrasekhar seja alcançado, a anã branca, em um sistema binário, deve absorver a massa da estrela próxima por acreção [23]. Ao exceder esse limite, o núcleo aquece com o aumento da pressão gravitacional, proporcionando a

<sup>11</sup>Câmaras eletrônicas, chamadas câmaras CCD (*Charge-Coupled Device*) que acopladas aos telescópios, registram o número de fótons que atingem o detector, através da contagem do número de elétrons acumulado em sua superfície com enorme eficiência e precisão, gerando um sistema de detecção muito mais sensível.

<sup>12</sup>Chandrasekhar mostrou que uma estrela não geraria uma anã branca se sua massa fosse maior que 1,44 massas solares. Se uma anã branca exceder essa massa por agregação, entrará em colapso.

reação dos elementos em seu núcleo; essa reação descontrolada libera dentro de segundos uma enorme quantidade de energia, resultando em uma explosão violenta que é acompanhada por um aumento maciço na luminosidade [64]. A luminosidade absoluta de uma SNe Ia é uniforme no pico da magnitude, assim sua distância até nós pode ser determinada medindo a sua luminosidade aparente. Dessa forma, as supernovas do tipo Ia são uma espécie de "*vela-padrão*" pela qual se pode medir a distância luminosidade [65].

### 3.3.2 Padronização da SNe Ia

As observações dos brilhos estelares são feitas em diferentes faixas do espectro eletromagnético porque cada magnitude difere por conta das particularidades dos astros observados, além da absorção e espalhamento da radiação pela atmosfera terrestre e poeiras interestelar. Diferentes sistemas fotométricos<sup>13</sup> são utilizados, baseados em diferentes bandas de frequência. O mais tradicional é o sistema **Johnson** [67] ou **UBVRI** (ultravioleta, azul, visual, vermelho e infravermelho, respectivamente). Na prática, não há como observar a luminosidade total em todo o espectro (magnitude total), ou *magnitude bolométrica*, de um objeto, e sim estimá-lo levando em conta diversos fatores. [66].

A homogeneidade das SNe Ia já era conhecida desde a década de 1960, mas faltava quantificá-la. Observações cuidadosas em 1986 mostraram que a luminosidade e as formas da curva de luz para SNe Ia não eram uniformes, e isso ficou mais evidente ao se observar, em 1991, duas supernovas em extremos opostos da escala de luminosidade. Esse acontecimento, deixou claro a necessidade de se desenvolver uma técnica que fosse eficaz para o tratamento dos dados de forma a tornar as SNe Ia uma ferramenta eficiente na mediação de distâncias. Foi então que os estudos de Phillips [68] demonstraram uma relação entre magnitude máxima das SNe Ia e sua taxa inicial de declínio, chamada de *relação de Phillips*. Essa relação possibilitou diminuir a dispersão das magnitudes máximas das SNe Ia proporcionando uma forma sistemática de corrigí-las [52].

As curvas de luz (magnitude como função do tempo) das SNe Ia não são semelhantes entre si. Há uma correlação entre o fluxo máximo da emissão e o tempo de decaimento que torna possível "*padronizar*" as curvas de luz. Supernovas mais brilhantes possuem um tempo de decaimento maior, enquanto as menos brilhante decaem mais rapidamente. Assim, levando em conta os erros e fatores que contribuem para a dispersão das curvas de luz de diferentes supernovas, podemos tornar as SNe Ia padronizáveis de forma com que elas possam indicar a mesma magnitude absoluta (mesma potência total emitida) e portanto sendo utilizadas como velas padronizadas [52].

Nos últimos vinte anos, houve uma série de pesquisas de supernovas do tipo Ia que,

---

<sup>13</sup>Um sistema fotométrico é um conjunto de filtros com sensibilidades normalmente dependente do tipo de sistema óptico e detectores. O primeiro sistema fotométrico padronizado conhecido é o Johnson-Morgan ou sistema fotométrico UBV (1953). Atualmente, há mais de 200 sistemas fotométricos [66].

juntas, investigaram um grande intervalo em redshift. Como exemplo, temos para altos redshifts ( $z \sim 1$ ) os programas Supernova Legacy Survey (SNLS3) [27, 69]; o projeto ESSENCE [70]; e a pesquisa Pan-STARRS [71]. Para redshift intermediários ( $0,05 < z < 0,4$ ) temos, dentre outros, o SDSS (Sloan Digital Sky Survey) [72]. Para valores de  $z < 0,1$ , os programas Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics [73], entre outros programas. Para supernovas com  $z > 1$ , os grupos de Riess [74] e o projeto Supernova Cosmology Project (SCP) [75]. Temos atualmente, cerca de mil SNe Ia descobertas e confirmadas espectroscopicamente, proporcionando uma precisão alta para a medição da distância luminosidade [7].

A principal dificuldade para o estudo de SNe Ia está no tratamento da curva de luz de modo a obter um valor verossímil para o fluxo máximo da emissão. Até pouco tempo, os métodos mais utilizados para o tratamento das curvas de luz eram o Multicolor Light-Curve Shape (MLCS2k2) [76] e o *Spectral Adaptive Lightcurve 2* (SALT2). A diferença entre eles está nos ajustadores (filtros), de acordo com o método utilizado na calibração dos dados para a obtenção das medidas de distância em escalas cosmológicas. Estudos como o de Conley [27], Suzuki [75] e Scolnic [71]) mostram que a precisão das restrições cosmológicas está atualmente limitada por incertezas sistemáticas das medições, em particular, a incerteza de calibração de fluxo relativo a diferentes bandas de frequência e conjuntos de estrelas usadas na calibração necessária para a conservação entre magnitude e fluxo em cada filtro. A maior preocupação entre os estudiosos está nas técnicas de ajuste da curva de luz e a variação na luminosidade média da SNe Ia com as propriedades das suas galáxias hospedeiras [65].

### 3.3.3 Joint Light-curve Analysis (JLA)

A colaboração entre as pesquisas SNLS-SDSS chamada de "*análise da curva de luz conjunta*" (sigla em inglês, JLA), iniciada em 2010, procurou melhorar a precisão da calibração fotométrica de ambas as pesquisas. De forma mais rigorosa, procurou determinar a incerteza nos modelos da curvas de luz das SNe Ia incluindo a plena amostra espectroscópica do SDSS-II na formação da curva de luz e análise cosmológica [77]. De acordo com JLA, as melhorias foram feitas sem levar em conta seus efeitos sobre a derivação de parâmetros cosmológicos em relação aos dados coletados [7].

Utilizando a ideia de módulo de distância  $\mu$  (como vimos na equação (3.37)) a diferença entre a magnitude de sua banda B aparente e sua magnitude absoluta, é modelado pela expressão

$$\mu = m_B^* - (M_B - \alpha \times X_1 + \beta \times C), \quad (3.45)$$

onde  $m_B^*$  é a magnitude do pico observado na banda B da SNe, e os valores  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $M_B$  são chamados de *parâmetros incômodos* [78].

As grandezas  $X_1$  e  $C$ , são os parâmetros da curva de luz das SNe Ia que resultam dos ajustes de um modelo espectral, sendo respectivamente, o tempo de alongamento da curva de luz e a cor da supernova no seu brilho máximo [7]. Os parâmetros incômodos  $\alpha_{SNe}$  e  $\beta_{SNe}$  o

alongamento e correção de cor ("correções de Phillips" [78]), e o parâmetro  $M_B$  corresponde a magnitude absoluta na banda B (desconhecida). Investiga-se inclusive se  $M_B$  depende das propriedades da galáxia hospedeira [7]. Seguindo a sugestão de March [78], relacionamos a massa da galáxia hospedeira ( $M_{estelar}$ ) com o valor de  $M_B$ ,

$$M_B = \begin{cases} M_B^1, & \text{se } M_{estelar} < 10^{10} M_{solar} \\ M_B^1 + \delta M, & \text{se } M_{estelar} \geq 10^{10} M_{solar}. \end{cases} \quad (3.46)$$

### 3.3.4 Compilação Pantheon

A compilação Pantheon apresenta a maior combinação de amostras de SNe Ia, até o momento. É uma combinação de 365 SNe Ia descobertas pelo *Pan-STARRS1(PS1) Medium Deep Survey*, combinadas com um subconjunto de 279 PS1 SNe Ia ( $0,03 < z < 0,68$ ) com estimativas de distâncias úteis do SDSS, de várias amostras SNLS com baixo redshift e do Telescópio Espacial Hubble (HST, sigla em inglês), totalizando em uma compilação de 1048 SNe Ia no intervalo de  $0,01 < z < 2,3$  [8], estendendo significativamente a cobertura do redshift em  $z > 1$  em relação ao JLA (que possui um redshift máximo  $z \simeq 1,3$ ).

Essa compilação foi calibrada utilizando o método BEAMS<sup>14</sup> com viés de correção (BBC, sigla em inglês) [80], em que os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são ajustados a uma cosmologia de referência com parâmetros cosmológicos fixos. Assim, de acordo com Scolnic [8] ao corrigir as magnitudes aparentes das SNe Ia, foi possível calcular o módulo de distância sem nos preocuparmos com as correções de cor ( $C$ ) e de alongamento ( $X_1$ ).

$$\mu = m_B^* - M_B. \quad (3.47)$$

## 3.4 Quasares

Por volta dos anos de 1930, deu-se o início as observações do Universo na faixa de radio do espectro eletromagnético, com os estudos feitos por Karl Jansky e Grote Reber. Mas foi após o final da II Guerra Mundial, com a construção de grandes radiotelescópios, como na Inglaterra e Austrália, que foi possível "enxergar" mais distante no cosmos, pois a emissão em rádio é capaz de viajar grandes distâncias sem sofrer qualquer tipo de absorção no meio intergalático. Desde então, centenas de radiofontes foram descobertas e boa parte foi associada a um objeto também visível no óptico. A maioria das fontes muito intensas de rádio emite mais nessa faixa do que no visível e normalmente são galáxias elípticas gigantes [81].

Há galáxias que emitem uma quantidade excepcional de energia, com espectro não térmico, cujas fontes não são as estrelas, que são classificadas de galáxias ativas. Entre elas,

<sup>14</sup>Bayesian Estimation Applied to Multiple Species [79]



estão as galáxias Seyfert, as rádio-galáxias e um dos objetos mais luminosos do universo que são chamados de quasares [51].

Os quasares, inicialmente identificados como radiofontes intensas, possuía uma aparência óptica estranha para uma estrela, daí vem o nome Quasar de Quasi Stellar Radio Sources. Extremamente menor que uma galáxia e significativamente maior que uma estrela, são objetos compactos e luminosos que emitem mais energia que centenas de galáxias [51]. Os quasares emitem em todas as faixas do espectro eletromagnético. E do ponto de vista óptico, os quasares são mais azulados que uma estrela comum por conta das fortes emissões na faixa do ultravioleta (UV).

A real natureza dos quasares começou a ser pesquisada com os estudos de Marteen Schimdt, por volta de 1963, ao descobrir que as linhas espectrais do quasar 3C273 possuía um desvio no deslocamento na direção do comprimento de onda mais longo. Ou seja, com um redshift de 0.16, o objeto afastava-se de nós com aproximadamente 16% da velocidade da luz [81].

Ainda não se sabe ao certo o que são os quasares, mas o que se sabe é que muitos quasares estão a enormes distâncias de nós e que possuem taxa de geração de energia extremamente grande. Como exemplo de distância, em 2003, o Sloan Survey encontrou um quasar com redshift  $z = 6.4$ , que representa uma informação emitida quando o Universo tinha somente 800 milhões de anos [51]. Além disso, os quasares possuem uma variação, por vezes regular, em sua emissão de radiação óptica que pode ser notada em poucos dias, ou em raios X, em horas de observação. Por esse tipo de comportamento, pode-se estimar o tamanho do quasar 3C273 pois as faixas de raios X e a interpretação cosmológica sugerem que seu núcleo seja aproximadamente do tamanho do sistema solar, mas que emite uma radiação de 10 trilhões de vezes maior que o Sol [81].

O mecanismo que alimenta a produção de energia de um quasar ainda é um mistério. A hipótese mais aceita é a que foi proposta em 1964 por Edwin Ernest Salpeter e Yakov Borisovich Zel'dovich que existe um buraco negro em seu centro que emite intensa radiação enquanto a matéria se acelera, espiralando no disco de acreção, e parte da matéria produz feixes de partículas que são ejetadas em sentidos opostos por *conservação de momento* [51].

Já discutimos que uma "vela padrão" para estudos cosmológicos é definida, fundamentalmente, pelas características que envolvem sua luminosidade padrão (ou padronizável) e sua fácil observação em uma gama significativa de redshift. Assim, os quasares se mostram uma fonte astrofísica importante devido a última característica, mas deixa a desejar pela primeira, pois sua distribuição espectral apresenta pouco, ou nenhuma, evolução luminosa significativa. Porém, as correlações fracas entre as características luminosas e espectrais podem, em princípio, ser úteis para medições cosmológicas, desde que a amostra de quasares seja grande o suficiente [82].

Uma estreita correlação observacional de não linearidade entre o raio-X e a emissão

ótica ultravioleta (UV) que são observadas em Núcleos Galácticos Ativos (do inglês, AGN) em uma ampla faixa de redshift e em várias ordens de magnitude em luminosidade é conhecida há décadas [28]. Em trabalhos como os de Salvestrini [29] e Lusso et al. [11,83], entre outros, foram desenvolvidos métodos para usar essa relação na cosmologia observacional, transformando quasares em velas padronizáveis. Como podemos ilustrar na Figura 3.1, extraído do trabalho de Lusso et al. [11] em que é analisado as restrições de parâmetros cosmológicos com medidas de altos redshift  $0.5 < z < 5.5$  com base em um diagrama de Hubble de quasares.

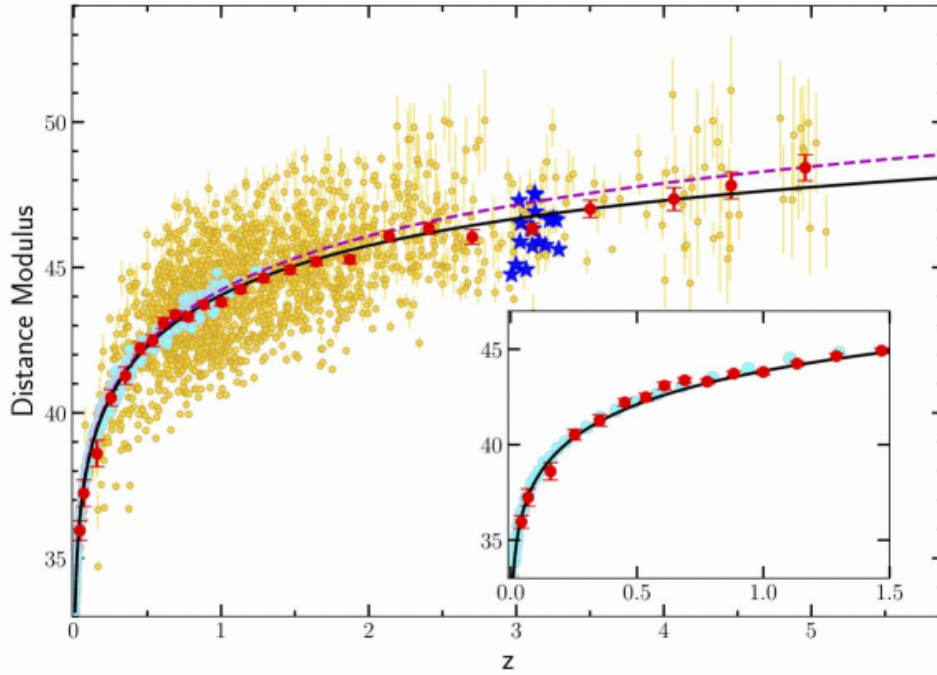


Figura 3.1 – Diagrama de Hubble de SNe Ia da compilação JLA (pontos cianos) e quasares (pontos amarelos). Os pontos vermelhos representam a média do módulo de distâncias de subamostras de quasares. Em azul, são quasares com observações XMM-Newton dedicada com  $z > 3$  [11].

A amostra de quasares que trabalhamos é composta por 1598 fontes na faixa de redshift de  $0.04 < z < 5.1$ , com medidas de alta qualidade nos comprimentos de onda ópticas de raio-X e UV. Neste conjunto, a correlação não linear entre as luminosidades do raio-X e UV podem ser parametrizados pela equação empírica,

$$\log_{10}(L_X) = \beta + \gamma \log_{10}(L_{UV}), \quad (3.48)$$

onde  $L_X$  corresponde a luminosidade monocromática do *rest-frame* em 2 keV e  $L_{UV}$  é a luminosidade do UV em 2.500 Å. Temos o  $\beta$  como sendo uma constante de normalização<sup>15</sup> e  $\gamma$  a inclinação observada. Expressaremos as luminosidades em termos de fluxo ( $\mathcal{F}$ ) e distância luminosidade ( $d_L^2$ ), ou seja,  $L = \mathcal{F} \cdot 4 \cdot \pi \cdot d_L^2$  (ver equação (3.22)). Assim, obtemos:

$$\log_{10}(\mathcal{F}_X) = \beta + \gamma \log_{10}(\mathcal{F}_{UV}) + 2(\gamma - 1) \log_{10} 2d_L^2 + (\gamma - 1) \log_{10}(4\pi), \quad (3.49)$$

<sup>15</sup>Queremos chamar a atenção que, no caso dos quasares, o valor  $\beta$  não é o mesmo utilizado para o tratamento da curva de luz no caso da compilação JLA.

onde  $\mathcal{F}_X$  e  $\mathcal{F}_{UV}$  são as densidades de fluxo de raio-X e UV, respectivamente [84].

## 4 MODELOS COSMOLÓGICOS

O modelo da cosmologia padrão é baseada no princípio cosmológico que afirma que o Universo é homogêneo e isotrópico, ao menos em grandes escalas. E se baseia na ideia de que o material que preenche o Universo é modelado como um fluido perfeito desprovido de viscosidade, distribuído de forma homogênea e isotrópica formado pelos seguintes componentes: matérias bariônica e não-bariônica (escura), radiação e energia escura.

Das várias ideias que surgiram na busca da compreensão de como o Universo evolui, foi no início do século XX que surgiu a *Teoria da Relatividade Geral* (TRG) de Einstein que se mostrou mais abrangente e bem sucedida na descrição dos fenômenos gravitacionais. Foi a partir das equações de Einstein que se obtém as possíveis soluções que associavam o fator de escala e outras quantidades físicas às suas fontes, e que também pudessem descrever a dinâmica que envolve toda a matéria e energia existente no Universo.

### 4.1 Equação de Friedmann

As equações de Einstein do campo gravitacional explicam como o espaço-tempo relaciona-se com a matéria (energia) e como a presença dela modifica a geometria do próprio espaço-tempo. Sendo as equações de campo de Einstein dadas por,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{c^4} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde os índices  $\mu$  e  $\nu$  correm de 0 a 3 (onde o valor 0 corresponde a *coordenada do tipo tempo* e os valores 1 a 3 *coordenadas do tipo espaço*). Do lado esquerdo da equação (4.1), temos  $G_{\mu\nu}$  é um tensor que se relaciona com a geometria do espaço-tempo por meio do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e o escalar de curvatura  $R$ . À direita, temos a constante gravitacional  $G$ , o tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$  que descreve a energia e momento de componentes da matéria e  $c$  é a velocidade da luz. Por fim,  $\Lambda$  é a constante cosmológica (anteriormente considerada como termo geométrico) que associada com o tensor métrico ( $g_{\mu\nu}$ ), possui caráter energético conhecida como energia do vácuo [85].

Para calcularmos o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  precisaremos encontrar os valores dos tensores de Ricci ( $R_{\mu\nu}$ ) e métrico ( $g_{\mu\nu}$ ), o escalar de curvatura ( $R$ ), e o tensor momento-energia ( $T_{\mu\nu}$ ).

Considerando um elemento de linha da métrica FLRW, que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico quadridimensional, e lembrando a equação (3.1) (considerando  $c = 1$  por conveniência) escrevemos

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (4.2)$$

sendo  $g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \quad \mu \neq \nu$  e  $g_{\mu\nu} \neq 0 \quad \forall \quad \mu = \nu$ , e  $x^\mu \equiv (t, r, \theta, \phi)$  são as coordenadas do evento. Comparando a (3.1) com (4.2) podemos encontrar os coeficientes não nulos do tensor  $g_{\mu\nu}$  [14]:

$$\begin{cases} g_{00} = 1 \\ g_{11} = \frac{-a^2}{1-kr^2} \\ g_{22} = -a^2 r^2 \\ g_{33} = -a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \end{cases} \quad (4.3)$$

Considerando que a trajetória das partículas percorrem uma geodésica descrita pela equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0, \quad (4.4)$$

onde  $s$  é um parâmetro da trajetória e  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  é denominado símbolo de Christoffel, utilizaremos a equações de Euler-Lagrange e Lagrangeana, dadas por

$$\frac{d}{ds} \frac{dL}{dx^\mu} - \frac{dL}{dx^\mu} = 0 \quad (4.5)$$

e

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.6)$$

para determinarmos os coeficientes  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ .

Precisamos das componentes do  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  para encontrarmos as soluções para o tensor de Ricci, que é definido como sendo

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma. \quad (4.7)$$

Utilizando os resultados da (4.3) nas equações (4.5) e (4.6) e comparando com a equação (4.4) obtemos os resultados para os coeficientes não nulos do símbolo de Christoffel e utilizando na (4.7) temos

$$\begin{cases} R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} \\ R_{11} = \frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)}{(1-kr^2)} \\ R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k)r^2 \\ R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k)r^2 \text{sen}^2 \theta \\ R_{\mu\nu} = 0 (\text{para } \mu \neq \nu), \end{cases} \quad (4.8)$$

Com as componentes do tensor de Ricci, obtemos o escalar de curvatura  $R$ , que é dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

onde  $g^{\mu\nu}$  é a matriz inversa de  $g_{\mu\nu}$ . Assim, temos

$$R = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (4.10)$$

Como temos  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , podemos utilizar os resultados encontrados em (4.3), (4.8) e (4.10) e obteremos

$$\begin{cases} G_{00} = 3 \left[ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] \\ G_{11} = - \left[ \frac{1}{(1-kr^2)} \right] [2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k] \\ G_{22} = -r^2[2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k] \\ G_{33} = -r^2 \text{sen}^2\theta[2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k] \end{cases} \quad (4.11)$$

Em um espaço-tempo FLRW, o tensor momento-energia toma a forma de um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $p$  a pressão e  $u_\mu$  o quadri-vetor velocidade.

Utilizando os resultados obtidos em (4.3) e lembrando que  $u_\mu = g_{\mu\nu}\delta_\nu^0 = \delta_\nu^0$ , e que  $\delta_\mu^0 = \delta_\nu^0 = 1$  se  $\mu = \nu = 0$  e  $\delta_\mu^0 = \delta_\nu^0 = 0$  se  $\mu = \nu \neq 0$ , podemos reescrevermos a equação (4.12) como sendo [14]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - p g_{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Com isso, teremos

$$\begin{cases} T_{00} = \rho \\ T_{11} = p \left[ \frac{a^2}{1-kr^2} \right] \\ T_{22} = p a^2 r^2 \\ T_{33} = p a^2 r^2 \text{sen}^2\theta \end{cases} \quad (4.14)$$

Com os resultados da (4.3), (4.11) e (4.14) sendo substituídos na equação de campo de Einstein (4.1) (uma vez que as componentes  $T_{22}$  e  $T_{33}$  são idênticas a  $T_{11}$ ), serão consideradas apenas as componentes não nulas para  $\mu = \nu$ . Por fim, obtemos as *Equações de Friedmann*:

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.16)$$

A equação (4.15) descreve como a taxa de expansão varia devido ao conteúdo energético. Enquanto que a (4.16) corresponde a aceleração do fator de escala  $a(t)$ .

Se multiplicarmos a (4.15) por  $a^2$ , derivando em função do tempo e substituindo na (4.16), encontramos

$$\dot{\rho} + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho + p) = 0, \quad (4.17)$$

sendo esta a *equação de conservação de energia*, que é uma relação que expressa a conservação total de energia do fluido cósmico homogêneo e isotrópico [48].

## 4.2 Parâmetros Cosmológicos

Para estudarmos as características da dinâmica do Universo, nos baseamos em determinados modelos cosmológicos que são representados em termos de seus parâmetros. A seguir, abordaremos alguns desses parâmetros cosmológicos que serão mais relevantes para o nosso estudo.

### 4.2.1 Parâmetros da Equação de Estado

Observemos que das equações básicas (4.15), (4.16) e (4.17), que descrevem a forma como o Universo se expande, apenas duas delas são independentes, pois a equação da aceleração deriva das equações de Friedmann e de continuidade. Portanto, como temos três incógnitas e um sistema com apenas duas equações independentes, necessitamos de uma terceira que relacione pressão e densidade de energia. Assim, introduziremos uma equação de estado do tipo  $p = p(\rho)$  dada pela forma funcional que engloba a maioria dos casos de interesse cosmológico:

$$p_i = w_i(a)\rho_i(a), \quad (4.18)$$

sendo que  $w_i$  é chamado *parâmetro da equação de estado* que pode ser uma constante ou dependente do fator de escala [14].

O Universo possui componentes distintos, assim, devemos fazer o somatório da pressão e densidade de energia da contribuição de cada uma dessas quantidades:  $p = \sum_i p_i = \sum_i w_i(a)\rho_i(a)$ .

Com o intuito de descrevermos o comportamento das componentes do Universo, e supondo que elas obedecem a equação de continuidade separadamente sem decair em outra espécie, devemos encontrar em (4.17) a evolução da densidade de energia para cada componente separadamente dada pela equação de estado (4.18) em termos do fator de escala:

$$\frac{d\rho_i}{da} = -\frac{3\rho_i(a)}{a} (w_i(a) + 1) \Rightarrow \rho_i(a) = \rho_{i,0} \exp \left[ -3 \int_{a_0=1}^a \frac{(1 + w_i(a'))}{a'} da' \right], \quad (4.19)$$

onde assumimos que o fator de escala atual é  $a_0 = 1$  e que  $\rho_{i,0} \equiv \rho_i(a_0 = 1)$ .

Os casos onde  $w$  não seja constante, a evolução da componente da densidade de energia só será obtida caso a expressão analítica (4.19) seja proposta para  $w_i(a)$ .

Considerando que  $w$  seja constante, a densidade de energia em função do fator de escala é da forma

$$\rho_i(a) = \rho_{i,0} a^{-3(w_i+1)}. \quad (4.20)$$

De acordo com a (4.20) temos a evolução da densidade de energia das seguintes componentes, vista separadamente:

- **Matéria** - Em cosmologia, o termo "*matéria*" é comumente usado como abreviação de "*matéria não-relativística*" se referindo a qualquer tipo de material que exerce pressão desprezível,  $P = 0$  [86]. A expressão engloba dois tipos de matérias não-relativísticas: (a) *matéria bariônica* (ordinária), que é a matéria atômica (ex: átomos, moléculas, planetas, estrelas etc.) e uma pequena contribuição adicional de neutrinos massivos, com seu valor ainda desconhecido; (b) *matéria escura fria* (Cold Dark Matter) ou pela sigla em inglês **CDM**, ela é invisível e só pode ser detectada por meio de seus efeitos gravitacionais [87]. Como não exercem pressão, temos  $p_m \approx 0 \Rightarrow w_m = 0$ . Assim, da (4.20) temos a densidade da componente de matéria

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}. \quad (4.21)$$

Este resultado não nos surpreende, pois a densidade diminui em proporção ao aumento do volume do Universo [86].

- **Radiação** - As partículas de luz (fótons) movem-se, naturalmente, à velocidade da luz. Sua energia cinética proporciona uma pressão de radiação, que a partir da teoria padrão da radiação podemos escrever que  $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$  ou seja,  $w_r = \frac{1}{3}$ . De forma geral, partículas que se movimentem a velocidades altamente relativísticas têm essa equação de estado como, por exemplo, os neutrinos não massivos [86]. Assim, da (4.20) temos

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4}. \quad (4.22)$$

- **Energia do Vácuo** - No caso do modelo padrão, esta energia está associada à constante cosmológica  $\Lambda$  e nos fornecendo a melhor descrição para a energia escura, responsável pela expansão acelerada do Universo [13].

Em uma interpretação contemporânea sobre a constante cosmológica, a energia escura é representada por um fluido com densidade e pressão, respectivamente, dadas por

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (4.23)$$

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (4.24)$$

portanto, temos  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  que ao compararmos com a equação (4.18) temos o parâmetro da equação de estado  $w_\Lambda = -1$ , o que implica em uma densidade  $\rho_\Lambda = \text{constante}$ .

Originalmente,  $\Lambda$  estava do lado esquerdo da equação (4.1) como parte da curvatura, introduzida por Einstein por acreditar que o Universo era estático. Hoje,  $\Lambda$  está como parte do tensor de momento-energia  $T_{\mu\nu}$  associada a energia do vácuo. Na Teoria Quântica de Campo (TQC) o termo  $\Lambda$  está vinculado às flutuações do estado do vácuo, comprovadas experimentalmente por meio do Efeito Casimir [88, 89]. O vácuo não é uma região desprovida de energia, como era vista classicamente. Na TQC existe um estado de vácuo



de energia mínima, em que campos flutuam em torno do valor zero enquanto seus valores médios são nulos. Por conta da invariância de Lorentz o tensor momento-energia deve assumir a forma  $\langle T_{\mu\nu}^{vacu} \rangle = -\langle \rho \rangle g_{\mu\nu}$ , portanto, a equação de estado do vácuo será  $p_{vac} = -\rho_{vac}$  que é equivalente à constante cosmológica [90, 91].

Apesar da simplicidade, é difícil explicar por que a escala de energia da constante cosmológica necessária para a aceleração cósmica hoje é muito menor em relação ao previsto pela física de partículas [91]. O que é chamado de *problema da constante cosmológica*, o valor observado é da ordem de  $\rho_{\Lambda,0} \lesssim 10^{-29} g/cm^3$ , enquanto que o valor de  $\Lambda$  previsto pela TQC é de  $\rho_{\Lambda,teor.} \approx [10^{13} - 10^{92}] g/cm^3$  [92, 93]. Esta discrepância é da ordem de 45 a 120 magnitudes.

#### 4.2.2 Parâmetros de Densidades

Podemos obter informações importantes sobre as características gerais da expansão analisando o conteúdo energético do Universo. Chamaremos  $\rho_m$  a soma das densidades das matérias bariônica ( $\rho_b$ ) e escura ( $\rho_{dm}$ ), e de  $\rho_r$  a densidade da radiação. A densidade total será  $\rho_T = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ , onde  $\rho_\Lambda$  corresponde a densidade de energia escura.

A (4.15) pode ser reescrita como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_T - \frac{k}{a^2}. \quad (4.25)$$

Para  $k = 0$ , temos o caso limite de

$$\rho_T = \rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (4.26)$$

chamada de *densidade de energia crítica*.

Com isso, foi permitido uma classificação útil de modelos cosmológicos. Em um universo com densidade  $\rho$  maior do que o valor crítico  $\rho_{cr}$  seria de uma geometria espacialmente fechada ( $k = +1$ ), enquanto que um cosmos de densidade menor que o valor crítico seria espacialmente aberto ( $k = -1$ ).

A expressão do valor da densidade crítica atual é dado por

$$\rho_{cr,0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (4.27)$$

O valor estimado é  $\rho_{cr,0} = 1,878h^2 \times 10^{-29} gcm^{-3}$ , onde  $h$  é a constante de Hubble-Lemaître em unidades de  $100 km s^{-1} Mpc^{-1}$  [94]. O valor atual da densidade total ( $\rho_0$ ) é muito próximo da densidade crítica hoje ( $\rho_{cr,0}$ ), de modo que o nosso Universo é considerado espacialmente plano (aproximadamente). O ajuste fino em  $k$  é uma coincidência surpreendente, fazendo parte do chamado *problema de planicidade (Flatness problem)* [95].

Ao invés das densidades de cada componente, é mais comum e útil empregarmos um parâmetro de densidade adimensional para cada componente. Definimos o parâmetro de densidade como sendo,

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G\rho_i}{3H^2}, \quad (4.28)$$

onde o índice  $i$  serve para identificar cada tipo de componente, e chamaremos de parâmetro de densidade total a soma de todos os parâmetros de densidade:  $\Omega = \sum \Omega_i$ .

Reescrevendo a equação (4.15) teremos,

$$1 = \frac{8\pi G\rho_T}{3H^2} - \frac{k}{a^2H^2} = \Omega_T + \Omega_k, \quad (4.29)$$

onde

$$\Omega_T \equiv \frac{8\pi G\rho_T}{3H^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2H^2}. \quad (4.30)$$

Assim, teremos respectivamente os parâmetros atuais de densidade das matérias bariônica e escura, radiação (fótons + neutrinos sem massa) e energia escura (associada a constante cosmológica  $\Lambda$ ):

$$\Omega_{b,0} = \frac{8\pi G\rho_{b,0}}{3H_0^2}; \quad \Omega_{dm,0} = \frac{8\pi G\rho_{dm,0}}{3H_0^2}; \quad \Omega_{r,0} = \frac{8\pi G\rho_{r,0}}{3H_0^2}; \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{8\pi G\rho_{\Lambda,0}}{3H_0^2} \quad (4.31)$$

e o parâmetro de densidade atual associado à curvatura do espaço

$$\Omega_{k,0} = -\frac{k}{a_0^2H_0^2}. \quad (4.32)$$

### 4.3 Modelo Cosmológico Padrão

O modelo conhecido como  $\Lambda$ CDM (modelo padrão), baseado no espaço-tempo homogêneo e isotrópico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), se mostra uma hipótese operacional notavelmente bem-sucedida que descreve a evolução do Universo em grandes escalas, apesar de algumas lacunas como, dentre eles, se destacam o problema do valor da constante cosmológica, do horizonte, da curvatura, dos monopólos magnéticos, da isotropia e da homogeneidade [14, 95]. O modelo fornece uma estrutura para observações, tais como a lei de Hubble-Lemaître da recessão das galáxias, interpretada em termos da expansão do Universo; possui uma excelente concordância com as previsões da nucleossíntese primordial, ao observarmos a abundância dos elementos leves; o espectro térmico e a isotropia angular da radiação cósmica de fundo em microondas (do inglês, **CMB**), como esperado de uma fase inicial de um Universo denso e quente [96].

Pesquisas com supernovas do tipo Ia indicaram a expansão acelerada do Universo, que pode ser representada pela constante cosmológica  $\Lambda$  [13]. Combinando o conjunto de dados

disponíveis com medidas indiretas, tais como **CMB** ou Oscilações Acústica de Bárions (do inglês, **BAO**), têm-se indícios da existência de uma energia escura que é responsável por aproximadamente 73% da densidade de energia do Universo. O restante está na forma de matéria fria, sobretudo, na forma da matéria escura (Cold Dark Matter ou CDM) [37].

Dividindo a equação (4.15) por  $H_0^2$ , e utilizando os resultados das equações (3.11), (4.20), (4.31) e (4.32) temos como solução da equação de Friedmann para o modelo  $\Lambda$ CDM:

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2} \therefore E(z) = \frac{H(z)}{H_0}, \quad (4.33)$$

onde chamaremos  $E(z)$  de parâmetro de Hubble-Lemaître adimensional. E temos as densidades atuais:  $\Omega_{m,0} = \Omega_{b,0} + \Omega_{dm,0}$  de matéria fria (bárions + matéria escura),  $\Omega_{r,0}$  radiação,  $\Omega_{\Lambda,0}$  energia escura, e  $\Omega_{k,0}$  curvatura.

Para o valor de  $z = 0$ , obtemos  $\frac{H(0)}{H_0} = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1$ . E para simplificar a nossa análise, podemos escrever  $\Omega_0 + \Omega_{k,0} = 1$ , onde  $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}$ . Assim, podemos utilizar de forma prática a curvatura associando-a a um parâmetro que poderá ser ajustado:

$$\begin{cases} \Omega_0 = 1 \Rightarrow \Omega_{k,0} = 0 & (k = 0) \\ \Omega_0 > 1 \Rightarrow \Omega_{k,0} < 0 & (k = 1). \\ \Omega_0 < 1 \Rightarrow \Omega_{k,0} > 0 & (k = -1) \end{cases} \quad (4.34)$$

## 4.4 Modelos Cosmológicos Alternativos

As primeiras análises de SNe Ia foram realizadas supondo que  $\Lambda$ , que representa a componente de energia escura, fosse constante. Mas alguns candidatos a energia escura, também foram propostos na literatura. Por conta disso, alguns modelos cosmológicos alternativos ao padrão foram sugeridos.

### 4.4.1 $w$ CDM

O modelo  $w$ CDM foi introduzido por *Turner e White* [97] com o intuito de testar as consistências dos dados da expansão do Universo com a constante cosmológica. Ela é uma pequena modificação do modelo  $\Lambda$ CDM, ao consideramos a energia escura como um fluido homogêneo com o parâmetro da equação de estado  $w = p_x/\rho_x$  livre e diferente de  $-1$ . O valor de  $w$  varia em um intervalo entre  $-1 < w < -1/3$ , e este modelo é conhecido como  $w$ CDM padrão. Existem estudos em que o valor do parâmetro da equação de estado é  $w < -1$ , este modelo é chamado de  $w$ CDM estendido ou *phantom energy* [98].

Da equação de conservação da energia (4.17), encontramos a evolução da componente da energia escura  $\rho_x$ , obtendo

$$\dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\rho_x = 0, \quad (4.35)$$

que tem como resultado

$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3(1+w)}, \quad (4.36)$$

onde podemos observar que o fluido  $x$  só poderá ter densidade constante se o valor de  $w$  for igual a  $-1$ .

A equação de Friedmann para esse modelo é escrita como

$$E(z) = [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{x,0}(1+z)^{3(1+w)}]^{1/2}. \quad (4.37)$$

#### 4.4.2 Parametrização Chevallier-Polarski-Linder (CPL)

Seguindo a ideia para o modelo  $wCDM$ , considera-se que a energia escura seja algum tipo de fluido dinâmico não conhecido anteriormente pela física podendo ter suas propriedades alteradas com o tempo. Neste caso, a equação do fluido não seria constante, mas variaria a com o tempo, ou de forma equivalente, com redshift  $z$  ou com o fator de escala  $a$  [99].

O impacto da energia escura (seja ela dinâmica ou constante) nas observações cosmológicas poderão ser expressas em termos da dependência com o redshift da equação de estado da energia escura  $w_x(z) = p_x(z)/\rho_x(z)$ . Para este caso, as componentes de matéria e energia escura serão separadamente conservadas, mas a energia escura possuirá uma evolução não trivial [100].

A dependência do parâmetro da equação de estado da energia escura  $w$  com o redshift é estudada por meio de parametrizações. Existem muitas parametrizações para  $w$  na literatura [101]. Porém, adotaremos o mesmo que o *Dark Energy Task Force* [99] que é chamada de parametrização de *Chevallier-Polarski-Linder* (CPL) [102, 103]

$$w_x(a) = w + (1-a)w_a, \quad (4.38)$$

onde  $w_0$  e  $w_a$  são parâmetros livres que podem ser ajustados aos dados observacionais. Considerando  $a_0 = 1$  na equação (3.11), podemos escrever (4.38) em função do redshift:

$$w_x(z) = w + \frac{w_a z}{(1+z)}. \quad (4.39)$$

Reescrevendo a equação (4.19) em função do redshift,

$$\rho_x(z) = \rho_{x,0} \exp \left[ 3 \int_0^z \frac{1 + w_x(z')}{1 + z'} dz' \right]. \quad (4.40)$$

Resolvendo a integral (4.40) com (4.39), podemos reescrever a equação de Friedmann,

$$E(z) = \left[ \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{x,0}(1+z)^{3(1+w+w_a)} \exp \left( \frac{-3zw_a}{1+z} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.41)$$

sendo  $\Omega_{m,0}$ ,  $\Omega_{r,0}$ ,  $\Omega_{k,0}$ ,  $w$  e  $w_a$  parâmetros livres.

O modelo padrão plano, relaxando a curvatura, ou relaxando o parâmetro  $w$  (fixo ou evoluído) serão o objeto de estudo que será abordado no próximo capítulo.

## 5 ANÁLISES E DISCUSSÕES

Em nosso trabalho, procuramos analisar a eficácia do método Estatística Mediana proposto inicialmente por J. R. Gott [1], e modificado por Barreira e Avelino [37], utilizando o algoritmo baseado na amostra aninhada (Nested Sampling) chamado UltraNest [4, 5].

Para verificarmos o quão eficaz é o método da estatística mediana, comparamos os resultados encontrados com o teste  $\chi^2$  utilizando diferentes classes de modelos cosmológicos. Para cada classe teremos tipos diferentes de parâmetros e esse podem ser restritos ou não pelos dados, a depender do tipo de compilação utilizada. As compilações que utilizamos são três:

- A análise conjunta das amostras de Supernovas Tipo Ia utilizando os métodos do projeto SDSS-II/SNLS3 *Joint Light-curve Analysis* (JLA) com 740 SNe Ia que aplica o tratamento as curvas de luz que foram utilizadas por Betoule [7], discutido na seção 3.3.3.
- A compilação conhecida como Pantheon (PAN) (ver seção 3.3.4) é a combinação de dados de SNe Ia do *Pan-STARRS1(PS1)*, junto com estimativas úteis do SDSS e de várias amostras SNLS com baixo redshift do HST, totalizando 1048 Supernovas do Tipo Ia [8].
- Compilação de Quasares (QSO) composta por 1598 amostras de QSO em uma faixa de redshift de  $0,04 < z < 5,1$  (ver seção 3.4) [9].

Abaixo, listamos os modelos cosmológicos que iremos trabalhar:

- $\Lambda$ CDM e  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> - modelo padrão plano e com curvatura, respectivamente;
- $w$ CDM plano - uma variação do modelo padrão, onde o parâmetro  $w$  possa variar assumindo valores diferentes de  $-1$ ;
- CPL plano - parametrização *Chevallier-Polarski-Linder*, nesse modelo os parâmetros  $w$  e  $w_a$  são livres podendo ser ajustados aos dados observacionais.

Como o intuito do trabalho é verificar a eficácia do método proposto em restringir parâmetros cosmológicos, os resultados nos levaram a fixar o valor de  $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Uma vez fixado o valor de  $H_0$ , poderemos medir os parâmetros  $M$  (no caso das SNe) e  $\beta_{qso}$  (para os quasares) com uma boa restrição, sendo esses degenerados em relação a  $H_0$ . Caso trabalhássemos com *CMB*, por exemplo, não seria bom fixarmos  $H_0$ . Pois, dependendo da análise, o  $H_0$  pode inclusive ser um parâmetro derivado.

Em nossos estudos, trabalhamos com uma distribuição gaussiana para os parâmetros incômodos, cujo valores são mostrados na Tabela 5.1. Esses são resultados da média dos valores obtidos ao aplicarmos o teste  $\chi^2$  aos modelos cosmológicos para cada conjunto de

dados utilizando distribuições uniformes, pudemos verificar que as distribuições posteriores dos parâmetros incômodos são pouco sensíveis dos modelos cosmológicos, pelo menos entre os modelos aqui estudados.

Parâmetros Incômodos	Valor central	$\sigma$
$\alpha_{SNe}$ (JLA)	0.1415	0.0066
$\beta_{SNe}$ (JLA)	3.105	0.081
$M$ (JLA)	-19.048	0.023
$\delta M$ (JLA)	-0.070	0.023
$M$ (Pantheon)	-19.349	0.011
$\gamma_{QSO}$ (Quasar)	0.620	0.012
$\beta_{QSO}$ (Quasar)	-11.01	0.24

Tabela 5.1 – Parâmetros Incômodos com seus respectivos valores centrais e desvio padrão para a construção de suas distribuições gaussianas, a priori.

Para os *priors* dos parâmetros cosmológicos, aplicamos a distribuição gaussiana para o termo referente a densidade física bariônica ( $\Omega_b h^2$ ) e para a densidade física de matéria escura fria ( $\Omega_c h^2$ ) aplicamos uma distribuição uniforme, como podemos ver na Tabela 5.2. Nessa tabela, vemos também os tipos de parâmetros livres que utilizamos e suas respectivas distribuições. Os valores dos parâmetros de densidade de matéria ( $\Omega_m$ ) e densidade de energia escura ( $\Omega_\Lambda$ ), são parâmetros derivados.

Parâmetros Cosmológicos	Tipos de Distribuição
$H_0$	$70.0 km s^{-1} Mpc^{-1}$ (Fixo)
$\Omega_b h^2$	$G(0.02226, 0.00023)$
$\Omega_c h^2$	$U(0.0, 0.55)$
$\Omega_k$	$U(-1.0, 1.0)$
$w$	$U(-3.0, 1.0)$
$w_a$	$U(-3.0, 2.0)$

Tabela 5.2 – Parâmetros Cosmológicos com suas respectivas distribuições, a priori.

## 5.1 Supernovas do Tipo Ia

### 5.1.1 Modelo $\Lambda$ CDM

#### 5.1.1.1 Compilação JLA

Parametros	Mediana (JLA)	$\chi^2$ (JLA)
$\Omega_m$	$0.290 \pm 0.020$	$0.297^{+0.031}_{-0.03}$
$\Omega_\Lambda$	$0.710 \pm 0.020$	$0.703^{+0.03}_{-0.031}$
$\alpha$	$0.142 \pm 0.007$	$0.141 \pm 0.005$
$\beta$	$3.106^{+0.078}_{-0.08}$	$3.104^{+0.057}_{-0.056}$
$M$	$-19.045^{+0.014}_{-0.016}$	$-19.048 \pm 0.016$
$\delta M$	$-0.065 \pm 0.020$	$-0.070 \pm 0.0160$

Tabela 5.3 – Valor médio do posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda$ CDM usando a compilação JLA.

Iniciamos os nossos estudos utilizando a compilação JLA [7] que contém 740 Supernovas do Tipo Ia, ao modelo padrão plano. Analisamos os resultados dos parâmetros incômodos,  $\alpha_{SNe}$ ,  $\beta_{SNe}$  e  $M$ , bem como os parâmetros de densidade de matéria e energia escura, e vimos que os valores de  $1\sigma$  entre a Mediana e o  $\chi^2$  mostraram-se muito próximos, como mostra a Tabela 5.3.

Como foi discutido no Capítulo 2, uma das vantagens da Mediana é o fato de utilizarmos menos hipóteses que o teste  $\chi^2$ , ou seja, os erros associados aos dados não são utilizados no método da estatística mediana. Porém, ao compararmos as funções de distribuição de probabilidades (PDFs) encontradas em todos os parâmetros livres entre os métodos, vimos que no caso da compilação JLA, o teste  $\chi^2$  mostrou-se um pouco mais restritivo em comparação a Mediana quando observamos os parâmetros incômodos  $\alpha_{SNe}$  e  $\beta_{SNe}$ , como mostra o gráfico da Figura 5.1. Isto se deve ao fato de que o  $\chi^2$  leva em consideração os erros associados a esses parâmetros, tornando a sua distribuição um pouco mais restritiva que a Mediana. Porém, as distribuições para  $\Omega_{\Lambda,0}$  e  $\Omega_{m,0}$  se mostraram mais restritivos para a Mediana do que com o teste  $\chi^2$ .

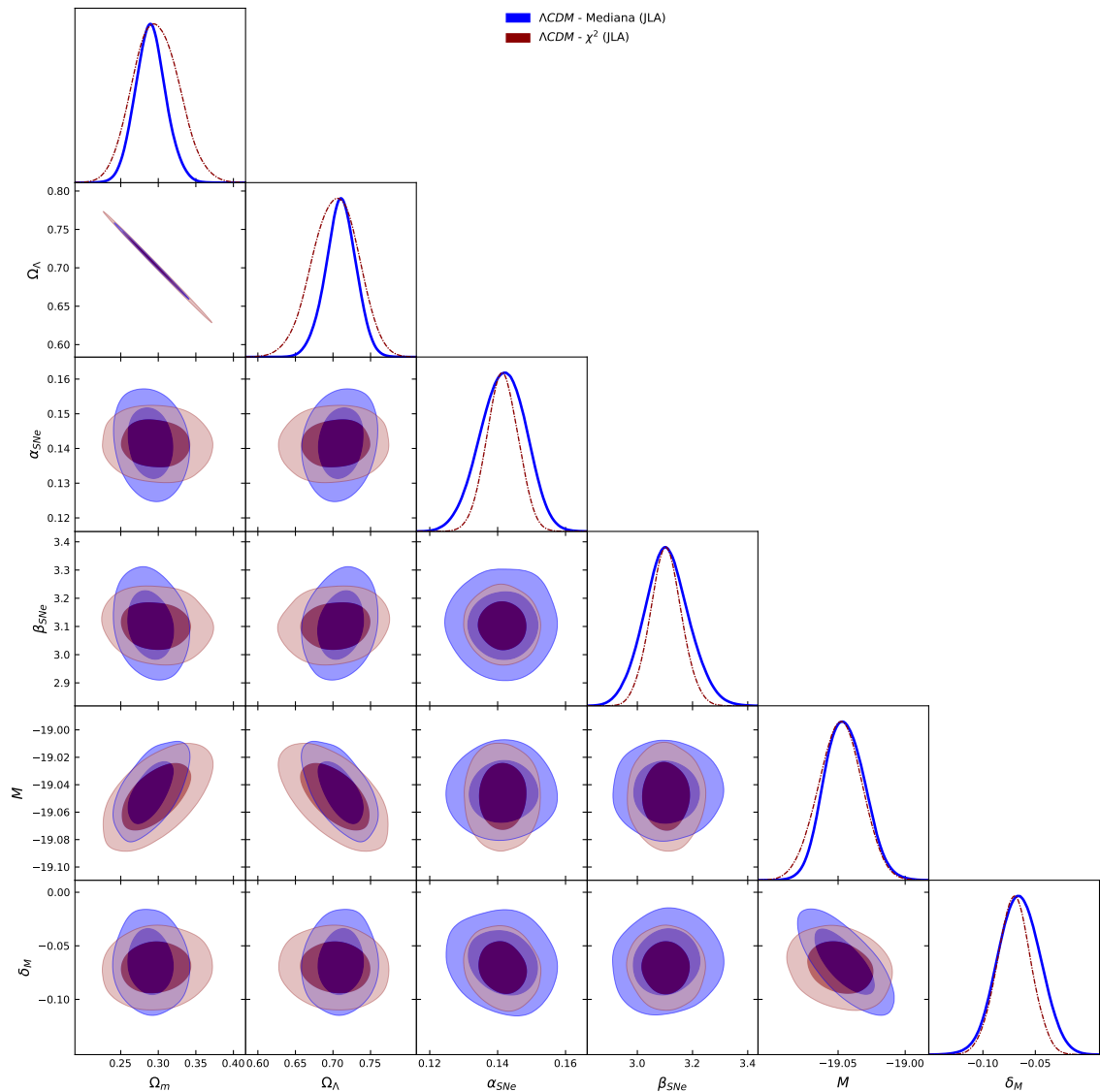


Figura 5.1 – Gráficos resultantes dos ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de credibilidade, para os métodos das Estatísticas Mediana e o  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM plano com a compilação de dados JLA.

### 5.1.1.2 Compilação Pantheon

Parâmetros	Mediana (PAN)	$\chi^2$ (PAN)
$\Omega_m$	$0.281^{+0.012}_{-0.013}$	$0.299^{+0.017}_{-0.016}$
$\Omega_\Lambda$	$0.719^{+0.013}_{-0.012}$	$0.701^{+0.016}_{-0.017}$
$M$	$-19.355^{+0.007}_{-0.006}$	$-19.349 \pm 0.008$

Tabela 5.4 – Valor médio da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda$ CDM usando a compilação Pantheon.

Ao utilizarmos a compilação Pantheon [8], com um número significativamente maior



de supernovas do tipo Ia (1048 SNe Ia), cobrindo a faixa de redshift  $0.01 < z < 2,30$ , começa ficar em evidência a consistência do método Estatística Mediana. Como foi mostrado na seção 2.4, com o aumento do número de medidas  $N$  muito grande beneficia o método. E os resultado vemos na Tabela 5.4, ao compararmos os valores da Mediana com  $\chi^2$ . Podemos ver também na Figura 5.2 como a Mediana mostra-se mais restrita que o  $\chi^2$ .

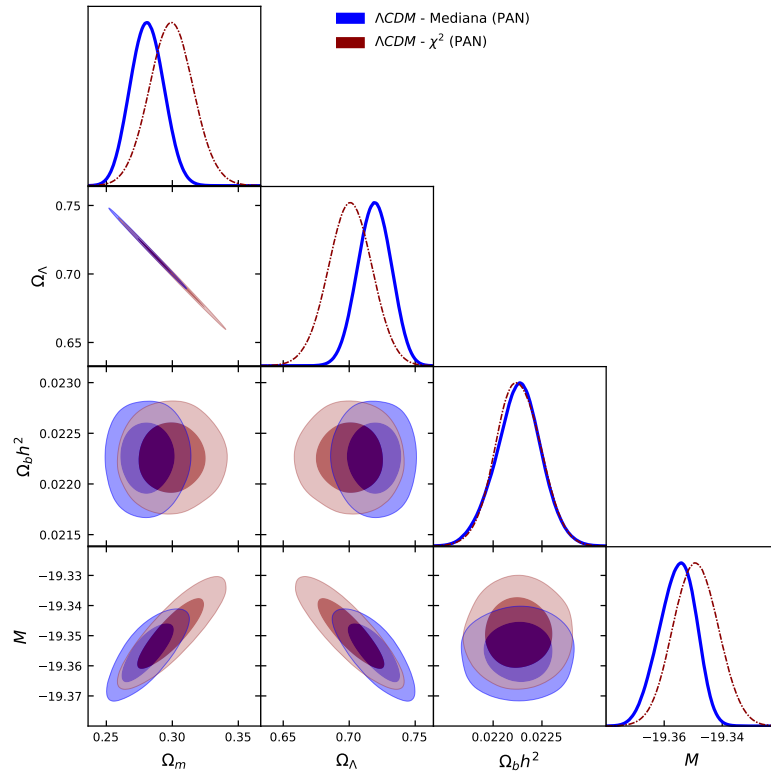


Figura 5.2 – Gráficos resultantes dos ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de credibilidade, para os métodos das Estatísticas Mediana e o  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM plano com a compilação de dados PAN.

### 5.1.2 Modelo $\Lambda$ CDM<sub>k</sub>

#### 5.1.2.1 Compilação JLA

Vemos na Tabela 5.5 que os resultados encontrados para Mediana e  $\chi^2$ , aplicadas ao modelo  $\Lambda$ CDM com curvatura ( $\Lambda$ CDM<sub>k</sub>), utilizando a compilação JLA, mostraram-se bastante satisfatórios para o nosso trabalho. Pois os valores de  $\Omega_m$  e  $\Omega_k$  encontrados pela Mediana mostraram-se próximos do  $\chi^2$ , apesar da quantidade de parâmetros incômodos utilizados e o número relativamente menor de dados (740 SNe Ia) em comparação a compilação Pantheon (1048 SNe Ia). Também foi observado o mesmo comportamento restrito do  $\chi^2$ , em relação aos parâmetros incômodos, onde podemos utilizar as mesmas justificativas mencionados para o modelo padrão plano.

Parâmetros	Mediana (JLA)	$\chi^2$ (JLA)
$\Omega_m$	$0.304^{+0.104}_{-0.105}$	$0.217^{+0.084}_{-0.106}$
$\Omega_\Lambda$	$0.696^{+0.105}_{-0.104}$	$0.783^{+0.106}_{-0.084}$
$\Omega_k$	$-0.035^{+0.264}_{-0.267}$	$0.196^{+0.237}_{-0.205}$
$\alpha_{SNe}$	$0.142^{+0.007}_{-0.006}$	$0.141 \pm 0.005$
$\beta_{SNe}$	$3.109^{+0.082}_{-0.08}$	$3.103^{+0.056}_{-0.057}$
$M$	$-19.045^{+0.016}_{-0.017}$	$-19.043 \pm 0.016$
$\delta M$	$-0.067^{+0.02}_{-0.021}$	$-0.070^{+0.015}_{-0.016}$

Tabela 5.5 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> usando a compilação JLA.

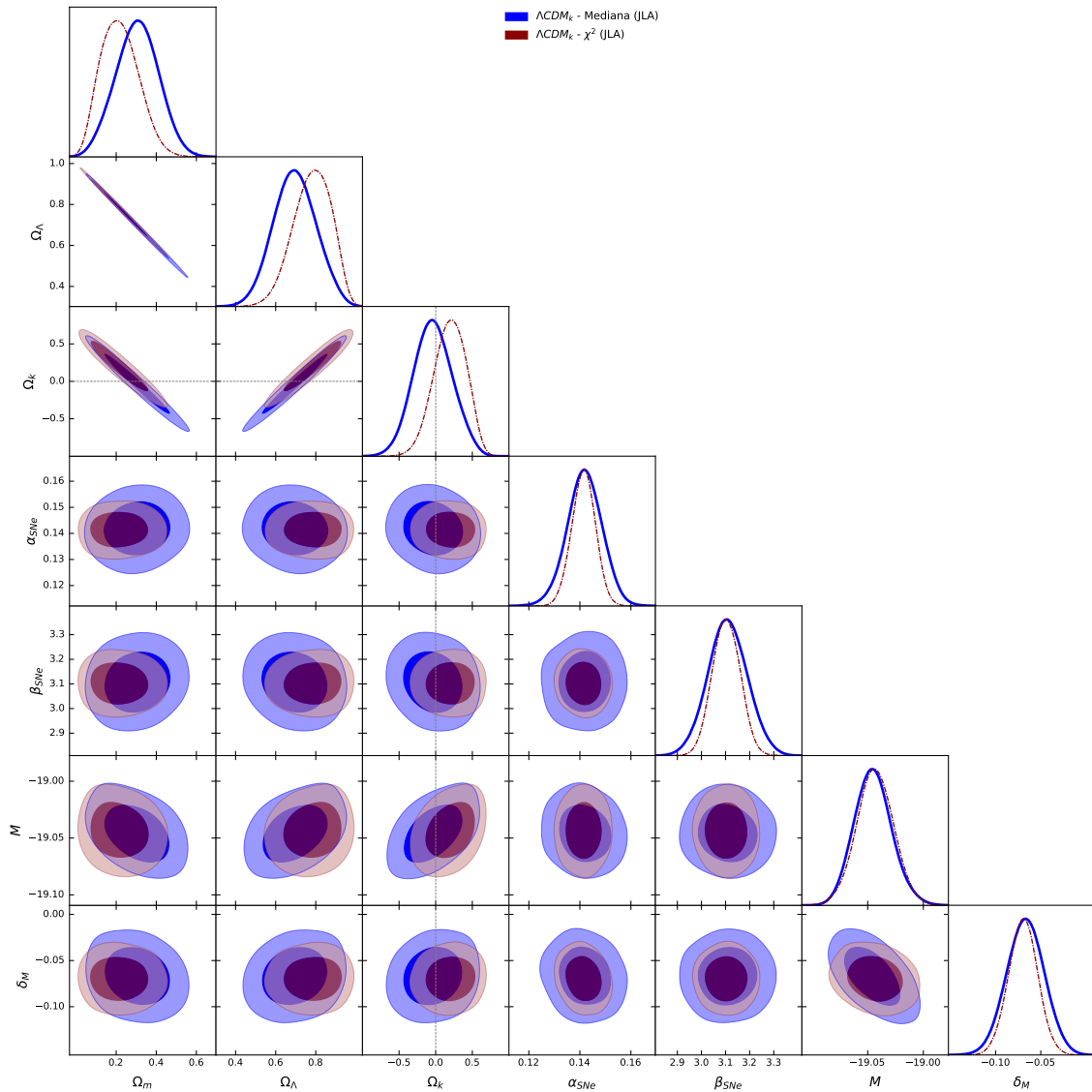


Figura 5.3 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> com a compilação JLA.

Ao observarmos os gráficos da Figura 5.3, percebemos que a Mediana mostrou um comportamento mais restritivo na distribuição dos parâmetros de curvatura  $\Omega_k$  e de densidade de matéria  $\Omega_m$ . Apesar da distribuição da Mediana uma densidade de probabilidade levemente menor que a do  $\chi^2$ , o comportamento da distribuição do parâmetro de densidade de curvatura, se aproxima mais de uma distribuição de curvatura espacialmente plana ( $\Omega_{k,0} \approx 0$ ), de acordo com a literatura, do que a distribuição feita com o teste  $\chi^2$ , dando leve preferência a um Universo espacialmente aberto.

### 5.1.2.2 Compilação Pantheon

Aplicando a compilação de dados Pantheon ao modelo padrão com curvatura, obtemos valores muito próximos entre os dois métodos (ver Tabela 5.6). Porém, o parâmetro  $M$  mostrou uma densidade muito alta para  $\chi^2$ , em comparação a distribuição encontrada pela Mediana, como pode ver na Figura 5.4.

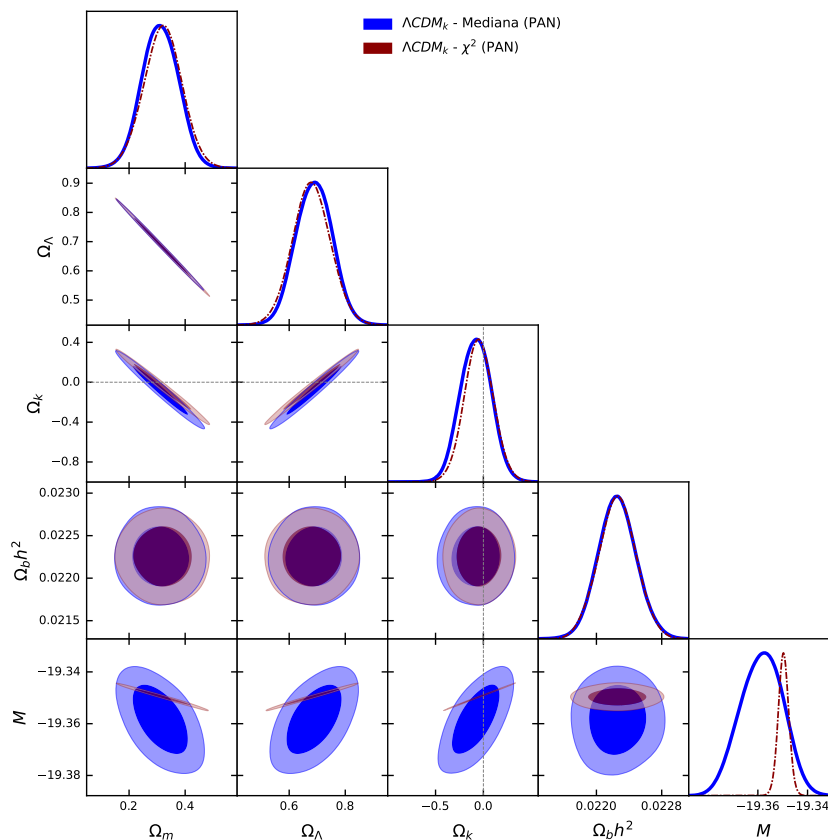


Figura 5.4 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda\text{CDM}_k$  com a compilação Pantheon.

Parâmetros	Mediana (PAN)	$\chi^2$ (PAN)
$\Omega_m$	$0.311^{+0.065}_{-0.062}$	$0.320^{+0.066}_{-0.068}$
$\Omega_\Lambda$	$0.689^{+0.062}_{-0.065}$	$0.680^{+0.068}_{-0.066}$
$\Omega_k$	$-0.079^{+0.156}_{-0.163}$	$-0.048^{+0.153}_{-0.149}$
$M$	$-19.358^{+0.009}_{-0.008}$	$-19.350 \pm 0.002$

Tabela 5.6 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda\text{CDM}_k$  usando a compilação Pantheon.

### 5.1.3 Comparando as compilações JLA e Pantheon

Suspeitamos que a presença de muitos parâmetros incômodos para o tratamento da curva de luz deva, de alguma forma, influenciar na análise da estatística mediana, além da quantidade  $N$  de dados. Pois, ao utilizarmos a compilação Pantheon (PAN), que não possui um número alto de parâmetros incômodos, os valores da mediana se mostraram bem mais restritivos que com a compilação JLA, como podemos ver no gráfico da Figura 5.5 para o modelo  $\Lambda\text{CDM}$ .

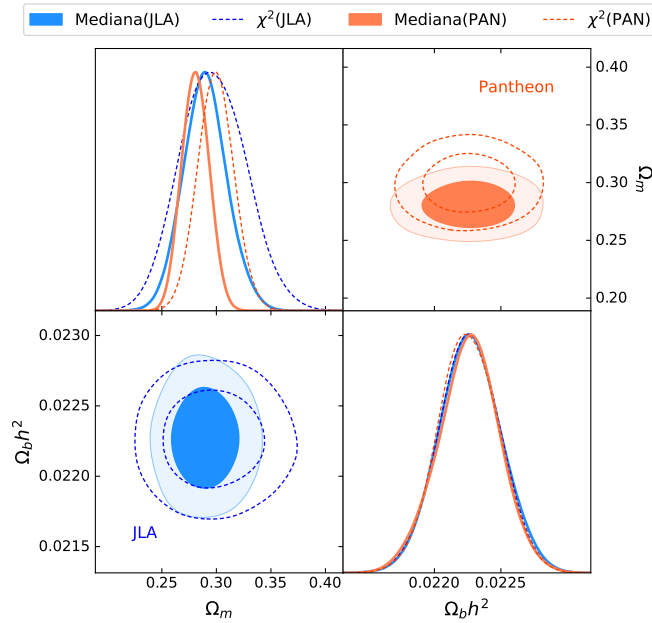


Figura 5.5 – Comparando os ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  da credibilidade para Estatísticas Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda\text{CDM}$  plano entre as compilações JLA e PAN.

As PDFs do parâmetro  $\Omega_m$  mostram como a Mediana (PAN) possui uma distribuição posterior mais restritiva, não apenas em relação ao próprio  $\chi^2$  (PAN), mas também em comparação a Mediana (JLA) e  $\chi^2$  (JLA). O próprio  $\chi^2$  (PAN) se mostra mais restritivo que os valores JLA, por conta do número menor de parâmetros incômodos em relação a compilação JLA. Além disso, o valor do parâmetro de densidade de matéria  $\Omega_m$  encontrado para a Mediana (PAN) é

mais restrito do que o da Mediana (JLA) (ver Tabela 5.7 ), levemente deslocado para valores menores.

Ajuste	$\Lambda$ CDM Plano	$\Lambda$ CDM <sub>k</sub>	
	$\Omega_m$	$\Omega_m$	$\Omega_k$
Mediana (JLA)	$0.290 \pm 0.020$	$0.304^{+0.104}_{-0.105}$	$-0.035^{+0.264}_{-0.267}$
$\chi^2$ (JLA)	$0.297^{+0.031}_{-0.03}$	$0.217^{+0.084}_{-0.106}$	$0.196^{+0.237}_{-0.205}$
Mediana (PAN)	$0.281^{+0.012}_{-0.013}$	$0.311^{+0.065}_{-0.062}$	$-0.079^{+0.156}_{-0.163}$
$\chi^2$ (PAN)	$0.299^{+0.017}_{-0.016}$	$0.320^{+0.066}_{-0.068}$	$-0.048^{+0.153}_{-0.149}$

Tabela 5.7 – Valor médio do posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos  $\Lambda$ CDM e  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> com Supernovas do tipo Ia.

Utilizando o modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> pudemos ver novamente que com a compilação Pantheon, os valores ficam mais restritos; tanto utilizando o método da Mediana, quanto com o teste  $\chi^2$ , reforçando a ideia que ambos os métodos tem uma melhor performance com o Pantheon por conter menos parâmetros incômodos. Além do mais, o PAN possui um número significativo de SNe Ia, o que melhora ainda mais a eficácia da Mediana do que com o teste  $\chi^2$ . Mas ao contrário do que observamos na compilação JLA, com a compilação Pantheon o valor de  $\Omega_{k,0}$  (ver Tabela 5.7 ) do teste  $\chi^2$  mostrou-se levemente mais próximo para o valor de um universo com curvatura espacialmente plano, como mostra a Figura 5.6.

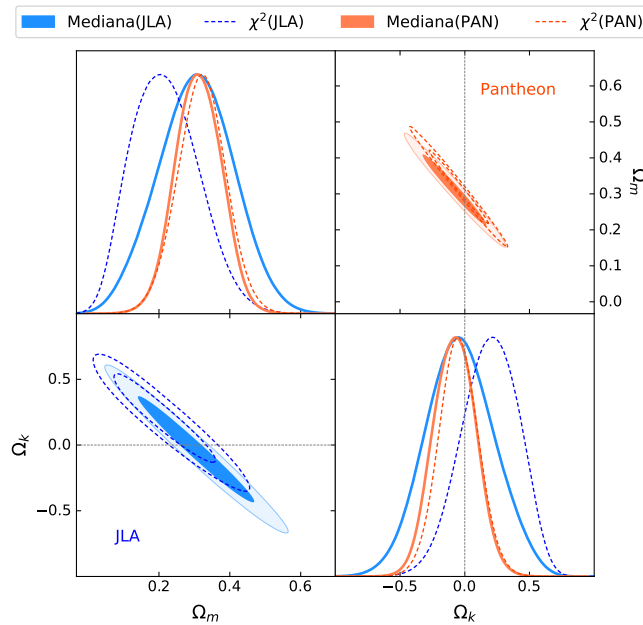


Figura 5.6 – Comparando os melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para Estatísticas Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> entre as compilações JLA e PAN.

### 5.1.4 Modelo $wCDM$

#### 5.1.4.1 Compilação JLA

Como foi mencionado na seção 4.4.1, este modelo alternativo é uma pequena modificação do modelo  $\Lambda CDM$ , em que o parâmetro da equação de estado  $w$  é livre. Utilizando a compilação JLA, obtemos os resultados da Tabela 5.8. Vemos que o parâmetro da equação de estado  $w$  se aproxima do valor encontrado no modelo padrão plano. E podemos perceber que a restrição do parâmetro  $w$  na Mediana mostrou-se mais próximo do valor  $-1$ , tendendo ao modelo  $\Lambda CDM$ , do que do valor encontrado para o teste  $\chi^2$ . E isso fica mais evidente quando olhamos os gráficos da Figura 5.7, onde mostra como a PDF da Mediana é mais restrita que o  $\chi^2$  para os parâmetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $w$ .

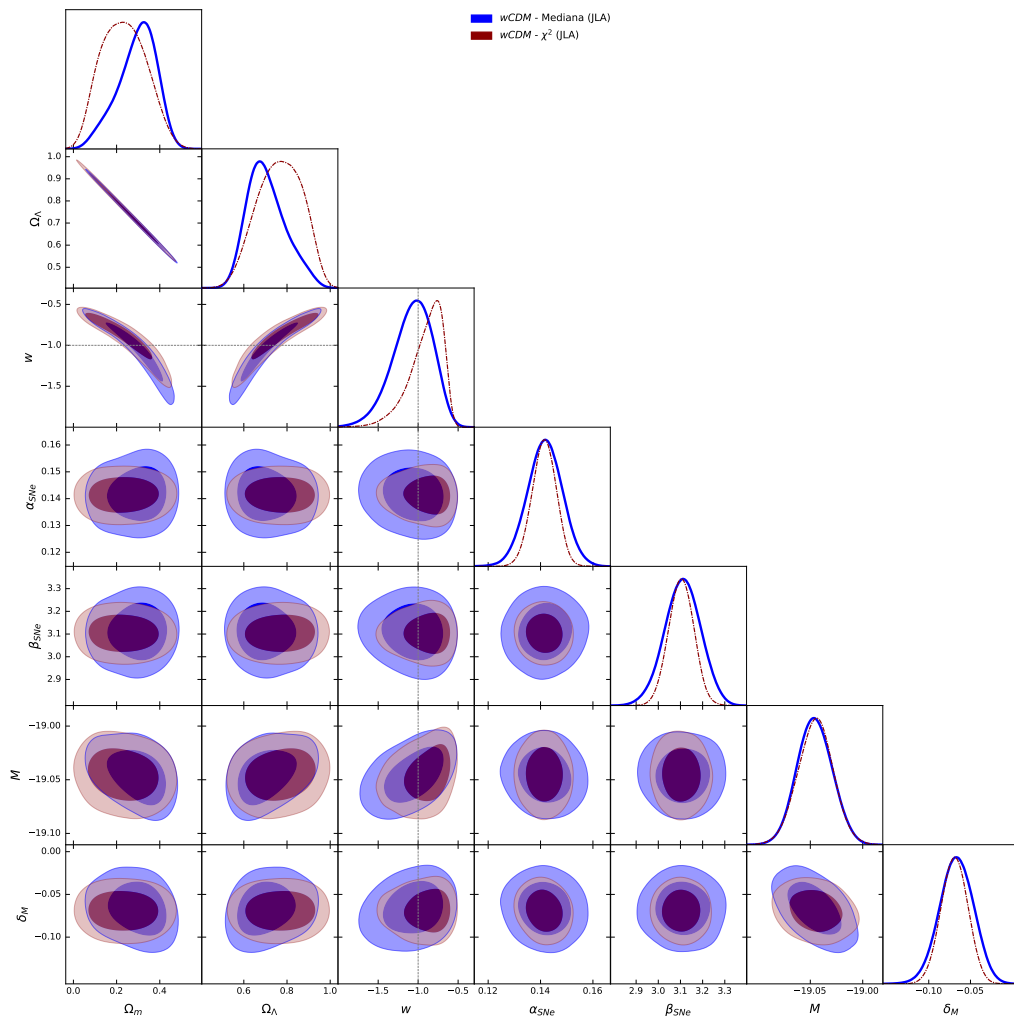


Figura 5.7 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $wCDM$  plano com a compilação JLA.

Parâmetros	Mediana (JLA)	$\chi^2$ (JLA)
$\Omega_m$	$0.295^{+0.106}_{-0.07}$	$0.233^{+0.099}_{-0.115}$
$\Omega_\Lambda$	$0.705^{+0.07}_{-0.106}$	$0.767^{+0.115}_{-0.099}$
$w$	$-1.068^{+0.281}_{-0.212}$	$-0.901^{+0.254}_{-0.12}$
$\alpha_{SNe}$	$0.142 \pm 0.007$	$0.141 \pm 0.005$
$\beta_{SNe}$	$3.110^{+0.08}_{-0.079}$	$3.103^{+0.057}_{-0.056}$
$M$	$-19.046 \pm 0.017$	$-19.045^{+0.017}_{-0.016}$
$\delta M$	$-0.067^{+0.021}_{-0.02}$	$-0.069 \pm 0.016$

Tabela 5.8 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $wCDM$  usando a compilação JLA.

#### 5.1.4.2 Compilação Pantheon

Parâmetros	Mediana (PAN)	$\chi^2$ (PAN)
$\Omega_m$	$0.299^{+0.057}_{-0.045}$	$0.307^{+0.076}_{-0.061}$
$\Omega_\Lambda$	$0.701^{+0.045}_{-0.057}$	$0.693^{+0.061}_{-0.076}$
$w$	$-1.074^{+0.161}_{-0.137}$	$-1.042^{+0.185}_{-0.139}$
$M$	$-19.358^{+0.009}_{-0.008}$	$-19.349 \pm 0.001$

Tabela 5.9 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $wCDM$  usando a compilação Pantheon.

Temos os resultados encontrados da compilação Pantheon aplicado ao modelo  $wCDM$  na Tabela 5.9. Os valores dos parâmetros para os métodos da Estatística Mediana e  $\chi^2$  mostraram-se próximos. E como podemos ver nos gráficos da Figura 5.8, as PDFs para os principais parâmetros mostram uma maior restrição para a Mediana, porém observamos uma densidade de probabilidade muito grande para o parâmetro incômodo  $M$  com o teste  $\chi^2$ , bem como foi observado para o modelo  $\Lambda CDM_k$  utilizando a mesma compilação Pantheon (ver Figura 5.4).

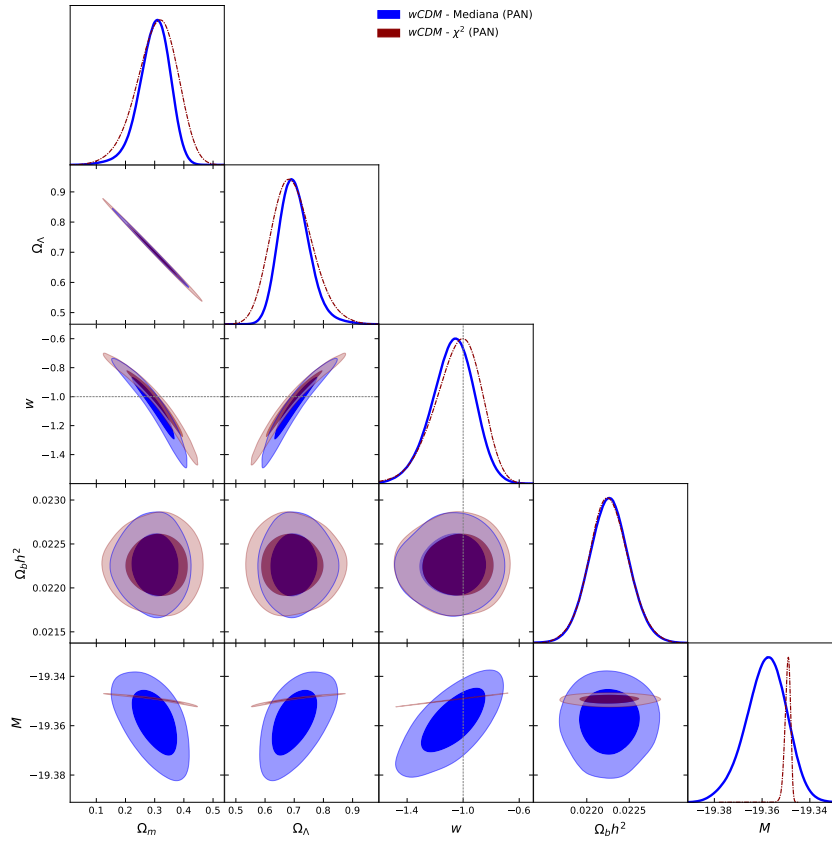


Figura 5.8 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $wCDM$  plano com a compilação PAN.

### 5.1.5 Comparando as compilações JLA e Pantheon

Na Figura 5.9 comparamos os resultados para os ajustes com as compilações JLA e Pantheon aplicados ao modelo  $wCDM$ , e observamos que a Mediana mostrou-se mais restrita para o parâmetro  $\Omega_m$  para ambas as compilações. E o valor de  $w$  próximo ao valor do modelo padrão plano quando Mediana (JLA) e  $\chi^2$  (PAN), apesar da Mediana (PAN) se mostrar mais restrita em sua distribuição, como também mostra a Tabela 5.10.

Ajuste	$wCDM$		$CPL$		
	$\Omega_m$	$w$	$\Omega_m$	$w$	$w_a$
Mediana (JLA)	$0.295^{+0.106}_{-0.07}$	$-1.068^{+0.281}_{-0.212}$	$0.325^{+0.13}_{-0.056}$	$-1.103^{+0.264}_{-0.206}$	$-0.610^{+1.445}_{-1.517}$
$\chi^2$ (JLA)	$0.233^{+0.099}_{-0.115}$	$-0.901^{+0.254}_{-0.12}$	$0.276^{+0.128}_{-0.091}$	$-0.936^{+0.257}_{-0.16}$	$-0.509^{+1.488}_{-0.973}$
Mediana (PAN)	$0.299^{+0.057}_{-0.045}$	$-1.074^{+0.161}_{-0.137}$	$0.319^{+0.115}_{-0.042}$	$-1.100^{+0.166}_{-0.165}$	$-0.691^{+1.586}_{-1.278}$
$\chi^2$ (PAN)	$0.307^{+0.076}_{-0.061}$	$-1.042^{+0.185}_{-0.139}$	$0.324^{+0.112}_{-0.049}$	$-1.059^{+0.191}_{-0.160}$	$-0.578^{+1.159}_{-0.900}$

Tabela 5.10 – Valor médio do posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos  $wCDM$  e  $CPL$  com Supernovas do Tipo Ia.



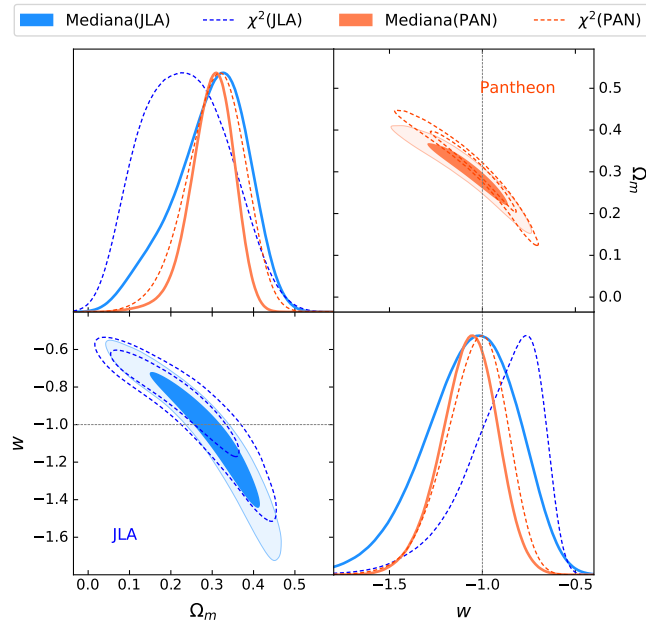


Figura 5.9 – Comparando os melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para Estatísticas Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $wCDM$  entre as compilações JLA e PAN.

## 5.1.6 Parametrização Chevallier-Polarski-Linder ( $CPL$ )

### 5.1.6.1 Compilação JLA

Parâmetros	Mediana (JLA)	$\chi^2$ (JLA)
$\Omega_m$	$0.325^{+0.13}_{-0.056}$	$0.276^{+0.128}_{-0.091}$
$\Omega_\Lambda$	$0.675^{+0.056}_{-0.13}$	$0.724^{+0.091}_{-0.128}$
$w$	$-1.103^{+0.264}_{-0.206}$	$-0.936^{+0.257}_{-0.16}$
$w_a$	$-0.610^{+1.445}_{-1.517}$	$-0.509^{+1.488}_{-0.973}$
$\alpha_{SNe}$	$0.142 \pm 0.006$	$0.141 \pm 0.005$
$\beta_{SNe}$	$3.115^{+0.075}_{-0.079}$	$3.106 \pm 0.059$
$M$	$-19.046^{+0.016}_{-0.018}$	$-19.045^{+0.017}_{-0.018}$
$\delta M$	$-0.068^{+0.021}_{-0.019}$	$-0.070 \pm 0.016$

Tabela 5.11 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $CPL$  usando a compilação JLA.

A parametrização Chevallier-Polarski-Linder ( $CPL$ ) considera que a energia escura seja um tipo de fluido dinâmico. Com essa ideia, teremos dois parâmetros livres  $w_0$  e  $w_a$  que podem ser ajustados aos dados observacionais (ver mais detalhes na seção 4.4.2). Aplicando

a compilação JLA ao modelo *CPL* obtemos os seguintes resultados, como mostra a Tabela 5.10. Houve restrição dos parâmetros, apesar de uma certa dificuldade que os dois métodos encontraram. Podemos ver pela Figura 5.10 que a Mediana e o  $\chi^2$  não obtiveram uma restrição para o parâmetro  $w_a$ , mas a distribuição para o parâmetro  $w_0$  foi obtido para ambos os métodos. Mas apesar das dificuldades, para os parâmetros  $\omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  a Mediana mostrou-se mais restrita em sua distribuição.

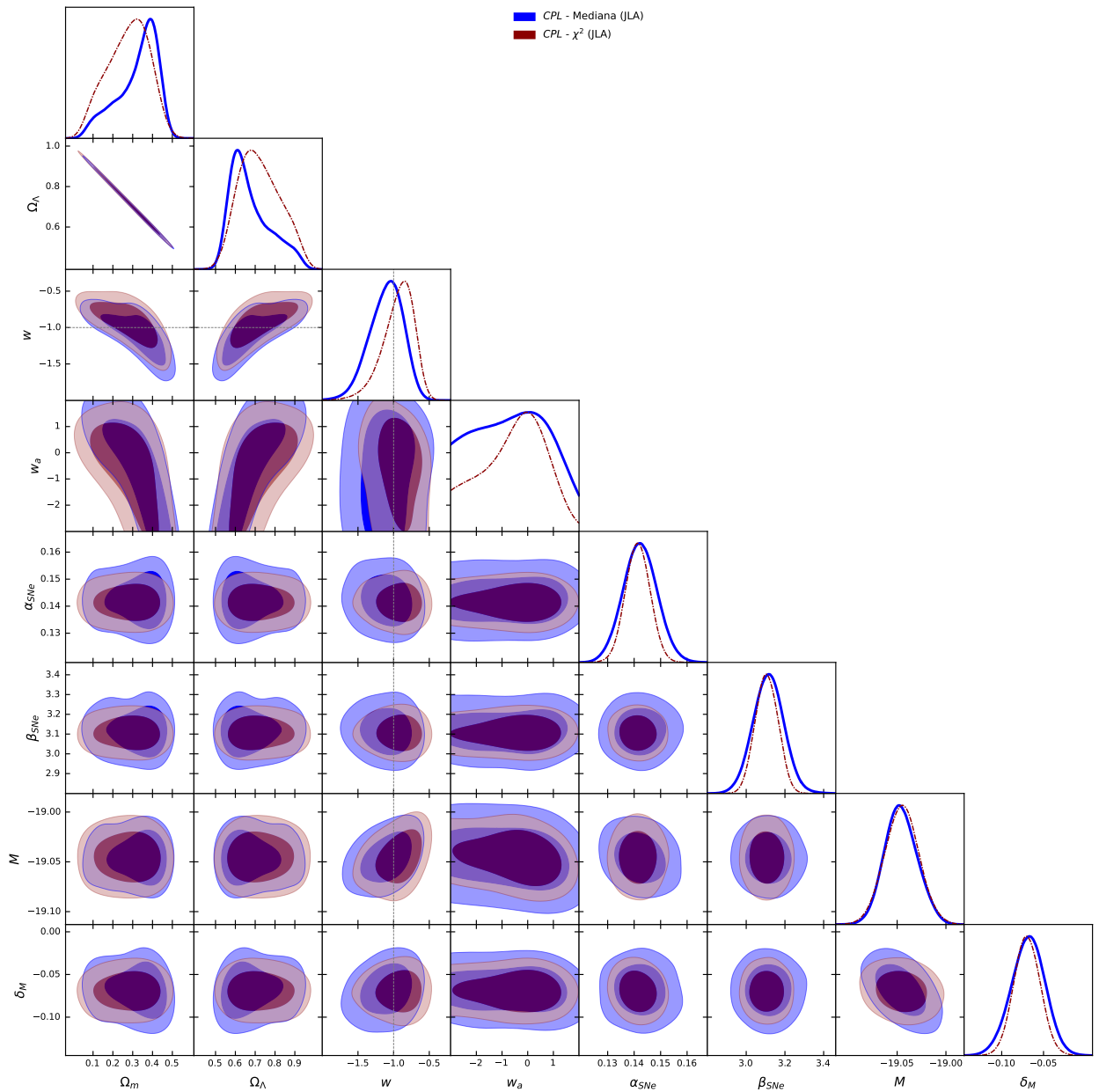


Figura 5.10 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo *CPL* plano com a compilação JLA.

5.1.6.2 Compilação Pantheon

Parâmetros	Mediana (PAN)	$\chi^2$ (PAN)
$\Omega_m$	$0.319^{+0.115}_{-0.042}$	$0.324^{+0.112}_{-0.049}$
$\Omega_\Lambda$	$0.681^{+0.042}_{-0.115}$	$0.676^{+0.049}_{-0.112}$
$w$	$-1.100^{+0.166}_{-0.165}$	$-1.059^{+0.191}_{-0.160}$
$w_a$	$-0.691^{+1.586}_{-1.278}$	$-0.578^{+1.159}_{-0.900}$
$M$	$-19.359^{+0.008}_{-0.009}$	$-19.350^{+0.007}_{-0.005}$

Tabela 5.12 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo *CPL* usando a compilação Pantheon.

Com a aplicação da compilação Pantheon, os resultados encontrados com a Mediana e  $\chi^2$  se mostraram mais restritos em comparação com a compilação JLA (ver Tabela 5.11). Mas para o parâmetro  $w_a$  mostrou uma distribuição mais restrita com o método  $\chi^2$  (ver Figura 5.11), mas não ficou muito distante do que foi mostrado para a compilação JLA.

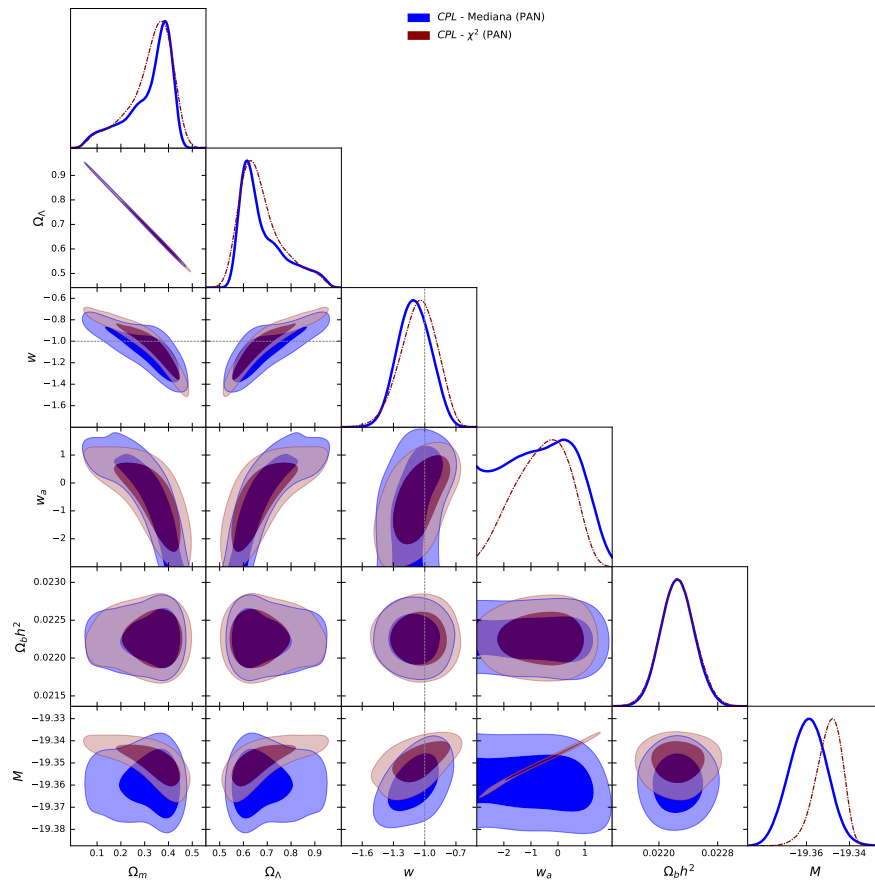


Figura 5.11 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo *CPL* plano com a compilação PAN.

### 5.1.7 Comparando as compilações JLA e Pantheon

Comparando as duas compilações aplicadas com modelo *CPL* (ver Figura 5.12), continua a observação de que a Mediana se mostra com maior restrição do que o  $\chi^2$ . Podemos ver que as PDFs para o parâmetro  $w_0$  se sobrepõem a Mediana; e como era se esperar, pela quantidade de dados, a Mediana (PAN) mostra-se mais restrita para  $w_0$  (ver Tabela 5.10).

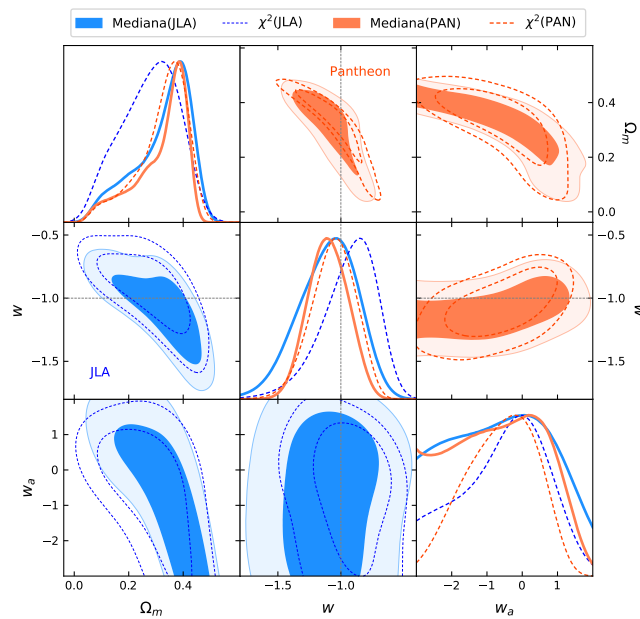


Figura 5.12 – Comparando os melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para Estatísticas Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo *CPL* entre as compilações JLA e PAN.

## 5.2 Quasares

### 5.2.1 Modelo $\Lambda$ CDM

Como um dos pontos fortes da Mediana está ligado a quantidade  $N$  de amostras, resolvemos utilizar um conjunto de dados que está sendo recentemente testado para restringir parâmetros cosmológicos: amostras de Quasares (QSO). Utilizando um número significativo de 1598 quasares [9], na faixa de redshift de  $0,04 < z < 5,1$ , com medidas de alta qualidade de raio-X e UV, aplicamos a Mediana e o teste  $\chi^2$  às amostras com o modelo cosmológico padrão  $\Lambda$ CDM e obtivemos os resultados mostrados na Tabela 5.13. Assim como foi visto em [84], obtivemos um valor alto para  $\Omega_m$  para as amostras de quasares.

Parâmetros	Mediana (QSO)	$\chi^2$ (QSO)
$\Omega_m$	$0.857^{+0.243}_{-0.159}$	$0.683^{+0.155}_{-0.209}$
$\Omega_\Lambda$	$0.143^{+0.159}_{-0.243}$	$0.317^{+0.209}_{-0.155}$
$\gamma_{QSO}$	$0.621 \pm 0.008$	$0.620 \pm 0.007$
$\beta_{QSO}$	$-11.018^{+0.152}_{-0.162}$	$-11.010^{+0.144}_{-0.145}$

Tabela 5.13 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda$ CDM usando a compilação de Quasares.

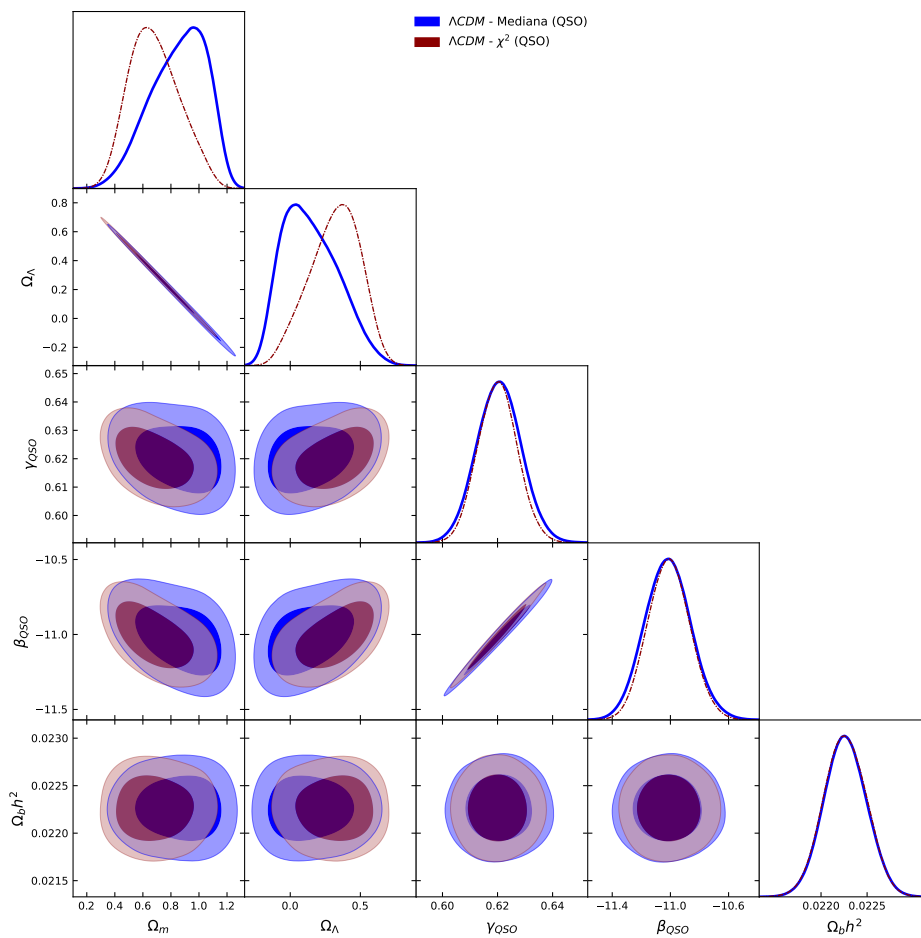


Figura 5.13 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM plano com a compilação QSO.

Podemos ver no gráfico da Figura 5.13 que as distribuições da Mediana e  $\chi^2$  são semelhantes para  $\gamma_{QSO}$  e  $\beta_{QSO}$ , porém as PDFs de  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  não concordam nos seus máximos.

## 5.2.1.1 PAN + QSO

Com o intuito de obtermos distribuições posteriores de forma a melhorar a análise, fizemos a análise conjunta Pantheon + Quasar, dados por

$$\mathcal{P}_{total} = \mathcal{P}_{PAN} \times \mathcal{P}_{QSO}, \quad (5.1)$$

$$\chi_{total}^2 = \chi_{PAN}^2 + \chi_{QSO}^2. \quad (5.2)$$

Encontramos resultado consistentes com o modelo  $\Lambda$ CDM como podemos verificar Tabela 5.14).

Parâmetros	Mediana (PAN+QSO)	$\chi^2$ (PAN+QSO)
$\Omega_m$	$0.284 \pm 0.012$	$0.306 \pm 0.016$
$\Omega_\Lambda$	$0.716 \pm 0.012$	$0.694 \pm 0.016$
$\gamma_{QSO}$	$0.630 \pm 0.008$	$0.628 \pm 0.006$
$\beta_{QSO}$	$-10.757^{+0.151}_{-0.154}$	$-10.803^{+0.112}_{-0.116}$

Tabela 5.14 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda$ CDM usando a compilação Pantheon + Quasares.

Para deixarmos a análise mais evidente sobre a o uso das amostras de quasares, podemos ver na Figura 5.14 a comparação das PDFs de  $\Omega_m$  com as compilações Pantheon e Pantheon + Quasar. Podemos perceber como a distribuição de quasares (QSO) possui densidade de probabilidade muito menor, tendo um poder de restrição estatística muito inferior que as compilações de supernovas. Isso pode ter relação com a grande dispersão dos dados. Porém fica evidente, ao compararmos entre as PDFs PAN e PAN+QSO, que com um número maior de dados ao acrescentarmos os quasares ao conjunto de SNe Ia, temos uma densidade maior para a soma dos dados, onde temos a Mediana e  $\chi^2$  muito próximos (ver Figura 5.14). Observamos que o valor do parâmetro  $\beta_{QSO}$  diminuiu de  $-11.018^{+0.152}_{-0.162}$  para  $-10.757^{+0.151}_{-0.154}$  ao compararmos as análises QSO com PAN+QSO (ver as Tabelas 5.13 e 5.14)

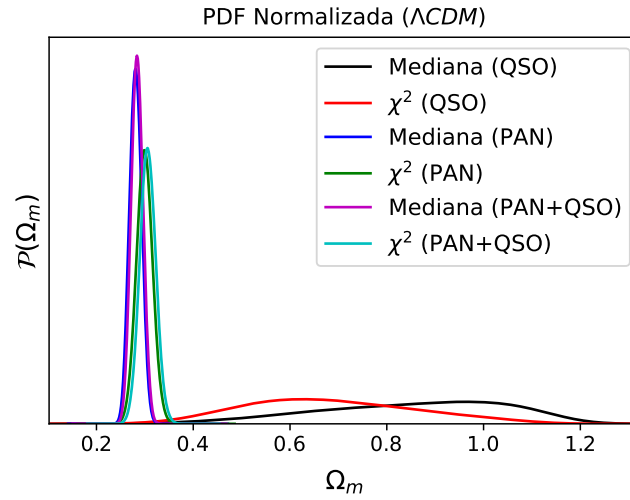


Figura 5.14 – Função de distribuição posterior de probabilidade do parâmetro  $\Omega_m$  resultante dos ajustes com a Estatística Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM plano, com as compilações QSO, PAN e PAN + QSO.

### 5.2.2 Modelo $\Lambda$ CDM<sub>k</sub>

Aplicamos também o conjunto de dados de quasares ao modelo  $\Lambda$ CDM com curvatura e observamos que alguns parâmetros tiveram dificuldades de convergir (ver na Tabela 5.15). Isso fica mais evidente quando observamos os gráficos da Figura 5.15 onde podemos perceber que o teste  $\chi^2$  teve uma certa dificuldade em convergir, mas que a Mediana apresentou maior dificuldade, resultando em tempo computacional muito superior. Quanto ao parâmetro  $\Omega_k$  a Mediana não conseguiu convergir, como ocorreu com as compilações JLA e Pantheon.

Parâmetros	Mediana (QSO)	$\chi^2$ (QSO)
$\Omega_m$	$0.850^{+0.263}_{-0.156}$	$0.630^{+0.131}_{-0.205}$
$\Omega_\Lambda$	$0.150^{+0.156}_{-0.263}$	$0.370^{+0.205}_{-0.131}$
$\Omega_k$	$0.072^{+0.505}_{-0.608}$	$-0.339^{+0.186}_{-0.308}$
$\gamma_{QSO}$	$0.621 \pm 0.008$	$0.617^{+0.008}_{-0.007}$
$\beta_{QSO}$	$-11.012^{+0.153}_{-0.154}$	$-11.057^{+0.143}_{-0.148}$

Tabela 5.15 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> usando a compilação de Quasares.

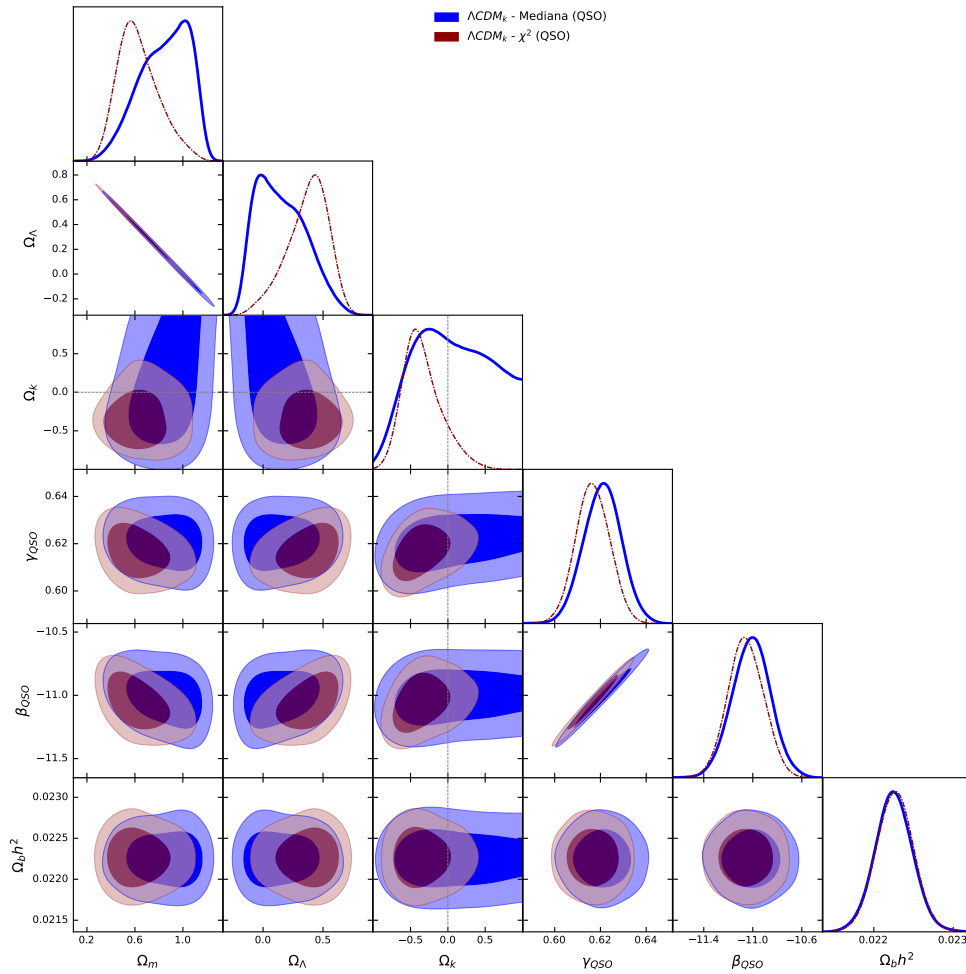


Figura 5.15 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda\text{CDM}_k$  com a compilação QSO.

### 5.2.2.1 PAN + QSO

Como era de se esperar, ao analisarmos a compilação PAN+QSO com o conjunto de SNe Ia forçariam a convergência dos parâmetros obtendo valores mais coerentes como os resultados encontrados com os outros conjuntos de supernovas (ver Tabela 5.14).

Podemos observar que devido a não convergência de alguns parâmetros com a compilação QSO e o acréscimo do parâmetro  $\Omega_k$ , observamos que o valor, por exemplo, do parâmetro densidade de matéria  $\Omega_m = 0.379^{+0.05}_{-0.047}$  (PAN+QSO) teve um aumento significativo em comparação com  $\Omega_m = 0.284 \pm 0.012$  (PAN+QSO) para o modelo  $\Lambda\text{CDM}$  (ver Tabela 5.17). Ao observamos as PDFs da Figura 5.16, que apesar do melhor valor e maior restrição da distribuição da Mediana (PAN+QSO) em comparação com  $\chi^2$  (PAN+QSO), ambos estão com o valor deslocado para valores maiores em comparação a distribuição Mediana (PAN) e  $\chi^2$  (PAN). O comportamento com menor densidade de probabilidade para a Mediana (QSO) e  $\chi^2$  (QSO) torna-se visualmente compreendido quando observamos as respectivas PDFs.



Parâmetros	Mediana (PAN+QSO)	$\chi^2$ (PAN+QSO)
$\Omega_m$	$0.379^{+0.05}_{-0.047}$	$0.405^{+0.048}_{-0.049}$
$\Omega_\Lambda$	$0.621^{+0.047}_{-0.05}$	$0.595^{+0.049}_{-0.048}$
$\Omega_k$	$-0.247^{+0.116}_{-0.128}$	$-0.243^{+0.109}_{-0.111}$
$\gamma_{QSO}$	$0.625 \pm 0.008$	$0.622 \pm 0.007$
$\beta_{QSO}$	$-10.867^{+0.153}_{-0.156}$	$-10.918^{+0.126}_{-0.129}$

Tabela 5.16 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> usando a compilação Pantheon + Quasares.

Ajuste	$\Lambda$ CDM Plano	$\Lambda$ CDM <sub>k</sub>	
	$\Omega_m$	$\Omega_m$	$\Omega_k$
Mediana (QSO)	$0.857^{+0.243}_{-0.159}$	$0.850^{+0.263}_{-0.156}$	$0.072^{+0.505}_{-0.608}$
$\chi^2$ (QSO)	$0.683^{+0.155}_{-0.209}$	$0.630^{+0.131}_{-0.205}$	$-0.339^{+0.186}_{-0.308}$
Mediana (PAN+QSO)	$0.284 \pm 0.012$	$0.379^{+0.05}_{-0.047}$	$-0.247^{+0.116}_{-0.128}$
$\chi^2$ (PAN+QSO)	$0.306 \pm 0.016$	$0.405^{+0.048}_{-0.049}$	$-0.243^{+0.109}_{-0.111}$

Tabela 5.17 – Valor médio do posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos  $\Lambda$ CDM e  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> com Quasares e Supernovas.

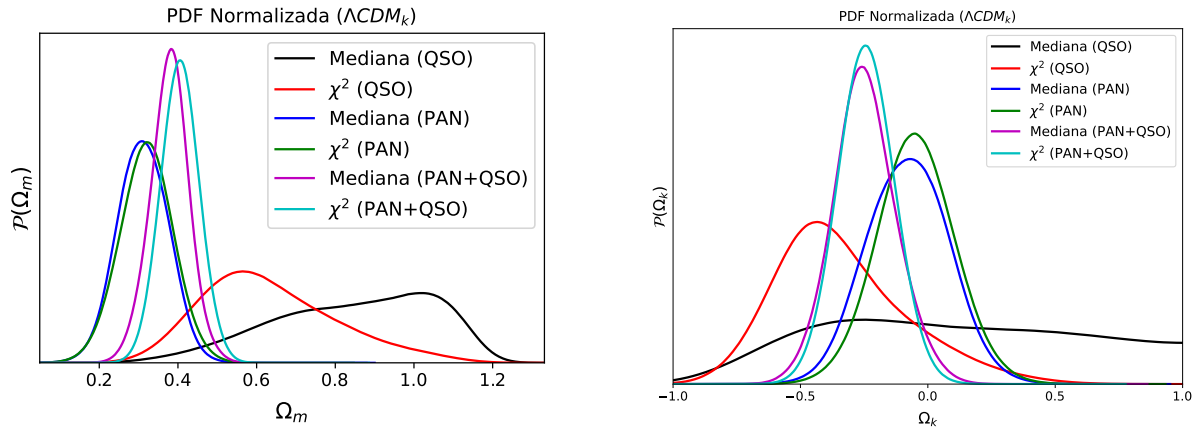


Figura 5.16 – Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros  $\Omega_m$  (esquerda) e  $\Omega_k$  (direita) resultante dos ajustes com a Estatística Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> com o compilação QSO, PAN e PAN + QSO.

### 5.2.3 Modelo $w$ CDM

Os métodos Mediana e  $\chi^2$  não conseguiram restringir de forma satisfatória o parâmetro  $w$  utilizando a compilação de quasares, principalmente no caso do teste  $\chi^2$  ( $w \leq -1.595$ ), que

podemos verificar na Tabela 5.18. A não restrição do parâmetro  $w$  pode ser melhor ilustrada ao vermos o gráfico da Figura 5.17 em que a Mediana (mesmo com dois modos) teve dificuldade em restringir esse parâmetro, algo que  $\chi^2$  não conseguiu.

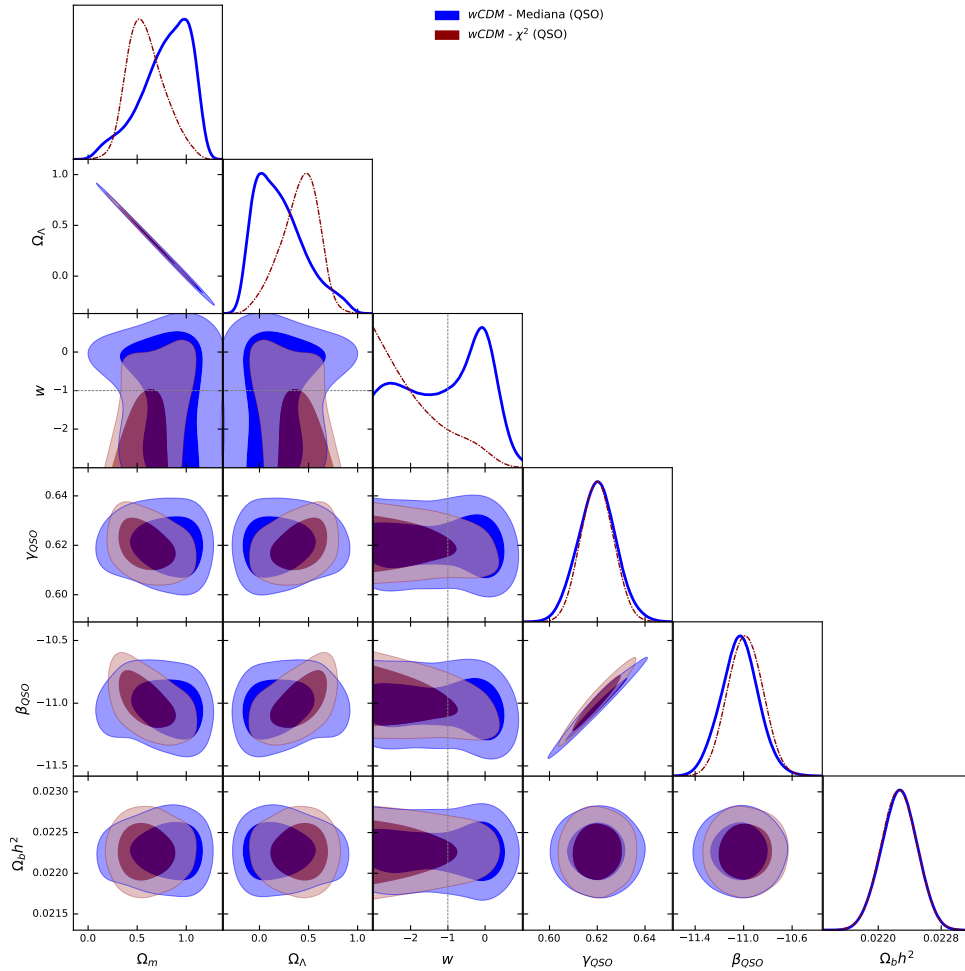


Figura 5.17 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $wCDM$  com a compilação QSO.

Parâmetros	Mediana (QSO)	$\chi^2$ (QSO)
$\Omega_m$	$0.794^{+0.319}_{-0.157}$	$0.594^{+0.15}_{-0.227}$
$\Omega_\Lambda$	$0.206^{+0.157}_{-0.319}$	$0.406^{+0.227}_{-0.15}$
$w$	$-1.042^{+1.414}_{-1.847}$	$\leq -1.595$
$\gamma_{QSO}$	$0.620 \pm 0.008$	$0.620 \pm 0.007$
$\beta_{QSO}$	$-11.032^{+0.151}_{-0.157}$	$-10.986^{+0.145}_{-0.148}$

Tabela 5.18 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $wCDM$  usando a compilação de Quasares.

### 5.2.3.1 PAN + QSO

Parâmetros	Mediana (PAN+QSO)	$\chi^2$ (PAN+QSO)
$\Omega_m$	$0.338^{+0.046}_{-0.033}$	$0.383^{+0.05}_{-0.044}$
$\Omega_\Lambda$	$0.662^{+0.033}_{-0.046}$	$0.617^{+0.044}_{-0.05}$
$w$	$-1.190^{+0.147}_{-0.142}$	$-1.263^{+0.195}_{-0.149}$
$\gamma_{QSO}$	$0.628 \pm 0.008$	$0.625 \pm 0.006$
$\beta_{QSO}$	$-10.794^{+0.153}_{-0.15}$	$-10.859^{+0.115}_{-0.116}$

Tabela 5.19 – Valor médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $wCDM$  usando a compilação Pantheon + Quasares.

Novamente, podemos verificar a consistência da Mediana, em comparação ao  $\chi^2$ , quando aumentamos o número de dados. Pois com soma das duas compilações (PAN+QSO) obtemos melhores restrições, tendo como destaque os valores obtidos com a Mediana (ver Tabela 5.2.3.1). Fica evidente como a Mediana se mostra um método consistente com um número grande de amostras quando observamos a PDF de  $\Omega_m$  da compilação PAN+QSO em comparação as outras compilações, e entre a Mediana e o teste  $\chi^2$ . Podemos perceber na Figura 5.18 como a Mediana mostra-se mais restritiva que o  $\chi^2$  para o modelo  $wCDM$ .

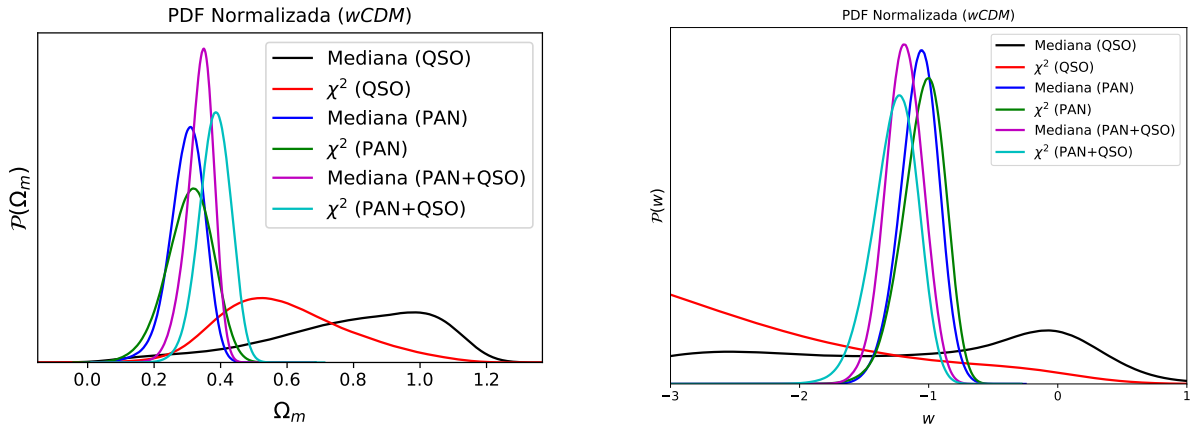


Figura 5.18 – Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros  $\Omega_m$ (esquerda) e  $w$  (direita) resultante dos ajustes com a Estatística Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $wCDM$  com a compilação QSO, PAN e PAN + QSO.

### 5.2.4 Parametrização Chevallier-Polarski-Linder (CPL)

Para a compilação de Quasares, não houve concordância dos valores entre os métodos e nenhuma convergência para o parâmetro  $w_a$  como mostra a Tabela 5.19. Ao observarmos Figura

5.19 fica claro que a PDF da Mediana e  $\chi^2$  para o parâmetro  $w_a$  não obteve uma convergência para uma densidade de probabilidade.

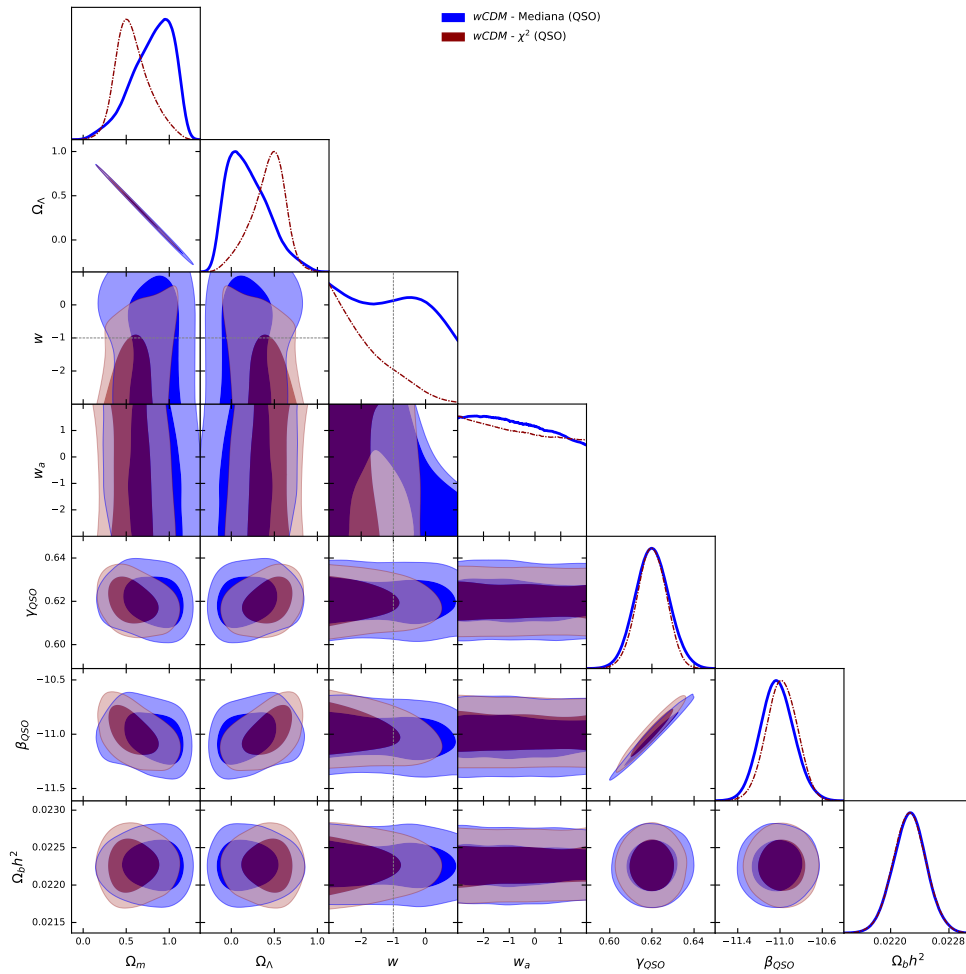


Figura 5.19 – Gráficos resultantes dos melhores ajustes, com  $1\sigma$  e  $2\sigma$  de limite de confiança, para a Estatísticas Mediana e o Teste  $\chi^2$  aplicados ao modelo  $CPL$  com a compilação QSO.

Parâmetros	Mediana (QSO)	$\chi^2$ (QSO)
$\Omega_m$	$0.805^{+0.3}_{-0.165}$	$0.579^{+0.146}_{-0.23}$
$\Omega_\Lambda$	$0.195^{+0.165}_{-0.3}$	$0.421^{+0.23}_{-0.146}$
$w$	$-1.101^{+1.404}_{-1.613}$	$-1.899^{+0.385}_{-1.093}$
$w_a$	---	---
$\gamma_{QSO}$	$0.620 \pm 0.008$	$0.620 \pm 0.007$
$\beta_{QSO}$	$-11.026 \pm 0.155$	$-10.983^{+0.145}_{-0.141}$

Tabela 5.20 – Valor médio da posteriori, para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo  $CPL$  usando a compilação de Quasares.

5.2.4.1 PAN + QSO

Parâmetros	Mediana (PAN+QSO)	$\chi^2$ (PAN+QSO)
$\Omega_m$	$0.366^{+0.075}_{-0.013}$	$0.381^{+0.086}_{-0.02}$
$\Omega_\Lambda$	$0.634^{+0.013}_{-0.075}$	$0.619^{+0.02}_{-0.086}$
$w$	$-1.188^{+0.143}_{-0.158}$	$-1.200^{+0.199}_{-0.169}$
$w_a$	$\leq -0.669$	$\leq -0.394$
$\gamma_{QSO}$	$0.627^{+0.009}_{-0.008}$	$0.625 \pm 0.006$
$\beta_{QSO}$	$-10.819^{+0.162}_{-0.146}$	$-10.872^{+0.12}_{-0.122}$

Tabela 5.21 – Valor da médio da posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com o modelo *CPL* usando a compilação Pantheon + Quasares.

Conseguimos recuperar, parcialmente, a convergência do parâmetro  $w_a$  (em comparação aos resultados com os conjuntos de SNe Ia), como podemos ver na Tabela 5.21 o valor de  $w_a$  para os dois métodos está  $w_a \leq -0.669$  (Mediana) e  $w_a \leq -0.394$  ( $\chi^2$ ). Mas mesmo assim, vemos na Figura 5.20 que com as amostras PAN+QSO temos uma PDFs mais restritas de todas as análises com o modelo *CPL*, principalmente para a Mediana (PAN+QSO). Porém, vemos na Figura ?? que apenas  $\chi^2$  (PAN) consegue uma certa distribuição gaussiana, enquanto que as distribuições para o parâmetro  $w_a$  não conseguem alcançar a convergência da cadeia. Fica em evidência que o aumento de mais um parâmetro é sentido em ambos os métodos, se compararmos os resultados obtidos entre os modelos *wCDM* e *CPL* ao observarmos a Tabela 5.22.

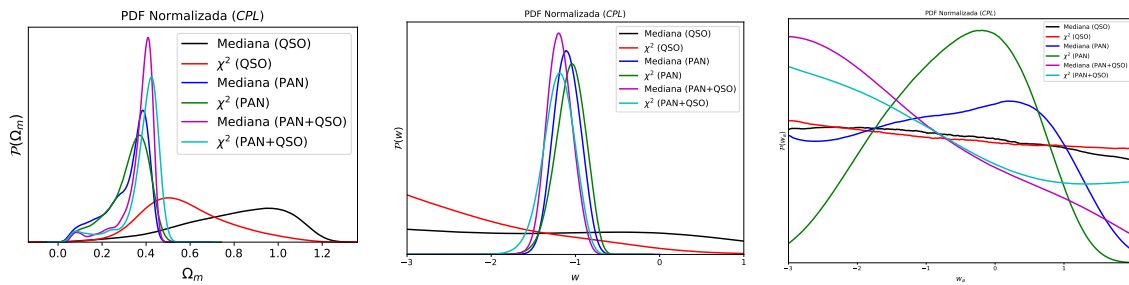


Figura 5.20 – Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros  $\Omega_m$  (esquerda),  $w$  (meio) e  $w_a$  (direita) resultantes dos ajustes com a Estatística Mediana e  $\chi^2$  aplicados ao modelo *CPL* com a compilação QSO, PAN e PAN + QSO.

Ajuste	<i>w</i> CDM		CPL		
	$\Omega_m$	<i>w</i>	$\Omega_m$	<i>w</i>	$w_a$
Mediana (QSO)	$0.794^{+0.319}_{-0.157}$	$-1.042^{+1.414}_{-1.847}$	$0.805^{+0.3}_{-0.165}$	$-1.101^{+1.404}_{-1.613}$	— — —
$\chi^2$ (QSO)	$0.594^{+0.15}_{-0.227}$	$\leq -1.595$	$0.579^{+0.146}_{-0.23}$	$-1.899^{+0.385}_{-1.093}$	— — —
Mediana (PAN + QSO)	$0.338^{+0.046}_{-0.033}$	$-1.190^{+0.147}_{-0.142}$	$0.366^{+0.075}_{-0.013}$	$-1.188^{+0.143}_{-0.158}$	$\leq -0.669$
$\chi^2$ (PAN + QSO)	$0.383^{+0.05}_{-0.044}$	$-1.263^{+0.195}_{-0.149}$	$0.381^{+0.086}_{-0.02}$	$-1.200^{+0.199}_{-0.169}$	$\leq -0.394$

Tabela 5.22 – Valor médio do posteriori da Mediana e  $\chi^2$ , para o limite de confiança de 68% ( $1\sigma$ ), com os modelos *w*CDM e CPL com Quasar e Supernovas.

### 5.3 Fator de Bayes

Considerando as análises apresentadas, notamos que modelos mais complexos (aqueles que possuem um número maior de parâmetros livres e incômodos) tiveram comportamentos peculiares entre os métodos analisados. Como, então, fazer uma classificação dos modelos sem penalizar aqueles que possuam mais parâmetros? Caso dois modelos se ajustem igualmente bem aos dados, aplicando ambos os métodos analisados, podemos "invocar" a famosa "navalha de Occam", como mencionamos na secção 2.3.3, segundo o qual o modelo mais simples será selecionado.

#### 5.3.1 Compilações JLA

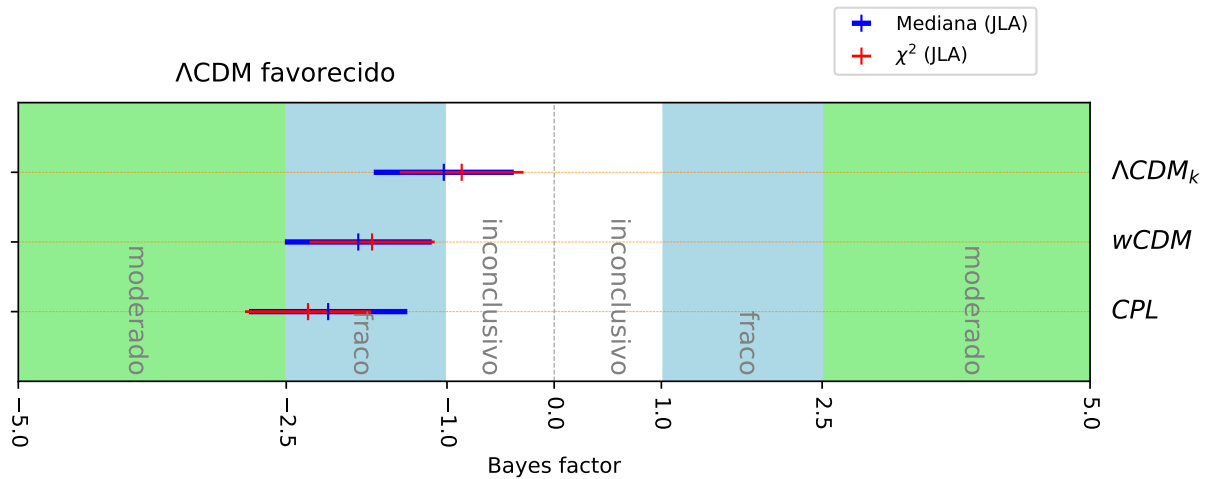


Figura 5.21 – Seleção de os modelos estudados aplicando a compilação JLA com os métodos Estatística Mediana e  $\chi^2$ .

Na Figura 5.21 mostra o resultado de nossa análise, na seleção de modelos, utilizando como referencial o modelo cosmológico padrão ( $\Lambda$ CDM). Em nossa análise, aplicamos os métodos da Estatística Mediana e  $\chi^2$  para cada modelo usando a compilação JLA.

Em comparação ao modelo  $\Lambda\text{CDM}_k$  os dados favorecem de modo fraco o modelo  $\Lambda\text{CDM}$ . E do ponto de vista dos métodos, a Mediana favorece mais ao modelo padrão, do que o  $\chi^2$ , pois este se mostra de forma inconclusiva a análise da seleção.

Para o modelo  $w\text{CDM}$ , os dois métodos mostraram-se a favor, de forma fraca, ao modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , com a Mediana mais favorável ao modelo padrão do que o  $\chi^2$ .

Por fim, temos o modelo  $CPL$  em que os dados se mostraram também fracamente favorável ao modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , mas com  $\chi^2$  favorecendo mais ao modelo padrão do que a Mediana.

### 5.3.2 Compilação Pantheon

Podemos ver na Figura 5.22 que o modelo  $\Lambda\text{CDM}$  é favorecido fracamente em relação a todos os modelo  $\Lambda\text{CDM}_k$  com o método da Mediana favorecendo mais oa modelo padrão do que o  $\chi^2$ . Apesar do erro da evidência ser mais  $\chi^2$  do que com a Mediana.

Vemos que a Mediana favorece quase de forma moderada o modelo  $\Lambda\text{CDM}$ , em relação ao  $w\text{CDM}$ , do que o  $\chi^2$ . Apesar de ambos encontrarem o valor da evidência favorecendo fracamente o modelo padrão, o erro da evidência encontrado pela Mediana é bem menos restrito do que o  $\chi^2$ .

Para o modelo  $CPL$ , temos o evidência bayesiana favorecendo de forma moderada o modelo  $\Lambda\text{CDM}$  com o método  $\chi^2$ . O método da Estatística Mediana também favorece  $\Lambda\text{CDM}$ , mas de forma fraca.

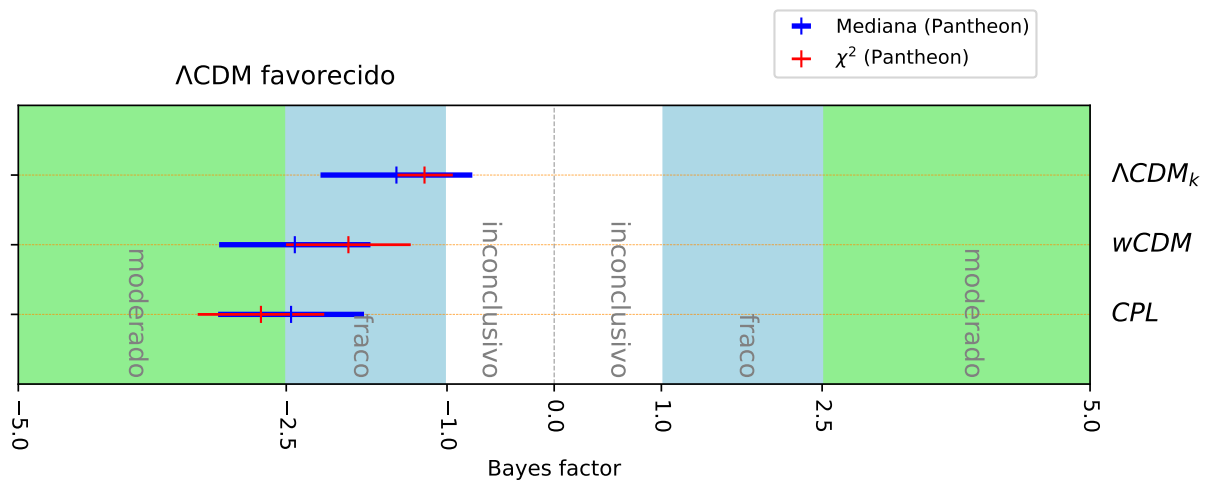


Figura 5.22 – Seleção de os modelos estudados aplicando a compilação Pantheon com os métodos Estatística Mediana e  $\chi^2$ .

### 5.3.3 Compilação Quasar

Utilizando a amostra de Quasar, foi percebido uma mudança no favorecimento na seleção de modelos, a depender do método utilizado. Como vemos os resultados do fator de Bayes na Figura 5.23, o resultado é inconclusivo para todos os modelos, porém ao aplicarmos o método da Mediana observamos que em todos os cenários o método tem a tendência de favorecer o modelo  $\Lambda$ CDM, em detrimento dos demais modelos. Algo que muda completamente, ao aplicarmos o método do  $\chi^2$ , que tem a tendência de favorecer os outros modelos, em comparação ao modelo padrão.

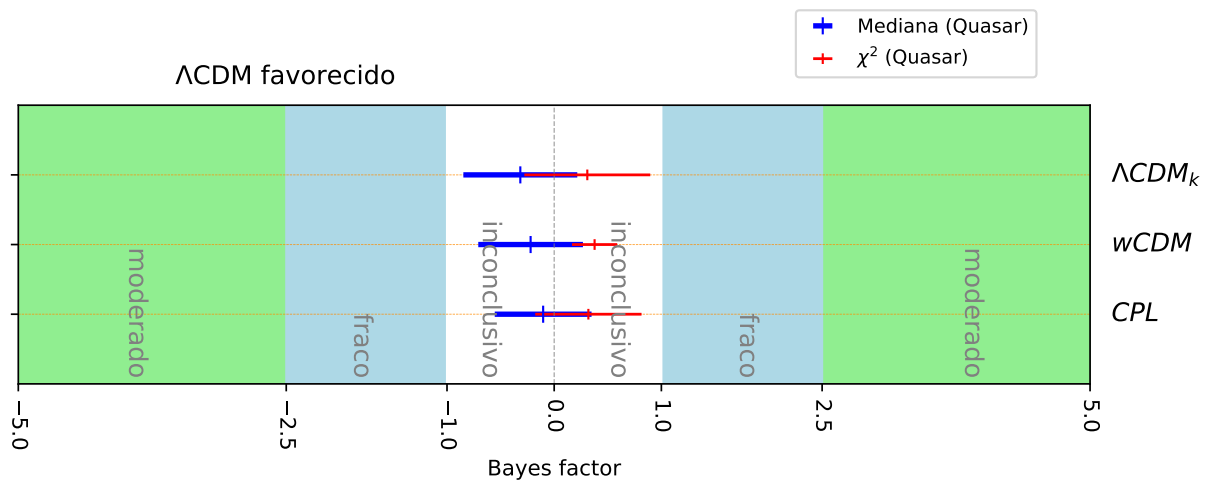


Figura 5.23 – Seleção de os modelos estudados aplicando a compilação Quasar com os métodos Estatística Mediana e  $\chi^2$ .

### 5.3.4 Compilações Quasar e PAN+QSO

Ao analisarmos o modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> com os dados de Quasar e PAN+QSO, temos ambos os métodos inconclusivo para o modelo. Porém, como foi observado na seção anterior, temos as Mediana tendendo a favorecer o modelo padrão plano, enquanto o  $\chi^2$  tende a favorecer o modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub>.

Para  $w$ CDM temos Mediana e  $\chi^2$  favorecendo de modo fraco o modelo padrão, mas com a Mediana bem mais favorável ao modelo  $\Lambda$ CDM do que o  $\chi^2$ , onde esse último está próximo do limite entre favorecer de forma fraca o modelo padrão e ser inconclusivo.



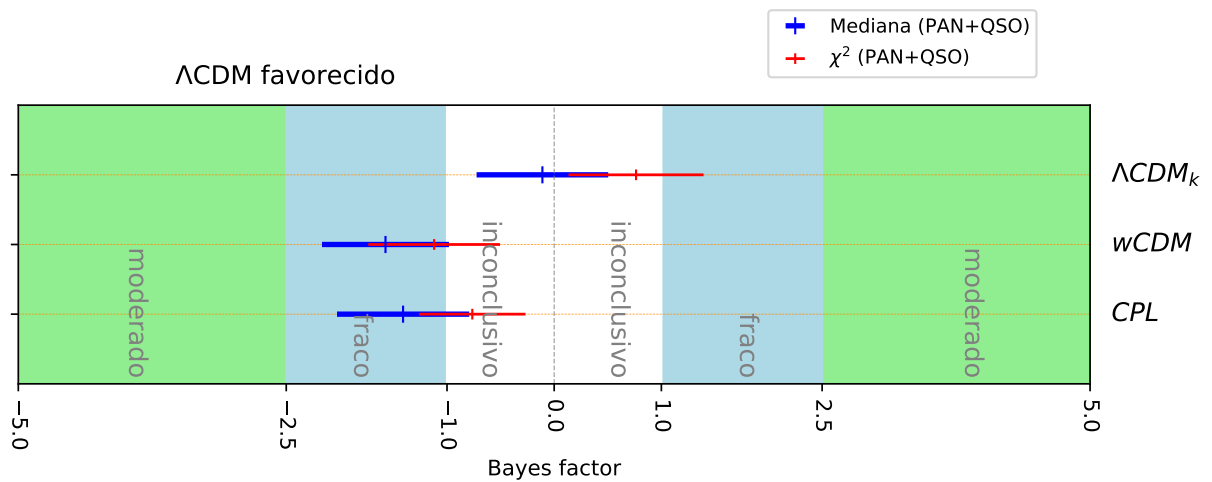


Figura 5.24 – Comparação entre os modelos estudados aplicando as complicações Quasar e Pantheon + Quassar com os métodos Estatística Mediana e  $\chi^2$ .

Ao analisarmos o modelo *CPL*, temos a Mediana favorecendo fracamente para modelo padrão, e o  $\chi^2$  inconclusivo para  $\Lambda$ CDM. Vemos analisando este modelo com a amostra PAN+QSO, o mesmo comportamento que vimos com o modelo  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub>, em que a escolha do método muda de forma significativa a seleção de modelos.

Se formos categorizar os métodos baseando um "ranking" de qual deles favoreceu mais ao modelo padrão  $\Lambda$ CDM, observamos que em sua grande maioria a Mediana se mostrou mais favorável do que o  $\chi^2$ . Salvo em casos específicos, em que o  $\chi^2$  (JLA) e  $\chi^2$  (PAN) para o modelo *CPL* se mostraram mais favorável ao modelo  $\Lambda$ CDM.

## 6 CONCLUSÕES

O método Bayesiano é uma poderosa ferramenta estatística, devido ao seu alto grau de eficiência e base conceitual consistente. A forma de tratamento de dados e comparação de modelos teóricos, torna essa ferramenta estatística central no estudo da cosmologia e astrofísica contemporânea.

Em nosso trabalho de tese, estudamos a eficiência de um método alternativo no tratamento de dados cosmológicos, com o intuito de extrair parâmetros cosmológico que possam descrever a evolução do universo. O método idealizado por J. R. Gott [1], chamado de Estatística Mediana, utiliza a distribuição binomial que, ao contrário do teste  $\chi^2$  que pertence a um termo que é proporcional a verossimilhança, é a própria verossimilhança.

Para melhor analisarmos a aplicação da Estatística Mediana como método de restrição de parâmetros e seleção de modelos cosmológicos, utilizamos o Teste  $\chi^2$  como contraponto para verificar a eficácia da Mediana. E para melhorar o processo de construção de cadeias com a Mediana utilizamos o algoritmo UltraNest [3–6], baseado na amostragem aninhada (*Nested Sampling*) [2], que se destina a ajustar modelos físicos complexos com avaliações de probabilidades lentas de parâmetros.

Escolhemos trabalhar com dois conjuntos de supernovas do tipo Ia: o *Joint Light-curve Analysis* (JLA) [7] contendo 740 SNe Ia, a compilação Pantheon [8] com 1048 SNe Ia e contamos também com amostras de 1598 Quasares [9]. Utilizamos os métodos propostos em nosso trabalho com os modelos  $\Lambda$ CDM,  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub>, *w*CDM e CPL.

Ao aplicarmos o conjunto JLA, nos deparamos com uma quantidade de parâmetros incômodos que influenciavam de forma significativa o valor da magnitude das SNe Ia, pois eles são necessários para o tratamento da curva de luz para o conjunto JLA (ver seção 3.3.3). Como o formato de análise da Mediana é basicamente verificar se uma magnitude está acima (ou abaixo) da Mediana Verdadeira (magnitude teórica), a Mediana não tinha como ser aplicada diretamente para o tratamento dos parâmetros incômodos. Sendo assim, ao colocarmos os parâmetros incômodos livres, influenciavam diretamente no valor da magnitude e, por sua vez, na restrição de parâmetros cosmológicos aplicando a Mediana. Algo que não ocorria com o  $\chi^2$ , pois o método utiliza o tratamento de erros dos parâmetros incômodos por meio da inversa da matriz de covariância (ver 2.3.2).

Para melhorar a aplicação da Mediana com o uso dos parâmetros incômodos no tratamento da curva de luz, aplicamos o  $\chi^2$  utilizando uma distribuição uniforme para  $\alpha_{SNe}$ ,  $\beta_{SNe}$ ,  $M$  e  $\delta_M$ . Em seguida, comparamos as PDFs desses parâmetros para os modelos cosmológicos propostos em nosso trabalho e verificamos que as funções de densidades de probabilidades eram praticamente as mesmas. Assim, tiramos as médias de cada valor e suas respectivas variâncias, e

construímos distribuições gaussianas para cada parâmetro incômodo (ver Tabela 5.1). Foi utilizado o mesmo raciocínio para os conjuntos Pantheon e Quasares. Para a análise de parâmetros cosmológicos, utilizamos *priors* diferentes, como mostramos na Tabela 5.2.

Observamos que, dos modelos cosmológicos utilizados, a Mediana se mostrou um pouco melhor na restrição de alguns parâmetros com os modelos cosmológicos trabalhados, basta observarmos os gráficos das Figuras 5.5, 5.6 e 5.9, utilizando os conjuntos de SNe Ia.

Dos modelos cosmológicos utilizados, o que teve certa dificuldade de restringir parâmetros importantes foi o modelo *CPL*, dando destaque ao parâmetro  $w_a$  para ambos os métodos. No último parâmetro citado, o  $\chi^2$  conseguiu uma certa restrição, mas a Mediana teve dificuldades. Mas tanto a Mediana quanto o  $\chi^2$  conseguiram melhores resultados com os catálogos de supernovas (JLA e Pantheon).

No caso em que foi utilizado os conjuntos de Quasares e Pantheon+Quasar, ambos os métodos só conseguiram restringir parâmetros quando foi usado a combinação de supernovas com os quasares, na maioria dos modelos cosmológicos. Pois o conjunto de Quasar sozinho não consegue fazer uma boa restrição. E em um caso de parâmetro importante para a análise que não restringiu, foi o  $w_a$  do modelo *CPL* que nem Mediana e o  $\chi^2$  conseguiram restringi-lo utilizando apenas as amostras de quasar. O  $w_a$  obteve uma leve melhora na tentativa de convergência da cadeia ao somarmos supernovas com quasares, mas nada significativo para o parâmetro desse modelo utilizando ambos os métodos (ver Tabela 5.12).

Também fizemos seleção de modelos utilizando a evidência bayesiana. Com os conjuntos de SNe Ia (ver Figuras 5.21 e 5.22) quase todos os métodos favoreceram de forma fraca o modelo padrão plano ( $\Lambda$ CDM), apresentando apenas o  $\chi^2$  (JLA) como inconclusivo e favorecendo de forma moderada no caso do  $\chi^2$  (PAN). Utilizando Quasares (ver Figuras 5.23) tivemos resultados inconclusivos para a seleção de modelos, mas o que ficou evidente foi que, a depender do método utilizado, temos a seleção de modelos com Mediana tendendo ao modelo padrão, enquanto que com o  $\chi^2$  tendendo aos modelos alternativos. Com a combinação Pantheon e Quasar, também vimos que, dependendo do método, haveria um favorecimento para o modelo  $\Lambda$ CDM ou para  $\Lambda$ CDM<sub>k</sub> (ver Figura 5.24). Pudemos assim, entender que na maioria dos casos estudados na seleção de modelos, a Mediana se destacou em relação ao  $\chi^2$ , a favor do modelo padrão  $\Lambda$ CDM.

Sobre o tempo computacional, a depender do modelo e o do conjunto de dados utilizados, o teste  $\chi^2$  mostrou-se relativamente mais rápido na construção das cadeias. Com a compilação JLA para o modelo padrão, a Mediana mostrou-se ligeiramente mais rápida no processamento. A medida que aumentávamos a quantidade de parâmetros livres, por conta da complexidade de cada modelo ( $\Lambda$ CDM<sub>k</sub>, *CPL* e *w*CDM), a Mediana aumentou o tempo de processamento da construção das cadeias por conter o fatorial em sua equação (ver Equação (2.33)). Com o conjunto Pantheon, que utiliza apenas dois parâmetros incômodos ( $M$  e  $\Delta_M$ ) o processamento com o  $\chi^2$  duravam entorno de 2 minutos para o modelo  $\Lambda$ CDM, enquanto que a Mediana (com o mesmo conjunto e modelo) durava entorno de 30 minutos para a construção das cadeias.

Na tentativa de extrair informações relevantes de modelos cosmológicos, procuramos usar ferramentas estatísticas que supram as nossas necessidades de análise de modelos e parâmetros cosmológicos que possam representar de forma coerente o que observamos à luz dos dados. Com esta ideia em mente, conseguimos chegar ao nosso objetivo que era analisar a eficácia da ferramenta Estatística Mediana de forma favorável ao método. Pois, do ponto de vista estatístico, ao usar menos pressupostos sobre os dados, ser pouco suscetível a valores "defeituoso" ("outliers") e ter um bom desempenho com uma quantidade significativa de amostras ( $N$  muito grande), torna a Estatística Mediana consistente para restrição parâmetros e seleção de modelos cosmológicos, como pudemos verificar em nosso estudo, pois, apresentou restrições até melhores que o teste  $\chi^2$  na maioria dos casos analisados nesta tese.

Acreditamos que um estudo mais aprofundado para melhor aplicabilidade da utilização de quasares para obtenção de parâmetros cosmológico com a Estatística Mediana faz-se necessário, principalmente pelo volume grande de dados que essa amostra oferece. Inclusive, acreditamos que um dos problemas que encontramos para restrição dos parâmetros, seja a grande dispersão dos dados de quasares, algo que foi mencionado por Hu [84]. Podemos também combinar o conjunto de quasares com outros observáveis, como a Radiação Cósmica de Fundo (do inglês, CMB), Oscilações Acústica Bariônica (do inglês, BAO), bem como implementações das *likelihoods* de supernovas com a Mediana no CLASS [104]. Bem como, a aplicação da Mediana em outros modelos cosmológicos alternativos, como o *Gás de Chaplygin* e o modelo  $\Lambda(t)$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] J. R. Gott III, M. S. Vogeley, S. Podariu, and B. Ratra, “Median statistics,  $h_0$ , and the accelerating universe,” *The Astrophysical Journal*, vol. 549, no. 1, p. 1, 2001.
- [2] F. Feroz and M. P. Hobson, “Multimodal nested sampling: an efficient and robust alternative to markov chain monte carlo methods for astronomical data analyses,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 384, no. 2, pp. 449–463, 2008.
- [3] MLFriends, “UltraneSt 3.2.0.” <https://johannesbuchner.github.io/UltraNest/readme.html>. acessado em 20/10/2020".
- [4] J. Buchner, “A statistical test for nested sampling algorithms,” *Statistics and Computing*, vol. 26, no. 1-2, pp. 383–392, 2016.
- [5] J. Buchner, “Collaborative nested sampling: Big data vs. complex physical models,” *arXiv preprint arXiv:1707.04476*, 2017.
- [6] J. Buchner, “UltraneSt—a robust, general purpose bayesian inference engine,” *arXiv preprint arXiv:2101.09604*, 2021.
- [7] M. e. a. Betoule, R. Kessler, J. Guy, J. Mosher, D. Hardin, R. Biswas, P. Astier, P. El-Hage, M. König, S. Kuhlmann, *et al.*, “Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 568, p. A22, 2014.
- [8] D. Scolnic, D. Jones, A. Rest, Y. Pan, R. Chornock, R. Foley, M. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. Riess, *et al.*, “The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample,” *The Astrophysical Journal*, vol. 859, no. 2, p. 101, 2018.
- [9] E. Lusso, E. Piedipalumbo, G. Risaliti, M. Paolillo, S. Bisogni, E. Nardini, and L. Amati, “Tension with the flat  $\{\Lambda\}$  cdm model from a high redshift hubble diagram of supernovae, quasars and gamma-ray bursts,” *arXiv preprint arXiv:1907.07692*, 2019.
- [10] J. R. Taylor, *Introdução à análise de erros: o estudo de incertezas em medições físicas*. Bookman Editora, 2009.
- [11] G. Risaliti and E. Lusso, “Cosmological constraints from the hubble diagram of quasars at high redshifts,” *Nature Astronomy*, vol. 3, no. 3, p. 272, 2019.
- [12] R. Trotta, “Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology,” *Contemporary Physics*, vol. 49, no. 2, pp. 71–104, 2008.

- [13] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [14] S. Weinberg, *Cosmology*, vol. 1. 2008.
- [15] P. Avelino, C. Martins, and P. Pinto, “Modified median statistics and type ia supernova data,” *The Astrophysical Journal*, vol. 575, no. 2, p. 989, 2002.
- [16] J. E. Freud, *Estatística Aplicada: economia, administração e contabilidade*. Ed. Porto Alegre - Bookman, 2006.
- [17] G. Bohm and G. Zech, *Introduction to statistics and data analysis for physicists*, vol. 1. Desy Hamburg, 2010.
- [18] W. d. O. BUSSAB and P. A. Morettin, “Estatística básica. 5a edição,” *Editora Saraiva*, 2002.
- [19] J. V. Wall and C. R. Jenkins, *Practical statistics for astronomers*. Cambridge University Press, 2003.
- [20] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, and K. Ye, *Probability and statistics for engineers and scientists: 9th Ed*. Macmillan New York, 2011.
- [21] G. D’Agostini, “A multidimensional unfolding method based on bayes’ theorem,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 362, no. 2-3, pp. 487–498, 1995.
- [22] P. Gregory, *Bayesian logical data analysis for the physical sciences*, vol. 10. Cambridge University Press Cambridge, UK, 2005.
- [23] N. V. Karpenka, “The supernova cosmology cookbook: Bayesian numerical recipes,” *arXiv preprint arXiv:1503.03844*, 2015.
- [24] R. G. Campos, “Cosmologia observacional usando análise bayesiana.” Master’s thesis, Universidade Federal do Espírito Santo, 2008.
- [25] M. P. Lima, “Ix escola do cbpf,”
- [26] R. Andrae, “Error estimation in astronomy: A guide,” *arXiv preprint arXiv:1009.2755*, 2010.
- [27] A. Conley, J. Guy, M. Sullivan, N. Regnault, P. Astier, C. Balland, S. Basa, R. Carlberg, D. Fouchez, D. Hardin, *et al.*, “Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the supernova legacy survey,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 192, no. 1, p. 1, 2011.

- [28] Y. Avni and H. Tananbaum, “X-ray properties of optically selected qosos,” *The Astrophysical Journal*, vol. 305, pp. 83–99, 1986.
- [29] F. Salvestrini, G. Risaliti, S. Bisogni, E. Lusso, and C. Vignali, “Quasars as standard candles ii-the non-linear relation between uv and x-ray emission at high redshifts,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 631, p. A120, 2019.
- [30] M. P. Hobson, A. H. Jaffe, A. R. Liddle, P. Mukherjee, and D. Parkinson, *Bayesian methods in cosmology*. Cambridge University Press, 2010.
- [31] W. H. Jefferys and J. O. Berger, “Ockham’s razor and bayesian analysis,” *American Scientist*, vol. 80, no. 1, pp. 64–72, 1992.
- [32] A. A. Ramos and I. Arregui, *Bayesian astrophysics*, vol. 26. Cambridge University Press, 2018.
- [33] B. Hall, “Bayesian inference, cran. r-project, laplacesdemon package,” 2012.
- [34] H. Jeffreys and H. Jeffreys, “Theory of probability, 3rd edn. clarendon,” 1961.
- [35] B. Murteira and G. H. J. Black, *Estatística descritiva*. 1983.
- [36] S. Correa, “Probabilidade e estatística,” *Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais*, 2003.
- [37] A. Barreira and P. Avelino, “ $\chi^2$  versus median statistics in supernova type ia data analysis,” *Physical Review D*, vol. 84, no. 8, p. 083521, 2011.
- [38] B. M. Hill, “Bayesian nonparametric prediction and statistical inference,” in *Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics*, pp. 43–94, Springer, 1992.
- [39] “Mundoentrepatas.com.” <http://aves.mundoentrepatas.com/pinguim-imperador.htm>. acessado em 12/08/2019.
- [40] R. M. Quimby, M. Oguri, A. More, S. More, T. J. Moriya, M. C. Werner, M. Tanaka, G. Folatelli, M. C. Bersten, K. Maeda, *et al.*, “Detection of the gravitational lens magnifying a type ia supernova,” *Science*, vol. 344, no. 6182, pp. 396–399, 2014.
- [41] M. Nicholl, S. Smartt, A. Jerkstrand, C. Inserra, M. McCrum, R. Kotak, M. Fraser, D. Wright, T.-W. Chen, K. Smith, *et al.*, “Slowly fading super-luminous supernovae that are not pair-instability explosions,” *Nature*, vol. 502, no. 7471, pp. 346–349, 2013.
- [42] R. Gott III, W. N. Colley, *et al.*, “Median statistics in polling,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 48, no. 9, pp. 1396–1408, 2008.
- [43] J. Buchner, “Nested sampling methods,” *arXiv preprint arXiv:2101.09675*, 2021.

- [44] V. F. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [45] R. E. De Souza, *Introdução à cosmologia*. EdUSP, 2004.
- [46] K. K. Wu, O. Lahav, and M. J. Rees, “The large-scale smoothness of the universe,” *Nature*, vol. 397, no. 6716, pp. 225–230, 1999.
- [47] C. VEIGA *et al.*, “Cosmologia: Da origem ao fim do universo,” *Rio de Janeiro: Observatório Nacional*, 2015.
- [48] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press, 2010.
- [49] B. S. Ryden, *Introduction to cosmology*, vol. 523. Addison-Wesley Reading, 2003.
- [50] J. HORVATH and M. P. ALLEN, *Cosmologia Física: do micro ao macro cosmos e vice-versa*. Editora Livraria da Física, 2011.
- [51] K. de Souza Oliveira Filho, K. de Souza Oliveira Filho, and M. d. F. O. Saraiva, *Astronomia e astrofísica*. Ed. Universidade/UFRGS, 2000.
- [52] R. P. Kirshner, “Foundations of supernova cosmology,” *Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches*, vol. 1, p. 151, 2010.
- [53] H. J. Völk, E. G. Berezhko, and L. T. Ksenofontov, “Magnetic field amplification in tycho and other shell-type supernova remnants,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 433, no. 1, pp. 229–240, 2005.
- [54] “Esa - space science.” [http://www.esa.int/Our\\_Activities/Space\\_Science/New\\_evidence\\_links\\_stellar\\_remains\\_to\\_oldest\\_recorded\\_supernova](http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/New_evidence_links_stellar_remains_to_oldest_recorded_supernova). acessado em 13/09/2019.
- [55] W. Baade and F. Zwicky, “On super-novae,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 20, no. 5, pp. 254–259, 1934.
- [56] F. Zwicky, “Types of novae,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 12, no. 1, p. 66, 1940.
- [57] M. Hamuy, M. Phillips, R. A. Schommer, N. B. Suntzeff, J. Maza, and R. Aviles, “The absolute luminosities of the calan/tololo type ia supernovae,” *arXiv preprint astro-ph/9609059*, 1996.
- [58] R. Minkowski, “Spectra of supernovae,” *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 53, p. 224, 1941.
- [59] J. Elias, K. Matthews, G. Neugebauer, and S. Persson, “Type i supernovae in the infrared and their use as distance indicators,” *The Astrophysical Journal*, vol. 296, pp. 379–389, 1985.



- [60] F. Hoyle and W. A. Fowler, “Nucleosynthesis in supernovae.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 132, p. 565, 1960.
- [61] K. Nomoto, K. Iwamoto, and N. Kishimoto, “Type ia supernovae: Their origin and possible applications in cosmology,” *Science*, vol. 276, no. 5317, pp. 1378–1382, 1997.
- [62] F.-K. Thielemann, F. Brachwitz, P. Höflich, G. Martinez-Pinedo, and K. Nomoto, “The physics of type ia supernovae,” *New Astronomy Reviews*, vol. 48, no. 7-8, pp. 605–610, 2004.
- [63] S. Chandrasekhar, “The maximum mass of ideal white dwarfs,” *The Astrophysical Journal*, vol. 74, p. 81, 1931.
- [64] D. Branch and G. Tammann, “Type ia supernovae as standard candles,” *Annual review of astronomy and astrophysics*, vol. 30, pp. 359–389, 1992.
- [65] J. F. Dantas Jr., “Aplicação da estatística mediana na restrição de parâmetros cosmológicos,” mestrado em física, Unversidade Federal da Bahia, UFBA, Salvador, Bahia, 2015.
- [66] P. Oliveira, “As supernovas tipo ia e a cosmologia.,” Master’s thesis, Universidade Federal do Espírito Santo, 2010.
- [67] H. Johnson and W. Morgan, “Fundamental stellar photometry for standards of spectral type on the revised system of the yerkes spectral atlas,” *The Astrophysical Journal*, vol. 117, p. 313, 1953.
- [68] M. M. Phillips, “The absolute magnitudes of type ia supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 413, pp. L105–L108, 1993.
- [69] P. ASTIER, J. GUY, N. REGNAULT, R. PAIN, E. AUBOURG, D. BALAM, S. BASA, R. CARLBERG, S. FABBRO, D. FOUCHÉZ, *et al.*, “The supernova legacy survey: measurement of  $\omega_m$ ,  $\omega$  and  $w$  from the first year data set. commentary,” *Astronomy and astrophysics*, vol. 500, no. 1, pp. 597–616, 2009.
- [70] W. M. Wood-Vasey, G. Miknaitis, C. Stubbs, S. Jha, A. Riess, P. Garnavich, R. Kirshner, C. Aguilera, A. Becker, J. Blackman, *et al.*, “Observational constraints on the nature of dark energy: first cosmological results from the essence supernova survey,” *The Astrophysical Journal*, vol. 666, no. 2, p. 694, 2007.
- [71] D. Scolnic, A. Rest, A. Riess, M. Huber, R. Foley, D. Brout, R. Chornock, G. Narayan, J. Tonry, E. Berger, *et al.*, “Systematic uncertainties associated with the cosmological analysis of the first pan-starrs1 type ia supernova sample,” *The Astrophysical Journal*, vol. 795, no. 1, p. 45, 2014.

- [72] H. Campbell, C. B. D'andrea, R. C. Nichol, M. Sako, M. Smith, H. Lampeitl, M. D. Olmstead, B. Bassett, R. Biswas, P. Brown, *et al.*, "Cosmology with photometrically classified type ia supernovae from the sdss-ii supernova survey," *The Astrophysical Journal*, vol. 763, no. 2, p. 88, 2013.
- [73] M. Hicken, P. Challis, S. Jha, R. P. Kirshner, T. Matheson, M. Modjaz, A. Rest, W. M. Wood-Vasey, G. Bakos, E. J. Barton, *et al.*, "Cfa3: 185 type ia supernova light curves from the cfa," *The Astrophysical Journal*, vol. 700, no. 1, p. 331, 2009.
- [74] A. G. Riess, L.-G. Strolger, S. Casertano, H. C. Ferguson, B. Mobasher, B. Gold, P. J. Challis, A. V. Filippenko, S. Jha, W. Li, *et al.*, "New hubble space telescope discoveries of type ia supernovae at  $z > 1$ : narrowing constraints on the early behavior of dark energy," *The Astrophysical Journal*, vol. 659, no. 1, p. 98, 2007.
- [75] N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman, G. Aldering, R. Amanullah, K. Barbary, L. Barrientos, J. Botyanszki, M. Brodwin, N. Connolly, *et al.*, "The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above  $z > 1$  and building an early-type-hosted supernova sample," *The Astrophysical Journal*, vol. 746, no. 1, p. 85, 2012.
- [76] S. Jha, A. G. Riess, and R. P. Kirshner, "Improved distances to type ia supernovae with multicolor light-curve shapes: Mlcs2k2," *The Astrophysical Journal*, vol. 659, no. 1, p. 122, 2007.
- [77] M. Sako, B. Bassett, A. C. Becker, P. J. Brown, H. Campbell, R. Cane, D. Cinabro, C. B. D'Andrea, K. S. Dawson, F. DeJongh, *et al.*, "The data release of the sloan digital sky survey-ii supernova survey," *arXiv preprint arXiv:1401.3317*, 2014.
- [78] M. March, R. Trotta, P. Berkes, G. Starkman, and P. Vaudrevange, "Improved constraints on cosmological parameters from type ia supernova data," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 418, no. 4, pp. 2308–2329, 2011.
- [79] M. Kunz, B. A. Bassett, and R. A. Hlozek, "Bayesian estimation applied to multiple species," *Physical Review D*, vol. 75, no. 10, p. 103508, 2007.
- [80] R. Kessler and D. Scolnic, "Correcting type ia supernova distances for selection biases and contamination in photometrically identified samples," *The Astrophysical Journal*, vol. 836, no. 1, p. 56, 2017.
- [81] A. CASTRO *et al.*, "Introdução à astronomia e astrofísica—capítulo-4," *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE-7177-PUD/38*, 2003.
- [82] G. Risaliti and E. Lusso, "A hubble diagram for quasars," *The Astrophysical Journal*, vol. 815, no. 1, p. 33, 2015.

- [83] E. Lusso and G. Risaliti, “The tight relation between x-ray and ultraviolet luminosity of quasars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 819, no. 2, p. 154, 2016.
- [84] J. Hu, Y. Wang, and F. Wang, “Testing cosmic anisotropy with pantheon sample and quasars at high redshifts,” *arXiv preprint arXiv:2008.12439*, 2020.
- [85] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [86] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [87] O. Lahav, “Dark energy: is it just einstein’s cosmological constant lambda?,” *arXiv preprint arXiv:2009.10177*, 2020.
- [88] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, “New developments in the casimir effect,” *Physics reports*, vol. 353, no. 1-3, pp. 1–205, 2001.
- [89] Y. B. Zel’dovich, “Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 24, no. 3, p. 216, 1981.
- [90] F. A. Oliveira, *Reduzindo o setor escuro do Universo: uma nova cosmologia acelerada com criação de matéria escura fria*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2010.
- [91] P. Ruiz-Lapuente, *Dark energy: Observational and theoretical approaches*. Cambridge University Press, 2010.
- [92] A. Dolgov, “The problem of vacuum energy and cosmology (a lecture presented at the 4th colloque cosmologie, paris, june, 1997; to be published in the proceedings),” *Arxiv preprint astro-ph/9708045*, 1997.
- [93] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Reviews of modern physics*, vol. 61, no. 1, p. 1, 1989.
- [94] P. A. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, R. Barreiro, J. Bartlett, N. Bartolo, *et al.*, “Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 594, p. A13, 2016.
- [95] O. Piattella, “Lecture notes in cosmology,” tech. rep., Springer, 2018.
- [96] J. A. Frieman, “The standard cosmology,” in *The Building Blocks of Creation: From Microfermis to Megaparsecs*, pp. 421–468, World Scientific, 1994.
- [97] M. S. Turner and M. White, “Cdm models with a smooth component,” *Physical Review D*, vol. 56, no. 8, p. R4439, 1997.
- [98] R. Caldwell and E. V. Linder, “Limits of quintessence,” *Physical review letters*, vol. 95, no. 14, p. 141301, 2005.

- 
- [99] A. Albrecht, G. Bernstein, R. Cahn, W. L. Freedman, J. Hewitt, W. Hu, J. Huth, M. Kamionkowski, E. W. Kolb, L. Knox, *et al.*, “Report of the dark energy task force,” *arXiv preprint astro-ph/0609591*, 2006.
- [100] J. F. d. Jesus, *Energia escura e aceleração do universo: aspectos conceituais e testes observacionais*. Doutorado, Universidade de São Paulo, 2010.
- [101] V. B. Johri and P. Rath, “Parametrization of the dark energy equation of state,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 16, no. 10, pp. 1581–1591, 2007.
- [102] M. Chevallier and D. Polarski, “Accelerating universes with scaling dark matter,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 10, no. 02, pp. 213–223, 2001.
- [103] E. V. Linder, “Exploring the expansion history of the universe,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 9, p. 091301, 2003.
- [104] J. Lesgourgues, “The cosmic linear anisotropy solving system (class) i: Overview,” *arXiv preprint arXiv:1104.2932*, 2011.