



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Programa de Pós-Graduação em Física

Tese de Doutorado

**Estruturas Algébricas em Informação Quântica e  
Dinâmica de Campos Térmicos**

Marco Antônio Silva Trindade

Novembro de 2010



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Estruturas Algébricas em Informação Quântica e  
Dinâmica de Campos Térmicos**

Marco Antônio Silva Trindade

**Orientador:** Prof. Dr. José David Manguiera Vianna

Tese apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal da Bahia para a  
obtenção do título de Doutor em Física.

Salvador - Novembro de 2010

S237 Trindade, Marco Antônio Silva

Estruturas Algébricas em Informação Quântica e Dinâmica de Campos Térmicos/Marco Antônio Silva Trindade. – Novembro de 2010.

208 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. José David Manguiera Vianna.

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física, Novembro de 2010.

1. Informação Quântica 2. Estruturas Algébricas 3. Dinâmica de Campos Térmicos. I. Vianna, José David M. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física. III. Título.

CDD - 530.12

CDU - 530.145

Dedico esta Tese a quatro pessoas:

Lu, Ruy, Virgínia e ao pequeno grande Raul.

# Agradecimentos

Este trabalho, apesar de modesto, é o resultado de um grande esforço pessoal no qual muitas pessoas direta ou indiretamente contribuíram sobremaneira para a sua concretização. Sendo assim, não poderia deixar de manifestar a estas os meus mais sinceros agradecimentos e desde já deculpo-me àquelas esquecidas por uma memória não tão privilegiada.

Inicialmente eu gostaria de agradecer ao meu orientador, professor José David Manguera Vianna pela sua orientação instigante, cuidadosa e desprovida de preconceitos. Desnecessário mencionar sua competência refletida em um sem-número de discussões de grande valor em todo o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos professores e funcionários do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, em especial, aos professores Esdras, Graça, Jailton e Luciano e aos funcionários Elso, Eraldina, Geraldo, Joseane, Marli, Valtério e Tereza.

Aos professores Ademir Eugênio de Santana e Marco César Barbosa Fernandes, da Universidade de Brasília.

À Universidade do Estado da Bahia, e em particular ao Departamento de Ciências Exatas e da Terra do Campus II, que possibilitou meu afastamento para a finalização deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas, próximos e distantes. Palavras de incentivo nos momentos de desânimo, auxílios computacionais, discussões e farras ajudaram a enfrentar com mais coragem e perseverança as intempéries. Citarei alguns destes: Adriano, Adriano Cattai, Alexandre, Antônio Luís, Bocão, Eric Pinto, Érico, Danielle, Fernando, Flávio, Genilson, João, João Cardeal, Juarez, Júnior, Lafayette, Leandro,

Lourival, Marcelo Alejandro, Michael Heimer, Osvaldo, Roque, Ruivaldo, Sérgio, Tenilson, Teófilo e Vinicius. Em particular, aos amigos Adriano, Alexandre, Danielle, Eric, Genilson, João, Leandro e Lourival.

Aos familiares que sempre respeitaram e compreenderam minha ausência em diversas ocasiões, festivas e não festivas, em virtude da dedicação a este trabalho. Faço aqui um agradecimento especial à minha consorte Lu, que além de incentivo e respeito, sempre agiu com grande companheirismo, assumindo muitas vezes, meus problemas não acadêmicos, a fim de permitir mais tempo e tranquilidade no desenvolvimento deste trabalho. Faço também um agradecimento especial a meu pai, Ruy, pela valorização do saber, sempre presente na minha formação.

Finalmente, agradeço à Virgínia, minha segunda mãe, que me dedicou grande parte de sua existência e infelizmente não está mais presente.

“No meio da dificuldade,  
encontra-se a oportunidade”

(Albert Einstein)

## Resumo

A presente Tese contém uma investigação de aspectos físicos e matemáticos acerca da teoria da informação quântica. Estruturas algébricas e o formalismo da dinâmica de campos térmicos (DCT) são as principais ferramentas utilizadas neste trabalho.

Em uma primeira etapa, desenvolvemos uma formulação algébrica para sistemas quânticos multipartites com um tratamento operacional consistente, sem a necessidade de uma representação matricial e da estrutura dicotômica entre estados e operadores em um espaço de Hilbert. Neste contexto, descrevemos o emaranhamento quântico enfatizando a separabilidade e conexões com o grupo de tranças através dos estados de Bell. Um conjunto de portas lógicas quânticas algébricas foi obtida, destacando-se a universalidade das mesmas. Discutimos uma interpretação geométrica natural para os q-bits com base nas fibrações de Hopf e nos quatérnions; e desenvolvemos também uma teoria algébrica da correção quântica de erro a partir da qual foram determinados subespaços livres de descoerência.

Numa segunda etapa, exploramos alguns aspectos da dinâmica de campos térmicos, relevantes no contexto da informação quântica. Inicialmente, estudamos o emaranhamento em sistemas com simetrias, fazendo uso da decomposição de Schmidt. Seguidamente, construímos uma DCT q-deformada e realizamos algumas aplicações num cenário entrópico via representações de grupos quânticos. Propriedades não-clássicas de sistemas da computação quântica óptica também são investigadas via o formalismo DCT. Baseado numa representação duplo-trilho estudamos o teletransporte quântico de estados térmicos e finalizamos com uma analogia entre o procedimento de purificação e a DCT.



## Abstract

This PhD Thesis presents an investigation of physical and mathematical aspects of quantum information theory. Algebraic structures and thermofield dynamics (TFD) formalism are the main tools used in this work.

In a first part of this work, we develop an algebraic formulation for multipartite systems and a consistent way, without the necessity of a matrix representation and dichotomous structure between states and operators in a Hilbert space. In this context, we describe the quantum entanglement emphasizing the separability and connections with the braid groups through Bell states. After, an universal set of quantum logic gates is also obtained. Besides, a geometric interpretation for q-bits is discussed based on Hopf fibrations and quaternions, in addition, the algebraic quantum error correction is also developed, where we determined decoherence free subspaces.

The second part of this work is devoted to explore some aspects of TFD formalism that are relevant in the quantum information context. As a first step, we study the entanglement in systems with symmetries by using Schmidt decomposition. In the following, we construct a q-deformed TFD and perform some applications in entropic scenario via representation of quantum groups. Non-classical properties of optical quantum computing systems are also studied with the formalism TFD. Other analyzed point based on a double rail representation is the quantum teleportation of thermal states. Finally, we discuss the analogy between the purification procedure and TFD.



# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Álgebras e Mecânica Quântica</b>	<b>8</b>
2.1 Álgebras Associativas Lineares . . . . .	9
2.2 Álgebras de Clifford e Álgebras de Lie . . . . .	21
2.3 Mecânica Quântica Algébrica . . . . .	28
<b>3 Formulação Algébrica Multipartite</b>	<b>31</b>
3.1 Representações de Álgebras . . . . .	32
3.2 Operadores de Projeção . . . . .	44
3.3 Construção GNS . . . . .	47
<b>4 Estados Algébricos Emaranhados</b>	<b>57</b>
4.1 Emaranhamento Quântico . . . . .	59
4.2 Critérios Algébricos de Separabilidade . . . . .	62
4.3 Exemplos . . . . .	67
<b>5 Computação Quântica Algébrica</b>	<b>78</b>
5.1 Portas Lógicas Quânticas Algébricas . . . . .	80
5.2 Aplicações . . . . .	84
5.3 Representação Geométrica para os Q-bits Algébricos . . . . .	88
<b>6 Correção Quântica de Erro Algébrica</b>	<b>93</b>
6.1 Elementos da Correção Quântica de Erro . . . . .	94
6.2 Formalismo Algébrico dos Estabilizadores . . . . .	98
6.3 Construção Algébrica dos Subespaços Livres de Descoerência . . . . .	100
<b>7 Elementos da Dinâmica de Campos Térmicos</b>	<b>110</b>
7.1 Elementos Básicos da DCT . . . . .	111
7.2 Osciladores Bosônicos e Fermiônicos . . . . .	113

7.2.1	Osciladores Bosônicos . . . . .	113
7.2.2	Osciladores Fermiônicos . . . . .	118
7.3	Estrutura Algébrica da Dinâmica de Campos Térmicos . . . . .	122
<b>8</b>	<b>Aspectos Algébricos da Dinâmica de Campos Térmicos</b>	<b>130</b>
8.1	Simetrias Generalizadas $SU(1,1)$ , $SU(2)$ e Emaranhamento . . . . .	131
8.2	Grupos Quânticos e Dinâmica de Campos Térmicos q-Deformada . . . . .	139
8.2.1	Operadores de Criação e Aniquilação na DCT q-Deformada . . . . .	144
8.3	Entropias Deformadas . . . . .	148
<b>9</b>	<b>Dinâmica de Campos Térmicos e Informação Quântica</b>	<b>158</b>
9.1	Computação Quântica com Oscilador Harmônico Termalizado . . . . .	159
9.2	Teletransporte Quântico . . . . .	181
9.3	Purificação e Dinâmica de Campos Térmicos . . . . .	187
<b>10</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>191</b>
<b>A</b>	<b>Relações de Anti-Comutação na Álgebra Produto e os Grupos de Trança</b>	<b>194</b>
<b>B</b>	<b>Representação de Schwinger da Álgebra <math>su_q(2)</math>.</b>	<b>197</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>200</b>

## Lista de Figuras

9.1	Fidelidade no oscilador harmônico termalizado . . . . .	167
9.2	Fator de Mandel no oscilador harmônico termalizado . . . . .	169
9.3	Função de Wigner para o oscilador harmônico termalizado . . . . .	180
9.4	Função de Wigner . . . . .	180
9.5	Fidelidade do teletransporte . . . . .	187

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das formas de se reportar à teoria da computação quântica e da informação quântica é explicitando que ela versa sobre o estudo das tarefas realizáveis através do processamento da informação contida em sistemas quânticos [1, 2, 3]. Feynman [4] foi um dos primeiros a propor a utilização da mecânica quântica para executar tarefas computacionais, mostrando que sistemas quânticos simples poderiam executar grandes quantidades de cálculos num espaço curto de tempo. A unidade de informação clássica, os bits, cujos valores lógicos são caracterizados por “0” ou “1” seria substituída pela unidade de informação quântica, os q-bits <sup>1</sup>, que possuem uma propriedade ímpar: o princípio de sobreposição. Este resulta na existência dos estados emaranhados [5], que constituem o principal recurso físico da teoria, sendo responsável pela codificação superdensa [6] e pelo teletransporte quântico [7]. Seu desenvolvimento foi acelerado a partir do controle de sistemas quânticos individuais, aliado à percepção de que com a constante redução no tamanho dos componentes eletrônicos, efeitos quânticos podem interferir de forma crucial no funcionamento de tais dispositivos, sendo necessário um novo paradigma para a computação e informação. Desde então uma série de desenvolvimentos teóricos e experimentais acerca de temas como emaranhamento, teletransporte quântico, algoritmos quânticos, tem sido realizados.

---

<sup>1</sup>Em português também se utiliza a grafia qubits.

A computação quântica experimental está ainda incipiente. Técnicas envolvendo eletrodinâmica quântica de cavidades, armadilhas iônicas, ressonância magnética nuclear (RMN) vêm sendo aperfeiçoadas, eclodindo a partir de um grande número de realizações físicas para os estados lógicos quânticos, os q-bits [8, 9, 10, 11, 12]. Todavia, alguns algoritmos quânticos já foram demonstrados experimentalmente (2001), como o algoritmo de Schor, via técnicas de RMN. Implementações à temperatura ambiente também tem se mostrado possíveis. O teletransporte quântico foi realizado experimentalmente pela primeira vez em 1998 [13] e a criptografia quântica já é uma realidade [14, 15, 16, 17, 18, 19].

No que concerne à parte teórica, apesar da existência de uma grande variedade de técnicas matemáticas [20], existem muitas dificuldades no tratamento de sistemas quânticos multipartites. A decomposição de Schmidt [21], ferramenta essencial na caracterização e quantificação do emaranhamento não é válida, em geral, para sistemas multipartites. Um critério exato de separabilidade para estados multipartites é considerado um problema não trivial e foi resolvido para situações bem restritas [22]. Algumas questões relacionadas à conjectura de aditividade para canais quânticos [23, 24], que apesar de possuírem uma formulação relativamente simples, aparecem como problemas matemáticos áridos possuindo implicações físicas extremamente relevantes no campo da comunicação quântica, permanecem em aberto. Uma outra tarefa complexa no campo da informação quântica é a compreensão dos caminhos distintos em que sistemas de muitos q-bits podem ser emaranhados. Isso conduz ao estabelecimento de classes de equivalência perante operações locais estocásticas e comunicação clássica, sendo encontrado na literatura solução apenas para até quatro qubits [25]. A teoria do ruído quântico possui casos em que os processos não podem ser descritos por um mapa afim, falhando o formalismo das operações quânticas [1]. Na tentativa de desenvolver um formalismo geral, que possa trazer à lume questões não resolvidas na teoria da computação quântica e da informação quântica, alguns autores [26, 27, 28] têm optado por uma formulação em termos de álgebras de Clifford,

dispensando a utilização da estrutura de espaço de Hilbert.

Acredita-se que as formulações algébricas [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36] exibem vantagens do ponto de vista interpretativo, produzindo uma nova perspectiva da realidade quântica. Schönberg [37], por exemplo, fazendo uso das relações entre as álgebras de Grassmann e de Clifford forneceu uma melhor compreensão do espaço de fase relativístico e uma nova interpretação para o spin, obtida por Bohm e Hiley [38] possibilita pensar o spin como uma propriedade de um campo de tensores anti-simétricos, caracterizando um novo tipo de movimento. Fernandes e Vianna [39], também utilizando o cálculo algébrico desenvolvido por Schönberg, derivaram equações de Duffin-Kemmer-Petiau relativísticas mostrando que tal formalismo possibilita a descrição de partículas bosônicas. Dirac [40] foi outro a observar vantagens nos métodos algébricos, indicando que quando estes são utilizados, é possível obter soluções para alguns problemas físicos, não factíveis na representação de Schrödinger.

Existem também trabalhos que utilizam o formalismo de álgebras de Clifford sem abdicar do espaço de Hilbert. Vlasov [41], por exemplo, construiu um conjunto de portas lógicas quânticas universais através de produtos tensoriais da álgebra de Pauli. Na teoria quântica da correção de erro, Zeng et al [42] desenvolveram matrizes verificadoras utilizando álgebras de Clifford permitindo construir facilmente códigos quânticos estabilizadores de comprimento arbitrário sendo alguns não realizáveis na abordagem tradicional.

De fato, técnicas algébricas, não necessariamente relacionadas às álgebras de Clifford, em uma estrutura de espaço de Hilbert são amplamente utilizadas em Informação Quântica. Na correção quântica de erro, por exemplo, o formalismo dos estabilizadores envolve resultados acerca do grupo de Pauli e representações de grupos [43]. Uma caracterização dos subespaços livres de descoerência e sua conexão com os códigos estabilizadores foram obtidas via representação de grupos finitos [44, 45]. Resultados baseados em representações irredutíveis de álgebras de operadores foram relacionados a códigos corretores de erros, possibilitando uma maior compreensão de

códigos ruidosos [46]. No estudo do emaranhamento quântico, técnicas de grupos de Lie também foram empregadas com sucesso [25]. O grupo de Clifford tem se mostrado útil na determinação de estados quânticos a partir de medidas sobre uma certa quantidade de observáveis, ou seja, nos processos de tomografia quântica [47].

A topologia é outra área que se apresenta promissora para a computação quântica culminando na denominada computação quântica topológica [48, 49]. Elementos relacionados ao grupo de tranças (braid groups) estão sendo explorados tanto de um ponto de vista abstrato, associado às estruturas matemáticas que descrevem as portas lógicas quânticas, emaranhamento e teletransporte quântico, como de uma perspectiva mais fenomenológica ligada aos anyons [50, 51], partículas detentoras de uma estatística intermediária entre bósons e férmions. Estas partículas estão conectadas com o efeito Hall quântico fracionário [50] e podem ser obtidas a partir de excitações em um gás de elétrons bidimensional e matematicamente deduzidas de representações irredutíveis dos grupos de tranças. Sua relevância para a computação quântica, e em particular, para a correção quântica de erro, é verossímil tendo em vista que os anyons não-abelianos se apresentam resistentes à ação do ruído [49], devido às suas propriedades topológicas, com taxas de erro envolvendo magnitudes diminutas. É proeminente observar que mesmo nestas descrições topológicas, as estruturas algébricas possuem primazia enquanto linguagem e possibilitadora de avanços relacionando-as a outros campos da área.

Baseados no trabalho seminal de Riesz [52] sobre os espinores algébricos, Frescura e Hiley [53] identificaram os kets como elementos de ideais à esquerda minimais, e os respectivos bras, como elementos de ideais à direita minimais, construindo uma teoria quântica puramente algébrica, pontuando que a álgebra provém uma perspectiva distinta da natureza dos processos quânticos. Sob este viés desenvolvemos [54] uma formulação algébrica para sistemas quânticos multipartites, buscando vantagens interpretativas e operacionais para a teoria da computação quântica e da informação quântica, explorando tópicos como emaranhamento, geometria dos q-bits, portas lógicas

icas quânticas e correção quântica de erro.

Um outro formalismo de operadores que permite o tratamento de estados mistos dentro de uma estrutura de espaço de Hilbert em que as médias são calculadas de uma forma similar àquelas de estados puros, denominado dinâmica de campos térmicos [55, 56, 57], vem sendo largamente empregado [58], com êxito em sistemas de ótica quântica, de interesse para a Computação quântica e informação quântica. Esse fato nos motivou a desenvolver aspectos da dinâmica de campos térmicos, úteis para a Informação Quântica, levando em conta também a possibilidade de investigar propriedades não clássicas de estados quânticos com a presença de temperatura bem como a implementação de portas lógicas quânticas, o teletransporte quântico e emaranhamento, na presença de temperatura.

Em síntese, tendo como fio condutor a informação quântica, duas vertentes estão contidas nesta Tese: um formalismo algébrico baseado no conceito de ideais minimais, presente do segundo ao sexto capítulo e a dinâmica de campos térmicos, explorada no capítulos 7,8 e 9.

No capítulo 2 faremos uma revisão dos principais aspectos matemáticos que servirão de base aos quatro capítulos seguintes. No capítulo três mostramos que é possível descrever estados quânticos multipartites com base no produto tensorial de elementos de ideais à esquerda minimais em uma “álgebra produto” formada pelo produto tensorial de álgebras - a arena onde serão descritos os fenômenos quânticos multipartites. Em particular, no caso dos q-bits, os estados puros ou mistos serão caracterizados basicamente por geradores da álgebra produto. Para essa caracterização, generalizações de resultados acerca da teoria de álgebras associativas semi-simples e uma teoria de representação para uma vasta classe de álgebras de interesse em Física foi desenvolvida de forma análoga à representação de grupos finitos resultando na obtenção de relações de ortogonalidade e na construção de operadores de projeção. Tendo em vista que os próprios geradores da álgebra podem ser utilizados para caracterizar os observáveis ou operações unitárias sobre os estados, temos um ganho no processo de operacional-

ização, de posse das relações entre os geradores da álgebra, não sendo necessário a investigação de uma base específica tampouco assumir uma dada representação matricial. Dentro dessa perspectiva algébrica uma construção análoga à GNS (Gelfand, Naimark e Segal) será apresentada e uma realização explícita em termos dos ideais de Gelfand obtida. Apresentaremos em seguida, no capítulo 4, um critério de separabilidade que permite identificar, sem a necessidade de nenhuma representação matricial, se um dado estado está emaranhado ou não. Ilustramos com alguns exemplos clássicos de estados emaranhados investigados na literatura. No capítulo 5, as portas lógicas quânticas algébricas serão apresentadas no caso multipartite e mostraremos que uma interpretação geométrica para os q-bits em termos da esfera de Bloch emerge naturalmente nesta formulação, utilizando a álgebra dos quatérnions e as fibrações de Hopf. No capítulo 6, mostramos que essa formulação pode também ser empregada na Correção Quântica de Erro envolvendo o formalismo dos estabilizadores e a construção dos subespaços livres de descoerência.

No capítulo sete apresentaremos uma revisão da dinâmica de campos térmicos (DCT) analisando tanto os aspectos teóricos com os aspectos matemáticos subjacentes ao formalismo. No oitavo capítulo iniciamos explorando algumas generalizações algébricas das técnicas de dinâmica de campos térmicos na investigação do emaranhamento para sistemas que possuem simetrias  $SU(1,1)$  e  $SU(2)$  generalizadas. Nestes casos, veremos que a decomposição de Schmidt se apresenta como uma ferramenta bastante útil. Veremos, ainda neste contexto, que representações bosônicas de álgebras de Hopf surgem associadas a estas generalizações. Uma Dinâmica de Campos Térmicos deformada será apresentada a partir da q-deformação da álgebra de Heisenberg e mostraremos que o formalismo da DCT pode ser bem compreendido observando a estrutura de co-álgebra do grupo quântico em questão. Uma expressão para a entropia de Von Neumann de um sistema de osciladores bosônicos deformados termalizados foi encontrada seguindo duas vertentes; a primeira delas um prolongamento natural do formalismo q-deformado desenvolvido e a segunda utilizando

uma outra proposta de deformação com base no oscilador harmônico  $q$ -deformado. Neste cenário entrópico, discutiremos uma nova relação entre os grupos quânticos e  $q$ -entropia de Tsallis através do Hamiltoniano invariante por um dado grupo quântico, deduzindo expressões da mecânica estatística não-extensiva. Analisaremos, seguidamente, no capítulo 9, a termalização de um sistema paradigmático para a realização experimental da computação quântica: o oscilador harmônico quântico. Para uma dada sobreposição associada a um sub-espaço do espaço de Fock, a implementação da porta lógica quântica CNOT<sup>2</sup> é factível, em princípio [1]. Investigamos então, levando em conta os efeitos de temperatura e explicitando os estados mistos associados a estes, o estudo da fidelidade e de propriedades não clássicas através do fator de Mandel e da função de Wigner. Uma proposta de teletransporte quântico, em presença de um canal quântico com temperatura, na denominada representação duplo-trilho, também é apresentada. Encerraremos com uma comparação entre um procedimento em computação quântica e em informação quântica denominado purificação e a duplicação do espaço de Hilbert em dinâmica de campos térmicos, exibindo as diferenças existentes em ambas as formulações.

No capítulo 10 apresentamos as conclusões e uma análise dos possíveis desdobramentos deste trabalho. Em seguida temos os apêndices A e B, e por último, as referências bibliográficas.

---

<sup>2</sup>CNOT ou porta não-controlada é uma das portas mais utilizadas no contexto de circuitos quânticos, a qual nega o  $q$ -bit “alvo” caso o  $q$ -bit de “controle” seja ativado.

## Capítulo 2

# Álgebras e Mecânica Quântica

Este capítulo contém a base teórica para a nossa proposta de formulação algébrica da informação quântica que será apresentada nos capítulos seguintes. A compreensão de alguns conceitos-chave como idempotentes primitivos e ideais à esquerda minimais; o conhecimento de certas álgebras lineares tais com as álgebras de Clifford e de Lie e a inserção destas estruturas em uma visão algébrica da mecânica quântica são aspectos proeminentes na presente tese.

As álgebras associativas lineares [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67] podem ser classificadas basicamente em álgebras não semi-simples, que possuem radical não nulo e as álgebras semi-simples, cujo radical é nulo. As álgebras semi-simples têm sua estrutura completamente determinada em termos das álgebras simples, aquelas em que os únicos ideais bilaterais são os triviais - o ideal nulo e a própria álgebra. Ademais, toda álgebra simples pode ser escrita como o produto tensorial de uma álgebra de divisão por uma álgebra matricial. Mostra-se ainda [68] que toda álgebra associativa linear  $A$  pode ser escrita como a soma de seu radical e da álgebra semi-simples obtida do quociente de  $A$  módulo radical. Esse resultado determina completamente a estrutura das álgebras associativas lineares. Nos restringiremos aqui aos aspectos relevantes para o nosso trabalho, ou seja, que permitem a investigação destas estruturas em informação quântica e computação quântica.

As álgebras de Clifford podem ser vistas como representações algébricas de certos conceitos geométricos. Elas foram colocadas num elevado patamar matemático por Chevalley [66] e aparecem naturalmente na teoria quântica relativística associada às matrizes gama de Dirac. Schönberg [37] explorou sua ligação com a cinemática quântica, sempre relacionando-as aos grupos de transformações no espaço. Neste ponto, as álgebras de Lie possuem lugar comum, estando também presentes em toda a Física Quântica ou Clássica, representando as simetrias dos sistemas físicos. Com base nestas estruturas algébricas pode-se pensar em realizações para uma Mecânica Quântica Algébrica.

A mecânica quântica algébrica desenvolvida a partir da referência [29] apresenta um arcabouço matemático para a mecânica quântica que abdica da estrutura de espaço de Hilbert. Esse desenvolvimento tem um objetivo maior de fornecer uma compreensão mais profunda da física quântica, na tentativa de melhor elucidar aspectos relacionados ao processo de medida e ao conceito de separabilidade e não localidade [69, 70].

Iniciaremos então com uma digressão acerca da teoria das álgebras associativas lineares. Em seguida apresentaremos alguns aspectos básicos das álgebras de Clifford e de Lie e, por último, exibiremos a relação desses conceitos com a mecânica quântica, apresentando a mecânica quântica algébrica seguindo de perto a referência [29].

## 2.1 Álgebras Associativas Lineares

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos e resultados indispensáveis ao desenvolvimento deste trabalho que são de caráter eminentemente matemático e referem-se a alguns aspectos das álgebras associativas [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67], sendo baseado sobretudo na referência [68], um clássico na teoria das álgebras lineares. Em [71] e [72] também encontramos uma boa seleção dos tópicos mais utilizados na Física.

**Definição 1** *Um grupo  $G$  é um conjunto com uma lei de composição, usualmente*

caracterizada pela justaposição de seus elementos, satisfazendo os seguintes axiomas:

(i) Para todo  $a, b \in G$ , existe um único  $c \in G$  tal que  $ab = c$ .

(ii) A lei de composição é associativa,  $(ab)c = a(bc)$ .

(iii) Existe um elemento identidade, denotado por  $1$ , tal que  $a1 = 1a = a$ .

(iv) Todo elemento  $a$  possui um inverso  $a^{-1}$  tal que  $aa^{-1} = 1$ .

Quando o grupo consiste de um número finito de elementos, tal número é denominado a ordem do grupo. Em geral, o produto (lei de composição) é não comutativo,  $ab \neq ba$ . Um grupo para o qual o produto de quaisquer dois elementos é comutativo, é chamado de abeliano. Quando a lei de composição é denominada adição, o grupo é denominado aditivo.

**Definição 2** Um álgebra sobre um corpo  $K$ ,  $A(K)$ , consiste em um espaço vetorial sobre  $K$  munido de um produto, denominado, multiplicação, que satisfaz  $a(\lambda b + \mu c) = \lambda ab + \mu ac$ ,  $\forall a, b, c \in A, \forall \lambda, \mu \in K$ , e similarmente, para a multiplicação na direita.

A álgebra é associativa se seu produto satisfaz  $(ab)c = a(bc)$ . Uma álgebra é dita de divisão, se todo elemento não-nulo  $a \in A$ , é regular (invertível). Dizemos que a dimensão do espaço vetorial subjacente à álgebra é a dimensão da álgebra. Uma álgebra  $A$  é denominada  $G$ -graduada se existe uma decomposição do espaço vetorial subjacente à álgebra,  $A = \bigoplus_{p \in G} A^{(p)}$ , onde  $A^{(p)}$  são subespaços tais que para todo  $p, q \in G$ , em que  $G$  é um grupo abeliano aditivo, temos

$$a_p a_q \subset A^{(p+q)},$$

com  $a_p \in A^{(p)}$  e  $a_q \in A^{(q)}$ .

Uma álgebra  $A$  é a soma direta de álgebras  $B$  e  $C$ ,  $B \oplus C$ , se temos a soma direta dos espaços vetoriais subjacentes e  $bc = cb = 0$  (em que  $0$  é o elemento neutro da álgebra com relação à operação de adição e satisfaz  $a0 = 0$ , para todo  $a \in A$ ), para todo elemento  $b \in B$  e todo elemento  $c \in C$ . Se  $B$  e  $C$  formam uma soma direta de espaços vetoriais, mas a condição  $bc = cb = 0$  não é satisfeita, então dizemos que

$A$  é a soma de  $B$  com  $C$ ,  $A = B + C$ . Uma álgebra que pode ser escrita como a soma direta de subálgebras é dita redutível. Álgebras redutíveis contêm subálgebras invariantes, ou ideais. Um ideal bilateral, ou simplesmente um ideal, é um sub-espaço  $I$  de  $A$  tal que  $AIA \subset A$ . Podemos também definir ideais unilaterais. Um ideal à esquerda de uma álgebra  $A$  é um subespaço  $L$  de  $A$ , tal que  $AL \subset L$ . Analogamente, um ideal à direita é um subespaço  $R$  de  $A$ , tal que  $RA \subset R$ . Obviamente ideais unilaterais também são subálgebras. Um ideal de  $A$  é denominado maximal se ele não está contido em nenhum outro ideal de  $A$ . Um ideal é chamado de minimal se ele não contém nenhum outro ideal da álgebra.

Suponha  $A = B + C$  e definamos uma relação de equivalência em  $A$  por  $a \sim b$  se  $a = b + c$ , com  $c \in C$ . Designaremos a classe de equivalência de  $A$  por  $[A]$ . Os elementos de  $[A]$  formam um grupo abeliano pela adição. Temos que

$$[a] + [b] = [a + b]$$

e

$$\lambda [a] = [\lambda a].$$

Podemos então definir classes de equivalência na álgebra através de

$$[a] [b] = [ab].$$

Se, entretanto,  $c, d \in C$ , então

$$[a] [b] = [a + c] [b + d].$$

Para que exista consistência, devemos ter

$$[ab] = [ab + ad + cb + cd],$$

ou seja,  $(ab + ad + cb + cd) \in C$ . Isto é verdadeiro para todo  $a, b \in A$  e  $c, d \in C$  se, e somente se,  $C$  é um ideal. Quando isto ocorre, a estrutura descrita é denominada álgebra quociente de  $A$  módulo  $C$ , denotada por  $A/C$ .

Uma diferente correspondência entre álgebras pode ser definida como segue. Se  $u$  é uma aplicação entre  $A$  e  $A'$

$$\begin{aligned} u & : A \rightarrow A', \\ a & \rightarrow a^u, \end{aligned}$$

tal que  $(ab)^u = b^u a^u$ , para  $a, b \in A$ , então  $A$  e  $A'$  são ditas álgebras opostas e devemos utilizar  $A^{op}$  para designar a oposta de  $A$ . Em geral,  $A$  é distinta da álgebra  $A^{op}$ . No caso de um isomorfismo, dizemos que a aplicação corresponde a um anti-automorfismo. Este, por sua vez, para o caso em que a aplicação é novamente realizada e a operação corresponde à identidade, é designado anti-automorfismo involutivo, ou simplesmente, involução.

Se  $B$  e  $C$  são álgebras de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente, tais que  $B$  possui uma base  $\{b_i\}$ , com tabela de multiplicação

$$b_i b_j = \sum_k B_{ijk} b_k, \quad (2.1)$$

e  $C$  possui uma base  $\{c_p\}$  com tabela de multiplicação

$$c_p c_q = \sum_k C_{pqr} c_r. \quad (2.2)$$

então podemos definir  $A$  como sendo o produto tensorial de  $B$  e  $C$ ,  $A = B \otimes C$ , desde que  $A$  admita uma base  $\{a_{ip}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m; p = 1, 2, \dots, n$  com uma tabela de multiplicação dada por

$$a_{ip} a_{jq} = \sum_{k,r} B_{ijk} C_{pqr} a_{kr}. \quad (2.3)$$

O critério para o qual  $A$  é igual ao produto tensorial de  $B$  e  $C$  envolve uma base particular; entretanto demonstra-se facilmente que o produto tensorial independe das bases escolhidas para  $B$  e  $C$ .

Um elemento não-nulo de uma álgebra  $A$  é chamado de nilpotente se para alguma potência finita ele se anula. A menor potência para o qual isso ocorre é denominado

índice do elemento. Uma álgebra é chamada nilpotente de índice  $\nu$ , se este é o menor inteiro tal que para cada elemento da álgebra, o produto de  $\nu$  termos se anula.

**Teorema 1** *Todo ideal à esquerda, à direita e bilateral nilpotente está contido em um ideal nilpotente maximal único.*

Dada uma álgebra  $A$ , denominaremos seu ideal nilpotente maximal único de radical.

**Definição 3** *Um elemento não nulo  $\varepsilon$  de uma álgebra é dito idempotente se  $\varepsilon^2 = \varepsilon$ . Um elemento idempotente é dito primitivo se ele não pode ser escrito como uma soma de dois idempotentes ortogonais.*

**Teorema 2** *Toda álgebra não nilpotente contém um idempotente.*

**Definição 4** *Uma álgebra é denominada semi-simples se ela possui radical nulo.*

**Definição 5** *Uma álgebra não nilpotente e não unidimensional é chamada de simples se seus únicos ideais bilaterais são o ideal nulo e a própria álgebra.*

Álgebras simples são consequentemente semi-simples.

**Teorema 3** *Uma álgebra é semi-simples se, e somente se ela é simples ou a soma direta de álgebras simples.*

**Lema 1** *Se  $L$  é um ideal à esquerda de  $A$  e  $a$  e  $x$  elementos de  $A$ , então  $L$  é homomórfico a  $La$  pela correspondência  $x \rightarrow xa$ .*

**Lema 2** *Um ideal à esquerda minimal é mapeado por um homomorfismo em um ideal nulo ou o homomorfismo é um isomorfismo.*

**Lema 3** *Se um ideal à esquerda  $L$  é nilpotente, então temos  $L^2 = 0$ , ou  $L$  contém um elemento idempotente e é gerado por este elemento:*

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \quad e \quad L = A\varepsilon.$$

**Lema 4** *Se  $\varepsilon$  é um idempotente e  $L = A\varepsilon$ , então  $A$  é a soma direta de  $L$  e outro ideal à esquerda  $L'$  :*

$$A = L \oplus L'.$$

*Ademais, para todo  $x$  em  $L$ ,*

$$x\varepsilon = x,$$

*e para todo  $x'$  em  $L'$*

$$x'\varepsilon = 0.$$

Dizemos que um ideal à esquerda satisfaz a condição de mínimo se este ideal contém no mínimo um outro ideal à esquerda que por sua vez não contém nenhum outro ideal à esquerda do conjunto.

**Teorema 4** *Uma álgebra sem radical satisfazendo a condição de mínimo para ideais à esquerda é a soma direta de ideais à esquerda minimais.*

Prova. Este teorema é obviamente válido para a álgebra nula (álgebra que contém apenas o elemento 0). Considere então uma álgebra  $A$  distinta da álgebra nula e  $L_1$  um ideal à esquerda minimal distinto do ideal nulo (ideal que contém apenas o elemento 0). Pelos dois últimos lemas, temos que

$$A = L_1 \oplus L'.$$

Se  $L'$  não é um ideal nulo, encontraremos em  $L'$  um ideal à esquerda minimal  $L_2$  distinto do ideal nulo; então, novamente, pelos dois lemas anteriores

$$A = L_2 \oplus L^*,$$

em que  $L^*$  é outro ideal à esquerda. Se aplicarmos este procedimento nos elementos de  $L'$  temos

$$L' = L_2 \oplus L'',$$

$$A = L_1 \oplus L_2 \oplus L''.$$

Mais uma vez, se  $L'' \neq (0)$ , encontraremos em  $L''$  um ideal à esquerda minimal  $L_3 \neq 0$  e portanto

$$A = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus L'';$$

etc. A série  $A \supset L' \supset L'' \supset L''' \supset \dots$  deve conter um ideal à esquerda minimal pela condição de mínimo. Se denominarmos este de  $L_n$  e continuarmos a decomposição, obteremos

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n,$$

o que prova o teorema. ■

**Teorema 5** *Se uma álgebra  $A$  com identidade é a soma direta de  $n$  ideais à esquerda*

$$A = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n,$$

*e existe, em particular, para a identidade a representação*

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n;$$

*então*

$$\begin{aligned} L_i &= A\varepsilon_i, \\ \varepsilon_i^2 &= \varepsilon_i, \\ \varepsilon_i\varepsilon_j &= 0, \text{ para } i \neq j. \end{aligned}$$

Prova. Para todo  $a$  em  $I_1$ , temos

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 = a\varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + \dots + a\varepsilon_n \\ a &= a + 0 + \dots + 0. \end{aligned}$$

Desde que a soma é direta

$$a\varepsilon_1 = a, \quad a\varepsilon_2 = 0, \quad a\varepsilon_n = 0.$$

Em particular, para  $a = \epsilon_1$ , encontramos

$$\epsilon_1^2 = \epsilon_1, \quad \epsilon_1\epsilon_2 = 0, \dots, \epsilon_1\epsilon_n = 0.$$

Similarmente, visto que não existe índice preferencial, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_i^2 &= \epsilon_i, \\ \epsilon_i\epsilon_k &= 0, \quad \text{para } i \neq k. \end{aligned}$$

Consequentemente, a equação  $a\epsilon_1 = a$  mostra que todo  $a$  de  $I_1$  pode ser escrito na forma  $a\epsilon_1$ . Logo

$$I_1 = A\epsilon_1,$$

e analogamente, em geral

$$I_i = A\epsilon_i.$$

■

Se  $V$  é um espaço vetorial sobre um corpo  $K$ . O conjunto de todas as transformações lineares de  $V$  em  $V$  é denominado conjunto dos endomorfismos de  $V$  e é denotado por  $End_k(V)$ .

**Definição 6** *Seja  $A$  uma álgebra e  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $K$ . Uma aplicação linear  $\rho : A \rightarrow End_k(V)$  satisfazendo  $\rho(1_A) = 1_V$  e  $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b), \forall a, b \in A$ , é chamada de uma  $K$ -representação de  $A$ . O espaço vetorial  $V$  é chamado de espaço de representação de  $A$ ; ou seja, uma representação de  $A$  é um homomorfismo no  $End_k(V)$  para algum  $V$  e  $K$ .*

Duas representações  $\rho_1 : A \rightarrow End_k(V_1)$  e  $\rho_2 : A \rightarrow End_k(V_2)$  são equivalentes se existir um  $K$ -isomorfismo  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  satisfazendo  $\rho_2(a) = \phi \circ \rho_1(a) \circ \phi^{-1}, \forall a \in A$ . Uma representação é dita fiel se  $\ker \rho = 0$  (denotamos por  $\ker \rho$ , o núcleo de  $\rho$ , ou seja, o conjunto dos elementos de  $\rho$  que são levados em  $0 \in End_k(V)$ ). Uma representação é irredutível ou simples se os únicos sub-espços invariantes de  $\rho(a), \forall a$ , são  $V$  e  $\{0\}$ . Ela é dita redutível ou semi-simples se  $V = V_1 \oplus V_2$  onde  $V_1$  e  $V_2$  são sub-espços invariantes pela ação de  $\rho(a), \forall a \in A$ .

**Teorema 6** *Todas as representações irredutíveis de uma álgebra simples são equivalentes.*

Sendo  $A$  uma álgebra, existe, naturalmente, uma estrutura de espaço vetorial subjacente, e por conseguinte podemos construir representações dessa álgebra através do conjunto dos endomorfismos  $End(A)$ . Esta representação  $L : A \rightarrow End(A)$  definida por

$$L(a)b = ab, \quad \forall b \in A,$$

é denominada representação regular. Podemos também definir  $R : A \rightarrow End(A)$  como

$$R(a)b = ba, \quad \forall b \in A.$$

Nota-se facilmente que  $R$  é uma representação da álgebra oposta  $A^{op}$ . Suponhamos agora que existem sub-espços  $B_1$  e  $B_2$  de  $A$  que são invariantes pela representação regular, ou seja,  $L(a)(B_1) \subset B_1$  e  $L(a)(B_2) \subset B_2$ ,  $\forall a \in A$ . Podemos então escrever  $L$  como  $L = L_1 \oplus L_2$  onde  $L_1 : A \rightarrow End(B_1)$  e  $L_2 : A \rightarrow End(B_2)$ . Existindo outros sub-espços invariantes por  $L_1$  e  $L_2$ , continuamos o raciocínio acima até obtermos um espaço  $S$  e uma representação  $L : A \rightarrow End(S)$  tal que os únicos sub-espços invariantes são  $S$  e  $\{0\}$ . Esta representação é então irredutível. O espaço  $S$  é tal que  $L(a)(S) \subset S$ ,  $\forall a \in A$ . Logo,  $S$ , por definição, é um ideal à esquerda minimal da álgebra. Em outras palavras, o espaço de representação associado a uma representação regular irredutível corresponde a um ideal à esquerda minimal da álgebra. Podemos desenvolver um raciocínio análogo para a representação  $R$  da álgebra oposta  $A^{op}$ , obtendo um ideal à direita minimal.

Apresentaremos a seguir os lemas de Schur [73, 74, 75, 76, 77, 78], da teoria de representação de grupos finitos, com uma adaptação para álgebras

**Lema 5** *Qualquer matriz  $C$  que comuta com todas as matrizes de uma representação unitária irredutível  $D$  de uma álgebra  $A$  de dimensão finita é uma matriz escalar (uma matriz múltipla da matriz identidade).*

Prova. Por hipótese

$$D(a)C = CD(a), \quad (2.4)$$

para todos os elementos  $a$  da álgebra. A adjunta desta equação é

$$C^\dagger D^\dagger(a) = D^\dagger(a)C^\dagger. \quad (2.5)$$

Multiplicando por  $D(a)$  pela esquerda e pela direita

$$D(a)C^\dagger = C^\dagger D(a), \quad (2.6)$$

indicando que  $C^\dagger$  também comuta com todas as matrizes da representação. Das equações (2.4) e (2.5) temos que as matrizes hermitianas

$$\begin{aligned} H_1 &= C + C^\dagger, \\ H_2 &= i(C - C^\dagger), \end{aligned} \quad (2.7)$$

também comutam com as mesmas matrizes. Por conseguinte, se as matrizes hermitianas  $H_1$  e  $H_2$  que comutam com todas as matrizes  $D(a)$  forem matrizes escalar, a matriz  $C = (H_1 - i H_2)$  também é escalar como consequência. Considere então uma matriz hermitiana  $H$  com tal propriedade ( $D(a)H = HD(a)$ ). Sendo  $U$  uma matriz unitária que diagonaliza  $H$  e transforma  $D(a)$  em  $D'(a)$ , isto é  $\Lambda = UHU^{-1}$  e  $D'(a) = UD(a)U^{-1}$ , então

$$D'(a)\Lambda = \Lambda D'(a), \quad (2.8)$$

visto que as equações são invariantes por transformações de similaridade. O elemento  $\mu\nu$  em ambos os membros da equação acima é

$$D'(a)_{\mu\nu}\lambda_{\nu\nu} = \lambda_{\mu\mu}D'(a)_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

que pode ser reescrita como

$$D'(a)_{\mu\nu}(\lambda_{\nu\nu} - \lambda_{\mu\mu}) = 0. \quad (2.10)$$

Se  $\lambda_{\nu\nu} \neq \lambda_{\mu\mu}$ , então  $D'(a)_{\mu\nu} = 0$  para todo elemento  $a$  da álgebra e as matrizes  $D(a)$  são redutíveis, o que contraria a hipótese. Portanto,  $\lambda_{\nu\nu} = \lambda_{\mu\mu}$  para todo  $\mu$  e  $\nu$ , e a matriz  $\Lambda$  é uma matriz escalar. Realizando uma transformação inversa em  $\Lambda$ , temos

$$H = U^{-1}\Lambda U = U^{-1}\lambda IU = \lambda I,$$

o que implica que a matriz original  $H$  também é um escalar. Como  $C$  é uma combinação linear de matrizes hermitianas, o lema está demonstrado. ■

**Lema 6** *Considere  $A(s)$  e  $B(s)$  dois sistemas irredutíveis de transformações lineares nos espaços vetoriais  $R_n$  e  $S_m$  dependendo de um mesmo parâmetro  $s$ . Suponha que existe uma matriz retangular  $n \times m$  para a qual a aplicação linear  $y = Tx$  de  $R_n$  em  $S_m$  transforma-se como  $A(s)x$  em  $B(s)y$ , isto é, para todo  $s$*

$$TA(s) = B(s)T.$$

*Então  $T = 0$ , ou  $T$  é não singular; neste último caso  $n = m$  e  $A(s)$  e  $B(s)$  são equivalentes.*

Prova. Seja  $r$  o posto ( número máximo de linhas linearmente independentes) de  $T$ . 1) A imagem  $Tx$  forma um subespaço  $S$  de dimensão  $r$ , que por hipótese é invariante sob  $B(s)$ . Desde que  $B(s)$  é irredutível,  $S = 0$  (então  $r = 0$  e  $T = 0$ ) ou  $S = S_m$  (então  $r = m$  e  $n \geq m$ ). 2. Os vetores  $x$  para os quais  $Tx = 0$  constituem um subespaço linear  $R$  de  $R_n$  com dimensão  $n - r$  que é invariante por  $A(s)$  por hipótese. Desde que  $A(s)$  é irredutível,  $R = R_n$  (então  $r = 0$  e  $T = 0$ ) ou  $r = 0$  (então  $r = n$  e  $m \geq n$ ). Logo  $T = 0$  ou  $r = n = m$  e  $T$  é não singular. ■

Um mapeamento de equivalência entre dois ideais à esquerda  $L$  e  $L'$  é uma aplicação linear injetiva que comuta com a multiplicação pela esquerda: se  $x$  é mapeado em  $x'$  então  $ax$  deverá ser mapeado em  $ax'$ , isto é,  $(ax)' = ax'$ . Uma transformação linear com tal propriedade é a multiplicação à direita  $x' = xb$ . Com efeito,  $(ax)b = a(xb)$ . O teorema a seguir garante que todo mapeamento de equivalência entre ideais à esquerda é uma multiplicação pela direita.

**Teorema 7** *Se os ideais  $I$  e  $I'$  são equivalentes, então todo mapeamento de equivalência de  $I$  em  $I'$  é dado por uma multiplicação à direita  $x' = xb$ .*

**Teorema 8** *Sejam  $L$  e  $L'$  ideais à esquerda minimais gerados por  $\varepsilon$  e  $\varepsilon'$ , respectivamente. Então toda multiplicação à direita com qualquer elemento na forma  $\varepsilon x \varepsilon' \neq 0$  define um mapeamento de equivalência entre  $L$  e  $L'$ .*

**Teorema 9** *Dois ideais à esquerda minimais  $L$  e  $L'$  gerados respectivamente por  $\varepsilon$  e  $\varepsilon'$  são equivalentes se, e somente se existem elementos  $\varepsilon x \varepsilon' \neq 0$  não nulos, para  $x \in A$ . Os mapeamentos de equivalência são dados pela multiplicação à direita por estes elementos.*

**Teorema 10** *Se  $\varepsilon$  é um idempotente primitivo, então todos os elementos  $\varepsilon x \varepsilon$  são múltiplos numéricos  $\zeta \varepsilon$  de  $\varepsilon$ . Inversamente, se  $\varepsilon$  é um idempotente e  $\varepsilon x \varepsilon = \zeta \varepsilon$  para todo  $x$ , então  $\varepsilon$  é primitivo.*

Prova. 1. Uma vez que  $\varepsilon$  é primitivo,  $A\varepsilon$  é minimal. Consequentemente os elementos  $\varepsilon x \varepsilon \neq 0$  realizam um mapeamento de equivalência do ideal  $L$  em si próprio, sendo este uma coleção de transformações lineares em  $L$ , que designaremos por  $T$ . Elementos distintos produzem transformações distintas, pois  $\varepsilon$  é transformado em  $\varepsilon x \varepsilon$ . Desde que  $\varepsilon$  reproduz os elementos de  $L$ , os múltiplos numéricos  $\zeta \varepsilon = \varepsilon \cdot \zeta 1 \cdot \varepsilon$  correspondem aos múltiplos  $\zeta 1$  da matriz unidade. Sendo este um mapeamento de equivalência, toda transformação de  $T$  comuta com todas as outras transformações das representações irredutíveis dadas por  $L$ , e pelo primeiro lema de Schur são múltiplas da matriz unidade.

2. Considere  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 = 0$ . Então  $\varepsilon \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \varepsilon = \varepsilon_1$  e  $\varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon = \varepsilon_1$ . Desde que todos os elementos  $\varepsilon x \varepsilon$  são múltiplos numéricos de  $\varepsilon$ , temos  $\varepsilon_1 = \lambda \varepsilon$ . Este é um idempotente somente para  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ ; por conseguinte não existe a decomposição e  $\varepsilon$  é primitivo. ■

## 2.2 Álgebras de Clifford e Álgebras de Lie

Uma álgebra de interesse em mecânica quântica é a álgebra de Clifford, cuja definição é dada a seguir

**Definição 7** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $K$  equipado com uma forma bilinear simétrica  $g$ . Seja  $A$  uma álgebra associativa com unidade  $1_A$  e seja a aplicação linear  $\gamma : V \rightarrow A$ . Então, o par  $(A, \gamma)$  é uma álgebra de Clifford para o espaço  $(V, g)$  quando  $A$  é gerada como uma álgebra por  $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$  e  $\{a1_A \mid a \in R\}$  e  $\gamma$  satisfaz*

$$\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})1_A, \quad (2.11)$$

para todo  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ .

Podemos também definir, de uma forma mais abstrata, uma álgebra de Clifford como a álgebra quociente

$$Cl(V, g) = T(V)/I(V, g), \quad (2.12)$$

em que  $I(V, g)$  é um ideal na álgebra tensorial  $T(V)$  gerada por elementos da forma  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - g(\mathbf{v}, \mathbf{v})1_{T(V)}$ ,  $\mathbf{v} \in V$ . Um exemplo de álgebra de Clifford é a álgebra de Dirac

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

em que  $\eta^{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski com assinatura  $(+ - - -)$ . Uma representação para esta álgebra é dada pelas matrizes

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uma representação mais sintética, em termos das matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

é dada por

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

com  $i = 1, 2, 3$ . Para álgebras de Clifford da forma  $Cl(n) \equiv Cl(n, 0)$  é possível encontrar representações tendo em vista dois casos

a)  $n = 2\nu$

Para  $j = 1, 2, \dots, \nu$  tomemos

$$\begin{aligned} \rho_j &= \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \\ \theta_j &= \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \end{aligned}$$

onde os fatores  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  ocorrem na  $j$ -ésima posição, com  $j - 1$  fatores  $\sigma_3$  anteriores e  $\nu - j$  fatores 1 posteriores. Com a identificação

$$\gamma_{2j-1} \rightarrow \rho_j, \quad \gamma_{2j} \rightarrow \theta_j,$$

temos uma representação de  $C_{2\nu}$  de ordem  $2^\nu$ .

b)  $n = 2\nu + 1$

Neste caso temos uma representação para  $C_{2\nu+1}$  de posse da seguinte associação

$$\gamma_{2j-1} \rightarrow \rho_j, \quad \gamma_{2j} \rightarrow \theta_j \quad (j = 1, \dots, \nu), \quad \gamma_n \rightarrow \tau_0,$$

em que

$$\tau_0 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3 \quad (\nu \text{ fatores}).$$

Uma segunda representação não equivalente é dada por

$$\gamma_{2j-1} \rightarrow -\rho_j, \quad \gamma_{2j} \rightarrow \theta_j \quad (j = 1, \dots, \nu), \quad \gamma_n \rightarrow -\tau_0.$$

De posse desses resultados, é possível provar o seguinte teorema [79]

**Teorema 11** *Toda representação de uma álgebra de Clifford  $Cl(n)$  é completamente redutível. Para  $n = 2\nu$  temos uma única representação irredutível que é isomórfica a uma álgebra matricial  $M_{2\nu}$  (álgebra de dimensão  $2\nu \times 2\nu$ , com  $\nu \in \mathbb{N}$ ). Para  $n$  ímpar,  $n = 2\nu + 1$ , existem duas representações irredutíveis não equivalentes de dimensão  $2^\nu$ ;  $Cl(n)$  é isomórfica a soma direta de duas álgebras matriciais  $M_{2^\nu}$ .*

Outra álgebra de grande relevância para a Física é a álgebra de Lie [80, 81, 82, 83, 84, 85, 86], que consiste de um espaço vetorial  $g$  munido de um produto (colchete ou comutador)

$$[ \ , \ ] : g \times g \rightarrow g,$$

com as seguintes propriedades:

1. é bilinear,
2. anti-simétrico, ou seja,  $[X, X] = 0$  para todo  $X \in g$ , o que implica  $[X, Y] = -[Y, X]$ , para todo  $X, Y \in g$ .
3. satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo  $X, Y, Z \in g$ ,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0. \quad (2.16)$$

Três exemplos bastante comuns são

1.  $gl(n, \mathbf{K})$ : a álgebra de Lie do conjunto de todas as transformações lineares invertíveis de dimensão  $n$  sobre um corpo  $K$ . O comutador é dado por

$$[X, Y] = XY - YX, \quad (2.17)$$

com  $X$  e  $Y$  elementos pertencentes a  $gl(n, \mathbf{K})$ .

2.  $u(n) = \left\{ X \in gl(n, \mathbf{C}) : X + \bar{X}^t = 0 \right\}$  em que  $\bar{X}$  é a matriz obtida de  $X$  pela conjugação de seus elementos e  $\bar{X}^t$  é a transposta de  $\bar{X}$ .

3.  $su(n) = \{ X \in u(n) : tr X = 0 \}$ .

A relação característica para uma álgebra de Lie é dada por

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k.$$

As álgebras de Lie são de capital importância no estudo das simetrias dos sistemas físicos na medida em que possibilitam um conhecimento mais substancial dos grupos de Lie. Estes são objetos matemáticos que possuem concomitantemente propriedades algébricas (grupos), topológicas (espaços topológicos) e geométricas (variedades diferenciáveis), formando uma área de confluência entre álgebra, topologia e geometria. Com o fito de definir rigorosamente um grupo de Lie, considere inicialmente as definições a seguir.

**Definição 8** *Uma topologia num conjunto  $X$  é uma coleção  $F$  de partes de  $X$ , chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:*

- (i)  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $F$ ;
- (ii) Se  $A_1, \dots, A_n \in F$  então  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in F$ ;
- (iii) Dada uma família arbitrária  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  com  $A_\lambda \in F$  para cada  $\lambda \in L$ , tem-se  $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in F$ .

**Definição 9** *Um espaço topológico é um par  $(X, F)$  onde  $X$  é um conjunto e  $F$  é uma topologia em  $X$ .*

**Definição 10** *Um espaço topológico  $X$  chama-se um espaço de Hausdorff quando, para cada par de pontos distintos  $x, y$  em  $X$ , existem abertos  $U$  e  $V$ , tais que  $x \in U, y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .*

**Definição 11** *Uma variedade diferenciável  $M$  consiste de*

- (i) Um espaço de Hausdorff  $(X, F)$ .
- (ii) Uma coleção de mapeamentos  $\phi_p \in \Phi$ :

$$\phi_p : X \rightarrow \mathbb{R}_n, \quad p \in X,$$

tais que obedecem às seguintes propriedades

$M_1$ )  $\phi_p$  é um mapeamento bijetivo de um conjunto aberto  $X_p$  ( $p \in X_p$ ) em um conjunto aberto em  $\mathbb{R}_n$ .

$M_2$ )  $\cup X_p = X$ .

$M_3$ ) Se  $X_p \cap X_q$  é não vazio, então  $\phi_p(X_p \cap X_q)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}_n$  e  $\phi_q(X_p \cap X_q)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}_n$  que é distinto de  $\phi_p(X_p \cap X_q)$ . O mapeamento  $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$  deve ser contínuo e diferenciável.

$M_4$ ) Os mapeamentos  $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$  e  $\phi_q \circ \phi_p^{-1}$  descritos em  $M_3$  são mapeamentos em  $\Phi$ .

Finalmente passemos à definição de um grupo de Lie

**Definição 12** *Um grupo de Lie é um conjunto  $G$  dotado simultaneamente de uma estrutura algébrica de grupo e de variedade  $C^\infty$  compatíveis entre si, isto é, as aplicações de multiplicação e inversão que dão a  $G$  a estrutura de grupo,*

$$\cdot : G \times G \rightarrow G,$$

$$\iota : G \rightarrow G,$$

*são aplicações infinitamente diferenciáveis.*

Exemplos de grupos de Lie são:

- 1) O grupo linear geral  $GL(n, \mathbb{R})$  das matrizes reais invertíveis.
- 2) O grupo unitário  $U(n)$  consistindo de matrizes unitárias  $n \times n$  com elementos pertencentes a  $\mathbb{C}$ .
- 3) O grupo especial unitário  $SU(n)$  que corresponde ao subgrupo de  $U(n)$  cujas matrizes possuem determinante unitário.

Não existe uma bijeção entre grupos de Lie e álgebras de Lie. À uma única álgebra de Lie podemos ter vários grupos de Lie associados; todavia existe um único grupo de Lie simplesmente conexo, denominado grupo universal de cobertura. A conexão entre os grupos de Lie e as álgebras de Lie se dá através do mapeamento exponencial:

$$\alpha^\mu X_\mu \rightarrow \exp(-\alpha^\mu X_\mu),$$

onde  $\alpha^\mu$  são parâmetros e  $X_\mu$  são os geradores da álgebra de Lie. O teorema de Taylor para grupos de Lie assegura tal possibilidade; entretanto não assegura que podemos obter todos os elementos de um dado grupo de Lie pelo mapeamento exponencial de algum elemento da álgebra de Lie correspondente. Para grupos de Lie compactos pode ser demonstrado essa obtenção é sempre possível.

É salutar observar que as álgebras de Lie não são necessariamente associativas. De forma análoga às álgebras associativas lineares, pode-se também classificar as álgebras de Lie como não semi-simples, semi-simples e simples. Dada uma álgebra de Lie  $g$ , os subespaços

$$\begin{aligned} g^{(0)} &= g, \\ g^{(1)} &= [g, g], \\ g^{(2)} &= [g^{(1)}, g^{(1)}], \\ &\vdots \\ g^{(k)} &= [g^{(k-1)}, g^{(k-1)}], \end{aligned}$$

são ideais de  $g$ . A notação acima é baseada nas referências [83, 86] e  $[ , ]$  indica que devemos calcular o comutador de todos os elementos base da álgebra entre si. Esta sequência de ideais é chamada série derivada de  $g$  e suas componentes são as álgebras derivadas de  $g$ .

**Definição 13** *Uma álgebra de Lie  $g$  é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é,*

$$g^{(k_0)} = 0,$$

*para algum  $k_0 \geq 1$  (e, portanto,  $g^{(k)} = 0$  para todo  $k \geq k_0$ ).*

**Teorema 12** *Seja  $g$  uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então existe um único ideal solúvel  $\tau \subset g$  que contém todos os ideais solúveis de  $g$ . Tal ideal é chamado de radical de  $g$ .*

Podemos agora definir uma álgebra de Lie semi-simples

**Definição 14** *Uma álgebra de Lie é semi-simples se  $\tau(g) = 0$ , ou seja,  $g$  não contém ideais solúveis além de 0.*

Considerando que a representação adjunta é tal que  $ad : X \rightarrow [X, Y]$ , onde  $X, Y \in g$ , temos para a base  $\{X_i\}$  que

$$ad : X_i \rightarrow [X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k,$$

ou simplesmente

$$adX_i(X_j) = \sum_k c_{ij}^k X_k,$$

em que para cada elemento base  $X_i$  devemos calcular o comutador com todos os elementos base  $X_j$ . Consequentemente a matriz associada à transformação  $adX_i$  é

$$(M_i)_{jk} = c_{ik}^j.$$

**Definição 15** *A forma de Killing de uma álgebra de Lie é a forma bilinear simétrica*

$$K(X, Y) = Tr(adXadY).$$

*Sendo  $\{X_i\}$  uma base de  $g$ ,*

$$g_{ij} = K(X_i, X_j) = \sum_{r,s} c_{is}^r c_{jr}^s,$$

*com  $g_{ij}$  o tensor métrico de  $g$ .*

**Teorema 13** *Uma álgebra de Lie  $g$  é semi-simples se e somente se sua forma de Killing é não degenerada, ou seja,  $\det \|g_{ij}\| \neq 0$ .*

Um outro ente de grande relevância na teoria das álgebras de Lie que possui um papel fundamental em mecânica quântica é o operador de Casimir. Para uma representação  $\rho$  de uma álgebra de Lie semi-simples o operador de Casimir é dado por

$$C_\rho = g^{ij} X_i X_j,$$

em que  $g^{ij}$  é a inversa da matriz  $g_{ij}$ . A importância do operador de Casimir reside no fato de que ele comuta com todos os geradores de uma dada representação e pelo lema de Schur caracteriza uma representação irredutível do grupo de simetria do sistema físico associado.

## 2.3 Mecânica Quântica Algébrica

Na mecânica quântica algébrica proposta por Frescura e Hiley, na referência [53], os kets são identificados com elementos de ideais à esquerda minimais de uma álgebra  $A$  semi-simples equipada com uma involução. A fim de compreender a motivação para esta identificação, note inicialmente que um elemento arbitrário de um ideal à esquerda minimal de uma álgebra  $A$  pode ser escrito na forma

$$\psi = a\varepsilon, \tag{2.18}$$

em que  $a$  é um elemento arbitrário da álgebra e  $\varepsilon$  é um idempotente primitivo. Considere agora uma base matricial  $\varepsilon_{ij}$  para uma álgebra  $A$ . Visto que  $\varepsilon$  é um idempotente primitivo, sempre podemos escolher uma base  $\{\varepsilon_{ij}\}$  tal que  $\varepsilon = \varepsilon_{kk}$  para algum  $k$  fixo. Temos então que

$$\psi = \sum_{ij} (\alpha_{ij} \varepsilon_{ij}) \varepsilon_{kk} = \sum_i \alpha_{ik} \varepsilon_{ik} = \sum_i \psi_i \varepsilon_{ik}, \tag{2.19}$$

onde  $\alpha_{ij}$  são coeficientes pertencentes ao corpo dos complexos e  $\varepsilon_{ij}$  é uma matriz tal que o elemento  $ij$  possui valor 1 e os demais elementos nulos. Na última igualdade o coeficiente  $\alpha_{ik}$  foi substituído por  $\psi_i$ , com o índice  $k$  omitido, tendo em vista que  $k$  é

fixo. Esta é a forma de um vetor de estado. Se  $i$  e  $j$  são índices que variam continuamente, os coeficientes  $\psi_i$  correspondem às funções de onda  $\psi(x)$ . Analogamente, os bra's podem ser escritos como elementos de ideais à direita minimais

$$\psi^* = \varepsilon a^*, \quad (2.20)$$

em que  $a^* \in A$ . Podemos definir o valor médio de um operador  $O$  em termos de um funcional  $\omega$  como

$$\langle O \rangle = \omega(\psi^* O \psi) = \omega(O \psi \psi^*) = \omega(O \rho) = \omega(\rho O), \quad (2.21)$$

em que  $\rho = \psi \psi^*$ , sujeito à condição  $\omega(\rho) = 1$  e à positividade  $\omega_\psi(\rho) \geq 0$ , corresponde a um operador densidade. Explicitamente, temos

$$\rho = \psi \psi^* = a \varepsilon \varepsilon a^* = a \varepsilon a^*, \quad (2.22)$$

correspondendo a um elemento de um ideal bilateral da álgebra  $A$ . Para estados mistos

$$\langle O \rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i \omega_i(\psi_i O \psi_i^*) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \omega(\rho_i O), \quad (2.23)$$

em que  $r$  é o número de idempotentes primitivos da álgebra e

$$\rho_i = \psi_i \psi_i^* = a \varepsilon_i \varepsilon_i a^* = a \varepsilon_i a^*,$$

onde  $\varepsilon_i$  caracteriza um idempotente primitivo da álgebra (não estamos nos referindo a uma representação matricial). O operador densidade então assume a forma

$$\rho = \sum_{i=1}^r \lambda_i \psi_i \psi_i^* = \sum_{i=1}^r \left( \sqrt{\lambda_i} \psi_i \right) \left( \sqrt{\lambda_i} \psi_i^* \right). \quad (2.24)$$

Notemos também que como os elementos de ideais à esquerda minimais correspondem ao espaço de representação associado a uma representação regular irreduzível da álgebra [39], identificá-los como kets significa colocar em um mesmo patamar estados e operadores.

A algebrização da teoria quântica visa identificar estruturas matemáticas que contenham as propriedades essenciais da teoria. Considera-se tais estruturas como noções primárias, enquanto que os entes utilizados nas formulações convencionais como a função de onda, por exemplo, são considerados realizações dessas estruturas. Espera-se com isso superar algumas das limitações dos espaços de representação e melhor caracterizar as semelhanças e as diferenças da teoria quântica com a clássica. No próximo capítulo apresentaremos uma formulação para a Informação Quântica, seguindo a proposta aqui desenvolvida, com base nos objetos descritos anteriormente numa tentativa de vislumbrar vantagens operacionais sobre a formulação de espaço de Hilbert, explorando assim uma formulação que independe da estrutura de espaço de Hilbert.

## Capítulo 3

# Formulação Algébrica Multipartite

Vimos no capítulo precedente que a mecânica quântica pode ser formulada numa linguagem algébrica sem a necessidade de uma estrutura dicotômica dos estados como elementos de um espaço de Hilbert e de observáveis como operadores que atuam sobre os estados no espaço de Hilbert. Nosso intento aqui é estender essa construção para a informação quântica e a computação quântica descrevendo sistemas quânticos multipartites. Tendo em vista que uma álgebra abstrata compõe a arena onde ocorrem os fenômenos físicos, propomos que, objetivando tratar de sistemas compostos, devemos tomar uma álgebra produto, construída a partir do produto tensorial de álgebras. Esta, na nossa visão, compõe a arena natural para a descrição dos fenômenos quânticos multipartites, guardando certa analogia com a formulação convencional, onde os estados quânticos de sistemas compostos são elementos de um produto tensorial de espaços de Hilbert.

Dessa forma, seguindo o desenvolvimento algébrico apresentado no capítulo anterior e fazendo uso do produto tensorial de ideais à esquerda minimais, representando os estados quânticos multipartites, construiremos uma formulação algébrica multipartite [54] eficiente para a teoria da computação quântica e da informação quântica. Tal formulação apresenta vantagens operacionais e interpretativas acerca da teoria. Essa expectativa parece razoável tendo em vista que a estrutura de álgebra é mais rica que

a de espaço vetorial, possuindo um número maior de operações e como foi indicado anteriormente, permite descrever entes fundamentais da mecânica quântica. Ademais, as álgebras de Clifford aparecem de uma forma bastante natural na computação quântica e na informação quântica através das matrizes de Pauli, representando operações que podem ser realizadas sobre os qubits.

Neste capítulo, aspectos formais serão enfatizados, fornecendo uma estrutura matemática rigorosa para os desenvolvimentos posteriores, onde tais resultados abstratos serão aplicados.

### 3.1 Representações de Álgebras

Considere inicialmente alguns resultados matemáticos acerca de álgebras associativas equipadas com uma involução denotada pelo símbolo  $(*)$ .

**Lema 7** *Sejam  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  idempotentes primitivos nas álgebras  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente, sobre um corpo  $K$ . Então  $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$  é um idempotente primitivo na álgebra  $A_1 \otimes A_2$ .*

Prova. ·Idempotência:  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  satisfazem  $(\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1)$  e  $(\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2)$ . Consequentemente  $(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2) = (\varepsilon_1 \varepsilon_1) \otimes (\varepsilon_2 \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ .

·Primitividade: Um idempotente  $\varepsilon$  é dito ser primitivo se  $\varepsilon A \varepsilon = k \varepsilon$ , para  $k \in K$ . Os idempotentes  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são primitivos, isto é, eles satisfazem  $\varepsilon_1 A_1 \varepsilon_1 = k \varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2 A_2 \varepsilon_2 = l \varepsilon_2$ , para  $k, l \in K$ . Então para  $\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ , é fácil verificar que

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2)(A_1 \otimes A_2)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2) &= (\varepsilon_1 A_1 \otimes \varepsilon_2 A_2)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2) \\ &= \varepsilon_1 A_1 \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 A_2 \varepsilon_2 \\ &= c \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \end{aligned}$$

em que  $c = kl \in K$ . ■

Os resultados do lema 1 podem ser generalizados para  $n$  produtos tensoriais em  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$ .

**Lema 8** *Sejam  $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_n}$  idempotentes primitivos nas álgebras  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente. Então o produto tensorial  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}$  é um idempotente primitivo na álgebra  $\otimes_{i=1}^n A_i$ .*

De posse destes lemas, podemos provar que o produto tensorial de  $n$  ideais à esquerda minimais também é um ideal à esquerda minimal.

**Teorema 14** *Considere  $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_n}$  idempotentes primitivos nas álgebras  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente e  $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_n}$  elementos arbitrários em  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente. Então o produto tensorial  $a_{r_1} \varepsilon_{i_1} \otimes a_{r_2} \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n} \varepsilon_{i_n}$  é um elemento de um ideal à esquerda minimal em  $\otimes_{i=1}^n A_i$ .*

Prova. Simplesmente escrevemos

$$a_{r_1} \varepsilon_{i_1} \otimes a_{r_2} \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n} \varepsilon_{i_n} = (a_{r_1} \otimes a_{r_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n}) (\varepsilon_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}). \quad (3.1)$$

Do lema 2, sabemos que  $\varepsilon_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}$  é um idempotente primitivo em  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$  e desde que  $a_{r_1} \otimes a_{r_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n}$  é um elemento arbitrário de  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$ , segue que  $a_{r_1} \varepsilon_{i_1} \otimes a_{r_2} \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n} \varepsilon_{i_n}$  é um elemento de um ideal à esquerda minimal em  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$ . ■

*Mutatis mutandis*, pode-se demonstrar o seguinte teorema para ideais à direita minimais, lembrando que estamos utilizando álgebras involutivas.

**Teorema 15** *Considere  $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_n}$  idempotentes primitivos nas álgebras  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente e  $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_n}$  elementos arbitrários em  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente. Então o produto tensorial  $\varepsilon_{i_1} a_{r_1}^* \otimes \varepsilon_{i_2} a_{r_2}^* \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n} a_{r_n}^*$  é um elemento de um ideal à direita minimal em  $\otimes_{i=1}^n A_i$ .*

Podemos também estender estes resultados para ideais bilaterais

**Teorema 16** *Sejam  $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_n}$  idempotentes primitivos nas álgebras  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente,  $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_n}$  elementos arbitrários em  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respectivamente e  $a_{r_1}^*, a_{r_2}^*, \dots, a_{r_n}^*$  elementos arbitrários em  $A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*$ , respectivamente. Então o produto tensorial  $a_{r_1} \varepsilon_{i_1} a_{r_1}^* \otimes a_{r_2} \varepsilon_{i_2} a_{r_2}^* \otimes \dots \otimes a_{r_n} \varepsilon_{i_n} a_{r_n}^*$  é um elemento de um ideal bilateral em  $\otimes_{i=1}^n A_i$ .*

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} & a_{r_1} \varepsilon_{i_1} a_{r_1}^* \otimes a_{r_2} \varepsilon_{i_2} a_{r_2}^* \otimes \dots \otimes a_{r_n} \varepsilon_{i_n} a_{r_n}^* \\ &= (a_{r_1} \otimes a_{r_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n}) (\varepsilon_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}) (a_{r_1}^* \otimes a_{r_2}^* \otimes \dots \otimes a_{r_n}^*) \\ &= (a_{r_1} \otimes a_{r_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n}) (\varepsilon_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n}) (a_{r_1} \otimes a_{r_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n})^*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Como  $(a_{r_1} \otimes a_{r_2} \otimes \dots \otimes a_{r_n})$  é um elemento arbitrário em  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$  e  $(\varepsilon_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_n})$  é um idempotente primitivo em  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$ , por conseguinte  $a_{r_1} \varepsilon_{i_1} a_{r_1}^* \otimes a_{r_2} \varepsilon_{i_2} a_{r_2}^* \otimes \dots \otimes a_{r_n} \varepsilon_{i_n} a_{r_n}^*$  é um ideal bilateral em  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n$ . ■

Os resultados apresentados anteriormente permitem caracterizar, em termos algébricos, estados puros e mistos multipartites. Seguiremos agora com alguns resultados acerca da teoria de representação de álgebras que se mostrarão úteis nos capítulos posteriores.

**Teorema 17** *Seja  $A$  uma álgebra e  $D(A)$  uma representação de  $A$ . Notemos os elementos-base de  $A$  por  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . e seja  $D(a_i)$  sua representação matricial. Definamos também  $G_{ij} \equiv \text{Tr}[D(a_i)D(a_j)]$ . Temos que  $A$  é semi-simples se, e somente se  $\det \|D_{ij}\| \neq 0$ .*

**Teorema 18** *Seja  $A$  uma álgebra semi-simples. Então o número de possíveis representações irredutíveis é igual ao número de elementos-base que comutam entre si.*

**Teorema 19** *Seja  $A$  uma álgebra de dimensão  $n$ . Considere  $k$  o número de representações irredutíveis não equivalentes de  $A$  e sejam  $n_1, n_2, \dots, n_k$  suas dimensões, respectivamente. Então  $n = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2$ .*

Os dois primeiros teoremas foram demonstrados por Pauli e Artin [87] e o terceiro por Fröbenius e Schur [87]. Realizaremos aqui uma generalização dos teoremas de Pauli e Artin para o produto tensorial de álgebras.

**Teorema 20** *Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_m$  álgebras semi-simples. Então o produto tensorial  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_m$  também é semi-simples.*

Prova. Considere  $D(A_1), D(A_2), \dots, D(A_m)$  representações de  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , respectivamente. Notemos os elementos-base de  $A_m$  por  $a_{i_m}^m$ , com  $i_m = 1, 2, \dots, n_m$ , e seja  $D(a_{i_m}^m)$  sua representação matricial. Definamos também as quantidades

$$D_{i_m j_m}^m \equiv Tr [D(a_{i_m}^m)D(a_{j_m}^m)] \quad (3.3)$$

e

$$D_{ij}^{1,2,\dots,m} \equiv Tr [D(a_{i_1}^1 \otimes a_{i_2}^2 \otimes \dots \otimes a_{i_m}^m)D(a_{j_1}^1 \otimes a_{j_2}^2 \otimes \dots \otimes a_{j_m}^m)], \quad (3.4)$$

em que a correspondência  $i_1, i_2, \dots, i_m \longrightarrow i$  e  $j_1, j_2, \dots, j_m \longrightarrow j$  é realizada de acordo com a ordem do dicionário para os  $i_m$  e  $j_m$ .

Desenvolvendo esta última expressão, temos

$$\begin{aligned} D_{ij}^{1,2,\dots,m} &= Tr \{ [D(a_{i_1}^1)D(a_{j_1}^1)] \otimes [D(a_{i_2}^2)D(a_{j_2}^2)] \otimes \dots \otimes [D(a_{i_m}^m)D(a_{j_m}^m)] \} \\ &= Tr \{ [D(a_{i_1}^1)D(a_{j_1}^1)] [D(a_{i_2}^2)D(a_{j_2}^2)] \dots [D(a_{i_m}^m)D(a_{j_m}^m)] \} \\ &= D_{i_1 j_1}^1 D_{i_2 j_2}^2 \dots D_{i_m j_m}^m. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que,

$$\begin{aligned} \det \|D_{ij}^{1,2,\dots,m}\| &= \det \|D_{i_1 j_1}^1 D_{i_2 j_2}^2 \dots D_{i_m j_m}^m\| \\ &= \det \|D_{i_1 j_1}^1\| \det \|D_{i_2 j_2}^2\| \dots \det \|D_{i_m j_m}^m\|. \end{aligned}$$

Como  $A_1, A_2, \dots, A_m$  são álgebras semi-simples (por hipótese),  $\det \|D_{i_1 j_1}^1\|, \det \|D_{i_2 j_2}^2\|, \dots, \det \|D_{i_m j_m}^m\|$  são todos não nulos. Consequentemente  $\det \|D_{ij}^{1,2,\dots,m}\| \neq 0$ . Pelo teorema de Pauli-Artin, a álgebra  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_m$  é semi-simples se, e somente se,  $\det \|D_{ij}^{1,2,\dots,m}\| \neq 0$ . Logo  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_m$  é semi-simples. ■

**Corolário 1** *Se pelo menos uma das álgebras  $A_i$  do produto  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_m$ , for simples, a álgebra produto  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_m$  também é simples.*

**Teorema 21** *Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_m$  o número de representações irredutíveis não equivalentes das álgebras  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , respectivamente. Então o número  $M$  de representações irredutíveis não equivalentes da álgebra  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_m$  é dado por  $M = n_1 n_2 \dots n_m$ .*

Prova. Sejam  $b_{i_1}^1, b_{i_2}^2, \dots, b_{i_m}^m$  os elementos-base das álgebras  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , respectivamente, com  $i_1 = 1, 2, \dots, r_1$ ;  $i_2 = 1, 2, \dots, r_2$ ; ...;  $i_m = 1, 2, \dots, r_m$ , em que  $r_1, r_2, \dots, r_m$  são as dimensões das álgebras  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Dentre estes elementos, considere os elementos  $c_{j_1}^1, c_{j_2}^2, \dots, c_{j_m}^m$  que correspondem aos elementos-base que comutam com todos os elementos das respectivas álgebras; ou seja,

$$[b_{i_1}^1, c_{j_1}^1] = [b_{i_2}^2, c_{j_2}^2] = \dots = [b_{i_m}^m, c_{j_m}^m] = 0. \quad (3.5)$$

Um elemento-base na álgebra produto possui a forma  $b_{i_1}^1 \otimes b_{i_2}^2 \otimes \dots \otimes b_{i_m}^m$ . Sejam elementos-base  $x_{j_1}^1 \otimes x_{j_2}^2 \otimes \dots \otimes x_{j_m}^m$  que comutam com todos os elementos, ou seja,

$$[b_{i_1}^1 \otimes b_{i_2}^2 \otimes \dots \otimes b_{i_m}^m, x_{j_1}^1 \otimes x_{j_2}^2 \otimes \dots \otimes x_{j_m}^m] = 0 \quad (3.6)$$

Desenvolvendo esta expressão, temos

$$\begin{aligned} & (b_{i_1}^1 \otimes b_{i_2}^2 \otimes \dots \otimes b_{i_m}^m) (x_{j_1}^1 \otimes x_{j_2}^2 \otimes \dots \otimes x_{j_m}^m) \\ &= (b_{i_1}^1 \otimes b_{i_2}^2 \otimes \dots \otimes b_{i_m}^m) (x_{j_1}^1 \otimes x_{j_2}^2 \otimes \dots \otimes x_{j_m}^m) \\ &= b_{i_1}^1 x_{j_1}^1 \otimes b_{i_2}^2 x_{j_2}^2 \otimes \dots \otimes b_{i_m}^m x_{j_m}^m \\ &= x_{j_1}^1 b_{i_1}^1 \otimes x_{j_2}^2 b_{i_2}^2 \otimes \dots \otimes x_{j_m}^m b_{i_m}^m. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Então, uma condição para que a relação (3.7) seja verificada é que os elementos  $x_{j_m}^m$  comutem com todos os elementos  $b_{i_m}^m$ . Consequentemente  $x_{j_m}^m = c_{j_m}^m$ . Por conseguinte, os elementos-base que comutam com todos os outros possuem a forma  $c_{j_1}^1 \otimes c_{j_2}^2 \otimes \dots \otimes c_{j_m}^m$ . Como o número de representações irredutíveis não equivalentes de uma álgebra

corresponde ao número de elementos-base que comutam com todos os outros, temos que  $j_1 = 1, 2, \dots, n_1$ ;  $j_2 = 1, 2, \dots, n_2$ ; ...;  $j_m = 1, 2, \dots, n_m$ . O número de elementos-base da álgebra produto que comutam com todos os outros elementos será dado então por  $n_1 n_2 \dots n_m$ , que corresponde a todas as combinações possíveis dos produtos tensoriais de  $c_j$ . Logo, o número  $M$  de representações irredutíveis não equivalentes será dado por  $M = n_1 n_2 \dots n_m$ . ■

Os teoremas a seguir guardam uma forte analogia com os teoremas básicos de ortogonalidade [88, 89, 90] da teoria de representações de grupos finitos adaptados para álgebras que satisfazem a relação característica

$$a_x a_y = c_{xy}^z a_z; \quad x, y, z = 1, 2, \dots, d, \quad (3.8)$$

em que todos os elementos-base são invertíveis. Vale ressaltar que a convenção da soma de Einstein não está sendo utilizada. Uma vasta classe de álgebras utilizadas em Física obedecem a relação (3.8). As álgebras de Clifford, a exemplo dos quatérnions e da álgebra de Pauli, são algumas destas.

**Teorema 22** *Seja  $A$  uma álgebra de dimensão  $d$ , com elementos-base invertíveis  $\{a_1, a_2, \dots, a_d\}$  satisfazendo a relação característica (3.8). Considere todas as representações unitárias, irredutíveis não equivalentes desta álgebra. Se  $D^\alpha$  e  $D^\beta$  são duas destas representações de dimensões  $d_\alpha$  e  $d_\beta$ , respectivamente, então*

$$\sum_y D_{ij}^{*\alpha}(a_y) D_{kl}^\beta(a_y) = \frac{d}{d_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (3.9)$$

onde a soma é efetuada sobre todos os elementos-base da álgebra.

Prova. Seja uma matriz  $T$ , cuja dimensão é  $d_\alpha \times d_\beta$ , dada por

$$T = \sum_y D^\beta(a_y) B D^{\dagger\alpha}(a_y), \quad (3.10)$$

onde  $B$  é uma matriz  $d_\beta \times d_\alpha$ , completamente arbitrária. Multiplicando à esquerda por  $D^\beta(a_x)$ ,

$$\begin{aligned}
D^\beta(a_x)T &= \sum_y D^\beta(a_x)D^\beta(a_y)BD^{\dagger\alpha}(a_y) \\
&= \sum_y D^\beta(a_x)D^\beta(a_y)BD^{\dagger\alpha}(a_y)D^{\dagger\alpha}(a_x)D^\alpha(a_x) \\
&= \sum_y D^\beta(a_x a_y)BD^{\dagger\alpha}(a_x a_y)D^\alpha(a_x).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Como  $y$  varia sobre todos os elementos-base e  $x$  é fixo, à medida que  $y$  muda,  $z$  também varia de modo que reescreveremos a relação característica da álgebra como

$$a_x a_y = c_{xy}^z a_{z_y}. \tag{3.12}$$

Substituindo na última equação temos

$$\begin{aligned}
D^\beta(a_x)T &= \sum_y D^\beta(c_{xy}^z a_{z_y})BD^{\dagger\alpha}(c_{xy}^z a_{z_y})D^\alpha(a_x) \\
&= \sum_y c_{xy}^z D^\beta(a_{z_y})B(c_{xy}^z)^* D^{\dagger\alpha}(a_{z_y})D^\alpha(a_x).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Como as representações são unitárias

$$\begin{aligned}
D(c_{xy}^z a_{z_y})D^\dagger(c_{xy}^z a_{z_y}) &= 1, \\
c_{xy}^z D(a_{z_y})(c_{xy}^z)^* D^\dagger(a_{z_y}) &= 1, \\
c_{xy}^z (c_{xy}^z)^* D(a_{z_y})D^\dagger(a_{z_y}) &= 1.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Temos também que  $D(a_{z_y})D^\dagger(a_{z_y}) = 1$ , invocando mais uma vez a unitariedade.

Consequentemente

$$c_{xy}^z (c_{xy}^z)^* = 1. \tag{3.15}$$

Portanto

$$D^\beta(a_x)T = \sum_y D^\beta(a_{z_y})BD^{\dagger\alpha}(a_{z_y})D^\alpha(a_x).$$

Já que para cada  $y$  temos um  $z$  distinto (se fossem iguais, os elementos-base da álgebra seriam linearmente dependentes, uma contradição), percorreremos todos os elementos-base da álgebra; conseqüentemente podemos simplesmente escrever

$$\begin{aligned} D^\beta(a_x)T &= \sum_y D^\beta(a_y)BD^\dagger(a_y)D^\alpha(a_x), \\ D^\beta(a_x)T &= TD^\alpha(a_x), \end{aligned} \quad (3.16)$$

para todo  $x \in 1, \dots, d$ . Então pelo lema de Schur  $T = 0$ , quando  $\alpha \neq \beta$ , isto é,  $D^\alpha$  e  $D^\beta$  não são equivalentes. O elemento  $A_{ki}$  é

$$\sum_y \sum_{m,n} D_{km}^\beta(a_y)B_{mn}D_{ni}^\alpha(a_y^{-1}) = 0, \quad (3.17)$$

onde a unitariedade de  $D(a_y)$  foi utilizada. Uma vez que  $B$  é uma matriz completamente arbitrária, pode ser escolhida convenientemente. Fazendo  $B_{lj} = 1$  e o restante dos seus elementos iguais a zero, a equação anterior resulta em

$$\sum_y D_{kl}^\beta(a_y)D_{ji}^\alpha(a_y^{-1}) = 0; \quad (3.18)$$

e invocando novamente a unitariedade de  $D(a_y)$ , temos

$$\sum_y D_{ij}^{*\alpha}(a_y)D_{kl}^\beta(a_y) = 0. \quad (3.19)$$

Por outro lado, quando  $\alpha = \beta$ , isto é,  $D^\alpha$  e  $D^\beta$  são equivalentes,  $T$  é uma matriz escalar, pelo lema de Schur. Tomando  $T = a\delta_{ki}$ , a expressão (3.10) torna-se

$$\begin{aligned} a\delta_{ki} &= \sum_y \sum_{m,n} D_{km}^\alpha(a_y)B_{mn}D_{ni}^\alpha(a_y^{-1}) \\ &= \sum_y D_{kl}^\alpha(a_y)D_{ji}^\alpha(a_y^{-1}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde foi feita a mesma escolha para  $B$ . Considerando o caso  $k = i$  e somando sobre  $i$  em ambos os membros da equação acima,

$$\begin{aligned}
a \sum_i \delta_{ii} &= ad_\alpha \\
&= \sum_i \sum_y D_{il}^\alpha(a_y) D_{ji}^\alpha(a_y^{-1}) \\
&= \sum_y \sum_i D_{ji}^\alpha(a_y^{-1}) D_{il}^\alpha(a_y) \\
&= \sum_y D_{jl}^\alpha(a_y^{-1} a_y) \\
&= \sum_y D_{jl}^\alpha(e) = d,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

de onde resulta que  $a = d/d_\alpha$ . Assim,

$$\sum_y D_{ij}^{*\alpha}(a_y) D_{kl}^\alpha(a_y) = \frac{d}{d_\alpha} \delta_{ik} \delta_{jl}. \tag{3.22}$$

Combinando os resultados (3.19) e (3.22), temos

$$\sum_y D_{ij}^{*\alpha}(a_y) D_{kl}^\beta(a_y) = \frac{d}{d_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}, \tag{3.23}$$

encerrando a prova do teorema. ■

Podemos encontrar relações de ortogonalidade para situações mais gerais que aquelas apresentadas no teorema anterior. O teorema a seguir exhibe tais condições.

**Teorema 23** *Seja  $A$  uma álgebra de dimensão  $d$  com elementos-base invertíveis  $\{a_1, a_2, \dots, a_d\}$  satisfazendo a relação característica*

$$a_x a_y = \sum_{z=1}^n c_{xy}^z a_z, \tag{3.24}$$

em que  $\sum_{y=1}^n c_{xy}^z c_{xy}^{z'*} = \delta_{zz'}$  é válida para todo  $x$ . Considere todas as representações unitárias irredutíveis e não equivalentes desta álgebra. Se  $D^\alpha$  e  $D^\beta$  são duas destas representações de dimensões  $d_\alpha$  e  $d_\beta$ , respectivamente, então

$$\sum_y D_{ij}^{*\alpha}(a_y) D_{kl}^\beta(a_y) = \frac{d}{d_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}, \tag{3.25}$$

onde a soma é efetuada sobre todos os elementos-base da álgebra.

Prova. Seja uma matriz  $T$ , cuja dimensão é  $d_\alpha \times d_\beta$ , dada por

$$T = \sum_y D^\beta(a_y) B D^{\dagger\alpha}(a_y), \quad (3.26)$$

onde  $B$  é uma matriz  $d_\beta \times d_\alpha$ , completamente arbitrária e a soma é realizada sobre todos os elementos-base. Multiplicando à esquerda por  $D^\beta(a_x)$ ,

$$\begin{aligned} D^\beta(a_x)T &= \sum_y D^\beta(a_x) D^\beta(a_y) B D^{\dagger\alpha}(a_y) \\ &= \sum_y D^\beta(a_x) D^\beta(a_y) B D^{\dagger\alpha}(a_y) D^{\dagger\alpha}(a_x) D^\alpha(a_x) \\ &= \sum_y D^\beta(a_x a_y) B D^{\dagger\alpha}(a_x a_y) D^\alpha(a_x) \\ &= \sum_y D^\beta \left( \sum_z c_{xy}^z a_z \right) B D^{\dagger\alpha} \left( \sum_{z'} c_{xy}^{z'} a_{z'} \right) D^\alpha(a_x) \\ &= \sum_y \sum_{z, z'} c_{xy}^z c_{xy}^{z'*} D^\beta(a_z) B D^{\dagger\alpha}(a_{z'}) D^\alpha(a_x) \\ &= \sum_{zz'} \left( \sum_y c_{xy}^z c_{xy}^{z'*} \right) D^\beta(a_z) B D^{\dagger\alpha}(a_{z'}) D^\alpha(a_x) \\ &= \sum_{zz'} \delta_{zz'} D^\beta(a_z) B D^{\dagger\alpha}(a_{z'}) D^\alpha(a_x) \\ &= \sum_{z'} D^\beta(a_z) B D^{\dagger\alpha}(a_{z'}) D^\alpha(a_x). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Daqui em diante a demonstração é completamente análoga à do teorema anterior. ■

Esta condição sobre a relação característica da álgebra também assegura a existência de uma representação unitária equivalente a toda representação da álgebra. O seguinte teorema garante tal assertiva.

**Teorema 24** *Toda representação de uma álgebra associativa  $A$  de dimensão finita, em que todos os elementos base são invertíveis e os coeficientes da relação característica satisfazem a relação*

$$\sum_{y=1}^n c_{xy}^z c_{xy}^{z'*} = \delta_{zz'} \quad (3.28)$$

*é equivalente a uma representação unitária.*

Prova. Sejam  $\{a_1, a_2, \dots, a_d\}$  os elementos-base da álgebra e considere a seguinte matriz hermitiana

$$F = \sum_y D(a_y) D^\dagger(a_y), \quad (3.29)$$

onde a soma é realizada sobre todos os elementos-base. Toda matriz hermitiana pode ser diagonalizada por intermédio de uma matriz unitária  $U$ . Então

$$\begin{aligned} \Lambda &= U \sum_y D(a_y) D^\dagger(a_y) U^{-1} \\ &= \sum_y U D(a_y) U^{-1} U D^\dagger(a_y) U^{-1} \\ &= \sum_y [U D(a_y) U^{-1}] [U D^\dagger(a_y) U^{-1}] \\ &= \sum_y [U D(a_y) U^{-1}] [(U^{-1}) D^\dagger(a_y) U] \\ &= \sum_y [U D(a_y) U^{-1}] [U D(a_y) U^{-1}]^\dagger. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Definindo  $T(a_y) = U D(a_y) U^{-1}$ , obtém-se

$$\Lambda = \sum_y T(a_y) T^\dagger(a_y). \quad (3.31)$$

O conjunto  $\{T(a_y)\}$  forma uma representação equivalente à das matrizes  $\{D(a_y)\}$ .

Uma vez que

$$\Lambda^{-1/2} \Lambda \Lambda^{-1/2} = I$$

e

$$(\Lambda^{1/2})^\dagger = \Lambda^{1/2},$$

temos

$$\Lambda^{-1/2} \sum_y T(a_y) T^\dagger(a_y) \Lambda^{-1/2} = I, \quad (3.32)$$

e  $\Lambda^{\pm 1/2}$  é obtida tomando-se a raiz quadrada (+) ou o inverso da raiz quadrada (-) dos elementos de  $\Lambda$ . Definamos agora a matriz

$$R(a_x) = \Lambda^{-1/2} T(a_x) \Lambda^{1/2}. \quad (3.33)$$

Tal matriz é unitária. De fato,

$$\begin{aligned}
R(a_x)R^\dagger(a_x) &= \Lambda^{-1/2}T(a_x)\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}T^\dagger(a_x)\Lambda^{-1/2} \\
&= \Lambda^{-1/2}T(a_x)\Lambda^{1/2}\left(\Lambda^{-1/2}\sum_y T(a_y)T^\dagger(a_y)\Lambda^{-1/2}\right)\Lambda^{1/2}T^\dagger(a_x)\Lambda^{-1/2} \\
&= \Lambda^{-1/2}\sum_y [T(a_x)T(a_y)][T(a_x)T(a_y)]^\dagger \Lambda^{-1/2} \\
&= \Lambda^{-1/2}\sum_y T\left(\sum_z c_{xy}^z a_z\right)T^\dagger\left(\sum_{z'} c_{xy}^{z'} a_{z'}\right)\Lambda^{-1/2} \\
&= \Lambda^{-1/2}\sum_{zz'} \sum_y c_{xy}^z c_{xy}^{z'*} T(a_z)T^\dagger(a_{z'})\Lambda^{-1/2} \\
&= \Lambda^{-1/2}\sum_{zz'} \delta_{zz'} T(a_z)T^\dagger(a_{z'})\Lambda^{-1/2} \\
&= \Lambda^{-1/2}\sum_z T(a_z)T^\dagger(a_z)\Lambda^{-1/2} = I.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Tendo em vista a equação (3.32), temos também que

$$R(a_x)R^\dagger(a_x) = \Lambda^{-1/2}\sum_z T(a_z)T^\dagger(a_z)\Lambda^{-1/2} = I.$$

Dessa forma, utilizando a matriz unitária  $U$  que diagonaliza  $F$ , as matrizes  $\{D(a_y)\}$  são transformadas em matrizes unitárias através das matrizes  $\Lambda^{-1/2}U$ , ou seja,

$$R(a) = (\Lambda^{-1/2}U) D(a) (\Lambda^{-1/2}U)^{-1}.$$

Logo, as matrizes  $\{D(a)\}$  são sempre transformáveis em matrizes unitárias. ■

**Teorema 25** *Seja  $A$  uma álgebra de dimensão  $d$ , que satisfaz a relação característica definida pelo teorema anterior, ou seja com  $\sum_{y=1}^n c_{xy}^z c_{xy}^{z'*} = \delta_{zz'}$ . Os caracteres  $\chi^\alpha(a_y)$  e  $\chi^\beta(a_y)$  associados às duas representações irredutíveis  $\Gamma^\alpha$  e  $\Gamma^\beta$ , respectivamente, satisfazem a relação de ortogonalidade*

$$\sum_y \chi^{*\alpha}(a_y)\chi^\beta(a_y) = d\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.35}$$

Prova. Do teorema anterior, temos que

$$\sum_y D_{ij}^{*\alpha}(a_y) D_{kl}^\beta(a_y) = \frac{d}{d\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (3.36)$$

Tomando  $i = j, k = l$  e somando em  $i$  e  $k$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k \left( \sum_y D_{ii}^{*\alpha}(a_y) D_{kk}^{*\beta}(a_y) \right) &= \sum_y \left( \sum_i D_{ii}^{*\alpha}(a_y) \right) \left( \sum_k D_{kk}^{*\beta}(a_y) \right) \\ &= \sum_y D_{ij}^{*\alpha}(a_y) D_{kl}^{*\beta}(a_y) = \frac{d}{d\alpha} \delta_{\alpha\beta} \sum_i \sum_k (\delta_{ik})^2 \\ &= d\delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

o que completa a prova. ■

## 3.2 Operadores de Projeção

O resultado da operação de um elemento-base qualquer da álgebra sobre uma função  $\varphi_k^{(j)}$  pode ser expresso como

$$P_{a_y} \varphi_k^{(j)} = \sum_{\lambda=1}^{d_j} \varphi_\lambda^{(j)} D_{\lambda k}^{(j)}(a_y), \quad (3.38)$$

onde  $d_j$  é a dimensão da representação  $\Gamma^j$ . Se multiplicarmos esta expressão por  $D_{\lambda' k'}^{(i)}(a_y)$  pela esquerda e somarmos sobre os elementos-base da álgebra, temos

$$\begin{aligned} \sum_y D_{\lambda' k'}^{(i)}(a_y) P_{a_y} \varphi_k^{(j)} &= \sum_{\lambda=1}^{d_j} \sum_y D_{\lambda' k'}^{(i)}(a_y) D_{\lambda k}^{(j)}(a_y) \varphi_\lambda^{(j)}, \\ &= \frac{d}{d_j} \delta_{ij} \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \varphi_\lambda^{(j)}, \\ &= \frac{d}{d_j} \delta_{ij} \delta_{kk'} \varphi_{\lambda'}^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

pelo teorema anterior. Definindo

$$P_{\lambda k}^{(j)} = \frac{d_j}{d} \sum_y D_{\lambda k}^{*(j)}(a_y) P_{a_y}, \quad (3.40)$$

a equação (3.39) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
P_{\lambda k}^{(j)} \varphi_l^{(i)} &= \frac{d_j}{d} \sum_y D_{\lambda k}^{*(j)}(a_y) P_{a_y} \varphi_l^{(i)} \\
&= \delta_{ij} \delta_{kl} \varphi_\lambda^{(i)} \\
&= \varphi_\lambda^{(j)} \delta_{ij} \delta_{kl}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Tomando  $\lambda = k$ , temos

$$P_{kk}^{(j)} \varphi_l^{(i)} = \varphi_k^{(j)} \delta_{ij} \delta_{kl} \tag{3.42}$$

Aplicando  $P_{kk}^{(j)}$  em uma função  $\Phi$  definida por

$$\phi = \sum_{j'=1}^m \sum_{k'=1}^{d_j} \varphi_{k'}^{(j')},$$

temos

$$\begin{aligned}
P_{kk}^{(j)} \phi &= P_{kk}^{(j)} \sum_{j'=1}^m \sum_{k'=1}^{d_j} \varphi_{k'}^{(j')} \\
&= \sum_{j'=1}^m \sum_{k'=1}^{d_j} P_{kk}^{(j)} \varphi_{k'}^{(j')} = \varphi_k^{(j)}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Então  $P_{kk}^{(j)}$  projeta somente a parte da função que pertence à  $k$ -ésima linha da representação irredutível  $\Gamma^j$  do espaço dos operadores  $P_{a_y}$ ; o operador  $P_{kk}^{(j)}$  é um operador de projeção. Tomando  $\lambda = k$ , e somando-se sobre  $k$ , temos

$$\begin{aligned}
P^{(j)} &= \sum_k P_{kk}^{(j)} \\
&= \frac{d_j}{d} \sum_y \left( \sum_k D_{kk}^{*(j)}(a_y) \right) P_{a_y} \\
&= \frac{d_j}{d} \sum_y \chi^{*(j)}(a_y) P_{a_y}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Aplicando este operador sobre uma função  $\phi$

$$P^{(j)} \phi = \sum_k P_{kk}^{(j)} \phi = \sum_k \phi_k^{(j)} = \phi^{(j)}, \tag{3.45}$$

em que  $\phi^{(j)}$  é uma função qualquer que pode ser expressa como uma soma de funções pertencentes às linhas dentro da representação  $j$  e satisfaz

$$\begin{aligned}
P^{(j)}\phi^{(j)} &= \sum_k P_{kk}^{(j)} \sum_{k'=1}^{d_j} \varphi_{k'}^{(j')} \\
&= \sum_{k=1}^{d_j} \sum_{k'=1}^{d_{j'}} P_{kk}^{(j)} \varphi_{k'}^{(j')} \\
&= \sum_{k=1}^{d_j} \sum_{k'=1}^{d_{j'}} \varphi_k^{(j)} \delta_{kk'} \delta_{jj'} \\
&= \sum_{k=1}^{d_j} \phi_k^{(j)} = \phi^{(j)}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Observe ainda que fazendo  $i = j$  e  $l = k$  em (3.42), temos

$$P_{\lambda k}^{(j)} \varphi_k^{(i)} = \varphi_\lambda^{(j)}.$$

Se  $\lambda = k$ ,

$$P_{kk}^{(j)} \varphi_k^{(j)} = \varphi_k^{(j)},$$

o que implica em

$$\left(P_{kk}^{(j)}\right)^2 \varphi_k^{(j)} = P_{kk}^{(j)} P_{kk}^{(j)} \varphi_k^{(j)} = \varphi_k^{(j)}.$$

Logo

$$\left(P_{kk}^{(j)}\right)^2 = P_{kk}^{(j)}.$$

Se na expressão (3.42) igualarmos  $\lambda$  a  $k$  e somarmos em  $j$  e  $k$ ,

$$\sum_{j,k} P_{kk}^{(j)} \varphi_l^{(i)} = \sum_j P^{(j)} \varphi_l^{(i)} = \sum_{j,k} \varphi_k^{(j)} \delta_{ij} \delta_{lk} = \varphi_l^{(i)}.$$

Portanto,

$$\sum_j P^{(j)} = P_e,$$

em que  $e$  é o elemento identidade da álgebra.

### 3.3 Construção GNS

Na Mecânica Quântica Algébrica e em Análise Funcional a construção GNS (Gelfand-Neimark-Segal) [91] estabelece uma correspondência entre representações cíclicas de uma álgebra  $c^*$   $A$  e certos funcionais lineares em  $A$ , doravante denominado estados. Nesta seção exploraremos alguns aspectos relacionados à construção GNS dentro da formulação por nós desenvolvida, em que álgebras associativas involutivas são utilizadas. Iniciaremos com algumas generalidades sobre as álgebras  $c^*$ .

Uma álgebra de Banach involutiva é uma álgebra associativa real ou complexa, involutiva ( $*$ ), normada e completa com relação à topologia induzida por sua norma e tal que  $\|a^*\| = \|a\|$  para todo  $a$  em  $A$ ; uma álgebra  $c^*$  (ou álgebra  $r^*$ ) é uma álgebra de Banach complexa (ou real) involutiva tal que  $\|a\|^2 = \|a^*a\|$  para todo  $a \in A$ . Para uma representação  $\Pi$  de uma álgebra  $c^*$   $A$  em um espaço de Hilbert  $H$ , um elemento  $\xi$  é chamado de vetor cíclico se o conjunto de vetores

$$\{\Pi(a)\xi : a \in A\} \tag{3.47}$$

é denso em  $H$ , ou seja, quando toda bola aberta em  $H$  contém algum vetor do conjunto dado pela equação (3.47). Neste caso, a representação é denominada de representação cíclica. Um estado em  $A$  é um funcional linear positivo  $\omega$  obtido por meio de

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \omega, \\ \omega_a(\xi) &= \langle \xi, \Pi(a)\xi \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

A relação com os observáveis  $O$  da mecânica quântica é introduzida por meio do seguinte axioma

**Axioma 1** *O conjunto dos observáveis  $O$  pode ser identificado como o conjunto de todos os elementos de uma álgebra  $A$  involutiva associativa real ou complexa, satisfazendo duas condições: i) Para cada  $a$  em  $A$  existe um elemento  $o$  em  $O$  tal que  $a^*a = o^2$ ; ii)  $a^*a = 0$ , implica  $a = 0$ .*

**Lema 9** *Uma álgebra  $A$  associada com  $O$  pela estrutura do axioma anterior pode ser equipada, sem quaisquer restrições, com uma estrutura de uma álgebra  $c^*$  ou uma álgebra  $r^*$ , dependendo do fato de  $A$  ser real ou complexa.*

De posse destas informações enunciaremos o teorema a seguir, conhecido como a construção GNS:

**Teorema 26** *Seja  $O$  a álgebra de todos os observáveis de um sistema físico e  $A$ , a álgebra associada com  $O$  por meio do axioma 1; então cada estado  $\omega$  gera canonicamente uma representação  $\pi_\omega$  de  $O$  por meio de operadores auto-adjuntos atuando em um espaço de Hilbert real ou complexo, dependendo de  $A$  ser real ou complexo.*

O espaço de representação associado à representação regular é um ideal à esquerda da álgebra e a construção GNS pode ser realizada nestes termos. Desse modo, é interessante observar que é possível obter ideais à esquerda em uma álgebra produto por meio da definição

$$L_\omega = \{c = c_1 \otimes c_2 \in A = A_1 \otimes A_2 \mid \omega(a_1^* c_1) \omega(a_2^* c_2) = 0, \forall a_1, a_2 \in A_1, A_2\},$$

sendo  $\omega$  funcionais lineares e  $a_1^*, a_2^* \in A$  e obtidos por meio de uma involução. Esse é o ideal de Gelfand adaptado aqui para produtos tensoriais de álgebras. Podemos verificar a condição de ideal do conjunto acima fazendo uso da associatividade. Com efeito,

$$\begin{aligned} & \omega\left(\left(\sum_{i,j} \beta_{ij} b_i^{1*} \otimes b_j^{2*}\right)\left((a_1 \otimes a_2)(c_1 \otimes c_2)\right)\right) \\ &= \omega\left(\left((a_1 \otimes a_2) \times \left(\sum_{i,j} \beta_{ij} b_i^{1*} \otimes b_j^{2*}\right)\right)^*(c_1 \otimes c_2)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

observando que

$$\omega\left((a_1^* \otimes a_2^*)(c_1 \otimes c_2)\right) = \omega(a_1^* c_1 \otimes a_2^* c_2) = \omega(a_1^* c_1) \omega(a_2^* c_2).$$

Como exemplo considere a álgebra  $R_{1,1}$  sobre um corpo  $K$ , caracterizada pela tabela de multiplicação

1	$e_1$	$e_2$	$e_{12}$
$e_1$	1	$e_{12}$	$e_2$
$e_2$	$-e_{12}$	-1	$e_1$
$e_{12}$	$-e_2$	$-e_1$	1

com  $e_1^* = e_1$ ,  $e_2^* = e_2$  e  $e_{12}^* = e_{12}$ . Definindo  $\omega_1$  em  $R_{1,1}$  por

$$\omega_1(\alpha_1 1 + \beta_1 e_1 + \gamma_1 e_2 + \delta_1 e_{12}) = \alpha_1 - \delta_1,$$

onde  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \in K$ , pode-se mostrar que

$$\omega_1((\alpha_1 1 + \beta_1 e_1^* + \gamma_1 e_2^* + \delta_1 e_{12}^*)(a_1(1 + e_{12}) + b_1(e_1 + e_2))) = 0,$$

em que  $a_1, b_1 \in K$  produz um ideal dado por

$$\psi_{L_1} = a_1 \varepsilon_{11} + b_1 \varepsilon_{21},$$

com

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}(1 + e_{12}), \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2). \end{aligned}$$

Em  $R_{1,1} \otimes R_{1,1}$  podemos construir ideais à esquerda fazendo

$$\begin{aligned} &\omega_1(\alpha_1 1 + \beta_1 e_1 + \gamma_1 e_2 + \delta_1 e_{12}) \omega_2(\alpha_2 1 + \beta_2 e_1 + \gamma_2 e_2 + \delta_2 e_{12}) \\ &= (\alpha_1 - \delta_1)(\alpha_2 - \delta_2), \end{aligned}$$

conduzindo ao ideal

$$\begin{aligned}
\psi_{L_1 \otimes L_1} &= (a_1 \varepsilon_{11} + b_1 \varepsilon_{21})(a_2 \varepsilon_{11} + b_2 \varepsilon_{21}) \\
&= (a_1 1 + b_1 \varepsilon_{11}) \varepsilon_{11} \otimes (a_2 1 + b_2 \varepsilon_{11}) \varepsilon_{11} \\
&= ((a_1 1 + b_1 \varepsilon_{11}) \otimes (a_2 1 + b_2 \varepsilon_{11})) (\varepsilon_{11} \otimes \varepsilon_{11}) \\
&= [a_1 a_2 (1 \otimes 1) + a_1 b_2 (1 \otimes \varepsilon_{11}) + b_1 a_2 (\varepsilon_{11} \otimes 1) + b_1 b_2 (\varepsilon_{11} \otimes \varepsilon_{11})] \\
&\quad \times (\varepsilon_{11} \otimes \varepsilon_{11}).
\end{aligned}$$

Uma representação matricial para esta álgebra é dada por

$$\pi_\omega(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_\omega(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_\omega(e_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para o ideal  $\psi_{L_1 \otimes L_1}$ , temos

$$\Pi_\omega(\psi_{L_1 \otimes L_1}) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 b_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dentro desta perspectiva algébrica, Hiley propôs [92] que se for possível escrever o operador densidade, dado por um elemento  $\rho$  de um ideal bilateral  $I$  em  $A$  tal que

$$\langle O \rangle = \omega(O \Psi \Psi^*) = \omega(\Psi^* O \Psi) \equiv \langle \Psi | O | \Psi \rangle, \quad (3.48)$$

então o estado misto pode ser descrito por um vetor de estado  $\Psi$ . Essa construção é similar à construção GNS, que possibilita a descrição de um sistema térmico por uma função de onda dependente da temperatura. Supondo

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i, \quad (3.49)$$

em que em que  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , a equação (3.48) é satisfeita. Mostraremos agora que tal conjectura é verdadeira.

**Teorema 27** *Seja  $\omega$  um funcional linear na álgebra  $A$  e seja  $O$  um elemento arbitrário da álgebra. Então existe um elemento  $\Psi$  dado por*

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \epsilon_i,$$

tal que

$$\omega(\rho O) = \omega(\Psi^* O \Psi). \quad (3.50)$$

Prova. Temos que

$$\rho = \sum_{i=1}^r \lambda_i \psi_i \psi_i^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i a \epsilon_i \epsilon_i a^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i a \epsilon_i a^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i \rho_i.$$

Mas cada  $\rho_i = a \epsilon_i a^*$  é um idempotente, pelo teorema 10. Consequentemente cada um destes idempotentes pode ser escrito como a soma de idempotentes primitivos, isto é,

$$a \epsilon_j a^* = \sum_{i_j=1}^r \epsilon_{i_j}.$$

Então

$$\begin{aligned} \omega(\rho O) &= \omega\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i a \epsilon_i a^* O\right) = \omega[(\lambda_1 a \epsilon_1 a^* + \lambda_2 a \epsilon_2 a^* + \dots + \lambda_r a \epsilon_r a^*) O] \\ &= \omega\left[\left(\lambda_1 \sum_{i_1=1}^r \epsilon_{i_1} + \lambda_2 \sum_{i_2=1}^r \epsilon_{i_2} + \dots + \lambda_r \sum_{i_r=1}^r \epsilon_{i_r}\right) O\right] \end{aligned}$$

e

$$\omega\left[\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \epsilon_j\right) O\right] = \omega\left[\left(\sum_{j=1}^r \sqrt{\lambda_j} \epsilon_j\right) \left(\sum_{k=1}^r \sqrt{\lambda_k} \epsilon_k\right) O\right] = \omega(\Psi \Psi^* O),$$

com  $\Psi = \sum_{j=1}^r \sqrt{\lambda_j} \epsilon_j$ . ■

Como exemplo, considere a álgebra de Clifford  $Cl(3,0)$  definida por meio dos geradores

$$\begin{aligned} \gamma_i^2 &= 1, & i &= 1, 2, 3, \\ \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i &= 0, & i &\neq j. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Esta álgebra possui idempotentes primitivos  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  dados por

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_3), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_3).\end{aligned}$$

Em termos algébricos, seguindo a proposta apresentada na seção 2.3 do capítulo anterior, podemos definir um operador densidade como

$$\rho = \frac{3}{4}\gamma_3\varepsilon_1\gamma_3 + \frac{1}{4}\gamma_3\varepsilon_2\gamma_3 = \frac{3}{4}\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon_2. \quad (3.52)$$

O vetor  $\Psi$  é dado por

$$\Psi = \sqrt{\frac{3}{4}}\varepsilon_1 + \sqrt{\frac{1}{4}}\varepsilon_2. \quad (3.53)$$

De fato,

$$\rho = \Psi\Psi^* = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\varepsilon_1 + \sqrt{\frac{1}{4}}\varepsilon_2\right)\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\varepsilon_1 + \sqrt{\frac{1}{4}}\varepsilon_2\right) = \frac{3}{4}\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon_2. \quad (3.54)$$

Numa representação matricial

$$\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/4} & 0 \\ 0 & \sqrt{1/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3/4} & 0 \\ 0 & \sqrt{1/4} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Na referência [92] Hiley propôs que o elemento  $\Psi$  pode ser escrito, através de uma representação  $\Pi_H$ , em princípio distinta da obtida para os demais elementos algébricos, como

$$\Pi_H(\Psi) = \sum_{j=1}^r \Pi_H(B_j), \quad (3.56)$$

onde o índice  $H$  refere-se à proposta do Hiley e

$$\Pi_H(B_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \sqrt{\lambda_j} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

em que  $\Pi_H(B_j)$  é um matriz coluna  $1 \times n^2$  com  $\sqrt{\lambda_j}$  aparecendo no elemento  $s = [j(n+1) + 1]$ . Com essa representação, Hiley pode construir um vetor de estado, de forma análoga à construção GNS [91], que reproduz os mesmos resultados da teoria de Umezawa [56]; entretanto na sua representação matricial, estados e operadores não aparecem em pé de igualdade. Supondo  $\varepsilon_i = \varepsilon_i^*$ , (caso existente em várias álgebras de interesse, como por exemplo, a álgebra de Pauli) contornamos esse problema definindo a representação

$$\begin{aligned} \Pi & : A \rightarrow A \otimes A, \\ \Pi(\varepsilon_i) & = \varepsilon_i \otimes \varepsilon_i \rightarrow \Pi(\Psi) = \sqrt{\lambda_i}(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_i), \end{aligned} \quad (3.58)$$

com  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , e demonstrando a seguinte proposição

**Proposição 1**  $Tr(\Psi^* O \Psi) = Tr(\Pi(\Psi^*)(O \otimes 1)\Pi(\Psi))$ .

Prova.

$$\begin{aligned} Tr(\Pi(D^*)(O \otimes 1)\Pi(D)) & = Tr\{[\sqrt{\lambda_1}(\varepsilon_1^* \otimes \varepsilon_1^*) + \sqrt{\lambda_2}(\varepsilon_2^* \otimes \varepsilon_2^*)](O \otimes 1) \\ & \quad \times [\sqrt{\lambda_1}(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) + \sqrt{\lambda_2}(\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2)]\} \\ & = Tr\{[\sqrt{\lambda_1}(\varepsilon_1^* \otimes \varepsilon_1^*)(O \otimes 1) + \sqrt{\lambda_2}(\varepsilon_2^* \otimes \varepsilon_2^*)(O \otimes 1)] \\ & \quad \times [\sqrt{\lambda_1}(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) + \sqrt{\lambda_2}(\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2)]\} \\ & = Tr[\lambda_1(\varepsilon_1^* \otimes \varepsilon_1^*)(O \otimes 1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\ & \quad + \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}(\varepsilon_1^* \otimes \varepsilon_1^*)(O \otimes 1)(\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2) \\ & \quad + \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}(\varepsilon_2^* \otimes \varepsilon_2^*)(O \otimes 1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\ & \quad + \lambda_2(\varepsilon_2^* \otimes \varepsilon_2^*)(O \otimes 1)(\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr}[\lambda_1 (\varepsilon_1^* O \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1^* \varepsilon_1) + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\varepsilon_1^* O \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_1^* \varepsilon_2) + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\varepsilon_2^* O \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2^* \varepsilon_1) \\
&\quad + \lambda_2 (\varepsilon_2^* O \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2^* \varepsilon_2)] \\
&= \text{Tr}(\lambda_1 \varepsilon_1^* O \varepsilon_1) \text{Tr}(\varepsilon_1^* \varepsilon_1) + \text{Tr}\left(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \varepsilon_1^* O \varepsilon_2\right) \text{Tr}(\varepsilon_1^* \varepsilon_2) \\
&\quad + \text{Tr}\left(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \varepsilon_2^* O \varepsilon_1\right) \text{Tr}(\varepsilon_2^* \varepsilon_1) + \text{Tr}(\lambda_2 \varepsilon_2^* O \varepsilon_2) \text{Tr}(\varepsilon_2^* \varepsilon_2) \\
&= \text{Tr}(\lambda_1 \varepsilon_1 O \varepsilon_1) + \text{Tr}(\lambda_2 \varepsilon_2 O \varepsilon_2) = \text{Tr}(\lambda_1 \varepsilon_1 O \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 O \varepsilon_2) = \text{Tr}(\lambda_1 \varepsilon_1 O + \lambda_2 \varepsilon_2 O) \\
&= \text{Tr}[(\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2) O] = \text{Tr}\left\{\left[\left(\sqrt{\lambda_1} \varepsilon_1 + \sqrt{\lambda_2} \varepsilon_2\right) \left(\sqrt{\lambda_1} \varepsilon_1 + \sqrt{\lambda_2} \varepsilon_2\right)\right] O\right\} \\
&= \text{Tr}(DD^*O) \\
&= \text{Tr}(D^*OD).
\end{aligned}$$

■

Este resultado permite colocar todos os entes dentro de uma mesma representação matricial e pode ser facilmente generalizado para um número qualquer de idempotentes primitivos e para quaisquer produto tensorial de álgebras. Como exemplo, considere o sistema de spins térmico, com o operador densidade dado por,

$$\rho = \frac{\exp(-\beta\mathcal{H})}{\text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H})}, \quad (3.59)$$

em que  $\beta = 1/KT$  e  $\mathcal{H}$  é o hamiltoniano  $\mathcal{H} = -\beta\sigma_3$ , onde  $\sigma_3$  é a matriz de Pauli

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como uma representação para a álgebra  $Cl(3,0)$  é dada em termos das matrizes de Pauli, com a identificação

$$\gamma_1 \leftrightarrow \sigma_1, \quad \gamma_2 \leftrightarrow \sigma_2, \quad \gamma_3 \leftrightarrow \sigma_3, \quad (3.60)$$

temos que  $\Psi$  pode ser escrito como

$$\Psi = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i = \sqrt{\lambda_1} \varepsilon_1 + \sqrt{\lambda_2} \varepsilon_2, \quad (3.61)$$

onde  $\lambda_1 = \frac{1+\tanh\gamma}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{1-\tanh\gamma}{2}$ . Temos também que

$$\begin{aligned}\Pi(\Psi) &= \sqrt{\lambda_1} (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) + \sqrt{\lambda_2} (\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\tanh\gamma}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{1-\tanh\gamma}{2}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.62)$$

Pela construção GNS do Hiley [92]

$$\Pi^H(\Psi) = |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\tanh\gamma}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1-\tanh\gamma}{2}} \end{pmatrix}.\quad (3.63)$$

Pela construção de Umezawa [92], temos

$$|\Omega(\beta)\rangle = \Pi^H(\Psi).\quad (3.64)$$

Todas as três construções produzem o mesmo operador densidade na álgebra produto

$$\Pi(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{1+\tanh\gamma}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\tanh\gamma}{2} \end{pmatrix},\quad (3.65)$$

e também o mesmo valor esperado para o observável  $O$ . Sendo  $O = a1+b\sigma_1+c\sigma_2+d\sigma_3$ , temos que

$$\begin{aligned}\langle O \rangle &= Tr(\Pi(\Psi^*)(O \otimes 1)\Pi(\Psi)) \\ &= a + d \tanh \gamma.\end{aligned}\quad (3.66)$$

Em resumo, neste capítulo, objetivando uma descrição algébrica multipartite para a informação quântica, apresentamos uma série de resultados matemáticos rigorosos

intimamente relacionados com a teoria de representação de grupos e álgebras. Produtos tensoriais de ideais, representações irredutíveis, teoremas de ortogonalidade, operadores de projeção e construção GNS foram tópicos abordados e que nos próximos capítulos mostraremos sua eficácia, mediante temas como emaranhamento, portas lógicas quânticas e correção quântica de erro.

## Capítulo 4

# Estados Algébricos Emaranhados

O emaranhamento quântico tem sua origem no trabalho publicado em 1935 por Einstein, Podolsky e Rosen [5]. Nesse surge um questionamento acerca da completeza da mecânica quântica: todo elemento de realidade física em sistemas quânticos possuem uma contrapartida na teoria quântica? Um exemplo comumente citado na literatura [93] é o de um processo atômico que produz fótons gêmeos. Quando um dos fótons atravessa um polarizador, adquirindo certa polarização, simultaneamente o fóton gêmeo (sem ter atravessado nenhum polarizador) adquire polarização ortogonal. Temos então uma manifestação não-local denominada por Einstein de “ação fantasmagórica à distância” [5]. A incompleteza da teoria residiria na existência simultânea de quantidades físicas incompatíveis.

Numa tentativa de clarificar tal fenômeno surge a proposta de David Bohm, em 1952 [94], supondo a existência de variáveis ocultas que reduzissem as dispersões quânticas a zero. Sua proposta era de recuperar o determinismo clássico através de uma reformulação no quadro conceitual da mecânica quântica.

Em 1964, John Stuart Bell [95] deduziu um conjunto de desigualdades (desigualdades de Bell) onde qualquer teoria local - sem ações à distância - deveria obedecer. Entretanto, na mecânica quântica, resultados teóricos indicam a não verificação de tais desigualdades quando aplicadas a estados emaranhados [1]. Surge então, em

1982, com Aspect [96] um experimento crucial com pares de fótons emitidos numa transição do Ca. O resultado foi a violação das desigualdades de Bell, ratificando a suposição de que a natureza comporta-se em conformidade com a mecânica quântica. Num experimento posterior [97], as orientações dos analisadores de polarização foram alteradas de modo que nenhum sinal podia ser transmitido de um detector para o outro durante o tempo de vôo dos fótons. Surpreendentemente as correlações e violação das desigualdades de Bell foram observadas.

Na computação clássica temos os bits; analogamente, na computação quântica temos os q-bits, com uma diferença fundamental: a validade do princípio de superposição. Com o advento da computação quântica e da informação quântica, o emaranhamento vem sendo estudado exhaustivamente [1]. O teletransporte quântico e a codificação superdensa, por exemplo, são factíveis devido a essa propriedade. Os estados quânticos emaranhados aparecem então como o principal recurso para o processamento da informação quântica.

A ideia básica consiste em, através do emaranhamento, implementar protocolos quânticos com a propriedade ímpar de resolver tarefas sem equivalência na contrapartida clássica. No que se refere à computação quântica, o emaranhamento permite, por exemplo, a construção de algoritmos com velocidade de processamento exponencial.

Uma dificuldade eminente surge na descrição do emaranhamento para sistemas multipartites. A decomposição de Schmidt [21], ferramenta essencial na caracterização e quantificação do emaranhamento, só é válida, em geral, para sistemas bipartites. Alguns autores, na tentativa de desenvolver um formalismo geral tem optado por formulações algébricas [27, 41].

Nesta perspectiva, discutiremos neste capítulo o emaranhamento em estados quânticos multipartites construídos algebricamente, ou seja, estados obtidos de produtos tensoriais de ideais à esquerda minimais. A construção e os critérios de separabilidade são os aspectos centrais aqui desenvolvidos. Exemplos envolvendo estados emaran-

hados de Bell [1],  $W$  [22] e  $GHZ$  [22] serão apresentados. Mostraremos também como obter estados emaranhados partindo-se dos geradores dos grupos de tranças (utilizado na computação quântica topológica) [48, 49] dentro da nossa formulação algébrica.

## 4.1 Emaranhamento Quântico

O estado genérico de um q-bit é dado pela superposição

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (4.1)$$

em que  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Uma possível representação para estes estados pode ser obtida com a correspondência

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Este conjunto forma uma base para um espaço de Hilbert em duas dimensões. Para dois q-bits, o espaço de Hilbert é expandido pelos vetores

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}. \quad (4.3)$$

Existem estados de um sistema composto para os quais  $|\psi\rangle$  não pode ser escrito como  $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$  em que os índices  $A$  e  $B$  referem-se aos subsistemas  $A$  e  $B$ , respectivamente, de um sistema composto  $AB$ . Exemplos de tais estados são os estados de Bell

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Um dos critérios de separabilidade mais utilizados para distinguir se um estado puro bipartite, dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} a_{jk} |j\rangle |k\rangle, \quad (4.5)$$

em que  $|j\rangle$  e  $|k\rangle$  correspondem a bases ortonormais de dois subsistemas  $A$  e  $B$ , pode ser fatorável, é a decomposição de Schmidt [21]. Esta afirma que todo estado puro bipartite pode ser escrito como uma soma de termos biortogonais

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (4.6)$$

em que as bases  $|i_A\rangle$  e  $|i_B\rangle$  são denominadas bases de Schmidt e número de valores  $\lambda_i$  (coeficientes de Schmidt) é denominado número de Schmidt. É fácil perceber que um estado puro é fatorável se, e somente se, seu número de Schmidt vale 1. Os subsistemas  $A$  e  $B$  não possuem necessariamente a mesma dimensão e esse resultado em princípio pode ser generalizado para um número arbitrário de subsistemas, entretanto tal decomposição nem sempre é possível [21].

De um modo geral, podemos definir emaranhamento para sistemas multipartites como segue [22]

**Definição 16** *Um estado  $|\psi\rangle$  em um sistema constituído por  $n$  subsistemas, cujo espaço de Hilbert é dado por  $H = \otimes_{j=1}^n H_j$ , onde  $H_j$  é o espaço de Hilbert associado a cada subsistema, está emaranhado se, e somente se, não pode ser escrito na forma  $|\psi\rangle = \otimes_{j=1}^n |\psi_j\rangle$ .*

Esta definição estabelece um emaranhamento genuíno, pois é possível que, dados por exemplo, três sistemas,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , os sistemas  $A$  e  $B$  estejam emaranhados entre si, mas não possuam emaranhamento com  $C$ . Em símbolos,

$$|\psi_{ABC}\rangle = |\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_C\rangle.$$

Este é um estado emaranhado não genuíno, onde o sistema como um todo é fatorável, mas algumas de suas partes apresentam emaranhamento. Um critério de separabilidade deve conter informação sobre casos de emaranhamento não genuínos. Exemplos

de estados emaranhados genuinamente em sistemas tripartites são os estados  $W$  e  $GHZ$ , a saber

$$\begin{aligned} |W\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle), \\ |GHZ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle). \end{aligned}$$

Para estados mistos a definição de emaranhamento envolve uma soma convexa (a soma dos coeficientes de uma combinação linear de termos que envolvem produtos deve totalizar 1) e é formalmente caracterizada pela definição a seguir [22]

**Definição 17** *Um estado  $\rho$  em um sistema formado por  $n$  subsistemas cujo espaço de Hilbert associado é  $H = \otimes_{j=1}^n H_j \otimes H_j^*$  está emaranhado se, e somente se,  $\rho$  não pode ser escrito como uma soma*

$$\rho = \sum_{i=0}^k p_i (\rho_i^1 \otimes \rho_i^2 \otimes \dots \otimes \rho_i^n),$$

onde  $p_i > 0$ ,  $\sum_{i=0}^k p_i = 1$ ,  $\rho_i^j \in H_j \otimes H_j^*$  e  $k \in \mathbb{N}$ .

A determinação de um critério de separabilidade para estados mistos multipartites é um problema não trivial e são conhecidas soluções para casos bem restritos [22]. Um critério bastante conhecido é o de Peres-Horodecki [22]. Este utiliza uma transposição parcial. Definindo uma matriz densidade para um sistema bipartite por

$$\rho = \sum_{m,n,\mu,\nu} \lambda_{m\mu,n\nu} |m, \mu\rangle \langle n, \nu|,$$

sua transposta parcial (com relação ao segundo fator) é dada por

$$\rho^{t_2} = \sum_{m,n,\mu,\nu} \lambda_{m\mu,n\nu} |m, \nu\rangle \langle n, \mu|.$$

O critério de Peres-Horodecki afirma que se  $\rho$  é separável então  $\rho^{t_2} \geq 0$  é uma condição necessária e suficiente para a separabilidade de estados com dimensão  $2 \times 2$  e  $2 \times 3$ . Para dimensões maiores a positividade é uma condição apenas necessária.

Um exemplo de estado misto emaranhado é o estado Werner [22], uma mistura do estado de Bell com a identidade:

$$\rho_W = [(1-p)1/4]I + p|\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

com  $1/3 < p \leq 1$  e  $i = 4$ . As representações matriciais para  $\rho_W$  e  $\rho_W^{t_2}$  são, respectivamente

$$\rho_W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & -2p & 0 \\ 0 & -2p & p+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

e

$$\rho^{t_2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & -2p \\ 0 & p+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p+1 & 0 \\ -2p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}.$$

A separabilidade ocorre se o autovalor de  $\rho^{t_2} = (1-3p)/4 \geq 0$ , o que implica  $p \leq 1/3$ , ratificando o intervalo citado anteriormente para o emaranhamento.

## 4.2 Critérios Algébricos de Separabilidade

Nosso objetivo aqui é encontrar um critério algébrico de separabilidade para estados puros sem a necessidade de nenhuma representação matricial e que seja válido para casos de emaranhamento genuíno e não genuíno. Inicialmente apresentaremos um teorema que estabelece condições necessárias e suficientes para a decomponibilidade de um ideal à esquerda minimal em uma álgebra produto, formado a partir dos geradores da álgebra, ou seja, elementos do tipo

$$\zeta(\gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n})(\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon). \quad (4.7)$$

**Teorema 28** *Uma sobreposição de elementos de ideais à esquerda minimais*

$$\begin{aligned}
\psi_{12\dots m12\dots n} &= \zeta_1 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{i\dots} \otimes \gamma_{i_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
&+ \zeta_2 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{i\dots} \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
&+ \dots + \zeta_{2^{n-1}} (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{j\dots} \otimes \gamma_{i_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
&+ \zeta_{2^n} (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{j\dots} \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
&+ \dots + \zeta_{2^{n+m-1}} (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m} \otimes \gamma_{j\dots} \otimes \gamma_{i_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
&+ \zeta_{2^{n+m}} (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m} \otimes \gamma_{j\dots} \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon), \quad (4.8)
\end{aligned}$$

é decomponível na forma

$$\psi_{12\dots m12\dots n} = \psi_{12\dots m} \otimes \psi_{m+1m+2\dots n}, \quad (4.9)$$

se, se somente se, o conjunto de relações

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{2+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2+2^n(2^m-1)}}, \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_3} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{3+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{3+2^n(2^m-1)}}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_{2^n}} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{2^n+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2^n+2^n(2^m-1)}}, \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_{2^n}} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{2^n+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2^n+2^n(2^m-1)}}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_2}{\zeta_{2^n}} &= \frac{\zeta_{2+2^n}}{\zeta_{2^n+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{2+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2^n+2^n(2^m-1)}}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_{2^n-1}}{\zeta_{2^n}} &= \frac{\zeta_{2^n-1+2^n}}{\zeta_{2^n+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{2^n-1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2^n+2^n(2^m-1)}}, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

for satisfeito.

Prova. Sendo o estado  $\psi_{12\dots m12\dots n}$  decomponível na forma (4.9), ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & [a_1 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m}) (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) + a_2 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m}) (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + \dots + a_{p-1} (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m}) + a_p (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m})] \\ & \otimes [b_1 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}) (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) + b_2 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + \dots + b_{q-1} (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}) + b_q (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo esta última expressão, temos

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 [(\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m}) \otimes (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + a_1 b_2 [(\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m}) (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + \dots + a_1 b_q [(\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m}) (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + a_2 b_1 [(\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m}) (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + \dots + a_2 b_q [(\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m}) (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + \dots + a_{p-1} b_1 [(\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m}) (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + \dots + a_{p-1} b_q [(\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m}) (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + a_p b_{q-1} [(\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m}) (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\ & + a_p b_q [(\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m}) (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n})] (\varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Comparando (4.8) com (4.11), temos

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= a_1 b_1, \\ \zeta_2 &= a_1 b_2, \\ &\vdots \\ \zeta_{2^{n+m}-1} &= a_p b_{q-1}, \\ \zeta_{2^{n+m}} &= a_p b_q. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Este é um sistema de equações algébricas não linear. Não necessitamos resolver este sistema a fim de determinar se a sobreposição é decomponível. Observe que este sistema é equivalente ao conjunto de relações

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{2+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2+2^n(2^m-1)}} = \frac{b_1}{b_2}, \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_3} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{3+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{3+2^n(2^m-1)}} = \frac{b_1}{b_3}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_{2^n}} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{2^n+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2^n+2^n(2^m-1)}} = \frac{b_1}{b_q}, \\
\frac{\zeta_2}{\zeta_3} &= \frac{\zeta_{1+2^n}}{\zeta_{3+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{3+2^n(2^m-1)}} = \frac{b_2}{b_3}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_2}{\zeta_{2^n}} &= \frac{\zeta_{2+2^n}}{\zeta_{2^n+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{2+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2^n+2^n(2^m-1)}} = \frac{b_2}{b_q}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_{2^n-1}}{\zeta_{2^n}} &= \frac{\zeta_{2^n-1+2^n}}{\zeta_{2^n+2^n}} = \dots = \frac{\zeta_{2^n-1+2^n(2^m-1)}}{\zeta_{2^n+2^n(2^m-1)}} = \frac{b_{q-1}}{b_q}.
\end{aligned}$$

Este conjunto de relações (4.10) inter-relaciona todas as equações do sistema não-linear. Se o sistema tem solução, o conjunto de relações deverá ser satisfeito. Inversamente, se as relações (4.10) forem satisfeitas, o sistema possui solução e a sobreposição é decomponível. ■

Para estados puros em termos do operador densidade, podemos obter um teorema análogo ao teorema anterior, observando que o número de elementos necessários para sua caracterização deve conter um fator da ordem de  $4^n$  e que temos agora elementos de ideais bilaterais.

**Teorema 29** *Uma sobreposição de elementos de ideais bilaterais*

$$\psi_{12\dots m12\dots n} = \zeta_1 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{i\dots} \otimes \gamma_{i_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
& \times (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{i \dots} \otimes \gamma_{i_n})^* \\
& + \zeta_2 (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{i \dots} \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
& \quad \times (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{i \dots} \otimes \gamma_{j_n})^* \\
& + \dots + \zeta_{2^{n-1}} (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{i_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
& \quad \times (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{i_n})^* \\
& + \zeta_{2^n} (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
& \quad \times (\gamma_i \otimes \dots \otimes \gamma_{i_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{j_n})^* \\
& + \dots + \zeta_{2^{n+m-1}} (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{i_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
& \quad \times (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{i_n})^* \\
& + \zeta_{2^{n+m}} (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{j_n}) (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) \\
& \quad \times (\gamma_j \otimes \dots \otimes \gamma_{j_m} \otimes \gamma_{j \dots} \otimes \gamma_{j_n})^*
\end{aligned} \tag{4.13}$$

é decomponível na forma

$$\rho_{12\dots m12\dots n} = \rho_{12\dots m} \otimes \rho_{m+1m+2\dots n}, \tag{4.14}$$

se, se somente se, o conjunto de relações

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_1}{\zeta_2} &= \frac{\zeta_{1+4^n}}{\zeta_{2+4^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+4^n(4^m-1)}}{\zeta_{4+2^n(4^m-1)}}, \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_3} &= \frac{\zeta_{1+4^n}}{\zeta_{3+4^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+4^n(4^m-1)}}{\zeta_{3+4^n(4^m-1)}}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_1}{\zeta_{4^n}} &= \frac{\zeta_{1+4^n}}{\zeta_{4^n+4^n}} = \dots = \frac{\zeta_{1+4^n(4^m-1)}}{\zeta_{4^n+4^n(4^m-1)}}, \\
\frac{\zeta_2}{\zeta_3} &= \frac{\zeta_{2+4^n}}{\zeta_{3+4^n}} = \dots = \frac{\zeta_{2+4^n(4^m-1)}}{\zeta_{3+4^n(4^m-1)}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_2}{\zeta_{4^n}} &= \frac{\zeta_{2+4^n}}{\zeta_{4^n+4^n}} = \dots = \frac{\zeta_{2+4^n(4^m-1)}}{\zeta_{4^n+4^n(4^m-1)}}, \\
&\vdots \\
\frac{\zeta_{4^n-1}}{\zeta_{4^n}} &= \frac{\zeta_{4^n-1+4^n}}{\zeta_{4^n+4^n}} = \dots = \frac{\zeta_{4^n-1+4^n(4^m-1)}}{\zeta_{4^n+4^n(4^m-1)}}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

for satisfeito.

*Mutatis mutandis*, a demonstração deste teorema é análoga à do anterior.

### 4.3 Exemplos

De posse destes resultados matemáticos, mostraremos como os mesmos podem ser aplicados na teoria da computação quântica e da informação quântica. Esta conexão pode ser facilmente compreendida se percebermos que os q-bits podem ser visualizados como spinores na álgebra de Clifford  $Cl(3, 0)$  definida por

$$\begin{aligned}
(\gamma_i)^2 &= 1, \quad (i = 1, 2, 3), \\
\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i &= 0 \quad (i \neq j).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Um conjunto de idempotentes primitivos nesta álgebra é dado por

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(1 + \gamma_3) \quad e \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma_3). \tag{4.17}$$

Podemos escrever um q-bit como um elemento de um ideal à esquerda minimal nesta álgebra definido como

$$\psi = a\gamma_1\varepsilon_1 + b\gamma_3\varepsilon_1, \tag{4.18}$$

com  $a, b \in \mathbf{C}$ . Os estados de Bell, nesta formulação assumem a forma

$$\begin{aligned}
\psi_B &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1\varepsilon_1 \otimes \gamma_1\varepsilon_1) \pm (\gamma_3\varepsilon_1 \otimes \gamma_3\varepsilon_1)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_1) \pm (\gamma_3 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\
\phi_B &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1\varepsilon_1 \otimes \gamma_3\varepsilon_1) \pm (\gamma_3\varepsilon_1 \otimes \gamma_1\varepsilon_1)] \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_3) \pm (\gamma_3 \otimes \gamma_1)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Observe que estes estados são elementos de um ideal à esquerda minimal ( $A_1 \otimes A_2$ ) ( $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1$ ) em  $A \otimes A$ . Podemos aplicar nosso critério para verificar se estes estados estão emaranhados. Primeiro, devemos ordenar os q-bits escrevendo os coeficientes na álgebra produto na ordem do dicionário.

$$\begin{aligned}
& (a_1\gamma_1\varepsilon_1 + b_1\gamma_3\varepsilon_1) \otimes (a_2\gamma_1\varepsilon_1 + b_2\gamma_3\varepsilon_1) \\
&= a_1a_2(\gamma_1\varepsilon_1 \otimes \gamma_1\varepsilon_1) + a_1b_2(\gamma_1\varepsilon_1 \otimes \gamma_3\varepsilon_1) + b_1a_2(\gamma_3\varepsilon_1 \otimes \gamma_1\varepsilon_1) + b_1b_2(\gamma_3\varepsilon_1 \otimes \gamma_3\varepsilon_1) \\
&= [a_1a_2(\gamma_1 \otimes \gamma_1) + a_1b_2(\gamma_1 \otimes \gamma_3) + b_1a_2(\gamma_3 \otimes \gamma_1) + b_1b_2(\gamma_3 \otimes \gamma_3)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&= [\zeta_1(\gamma_1 \otimes \gamma_1) + \zeta_2(\gamma_1 \otimes \gamma_3) + \zeta_3(\gamma_3 \otimes \gamma_1) + \zeta_4(\gamma_3 \otimes \gamma_3)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1).
\end{aligned}$$

Pelo teorema 28, devemos ter

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\zeta_3}{\zeta_4} \quad \text{ou} \quad \zeta_1 \zeta_4 = \zeta_2 \zeta_3. \quad (4.20)$$

Para os dois primeiros estados de Bell, temos  $\zeta_1 = \zeta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \zeta_2 = \zeta_3 = 0$  e  $\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \zeta_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \zeta_2 = \zeta_3 = 0$ . Para os dois últimos, temos  $\zeta_1 = \zeta_4 = 0, \zeta_2 = \zeta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\zeta_1 = \zeta_4 = 0, \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \zeta_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Em todos estes casos a relação (4.20) falha. Consequentemente estes estados são emaranhados.

Um exemplo interessante ocorre quando um dos estados difere do outro apenas por um sinal de um dos coeficientes:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= 1.0(\gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) + 0.5(\gamma_1 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&\quad + 1.0(\gamma_3 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) - 0.5(\gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= 1.0(\gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) + 0.5(\gamma_1 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&\quad + 1.0(\gamma_3 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) + 0.5(\gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Aplicando o critério, vemos facilmente que o estado (4.22) é fatorável, enquanto que o estado (4.21) está emaranhado. Para sistemas com mais de duas partes faz-se necessário investigar os casos de emaranhamento não genuíno. Por exemplo, para o caso tripartite, temos que analisar todas as seguintes possibilidades:

$$\psi_{123} = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \psi_3,$$

$$\psi_{123} = \psi_{12} \otimes \psi_3, \quad (4.23)$$

$$\psi_{123} = \psi_{13} \otimes \psi_2, \quad (4.24)$$

$$\psi_{123} = \psi_{23} \otimes \psi_1. \quad (4.25)$$

Na realidade, necessitamos verificar apenas as três últimas possibilidades; se qualquer uma delas não ocorrer a primeira não será possível. Investiguemos, por exemplo, os estados

$$W = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3) + (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \quad (4.26)$$

e

$$GHZ = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \quad (4.27)$$

Procedendo de forma similar ao caso anterior, temos que

$$\begin{aligned} \psi_{123} &= \psi_{12} \otimes \psi_3 = \\ &= [a_1 (\gamma_1 \otimes \gamma_1) + a_2 \zeta (\gamma_1 \otimes \gamma_3) + a_3 (\gamma_3 \otimes \gamma_1) + a_4 (\gamma_3 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\ &\quad \otimes (b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_3) \varepsilon_1 \\ &= [a_1 b_1 (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + a_1 b_2 (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3) + a_2 b_1 (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1) \\ &\quad + a_2 b_2 (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) + a_3 b_1 (\gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + a_3 b_2 (\gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3) \\ &\quad + a_4 b_1 (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1) + a_4 b_2 (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Comparando com

$$\begin{aligned} \psi_{123} &= [\zeta_1 (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + \zeta_2 (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3) + \zeta_3 (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1) \\ &\quad + \zeta_4 (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) + \zeta_5 (\gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + \zeta_6 (\gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3) \\ &\quad + \zeta_7 (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1) + \zeta_8 (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

As relações a serem satisfeitas são

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\zeta_3}{\zeta_4} = \frac{\zeta_5}{\zeta_6} = \frac{\zeta_7}{\zeta_8}. \quad (4.30)$$

Considerando a possibilidade (4.23) vemos que para ambos os estados a relação acima falha. Para a análise das demais possibilidades devemos realizar permutações na ordem dos geradores. Por exemplo, para (4.24), temos que analisar

$$W^{132} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1) + (\gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \quad (4.31)$$

e

$$GHZ^{132} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \quad (4.32)$$

Para o caso (4.25), temos

$$W^{231} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \quad (4.33)$$

e

$$GHZ^{231} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \quad (4.34)$$

Estes estados guardam uma simetria: permanecem inalterados perante as permutações. Como em todas os casos a relação (4.30) falha, estes dois estados são emaranhados. Para sistemas de quatro partes, devemos analisar os casos

$$\psi_{1234} = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \psi_3 \otimes \psi_4,$$

$$\psi_{1234} = \psi_{123} \otimes \psi_4,$$

$$\psi_{1234} = \psi_{124} \otimes \psi_3,$$

$$\psi_{1234} = \psi_{134} \otimes \psi_2,$$

$$\psi_{1234} = \psi_{234} \otimes \psi_1,$$

$$\psi_{1234} = \psi_{12} \otimes \psi_{34},$$

$$\psi_{1234} = \psi_{13} \otimes \psi_{24},$$

$$\psi_{1234} = \psi_{14} \otimes \psi_{23},$$

$$\psi_{1234} = \psi_{23} \otimes \psi_{14},$$

$$\psi_{1234} = \psi_{24} \otimes \psi_{13}.$$

Embora o critério independa da representação, vale ressaltar que todas essas construções algébricas apresentadas admitem representações matriciais, podendo também ser explorado na estrutura de espaço de Hilbert. Uma representação para a álgebra  $Cl(3, 0)$ , por exemplo, é dada em termos das matrizes de Pauli, definidas por

$$\begin{aligned} (\sigma_i)^2 &= 1 \quad (i = 1, 2, 3), \\ \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i &= 0 \quad (i \neq j). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Nesta representação os idempotentes primitivos  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são dados por

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1 - \sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Note que

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(\varepsilon_1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_1,$$

$$(\varepsilon_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_2.$$

ratificando que  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  formam um conjunto de idempotentes primitivos. Considere

agora os elementos

$$\begin{aligned}\sigma_1\varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3\varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Podemos então escrever o qubit como um elemento de um ideal à esquerda minimal dado por

$$\psi = a\sigma_3\varepsilon_1 + b\sigma_1\varepsilon_1 = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Tomando produtos tensoriais destes ideais encontraremos uma representação matricial para os estados multipartites; no caso bipartite, temos

$$\sigma_1\varepsilon_1 \otimes \sigma_1\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\sigma_3\varepsilon_1 \otimes \sigma_3\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Temos então o estado de Bell

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_3\varepsilon_1 \otimes \sigma_3\varepsilon_1) + (\sigma_1\varepsilon_1 \otimes \sigma_1\varepsilon_1)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (4.41)$$

É importante observar que nesta formulação operadores e estados desempenham o mesmo papel. Isto permite vantagens do ponto de vista operacional na medida em que ambos os elementos, operadores e estados, podem ser descritos em termos dos geradores da álgebra.

A relação generalizada para os geradores da álgebra produto é dada por

$$\begin{aligned} \{\Gamma_i, \Gamma_j\} &= \{\gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}, \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n}\} \\ &= 2\delta_{i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_n j_n} (1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1). \end{aligned} \quad (4.42)$$

se  $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_n = j_n$ , ou se  $i \neq j$  um número ímpar de vezes, isto é,  $2k + 1$  vezes, onde  $\delta_{i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_n j_n} = \delta_{i_1, j_1} \delta_{i_2, j_2} \dots \delta_{i_n, j_n}$ , ou

$$\begin{aligned} \{\Gamma_i, \Gamma_j\} &= \{\gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}, \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n}\} \\ &= 2(\gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n}), \end{aligned} \quad (4.43)$$

se  $i \neq j$  um número par de vezes, isto é,  $2k$  vezes. Uma dedução detalhada encontra-se no apêndice A. Em (4.42) e (4.43),  $\{, \}$  denota o anticomutador.

Um elemento algébrico interessante que pode ser obtido neste formalismo é dado por

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1)]. \quad (4.44)$$

Esta é uma versão algébrica da matriz de Bell apresentado na referência. É fácil ver (apêndice A) que este elemento satisfaz a relação definidora do grupo de trança (braid group)

$$\begin{aligned} b_i b_j &= b_j b_i, & j &\neq i \pm 1 \\ b_i b_{i+1} b_i &= b_{i+1} b_i b_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (4.45)$$

em que  $n$  é um número natural, se fizermos a identificação

$$\begin{aligned} b_1 &= B \otimes 1, \\ b_2 &= 1 \otimes B, \end{aligned} \quad (4.46)$$

em que  $n = 3$ ; ou seja, verifica-se a relação

$$(B \otimes 1)(1 \otimes B)(B \otimes 1) = (1 \otimes B)(B \otimes 1)(1 \otimes B). \quad (4.47)$$

Esses operadores estão relacionados a uma proposta de computação quântica topológica descrita na referência [48]. Nesta proposta, a matriz de Bell é utilizada na descrição do teletransporte quântico envolvendo estados de Bell e fórmulas diagramáticas são produzidas. É interessante observar que o elemento  $B$  gera estados de Bell e esta verificação, em nossa formulação, torna-se trivial uma vez que o elemento  $B$  está expresso exatamente em termos dos geradores  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  (ver apêndice A), utilizados para caracterizar os q-bits algebricamente. Com efeito,

$$\begin{aligned} B \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\ B \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) - (\gamma_1 \otimes \gamma_1)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\ B \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\ -B \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_1) - (\gamma_1 \otimes \gamma_3)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \end{aligned} \quad (4.48)$$

ou seja, os estados de Bell podem ser caracterizados em termos de representações dos grupos de tranças. Essa construção pode ser generalizada. Fazendo a substituição  $b_i \rightarrow b_i \otimes b_i$ , a relação braid é preservada. Com efeito, observando que

$$\begin{aligned} (b_i \otimes b_i)(b_j \otimes b_j) &= b_i b_j \otimes b_i b_j \\ &= b_j b_i \otimes b_j b_i \\ &= (b_j \otimes b_j)(b_i \otimes b_i), \end{aligned} \quad (4.49)$$

temos

$$\begin{aligned} (b_i \otimes b_i)(b_{i+1} \otimes b_{i+1})(b_i \otimes b_i) &= b_i b_{i+1} b_i \otimes b_i b_{i+1} b_i \\ &= b_{i+1} b_i b_{i+1} \otimes b_{i+1} b_i b_{i+1} \\ &= (b_{i+1} \otimes b_{i+1})(b_i \otimes b_i)(b_{i+1} \otimes b_{i+1}). \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} b_1 &= B \otimes 1 \otimes B \otimes 1, \\ b_2 &= 1 \otimes B \otimes 1 \otimes B. \end{aligned} \quad (4.50)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} &(B \otimes 1 \otimes B \otimes 1)(1 \otimes B \otimes 1 \otimes B)(B \otimes 1 \otimes B \otimes 1) \\ &= (1 \otimes B \otimes 1 \otimes B)(B \otimes 1 \otimes B \otimes 1)(1 \otimes B \otimes 1 \otimes B). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Definindo

$$B' = B \otimes 1 \otimes B, \quad (4.52)$$

temos uma relação análoga à equação (4.47)

$$(B' \otimes 1)(1 \otimes B')(B' \otimes 1) = (1 \otimes B')(B' \otimes 1)(1 \otimes B'). \quad (4.53)$$

O elemento  $B'$  quando aplicado em estados da base geram estados emaranhados não genuinamente

$$\begin{aligned} \psi &= (B \otimes 1 \otimes B) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Desenvolvendo esta expressão temos

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \right\} \otimes \gamma_1 \varepsilon_1 \\ &\quad \otimes \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ou seja, temos um estado fatorável com 5 partes, em que as duas primeiras e as duas últimas estão maximamente emaranhadas. Simbolicamente,

$$\psi = \psi_{12} \otimes \psi_3 \otimes \psi_{45}, \quad (4.56)$$

em que  $\psi_{12}$  e  $\psi_{45}$  são indecomponíveis

$$\begin{aligned}\psi_{12} &\neq \psi_1 \otimes \psi_2, \\ \psi_{45} &\neq \psi_4 \otimes \psi_5.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Uma generalização para sistemas com mais partes pode ser realizada similarmente. Uma outra estrutura algébrica abordada na referência [48] que permite uma descrição topológica do emaranhamento quântico é a álgebra de Temperley-Lieb, definida em termos dos geradores  $E_i$ , satisfazendo as relações

$$\begin{aligned}E_i^2 &= E_i, & (E_i)^\dagger &= E_i, & i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ E_i E_{i\pm 1} E_i &= \lambda^{-2} E_i, \\ E_i E_j &= E_j E_i, & |i-j| &> 1,\end{aligned}\tag{4.58}$$

em que  $n$  é um número natural e  $\lambda$  é um parâmetro real, denominado parâmetro de laço. É fácil ver que podemos obter uma representação para o grupo de tranças em termos da álgebra acima, definindo os geradores do grupo de tranças como

$$b_i = 1 - kE_i,\tag{4.59}$$

onde

$$k = \frac{\lambda^2 \pm \lambda\sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.\tag{4.60}$$

Mostraremos que os elementos algébricos  $E_i$  também produzem estados de Bell quando atuam sobre os estados da base. Note inicialmente que para  $n = 3$ , os elementos

$$E_1 = \rho \otimes 1\tag{4.61}$$

e

$$E_2 = 1 \otimes \rho,\tag{4.62}$$

em que

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1)],\tag{4.63}$$

e  $\lambda = 8$ , satisfazem a álgebra de Temperley-Lieb. Sua ação sobre os elementos da base é dada por

$$\begin{aligned}
\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_1) (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\
\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_3) (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= 0, \\
\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_1) (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= 0, \\
\rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_3) (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_3 \otimes \gamma_1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3)] (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \quad (4.64)
\end{aligned}$$

Portanto  $\rho$  gera estados do tipo Bell ou anula os estados da base.

Neste capítulo mostramos como os estados quânticos e o emaranhamento podem ser compreendidos numa linguagem algébrica [54]. Os estados são elementos de ideais à esquerda minimais da álgebra e podem ser construídos a partir dos geradores da álgebra. Esse é um aspecto importante pois os operadores também podem ser escritos em termos destes mesmos geradores de modo que a descrição torna-se compacta e fácil de ser operacionalizada, tendo em vista as relações entre os geradores. Como forma de evidenciar esse fato consideramos o emaranhamento via o grupo de tranças com essa formulação. No próximo capítulo, notaremos estes aspectos ainda mais claramente ao investigar a construção das portas lógicas quânticas algébricas.

## Capítulo 5

# Computação Quântica Algébrica

As portas lógicas quânticas correspondem a operações unitárias realizadas sobre os q-bits. Do ponto de vista físico, podem ser implementadas através de espelhos [1], deslocadores de fase [1], divisores de feixe [98], pulsos de laser [99], pulsos de campo magnético [100], etc., dependendo da representação física escolhida para os q-bits.

Na computação quântica óptica, por exemplo, os q-bits podem ser representados por meio de dois modos, cada um dos quais contendo no máximo um fóton, isto é,

$$\begin{aligned} |0\rangle_L &\rightarrow |01\rangle, \\ |1\rangle_L &\rightarrow |10\rangle, \end{aligned}$$

na representação denominada duplo-trilho [101]. Os divisores de feixe, realizados experimentalmente como dois prismas com um filme fino metálico entre eles, refletindo uma fração  $R$  da luz incidente e transmitindo  $1 - R$ , executam a transformação unitária

$$U = \exp[\theta(a^\dagger b - ab^\dagger)],$$

onde  $\theta$  é um parâmetro real,  $a^\dagger, b^\dagger$  referem-se aos operadores de criação dos modos A e B, respectivamente e  $a$  e  $b$  denotam os operadores de destruição dos modos A e B, respectivamente, interpretada como uma rotação no espaço dos q-bits, notando-se

que em termos dos estados  $|0\rangle_L$  e  $|1\rangle_L$ ,

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Outro conceito relevante em computação quântica é o de universalidade das portas lógicas quânticas. Um dado conjunto de portas é dito universal para a computação quântica se uma operação unitária qualquer pode ser construída com precisão arbitrária por um dado circuito quântico envolvendo somente aquelas portas. Mostra-se [1] que as portas de um q-bit (matrizes unitárias atuando sobre um único q-bit) podem ser obtidas a partir da matriz identidade ( $2 \times 2$ ) e das matrizes de Pauli

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

As portas de um q-bit, juntamente com a porta lógica CNOT dada por

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

formam um conjunto de portas lógicas quânticas universais [1].

Para validar nossa proposta de computação quântica algébrica devemos mostrar como construir portas lógicas quânticas algebricamente, que é exatamente o conteúdo deste capítulo. As portas lógicas algébricas transformam certos elementos de ideais à esquerda minimais em outros elementos do mesmo ideal. Tais elementos podem ser interpretados geometricamente de uma forma bastante natural através de uma fibração de Hopf [102, 103] onde a álgebra dos quatérnions será utilizada. Este procedimento resulta em uma nova interpretação dos q-bits em termos da esfera de Bloch.

## 5.1 Portas Lógicas Quânticas Algébricas

Podemos obter conjuntos de portas lógicas quânticas universais baseados unicamente em elementos algébricos. Mostraremos que isso é possível utilizando a álgebra de Clifford  $Cl(3, 0)$ . Nossa construção faz uso do fato de que as portas lógicas quânticas são elementos do grupo de Lie das matrizes unitárias  $U(n)$  e que existe um isomorfismo entre subálgebras do produto tensorial das álgebras  $Cl(3, 0)$  e a álgebra de Lie do grupo  $U(2^n)$ , denotada por  $u(2^n)$ .

A álgebra de Lie  $u(n)$  consiste no espaço das matrizes complexas anti-hermitianas sobre o corpo dos reais. Um elemento arbitrário da álgebra  $u(n)$  possui a forma [83]

$$M = \sum_{i,j} \alpha_{ij} E_{ij},$$

onde  $E_{ij}$  são matrizes de dimensão  $n \times n$ , em que o elemento  $ij$  possui valor 1, e os demais elementos são nulos com  $i, j = 1, \dots, n$ . Os elementos  $\alpha_{ij}$  são coeficientes pertencentes ao corpo dos complexos e devem satisfazer a relação

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}^*.$$

Para a álgebra de Lie  $u(n)$ , podemos construir seus geradores por meio das relações

$$M_{ij} = i(E_{ij} + E_{ji}), \quad \text{se } i > j,$$

$$M_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, \quad \text{se } i < j,$$

$$M_{ii} = iE_{ii}.$$

Note que os  $n^2$  elementos  $M_{ij}$  e  $M_{ii}$  são anti-hermitianos e linearmente independentes.

Por exemplo, para a álgebra  $u(2)$ , temos

$$M_{11} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

É possível realizar uma mudança de base da álgebra de  $u(2)$ , construindo uma nova base em termos de múltiplos das matrizes de Pauli, acrescidas de  $iI$  :

$$i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad i1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Observe que se excluirmos o elemento  $i1$ , temos a álgebra de Lie  $su(2)$ . Em termos da álgebra  $Cl(3,0)$ , cujo elemento geral (multivetor) é dado por

$$\Gamma = a^0 1 + a^1 \gamma_1 + a^2 \gamma_2 + a^3 \gamma_3 + a^{12} \gamma_1 \gamma_2 + a^{23} \gamma_2 \gamma_3 + a^{31} \gamma_3 \gamma_1 + a^{123} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (5.3)$$

podemos construir geradores para  $U(2)$  através da álgebra dos bivectores, adicionada do trivetor  $I = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ , isto é,

$$\{\gamma_1 \gamma_2, \gamma_2 \gamma_3, \gamma_3 \gamma_1, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3\}. \quad (5.4)$$

Estes elementos formam uma álgebra

$$\begin{aligned} [\gamma_1 \gamma_2, \gamma_2 \gamma_3] &= -2\gamma_3 \gamma_1, & [\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3 \gamma_1] &= 2\gamma_2 \gamma_3, & [\gamma_1 \gamma_2, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3] &= 0, \\ [\gamma_2 \gamma_3, \gamma_3 \gamma_1] &= -2\gamma_1 \gamma_2, & [\gamma_2 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3] &= 0, & [\gamma_3 \gamma_1, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3] &= 0. \end{aligned}$$

Temos quatro geradores e esta álgebra é isomórfica à álgebra de Lie de  $U(2)$ . Excluindo o trivetor  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ , que é único constituinte do centro da álgebra, temos um isomorfismo com a álgebra de Lie de  $SU(2)$ . Para  $u(4)$ , temos 16 geradores; esses geradores podem ser construídos como:

$$\begin{array}{cccc} \gamma_1 \gamma_2 \otimes \gamma_1 & \gamma_1 \gamma_2 \otimes \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_2 \otimes \gamma_3 & \gamma_1 \gamma_2 \otimes 1 \\ \gamma_2 \gamma_3 \otimes \gamma_1 & \gamma_2 \gamma_3 \otimes \gamma_2 & \gamma_2 \gamma_3 \otimes \gamma_3 & \gamma_2 \gamma_3 \otimes 1 \\ \gamma_3 \gamma_1 \otimes \gamma_1 & \gamma_3 \gamma_1 \otimes \gamma_2 & \gamma_3 \gamma_1 \otimes \gamma_3 & \gamma_3 \gamma_1 \otimes 1 \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \otimes \gamma_1 & \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \otimes \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \otimes \gamma_3 & \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \otimes 1 \end{array}$$

observando-se que os elementos acima são linearmente independentes e o produto tensorial entre bivectores e vetores para uma representação em termos das matrizes de Pauli, resulta em matrizes anti-hermitianas; o mesmo ocorre para o produto tensorial entre um trivetor (ou bivector) e a identidade. Se tivermos interessados na álgebra  $su(4)$ , devemos excluir o elemento  $1 \otimes \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ . Para a álgebra  $u(8)$ , temos 64 geradores obtidos tomando produtos tensoriais entre bivectores (ou trivetores) e vetores (identidade), com a condição de que os bivectores (trivetores) apareçam um número ímpar de vezes. Isso pode ser melhor compreendido se nos remetermos à operação de reversão em uma álgebra de Clifford, em analogia com a operação de construção de operadores hermitianos matriciais. Definimos a operação de reversão através de um multivetor  $\Gamma$  (um  $p$ -vetor) como

$$\tilde{\Gamma}_{[p]} = (-1)^{p(p-1)/2} \Gamma_{[p]}. \quad (5.5)$$

Para um escalar, um vetor, um bivector e um trivetor, temos, respectivamente

$$\tilde{\Gamma}_{[0]} = \Gamma_{[0]}, \quad \tilde{\Gamma}_{[1]} = \Gamma_{[1]}, \quad \tilde{\Gamma}_{[2]} = -\Gamma_{[2]}, \quad \tilde{\Gamma}_{[3]} = -\Gamma_{[3]}. \quad (5.6)$$

A analogia é claramente percebida se considerarmos uma representação matricial para o multivetor  $\Gamma$ , dado por (5.3), em termos das matrizes Pauli,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\alpha^0 + \alpha^3) + i(\alpha^{12} + \alpha^{123}) & (\alpha^1 - \alpha^{31}) + i(\alpha^{23} - \alpha^2) \\ (\alpha^1 - \alpha^{31}) + i(\alpha^{23} + \alpha^2) & (\alpha^0 - \alpha^3) + i(\alpha^{123} - \alpha^{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}.$$

Realizando a operação de reversão, temos

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

correspondendo à matriz transposta conjugada de  $\Gamma$ , ou adjunta de  $\Gamma$ . Tomando o produto tensorial de bivectores

$$\tilde{\Gamma}_{[2]} \otimes \tilde{\Gamma}_{[2]} = (-\Gamma_{[2]}) \otimes (-\Gamma_{[2]}) = \Gamma_{[2]} \otimes \Gamma_{[2]}, \quad (5.8)$$

ou seja a “anti-hermiticidade” é perdida. Por outro lado, realizando o produto tensorial de um bivector com um vetor, temos

$$-\tilde{\Gamma}_{[2]} \otimes \tilde{\Gamma}_{[1]} = (-\Gamma_{[2]}) \otimes \Gamma_{[1]} = -\Gamma_{[2]} \otimes \Gamma_{[2]}, \quad (5.9)$$

ou seja, a “anti-hermiticidade” é garantida; um raciocínio similar é válido para o trivector. No caso geral da álgebra  $u(2^n)$ , temos

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 \otimes \dots \otimes \gamma_1, & \quad \dots & \quad \gamma_1 \gamma_2 \otimes \dots \otimes 1 \\ \gamma_2 \gamma_3 \otimes \dots \otimes \gamma_1 & \quad \dots & \quad \gamma_2 \gamma_3 \otimes \dots \otimes 1 \\ \gamma_3 \gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_1 & \quad \dots & \quad \gamma_3 \gamma_1 \otimes \dots \otimes 1 \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \otimes \dots \otimes \gamma_1 & \quad \dots & \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \otimes \dots \otimes 1, \end{aligned} \quad (5.10)$$

com bivectores e trivectores aparecendo um número ímpar de vezes, a fim de garantir que o produto tensorial resulte em elemento anti-hermitiano. Por exemplo, para elementos da álgebra  $u(2^3) = u(8)$ , os termos em que o primeiro fator do produto tensorial é  $\gamma_1 \gamma_2$ , e o último fator é  $\gamma_1$ , são dados por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1, \\ \gamma_1 \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_1, \\ \gamma_1 \gamma_2 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1, \\ \gamma_1 \gamma_2 \otimes 1 \otimes \gamma_1, \end{aligned}$$

seguindo uma construção análoga a do caso  $u(4)$ . A exponencial de um multivector  $\Gamma$  é definida como

$$\exp \Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^n}{n!}. \quad (5.11)$$

Para o multivector  $\Gamma$ , temos

$$\begin{aligned} \Gamma = & \alpha_{12}^{\dots 1} \gamma_1 \gamma_2 \otimes \dots \otimes \gamma_1 + \dots + \alpha_{12}^{\dots 0} \gamma_1 \gamma_2 \\ & \otimes \dots \otimes 1 + \alpha_{23}^{\dots 1} \gamma_2 \gamma_3 \otimes \dots \otimes \gamma_1 + \dots + \alpha_{23}^{\dots 0} \gamma_2 \gamma_3 \\ & \otimes \dots \otimes 1 + \alpha_{31}^{\dots 1} \gamma_3 \gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_1 + \dots + \alpha_{31}^{\dots 0} \gamma_3 \gamma_1 \\ & \otimes \dots \otimes 1 + \alpha_0^{\dots 1} 1 \otimes \dots \otimes \gamma_3 \gamma_1 + \dots + \alpha_0^{\dots 0} 1 \otimes \dots \otimes \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dessa forma, um elemento geral de  $U(2^n)$  em termos algébricos é dado por

$$\begin{aligned}
U = & \exp(\alpha_{12}^{\dots 1} \gamma_1 \gamma_2 \otimes \dots \otimes \gamma_1 + \dots + \alpha_{12}^{\dots 0} \gamma_1 \gamma_2 \otimes \dots \otimes 1 \\
& + \alpha_{23}^{\dots 1} \gamma_2 \gamma_3 \otimes \dots \otimes \gamma_1 + \dots + \alpha_{23}^{\dots 0} \gamma_2 \gamma_3 \otimes \dots \otimes 1 \\
& + \alpha_{31}^{\dots 1} \gamma_3 \gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_1 + \dots + \alpha_{31}^{\dots 1} \gamma_3 \gamma_1 \otimes \dots \otimes 1 \\
& + \alpha_0^{\dots 1} 1 \otimes \dots \otimes \gamma_3 \gamma_1 + \dots + \alpha_0^{\dots 1} 1 \otimes \dots \otimes \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

em que os índices inferiores dizem respeito ao primeiro fator do produto tensorial, atribuindo o índice 0 para a unidade, e os índices superiores indicam a sequência em que os multivetores aparecem a partir do segundo fator. Os coeficientes  $\alpha_i^j$  são reais.

Mostramos então como é possível construir portas lógicas dentro da formulação algébrica por nós desenvolvida, através de uma estrutura de álgebra de Lie de  $U(2^n)$  contida dentro da álgebra produto  $Cl(3, 0) \otimes Cl(3, 0) \otimes \dots \otimes Cl(3, 0)$ . Estas portas lógicas podem ser expressas por meio dos geradores da álgebra, de modo que quando operacionalizadas sobre os estados, o estado resultante pode ser obtido de forma imediata, tendo em vista que dispomos das relações entre os geradores, e os estados também são expressos em termos destes.

## 5.2 Aplicações

Nesta seção aplicaremos o formalismo desenvolvido na seção precedente com a utilização de algumas portas lógicas conhecidas. Considere então, inicialmente, a porta lógica quântica  $N\tilde{A}O$  denotada pela matriz de Pauli  $X$ , cujo efeito sobre um qubit é dado por

$$X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Visto que  $Cl(3, 0)$  está definida sobre o corpo dos reais, devemos escrever o estado de um q-bit algebricamente como

$$\psi = (\alpha_1 + \alpha_2 I) \gamma_3 \varepsilon_1 + (\beta_1 + \beta_2 I) \gamma_1 \varepsilon_1,$$

em que  $I \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ , um trivetor. Então, o correspondente algébrico da porta  $X$  é dado pelo elemento  $\gamma_1$ , pois

$$\begin{aligned} & \gamma_1[(\alpha_1 + \alpha_2 I)\gamma_3\varepsilon_1 + (\beta_1 + \beta_2 I)\gamma_{13}\varepsilon_1] \\ &= (\beta_1 + \beta_2 I)\gamma_3\varepsilon_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 I)\gamma_1\varepsilon_1. \end{aligned}$$

O elemento  $\gamma_1$  pode ser obtido através do produto

$$\begin{aligned} U_x &= \exp(\alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\exp(\theta\gamma_2\gamma_3) \\ &= \exp(\alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \theta\gamma_2\gamma_3), \end{aligned}$$

em que  $\alpha = -\pi/2$ ,  $\theta = \pi/2$  e a segunda igualdade decorre do fato de que o trivetor  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  comuta com o bivector  $\gamma_2\gamma_3$ . Para compreender melhor este resultado, analisaremos cada um dos fatores acima. Sendo  $U_{x_1} = \exp(\alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ , temos

$$\begin{aligned} U_{x_1} &= \exp(\alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\ &= 1 + \alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \frac{\alpha^2}{2!}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^2 + \frac{\alpha^3}{3!}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^3 + \dots \\ &= 1 + \alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \frac{\alpha^2}{2!}1 - \frac{\alpha^3}{3!}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \frac{\alpha^4}{4!}1 + \frac{\alpha^5}{5!}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ &= (1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots) + (\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots)\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ &= \cos(\alpha)1 + \text{sen}(\alpha)\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \end{aligned}$$

Seja agora  $U_{x_2} = \exp(\theta\gamma_2\gamma_3)$ . Então

$$\begin{aligned} U_{x_2} &= \exp(\theta\gamma_2\gamma_3) = \\ &= 1 + \theta\gamma_2\gamma_3 + \frac{\theta^2}{2!}(\gamma_2\gamma_3)^2 + \frac{\theta^3}{3!}(\gamma_2\gamma_3)^3 + \dots \\ &= 1 + \theta\gamma_2\gamma_3 - \frac{\theta^2}{2!}1 - \frac{\theta^3}{3!}\gamma_2\gamma_3 + \frac{\theta^4}{4!}1 + \frac{\theta^5}{5!}\gamma_2\gamma_3 \\ &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots) + (\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots)\gamma_2\gamma_3 \\ &= \cos(\theta)1 + \text{sen}(\theta)\gamma_2\gamma_3. \end{aligned}$$

Para  $\alpha = -\pi/2$  e  $\theta = \pi/2$ ,

$$\begin{aligned} U &= U_{x_1} U_{x_2} \\ &= \text{sen}(-\pi/2)\gamma_1\gamma_2\gamma_3\text{sen}(\pi/2)\gamma_2\gamma_3 \\ &= \gamma_1. \end{aligned}$$

Um outro exemplo de interesse é o correspondente algébrico da porta *CNOT*, que realiza a transformação

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle, \\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle, \\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle, \\ |11\rangle &\rightarrow |10\rangle. \end{aligned}$$

Considere então o elemento

$$\begin{aligned} U &= \exp[\alpha(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1)] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{\theta}{2}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1)\right]. \end{aligned}$$

Visto que

$$\begin{aligned} (\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1)^2 &= -1 \otimes 1, \\ \left[\frac{1}{2}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1)\right]^2 &= -1 \otimes 1, \end{aligned}$$

podemos reescrever  $U$  realizando um procedimento análogo ao da porta lógica  $X$ ,

$$\begin{aligned} U &= [\cos \alpha(1 \otimes 1) + \text{sen} \alpha[(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1)]] [\cos \theta(1 \otimes 1) \\ &\quad + \text{sen} \theta \left[\frac{1}{2}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1)\right]]. \end{aligned}$$

Fazendo  $\alpha = -\pi/2$  e  $\theta = \pi/2$ ,

$$\begin{aligned}
U &= -(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1) \left[ \frac{1}{2}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2 \otimes 1 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1) \right] \\
&= \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + \gamma_3 \otimes 1 + 1 \otimes \gamma_1 - \gamma_3 \otimes \gamma_1) \\
&= \frac{1}{2}[(1 + \gamma_3) \otimes 1 + (1 - \gamma_3) \otimes \gamma_1] \\
&= \frac{1}{2}(1 + \gamma_3) \otimes 1 + \frac{1}{2}(1 - \gamma_3) \otimes \gamma_1.
\end{aligned}$$

Este elemento é o correspondente algébrico da porta *CNOT*. De fato,

$$\begin{aligned}
U(\gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= (\gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\
U(\gamma_3 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= (\gamma_3 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\
U(\gamma_1 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= (\gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \\
U(\gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= (\gamma_1 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1).
\end{aligned}$$

Um ponto importante a ser observado em nossa formulação algébrica é que obtivemos algebricamente duas portas lógicas como exemplos - a porta lógica ( $X$ ) e a porta lógica *CNOT*. As outras portas lógicas de um q-bit, ( $Y$ ) e ( $Z$ ) podem ser geradas num procedimento idêntico ao da porta ( $X$ ). Sendo possível construir as portas lógicas de um q-bit e *CNOT* algebricamente, qualquer outra porta lógica quântica pode ser realizada, uma vez que todas as portas lógicas podem ser construídas a partir destas [1]. Isso valida nossa proposta de computação quântica algébrica. Uma outra questão apontada nos capítulos precedentes e ratificada aqui diz respeito à facilidade operacional na medida em que as portas lógicas e os q-bits são descritos por meio dos geradores da álgebra.

### 5.3 Representação Geométrica para os Q-bits Algébricos

O estado genérico de um q-bit dado por

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (a + ib) |0\rangle + (c + id) |1\rangle \\ &= a |0\rangle + bi |0\rangle + c |1\rangle + di |1\rangle, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , pode ser reescrito como

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (5.15)$$

com  $\theta$  e  $\varphi$  reais. Esses números definem um ponto sobre a superfície de uma esfera de raio unitário, chamada de esfera de Bloch [1]. As operações entre os q-bits podem ser visualizadas na esfera de Bloch. Contudo, a generalização para muitos q-bits não é trivial. Nesta seção mostraremos uma forma de obter uma representação geométrica para os q-bits na esfera de Bloch, sem a necessidade de escrever o estado de um q-bit em termos dos ângulos  $\theta$  e  $\varphi$ , onde utilizaremos isomorfismos entre álgebras. Considere então uma fibração de Hopf [102, 103, 104, 105], definida pela aplicação

$$T : S^3 \rightarrow S^2, \quad (5.16)$$

em que  $S^2$  corresponde à esfera em  $\mathbb{R}^3$  de centro na origem e raio unitário, e analogamente,  $S^3$  corresponde a uma hipersfera em  $\mathbb{R}^4$  de centro na origem e raio unitário. A fibração de Hopf pode ser obtida através dos quatérnions, isto é, elementos do tipo

$$q = a1 + bi + cj + dk, \quad (5.17)$$

em que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $i, j, k$  são entes que obedecem a seguinte tabela de multiplicação

	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

Os quatérnions formam uma álgebra  $Q$  sobre o corpo dos reais e mostra-se facilmente [106] que  $Q \approx Cl^+(3,0)$ , a sub-álgebra par (álgebra dos bivectores) da álgebra de Clifford  $Cl(3,0)$ . Um quatérnion  $q$  pode ser pensado como um vetor em  $\mathbb{R}^4$  com a identificação

$$(1\ 0\ 0\ 0) \longleftrightarrow 1, \quad (0\ 1\ 0\ 0) \longleftrightarrow i, \quad (0\ 0\ 1\ 0) \longleftrightarrow j, \quad (0\ 0\ 0\ 1) \longleftrightarrow k, \quad (5.18)$$

e também como um estado quântico na forma (5.14) identificando

$$|0\rangle \longleftrightarrow 1, \quad i|0\rangle \longleftrightarrow i, \quad |1\rangle \longleftrightarrow j, \quad i|1\rangle \longleftrightarrow k,$$

de modo que os coeficientes  $a, b, c, d$ , caracterizando as amplitudes de probabilidade do estado quântico (5.14), são identificados como coeficientes do quatérnion (5.17).

Um quatérnion puro possui a forma

$$p = xi + yj + zk. \quad (5.19)$$

A aplicação  $T_q(p) = qpq^{-1}$  também é um quatérnion puro, onde  $q^{-1}$ , o inverso de um quatérnion  $q$  é dado por

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|}(a - bi - cj - dk),$$

onde  $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ . Observe também que a aplicação  $T_q$  é linear

$$T_q(\alpha p_1 + \beta p_2) = q(\alpha p_1 + \beta p_2)q^{-1} = q\alpha p_1 q^{-1} + q\beta p_2 q^{-1} = \alpha T_q(p_1) + \beta T_q(p_2), \quad (5.20)$$

sendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e podemos representá-la pela matriz obtida na referência [107], dada por

$$T_q = \begin{pmatrix} 1 - 2(c^2 + d^2) & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & 1 - 2(b^2 + d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & 1 - 2(c^2 + b^2) \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

em que  $a, b, c$  e  $d$  são as componentes do quatérnion  $q$  e estão associados às amplitudes de probabilidade de modo que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . A aplicação  $T_q$  é uma fibração de Hopf levando um elemento de  $S^3$  em  $S^2$ :

$$T_q : S^3 \rightarrow S^2.$$

De posse do isomorfismo  $Q \approx Cl^+(3, 0)$ , podemos escrever o quatérnion dado na equação (5.17), que representa o q-bit, por

$$\psi = a1 + b\gamma_1\gamma_2 + c\gamma_1\gamma_3 + d\gamma_2\gamma_3. \quad (5.22)$$

Por outro lado, temos mostrado que o qubit pode ser representado algebricamente por

$$\psi = (a + Ib)\gamma_3\varepsilon_1 + (c + Id)\gamma_1\varepsilon_1, \quad (5.23)$$

onde  $I = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$  é um trivetor. Podemos relacionar estes dois entes, o quatérnion com o ideal à esquerda minimal, estabelecendo um isomorfismo  $Cl(3, 0)\varepsilon_1 \approx Cl^+(3, 0)$ , em relação à estrutura de espaço vetorial por

$$\gamma_3\varepsilon_1 \longleftrightarrow 1, \quad I\gamma_3\varepsilon_1 \longleftrightarrow \gamma_1\gamma_2, \quad \gamma_1\varepsilon_1 \longleftrightarrow \gamma_1\gamma_3, \quad I\gamma_1\varepsilon_1 \longleftrightarrow \gamma_2\gamma_3. \quad (5.24)$$

Em uma representação matricial temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ c + id & 0 \end{pmatrix} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Logo, de posse de um q-bit, representado por um elemento de um ideal à esquerda minimal de  $Cl(3, 0)$ , podemos encontrar um isomorfismo deste com um elemento de  $Cl^+(3, 0)$ , a partir do qual também existe um isomorfismo com um elemento de um quatérnion  $Q$ . Simbolicamente,

$$Cl(3, 0)\varepsilon_1 \approx Cl^+(3, 0) \approx Q, \quad (5.26)$$

onde o primeiro isomorfismo se refere à estrutura de espaço vetorial. Em seguida, de posse do quatérnio  $q \in Q$ , é possível construir o mapa  $T_q$  mapeando um elemento de quatro componentes (o quatérnio  $q$ ) em um elemento de três componentes (o quatérnio  $p$ ) permitindo uma representação geométrica do q-bit em termos da esfera de Bloch. Por exemplo suponha que o estado quântico seja dado por

$$\psi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\right)\gamma_3\varepsilon_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\right)\gamma_1\varepsilon_1. \quad (5.27)$$

O primeiro isomorfismo permite escrever este elemento em termos de bivectores como

$$\psi = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_3 + \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3.$$

O utilização do segundo isomorfismo resulta no quatérnio

$$q = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k.$$

A aplicação de Hopf, neste caso é dada pela matriz

$$T_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar suas componentes  $(x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$  basta aplicar a matriz  $T_q$  sobre o vetor unitário

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso temos as componentes  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ , que correspondem a um ponto na esfera de Bloch.

As portas lógicas quânticas, os q-bits e sua geometria são temas recorrentes em computação quântica e informação quântica. Os resultados apresentados neste capítulo validam nossa proposta, mostrando a possibilidade de uma formulação algébrica

para a computação quântica através de um conjunto de portas lógicas quânticas algébricas, que por sua vez permitem a construção de um conjunto universal de portas lógicas quânticas. Ademais, encontramos uma interpretação geométrica para os q-bits na esfera de Bloch, fazendo uso de isomorfismos entre álgebras e das fibrações de Hopf. No próximo capítulo, ampliaremos este formalismo para a correção quântica de erro, onde novas feições e nuances serão percebidas.

## Capítulo 6

# Correção Quântica de Erro Algébrica

O ruído é o grande problema nos sistemas de processamento da informação. Sua ação deve ser evitada completamente, o que nem sempre é possível. Neste caso, pode-se proteger a informação, de modo a minimizar os efeitos do ruído. Uma forma de fazer isso é adicionando informação redundante ao sistema; caso alguma informação seja corrompida, no envio de uma mensagem, a redundância permite a decodificação e subsequente recuperação da mensagem original.

Na informação quântica, a situação não é diferente, respeitando-se a distinção entre as propriedades clássicas e quânticas. O ruído, é inclusive um dos principais obstáculos na implementação experimental dos computadores quânticos [49]. Esses problemas estimularam a criação dos códigos corretores de erros.

Os códigos corretores de erro [1] tem com fito proteger os estados quânticos dos efeitos de ruído, codificando-os de modo a torná-los resistentes à ação do ruído e decodificando-os quando se deseja recuperá-los. Existem duas classes de códigos corretores de erros amplamente utilizados : os códigos estabilizadores e os subespaços livres de descoerência (códigos DFS) [44, 45]. Estes códigos guardam uma relação entre si que pode ser bem compreendida em termos da teoria de representação de grupos finitos, apontando vantagens na busca de formulações algébricas.

Neste capítulo mostraremos que estes códigos podem ser construídos a partir de

elementos algébricos dentro do formalismo apresentado nos capítulos anteriores. A formulação algébrica para os projetores desenvolvida no capítulo 2 tem um papel essencial na construção dos subespaços livres de decoerência

## 6.1 Elementos da Correção Quântica de Erro

Dois códigos simples paradigmáticos que ilustram bem a correção quântica de erro são os códigos de inversão de bit e os códigos de inversão de fase. Considere primeiramente um canal de inversão de q-bit, que é um canal com análogo clássico. Como uma forma de elucidar os conceitos, suponha a codificação com três q-bits dada por

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |0\rangle_L \equiv |000\rangle, \\ |1\rangle &\rightarrow |1\rangle_L \equiv |111\rangle. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Então o estado inicial  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  será codificado como  $|\psi\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle$ . A detecção de erro pode ser realizada através dos seguintes operadores de projeção, denominados de síndromes [1]:

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|, \\ P_1 &\equiv |100\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 011|, \\ P_2 &\equiv |010\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 101|, \\ P_3 &\equiv |001\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 110|. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Os operadores  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  indicam a inexistência de erros e inversões do primeiro, segundo e terceiro q-bits, respectivamente. Sendo  $|\psi_c\rangle$  o estado corrompido, para a recuperação do estado original basta inverter o  $i$ -ésimo q-bit caso  $\langle\psi_c|P_i|\psi_c\rangle = 1$ . Por exemplo, suponha  $|\psi_c\rangle = a|010\rangle + b|101\rangle$ . Ao aplicarmos os operadores  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , notaremos que  $\langle\psi_c|P_i|\psi_c\rangle = 0$ , exceto para  $i = 2$ , em que  $\langle\psi_c|P_2|\psi_c\rangle = 1$ ,

indicando uma inversão no segundo q-bit. Invertendo este, recuperaremos o estado  $|\psi\rangle$ .

Considerando um segundo tipo de canal, seja o canal de inversão de fase

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle - b|1\rangle,$$

que evidentemente não possui análogo clássico. O operador  $Z \equiv \sigma_3$  realiza tal operação. Suponha agora que se opere na base

$$\begin{aligned} |+\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ |-\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

Em relação a esta nova base o operador  $Z$  realiza a transformação

$$\begin{aligned} Z|+\rangle &= |-\rangle, \\ Z|-\rangle &= |+\rangle; \end{aligned}$$

ou seja, o operador  $Z$  atua nesta base como um canal de inversão de q-bit. Dessa forma, podemos prôpor a codificação

$$|0\rangle_L \equiv |+++ \rangle, \quad |1\rangle_L \equiv |-- \rangle.$$

e realizar as operações de detecção de erro e recuperação similarmente à realizada no canal de inversão de q-bit. A mudança pode ser feita através da porta de Hadamard

$$H_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

pois

$$H_d|0\rangle = |+\rangle, \quad H_d|1\rangle = |-\rangle.$$

A detecção de erro é obtida aplicando-se as medidas projetivas conjugadas por portas de Hadamard

$$P_j \rightarrow P'_j \equiv (H_d^{\otimes 3}) P_j (H_d^{\otimes 3}),$$

onde  $P_j$  é dado pelos projetores (6.2) e  $H_d^{\otimes 3} = H_d \otimes H_d \otimes H_d$ . Os canais de inversão de q-bit e de inversão de fase são ditos unitariamente equivalentes tendo em vista que a ação dos dois canais é a mesma desde que um deles seja alterado por uma transformação de similaridade. Discutiremos as condições gerais para a correção quântica de erro, mas antes analisaremos os operadores de Krauss e os subespaços livres de descoerência.

Para um sistema em interação com o ambiente, o operador densidade do sistema, inicialmente desacoplado do ambiente, é dada por

$$\rho = Tr_B \{ U [\rho_0 \otimes \rho_{B_0}] U^\dagger \} \quad (6.3)$$

em que  $Tr_B$  é o traço parcial sobre o ambiente,  $\rho_0$  é o operador densidade inicial do sistema,  $\rho_{B_0}$  corresponde ao operador densidade inicial do ambiente e  $U$  é um operador unitário. Utilizando a decomposição espectral  $\rho_{B_0} = \sum_\nu \lambda_\nu |\nu\rangle \langle \nu|$ , temos

$$\begin{aligned} \rho &= Tr_B \left\{ U \left[ \rho_0 \otimes \sum_\nu \lambda_\nu |\nu\rangle \langle \nu| \right] U^\dagger \right\} \\ &= \sum_{\mu, \nu} \langle \mu | U [\rho_0 \otimes (\lambda_\nu |\nu\rangle \langle \nu|)] U^\dagger | \mu \rangle \\ &= \sum_d A_d \rho_0 A_d^\dagger, \end{aligned} \quad (6.4)$$

em que

$$A_d = \sqrt{\lambda_\nu} \langle \mu | U | \nu \rangle, \quad d = (\mu, \nu), \quad (6.5)$$

e

$$\sum_d A_d A_d^\dagger = I. \quad (6.6)$$

garantindo a preservação do traço da matriz densidade. Os operadores  $A_d$  são denominados operadores de Krauss. Uma possível expansão dos operadores de Krauss é dada em termos de uma soma de produtos tensoriais das matrizes de Pauli [44, 45]

$$A_d = \sum_{n=1}^{4^{k+1}} \alpha_{d,n} p_n, \quad (6.7)$$

em que  $\alpha_{d,n}$  são coeficientes pertencentes ao corpo dos complexos e  $p_n \in G_n$ , o grupo de Pauli generalizado [44, 45]. Conseqüentemente, os operadores de Krauss pertencem a uma álgebra de grupo.

Seja  $H_s$  o espaço de Hilbert associado ao sistema  $S$ . Um subespaço  $H'_s$  de  $H_s$ , expandido por  $\{|j'\rangle\}$ , é dito um subespaço livre de descoerência, se a evolução da matriz densidade é realizada por um operador unitário. Seja então

$$A_d |j'\rangle = c_d U' |j'\rangle, \quad \forall d, \quad (6.8)$$

onde  $U'$  é uma transformação unitária arbitrária e  $c_d$  uma constante. Em  $H'_s$  um estado geral do subespaço livre de descoerência e que denominaremos de estado interno  $|\psi_{int}\rangle$  é dado por

$$|\psi_{int}\rangle = \sum_j \gamma_j |j'\rangle. \quad (6.9)$$

Utilizando a equação (6.8), segue que

$$A_d |\psi_{int}\rangle = c_d U' |\psi_{int}\rangle. \quad (6.10)$$

Então para o operador densidade do sistema, temos

$$\begin{aligned} \rho_s &= \sum_d A_d \rho'_{in} A_d^\dagger \\ &= \sum_d c_d U' |\psi_{int}\rangle \langle \psi_{int}| U'^\dagger c_d^*, \\ &= U' |\psi_{int}\rangle \langle \psi_{int}| U'^\dagger, \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde  $\rho'_{in}$  é o operador densidade inicial do sistema, que se encontra em um estado puro, e foi utilizada a condição de normalização para os operadores de Kraus. Por conseguinte, a condição (6.8) implica que a evolução do operador densidade do sistema é unitária. Lidar *et al* [44, 45] mostraram que os estados livres de descoerência podem ser caracterizados em termos de representações irredutíveis unidimensionais de uma álgebra de grupo associada aos operadores de Krauss.

Os mesmos autores demonstraram [45] que se escolhermos  $G$  como sendo um subgrupo  $Q$  do grupo de Pauli (vide seção 6.2), os subespaços livres de descoerência fixados por uma dada representação irredutível formam um código estabilizador, em que  $Q$  é o grupo estabilizador. Um outro aspecto relevante na teoria da correção quântica de erro é a possibilidade de se obter um conjunto de equações que ao serem verificadas determinamos se um dado código quântico corretor de erro protege o estado contra um particular ruído [1].

## 6.2 Formalismo Algébrico dos Estabilizadores

Na correção quântica de erro, o formalismo dos estabilizadores fornece uma descrição de uma ampla classe de operações em mecânica quântica. Este formalismo baseia-se no grupo de Pauli, que consiste em todas as matrizes de Pauli, juntamente com os fatores multiplicativos  $\pm 1, \pm i$ :

$$G_1 = \{\pm I, \pm iI, \pm X, \pm iX, \pm Y, \pm iY, \pm Z, \pm iZ\}. \quad (6.12)$$

Esse, na realidade, corresponde ao grupo de Pauli para um q-bit; para um sistema de  $n$  q-bits basta considerar  $n$  produtos tensoriais do grupo  $G_1$ , formando o grupo  $G_n$ :

$$G_n = \pm, \pm i \{ \otimes_{k=1}^n \sigma_{\alpha,k} \},$$

em que  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  correspondendo aos elementos  $1, X, Y, Z$ , respectivamente.

**Definição 18** *Seja  $S$  um subgrupo de  $G_n$ . Dizemos que  $S$  é o estabilizador de um dado espaço vetorial  $V_S$ , sendo  $V_S$  um conjunto dos estados de  $n$  q-bits, se para cada elemento  $s \in S$  temos*

$$sv = v,$$

para todo  $v \in V_S$ .

Um exemplo simples é dado por

$$\begin{aligned} S &= \{I, Z_1Z_2, Z_2Z_3, Z_1Z_3\}, \\ V_S &= \{|000\rangle, |111\rangle\}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

O índice inferior nas matrizes de Pauli indicam o subespaço de Hilbert em que as matrizes estão atuando. Como um grupo pode ser descrito por meio de seus geradores, no exemplo acima  $S$  pode ser descrito como

$$S = \langle Z_1Z_2, Z_2Z_3 \rangle, \tag{6.14}$$

já que  $Z_1Z_3 = (Z_1Z_2)(Z_2Z_3)$  e  $I = (Z_1Z_2)^2$ . Uma das principais vantagens do formalismo dos estabilizadores é que a descrição usual em termos dos vetores de estado requer a especificação de  $2^n$  amplitudes, enquanto que a descrição dos geradores é linear com  $n$  [1]. Ou seja, temos uma representação mais compacta. Novamente as matrizes de Pauli despontam como elemento central. Podemos então pensar em formalismo algébrico para os estabilizadores, observando que se a estrutura subjacente for uma álgebra teremos elementos geradores nos operadores e nos estados. Com esse objetivo introduziremos a seguinte definição

**Definição 19** *Seja  $A$  uma álgebra semi-simples e  $A_s$  uma subálgebra com elementos-base  $a_s^1, a_s^2, \dots, a_s^m$ . Dizemos que  $A_s$  é estabilizadora de um elemento-base  $s$  de um subespaço de um ideal à esquerda minimal  $I$  desta álgebra se, e somente se  $a_s^i s = ks$ , com  $k \in \mathbb{C}$  e para todo  $i \in (1, m)$ .*

**Proposição 2** *Sejam  $s_1, s_2, \dots, s_n$  elementos-base estabilizados por uma subálgebra  $A_s$ . Então uma combinação linear destes elementos,  $\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \dots + \beta_n s_n$ , também é um elemento estabilizado por  $A_s$ .*

Prova. Atuando um elemento  $A_S$  sobre a combinação linear, temos

$$\begin{aligned}
A_s &= A_s(\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \dots + \beta_n s_n) \\
&= (k_1 a_s^1 + k_2 a_s^2 + \dots + k_m a_s^m)(\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \dots + \beta_n s_n) \\
&= k_1 a_s^1 \beta_1 s_1 + k_2 a_s^2 \beta_1 s_1 + \dots + k_m a_s^m \beta_1 s_1 \\
&\quad + \dots + k_1 a_s^1 \beta_n s_n + \dots + k_m a_s^m \beta_n s_n \\
&= k_1 \beta_1 s_1 + k_2 \beta_1 s_1 + \dots + k_m \beta_1 s_1 + \dots + k_1 \beta_n s_n + \dots + k_m \beta_n s_n \\
&= (k_1 + k_2 + \dots + k_m) \beta_1 s_1 + \dots + (k_1 + k_2 + \dots + k_m) \beta_n s_n \\
&= (k_1 + k_2 + \dots + k_m)(\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \dots + \beta_n s_n) \\
&= k s,
\end{aligned}$$

com  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , o que conclui a prova. Podemos falar então em um subespaço  $I_S$  estabilizado por  $A_S$ . ■

### 6.3 Construção Algébrica dos Subespaços Livres de Descoerência

Considere agora a álgebra de Clifford  $C_3$  sobre o corpo dos complexos [79] definida por

$$\begin{cases} \gamma_i^2 = 1, & i = 1, 2, 3 \\ \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.15)$$

Uma representação desta álgebra é dada pelas matrizes de Pauli

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\iff \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &\iff \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma_3 &\iff \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (6.16)$$

Um elemento arbitrário da álgebra pode ser escrito como

$$\Gamma = \alpha_0 1 + \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 + \alpha_{12} \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_{23} \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_{13} \gamma_3 \gamma_1 + \alpha_{123} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (6.17)$$

É fácil verificar que temos dois elementos-base que comutam com todos os outros, a saber

$$\{1, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\}. \quad (6.18)$$

Conseqüentemente pelo Teorema 18, temos duas representações irredutíveis não equivalentes. Uma segunda representação irredutível não equivalente é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\iff -\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &\iff -\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &\iff -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Podemos perceber que esta não é equivalente a primeira se observarmos que na primeira o elemento  $i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  é mapeado em  $-I$  e na segunda em  $I$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 &\rightarrow i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = iiI = -I, \\ i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 &\rightarrow i(-\sigma_1)(-\sigma_2)(-\sigma_3) = I. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Essa informação, juntamente com os teoremas anteriores, nos permite construir representações irredutíveis não equivalentes para  $C_3 \otimes C_3$ . O número  $M$  de representações irredutíveis não equivalentes é dado por  $M = n_1n_2 = 2 \times 2 = 4$ , de acordo com o teorema 20. Os quatro elementos-base pertencentes a  $C_3 \otimes C_3$  que comutam com todos os outros elementos correspondem a

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1, \\ 1 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \\ 1 \otimes 1. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

As quatro representações irredutíveis não equivalentes podem se obtidas através

das seguintes associações

$$\begin{aligned}
D^{(1)} &: \begin{cases} \gamma_1^1 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow \sigma_3 \end{cases} \\
D^{(2)} &: \begin{cases} \gamma_1^1 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow -\sigma_3 \end{cases} \\
D^{(3)} &: \begin{cases} \gamma_1^1 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow \sigma_3 \end{cases} \\
D^{(4)} &: \begin{cases} \gamma_1^1 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow -\sigma_3 \end{cases} \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Podemos verificar que estas representações são não equivalentes se observarmos os elementos  $i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1$  e  $1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ :

$$\begin{aligned}
D^{(1)} &: \begin{cases} i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \rightarrow i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \otimes 1 = -1 \otimes 1 \\ 1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \rightarrow I \otimes i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -1 \otimes 1 \end{cases} \\
D^{(2)} &: \begin{cases} i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \rightarrow i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \otimes I = -I \otimes I \\ 1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \rightarrow I \otimes i(-\sigma_1)(-\sigma_2)(-\sigma_3) = I \otimes I \end{cases} \\
D^{(3)} &: \begin{cases} i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \rightarrow i(-\sigma_1)(-\sigma_2)(-\sigma_3) \otimes I = I \otimes I \\ 1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \rightarrow I \otimes i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -I \otimes I \end{cases} \\
D^{(4)} &: \begin{cases} i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \rightarrow i(-\sigma_1)(-\sigma_2)(-\sigma_3) \otimes I = I \otimes I \\ 1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \rightarrow I \otimes i(-\sigma_1)(-\sigma_2)(-\sigma_3) = I \otimes I \end{cases} \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Vemos então que quando  $i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1$  ou  $1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  é mapeado em  $I \otimes I$  numa dada representação, na outra é mapeado em  $-I \otimes I$ . Este método pode ser generalizado para um produto tensorial de álgebras com um número qualquer de fatores. Por exemplo, para  $C_3 \otimes C_3 \otimes C_3$  temos oito representações irredutíveis não equivalentes ( $M = n_1n_2n_3 = 8$ ); ou seja, temos oito elementos-base que comutam todos os outros

elementos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \otimes 1 \\ 1 \otimes 1 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ 1 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \\ 1 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ 1 \otimes 1 \otimes 1 \end{array} \right. \quad (6.24)$$

As representações são dadas por

$$D^{(1)} : \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_1^1 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow \sigma_3 \end{array} \right. \quad (6.25)$$

$$D^{(2)} : \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_1^1 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow -\sigma_3 \end{array} \right. \quad (6.26)$$

$$D^{(3)} : \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_1^1 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow \sigma_3 \end{array} \right. \quad (6.27)$$

$$D^{(4)} : \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_1^1 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow \sigma_3 \end{array} \right. \quad (6.28)$$

$$D^{(5)} : \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_1^1 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow -\sigma_3 \end{array} \right. \quad (6.29)$$

$$D^{(6)} : \begin{cases} \gamma_1^1 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow \sigma_3 \end{cases} \quad (6.30)$$

$$D^{(7)} : \begin{cases} \gamma_1^1 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow \sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow \sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow \sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow -\sigma_3 \end{cases} \quad (6.31)$$

$$D^{(8)} : \begin{cases} \gamma_1^1 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^1 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^1 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^2 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^2 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^2 \rightarrow -\sigma_3 \\ \gamma_1^3 \rightarrow -\sigma_1 & \gamma_2^3 \rightarrow -\sigma_2 & \gamma_3^3 \rightarrow -\sigma_3 \end{cases} \quad (6.32)$$

Podemos verificar que estas representações são não equivalentes analisando as realizações dos elementos-base

$$\begin{cases} i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \otimes 1 \\ 1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \otimes 1 \\ 1 \otimes 1 \otimes i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{cases} \quad (6.33)$$

Mostraremos que a obtenção das representações irredutíveis não equivalentes unidimensionais para subálgebras de  $C_3 \otimes C_3 \otimes \dots \otimes C_3$  pode permitir a construção dos subespaços livres de descoerência, ou seja de subespaços insensíveis à ação de um determinado ruído. Considere como o exemplo o caso de três q-bits em termos de nossa formulação e o operador de erro  $\Gamma_1$  é dado por

$$\Gamma_1 = k_{1,1}1 \otimes 1 \otimes 1 + k_{1,2}\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes 1 + k_{1,3}1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 + k_{1,4}\gamma_3 \otimes 1 \otimes \gamma_3,$$

onde  $k_{i,j}$  são coeficientes pertencentes ao corpo dos complexos. Esse operador é o elemento mais geral de uma subálgebra  $A_1$  de  $C_3 \otimes C_3 \otimes C_3$ , gerada pelos elementos  $\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes 1$  e  $1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3$ . Essa subálgebra possui 4 elementos-base que comutam e portanto, pelo teorema 17, temos 4 representações irredutíveis não equivalentes. A dimensão das representações, pelo teorema 18, é dada pela equação

$$4 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2, \quad (6.34)$$

cuja solução vale  $n = 1$ . Temos portanto quatro representações irredutíveis unidimensionais. Podemos encontrar subespaços invariantes a partir dos projetores da álgebra, definidos anteriormente por

$$P^{(j)} = \frac{d_j}{d} \sum_y \chi^{(j)*}(a_y) P_{a_y}, \quad (6.35)$$

em que  $d$  é a dimensão da álgebra,  $d_j$  é a dimensão da  $j$ -ésima representação,  $\chi$  é o caracter dos elementos da álgebra,  $a_y$  são os elementos-base da álgebra e  $P_{a_y}$  são operadores correspondentes aos elementos-base  $a_y$ . Para obtê-los explicitamente, faz-se necessário também o conhecimento da tabela de caracteres da álgebra. Esta, por seu turno, é possível ser determinada através do uso da seguinte relação de ortogonalidade

$$\sum_y \chi^{(\alpha)*}(a_y) \chi^{(\beta)}(a_y) = d \delta_{\alpha,\beta}, \quad (6.36)$$

deduzida anteriormente (vide teorema 24). Para o exemplo acima

$$|\chi(a_1)|^2 + |\chi(a_2)|^2 + |\chi(a_3)|^2 + |\chi(a_4)|^2 = 1. \quad (6.37)$$

cuja solução está explicitada na tabela a seguir

	$1 \otimes 1 \otimes 1$	$\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes 1$	$1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3$	$\gamma_3 \otimes 1 \otimes \gamma_3$
$D^{(1)}$	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	1	-1
$D^{(3)}$	1	-1	-1	1
$D^{(4)}$	1	1	-1	-1

Então os projetores são dados por

$$\begin{aligned} P_1^1 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes 1 + 1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 + \gamma_3 \otimes 1 \otimes \gamma_3), \\ P_1^2 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 - \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes 1 + 1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 - \gamma_3 \otimes 1 \otimes \gamma_3), \\ P_1^3 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 - \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes 1 - 1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 + \gamma_3 \otimes 1 \otimes \gamma_3), \\ P_1^4 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes 1 - 1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 - \gamma_3 \otimes 1 \otimes \gamma_3). \end{aligned}$$

em que o índice superior  $j$  em  $P_i^j$  refere-se à representação irredutível e o índice inferior  $i$  indica o operador de erro  $\Gamma_1$  pertencente à álgebra  $A_1$ . Fazendo uma análise em termos dos projetores atuando sobre estados tomados arbitrariamente, temos

$$\begin{aligned}
P_1^1(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) = \psi_1^1, \\
P_1^1(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) = \psi_1^2, \\
P_1^2(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= 0, \\
P_1^2(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= 0, \\
P_1^3(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= 0, \\
P_1^3(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= 0, \\
P_1^4(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= 0, \\
P_1^4(\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) &= 0,
\end{aligned}$$

onde em  $\psi_i^j$ , o índice superior  $j$  indica inferior  $i$  indica o operador de erro  $\Gamma_1$  pertencente à álgebra  $A_1$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(\psi_1^1 + \psi_1^2) &= \Gamma_1[(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&\quad + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] \\
&= (k_{1,1} + k_{1,2} + k_{1,3} + k_{1,4})[(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&\quad + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)] \\
&= (k_{1,1} + k_{1,2} + k_{1,3} + k_{1,4})(\psi_1^1 + \psi_1^2),
\end{aligned}$$

e o subespaço  $\psi_1^1 + \psi_1^2 = (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)$  de um ideal à esquerda minimal de  $C_3 \otimes C_3 \otimes C_3$ , correspondente ao estado  $W$  em termos de espaço de Hilbert, é insensível à ação do ruído dado por  $\Gamma_1$ , ou seja, esse espaço é um subespaço livre de descoerência pela ação do ruído  $\Gamma_1$ , resultado ainda não analisado na literatura. Consideremos agora um ruído atuando em um sistema de quatro q-bits:

$$\Gamma_2 = k_{2,1}1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + k_{2,2}\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes 1 \otimes 1 + k_{2,3}1 \otimes 1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 + k_{2,4}\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1$$

Neste caso, pela nossa formulação, os operadores de projeção são dados por

$$P_2^1 = 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1),$$

$$P_2^2 = 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1),$$

$$P_2^3 = 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1),$$

$$P_2^4 = 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1).$$

Aplicando tais projetores no estado  $(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)$ , temos

$$\begin{aligned} \psi_2^1 &= P_2^1(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\ &= [(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) \\ &\quad + (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^2 &= P_2^2(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\ &= [(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) \\ &\quad - (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) - (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^3 &= P_2^3(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\ &= [(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) - (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) \\ &\quad + (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) - (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^4 &= P_2^4(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\ &= [(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) - (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3) \\ &\quad - (\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)](\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Temos então quatro subespaços invariantes dados por

$$\Gamma_2 \psi_2^1 = k_{2,1} \psi_2^1 + k_{2,2} \psi_2^1 + k_{2,3} \psi_2^1 + k_{2,4} \psi_2^1 = (k_{2,1} + k_{2,2} + k_{2,3} + k_{2,4}) \psi_2^1,$$

$$\Gamma_2 \psi_2^2 = k_{2,1} \psi_2^2 + k_{2,2} \psi_2^2 + k_{2,3} \psi_2^2 + k_{2,4} \psi_2^2 = (k_{2,1} + k_{2,2} + k_{2,3} + k_{2,4}) \psi_2^2,$$

$$\Gamma_2 \psi_2^3 = k_{2,1} \psi_2^3 + k_{2,2} \psi_2^3 + k_{2,3} \psi_2^3 + k_{2,4} \psi_2^3 = (k_{2,1} + k_{2,2} + k_{2,3} + k_{2,4}) \psi_2^3,$$

$$\Gamma_2 \psi_2^4 = k_{2,1} \psi_2^4 + k_{2,2} \psi_2^4 + k_{2,3} \psi_2^4 + k_{2,4} \psi_2^4 = (k_{2,1} + k_{2,2} + k_{2,3} + k_{2,4}) \psi_2^4.$$

Assim o subespaço  $\psi_2^1 + \psi_2^2 + \psi_2^3 + \psi_2^4$  é livre de descoerência pela ação do ruído  $\Gamma_2$ , havendo uma correspondência com o resultado de Lidar *et al* na referência [44, 45]. Finalizando, considere um exemplo envolvendo bivectores; seja o ruído dado por

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = & k_{3,1}1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + k_{3,2}\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \\ & + k_{3,3}\gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 + k_{3,4}\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Observe que

$$\gamma_1(\gamma_1\gamma_2) = -(\gamma_1\gamma_2)\gamma_1. \quad (6.39)$$

Entretanto, ao tomar o produto tensorial

$$(\gamma_1 \otimes \gamma_1)(\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2) = (\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2)(\gamma_1 \otimes \gamma_1), \quad (6.40)$$

temos a comutatividade. Isso sempre ocorre para um número par de fatores, que corresponde ao caso acima, em que temos quatro fatores. O mesmo ocorre para todos os outros elementos, e então temos quatro elementos-base que comutam entre si resultando como nos casos anteriores quatro representações irredutíveis unidimensionais. Os projetores são dados por

$$\begin{aligned} P_3^1 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \\ &\quad + \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2), \\ P_3^2 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \\ &\quad - \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2), \\ P_3^3 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 - \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \\ &\quad + \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2), \\ P_3^4 &= 1/4(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 - \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \\ &\quad - \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 \otimes \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_2). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Os subespaços invariantes são dados por

$$\begin{aligned}
\psi_3^1 &= P_3^1(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&= 2[(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&\quad + (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)], \\
\psi_3^2 &= P_3^2(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&= 0, \\
\psi_3^3 &= P_3^3(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&= 0, \\
\psi_3^4 &= P_3^4(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&= 2[(\gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3 \otimes \gamma_3)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \\
&\quad - (\gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_1)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)].
\end{aligned}$$

A ação do ruído sobre  $\psi_i^j$  resulta em

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 \psi_3^1 &= \alpha_{3,1} \psi_3^1 + \alpha_{3,2} \psi_3^1 + \alpha_{3,3} \psi_3^1 + \alpha_{3,4} \psi_3^1 = (\alpha_{3,1} + \alpha_{3,2} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4}) \psi_3^1, \\
\Gamma_3 \psi_3^4 &= \alpha_{3,1} \psi_3^4 + \alpha_{3,2} \psi_3^4 + \alpha_{3,3} \psi_3^4 + \alpha_{3,4} \psi_3^4 = (\alpha_{3,1} + \alpha_{3,2} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4}) \psi_3^4.
\end{aligned}$$

Dessa forma,  $\psi_3^1 + \psi_3^4$  é um subespaço livre de descoerência pela ação do ruído  $\Gamma_3$ .

Os subespaços livres de descoerência já foram verificados experimentalmente [108] e possuem grande relevância na teoria da informação quântica observando-se sua importância na proteção contra o ruído quântico. Sua compreensão deve ser aprofundada e neste ponto, os métodos algébricos têm se mostrados de grande valia [44, 45] e podem ainda resultar em novos desenvolvimentos.

Neste capítulo, mostramos que utilizando os resultados por nós desenvolvidos acerca de representações de álgebras é possível construir subespaços livres de descoerência associados ao formalismo dos estabilizadores. A operacionalização torna-se mais simples devido ao fato de que tanto os projetores como os estados envolvem geradores da álgebra. Esse procedimento também tem um poder classificatório determinando-se quais subespaços livres de descoerência estão associados a uma certa álgebra.

## Capítulo 7

# Elementos da Dinâmica de Campos

## Térmicos

O estudo dos efeitos térmicos em teoria quântica de campos aparece como uma tentativa de compreender melhor as nuances entre o mundo macroscópico e microscópico. A primeira abordagem sistemática para o tratamento de uma teoria de campos à temperatura finita é o formalismo do tempo imaginário [110], introduzido por Matsubara, em 1955. Esta formulação explora a relação existente entre o fator de Boltzmann da mecânica estatística e o operador de evolução temporal, quando o parâmetro tempo é continuado analiticamente para o eixo imaginário. Nas formulações com tempo real, a formulação de Schwinger, conhecida como trajetória temporal fechada [111] é a mais antiga, possuindo como pano de fundo, as integrais de trajetória.

Uma abordagem mais recente, equivalente ao formalismo de Matsubara, é a dinâmica de campos térmicos (DCT) [58], introduzida por Takahashi e Umezawa [55], em 1975. A dinâmica de campos térmicos é um método de termalização que possui como ponto de partida a estrutura de espaço de Hilbert, sendo este seu caráter distinguidor dos demais métodos. Dois ingredientes básicos estruturam a DCT: uma duplicação nos graus de liberdade do sistema original, com base nas regras de conjugação til e as transformações canônicas de Bogoliubov. Uma característica proeminente na

dinâmica de campos térmicos é a possibilidade de estudar efeitos de temperatura partindo de uma teoria de representação de grupos de simetria [58]. A teoria cinética, por exemplo, pode ser edificada tendo como base a análise de representação de grupos cinemáticos [112].

Neste capítulo apresentaremos os elementos básicos da dinâmica de campos térmicos que serão utilizados nos capítulos ulteriores. Discutiremos os osciladores bosônicos e fermiônicos generalizados considerando  $n$  modos e encerraremos com uma seção de revisão acerca de estruturas algébricas intimamente ligadas à dinâmica de campos térmicos.

## 7.1 Elementos Básicos da DCT

Para um sistema em equilíbrio térmico a média de um observável  $O$  na mecânica estatística do equilíbrio é definida, usando as notações habituais, como

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \{ e^{-\beta \mathcal{H}} O \}. \quad (7.1)$$

Em termos dos autoestados  $|n\rangle$  de  $\mathcal{H}$ , essa expressão pode ser reescrita como

$$\frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | O | n \rangle.$$

Por outro lado, o valor esperado de um operador  $O$  num estado térmico

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n g_n(\beta) |n\rangle,$$

definido sobre um espaço de Hilbert, é dado por

$$\langle O \rangle = \langle 0(\beta) | O | 0(\beta) \rangle = \sum_{n,m} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n | O | m \rangle. \quad (7.2)$$

Igualando as médias dadas nas equações (7.1) e (7.2) temos,

$$\frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | O | n \rangle = \sum_{n,m} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n | O | m \rangle.$$

Por conseguinte a relação

$$g_n^*(\beta)g_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)}e^{-\beta E_n}\delta_{mn} \quad (7.3)$$

deve ser válida. Observe que esta relação não pode ser válida por números complexos. Por outro lado, esta se assemelha a uma relação de ortogonalidade. Isso sugere que  $g_m(\beta)$  deve ser um elemento de um espaço vetorial, podendo ser escrito como

$$g_m(\beta) = f_m(\beta) \left| \tilde{m} \right\rangle.$$

Podemos então reescrever o vetor de estado como

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) \left| n, \tilde{n} \right\rangle, \quad (7.4)$$

tal que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n} | A | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n | A | n \rangle, \end{aligned}$$

A fim de reproduzir a média térmica, devemos ter

$$f_n^*(\beta) f_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n},$$

cujas soluções são

$$f_n(\beta) = \frac{1}{Z^{1/2}(\beta)} e^{-\beta E_n/2}.$$

Consequentemente o estado de vácuo térmico pode ser escrito como

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z^{1/2}(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n/2} \left| n, \tilde{n} \right\rangle,$$

ou seja, o espaço de Hilbert deve ser duplicado de forma que o vetor de estado seja dependente da temperatura. Um sistema idêntico, doravante denominado sistema til ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) é introduzido de modo que o espaço de Hilbert original seja duplicado. A

caracterização do sistema til é descrita pelas relações

$$\begin{aligned}(A_i A_j)^\sim &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \\ (cA_i + A_j)^\sim &= c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \\ (A_i^\dagger)^\sim &= (\tilde{A}_i)^\dagger, \\ (\tilde{A}_i)^\sim &= A_i.\end{aligned}$$

Essa é a base do formalismo de Umezawa [55], desenvolvido em 1975, conhecido como dinâmica de campos térmicos e que tem encontrado uma vasta gama de aplicações.

Dentro deste formalismo, um estado térmico generalizado  $|\Psi(\beta)\rangle$  pode ser obtido por uma mímica dos estados à temperatura nula, através da aplicação de um operador unitário no vácuo térmico:

$$|\Psi(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger; \beta) |0(\beta)\rangle. \quad (7.5)$$

## 7.2 Osciladores Bosônicos e Fermiônicos

Analisaremos agora dois casos: bósons e férmions

### 7.2.1 Osciladores Bosônicos

Para  $k$  osciladores bosônicos temos, com  $\hbar = 1$ , o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^k \omega_i a_i^\dagger a_i, \quad (7.6)$$

onde  $a_i$  e  $a_i^\dagger$  são os operadores de destruição e criação, respectivamente, satisfazendo a álgebra

$$\begin{aligned}[a_i, a_i^\dagger] &= 1, \\ [a_i^\dagger, a_i^\dagger] &= [a_i, a_i] = 0.\end{aligned} \quad (7.7)$$

Os autoestados e autovalores de  $\mathcal{H}$  são dados por

$$\mathcal{H} |n_1 \dots n_k\rangle = (n_1 \omega_1 + \dots + n_k \omega_k) |n_1 \dots n_k\rangle, \quad (7.8)$$

e temos também que

$$\begin{aligned} a_i |n_1 \dots n_i \dots n_k\rangle &= \sqrt{n_i} |n_1 \dots n_i - 1 \dots n_k\rangle, \\ a_i^\dagger |n_1 \dots n_i \dots n_k\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_1 \dots n_i + 1 \dots n_k\rangle, \\ a_i |n_1 \dots 0 \dots n_k\rangle &= 0, \\ |n_1 \dots n_k\rangle &= \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0 \dots 0\rangle, \end{aligned} \quad (7.9)$$

onde  $|0\rangle$  é definido como sendo o estado de vácuo. O operador número definido como  $N = a^\dagger a$ , satisfaz a equação de autovalor

$$N_i |n_1 \dots n_i \dots n_k\rangle = n_i |n_1 \dots n_i \dots n_k\rangle. \quad (7.10)$$

A fim de construir o formalismo DCT para tal sistema, devemos realizar uma duplicação dos graus de liberdade do sistema, seguindo as regras de conjugação til. O sistema til é dado por

$$\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^k \omega_i \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i, \quad (7.11)$$

com operadores til de destruição e criação satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger] &= 1, \\ [\tilde{a}_i^\dagger, \tilde{a}_i^\dagger] &= [\tilde{a}_i, \tilde{a}_i] = 0, \\ [a_i, \tilde{a}_i] &= [a_i^\dagger, \tilde{a}_i^\dagger] = [a_i, \tilde{a}_i^\dagger] = [a_i^\dagger, \tilde{a}_i] = 0. \end{aligned}$$

O estado  $|0(\beta)\rangle$  pode ser obtido a partir de

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n_1 \dots n_k, \tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_k=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_k n_k)/2} |n_1, \dots, n_k, \tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_k\rangle \\ &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n_1 \dots n_k, \tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_k=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_k n_k)/2} \\ &\quad \times \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{(n_1!)^{1/2}} \dots \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} \frac{(\tilde{a}_1^\dagger)^{\tilde{n}_1}}{(\tilde{n}_1!)^{1/2}} \dots \frac{(\tilde{a}_k^\dagger)^{\tilde{n}_k}}{(\tilde{n}_k!)^{1/2}} |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Exigindo a normalização do estado

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= Z^{-1}(\beta) \\
&\times \sum_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_l=0}^{\infty} \left\langle \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_l, m_1, \dots, m_l \left| e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_k n_k + \omega_1 m_1 + \dots + \omega_l m_l)/2} \right| n_1, \dots, n_k, \tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_l \right\rangle \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_l=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_k n_k + \omega_1 m_1 + \dots + \omega_l m_l)/2} \delta_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_l} \delta_{m_1 \dots m_l, n_1 \dots n_k} \\
&= Z^{-1}(\beta) \sum_{n_1 \dots n_k=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_k n_k)} = 1.
\end{aligned}$$

Utilizando a expansão  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ , temos que a função de partição é dada por

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= \sum_{n_1 \dots n_k=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_k n_k)} \\
&= \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}},
\end{aligned} \tag{7.13}$$

de modo que a expressão para o vácuo térmico torna-se

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \left( \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}} \right) \sum_{n_1 \dots n_k, \tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_k=0}^{\infty} e^{-\beta/2(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_k n_k)} \\
&\times \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{(n_1!)^{1/2}} \dots \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} \frac{(\tilde{a}_1^\dagger)^{n_1}}{(\tilde{n}_1!)^{1/2}} \dots \frac{(\tilde{a}_k^\dagger)^{n_k}}{(\tilde{n}_k!)^{1/2}} |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Definido as funções hiperbólicas

$$\begin{aligned}
u_i(\beta) &= \cosh \theta_i(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}}}, \\
v_i(\beta) &= \sinh \theta_i(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega_i/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}}},
\end{aligned} \tag{7.15}$$

temos

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle, \tag{7.16}$$

onde  $U(\beta)$  é a transformação de Bogoliubov para bósons dada por

$$\begin{aligned}
U(\beta) &= \exp[-i(\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger) + \dots + \theta_k(\beta)(\tilde{a}_k a_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger))] \\
&= \exp(-i(\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger)) \dots \exp(-i(\theta_k(\beta)(\tilde{a}_k a_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger))) \\
&= U_1(\beta) \dots U_k(\beta),
\end{aligned} \tag{7.17}$$

em que

$$U_i(\beta) = \exp(-i(\theta_i(\beta)(\tilde{a}_i a_i - \tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger)), \quad (7.18)$$

e observando-se que [83]  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ , quando  $[A, B] = 0$ . Essa expressão então torna-se

$$\begin{aligned} U(\beta) &= \exp(-iG_1(\beta))\dots\exp(-iG_k(\beta)) \\ &= \exp(-iG(\beta)), \end{aligned} \quad (7.19)$$

com

$$G_i(\beta) = -i\theta_i(\beta)(\tilde{a}_i a_i - \tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger), \quad (7.20)$$

e

$$G(\beta) = -i[\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger) + \dots + \theta_k(\beta)(\tilde{a}_k a_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger)],$$

conduzindo o vácuo não térmico ao vácuo térmico. Podemos definir os operadores térmicos por

$$\begin{aligned} a_i(\beta) &= U_i(\beta)a_iU_i^\dagger(\beta), \\ a_i^\dagger(\beta) &= U_i(\beta)a_i^\dagger U_i^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i(\beta) &= U_i(\beta)\tilde{a}_iU_i^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i^\dagger(\beta) &= U_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger U_i^\dagger(\beta). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Utilizando a identidade

$$e^{-iB}Ae^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B, [B, A]] + \dots, \quad (7.22)$$

e as relações de comutação

$$\begin{aligned} [G_i, a_i] &= -i\theta_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger, \\ [G_i, \tilde{a}_i] &= -i\theta_i(\beta)a_i^\dagger, \\ [G_i, a_i^\dagger] &= -i\theta_i(\beta)\tilde{a}_i, \\ [G_i, \tilde{a}_i^\dagger] &= -i\theta_i(\beta)a_i, \end{aligned} \quad (7.23)$$

as expressões (7.21) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
 a_i(\beta) &= u_i(\beta)a_i - v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger, \\
 a_i^\dagger(\beta) &= u_i(\beta)a_i^\dagger - v_i(\beta)\tilde{a}_i, \\
 \tilde{a}_i(\beta) &= u_i(\beta)\tilde{a}_i - v_i(\beta)a_i^\dagger, \\
 \tilde{a}_i^\dagger(\beta) &= u_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger - v_i(\beta)a_i.
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Estas expressões invertidas fornecem

$$\begin{aligned}
 a_i &= u_i(\beta)a_i(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta), \\
 a_i^\dagger &= u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta), \\
 \tilde{a}_i &= u_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta) + v_i(\beta)a_i^\dagger(\beta), \\
 \tilde{a}_i^\dagger &= u_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)a_i(\beta).
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

Devido a unitariedade da transformação de Bogoliubov

$$\begin{aligned}
 [a_i(\beta), a_i^\dagger(\beta)] &= 1, \\
 [\tilde{a}_i(\beta), \tilde{a}_i^\dagger(\beta)] &= 1,
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

com as demais relações nulas. Uma vez que

$$\begin{aligned}
 a_i(\beta) |0(\beta)\rangle &= 0, \\
 \tilde{a}_i(\beta) |0(\beta)\rangle &= 0,
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

o estado  $|0(\beta)\rangle$  é um estado de vácuo para operadores térmicos.

O valor médio do operador número  $N = \sum_{i=1}^k a_i^\dagger a_i$  é dado por

$$\begin{aligned}
 \langle N \rangle &= \langle 0(\beta) | \sum_{i=1}^k a_i^\dagger a_i | 0(\beta) \rangle \\
 &= v_1^2(\beta) + \dots + v_k^2(\beta) \\
 &= \frac{1}{e^{\beta\omega_1} - 1} + \dots + \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1}.
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Nítidamente, para  $k = 1$ , temos a distribuição de Max Planck, conforme esperado.

## 7.2.2 Osciladores Fermiônicos

Para  $k$  osciladores fermiônicos, temos, com  $\hbar = 1$ , o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^k \omega_i a_i^\dagger a_i, \quad (7.29)$$

com os operadores  $a_i$  e  $a_i^\dagger$  satisfazendo a álgebra

$$\begin{aligned} \{a_i, a_i^\dagger\} &= 1, \\ \{a_i, a_j^\dagger\} &= 0, \\ \{a_i, a_i\} &= \{a_i^\dagger, a_i^\dagger\} = 0, \\ \{a_i, a_j\} &= \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0, \end{aligned} \quad (7.30)$$

em que  $\{A, B\} = AB + BA$  é o anti-comutador. A equação de autovalor para o hamiltoniano é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} |0\dots 0\rangle &= 0, \\ \mathcal{H} |0\dots 1\rangle &= \omega_k |0\dots 1\rangle, \\ &\vdots \\ \mathcal{H} |1\dots 0\rangle &= \omega_1 |1\dots 0\rangle, \\ &\vdots \\ \mathcal{H} |1\dots 1\rangle &= (\omega_1 + \dots + \omega_k) |1\dots 1\rangle. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Para construir uma DCT fermiônica, devemos realizar uma duplicação nos graus de liberdade, de modo análogo ao realizado no caso bosônico:

$$\begin{aligned} \{\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger\} &= 1, \\ \{\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\dagger\} &= 0, \\ \{\tilde{a}_i, \tilde{a}_i\} &= \{\tilde{a}_i^\dagger, \tilde{a}_i^\dagger\} = 0, \\ \{\tilde{a}_i, \tilde{a}_j\} &= \{\tilde{a}_i^\dagger, \tilde{a}_j^\dagger\} = 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n_1 \dots n_k, \tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{n_1 \dots n_k}} |n_1 \dots n_k, \tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_k\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) [ |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle + e^{-\beta\omega_1/2} |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle + \\
&\quad + \dots + e^{-\beta\omega_k/2} |0 \dots 1, \tilde{0} \dots \tilde{1}\rangle + \dots e^{-\beta(\omega_1 + \dots + \omega_k)/2} |1 \dots 1, \tilde{1} \dots \tilde{1}\rangle ] \\
&= Z^{-1/2}(\beta) [(1 + e^{-\beta\omega_1/2} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger) \dots (1 + e^{-\beta\omega_k/2} a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger)] |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle.
\end{aligned}$$

A função de partição pode ser obtida da normalização do estado resultando em

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= (1 + e^{-\beta\omega_1}) \dots (1 + e^{-\beta\omega_k}) \\
&= \prod_{i=1}^k (1 + e^{-\beta\omega_i}).
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Assim,

$$|0(\beta)\rangle = \prod_{i=1}^k (1 + e^{-\beta\omega_i}) \prod_{i=1}^k (1 + e^{-\beta\omega_i/2} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger) |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle, \tag{7.34}$$

que pode ser reescrito na forma

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0 \dots 0, \tilde{0} \dots \tilde{0}\rangle, \tag{7.35}$$

onde  $U(\beta)$  é a transformação de Bogoliubov para férmions dada por

$$\begin{aligned}
U(\beta) &= \exp[-i(\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger) + \dots + \theta_k(\beta)(\tilde{a}_k a_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger))] \\
&= \exp(-iG(\beta)),
\end{aligned} \tag{7.36}$$

com

$$G(\beta) = -i[\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger) + \dots + \theta_k(\beta)(\tilde{a}_k a_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger)]. \tag{7.37}$$

Podemos ainda reescrever a transformação de Bogoliubov como

$$\begin{aligned}
U(\beta) &= \exp[-i\theta_1(\beta)(\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger)] \dots \exp[-i\theta_k(\beta)(\tilde{a}_k a_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger)] \\
&= \exp(-iG_1(\beta)) \dots \exp(-iG_k(\beta)) \\
&= U_1(\beta) \dots U_k(\beta),
\end{aligned} \tag{7.38}$$

lembrando mais uma vez que em que  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ , quando  $[A, B] = 0$ , onde

$$G_i(\beta) = -i\theta_i(\beta)(\tilde{a}_i a_i - \tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger), \quad (7.39)$$

e

$$U_i(\beta) = \exp(-iG_i(\beta)) \quad (7.40)$$

Aqui,  $\theta(\beta)$  é definido a partir das funções

$$\begin{aligned} u_i(\beta) &= \cos\theta_i(\beta) = (1 + e^{-\beta\omega_i})^{-1/2}, \\ v_i(\beta) &= \text{sen}\theta_i(\beta) = (1 + e^{\beta\omega_i})^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Analogamente ao caso bosônico, podemos introduzir os operadores térmicos fermiônicos

$$\begin{aligned} a_i(\beta) &= U_i(\beta)a_iU_i^\dagger(\beta), \\ a_i^\dagger(\beta) &= U_i(\beta)a_i^\dagger U_i^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i(\beta) &= U_i(\beta)\tilde{a}_iU_i^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i^\dagger(\beta) &= U_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger U_i^\dagger(\beta), \end{aligned} \quad (7.42)$$

que podem ser explicitados como

$$\begin{aligned} a_i(\beta) &= u_i(\beta)a_i - v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger, \\ a_i^\dagger(\beta) &= u_i(\beta)a_i^\dagger - v_i(\beta)\tilde{a}_i, \\ \tilde{a}_i(\beta) &= u_i(\beta)\tilde{a}_i + v_i(\beta)a_i^\dagger, \\ \tilde{a}_i^\dagger(\beta) &= u_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger + v_i(\beta)a_i. \end{aligned} \quad (7.43)$$

As transformações inversas são dadas por

$$\begin{aligned} a_i &= u_i(\beta)a_i(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta), \\ a_i^\dagger &= u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta), \\ \tilde{a}_i &= u_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta) - v_i(\beta)a_i^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i^\dagger &= u_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta) - v_i(\beta)a_i(\beta). \end{aligned} \quad (7.44)$$

O valor médio do operador número  $N = a^\dagger a$  neste caso é

$$\begin{aligned}
 \langle N \rangle &= \langle 0(\beta) | \sum_{i=1}^n a_i^\dagger a_i | 0(\beta) \rangle \\
 &= v_1^2(\beta) + \dots + v_k^2(\beta) \\
 &= \frac{1}{1 + e^{\beta\omega_1}} + \dots + \frac{1}{1 + e^{\beta\omega_k}} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + e^{\beta\omega_i}}, \tag{7.45}
 \end{aligned}$$

correspondendo à distribuição de Fermi-Dirac para potencial químico nulo, quando  $k = 1$ .

Um ponto relevante, que deve ser evidenciado, diz respeito ao significado físico de  $|\Psi(\beta)\rangle$ . O ente físico fundamental é a matriz densidade associada a este estado. De acordo com a referência [58], capítulo 12, veremos agora como a matriz densidade pode ser obtida de posse de um dado estado  $|\Psi(\beta)\rangle$ .

Para um observável  $O$ , atuando em um sistema com um único modo bosônico, temos que

$$\langle 0(\beta) | O | 0(\beta) \rangle = \text{Tr}(1/Z(\beta)e^{-\beta\omega a^\dagger a} O),$$

A matriz densidade associada a este sistema é dada por

$$\begin{aligned}
 \rho_{|0(\beta)\rangle} &\equiv \rho_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta\omega a^\dagger a) \\
 &= \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^n |n\rangle \langle n|, \tag{7.46}
 \end{aligned}$$

em que

$$\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \tag{7.47}$$

De forma similar, para um estado térmico generalizado, temos que

$$\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle = \text{Tr}(\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} O). \tag{7.48}$$

Utilizando a expressão (7.5), segue

$$\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) \rho_\beta f(a, a^\dagger; \beta) | 0(\beta) \rangle.$$

Logo,

$$\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} = f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) \rho_\beta f(a, a^\dagger; \beta). \quad (7.49)$$

Então, a identificação de  $f^\dagger(a, a^\dagger; \beta)$  permite o cálculo da matriz densidade associada ao estado puro térmico  $|\Psi(\beta)\rangle$ . Uma relação que será muito útil neste trabalho envolve  $a^\dagger(\beta)$  e  $a^\dagger$ . Para sua obtenção, considere as seguintes relações

$$\begin{aligned} a^\dagger(\beta) &= u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \\ \tilde{a} &= u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} a^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle &= (u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}) |0(\beta)\rangle \\ &= [u(\beta)a^\dagger - v(\beta)u(\beta)\tilde{a}(\beta) - v^2(\beta)a^\dagger(\beta)] |0(\beta)\rangle \\ &= [u(\beta)a^\dagger - v^2(\beta)a^\dagger(\beta)] |0(\beta)\rangle, \end{aligned} \quad (7.50)$$

visto que

$$v(\beta)u(\beta)\tilde{a}(\beta) |0(\beta)\rangle = 0.$$

Temos então

$$(1 + v^2(\beta))a^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle = u(\beta)a^\dagger |0(\beta)\rangle,$$

e finalmente

$$a^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)} a^\dagger |0(\beta)\rangle. \quad (7.51)$$

Analogamente, pode-se deduzir que

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)} a |0(\beta)\rangle. \quad (7.52)$$

### 7.3 Estrutura Algébrica da Dinâmica de Campos Térmicos

Tendo em vista a ocorrência de simetrias em sistemas físicos termalizados, as álgebras e os respectivos grupos de Lie estão presentes em diversos aspectos do formalismo

[58].

A estrutura algébrica da dinâmica de campos térmicos pode ser bem compreendida definindo-se a álgebra de Lie térmica, cujos geradores são

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i, \hat{A}_j] &= ic_{ij}^k \hat{A}_k, \\ [\hat{A}_i, A_j] &= ic_{ij}^k A_k, \\ [A_i, A_j] &= ic_{ij}^k A_k, \end{aligned}$$

onde  $\hat{A}_i$  são os geradores de simetria e os  $A_i$  são os observáveis, constituindo o espaço  $V_{obs} \oplus V_{ger}$ . Introduzindo os operadores

$$\tilde{A} = A - \hat{A},$$

temos

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= ic_{ij}^k A_k, \\ [\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] &= -ic_{ij}^k \tilde{A}_k, \\ [A_i, \tilde{A}_j] &= 0. \end{aligned}$$

Destas relações, pode-se extrair as regras de conjugação til dadas por

$$\begin{aligned} (A_i A_j)^\sim &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \\ (cA_i + A_j)^\sim &= c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \\ (A_i^\dagger)^\sim &= (\tilde{A}_i)^\dagger, \\ (\tilde{A}_i)^\sim &= A_i. \end{aligned}$$

Um outro resultado algébrico bastante utilizado na dinâmica de campos térmicos é a representação de Schwinger. A álgebra do  $SU(2)$  e a álgebra de dois osciladores bosônicos podem ser conectadas de acordo com uma proposta realizada por Schwinger, em 1951 [109]. Faremos aqui uma breve revisão sobre o tema que será de grande utilidade no próximo capítulo.

Considere operadores número  $N_1$  e  $N_2$  dados por

$$N_1 = a_1^\dagger a_1; \quad N_2 = a_2^\dagger a_2,$$

satisfazendo regras de comutação

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij}, & [N_i, a_j] &= -\delta_{ij} a_j, \\ [N_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij} a_j^\dagger, & i, j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Uma vez que  $N_1$  e  $N_2$  comutam, estes operadores possuem um conjunto de autovetores simultâneos:

$$\begin{aligned} N_1 |n_1, n_2\rangle &= n_1 |n_1, n_2\rangle, \\ N_2 |n_1, n_2\rangle &= n_2 |n_1, n_2\rangle. \end{aligned}$$

A ação dos operadores de destruição e criação sobre estes kets é dada por

$$\begin{aligned} a_i |n_i, n_j\rangle &= \sqrt{n_i} |n_i - 1, n_j\rangle, \\ a_i^\dagger |n_i, n_j\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1, n_j\rangle, \end{aligned} \quad (7.54)$$

com

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} |0, 0\rangle.$$

Definindo os operadores

$$\begin{aligned} S_+ &\equiv a_1^\dagger a_2, & S_- &\equiv a_2^\dagger a_1, \\ S_0 &\equiv (a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) = \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \end{aligned}$$

a álgebra de Lie do grupo  $SU(2)$  é satisfeita:

$$[S_0, S_\pm] = \pm S_\pm, \quad [S_+, S_-] = S_0.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} S^2 &\equiv S_0^2 + \frac{1}{2}(S_+ S_- + S_- S_+) \\ &= \frac{1}{2}N(N + 1), \end{aligned} \quad (7.55)$$

onde  $N \equiv N_1 + N_2$ . Podemos obter uma representação para esta álgebra considerando a ação destes operadores  $S_+$ ,  $S_-$  e  $S_z$  sobre os kets  $|n_1, n_2\rangle$ :

$$\begin{aligned} S_+ |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_2(n_1 + 1)} |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle, \\ S_- |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_1(n_2 + 1)} |n_1 - 1, n_2 + 1\rangle, \\ S_0 |n_1, n_2\rangle &= \frac{1}{2}(n_1 - n_2) |n_1, n_2\rangle. \end{aligned} \quad (7.56)$$

A representação usual para a álgebra de Lie do grupo  $SU(2)$  pode ser obtida rotulando-se o estado  $|n_1, n_2\rangle$  por

$$|s, m\rangle = \left| \frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_1 - n_2}{2} \right\rangle, \quad (7.57)$$

resultando em

$$\begin{aligned} S^2 |s, m\rangle &= s(s + 1) |s, m\rangle, \\ S_0 |s, m\rangle &= m |s, m\rangle. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Esta construção permite descrever sistemas de spin 1/2 por meio de operadores bosônicos.

Uma outra estrutura algébrica que emerge naturalmente do formalismo da dinâmica de campos térmicos é a álgebra de Hopf [113, 114, 115, 116]. Uma boa referência sobre o tema, a partir da qual faremos uma breve revisão, encontra-se em [117]. Para definir uma álgebra de Hopf, necessitamos inicialmente definir uma co-álgebra e uma bi-álgebra.

**Definição 20** *Uma co-álgebra  $(C, +, \Delta, \epsilon; k)$  sobre  $k$  é um espaço vetorial  $(C, +; k)$  munido de um co-produto  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  co-associativo, com uma co-unidade  $\epsilon : C \rightarrow k$ , em que os axiomas da co-associatividade e da co-unidade são dados, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta &= (id \otimes \Delta)\Delta, \\ (\epsilon \otimes id)\Delta(c) &= (id \otimes \epsilon)\Delta(c) = c, \end{aligned}$$

para todo  $c \in C$ , onde  $id$  representa a operação identidade, ou seja,  $id(c) = c$ .

**Definição 21** Uma bi-álgebra  $(B, +, \cdot, \Delta, \epsilon; k)$  sobre  $k$  é um espaço vetorial  $(B, +; k)$  sobre  $k$  que possui ambas as estruturas de álgebra e co-álgebra com as seguintes relações de compatibilidades entre elas:

$$\begin{aligned}\Delta(h \cdot g) &= \Delta h \cdot \Delta g, \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1, \\ \epsilon(h \cdot g) &= \epsilon(h) \cdot \epsilon(g), \quad \epsilon(1) = 1,\end{aligned}$$

para todo  $h, g \in B$ .

Finalmente, de posse das definições de co-álgebra e bi-álgebra, passemos à definição de uma álgebra de Hopf

**Definição 22** Uma álgebra de Hopf  $(B, +, \cdot, \eta, \Delta, \epsilon, T; k)$  sobre  $k$  é uma bi-álgebra sobre  $k$  com uma aplicação anti-linear adicional  $T : B \rightarrow B$ , denominada antípoda, e uma aplicação  $\eta(k) \rightarrow A$ , dada por  $\eta(\lambda) = \lambda 1$ , obedecendo ao seguinte axioma

$$(T \otimes id)\Delta = (id \otimes T)\Delta = \eta\epsilon.$$

Podemos adicionar à álgebra de Hopf uma estrutura quasi-triangular  $Q \in B \otimes B$ , inversível, que obedece às condições

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)Q &= Q_{13}Q_{23}; \quad (id \otimes \Delta)Q = Q_{13}Q_{12}, \\ \tau\Delta h &= Q(\Delta h)Q^{-1},\end{aligned}$$

para todo  $h \in B$ . Escrevendo  $Q = \sum Q^{(1)} \otimes Q^{(2)}$ , entende-se  $Q_{ij}$  por

$$Q_{ij} = \sum 1 \otimes \dots \otimes Q^{(1)} \otimes 1 \otimes \dots \otimes Q^{(2)} \otimes \dots \otimes 1,$$

ou seja,  $Q_{ij} \in B \otimes B \otimes \dots \otimes B$ , em que  $Q^{(1)}$  é o  $i$ -ésimo fator,  $Q^{(2)}$  é o  $j$ -ésimo fator e todos os demais são 1, até que a sua dimensão seja completada consistentemente.

Uma álgebra de Hopf munida de uma estrutura quasi-triangular  $Q$  denomina-se grupo quântico. Sua relação com a dinâmica de campos térmicos foi bem explorada na referência [115]. Um exemplo bastante conhecido é álgebra gerada pelos elementos

$$x^2 = 0, \quad g^2 = 1, \quad xg = -gx.$$

Definindo o co-produto, a co-unidade e a aplicação antípoda por

$$\begin{aligned} \Delta x &= x \otimes 1 + g \otimes x, & \Delta g &= g \otimes g, \\ \epsilon(x) &= 0, \quad \epsilon(g) = 1, & Tx &= -gx, \quad Tg = g, \end{aligned}$$

é fácil verificar que tal estrutura forma uma álgebra de Hopf. Se adicionarmos a esta estrutura o elemento

$$Q = 1 \otimes 1 - 2p \otimes p + \alpha(x \otimes x + 2xp \otimes xp - 2x \otimes xp),$$

com  $p = \frac{1-g}{2}$  e  $\alpha$  um parâmetro arbitrário, temos um grupo quântico. Um outro grupo quântico de interesse é o grupo quântico  $SU_q(2)$ . A álgebra de  $SU(2)$  é dada por

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_0. \quad (7.59)$$

O grupo quântico  $SU_q(2)$  pode ser obtido, introduzindo um parâmetro  $q$  não nulo com as relações

$$\begin{aligned} q^{\pm J_0} q^{\mp J_0} &= 1; & q^{J_0} J_\pm q^{-J_0} &= q^{\pm 1} J_\pm, \\ [J_0, J_\pm] &= \pm J_\pm; & [J_+, J_-] &= \frac{q^{2J_0} - q^{-2J_0}}{q - q^{-1}} = [2J_0]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

A álgebra de Hopf pode ser obtida com as estruturas

$$\begin{aligned} \Delta q^{\pm J_0} &= q^{\pm J_0} \otimes q^{\pm J_0}; & \Delta J_\pm &= J_\pm \otimes q^{J_0} + q^{-J_0} \otimes J_\pm, \\ \epsilon q^{\pm J_0} &= 1; \quad \epsilon J_\pm = 0; & TJ_\pm &= -q^{\pm 1} J_\pm; \quad Tq^{\pm J_0} = q^{\mp J_0}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Supondo  $q = e^{t/2}$  e as exponenciais como séries de potências a álgebra de Hopf torna-se quasi-triangular com a estrutura

$$Q = q^{J_0 \otimes J_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^2)^n}{[n]!} (q^{J_0} J_+ \otimes q^{-J_0} J_-)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (7.62)$$

em que

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad e \quad [n]! = [n][n-1][n-2] \dots [1]. \quad (7.63)$$

É salutar observar que para  $q \rightarrow 1$  recupera-se as relações usuais do  $SU(2)$ .

Uma realização para o grupo quântico  $SU_q(2)$  pode ser obtida a partir da álgebra do oscilador harmônico  $q$ -deformado, gerado pelos elementos  $a, a^\dagger, q^N, q^{-N}$  e 1, com as relações

$$\begin{aligned} aa^\dagger - q^{-1}a^\dagger a &= q^N; & aa^\dagger - qa^\dagger a &= q^{-N}, \\ q^N a q^{-N} &= q^{-1}a; & q^N a^\dagger q^{-N} &= qa^\dagger; & q^{\pm N} q^{\mp N} &= 1. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Sua representação no espaço de Fock, para  $q$  real, é dado por

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle; & a |n\rangle &= \sqrt{[n]} |n-1\rangle; \\ q^N |n\rangle &= q^n |n\rangle; & \text{com } N |n\rangle &= n |n\rangle; & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.65)$$

Definindo os operadores  $J_+, J_-$  e  $J_0$  como

$$J_+ = a_1^\dagger a_2; \quad J_- = a_2^\dagger a_1; \quad J_0 = \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \quad (7.66)$$

em que  $a_i, a_i^\dagger$ , com  $i = 1, 2$ , obedecendo as relações

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij} \{[N+1] - [N]\}, \\ [a_i, a_j] &= 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \end{aligned} \quad (7.67)$$

obtemos

$$[J_0, J_\pm] = J_\pm; \quad [J_+, J_-] = [2J_0]. \quad (7.68)$$

Tal representação basea-se nos seguintes postulados

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{[n]!}} |0\rangle; \quad a |0\rangle = 0; \quad q^N |0\rangle = 0, \quad (7.69)$$

e

$$aa^\dagger = [N+1]; \quad a^\dagger a = [N], \quad (7.70)$$

com  $[n]! = [n][n-1] \dots [1]$ . As estruturas algébricas aqui discutidas possibilitam a investigação de temas como emaranhamento e possíveis deformações das teorias físicas como generalizações das teorias usuais, no contexto da dinâmica de campos térmicos. É exatamente nesse espírito que o próximo capítulo será abordado.

## Capítulo 8

# Aspectos Algébricos da Dinâmica de Campos Térmicos

O emaranhamento quântico também pode ser estudado via o formalismo da dinâmica de campos térmicos. Na referência [113] foram analisados estados maximamente emaranhados em sistemas bosônicos bipartites com simetrias  $SU(1,1)$  e  $SU(2)$ . O grau de emaranhamento foi investigado mediante a entropia de von-Neumann e os estados maximamente emaranhados foram gerados a partir de uma transformação de Bogoliubov, mimificando-se o procedimento de termalização em DCT.

Neste capítulo realizaremos um procedimento similar para sistemas com simetrias generalizadas a partir das simetrias  $SU(1,1)$  e  $SU(2)$ ; entretanto, nossa análise do emaranhamento é realizada via decomposição de Schmidt [21]. Em alguns casos, a estrutura de álgebra de Hopf será explorada.

Um outro conceito corrente em propostas de generalizações das teorias físicas é o de grupos quânticos [117], associados à deformações de álgebras de Lie, com um parâmetro  $q$  de deformação, cujo limite para  $q$  tendendo a zero recupera a simetria original do sistema. Tal estrutura tem sido investigada no contexto da teoria da computação quântica na descrição dos anyons [51] e na análise do emaranhamento quântico [118]. Em outras áreas da física a estrutura de grupos quânticos

também aparece como, por exemplo, associada à propostas de gravitação quântica [119]. Na dinâmica de campos térmicos, a estrutura de grupos quânticos foi explorada na referência [115] partindo-se de deformações da álgebra de Weyl-Heisenberg com o parâmetro de deformação relacionado à temperatura.

Seguindo em parte essa proposta, construiremos uma dinâmica de campos térmicos  $q$ -deformada, sem a identificação do parâmetro de deformação com a temperatura, resultando numa formulação mais geral. Trilhando por este caminho, veremos que é possível encontrar expressões explícitas para o vácuo térmico, para as transformações de Bogoliubov e para os operadores térmicos de criação e aniquilação. Expressões entrópicas serão analisadas neste contexto, tendo em vista a relevância do conceito de entropia na informação quântica [1] e finalizaremos com uma incursão pela  $q$ -estatística de Tsallis, que também tem sido investigada na análise de medidas de emaranhamento [120].

## 8.1 Simetrias Generalizadas $SU(1,1)$ , $SU(2)$ e Emaranhamento

Nesta seção, construiremos estados emaranhados em sistemas que possuem simetria  $SU(1,1)$  e  $SU(2)$ , generalizando os resultados obtidos na referência [113]. Consideraremos sistemas de  $n$  osciladores, e faremos a investigação do emaranhamento via critério de Schmidt, que neste contexto permite a identificação do emaranhamento de forma direta.

1) Estados emaranhados com simetria  $SU(1,1)$ .

Consideremos então um sistema de  $2n$  osciladores bosônicos. Cada um destes sistemas possui dois modos e, por tanto operadores que satisfazem as relações

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= [b, b^\dagger] = 1, \\ [a, b] &= [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0. \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
 S_+ &= a^\dagger b^\dagger, \\
 S_- &= ab, \\
 S_0 &= \frac{1}{2}(a^\dagger a + bb^\dagger),
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

temos a álgebra  $su(1,1)$ :

$$\begin{aligned}
 [S_0, S_\pm] &= S_\pm, \\
 [S_+, S_-] &= -2S_0.
 \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, considere dois sistemas. Definindo os operadores

$$\begin{aligned}
 S_+^{(2)} &= 1 \otimes S_+ + S_+ \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1,
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}
 S_-^{(2)} &= 1 \otimes S_- + S_- \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes ab + ab \otimes 1,
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned}
 S_0^{(2)} &= 1 \otimes S_0 + S_0 \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes \frac{1}{2}(a^\dagger a + bb^\dagger) + \frac{1}{2}(a^\dagger a + bb^\dagger) \otimes 1,
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

mantemos a simetria  $su(1,1)$ , tendo em vista que são verificadas as relações

$$\begin{aligned}
 [S_0^{(2)}, S_\pm^{(2)}] &= S_\pm^{(2)}, \\
 [S_+^{(2)}, S_-^{(2)}] &= -2S_0^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Construiremos agora um estado emaranhado a partir da transformação unitária

$$\begin{aligned}
 |\Psi^{(2)}(A, B)\rangle &= U(\gamma) |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \\
 &= \exp[\gamma(S_+^{(2)} - S_-^{(2)})] |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \\
 &= \exp\{\gamma[(1 \otimes S_+ + S_+ \otimes 1 - 1 \otimes S_- + S_- \otimes 1)]\} \\
 &\quad \times |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle.
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Utilizando a relação

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\ln \cosh \alpha C} e^{\tanh \alpha A}, \quad (8.7)$$

em que  $C = [A, B]$ , podemos então fazer as seguintes identificações

$$\begin{aligned} A &= -S_-^{(2)} = -(1 \otimes S_- + S_- \otimes 1) \\ &= -(1 \otimes ab + ab \otimes 1), \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} B &= S_+^{(2)} = 1 \otimes S_+ + S_+ \otimes 1 \\ &= 1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1 \end{aligned} \quad (8.9)$$

e

$$\begin{aligned} C &= [A, B] = [-S_-^{(2)}, S_+^{(2)}] = -S_0^{(2)} \\ &= -[1 \otimes S_0 + S_0 \otimes 1] \\ &= -[1 \otimes (a^\dagger a + bb^\dagger) + (a^\dagger a + bb^\dagger) \otimes 1]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Em consequência, segue de (8.6)

$$\begin{aligned} |\Psi^{(2)}(A, B)\rangle &= e^{\tanh \gamma (1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1)} \\ &\quad \times e^{\ln \cosh \gamma [1 \otimes (a^\dagger a + bb^\dagger) + (a^\dagger a + bb^\dagger) \otimes 1]} \\ &\quad \times e^{\tanh \gamma [-(1 \otimes ab + ab \otimes 1)]} |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Utilizando que  $[b, b^\dagger] = 1$  e o fato de que a última exponencial não altera o elemento  $|0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle$ , temos

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(2)}(A, B)\rangle &= e^{\tanh \gamma(1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1)} \\
&\quad \times e^{\ln \cosh \gamma[1 \otimes (b^\dagger b + a^\dagger a + 1) + (b^\dagger b + a^\dagger a + 1) \otimes 1]} |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \\
&= e^{\tanh \gamma(1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1)} \\
&\quad \times e^{\ln \cosh \gamma[2(1 \otimes 1) + 1 \otimes (b^\dagger b + a^\dagger a + 1) + (b^\dagger b + a^\dagger a + 1) \otimes 1]} |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \\
&= e^{\tanh \gamma(1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1)} \\
&\quad \times e^{-\ln \cosh \gamma 2} e^{-\ln \cosh \gamma(1 \otimes b^\dagger b + b^\dagger b \otimes 1)} \\
&\quad \times e^{-\ln \cosh \gamma(1 \otimes a^\dagger a + a^\dagger a \otimes 1)} |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \\
&= e^{\tanh \gamma(1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1)} \\
&\quad \times e^{\ln[(2 \cosh \gamma)^{-1}]} e^{-\ln \cosh \gamma(1 \otimes b^\dagger b + b^\dagger b \otimes 1)} |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \\
&= e^{\ln[(2 \cosh \gamma)^{-1}]} \\
&\quad \times e^{\tanh \gamma(1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1)} |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle .
\end{aligned}$$

Então

$$|\Psi^{(2)}(A, B)\rangle = \frac{\cosh^{-1} \gamma}{2} \sum_m (-\tanh \gamma)^m \frac{1}{m!} [(1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1)]^m |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle .$$

Para  $n$  sistemas

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= \frac{\cosh^{-1} \gamma}{2} \sum_m (-\tanh \gamma)^m \frac{1}{m!} [(a^\dagger b^\dagger \otimes \dots \otimes 1) + \dots + (1 \otimes \dots \otimes a^\dagger b^\dagger)]^m \\
&\quad \times |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \otimes \dots \otimes |0_a, 0_b\rangle .
\end{aligned}$$

Se considerarmos um sistema físico com dois fótons, devemos tomar na expressão acima  $m = 1$  (observe na expressão seguinte que temos no máximo um fóton em cada modo), produzindo o estado

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(2)}(A, B)\rangle &= \frac{\cosh^{-1} \gamma}{2} (-\tanh \gamma) (1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1) |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \\
&= \frac{\cosh^{-1} \gamma}{2} (-\tanh \gamma) (|0_a, 0_b\rangle \otimes |1_a, 1_b\rangle + |1_a, 1_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle) .
\end{aligned}$$

Este estado, pelo critério de Schmidt (veja capítulo 4), é um estado emaranhado, composto por dois termos biortogonais. Note entretanto, que ele não é maximamente emaranhado; para isto, ele deveria ter quatro termos.

Devemos também observar que os operadores definidos nas equações (8.1) - (8.4) podem constituir uma representação bosônica para álgebras de Hopf  $(B, +, \cdot, \eta, \Delta, \epsilon, T, \kappa)$  definindo

$$\begin{aligned}\Delta S_+ &= 1 \otimes S_+ + S_+ \otimes 1 = 1 \otimes a^\dagger b^\dagger + a^\dagger b^\dagger \otimes 1, \\ \Delta S_- &= 1 \otimes S_- + S_- \otimes 1 = 1 \otimes ab + ab \otimes 1, \\ \Delta S_0 &= 1 \otimes S_0 + S_0 \otimes 1 = 1 \otimes \frac{1}{2}(a^\dagger a + bb^\dagger) + \frac{1}{2}(a^\dagger a + bb^\dagger) \otimes 1, \\ T(S_+) &= -S_+, \quad \epsilon(S_+) = 0, \\ T(S_-) &= -S_-, \quad \epsilon(S_-) = 0, \\ T(S_0) &= -S_0, \quad \epsilon(S_0) = 0,\end{aligned}\tag{8.12}$$

Uma segunda possibilidade é considerarmos  $n$  sistemas de osciladores bosônicos, em que cada um deles possui simetria  $SU(1, 1)$  e o sistema total possui simetria  $SU(1, 1) \oplus SU(1, 1) \oplus \dots \oplus SU(1, 1)$ . Neste caso a transformação canônica será dada por

$$\begin{aligned}|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= U(\gamma) |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \otimes \dots \otimes |0_a, 0_b\rangle \\ &= \exp[\gamma(S_+^{(n)} - S_-^{(n)})] |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \otimes \dots \otimes |0_a, 0_b\rangle,\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}S_+^{(n)} &= S_{+1} \otimes S_{+2} \otimes \dots \otimes S_{+n} = a_1^\dagger b_1^\dagger \otimes a_2^\dagger b_2^\dagger \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n^\dagger, \\ S_-^{(n)} &= S_{-1} \otimes S_{-2} \otimes \dots \otimes S_{-n} = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \dots \otimes a_n b_n.\end{aligned}\tag{8.14}$$

Portanto

$$\begin{aligned}|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= \exp[\gamma(a_1^\dagger b_1^\dagger \otimes a_2^\dagger b_2^\dagger \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n^\dagger - a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \dots \otimes a_n b_n)] \\ &\quad \times |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \otimes \dots \otimes |0_a, 0_b\rangle.\end{aligned}$$

Expandindo a exponencial, temos

$$\begin{aligned} |\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= [1 \otimes \dots \otimes 1 + \gamma(a_1^\dagger b_1^\dagger \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n^\dagger - a_1 b_1 \otimes \dots \otimes a_n b_n) \\ &\quad + \gamma^2(a_1^\dagger b_1^\dagger \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n^\dagger - a_1 b_1 \otimes \dots \otimes a_n b_n)^2 + \dots] \\ &\quad \times |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \otimes \dots \otimes |0_a, 0_b\rangle, \end{aligned}$$

o que possibilita analisar a existência de termos biortogonais. Em particular, no caso de dois sistemas, após um pouco de álgebra, ficaremos com

$$\begin{aligned} |\Psi^{(2)}(A, B)\rangle &= |0_{a_1}, 0_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2}, 0_{b_2}\rangle + \gamma |1_{a_1}, 1_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2}, 1_{b_2}\rangle \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2!} (|2_{a_1}, 2_{b_1}\rangle \otimes |2_{a_2}, 2_{b_2}\rangle - |0_{a_1}, 0_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2}, 0_{b_2}\rangle) \\ &\quad + \frac{\gamma^3}{3!} (6 |3_{a_1}, 3_{b_1}\rangle \otimes |3_{a_2}, 3_{b_2}\rangle - 3 |1_{a_1}, 1_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2}, 1_{b_2}\rangle) + \dots, \end{aligned}$$

ou seja, a expansão contém apenas termos biortogonais. Estendendo essa análise para o caso geral, observa-se que

$$\begin{aligned} |\Psi^n(A, B)\rangle &= \sum_m \frac{1}{m!} [(a_1^\dagger b_1^\dagger \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n^\dagger) - (a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \dots \otimes a_n b_n)]^m \\ &\quad \times |0_a, 0_b\rangle \otimes |0_a, 0_b\rangle \otimes \dots \otimes |0_a, 0_b\rangle \end{aligned}$$

está emaranhado pelo critério de Schmidt, mas também não é maximamente emaranhado, visto que os coeficientes da expansão são distintos.

2) Estados emaranhados com simetria  $SU(2)$ .

Considere  $n$  sistemas em que cada um deles possui simetria  $SU(2)$  e o sistema total possui simetria  $SU(2) \oplus SU(2) \oplus \dots \oplus SU(2)$ . Então, para o  $i$ -ésimo sistema, temos

$$\begin{aligned} [S_{0i}, S_{\pm i}] &= \pm S_{\pm i}, \\ [S_{+i}, S_{-i}] &= 2S_{0i}, \end{aligned} \tag{8.15}$$

em que

$$\begin{aligned}
S_{+i} &= a_i^\dagger b_i, \\
S_{-i} &= b_i^\dagger a_i, \\
S_0 &= \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_i - b_i^\dagger b_i).
\end{aligned} \tag{8.16}$$

O estado emaranhado é dado por

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= \exp[\gamma(S_{+1} \otimes S_{+2} \otimes \dots \otimes S_{+n} - S_{-1} \otimes S_{-2} \otimes \dots \otimes S_{-n})] \\
&\quad \times |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \otimes \dots \otimes |0_n\rangle,
\end{aligned}$$

com  $|0_i\rangle = |0_{a_i}, 1_{b_i}\rangle$ . Explicitamente, em termos dos operadores de criação e aniquilação, temos

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= \exp[\gamma(a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n - b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n)] \\
&\quad \times |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle.
\end{aligned}$$

Realizando a expansão e analisando cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned}
&(a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n - b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n) |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle \\
= & |1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n - b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n)^2 |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle \\
= & - |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n - b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n)^3 |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle \\
= & - |1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n - b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n)^4 |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle \\
= & |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n - b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n)^5 |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle \\
&= |1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle,
\end{aligned}$$

Aglutinando os termos, o estado torna-se

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle + \gamma |1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{2!} (|0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle) - \frac{\gamma^3}{3!} (|1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \\
&\quad \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle) + \frac{\gamma^4}{4!} (|0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle) + \frac{\gamma^5}{5!} (|1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \\
&\quad \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle) - \dots
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= (1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \dots) |0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle \\
&\quad + (\gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \dots) |1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle \\
&= \cos \gamma (|0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle) \\
&\quad + \sin \gamma (|1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle).
\end{aligned}$$

Podemos ainda reescrever este estado como

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= \cos \gamma (|0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle) \\
&\quad + \sin \gamma (a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n) (|0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle) \\
&= [(\cos \gamma + \sin \gamma) (a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n)] \\
&\quad \times (|0_{a_1} 1_{b_1}\rangle \otimes |0_{a_2} 1_{b_2}\rangle \dots \otimes |0_{a_n} 1_{b_n}\rangle).
\end{aligned}$$

Este estado é claramente emaranhado pelo critério de Schmidt. Se tivéssimos feito a escolha  $|0_i\rangle = |1_{a_i}, 0_{b_i}\rangle$ , obteríamos, por uma construção análoga

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(n)}(A, B)\rangle &= \exp[\gamma (a_1^\dagger b_1 \otimes a_2^\dagger b_2 \otimes \dots \otimes a_n^\dagger b_n - b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n)] \\
&\quad \times |1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle \\
&= [(\cos \gamma - \sin \gamma) (b_1^\dagger a_1 \otimes b_2^\dagger a_2 \otimes \dots \otimes b_n^\dagger a_n)] \\
&\quad \times (|1_{a_1} 0_{b_1}\rangle \otimes |1_{a_2} 0_{b_2}\rangle \dots \otimes |1_{a_n} 0_{b_n}\rangle),
\end{aligned}$$

que também é emaranhado.

## 8.2 Grupos Quânticos e Dinâmica de Campos Térmicos q-Deformada

Nesta seção mostraremos como uma Dinâmica de Campos Térmicos q-deformada pode ser desenvolvida dentro do formalismo dos grupos quânticos. Para tanto, considere inicialmente a q-álgebra de Heisenberg definida pelos geradores  $a_q, a_q^\dagger, q^{+H_h/2}, q^{-H_h/2}$  e 1 com as relações

$$[q^{+H_h/2}, a_q] = 0; \quad [q^{-H_h/2}, a_q] = 0; \quad [a_q, a_q^\dagger] = \frac{q^{H_h} - q^{-H_h}}{q - q^{-1}}; \quad q^{\pm H_h/2} q^{\pm H_h/2} = 1,$$

onde  $q = e^{t/2}$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , de modo que podemos considerar  $H_h$ , como gerador. O índice  $\hbar$  refere-se à constante de Planck. Esta álgebra corresponde a uma extensão da álgebra do oscilador harmônico de modo que  $\hbar$  seja elevado à categoria de gerador por meio de  $H_h$  [117]. Ela forma uma álgebra de Hopf com as estruturas

$$\begin{aligned} \Delta a_q &= a_q \otimes q^{H_h/2} + q^{-H_h/2} \otimes a_q; \quad \Delta a_q^\dagger = a_q^\dagger \otimes q^{H_h/2} + q^{-H_h/2} \otimes a_q^\dagger, \\ \Delta q^{\pm H_h/2} &= q^{\pm H_h/2} \otimes q^{\pm H_h/2}; \quad \epsilon q^{\pm H_h/2} = 1; \quad \epsilon a_q = \epsilon a_q^\dagger = 0, \\ T a_q &= -a_q; \quad T a_q^\dagger = -a_q^\dagger; \quad T q^{\pm H_h/2} = q^{\mp H_h/2}. \end{aligned}$$

A q-álgebra de Heisenberg estendida é definida com os geradores adicionais  $q^N$  e  $q^{-N}$ , com as relações

$$q^{\pm N} q^{\mp N} = 1; \quad q^N a_q q^{-N} = q^{-1} a_q; \quad q^N a_q^\dagger q^{-N} = q a_q^\dagger; \quad [q^N, q^{H_h/2}] = 0.$$

Esta forma uma álgebra de Hopf adicionando-se

$$\Delta q^{\pm N} = q^{\pm N} \otimes q^{\pm N}; \quad \epsilon q^{\pm N} = 1; \quad T q^{\pm N} = q^{\mp N}.$$

Se  $q = e^{t/2}$ , com as exponenciais entendidas como série de potências em  $t$ , podemos considerar  $a, a^\dagger, H_h, N$  e 1 como geradores. Neste caso, a q-álgebra de Heisenberg

estendida passa a ser alçada à categoria de grupo quântico com a estrutura quasi-triangular

$$Q = q^{-(N \otimes H_{\hbar} + H_{\hbar} \otimes N)} e^{(q-q^{-1})q^{H/2} a_q \otimes q^{-H/2} a_q^{\dagger}}.$$

Consideraremos agora uma representação no espaço de Fock. Seja  $V_{\hbar} = \{|n, \hbar\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$  o espaço de representação da  $q$ -álgebra de Heisenberg estendida, expandido na base  $\{|n, \hbar\rangle\}$ . Então, a representação da  $q$ -álgebra de Heisenberg estendida é dada por

$$\begin{aligned} |n, \hbar\rangle &= \frac{a_q^{\dagger n}}{[\hbar]_q^{n/2} \sqrt{n!}} |0, \hbar\rangle, \quad H_{\hbar} |0, \hbar\rangle = \hbar |0, \hbar\rangle; \\ a_q |0, \hbar\rangle &= 0; \quad N |0, \hbar\rangle = 0, \end{aligned}$$

onde  $[\hbar]_q = \frac{q^{\hbar} - q^{-\hbar}}{q - q^{-1}}$ . De posse dessas relações pode-se extrair que

$$\begin{aligned} a_q^{\dagger} |n, \hbar\rangle &= \sqrt{n+1} [\hbar]^{1/2} |n+1, \hbar\rangle, \\ a_q |n, \hbar\rangle &= \sqrt{n} [\hbar]^{1/2} |n-1, \hbar\rangle, \\ H |n, \hbar\rangle &= \hbar |n, \hbar\rangle, \\ N |n, \hbar\rangle &= n |n, \hbar\rangle. \end{aligned}$$

A demonstração dessas relações pode ser encontrada em [117]. Tendo essas relações, mostraremos como construir uma DCT  $q$ -deformada; para isto partiremos da representação da  $q$ -álgebra de Heisenberg no espaço de Fock definida acima. Considere então o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = N [\hbar]_q \omega.$$

Sua equação de auto-valores é

$$\mathcal{H} |n, \hbar\rangle = E_n |n, \hbar\rangle = [\hbar]_q n \omega |n, \hbar\rangle.$$

Então

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle_q &= Z^{1/2}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \omega E_n / 2} |n, \tilde{n}, \hbar\rangle \\ &= Z^{1/2}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \omega [\hbar]_q n \omega / 2} |n, \tilde{n}, \hbar\rangle. \end{aligned}$$

Aplicando a condição de normalização

$$\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle_q = 1,$$

temos

$$Z_q(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega[\hbar]_q}}.$$

Por conseguinte, podemos introduzir

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle_q &= (1 - e^{-\beta\omega[\hbar]_q})^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta\omega[\hbar]_q n/2}}{n! [\hbar]_q^n} (a_q^\dagger)^n (\tilde{a}_q^\dagger)^n |0, \tilde{0}, \hbar\rangle \\ &= (1 - e^{-\beta\omega[\hbar]_q})^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{e^{-\beta\omega[\hbar]_q/2}}{[\hbar]_q} a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger \right]^n |0, \tilde{0}, \hbar\rangle \\ &= (1 - e^{-\beta\omega[\hbar]_q})^{1/2} \exp \left( \frac{e^{-\beta\omega[\hbar]_q/2}}{[\hbar]_q} a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger \right) |0, \tilde{0}, \hbar\rangle. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Definido as funções hiperbólicas

$$\begin{aligned} u_q(\beta) &= \cosh \theta_q(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega[\hbar]_q}}}, \\ v_q(\beta) &= \sinh \theta_q(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega[\hbar]_q/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega[\hbar]_q}}}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

podemos reescrever esta expressão como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle_q &= \cosh^{-1} \theta_q(\beta) e^{\frac{1}{[\hbar]_q} \tanh \theta_q(\beta) a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger} |0, \tilde{0}, \hbar\rangle \\ &= e^{\frac{1}{[\hbar]_q} \tanh \theta_q(\beta) a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger} e^{\ln(\cosh^{-1} \theta_q(\beta))} e^{-\ln(\cosh \theta_q(\beta)) \frac{a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger}{[\hbar]_q}} |0, \tilde{0}, \hbar\rangle \\ &= e^{\frac{1}{[\hbar]_q} \tanh \theta_q(\beta) a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger} e^{\ln(\cosh \theta_q(\beta))} e^{-\ln(\cosh \theta_q(\beta)) \frac{a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger}{[\hbar]_q}} e^{-\ln(\cosh \theta_q(\beta)) \frac{a_q^\dagger a_q}{[\hbar]_q}} |0, \tilde{0}, \hbar\rangle \\ &= e^{\frac{1}{[\hbar]_q} \tanh \theta_q(\beta) a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger} e^{\frac{-\ln(\cosh \theta_q(\beta))}{[\hbar]_q} (\tilde{a}_q^\dagger \tilde{a}_q + a_q^\dagger a_q + [\hbar]_q 1)} |0, \tilde{0}, \hbar\rangle \\ &= e^{\frac{1}{[\hbar]_q} \tanh \theta_q(\beta) a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger} e^{\frac{\ln(\cosh^{-1} \theta_q(\beta))}{[\hbar]_q} (\tilde{a}_q^\dagger \tilde{a}_q + a_q^\dagger a_q)} e^{\frac{1}{[\hbar]_q} \tanh \theta_q(\beta) (-\tilde{a}_q a_q)} |0, \tilde{0}, \hbar\rangle, \end{aligned}$$

onde utilizamos que

$$[\tilde{a}_q, \tilde{a}_q^\dagger] = [\hbar]_q 1, \quad (8.19)$$

tendo em vista que se trata de uma representação no espaço de Fock. Agora, utilizando a identidade

$$e^{\zeta(A+B)} = e^{\tanh(\zeta)B} e^{\ln \cosh(\zeta)C} e^{\tanh(\zeta)A}, \quad (8.20)$$

e identificando  $A, B, C$  e  $\zeta$  como

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{[\hbar]_q} \tilde{a}_q a_q, \\ B &= \frac{1}{[\hbar]_q} a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger, \\ C &= [A, B] = \frac{1}{[\hbar]_q} (\tilde{a}_q \tilde{a}_q^\dagger + a_q^\dagger a_q), \end{aligned} \quad (8.21)$$

podemos escrever a equação (8.17) como

$$|0(\beta)\rangle_q = e^{-iG_q(\beta)} |0, \tilde{0}, \hbar\rangle, \quad (8.22)$$

onde

$$G_q(\beta) = -\frac{i\theta_q(\beta)}{[\hbar]_q} (\tilde{a}_q a_q - a_q^\dagger \tilde{a}_q^\dagger). \quad (8.23)$$

Definindo

$$U_q(\beta) = \exp(-iG_q(\beta)), \quad (8.24)$$

temos

$$|0(\beta)\rangle_q = (-iG_q(\beta)) |0, \tilde{0}, \hbar\rangle \quad (8.25)$$

e os operadores térmicos q-deformados

$$\begin{aligned} a_q(\beta) &= U_q(\beta) a_q U_q^\dagger(\beta), \\ a_q^\dagger(\beta) &= U_q(\beta) a_q^\dagger U_q^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_q(\beta) &= U_q(\beta) \tilde{a}_q U_q^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_q^\dagger(\beta) &= U_q(\beta) \tilde{a}_q^\dagger U_q^\dagger(\beta). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Utilizando a identidade

$$e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i) [B, A] + \frac{(-i)^2}{2!} [B, [B, A]] \quad (8.27)$$

e as relações de comutação

$$\begin{aligned}
[G_q, a_q] &= -i\theta_q(\beta)\tilde{a}_q^\dagger, \\
[G_q, a_q^\dagger] &= -i\theta_q(\beta)\tilde{a}_q, \\
[G_q, \tilde{a}_q] &= -i\theta_q(\beta)a_q^\dagger, \\
[G_q, \tilde{a}_q^\dagger] &= -i\theta_q(\beta)a_q.
\end{aligned} \tag{8.28}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
a_q(\beta) &= U_q(\beta)a_qU_q^\dagger(\beta) \\
&= a_q - i[G_q, a_q] + \frac{(i)^2}{2!}[G_q, [G_q, a_q]] - \frac{(i)^3}{3!}[G_q, [G_q, [G_q, a_q]]] \\
&\quad + \frac{(i)^4}{4!}[G, [G_q, [G_q, [G_q, a_q]]]] + \dots \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_q^{2n}(\beta)}{(2n)!} \right) a_q - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_q^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!} \right) \tilde{a}_q^\dagger \\
&= \cosh \theta_q(\beta)a_q - \sinh \theta_q(\beta)\tilde{a}_q^\dagger \\
&= u_q(\beta)a_q - v_q(\beta)\tilde{a}_q^\dagger
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_q^\dagger(\beta) &= U_q(\beta)a_q^\dagger U_q^\dagger(\beta) \\
&= a_q^\dagger - i[G_q, a_q^\dagger] + \frac{(i)^2}{2!}[G_q, [G_q, a_q^\dagger]] - \frac{(i)^3}{3!}[G_q, [G_q, [G_q, a_q^\dagger]]] \\
&\quad + \frac{(i)^4}{4!}[G, [G_q, [G_q, [G_q, a_q^\dagger]]]] + \dots \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_q^{2n}(\beta)}{(2n)!} \right) a_q^\dagger - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_q^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!} \right) \tilde{a}_q \\
&= \cosh \theta_q(\beta)a_q^\dagger - \sinh \theta_q(\beta)\tilde{a}_q \\
&= u_q(\beta)a_q^\dagger - v_q(\beta)\tilde{a}_q.
\end{aligned}$$

O mesmo raciocínio é válido para  $\tilde{a}$  e  $\tilde{a}^\dagger$ . Em suma,

$$\begin{aligned}
a_q(\beta) &= u_q(\beta)a_q - v_q(\beta)\tilde{a}_q^\dagger, \\
a_q^\dagger(\beta) &= u_q(\beta)a_q^\dagger - v_q(\beta)\tilde{a}_q, \\
\tilde{a}_q(\beta) &= u_q(\beta)\tilde{a}_q + v_q(\beta)a_q^\dagger, \\
\tilde{a}_q^\dagger(\beta) &= u_q(\beta)\tilde{a}_q^\dagger + v_q(\beta)a_q.
\end{aligned} \tag{8.29}$$

Essas equações podem ser invertidas, resultando em

$$\begin{aligned}
a_q &= u_q(\beta)a_q(\beta) + v_q(\beta)\tilde{a}_q^\dagger(\beta), \\
a_q^\dagger &= u_q(\beta)a_q^\dagger(\beta) + v_q(\beta)\tilde{a}_q(\beta), \\
\tilde{a}_q &= u_q(\beta)\tilde{a}_q(\beta) + v_q(\beta)a_q^\dagger(\beta), \\
\tilde{a}_q^\dagger &= u_q(\beta)\tilde{a}_q^\dagger(\beta) + v_q(\beta)a_q(\beta).
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Visto que as transformações de Bogoliubov deformadas são unitárias, os operadores térmicos deformados satisfazem

$$\begin{aligned}
[a_q(\beta), a_q^\dagger(\beta)] &= 1, \\
[\tilde{a}_q(\beta), \tilde{a}_q^\dagger(\beta)] &= 1,
\end{aligned} \tag{8.31}$$

com as demais relações de comutação nulas.

Os operadores de aniquilação térmicos deformados destroem o estado  $|0(\beta)\rangle_q$ :

$$\begin{aligned}
a_q(\beta)|0(\beta)\rangle_q &= 0, \\
\tilde{a}_q(\beta)|0(\beta)\rangle_q &= 0,
\end{aligned} \tag{8.32}$$

ratificando que  $|0(\beta)\rangle_q$  é o estado de vácuo térmico q-deformado.

### 8.2.1 Operadores de Criação e Aniquilação na DCT q-Deformada

Mostraremos agora como construir os operadores de criação e aniquilação na DCT q-deformada sem a necessidade de duplicar a q-álgebra de Heisenberg estendida, ex-

plorando a estrutura de co-álgebra associada ao grupo quântico em questão. Introduziremos inicialmente os operadores

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}d_q &= 1 \otimes d_q, \\ \Delta^{(2)}d_q &= d_q \otimes 1,\end{aligned}\tag{8.33}$$

onde  $d_q$  é a derivada em relação ao parâmetro  $q$ . Observe também que

$$\begin{aligned}\frac{d}{d_q}a_q |n, \hbar\rangle &= \frac{d}{d_q}\sqrt{n} [\hbar]_q^{1/2} |n-1, \hbar\rangle \\ &= \sqrt{n} \frac{d}{dq} \left( [\hbar]_q^{1/2} \right) |n-1, \hbar\rangle \\ &= \sqrt{n} f(q, \hbar) |n-1, \hbar\rangle \\ &= \sqrt{n} f(q, \hbar) \frac{1}{\sqrt{n} [\hbar]_q^{1/2}} a_q |n, \hbar\rangle \\ &= \frac{f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}} a_q |n, \hbar\rangle,\end{aligned}\tag{8.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d_q}a_q^\dagger |n, \hbar\rangle &= \frac{d}{d_q}\sqrt{n+1} [\hbar]_q^{1/2} |n+1, \hbar\rangle \\ &= \sqrt{n+1} \frac{d}{dq} \left( [\hbar]_q^{1/2} \right) |n+1, \hbar\rangle \\ &= \sqrt{n+1} f(q, \hbar) |n+1, \hbar\rangle \\ &= \sqrt{n+1} f(q, \hbar) \frac{1}{\sqrt{n+1} [\hbar]_q^{1/2}} a_q^\dagger |n, \hbar\rangle \\ &= \frac{f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}} a_q^\dagger |n, \hbar\rangle.\end{aligned}\tag{8.35}$$

Portanto neste espaço a ação da derivada sobre os operadores corresponde à multiplicação pelo fator  $\frac{f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}}$ , em que

$$f(q, \hbar) = \frac{\hbar(q - q^{-1})(q^{h-1} + q^{-h-1}) - (1 + q^{-2})(q^h + q^{-h})}{(q - q^{-1})^2}.\tag{8.36}$$

Considere agora

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}d_q\Delta a_q &= a_q \otimes \frac{\hbar}{2}q^{\frac{\hbar}{2}-1} + q^{-\frac{\hbar}{2}} \otimes \frac{f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}}a_q \\ &= \frac{\hbar}{2}q^{\frac{\hbar}{2}-1}(a_q \otimes 1) + q^{-\frac{\hbar}{2}}\frac{f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}}(1 \otimes a_q)\end{aligned}\quad (8.37)$$

e

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)}d_q\Delta a_q &= \frac{f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}}a_q \otimes q^{\frac{\hbar}{2}} - \frac{\hbar}{2}q^{-\frac{\hbar}{2}-1} \otimes a_q \\ &= \frac{f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}}(a_q \otimes 1) - \frac{\hbar}{2}q^{-\frac{\hbar}{2}-1}(1 \otimes a_q).\end{aligned}\quad (8.38)$$

Podemos então obter o operador  $a_q \otimes 1$  como

$$a_q \otimes 1 \equiv a_q \otimes 1 = [\Delta^{(1)}d_q\Delta a_q + X_1\Delta^{(2)}d_q\Delta a_q] Y_1^{-1}, \quad (8.39)$$

onde,

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{2}{\hbar} \frac{q^{-\hbar+1}}{[\hbar]_q^{1/2}} f(q, \hbar), \\ Y_1 &= \frac{f(q, \hbar)q^{\frac{\hbar}{2}}}{[\hbar]_q^{1/2}} + \frac{2f^2(q, \hbar)}{\hbar [\hbar]_q}.\end{aligned}\quad (8.40)$$

Em um caminho similar, podemos obter  $1 \otimes a_q$  como

$$1 \otimes a_q \equiv 1 \otimes a_q = [\Delta^{(1)}d_q\Delta a_q - X_2\Delta^{(2)}d_q\Delta a_q] Y_2^{-1}, \quad (8.41)$$

em que

$$\begin{aligned}X_2 &= \frac{\hbar}{2}q^{\frac{\hbar}{2}-1} \frac{[\hbar]_q^{1/2}}{f(q, \hbar)}, \\ Y_2 &= \frac{q^{-\frac{\hbar}{2}}f(q, \hbar)}{[\hbar]_q^{1/2}} - \frac{\hbar^2}{4}q^{h-2} \frac{[\hbar]_q^{1/2}}{f(q, \hbar)}.\end{aligned}\quad (8.42)$$

O raciocínio é análogo para os operadores de criação. Resumindo, temos

$$\begin{aligned}a_q &\equiv a_q \otimes 1 = [\Delta^{(1)}d_q\Delta a_q + X_1\Delta^{(2)}d_q\Delta a_q] Y_1^{-1}, \\ a_q^\dagger &\equiv a_q^\dagger \otimes 1 = [\Delta^{(1)}d_q\Delta a_q^\dagger + X_1\Delta^{(2)}d_q\Delta a_q^\dagger] Y_1^{-1}, \\ \tilde{a}_q &\equiv 1 \otimes \tilde{a}_q = [\Delta^{(1)}d_q\Delta a_q - X_2\Delta^{(2)}d_q\Delta a_q] Y_2^{-1}, \\ \tilde{a}_q^\dagger &\equiv 1 \otimes \tilde{a}_q^\dagger = [\Delta^{(1)}d_q\Delta a_q^\dagger - X_2\Delta^{(2)}d_q\Delta a_q^\dagger] Y_2^{-1}.\end{aligned}\quad (8.43)$$

Podemos propôr com base nesta deformação da álgebra de Heisenberg uma nova representação para o grupo  $SU_q(2)$ :

$$\begin{aligned} S_{+q} &= a_{1q}^\dagger a_{2q}, \\ S_{-q} &= a_{2q}^\dagger a_{1q}, \\ S_{0q} &= \frac{1}{2}(N_{1q} - N_{2q}), \end{aligned} \quad (8.44)$$

com

$$N_{1q} = a_{1q}^\dagger a_{1q} \quad \text{e} \quad N_{2q} = a_{2q}^\dagger a_{2q}. \quad (8.45)$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} [S_{+q}, S_{-q}] &= \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) S_{0q}, \\ [S_{0q}, S_{+q}] &= \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) S_{0q}, \\ [S_{0q}, S_{-q}] &= - \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) S_{0q}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Sendo uma representação no espaço de Fock, temos

$$S_{+q} |n_1, n_2, \hbar\rangle = [\hbar]_q \sqrt{n_2(n_1 + 1)} |n_1 + 1, n_2 - 1, \hbar\rangle, \quad (8.47)$$

$$S_{-q} |n_1, n_2, \hbar\rangle = [\hbar]_q \sqrt{n_1(n_2 + 1)} |n_1 - 1, n_2 + 1, \hbar\rangle, \quad (8.48)$$

$$S_{0q} |n_1, n_2, \hbar\rangle = \frac{1}{2} [\hbar]_q (n_1 - n_2) |n_1, n_2, \hbar\rangle. \quad (8.49)$$

Definindo

$$|s, m, \hbar\rangle = \left| \frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_1 - n_2}{2}, \hbar \right\rangle, \quad (8.50)$$

temos

$$\begin{aligned} S_q^2 |s, m, \hbar\rangle &= [\hbar]_q s(s + 1) |s, m, \hbar\rangle \\ S_{0q} |s, m, \hbar\rangle &= [\hbar]_q m |s, m, \hbar\rangle, \end{aligned} \quad (8.51)$$

descrevendo um sistema deformado de spin  $1/2$ . Uma discussão detalhada da dedução dessas expressões encontra-se no apêndice B.

### 8.3 Entropias Deformadas

O conceito de entropia é extremamente importante na teoria da informação quântica. O limite de Holevo, por exemplo, que estabelece um limite superior para a informação acessível [1] é formulado em termos da entropia de von-neumann. Motivados por este fato, mostraremos como obter a entropia de von-Neumann deformada utilizando o ferramental desenvolvido na seção precedente. Em seguida apresentaremos uma relação entre os grupos quânticos e a entropia de Tsallis, que também tem sido investigada no contexto da informação quântica [120].

O operador densidade deformado é dado por

$$\begin{aligned}\rho_{|0(\beta)\rangle_q} &= \frac{1}{Z_q(\beta)} \exp(-\beta H_q) \\ &= \frac{1}{Z_q(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta\omega [\hbar]_q n) |n, \hbar\rangle \langle n, \hbar|. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Definindo

$$\bar{n}_q(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega[\hbar]_q} - 1}, \quad (8.53)$$

temos que

$$\rho_{|0(\beta)\rangle_q} \equiv \rho_{\beta_q} = \frac{1}{1 + \bar{n}_q(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}_q(\beta)}{1 + \bar{n}_q(\beta)} \right)^n |n, \hbar\rangle \langle n, \hbar|. \quad (8.54)$$

Um operador densidade para um estado geral  $|\Psi(\beta)\rangle_q$  pode ser obtido deste através de

$$\rho_{|\Psi(\beta)\rangle_q} = f_q(a_q, a_q^\dagger, \beta) \rho_{\beta_q} f_q^\dagger(a_q, a_q^\dagger, \beta).$$

Nosso objetivo aqui é determinar a entropia de von-Neumann para o oscilador deformado. A entropia é definida pela fórmula

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho), \quad (8.55)$$

onde o logaritmo é tomado na base 2. Se  $\lambda_x$  são os autovalores de  $\rho$ , a entropia de von-Neumann pode ser escrita como  $S(\rho) = -\sum_n \lambda_n \log(\lambda_n)$ . Para o operador densidade

apresentado acima temos

$$\lambda_n = [1 + \bar{n}_q(\beta)]^{-1} \left( \frac{\bar{n}_q(\beta)}{1 + \bar{n}_q(\beta)} \right)^n.$$

Logo, a entropia de von-neumann é dada por

$$S_{\rho_{\beta_q}} = - \sum_n [1 + \bar{n}_q(\beta)]^{-1} \left( \frac{\bar{n}_q(\beta)}{1 + \bar{n}_q(\beta)} \right)^n \log \left\{ [1 + \bar{n}_q(\beta)]^{-1} \left( \frac{\bar{n}_q(\beta)}{1 + \bar{n}_q(\beta)} \right)^n \right\}.$$

Mostraremos a seguir o cálculo da entropia de von-Neumann partindo de uma deformação envolvendo os operadores de criação e aniquilação distinta da associada à álgebra de Heisenberg deformada que vem sendo considerada até então. Nosso objetivo é exibir obstáculos no cálculo da função de partição, que não adquire a forma de uma expressão fechada, tal como no oscilador bosônico não deformado.

Nas referências [121, 122] foi obtida, para um oscilador bosônico deformado, a seguinte expressão para o estado puro térmico:

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n/2} \frac{1}{[n]_{\alpha}!} (a^{\dagger})^n (\tilde{a}^{\dagger})^n |0\rangle \\ &= (1 - e^{-\beta\omega})^{1/2} \exp_{q_a}(e^{-\beta\omega/2} a^{\dagger} \tilde{a}^{\dagger}) |0\rangle, \end{aligned} \quad (8.56)$$

com

$$\exp_{q_a} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_{\alpha}!} x^n \quad \text{e} \quad [n]_q = (q^{2n} - 1)/(q^2 - 1) \quad (8.57)$$

Consideremos então o hamiltoniano do oscilador q-deformado envolvendo a representação dada pela equação (7.65) para o oscilador deformado:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \omega(a_1^{\dagger} a_1 + a_1 a_1^{\dagger} + \dots + a_n^{\dagger} a_n + a_n a_n^{\dagger}) \\ &= \omega \sum_{i=1}^n (a_i^{\dagger} a_i + a_i a_i^{\dagger}) \end{aligned} \quad (8.58)$$

O estado de vácuo térmico associado a este sistema é dado por

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n e^{-\beta\omega_i([n_i] + [n_i+1])} \left| m_1, \dots, m_n, \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n \right\rangle \\ &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n e^{-\beta\omega_i([n_i] + [n_i+1])} \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{[n_i]}} \frac{(\tilde{a}^{\dagger})^n}{\sqrt{[\tilde{n}_i]}} \left| m_1, \dots, m_n, \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n \right\rangle. \end{aligned}$$

A condição de normalização impõe que

$$Z(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n e^{-\beta\omega_i([n_i]+[n_i+1])}. \quad (8.59)$$

Para determinar a entropia devemos inicialmente determinar o estado misto associado a este estado de vácuo termalizado. Temos que

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\mathcal{H}) &= \exp[-\beta[\sum_{i=1}^n \omega_i(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)]] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \exp[-\beta[\sum_{i=1}^n \omega_i(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)]] |m\rangle \langle m| \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \{1 + [-\beta[\sum_{i=1}^n \omega_i(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)]] \\ &\quad + \frac{1}{2!} [-\beta[\sum_{i=1}^n \omega_i(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)]^2 + \dots] |m\rangle \langle m|, \end{aligned} \quad (8.60)$$

em que  $|m\rangle \langle m| = |m_1 m_2 \dots m_n\rangle \langle m_1 m_2 \dots m_n|$ . Desenvolvendo esta expressão encontramos

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\mathcal{H}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{ |m\rangle \langle m| + [-\beta[\sum_{i=1}^n \omega_i(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)]] |m\rangle \langle m| \\ &\quad + \frac{1}{2!} [-\beta[\sum_{i=1}^n \omega_i(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)]^2 |m\rangle \langle m| + \dots \}. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Observando que

$$(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) |m\rangle \langle m| = ([m_i] + [m_i + 1]) |m\rangle \langle m|, \quad (8.62)$$

temos

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\mathcal{H}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{ 1 + ((-\beta\omega_1)([m_1] + [m_1 + 1]) + (-\beta\omega_2)([m_2] + [m_2 + 1]) \\ &\quad + \dots + (-\beta\omega_n)([m_n] + [m_n + 1])) + \frac{1}{2!} ((-\beta\omega_1)([m_1] + [m_1 + 1]) \\ &\quad + (-\beta\omega_2)([m_2] + [m_2 + 1]) \\ &\quad + \dots + (-\beta\omega_n)([m_n] + [m_n + 1]))^2 + \dots \} |m\rangle \langle m| \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \exp[\sum_{i=1}^n (-\beta\omega_i([m_i] + [m_i + 1]))] |m\rangle \langle m|. \end{aligned}$$

Definindo

$$\bar{m}_i(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1}, \quad (8.63)$$

temos

$$\exp[-\beta\omega_i([m_i] + [m_i + 1])] = \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]}. \quad (8.64)$$

Logo

$$\exp(-\beta H) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]} |m_1 m_2 \dots m_n\rangle \langle m_1 m_2 \dots m_n|. \quad (8.65)$$

e

$$\begin{aligned} Tr[\exp(-\beta H)] &= \sum_{m'_1, \dots, m'_n=0}^{\infty} \langle m'_1 m'_2 \dots m'_n | \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]} \\ &\quad \times |m_1 m_2 \dots m_n\rangle \langle m_1 m_2 \dots m_n | m'_1 m'_2 \dots m'_n \rangle \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]}. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Podemos agora escrever o operador densidade

$$\begin{aligned} \rho_\beta &= \left( \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]} \right)^{-1} \\ &\quad \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]} \\ &\quad \times |m_1 m_2 \dots m_n\rangle \langle m_1 m_2 \dots m_n | m'_1 m'_2 \dots m'_n \rangle. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Os autovalores associados a esta matriz densidade são dados por

$$\lambda_{m_i} = \frac{1}{\left( \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]} \right)} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1 + \bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i] + [m_i + 1]}. \quad (8.68)$$

Portanto a entropia de von-Neumann correspondente é

$$S_{\rho_{\beta}} = - \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\left( \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1+\bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i]+[m_i+1]} \right)} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1+\bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i]+[m_i+1]} \right. \\ \left. \times \log \left( \frac{1}{\left( \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1+\bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i]+[m_i+1]} \right)} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\bar{m}_i(\beta)}{1+\bar{m}_i(\beta)} \right)^{[m_i]+[m_i+1]} \right) \right].$$

Este cálculo mostra que a construção de uma DCT deformada pode ser não trivial a depender da deformação escolhida envolvendo os operadores de criação e aniquilação. A transformação de Bogoliubov para este caso não é óbvia, visto que não é possível obter uma expressão fechada em termos de uma exponencial para a função de partição.

A estatística não extensiva de Tsallis [123] é uma generalização da formulação de Boltzmann - Gibbs violando a aditividade, parte do terceiro postulado de Callen. A violação da aditividade representa o rompimento com o conceito termodinâmico de sistema isolado - um sistema não interagente com sua vizinhança, que em rigor, constitui uma idealização. Para um sistema composto ( $A+B$ ) formado pela união de dois subsistemas independentes  $A$  e  $B$ , a entropia total não corresponde meramente a soma das entropias dos sistemas  $A$  e  $B$ ,  $S_A + S_B$ , aparecendo um termo de interação  $(1-q)/k S_{qA} S_{qB}$ , onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $q$  é um parâmetro entrópico, tal que no limite  $q \rightarrow 1$ , a extensividade é recuperada. A entropia não-extensiva de Tsallis tem sido aplicada com grande sucesso a um sem-número de problemas físicos [124], biológicos [125], econômicos [126] e até sociais [127]. Mais recentemente, tem sido empregada em propostas de medidas de emaranhamento quântico [120]. Concomitantemente às aplicações nos mais variados contextos, aspectos matemáticos [128, 129, 130] relacionados ao formalismo também foram desenvolvidos. Um dos mais explorados diz respeito aos grupos quânticos [117], relacionados às deformações

de álgebras de Lie, onde também aparece um parâmetro  $q$ , cujo limite  $q \rightarrow 1$ , recupera a simetria original [131, 132].

Os grupos quânticos constituem álgebras de Hopf quasi-triangulares [117], podendo ser construídos, muitas vezes, a partir de deformações de álgebras de Lie. Eles tem sido empregados sobretudo em questões relacionadas à gravitação quântica [119] e espectroscopia molecular [133, 134]. A primeira conexão dos grupos quânticos com a entropia não extensiva foi realizada por Tsallis [135]. Nesse trabalho, partindo da álgebra de um oscilador bosônico e dos valores médios dos observáveis, Tsallis propõe uma relação entre o parâmetro  $q$  de sua estatística e o parâmetro  $q_G$  da álgebra do oscilador harmônico. Em 1997, Abe [136] mostra, utilizando o  $q$ -cálculo, que o postulado de Tsallis para a entropia contém intrinsecamente a deformação em sua estrutura. Baseado nesta ideia, ele apresenta uma nova entropia generalizada que representa uma modificação simétrica ( $q \leftrightarrow q^{-1}$ ) da entropia de Tsallis. Em 2002, Lavagno [137] apresenta uma realização da termoestatística, também com base no formalismo do  $q$ -cálculo, utilizando a derivada de Jackson ao invés das derivadas termodinâmicas ordinárias. Em seguida, discute uma conexão entre suas expressões  $q$ -deformadas e a deformação de Tsallis, observando que apesar da existência de certas similaridades, como a propriedade de não aditividade, elas representam deformações distintas. Ainda em 2002, Ubriaco [138] discute as consequências da introdução da invariância do grupo  $SU_q(2)$  na mecânica estatística quântica não extensiva e mostra que a invariância na matriz densidade conduz a uma termodinâmica equivalente à de Bose-Einstein na formulação de Boltzmann-Gibbs.

Exploramos aqui uma relação entre a mecânica estatística quântica não extensiva e o grupo quântico  $SU_q(2)$  através do espectro de energia de um hamiltoniano invariante por tal grupo. Este trabalho difere do de Ubriaco [138] na medida em que apresentamos operadores que constituem uma realização do  $SU_q(2)$  e não operadores covariantes pela ação de tal grupo. Nossa abordagem, enfática na determinação espectral, aproxima-se de propostas que buscam evidências experimentais das simetrias

de grupos quânticos associados às estruturas vibracionais e rotacionais das moléculas [133, 134]. Os parâmetros espectrais calculados têm mostrado concordância com os dados observados, sugerindo que os grupos quânticos podem descrever simetrias fundamentais no nível molecular, em que o parâmetro de deformação aparece caracterizando a interação entre o movimento vibracional e rotacional das moléculas. As simetrias dos sistemas físicos estão relacionadas ao hamiltoniano, e conseqüentemente ao seu espectro, de modo que através deste podemos deduzir grandezas físicas dentro do ensemble grande-canônico. Dessa forma, partindo do cálculo da grande-função de partição e da matriz densidade no formalismo de Tsallis, calculamos a entropia não extensiva, o grande-potencial termodinâmico e o valor médio do operador número, identificando o parâmetro algébrico  $q$  com o parâmetro entrópico de Tsallis, seguindo propostas nas quais o parâmetro de deformação relaciona-se com uma medida de interação nos sistemas físicos.

Considere inicialmente a álgebra do oscilador harmônico  $q$ -deformado :

$$\begin{aligned} aa^\dagger - q^{-1}a^\dagger a &= q^N; & aa^\dagger - qa^\dagger a &= q^{-N}, \\ q^N aq^{-N} &= q^{-1}a; & q^N a^\dagger q^{-N} &= qa^\dagger; & q^{\pm N} q^{\mp N} &= 1, \end{aligned} \quad (8.69)$$

em que  $a$  e  $a^\dagger$  são os operadores de destruição e criação, respectivamente, e  $q$  é um parâmetro real, arbitrário.

Sua representação no espaço de Fock, para  $q$  real, é dado por

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle; & a |n\rangle &= \sqrt{[n]_q} |n-1\rangle; \\ q^N |n\rangle &= q^n |n\rangle; & \text{com } N |n\rangle &= n |n\rangle; & n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.70)$$

onde  $[A]_q = \frac{q^A - q^{-A}}{q - q^{-1}}$  e  $N$  é o operador número. Definindo os operadores  $J_+$ ,  $J_-$  e  $J_0$  como

$$J_+ = a_1^\dagger a_2; \quad J_- = a_2^\dagger a_1; \quad J_0 = \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \quad (8.71)$$

em que os subíndices 1 e 2, referem-se aos modos 1 e 2, caracterizando dois osciladores bosônicos deformados, com cada um deles obedecendo as relações (8.69) e (8.70), obtemos a álgebra deformada  $SU_q(2)$

$$[J_0, J_{\pm}] = J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]_q. \quad (8.72)$$

Considere então o hamiltoniano com simetria  $SU_q(2)$

$$\mathcal{H} = \gamma C = \gamma \left\{ \left[ J_0 - \frac{1}{2} \right]_q^2 + J_+ J_- \right\}, \quad (8.73)$$

em que  $C = \left[ J_0 - \frac{1}{2} \right]^2 + J_+ J_-$  é um operador de Casimir e  $\gamma$  é uma constante a determinar. Observando que

$$\begin{aligned} \left[ J_0 - \frac{1}{2} \right]_q^2 |n_1, n_2\rangle &= \left[ \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - 1) \right]_q |n_1, n_2\rangle, \\ J_+ J_- |n_1, n_2\rangle &= [n_1]_q [n_2 + 1]_q |n_1, n_2\rangle, \end{aligned} \quad (8.74)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  é o número de fótons nos modos 1 e 2, respectivamente, o espectro do hamiltoniano é dado por

$$E_q = \gamma \left\{ \left[ \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - 1) \right]_q + [n_1]_q [n_2 + 1]_q \right\}. \quad (8.75)$$

No formalismo de Tsallis, a função grand-partição  $\Xi$  é dada por [139]:

$$\Xi_q = Tr [1 - (1 - q)\beta(H - \mu N)]^{1/(1-q)}, \quad (8.76)$$

em que  $\beta = 1/KT$ , sendo  $K$  a constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura do sistema e  $\mu$  é o potencial químico. Para o hamiltoniano (8.73), a grande função de partição torna-se

$$\Xi_q = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \left[ 1 - (1 - q)\beta \left( \gamma \left\{ \left[ \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - 1) \right]_q + [n_1]_q [n_2 + 1]_q \right\} - \mu n_1 n_2 \right) \right]^{1/(1-q)}.$$

A matriz densidade correspondente é dada por [139]:

$$\begin{aligned} \rho_q &= \frac{1}{\Xi_q} [1 - (1 - q)\beta(H - \mu N)]^{1/(1-q)} \\ &= \frac{1}{\Xi_q} \left[ 1 - (1 - q)\beta \left( \gamma \left\{ \left[ J_0 - \frac{1}{2} \right]_q^2 + J_+ J_- \right\} - \mu N \right) \right]^{1/(1-q)}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

De posse da matriz densidade pode-se calcular a entropia não extensiva de Tsallis:

$$S_q = kTr \frac{\rho - \rho^q}{q - 1} \quad (8.78)$$

Substituindo nesta expressão o operador densidade, temos

$$\begin{aligned} S_q = & \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} [1 - (1 - q)\beta(\gamma\{\frac{1}{2}(n_1 - n_2 - 1)_q + [n_1]_q [n_2 + 1]_q \\ & - \mu n_1 n_2\})]^{1/(1-q)} - [1 - (1 - q)\beta(\gamma\{\frac{1}{2}(n_1 - n_2 - 1)_q \\ & + [n_1]_q [n_2 + 1]_q\} - \mu n_1 n_2)]^{q/(1-q)}. \end{aligned}$$

O grande potencial termodinâmico é dado por

$$\Phi_q = -\frac{\ln \Xi_q}{\beta}. \quad (8.79)$$

Utilizando a grande função de partição, temos

$$\begin{aligned} \Phi_q = & -\frac{1}{\beta} \ln \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} [1 - (1 - q)\beta(\gamma\{\frac{1}{2}(n_1 - n_2 - 1)_q + [n_1]_q [n_2 + 1]_q\} \\ & - \mu n_1 n_2)]^{1/(1-q)}. \end{aligned}$$

O valor médio do operador número, por sua vez, é dado por

$$\langle N_q \rangle = Tr (\rho_q N_q) \quad (8.80)$$

Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \langle N_q \rangle = & \sum_{n_1, n_2=0}^w (n_1 n_2 [1 - (1 - q)\beta(\gamma\{\frac{1}{2}(n_1 - n_2 - 1)_q \\ & + [n_1]_q [n_2 + 1]_q\}) - \mu n_1 n_2]^{1/(1-q)}). \end{aligned}$$

Concluindo, deduzimos grandezas estatísticas no ensemble grande-canônico dentro do formalismo de Tsallis realizando uma conexão com o grupo quântico  $SU_q(2)$ . Observe que nestas expressões identificamos o parâmetro entrópico  $q$  com o parâmetro de deformação do grupo quântico  $SU_q(2)$ . A simetria aparece nas grandezas termodinâmicas associadas ao espectro do Hamiltoniano em questão. Dessa maneira foi

possível calcular a grande função de partição, a matriz densidade e como consequência a  $q$ -entropia, a  $q$ -grande função de partição e o  $q$ -operador número.

Neste capítulo realizamos uma generalização de alguns aspectos da dinâmica de campos térmicos partindo-se do conceito de simetria dos sistemas físicos, permitindo a análise de conceitos como emaranhamento quântico e deformações. Mostramos que objetos algébricos tais como álgebras de Hopf e grupos quânticos podem ser bem estruturados no panorama DCT e que o critério de Schmidt possibilita a identificação do emaranhamento de forma direta. Estendemos a análise para a  $q$ -estatística de Tsallis, baseando-se no espectro de um Hamiltoniano com simetria deformada  $SU_q(2)$ .

No próximo capítulo faremos uma análise dentro do formalismo DCT para situações de interesse da computação quântica e da informação quântica em uma perspectiva mais fenomenológica.

## Capítulo 9

# Dinâmica de Campos Térmicos e Informação Quântica

Em computação quântica e informação quântica, o acoplamento do sistema com o ambiente afeta o processamento da informação. Um sistema colocado em um banho térmico, por exemplo, terá suas propriedades quânticas afetadas de modo que a computação pode não ser realizada com êxito, conduzindo o sistema a estados discrepantes do estado final almejado, tornando-os inférteis para o processamento da informação. Essas observações sugerem que é relevante investigar como a temperatura interfere nas propriedades não clássicas de sistemas quânticos de interesse para a computação quântica.

Uma forma de realizar este estudo em sistemas quânticos ópticos é através da dinâmica de campos térmicos. O desenvolvimento de Barnett e Knight [140] foi um dos primeiros trabalhos realizados neste panorama. Em tal trabalho, o modelo de Jaynes-Cummings foi analisado e a praticidade da dinâmica de campos térmicos evidenciada, mostrando-se bastante profícua. Outro trabalho seminal foi o de Mann e Revzen [141], onde os estados coerentes térmicos foram introduzidos.

Neste capítulo, inicialmente usaremos a dinâmica de campos térmicos para calcular propriedades não clássicas, tais como fator de Mandel e função de Wigner, de

estados térmicos de interesse para a computação quântica e informação quântica. Em seguida apresentaremos um protocolo de teletransporte quântico de estados térmicos, envolvendo a representação duplo-trilho [1]. Por último investigaremos uma analogia entre o procedimento de purificação, na teoria da informação quântica e o processo de termalização da dinâmica de campos térmicos.

## 9.1 Computação Quântica com Oscilador Harmônico Termalizado

Desde a última década tem sido realizado um grande número de propostas teóricas de realizações físicas para os estados lógicos quânticos, os q-bits. Estas representações tomam como base sobretudo a possibilidade de implementação física das portas lógicas quânticas. Dentre estas, uma das mais utilizadas é a porta lógica *CNOT* (não-controlado), tendo em vista que qualquer operação unitária pode ser composta a partir das portas de um spin e *CNOT* [142], propriedade comumente conhecida na literatura como universalidade. Por outro lado, um dos grandes obstáculos na implementação experimental da computação quântica é a descoerência [143] que possui a temperatura, como um dos seus grandes responsáveis atuando como uma fonte de ruído. Investigaremos aqui, com base na dinâmica de campos térmicos, o efeito da temperatura sobre um estado de um oscilador bosônico, a partir do qual é possível implementar a porta lógica *CNOT*, analisando a fidelidade e algumas propriedades não clássicas, através do fator de Mandel e da função de Wigner.

Podemos pensar um q-bit fisicamente como um modo simples de radiação eletromagnética aprisionado em uma cavidade com um alto fator de qualidade  $Q$ ; a energia total é um múltiplo inteiro de  $\hbar\omega$ . Uma porta lógica *CNOT*, que realiza a transfor-

mação

$$\begin{aligned} |00\rangle_L &\mapsto |00\rangle_L, \\ |01\rangle_L &\mapsto |01\rangle_L, \\ |10\rangle_L &\mapsto |11\rangle_L, \\ |11\rangle_L &\mapsto |10\rangle_L, \end{aligned}$$

pode ser implementada através da identificação

$$\begin{aligned} |00\rangle_L &\mapsto |0\rangle, \\ |01\rangle_L &\mapsto |2\rangle, \\ |10\rangle_L &\mapsto (|4\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, \\ |11\rangle_L &\mapsto (|4\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Para ver porque isso ocorre, observe que após um intervalo de tempo  $t$ , o estado do sistema é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n e^{-in\omega t} |n\rangle. \tag{9.2}$$

Deixando o sistema evoluir até o tempo  $t = \pi/\omega$ , temos que

$$\begin{aligned} |\Psi(t = \pi/\omega)\rangle &= \sum_n c_n e^{-in\omega\pi/\omega} |n\rangle = \sum_n c_n e^{-in\pi} |n\rangle \\ &= \sum_n c_n \cos(-n\pi) |n\rangle = \sum_n c_n (-1)^n |n\rangle. \end{aligned}$$

Essa evolução faz com que os estados  $|0\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|4\rangle$  permaneçam inalterados e  $|1\rangle$  transforma-se em  $-|1\rangle$ . Para aplicarmos a DCT ao nosso problema, considere a seguinte sobreposição:

$$|\Psi\rangle_L = x' |00\rangle_L + y' |01\rangle_L + z' |10\rangle_L + w' |11\rangle_L,$$

com  $|x'|^2 + |y'|^2 + |z'|^2 + |w'|^2 = 1$ . Com a identificação dada pela equação (9.1), temos o estado “físico”

$$|\Psi\rangle = x |0\rangle + y |1\rangle + z |2\rangle + w |4\rangle,$$

com

$$\begin{cases} x = x', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(z' - w'), \\ z = y', \\ w = \frac{1}{\sqrt{2}}(z' + w'). \end{cases} \quad (9.3)$$

O estado térmico associado ao estado  $|\Psi\rangle$  é então dado por

$$|\Psi(\beta)\rangle = x |0(\beta)\rangle + y |1(\beta)\rangle + z |2(\beta)\rangle + w |4(\beta)\rangle, \quad (9.4)$$

em que os estados térmicos são expressos como [58]:

$$\begin{cases} |0(\beta)\rangle = |\beta; 0, \tilde{0}\rangle, \\ |1(\beta)\rangle = a^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle, \\ |2(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[a^\dagger(\beta)]^2 |0(\beta)\rangle, \\ |4(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}}[a^\dagger(\beta)]^4 |0(\beta)\rangle. \end{cases}$$

Utilizando a relação (7.51), podemos reescrever as expressões acima como

$$\begin{cases} |0(\beta)\rangle = |\beta; 0, \tilde{0}\rangle, \\ |1(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)} a^\dagger |0(\beta)\rangle, \\ |2(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2(\beta)} (a^\dagger)^2 |0(\beta)\rangle, \\ |4(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}} \frac{1}{u^4(\beta)} (a^\dagger)^4 |0(\beta)\rangle. \end{cases} \quad (9.5)$$

Dessa forma, o estado  $|\Psi(\beta)\rangle$  pode ser reescrito como

$$|\Psi(\beta)\rangle = x |0(\beta)\rangle + y \frac{1}{u(\beta)} a^\dagger |0(\beta)\rangle + z \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2(\beta)} (a^\dagger)^2 |0(\beta)\rangle + w \frac{1}{\sqrt{4!}} \frac{1}{u^4(\beta)} (a^\dagger)^4 |0(\beta)\rangle.$$

O respectivo bra é dado por

$$\langle\Psi(\beta)| = \langle 0(\beta)| x^* + \langle 0(\beta)| a \frac{1}{u(\beta)} y^* + \langle 0(\beta)| a^2 \frac{1}{u^2(\beta)} z^* \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle 0(\beta)| a^4 \frac{1}{u^4(\beta)} w^* \frac{1}{\sqrt{4!}}.$$

O valor médio de um observável  $O$  é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | x^* + \langle 0(\beta) | a \frac{1}{u(\beta)} y^* + \\
&+ \langle 0(\beta) | a^2 \frac{1}{u^2(\beta)} z^* \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle 0(\beta) | a^4 \frac{1}{u^4(\beta)} w^* \frac{1}{\sqrt{4!}} \\
&\times O(x | 0(\beta) \rangle + y \frac{1}{u(\beta)} a^\dagger | 0(\beta) \rangle + z \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2(\beta)} (a^\dagger)^2 | 0(\beta) \rangle \\
&+ w \frac{1}{\sqrt{4!}} \frac{1}{u^4(\beta)} (a^\dagger)^4 | 0(\beta) \rangle)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo esta expressão temos

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle &= |x|^2 \langle 0(\beta) | O | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{x^* y}{u(\beta)} \langle 0(\beta) | O a^\dagger | 0(\beta) \rangle + \frac{x^* z}{\sqrt{2} u^2(\beta)} \langle 0(\beta) | O (a^\dagger)^2 | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{x^* w}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} \langle 0(\beta) | O (a^\dagger)^4 | 0(\beta) \rangle + \frac{y^* x}{u(\beta)} \langle 0(\beta) | a O | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{|y|^2}{u^2(\beta)} \langle 0(\beta) | a O a^\dagger | 0(\beta) \rangle + \frac{y^* z}{\sqrt{2} u^3(\beta)} \langle 0(\beta) | a O (a^\dagger)^2 | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{y^* w}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} \langle 0(\beta) | a O (a^\dagger)^4 | 0(\beta) \rangle + \frac{z^* x}{\sqrt{2} u^2(\beta)} \langle 0(\beta) | a^2 O | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{z^* y}{\sqrt{2} u^3(\beta)} \langle 0(\beta) | a^2 O a^\dagger | 0(\beta) \rangle + \frac{|z|^2}{2 u^4(\beta)} \langle 0(\beta) | a^2 O (a^\dagger)^2 | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{z^* w}{\sqrt{2} \sqrt{4!} u^6(\beta)} \langle 0(\beta) | a^2 O (a^\dagger)^4 | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{w^* x}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} \langle 0(\beta) | a^4 O | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{w^* y}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} \langle 0(\beta) | a^4 O a^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{w^* z}{\sqrt{2} \sqrt{4!} u^6(\beta)} \langle 0(\beta) | a^4 O (a^\dagger)^2 | 0(\beta) \rangle \\
&+ \frac{|w|^2}{(\sqrt{4!})^2 u^8(\beta)} \langle 0(\beta) | a^4 O (a^\dagger)^4 | 0(\beta) \rangle .
\end{aligned}$$

Fazendo uso de

$$\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle = \text{Tr}(\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} O),$$

temos que

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle &= |x|^2 \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} O) + \frac{x^* y}{u(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} O a^\dagger) \\
&+ \frac{x^* z}{\sqrt{2} u^2(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} O (a^\dagger)^2) + \frac{x^* w}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} O (a^\dagger)^4) \\
&+ \frac{y^* x}{u(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a O) + \frac{|y|^2}{u^2(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a O a^\dagger) \\
&+ \frac{y^* z}{\sqrt{2} u^3(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a O (a^\dagger)^2) + \frac{z^* w}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a O (a^\dagger)^4) \\
&+ \frac{z^* x}{\sqrt{2} u^2(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 O) + \frac{z^* y}{\sqrt{2} u^3(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 O (a^\dagger)^2) \\
&+ \frac{|z|^2}{2 u^4(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 O (a^\dagger)^2) + \frac{z^* w}{\sqrt{2} \sqrt{4!} u^6(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 O (a^\dagger)^4) \\
&+ \frac{w^* x}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a^4 O) + \frac{w^* y}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} \text{Tr}(\rho_{|0(\beta)\rangle} a^4 O a^\dagger) \\
&+ \frac{|w|^2}{(\sqrt{4!})^2 u^8(\beta)} (a^\dagger)^4 \rho_{|0(\beta)\rangle} a^4.
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade cíclica do traço, o operador densidade torna-se

$$\begin{aligned}
\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} &= |x|^2 \rho_{|0(\beta)\rangle} + \frac{x^* y}{u(\beta)} a^\dagger \rho_{|0(\beta)\rangle} + \frac{x^* z}{\sqrt{2} u^2(\beta)} (a^\dagger)^2 \rho_{|0(\beta)\rangle} \\
&+ \frac{x^* w}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} (a^\dagger)^4 \rho_{|0(\beta)\rangle} + \frac{y^* x}{u(\beta)} \rho_{|0(\beta)\rangle} a + \frac{|y|^2}{u^2(\beta)} a^\dagger \rho_{|0(\beta)\rangle} a \\
&+ \frac{y^* z}{\sqrt{2} u^3(\beta)} (a^\dagger)^2 \rho_{|0(\beta)\rangle} a + \frac{z^* w}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} (a^\dagger)^4 \rho_{|0(\beta)\rangle} a + \frac{z^* x}{\sqrt{2} u^2(\beta)} \rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 \\
&+ \frac{z^* y}{\sqrt{2} u^3(\beta)} a^\dagger \rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 + \frac{|z|^2}{2 u^4(\beta)} (a^\dagger)^2 \rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 + \frac{z^* w}{\sqrt{2} \sqrt{4!} u^6(\beta)} (a^\dagger)^4 \rho_{|0(\beta)\rangle} a^2 \\
&+ \frac{w^* x}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} \rho_{|0(\beta)\rangle} a^4 + \frac{w^* y}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} a^\dagger \rho_{|0(\beta)\rangle} a^4 + \frac{w^* z}{\sqrt{4!} \sqrt{2} u^6(\beta)} (a^\dagger)^2 \rho_{|0(\beta)\rangle} a^4 \\
&+ \frac{|w|^2}{(\sqrt{4!})^2 u^8(\beta)} (a^\dagger)^4 \rho_{|0(\beta)\rangle} a^4.
\end{aligned}$$

Fazendo uso da expressão (7.46), temos explicitamente, o estado misto associado ao

estado térmico original

$$\begin{aligned}
\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} = & |x|^2 k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n |n\rangle \langle n| + \frac{x^* y k}{u(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n| \\
& + \frac{x^* z}{\sqrt{2} u^2(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n \sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle \langle n| \\
& + \frac{x^* w}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} |n+4\rangle \langle n| \\
& + \frac{y^* x k}{u(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n \sqrt{n+1} |n\rangle \langle n+1| + \frac{|y|^2}{u^2(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1) |n+1\rangle \langle n+1| \\
& + \frac{y^* z}{\sqrt{2} u^3(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1) \sqrt{n+2} |n+2\rangle \langle n+1| \\
& + \frac{z^* w}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1) \sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)} |n+4\rangle \langle n+1| \\
& + \frac{z^* x}{\sqrt{2} u^2(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n \sqrt{(n+1)(n+2)} |n\rangle \langle n+2| \\
& + \frac{z^* y}{\sqrt{2} u^3(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1) \sqrt{n+2} |n+1\rangle \langle n+2| \\
& + \frac{|z|^2}{2 u^4(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1)(n+2) |n+2\rangle \langle n+2| \\
& + \frac{z^* w}{\sqrt{2} \sqrt{4!} u^6(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1)(n+2) \sqrt{(n+3)(n+4)} |n+4\rangle \langle n+2| \\
& + \frac{w^* x}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} |n\rangle \langle n+4| \\
& + \frac{w^* y}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1) \sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)} |n+1\rangle \langle n+4| \\
& + \frac{w^* z}{\sqrt{4!} \sqrt{2} u^6(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1)(n+2) \sqrt{(n+3)(n+4)} |n+2\rangle \langle n+4| \\
& + \frac{|w|^2}{(\sqrt{4!})^2 u^8(\beta)} k \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) |n+4\rangle \langle n+4|, \quad (9.6)
\end{aligned}$$

com

$$k = \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)}$$

e

$$k_1 = \frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)}.$$

Uma grandeza de interesse em informação quântica é a fidelidade, que aqui permite determinar a distância entre o estado puro  $|\Psi\rangle$ , a partir do qual foi realizado o processo de termalização, e o estado termalizado  $|\Psi(\beta)\rangle$ , possuindo a característica de quando  $T \rightarrow 0$ , o estado puro é recuperado.

A fidelidade entre um estado puro e um estado misto é dada por [144, 145].

$$F = \sqrt{\langle \Psi | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | \Psi \rangle}. \quad (9.7)$$

Temos que

$$\begin{aligned} F &= (\langle 0 | x^* + \langle 1 | y^* + \langle 2 | z^* + \langle 1 | w^* ) \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} (x | 0\rangle + y | 1\rangle + z | 2\rangle + w | 4\rangle) \\ &= |x|^2 \langle 0 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 0\rangle + x^* y \langle 0 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 1\rangle + x^* z \langle 0 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 2\rangle + x^* w \langle 0 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 4\rangle \\ &\quad + y^* x \langle 1 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 0\rangle + |y|^2 \langle 1 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 1\rangle + y^* z \langle 1 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 2\rangle + y^* w \langle 1 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 4\rangle \\ &\quad + z^* x \langle 2 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 0\rangle + z^* y \langle 2 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 1\rangle + |z|^2 \langle 2 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 2\rangle + z^* w \langle 2 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 4\rangle \\ &\quad + w^* x \langle 4 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 0\rangle + w^* y \langle 4 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 1\rangle + w^* z \langle 4 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 2\rangle + |w|^2 \langle 4 | \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} | 4\rangle. \end{aligned}$$

Então, a fidelidade torna-se

$$\begin{aligned}
F = & [|x|^4 k k_1^{n=0} + \frac{|x|^2 |y|^2}{u(\beta)} k k_1^{n=0} + \frac{|x|^2 |z|^2}{\sqrt{2} u^2(\beta)} k k_1^{n=0} \\
& + \frac{|x|^2 |w|^2}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} k k_1^{n=0} + \frac{|x|^2 |y|^2}{u(\beta)} k k_1^{n=0} + \frac{|x|^4 |y|^2}{u^2(\beta)} k k_1^{n=1} + \frac{|y|^4}{u^2(\beta)} k k_1^{n=0} \\
& + \frac{\sqrt{2} |y|^2 x z}{u(\beta)} k k_1^{n=1} + \frac{|y|^2 |z|^2}{u^3(\beta)} k k_1^{n=0} + \frac{\sqrt{24} |y|^2 |w|^2}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} k k_1^{n=0} \\
& + \frac{\sqrt{2} |x|^2 |z|^2}{u^2(\beta)} k k_1^{n=0} + \frac{\sqrt{2} x^* z^* y^2}{u(\beta)} k k_1^{n=1} + \frac{|y|^2 |z|^2}{u^3(\beta)} k k_1^{n=0} \\
& + |x|^2 |z|^2 k k_1^{n=2} + \frac{2 |y|^2 |z|^2}{u^2(\beta)} k k_1^{n=1} + \frac{|z|^4}{u^4(\beta)} k k_1^{n=2} \\
& + \frac{\sqrt{6} x w |z|^2}{u^2(\beta)} k k_1^{n=2} + \frac{\sqrt{6} |z|^2 |w|^2}{\sqrt{4!} u^6(\beta)} k k_1^{n=0} + \frac{\sqrt{24} x w^*}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} k k_1^{n=0} \\
& + \frac{\sqrt{24} |z|^2 |w|^2}{\sqrt{4!} u^5(\beta)} k k_1^{n=0} + \frac{\sqrt{6} x^2 z^2 w^*}{u^4(\beta)} k k_1^{n=2} + \frac{2\sqrt{6} |z|^2 |w|^2}{\sqrt{4!} u^4(\beta)} k k_1^{n=0} \\
& + |x|^2 |w|^2 k k_1^{n=4} + \frac{4 |y|^2 |w|^2}{u^2(\beta)} k k_1^{n=3} + \frac{|z|^2 |w|^2}{2u^4(\beta)} k k_1^{n=2} + \frac{24 |w|^4}{4! u^8(\beta)} k k_1^{n=0}.
\end{aligned}$$

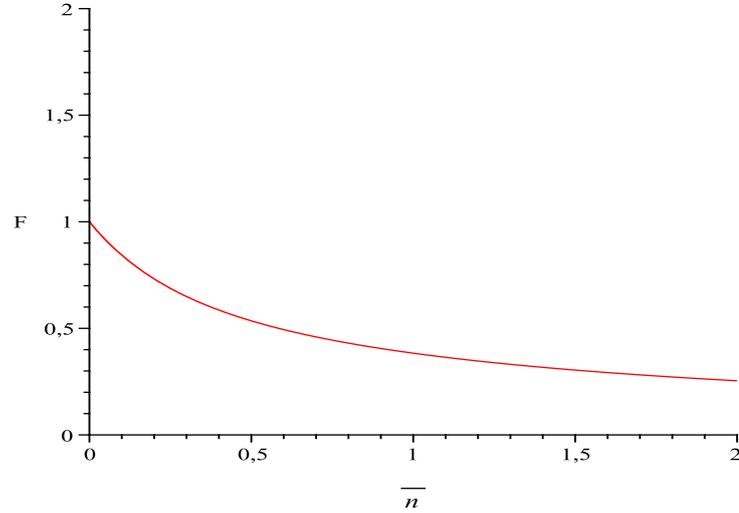
Para a análise gráfica, desenhamos a fidelidade em termos de  $\bar{n}$ , o que pode ser feito, visto que

$$u(\beta) = \sqrt{1 + \bar{n}(\beta)}. \quad (9.8)$$

Observando o comportamento da fidelidade no gráfico (9.1) para  $x = 0.2$ ,  $y = 0.3$ ,  $z = 0.6$  e  $w = \sqrt{0.51}$ , vemos que quando  $T \rightarrow 0$  ( $\bar{n} \rightarrow 0$ ), a fidelidade aproxima-se de  $F = 1$ ; a temperatura faz com que o sistema afaste-se do estado original, passando a ser caracterizado por uma mistura estatística de estados puros. A estatística subpoissoniana é uma das características de estados do campo eletromagnético que não possuem análogo clássico. Uma forma de investigar sua ocorrência é através do fator de Mandel [146]. O fator de Mandel, uma medida do grau de não classicalidade do sistema, é definido em termos de um estado termalizado, por

$$Q(\beta) = \frac{\langle \Psi(\beta) | \hat{N}^2 | \Psi(\beta) \rangle - \langle \Psi(\beta) | \hat{N} | \Psi(\beta) \rangle^2 - \langle \Psi(\beta) | \hat{N} | \Psi(\beta) \rangle}{\langle \Psi(\beta) | \hat{N} | \Psi(\beta) \rangle}, \quad (9.9)$$

Figura 9.1: Fidelidade no oscilador harmônico termalizado



com o operador número  $\hat{N}$

$$\begin{aligned}
 \hat{N} &= a^\dagger a \\
 &= [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)][u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] \\
 &= u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta)a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \\
 &\quad + u(\beta)v(\beta)\tilde{a}(\beta)a(\beta) + v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta).
 \end{aligned}$$

Nesta proposta, temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi(\beta) | \hat{N} | \Psi(\beta) \rangle &= |x|^2 v^2(\beta) + |y|^2 [u^2(\beta) + v^2(\beta)] \\
 &\quad + |z|^2 [2u^2(\beta) + v^2(\beta)] + |w|^2 [4u^2(\beta) + v^2(\beta)],
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi(\beta) | \hat{N}^2 | \Psi(\beta) \rangle &= (|x|^2 + |y|^2 + 4|y|^2 + 7|z|^2 + 8|w|^2)u^2(\beta)v^2(\beta) \\
 &\quad + (|x|^2 + |w|^2 + |y|^2 + |z|^2)v^4(\beta) + (|y|^2 + 4|z|^2 + 16|w|^2)u^4(\beta).
 \end{aligned}$$

Então, o fator de Mandel é dado por

$$Q = [(c_6 - c_4)u^2(\beta)v^2(\beta) + (c_7 - c_3)v^4(\beta) + (c_8 - c_5)u^4(\beta) - c_1v^2(\beta) - c_2u^2(\beta)] / (c_1v^2(\beta) + c_2u^2(\beta)), \quad (9.10)$$

com os coeficientes  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$  dados por

$$\begin{aligned} c_1 &= |x|^2 + y^*z + |z|^2 + |w|^2, \\ c_2 &= |y|^2 + 2|z|^2 + 4|w|^2, \\ c_3 &= |x|^4 + 2|x|^2|y|^2 + 2|x|^2|z|^2 + 2|x|^2|w|^2 + |y|^4 + 2|y|^2|z|^2 \\ &\quad + 2|y|^2|w|^2 + |z|^4 + 2|z|^2|w|^2 + |w|^4, \\ c_4 &= |x|^2|y|^2 + |y|^4 + 3|y|^2|z|^2 + 5|y|^2|w|^2 + 2|x|^2|z|^2 + 2|z|^4 \\ &\quad + 6|z|^2|w|^2 + 4|x|^2|w|^2 + 4|w|^4, \\ c_5 &= |y|^4 + 4|y|^2|z|^2 + 8|y|^2|w|^2 + 4|z|^4 + 16|z|^2|w|^2 + 16|w|^4, \\ c_6 &= |x|^2 + |y|^2 + 4|y|^2 + 7|z|^2 + 8|w|^2, \\ c_7 &= |x|^2 + |y|^2 + |w|^2 + |z|^2, \\ c_8 &= |y|^2 + 4|z|^2 + 16|w|^2. \end{aligned}$$

O gráfico do fator de Mandel pode ser observado na figura (9.2). Note que para  $0 < \bar{n} < 0.27$ ,  $\bar{n} = 0.27$ ,  $\bar{n} > 0.27$ , temos estatísticas subpoissoniana, poissoniana e superpoissoniana, respectivamente.

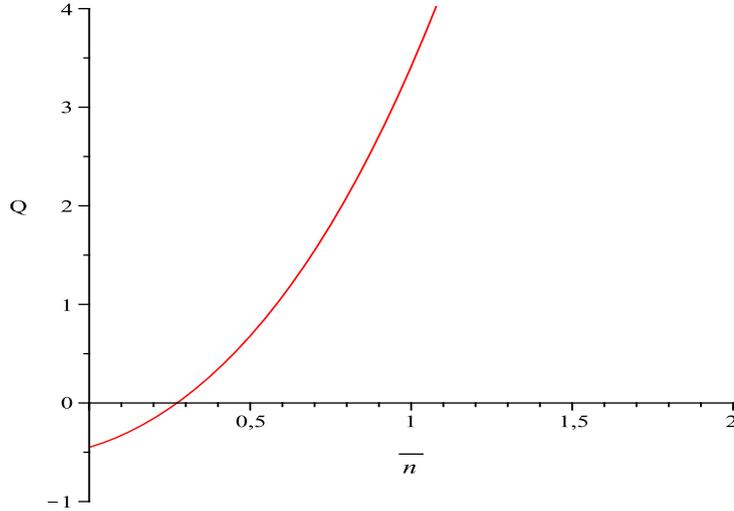
Calculamos também para este estado  $|\Psi(\beta)\rangle$ , a função de Wigner definida por

$$W_n(p, q; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle q - \frac{v}{2} \left| \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} \right| q + \frac{v}{2} \right\rangle. \quad (9.11)$$

Considerando a expressão (9.6) haverá vários tipos de termos. Inicialmente, iremos calcular termos do tipo

$$\sum_i \sum_{n=0}^{\infty} T_i(n) |n + Y_i\rangle \langle n + Y_i|. \quad (9.12)$$

Figura 9.2: Fator de Mandel no oscilador harmônico termalizado



Para cada um destes termos a função de Wigner é dada por

$$W'_1(p, q; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle q - \frac{v}{2} \middle| n + Y \right\rangle \left\langle n + Y \middle| q + \frac{v}{2} \right\rangle,$$

onde

$$\begin{aligned} \left\langle q - \frac{v}{2} \middle| n + Y \right\rangle &= \Psi_{n+Y}\left(q - \frac{v}{2}\right) \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{(q - \frac{v}{2})^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}(n+Y)!}b} H_{(n+Y)}\left[\left(q - \frac{v}{2}\right)/b\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}(n+Y)!}b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} + \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right), \end{aligned}$$

em que  $H_{(n+Y)}(x)$  são os polinômios de Hermite e  $b^2 = \hbar/m\omega$ . Temos também

$$\begin{aligned} \left\langle n + Y \middle| q + \frac{v}{2} \right\rangle &= \Psi_{n+Y}\left(q + \frac{v}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}(n+Y)!}b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} - \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right). \end{aligned}$$

Então, a função de Wigner para os termos do tipo (9.12) será dada por

$$\begin{aligned} W_1(p, q; \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_i(n) \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}2^{(n+Y)}((n+Y)!)^2 b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{4b^2} + \frac{ipv}{\hbar}\right) \\ &\times H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right). \end{aligned}$$

Escrevendo o expoente da exponencial como

$$-\left(\frac{q^2}{2b^2} + \frac{v^2}{4b^2} - \frac{ipv}{\hbar}\right) = -\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right) - \left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2$$

a função de Wigner torna-se

$$W_1(p, q; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_i(n) \frac{\exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right]}{b2^{(n+Y)}(n+Y)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left[-\left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2\right] \\ \times H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right).$$

Fazendo

$$x = \frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar},$$

temos que

$$dx = \frac{1}{2b} dv \quad e \quad \frac{v}{2b} = x + \frac{ipb}{\hbar}.$$

Então

$$W_1(p, q; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_i(n) \frac{2 \exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right]}{b2^{(n+Y)}(n+Y)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \\ \times H_{(n+Y)}\left(x - \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) H_{(n+Y)}\left(x + \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right).$$

Considerando a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) = \sqrt{\pi} 2^n m! z^{(n-m)} L_m^{(n-m)}(-2yz),$$

para  $n \geq m$ , onde  $L_m^{(n-m)}$  são as funções associadas de Laguerre, temos

$$W_1(p, q; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_i(n) 2(-1)^{(n+Y)} \exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] L_{(n+Y)}\left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right].$$

Neste caso, existem quatro termos

$$W_1(p, q; \beta) = \exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ T_1(n) 2(-1)^n L_n\left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \right. \\ + T_6(n) 2(-1)^{n+1} L_{n+1}\left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\ + T_{11}(n) 2(-1)^{n+2} L_{n+2}\left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\ \left. + T_{16}(n) 2(-1)^{n+4} L_{n+4}\left[2\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \right\},$$

onde o índice em  $T$  refere-se à posição do termo na expansão (9.6). Voltando à equação (9.6) considere agora os termos do tipo  $|n\rangle \langle n+Y|$  e  $|n+Y\rangle \langle n|$  denotando as correspondentes contribuições para a função de Wigner por  $W'_{21}$  e  $W_{21}$ , respectivamente. Então

Caso 1:  $\sum_n c_1^n |n\rangle \langle n+Y|$

$$W'_{21}(p, q; \beta) = \sum_n c^n \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle q - \frac{v}{2} \left| n \right\rangle \langle n+Y \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle\right.$$

$$\begin{aligned} \Psi_n\left(q - \frac{v}{2}\right) &= \left\langle q - \frac{v}{2} \left| n \right\rangle \right. \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{\left(q - \frac{v}{2}\right)^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}b} H_{(n)}\left[\left(q - \frac{v}{2}\right)/b\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n+Y}\left(q + \frac{v}{2}\right) &= \left\langle n+Y \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle \right. \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{\left(q + \frac{v}{2}\right)^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}(n+Y)!}b} H_{(n+Y)}\left[\left(q + \frac{v}{2}\right)/b\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{21}(p, q; \beta) &= \sum_n c^n \frac{1}{\sqrt{\pi}2^n 2^{(n+Y)} n! (n+Y)! b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{4b^2} + \frac{ipv}{\hbar}\right) \\ &\quad \times H_n\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right). \end{aligned}$$

Caso 2:  $\sum_n c_2^n |n+Y\rangle \langle n|$

$$\begin{aligned} W'_{22}(p, q; \beta) &= \sum_n c^n \frac{1}{\sqrt{\pi}2^n 2^{(n+Y)} n! (n+Y)! b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{4b^2} + \frac{ipv}{\hbar}\right) \\ &\quad \times H_{n+Y}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_n\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right). \end{aligned}$$

Podemos reescrever no caso 1:

$$\begin{aligned} W'_{21}(p, q; \beta) &= \sum_n c_1^n \frac{\exp\left\{-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right\} 2(-1)^n}{\sqrt{\pi}2^n 2^{(n+Y)} n! (n+Y)!} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-x^2} H_n\left(x - \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) H_{(n+Y)}\left(x + \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

A integral acima é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dve^{-x^2} H_n\left(x - \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) H_{(n+Y)}\left(x + \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) = \sqrt{\pi} 2^{(n+Y)} n! \left(\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^Y \times L_n^Y \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right].$$

No caso 2, a correspondente integral será dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dve^{-x^2} H_{n+Y}\left(x - \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) H_n\left(x + \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) = \sqrt{\pi} 2^{(n+Y)} n! \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^Y L_n^Y \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right]. \quad (9.13)$$

A função de Wigner para os dois casos, separadamente, é dada por

$$W'_{21}(p, q; \beta) = \sum_n c_1^n \frac{\exp\left\{-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right\} 2(-1)^n}{\sqrt{2^n 2^{(n+Y)} n! (n+Y)!}} 2^{(n+Y)} n! \times \left(\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^Y L_n^Y \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right], \quad (9.14)$$

$$W'_{22}(p, q; \beta) = \sum_n c_2^n \frac{\exp\left\{-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right\} 2(-1)^{n+Y}}{\sqrt{2^n 2^{(n+Y)} n! (n+Y)!}} 2^{(n+Y)} n! \times \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^Y L_n^Y \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right]. \quad (9.15)$$

A expressão completa é

$$\begin{aligned}
W_2(p, q; \beta) &= \exp \left\{ - \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_2(n) 2(-1)^{n+1} n! 2^{n+1}}{\sqrt{2^n 2^{(n+1)} n! (n+1)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) \\
&\quad \times L_n^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{T_3(n) 2(-1)^{n+2} n! 2^{n+2}}{\sqrt{2^n 2^{(n+2)} n! (n+2)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^2 \\
&\quad \times L_n^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{T_4(n) 2(-1)^{n+4} n! 2^{n+4}}{\sqrt{2^n 2^{(n+4)} n! (n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^4 \\
&\quad \times L_n^4 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{F_5(n) 2(-1)^{n+1} n! 2^{n+1}}{\sqrt{2^n 2^{(n+1)} n! (n+1)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) \\
&\quad \times L_n^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{T_9(n) 2(-1)^{n+2} n! 2^{n+2}}{\sqrt{2^n 2^{(n+2)} n! (n+2)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^2 \\
&\quad \times L_n^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{T_{13}(n) 2(-1)^{n+4} n! 2^{n+4}}{\sqrt{2^n 2^{(n+4)} n! (n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^4 \\
&\quad \times L_n^4 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&= \exp \left\{ - \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right\} \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} [F_1(n) + F_2(n) + F_3(n) + F_4(n) + F_5(n) + F_6(n)],
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1(n) &= \frac{T_2(n)2(-1)^{n+1}n!2^{n+1}}{\sqrt{2^n 2^{(n+1)}n!(n+1)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) \\
&\quad \times L_n^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&= 2\sqrt{2}(-1)^{n+1}, \\
F_2(n) &= \frac{T_3(n)2(-1)^{n+2}n!2^{n+2}}{\sqrt{2^n 2^{(n+2)}n!(n+2)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^2 \\
&\quad \times L_n^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&= 2\sqrt{2}(-1)^{n+2}, \\
F_3(n) &= \frac{T_4(n)2(-1)^{n+4}n!2^{n+4}}{\sqrt{2^n 2^{(n+4)}n!(n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^4 \\
&\quad \times L_n^4 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{6}}{3}(-1)^{n+4}, \\
F_4(n) &= \frac{T_5(n)2(-1)^{n+1}n!2^{n+1}}{\sqrt{2^n 2^{(n+1)}n!(n+1)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) \\
&\quad \times L_n^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&= 2\sqrt{2}(-1)^n, \\
F_5(n) &= \frac{T_9(n)2(-1)^{n+2}n!2^{n+2}}{\sqrt{2^n 2^{(n+2)}n!(n+2)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^2 \\
&\quad \times L_n^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&= 2\sqrt{2}(-1)^n, \\
F_6(n) &= \frac{T_{13}(n)2(-1)^{n+4}n!2^{n+4}}{\sqrt{2^n 2^{(n+4)}n!(n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^4 \\
&\quad \times L_n^4 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3!}(-1)^n}{3}.
\end{aligned}$$

Consideremos agora o cálculo da contribuição para os termos do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_i(n) |n+Y\rangle \langle n+Z|.$$

Seja

$$W'_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle q - \frac{v}{2} \mid n+Y \right\rangle \left\langle n+Z \mid q + \frac{v}{2} \right\rangle$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_{n+Y}\left(q - \frac{v}{2}\right) &= \frac{\exp\left[-\frac{\left(q - \frac{v}{2}\right)^2}{2b^2}\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}(n+Y)!}b} H_{(n+Y)}\left[\left(q - \frac{v}{2}\right)/b\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}(n+Y)!}b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} + \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right), \\ \Psi_{n+Z}\left(q + \frac{v}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Z)}(n+Z)!}b} \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{8b^2} - \frac{qv}{2b^2}\right) H_{(n+Z)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} W'_3 &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}2^{(n+Z)}(n+Y)!(n+Z)!}b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(-\frac{q^2}{2b^2} - \frac{v^2}{4b^2} + \frac{ipv}{\hbar}\right) \\ &\quad \times H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n+Z)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right). \end{aligned}$$

Utilizando a identidade

$$-\left(\frac{q^2}{2b^2} + \frac{v^2}{4b^2} - \frac{ipv}{\hbar}\right) = -\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right) - \left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2.$$

temos

$$\begin{aligned} W'_3 &= \frac{\exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right]}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{(n+Y)}2^{(n+Z)}(n+Y)!(n+Z)!}b} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left[\left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2\right] \\ &\quad \times H_{(n+Y)}\left(\frac{q}{b} - \frac{v}{2b}\right) H_{(n+Z)}\left(\frac{q}{b} + \frac{v}{2b}\right). \end{aligned}$$

Fazendo

$$x = \frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar} \rightarrow dx = \frac{1}{2b}dv,$$

a expressão anterior torna-se

$$W_3' = \frac{\exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] 2}{\sqrt{\pi} 2^{(n+Y)} 2^{(n+Z)} (n+Y)! (n+Z)! b} \int_{-\infty}^{\infty} dve^{-x^2} \\ \times H_{(n+Y)}\left(x - \frac{q}{b} - \frac{ipb}{\hbar}\right) H_{(n+Z)}\left(x + \frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right).$$

Da relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dve^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) = \sqrt{\pi} 2^n m! z^{(n-m)} L_m^{n-m}(-2yz), \quad \text{para } n > m$$

Para  $Z > Y$ ,

$$I_{Z>Y} = \sqrt{\pi} 2^{n+Z} (n+Y)! \left(\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^{Z-Y} L_{n+Y}^{Z-Y} \left[-2 \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) \left(\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)\right].$$

Para  $Z < Y$ ,

$$I_{Z<Y} = \sqrt{\pi} 2^{n+Y} (n+Z)! \left(\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^{Y-Z} L_{n+Z}^{Y-Z} \left[-2 \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) \left(\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)\right].$$

Consequentemente os últimos seis termos da função de Wigner são

$$W_3(p, q; \beta) = \exp\left\{-\left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_7(n) 2(-1)^{n+2} (n+1)! 2^{n+2}}{\sqrt{2^{(n+1)} 2^{(n+2)} (n+1)! (n+2)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) \\ \times L_{n+1}^1 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\ + \frac{T_8(n) 2(-1)^{n+4} (n+1)! 2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+1)} 2^{(n+4)} (n+1)! (n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^3 L_{n+1}^3 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\ + \frac{T_{12}(n) 2(-1)^{n+4} (n+2)! 2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+2)} 2^{(n+4)} (n+2)! (n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 L_{n+1}^2 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\ + \frac{T_{10}(n) 2(-1)^{n+1} (n+1)! 2^{n+2}}{\sqrt{2^{(n+1)} 2^{(n+2)} (n+1)! (n+2)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) L_{n+1}^1 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\ + \frac{T_{14}(n) 2(-1)^{n+1} (n+1)! 2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+1)} 2^{(n+4)} (n+1)! (n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^3 L_{n+1}^3 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\ + \frac{T_{15}(n) 2(-1)^{n+2} (n+2)! 2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+2)} 2^{(n+4)} (n+2)! (n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 L_{n+1}^2 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2}\right)\right].$$

Então

$$W_3(p, q; \beta) = \exp \left\{ - \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right\} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} [G_1(n) + G_2(n) + G_3(n) + G_4(n) + G_5(n) + G_6(n)],$$

onde

$$G_1(n) = \frac{T_7(n)2(-1)^{n+2}(n+1)!2^{n+2}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+2)}(n+1)!(n+2)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) L_{n+1}^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\ = 2(n+1)(-1)^{n+2},$$

$$G_2(n) = \frac{T_8(n)2(-1)^{n+4}(n+1)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+4)}(n+1)!(n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^3 L_{n+1}^3 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\ = \frac{2\sqrt{3}(n+1)(-1)^{n+4}}{3},$$

$$G_3(n) = \frac{T_{12}(n)2(-1)^{n+4}(n+2)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+2)}2^{(n+4)}(n+2)!(n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^2 L_{n+1}^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\ = \frac{(n+1)(n+2)(-1)^{n+4}}{\sqrt{3}},$$

$$G_4(n) = \frac{T_{10}(n)2(-1)^{n+1}(n+1)!2^{n+2}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+2)}(n+1)!(n+2)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right) L_{n+1}^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\ = 2(n+1)(-1)^{n+1},$$

$$G_5(n) = \frac{T_{14}(n)2(-1)^{n+1}(n+1)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+4)}(n+1)!(n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^3 L_{n+1}^3 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\ = \frac{2(n+1)(-1)^{n+1}}{\sqrt{3}},$$

$$G_6(n) = \frac{T_{15}(n)2(-1)^{n+2}(n+2)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+2)}2^{(n+4)}(n+2)!(n+4)!}} \left( -\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar} \right)^2 L_{n+1}^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\ = \frac{(n+1)(n+2)(-1)^{n+2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
G_1(n) &= \frac{T_7(n)2(-1)^{n+2}(n+1)!2^{n+2}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+2)}(n+1)!(n+2)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) L_{n+1}^1 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\
&= 2(n+1)(-1)^{n+2} \\
G_2(n) &= \frac{T_8(n)2(-1)^{n+4}(n+1)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+4)}(n+1)!(n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^3 L_{n+1}^3 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}(n+1)(-1)^{n+4}}{3} \\
G_3(n) &= \frac{T_{12}(n)2(-1)^{n+4}(n+2)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+2)}2^{(n+4)}(n+2)!(n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 L_{n+1}^2 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(-1)^{n+4}}{\sqrt{3}} \\
G_4(n) &= \frac{T_{10}(n)2(-1)^{n+1}(n+1)!2^{n+2}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+2)}(n+1)!(n+2)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) L_{n+1}^1 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\
&= 2(n+1)(-1)^{n+1} \\
G_5(n) &= \frac{T_{14}(n)2(-1)^{n+1}(n+1)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+1)}2^{(n+4)}(n+1)!(n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^3 L_{n+1}^3 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\
&= \frac{2(n+1)(-1)^{n+1}}{\sqrt{3}} \\
G_6(n) &= \frac{T_{15}(n)2(-1)^{n+2}(n+2)!2^{n+4}}{\sqrt{2^{(n+2)}2^{(n+4)}(n+2)!(n+4)!}} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 L_{n+1}^2 \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2p^2}{\hbar^2}\right)\right] \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(-1)^{n+2}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que a função de Wigner completa é dada por

$$\begin{aligned}
W(p, q; \beta) = & k \exp \left[ - \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} K_1^n (-1)^n \{ 2x^2 L_n \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \right. \\
& - \frac{2y^2}{u(\beta)} (n+1) L_{n+1} \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& + \frac{z^2 (n+1)(n+2)}{u^4(\beta)} L_{n+2} \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& + \frac{2w^2 (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(\sqrt{4!})^2 u^8(\beta)} L_{n+4} \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& + \frac{4\sqrt{2}xyq}{u(\beta)b} L_n^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& + \frac{4\sqrt{2}xz}{u^2(\beta)} \left( \frac{q^2}{b^2} - \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) L_n^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& + \frac{4\sqrt{6}xw}{3u^4(\beta)} \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} - \frac{6q^2 p^2}{\hbar^2} \right) L_n^4 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& - \frac{4(n+1)yzq}{u^3(\beta)b} L_{n+1}^1 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& + \frac{4\sqrt{3}(n+1)yw}{3u^5(\beta)} \left( \frac{q^3}{b^3} - \frac{3qp^2b}{\hbar^2} \right) L_{n+1}^3 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \\
& + \frac{2\sqrt{3}(n+1)(n+2)wz}{3u^6(\beta)} \left( \frac{q^2}{b^2} - \frac{p^2 b^2}{\hbar^2} \right) \\
& \left. \times L_{n+2}^2 \left[ 2 \left( \frac{q^2}{b^2} + \frac{b^2 p^2}{\hbar^2} \right) \right] \right\}. \tag{9.16}
\end{aligned}$$

A função de Wigner (9.16) com  $x = 0.2$ ,  $y = 0.3$ ,  $z = 0.6$  e  $w = \sqrt{0.51}$ , para  $\bar{n} = 0.1$  e  $\bar{n} = 10$  está ilustrada nas figuras (9.3) e (9.4), respectivamente. Suas formas variam com relação àquelas obtidas na referência [58] para o estado número, visto que aqui temos uma superposição de estados número, mas apesar disto, uma relativa simetria com relação à origem é mantida. À medida que a temperatura aumenta, valores negativos para a função de Wigner tornam-se raros, sendo isto um indicativo de perda da não classicalidade do sistema.

Figura 9.3: Função de Wigner para o oscilador harmônico termalizado com  $\bar{n} = 0.1$

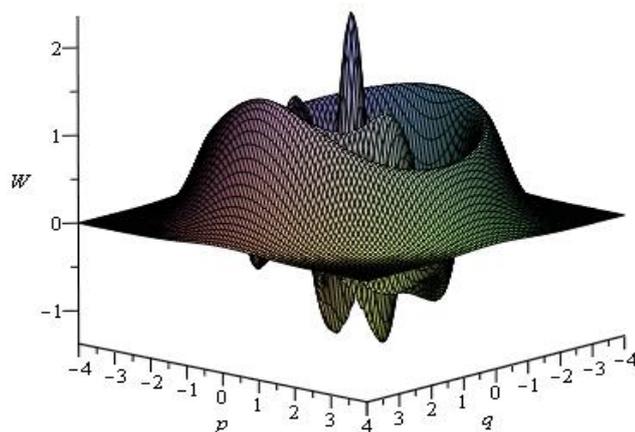
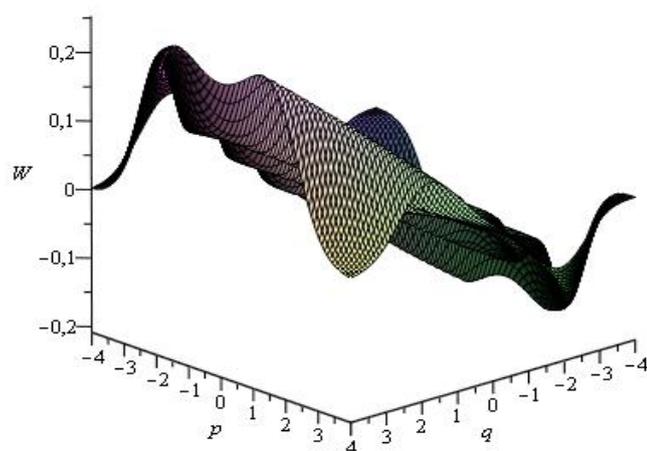


Figura 9.4: Função de Wigner para o oscilador harmônico termalizado com  $\bar{n} = 10$



## 9.2 Teletransporte Quântico

O teletransporte quântico é um fenômeno onde ocorre uma transferência de informação quântica que possibilita a reconstrução do estado de um sistema quântico acompanhada da aniquilação do estado original. O primeiro protocolo de teletransporte quântico foi proposto em 1993 por Bennet [7], e realizado experimentalmente pela primeira vez em 1998 [13]. Nosso objetivo aqui é investigar o efeito que a temperatura pode causar neste, utilizando o formalismo da dinâmica de campos térmicos. Uma investigação nesse sentido já foi realizada na referência [147]; entretanto nossa proposta é a de utilização de estados quânticos mais realísticos, envolvendo a chamada representação duplo-trilho [1]. Para tal intento, necessitamos generalizar expressões conhecidas da dinâmica de campos térmicos, em que apenas um modo de vibração é tratado.

Um resultado de grande relevância para o teletransporte quântico é o teorema da não-clonagem, proposto em 1982 [148, 149], e que já possui uma série de desdobramentos [150, 151, 152, 153]. A informação clássica pode ser copiada de forma exata ou aproximada, entretanto a mecânica quântica proíbe a cópia de estados quânticos desconhecidos. Suponha então que tenhamos uma máquina quântica munida de dois compartimentos: o compartimento A, denominado compartimento de dados; e o compartimento B ou compartimento-alvo. Suponha que o compartimento A esteja inicialmente em um estado desconhecido  $|\Psi(\beta)\rangle$  e o compartimento B em um estado  $|s(\beta)\rangle$ . Dessa forma, o estado inicial da máquina de clonagem é dado por

$$|\Psi s(\beta)\rangle = |\Psi(\beta)\rangle \otimes |s(\beta)\rangle. \quad (9.17)$$

O procedimento de cópia será implementado via uma operação unitária

$$|\Psi(\beta)\rangle \otimes |s(\beta)\rangle \rightarrow U(|\Psi(\beta)\rangle \otimes |s(\beta)\rangle) = |\Psi(\beta)\rangle \otimes |\Psi(\beta)\rangle.$$

Suponha agora, que sejam realizadas cópias de dois estados,  $|\Psi(\beta)\rangle$  e  $|\Phi(\beta)\rangle$ :

$$\begin{aligned} U(|\Psi(\beta)\rangle \otimes |s(\beta)\rangle) &= |\Psi(\beta)\rangle \otimes |\Psi(\beta)\rangle, \\ U(|\Phi(\beta)\rangle \otimes |s(\beta)\rangle) &= |\Phi(\beta)\rangle \otimes |\Phi(\beta)\rangle. \end{aligned}$$

Calculando o produto interno das duas equações, temos

$$\begin{aligned} (\langle s(\beta)| \otimes \langle \Psi(\beta)|)U^\dagger U(|\Phi(\beta)\rangle \otimes |s(\beta)\rangle) &= (|\Psi(\beta)\rangle \otimes \langle \Psi(\beta)|)(|\Phi(\beta)\rangle \otimes |\Phi(\beta)\rangle) \\ \langle s(\beta)|s(\beta)\rangle \langle \Psi(\beta)|\Phi(\beta)\rangle &= (\langle \Psi(\beta)|\Phi(\beta)\rangle)^2 \\ \langle \Psi(\beta)|\Phi(\beta)\rangle &= (\langle \Psi(\beta)|\Phi(\beta)\rangle)^2. \end{aligned}$$

Esta equação possui apenas duas soluções:  $|\Psi(\beta)\rangle = |\Phi(\beta)\rangle$  ou  $|\Psi(\beta)\rangle$  e  $|\Phi(\beta)\rangle$  são ortogonais. Por conseguinte, a máquina de clonagem pode copiar apenas estados ortogonais entre si. O procedimento descrito acima é idêntico ao procedimento encontrado na literatura para estados puros. O que propomos é portanto considerar a possibilidade de clonagem de estados mistos e tratá-los como estados puros via o formalismo da dinâmica de campos térmicos. Apesar da simplicidade originada pela formulação DCT, os resultados coincidem com uma abordagem convencional [150].

Considere agora, um protocolo de teletransporte quântico térmico em que o estado a ser teletransportado está a uma temperatura nula e o canal quântico compartilhado entre o emissor, João, e o receptor, Maria, está à temperatura finita. O estado a ser teletransportado é

$$|\Psi\rangle_L = x|0\rangle_L + y|1\rangle_L.$$

Suponha que João e Maria compartilhem um estado térmico emaranhado do tipo Bell, dado por

$$|F^+(\beta)\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0(\beta)0(\beta)\rangle_L + |1(\beta)1(\beta)\rangle_L).$$

Então o estado do sistema corresponde ao produto tensorial

$$|\Psi_s\rangle_L = |\Psi\rangle_L \otimes |F^+(\beta)\rangle_L = x|0\rangle_L + y|1\rangle_L \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0(\beta)0(\beta)\rangle_L + |1(\beta)1(\beta)\rangle_L).$$

Desenvolvendo esta expressão, temos

$$\begin{aligned}
|\Psi_s\rangle_L &= \frac{1}{2}(x|0\rangle_L|0(\beta)0(\beta)\rangle_L + x|0\rangle_L|1(\beta)1(\beta)\rangle_L + y|1\rangle_L|0(\beta)0(\beta)\rangle_L \\
&\quad + y|1\rangle_L|1(\beta)1(\beta)\rangle_L) \\
&= \frac{1}{2}[x|\Phi^+(\beta)\rangle_L + |\Phi^-(\beta)\rangle_L|0(\beta)\rangle_L + x|\Psi^+(\beta)\rangle_L + |\Psi^-(\beta)\rangle_L|1(\beta)\rangle_L \\
&\quad + y|\Psi^+(\beta)\rangle_L + |\Psi^-(\beta)\rangle_L|0(\beta)\rangle_L + y|\Phi^+(\beta)\rangle_L + |\Phi^-(\beta)\rangle_L|1(\beta)\rangle_L] \\
&= \frac{1}{2}[|\Phi^+(\beta)\rangle_L(x|0(\beta)\rangle_L + y|1(\beta)\rangle_L) + |\Phi^-(\beta)\rangle_L(x|0(\beta)\rangle_L - y|1(\beta)\rangle_L) \\
&\quad + |\Psi^+(\beta)\rangle_L(y|0(\beta)\rangle_L + x|1(\beta)\rangle_L) + |\Psi^-(\beta)\rangle_L(-y|0(\beta)\rangle_L + x|1(\beta)\rangle_L),
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
|\Phi^+(\beta)\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00(\beta)\rangle_L + |11(\beta)\rangle_L), \\
|\Phi^-(\beta)\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00(\beta)\rangle_L - |11(\beta)\rangle_L), \\
|\Psi^+(\beta)\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01(\beta)\rangle_L + |10(\beta)\rangle_L), \\
|\Psi^-(\beta)\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|10(\beta)\rangle_L + |01(\beta)\rangle_L),
\end{aligned} \tag{9.18}$$

são estados térmicos do tipo Bell, em que quando o segundo sistema está à temperatura nula, o estado coincide com o estado de Bell não termalizado. Existem quatro possibilidades de resultados para o q-bit de João, condicionados ao resultados das medidas de Maria

$$\begin{aligned}
|\Phi^+(\beta)\rangle_L &\rightarrow (x|0(\beta)\rangle_L + y|1(\beta)\rangle_L), \\
|\Phi^-(\beta)\rangle_L &\rightarrow (x|0(\beta)\rangle_L - y|1(\beta)\rangle_L), \\
|\Psi^+(\beta)\rangle_L &\rightarrow (y|0(\beta)\rangle_L + x|1(\beta)\rangle_L), \\
|\Psi^-(\beta)\rangle_L &\rightarrow (-y|0(\beta)\rangle_L + x|1(\beta)\rangle_L).
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Maria ao realizar sua medida, deve comunicar o seu resultado a João, que tomando conhecimento do resultado, deve aplicar uma operação unitária, de modo a retificar seu estado, "recuperando" o estado original. Neste caso, o estado "recuperado" não

corresponde exatamente ao estado original, devido ao efeito da temperatura. É salutar então investigar o quão distante do estado original, o estado final se encontra. Vale ressaltar que o subíndice  $L$ , denota que tais estados são q-bits abstratos, sem realidade física. Uma possível codificação para os q-bits em termos de estados de Fock, é a representação duplo-trilho, dada por

$$\begin{aligned} |0\rangle_L &\rightarrow |01\rangle, \\ |1\rangle_L &\rightarrow |10\rangle. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Mediante tal associação, podemos escrever o estado que se deseja teletransportar e o estado teletransportado, respectivamente por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= x |01\rangle + y |10\rangle, \\ |\Psi(\beta)\rangle &= x |0(\beta)1(\beta)\rangle + y |1(\beta)0(\beta)\rangle \\ &\equiv x |\beta, 01\tilde{0}\tilde{0}\rangle + y |\beta, 10\tilde{0}\tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Temos que

$$\begin{aligned} |0(\beta)1(\beta)\rangle &= |\beta, 01\tilde{0}\tilde{0}\rangle = a_2^\dagger(\beta) |\beta, 00\tilde{0}\tilde{0}\rangle = a_2^\dagger(\beta) |0(\beta)0(\beta)\rangle, \\ |1(\beta)0(\beta)\rangle &= |\beta, 10\tilde{0}\tilde{0}\rangle = a_1^\dagger(\beta) |\beta, 00\tilde{0}\tilde{0}\rangle = a_1^\dagger(\beta) |0(\beta)0(\beta)\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando a relação (7.51), podemos reescrever o estado  $|\Psi(\beta)\rangle$ , como

$$|\Psi(\beta)\rangle = \frac{x}{u_2(\beta)} a_2^\dagger |0(\beta)0(\beta)\rangle + \frac{y}{u_1(\beta)} a_1^\dagger |0(\beta)0(\beta)\rangle. \quad (9.22)$$

O respectivo bra é dado por

$$\langle\Psi(\beta)| = \langle 0(\beta)0(\beta)| a_2 \frac{x^*}{u_2(\beta)} + \langle 0(\beta)0(\beta)| a_1 \frac{y^*}{u_1(\beta)}. \quad (9.23)$$

A fim de calcular o estado misto associado a este estado termalizado, devemos deter-

minar  $\rho_{|\Psi(\beta)\rangle}$ . Temos que

$$\begin{aligned}
& \exp(-\beta\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \beta\omega_2 a_2^\dagger a_2) \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \exp(-\beta\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \beta\omega_2 a_2^\dagger a_2) |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} [1 + (-\beta\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \beta\omega_2 a_2^\dagger a_2) + (-\beta\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \beta\omega_2 a_2^\dagger a_2)^2 + \dots] |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} 1 |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| + (-\beta\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \beta\omega_2 a_2^\dagger a_2) |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \\
& + (-\beta\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \beta\omega_2 a_2^\dagger a_2)^2 |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| + \dots \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} [1 |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| + (-\beta\omega_1 n_1 - \beta\omega_2 n_2) |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \\
& + (-\beta\omega_1 a_1^\dagger a_1 - \beta\omega_2 a_2^\dagger a_2)(-\beta\omega_1 n_1 - \beta\omega_2 n_2) |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| + \dots] \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} [1 + (-\beta\omega_1 n_1 - \beta\omega_2 n_2) + (-\beta\omega_1 n_1 - \beta\omega_2 n_2)^2 + \dots] |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} [\exp(-\beta\omega_1 n_1 - \beta\omega_2 n_2)] |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \exp(-\beta\omega_1 n_1) \exp(-\beta\omega_2 n_2) |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \\
= & \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right)^{n_1} \left( \frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right)^{n_2} |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2|,
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\bar{n}_1(\beta) &= \frac{1}{e^{\beta\omega_1} - 1} \\
\bar{n}_2(\beta) &= \frac{1}{e^{\beta\omega_2} - 1}
\end{aligned} \tag{9.24}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
& Tr \left[ \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \exp(-\beta\omega_1 n_1) \exp(-\beta\omega_2 n_2) |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2| \right] \\
&= \sum_{n_1 n_2, n'_1 n'_2}^{\infty} \langle n'_1 n'_2 | \exp(-\beta\omega_1 n_1) \exp(-\beta\omega_2 n_2) |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2 | n'_1 n'_2 \rangle \\
&= \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \exp(-\beta\omega_1 n_1) \exp(-\beta\omega_2 n_2) \\
&= \frac{1}{e^{\beta\omega_1} - 1} \frac{1}{e^{\beta\omega_2} - 1} \\
&= \left[ \frac{1}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right]^{-1} \left[ \frac{1}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} = \frac{1}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \frac{1}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \sum_{n_1 n_2=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right)^{n_1} \left( \frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right)^{n_2} |n_1 n_2\rangle \langle n_1 n_2|. \quad (9.25)$$

Então o operador densidade é dado por

$$\begin{aligned}
\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} &= \frac{|x|^2}{u_2^2(\beta)} a_2^\dagger \rho_{|0(\beta)0(\beta)\rangle} a_2 + \frac{x^* y}{u_1(\beta) u_2(\beta)} a_1^\dagger \rho_{|0(\beta)0(\beta)\rangle} a_2 \\
&\quad + \frac{y^* x}{u_1(\beta) u_2(\beta)} a_2^\dagger \rho_{|0(\beta)0(\beta)\rangle} a_1 + \frac{|y|^2}{u_1^2(\beta)} a_1^\dagger \rho_{|0(\beta)0(\beta)\rangle} a_1.
\end{aligned}$$

Aplicando os operadores de criação e aniquilação, temos

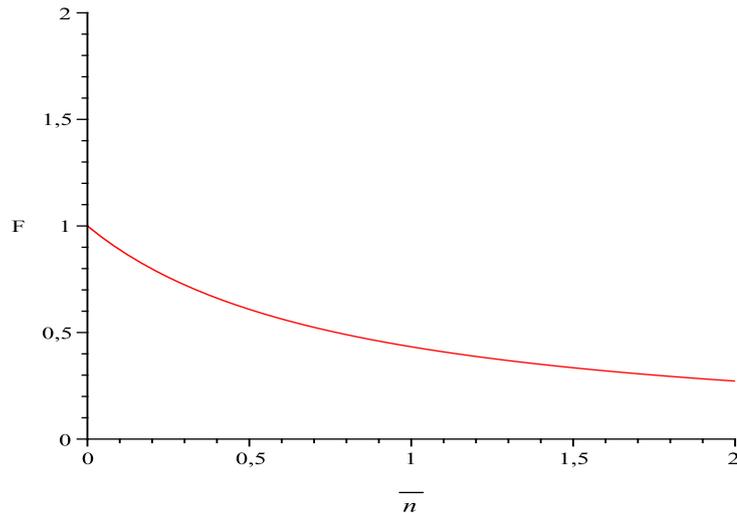
$$\begin{aligned}
\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} &= \frac{|x|^2}{u_2^2(\beta)} k \sum k_1^{n_1} k_2^{n_2} (n_2 + 1) |n_1 n_2 + 1\rangle \langle n_1 n_2 + 1| \\
&\quad + \frac{x^* y}{u_1(\beta) u_2(\beta)} k \sum k_1^{n_1} k_2^{n_2} (n_1 + 1) \sqrt{n_2(n_2 + 1)} |n_1 + 1 n_2\rangle \langle n_1 + 1 n_2| \\
&\quad + \frac{y^* x}{u_1(\beta) u_2(\beta)} k \sum k_1^{n_1} k_2^{n_2} (n_2 + 1) \sqrt{n_1(n_1 + 1)} |n_1 n_2 + 1\rangle \langle n_1 n_2 + 1| \\
&\quad + \frac{|y|^2}{u_1^2(\beta)} k \sum k_1^{n_1} k_2^{n_2} (n_1 + 1) |n_1 + 1 n_2\rangle \langle n_1 + 1 n_2|.
\end{aligned}$$

A Fidelidade, por sua vez, é dada por

$$F = \sqrt{\frac{|x|^4}{u_2^2(\beta)} k + \frac{2|x|^2|y|^2}{u_1(\beta)u_2(\beta)} k + \frac{|y|^4}{u_1^2(\beta)} k}. \quad (9.26)$$

Observe que quando  $T \rightarrow 0$ , a fidelidade vale 1, significando, que à temperatura nula, o estado é teletransportado com fidelidade máxima. Esse comportamento também é evidenciado no gráfico (9.5)

Figura 9.5: Fidelidade do teletransporte



### 9.3 Purificação e Dinâmica de Campos Térmicos

A purificação corresponde a uma técnica matemática, intimamente ligada à decomposição de Schmidt, que permite, tal como na dinâmica de campos térmicos, associar estados puros com estados mistos. Mostraremos aqui uma certa “equivalência” entre estes dois procedimentos.

Considere inicialmente o processo de purificação tal como o descrito na referência [1]. Suponha então que um estado misto  $\rho^A$  possua a seguinte decomposição ortonormal

$$\rho^A = \sum_i p_i |i^A\rangle \langle i^A|.$$

Introduziremos um sistema fictício  $F$ , que possui o mesmo espaço de estados que  $A$ , com uma base ortonormal  $|i^F\rangle$ . Podemos definir um estado puro para o sistema  $AF$ ,

como

$$|AF\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i^A\rangle |i^F\rangle.$$

O respectivo bra é dado por

$$\langle AF| = \sum_j \sqrt{p_j} \langle j^F| \langle j^A|.$$

Calculando o operador densidade reduzido do sistema  $A$ , partindo de  $|AF\rangle$ , temos

$$\begin{aligned} Tr(|AF\rangle \langle AF|) &= Tr\left(\sum_{ij} \sqrt{p_i} \sqrt{p_j} |i^A\rangle |i^F\rangle \langle j^F| \langle j^A|\right) \\ &= \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |i^A\rangle \langle j^A| tr(|i^F\rangle \langle j^F|) \\ &= \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |i^A\rangle \langle j^A| \delta_{ij} \\ &= \sum_i p_i |i^A\rangle \langle i^A| \\ &= \rho^A, \end{aligned}$$

ou seja, o operador densidade reduzido do sistema  $A$ , partindo de  $|AF\rangle$ , é exatamente  $\rho^A$ . Observe que o estado puro é um estado cuja base de Schmidt corresponde à base formada a partir dos estados ortonormais do sistema  $A$ .

Por outro lado, na dinâmica de campos térmicos, um estado puro associado a uma mistura estatística é construído a partir da igualdade

$$\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle = Tr(\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} O).$$

Então, verificaremos se o estado purificado  $|AF\rangle$ , definido anteriormente também satisfaz esta igualdade, ou seja, demonstraremos a seguinte proposição

**Proposição 3**  $\langle AF | O | AF \rangle = Tr(\rho_{|AF\rangle} O)$ .

$$\begin{aligned}
\langle AF|O|AF\rangle &= \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} \langle j^F| \langle j^A| (O \otimes 1) |i^A\rangle |i^F\rangle \\
&= \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} \langle j^F| i^F\rangle \langle j^A| O |i^A\rangle \\
&= \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} \delta_{ij} \langle j^A| O |i^A\rangle \\
&= \sum_i p_i \langle i^A| O |i^A\rangle \\
&= \sum_i p_i \sum_n \langle n| O |i^A\rangle \langle i^A| n\rangle \\
&= \sum_i p_i \text{Tr}(O |i^A\rangle \langle i^A|) \\
&= \text{Tr}(O \sum_i p_i |i^A\rangle \langle i^A|) \\
&= \text{Tr}(\sum_i p_i |i^A\rangle \langle i^A| O) \\
&= \text{Tr}(\rho^A O).
\end{aligned}$$

Portanto, a “equivalência” está provada. Temos então uma proposta alternativa de construção de um estado puro correspondente a uma certa matriz densidade que reproduz os mesmos valores esperados para os observáveis quânticos. Considere, por exemplo, o estado misto dado por

$$\rho_{|n(\beta)\rangle} = k^{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} k_1^r \frac{(n+r)!}{n!r!} |n+r\rangle \langle n+r|.$$

com

$$k = \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)}$$

e

$$k_1 = \frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)}.$$

O estado térmico  $|n(\beta)\rangle$  relacionado a este estado misto corresponde a

$$|n(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger, \beta) |0(\beta)\rangle.$$

Podemos reescrever o estado  $\rho_{|n(\beta)\rangle}$  como

$$\rho_{|n(\beta)\rangle} = \frac{1}{n!} \frac{1}{[u(\beta)]^{2n}} (a^\dagger)^n k \sum_{r=0}^{\infty} k_1^r |r\rangle \langle r| a^n.$$

Logo,

$$f(a, a^\dagger, \beta) = \frac{1}{\sqrt{n!} [u(\beta)]^n} (a^\dagger)^n.$$

e o estado térmico associado a  $\rho_{|n(\beta)\rangle}$  é dado por

$$\begin{aligned} |n(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} [a^\dagger(\beta)]^n |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!} [u(\beta)]^n} (a^\dagger)^n |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!} [u(\beta)]^n} (a^\dagger)^n \left( \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\beta\omega r/2} |r, \tilde{r}\rangle \right). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Por outro lado, pela decomposição de Schmidt, podemos construir o estado

$$|n'(\beta)\rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \sqrt{k_1^{n+1} k_2 \frac{(n+r)!}{n! r!}} |n+r, n+r\rangle. \quad (9.28)$$

Claramente as expressões (9.27) e (9.28) são distintas; entretanto produzem os mesmos valores médios para os observáveis. É evidente que a dinâmica de campos térmicos é um formalismo geral de grande aplicabilidade enquanto que a purificação é apenas um procedimento matemático simples e de interesse para a computação quântica. Nosso propósito aqui foi apenas de investigar alguns aspectos similares entre tais construções, que de fato existem.

Os principais resultados obtidos neste capítulo dizem respeito ao estudo da temperatura na computação quântica óptica. Essa análise foi realizada partindo da investigação da influência da temperatura em propriedades não clássicas através do fator de Mandel e da função de Wigner. O conceito de fidelidade foi explorado permitindo uma análise dos efeitos térmicos no teletransporte quântico. Estes resultados ratificam a relevância da dinâmica de campos térmicos como um formalismo profícuo na análise de diversos aspectos da informação quântica.

## Capítulo 10

# Conclusões e Perspectivas

A teoria da informação quântica possui diversas questões não resolvidas tanto no âmbito experimental quanto no teórico. Neste último, uma vasta gama de técnicas e formalismos tem sido empregados na tentativa de promover avanços na compreensão de temas concernentes ao emaranhamento quântico, teletransporte quântico, algoritmos quânticos, correção quântica de erro, entre outros. Nossa contribuição, com a presente tese, ocorre exatamente neste contexto e compreende duas grandes partes.

Na primeira parte, visando a investigação do emaranhamento quântico, das portas lógicas quânticas e da correção quântica de erro, apresentamos uma formulação capaz de descrever sistemas quânticos compostos sob um viés puramente algébrico, colocando em pé de igualdade estados e operadores, fazendo uso do conceito chave de ideais à esquerda minimais. Para tanto, desenvolvemos uma série de resultados matemáticos envolvendo o produto tensorial de álgebras associativas. Partindo de resultados da teoria de representação de álgebras, generalizamos os teoremas para situações com um número finito de produtos tensoriais. Também com base em uma analogia com a teoria de representação de grupos finitos, obtivemos resultados análogos para uma vasta classe de álgebras de interesse em Física, tais como teoremas de ortogonalidade e operadores de projeção. Uma construção GNS foi obtida e uma realização foi dada explicitamente generalizando-se o ideal de Gelfand. Estes resul-

tados permitiram a obtenção de um critério de separabilidade para estados puros em termos algébricos e uma operação unitária geradora de estados maximamente emaranhados do tipo Bell, baseado numa representação dos grupos de trança. Dentro deste esquema, conjuntos de portas lógicas quânticas para sistemas multipartites foram construídas utilizando a operação de reversão em produtos tensoriais da álgebra de Clifford  $Cl(3, 0)$ . Esta álgebra, que admite uma representação em termos das matrizes de Pauli, se mostrou de grande generalidade, permitindo realizações concretas do arcabouço matemático abstrato e geral desenvolvido neste trabalho. Fazendo uso das fibrações de Hopf e da álgebra dos quatérnions, a interpretação geométrica usual dos q-bits em termos da esfera de Bloch, emerge naturalmente deste formalismo. Seguindo esta perspectiva algébrica definimos estabilizadores algébricos e construímos subespaços livres de descoerência, utilizando nosso desenvolvimento acerca da teoria de representações de álgebras.

Na segunda parte deste trabalho, desenvolvemos aspectos da dinâmica de campos térmicos de relevância para a computação quântica e informação quântica. Iniciamos, investigando o emaranhamento envolvendo sistemas com simetrias formados por produtos tensoriais de  $SU(1, 1)$  e  $SU(2)$ , via decomposição de Schmidt e representações de álgebras de Hopf associadas a estes sistemas, generalizando alguns resultados obtidos na referência [113]. Neste viés algébrico, construímos uma dinâmica de campos térmicos q-deformada partindo de uma deformação da álgebra de Heisenberg e mostramos como os operadores de criação e aniquilação térmicos podem ser construídos a partir da estrutura de co-álgebra do grupo quântico em questão. Calculamos também a entropia de von-neumann para um sistema de osciladores bosônicos térmicos deformados. Uma nova conexão entre a q-entropia de Tsallis e o formalismo dos grupos quânticos é apresentada via espectro de energia de um hamiltoniano invariante pelo grupo quântico  $SU_q(2)$ . Estudamos em seguida, a fidelidade e propriedades não clássicas de estados de um oscilador bosônico termalizado, que à temperatura nula, é capaz de implementar a porta lógica quântica  $CNOT$ . Exibimos então faixas

de temperatura para as quais as estatísticas tornam-se subpoissonianas, poissonianas e superpoissonianas. A função de Wigner para este estado também foi calculada e possibilitou uma análise da representação no espaço de fase sob a influência da temperatura. Propomos também um protocolo de teletransporte quântico de estados termalizados baseado na referência [147]. Neste esquema, o estado utilizado corresponde à representação duplo-trilho de interesse para a computação quântica óptica. Analisamos como a temperatura pode influenciar o processo através do cálculo da fidelidade que torna-se igual à unidade no limite de temperatura nula. Por último realizamos uma investigação do conceito de purificação em informação quântica e sua relação com o formalismo da dinâmica de campos térmicos, exibindo, explicitamente, suas semelhanças e diferenças.

Vislumbramos uma vasta gama de desdobramentos para estes resultados. Com relação à primeira parte, a extensão do critério de separabilidade para estados mistos, uma proposta de medida algébrica de emaranhamento e uma interpretação geométrica em termos algébricos para múltiplos q-bits são tópicos de interesse. Ainda com relação à primeira parte, pretendemos explorar os resultados obtidos sobre álgebras, como por exemplo, analisar as representações irredutíveis de dimensões maiores visando aplicações na teoria da correção quântica de erro. No que concerne à dinâmica de campos térmicos, temas relacionados à extensão dos aspectos formais aqui desenvolvidos para sistemas de férmions e anyons, a investigação de propriedades não clássicas em outros esquemas de representação física para os q-bits, protocolos para correção quântica de erro envolvendo temperatura e critérios de separabilidade para estados termalizados podem ser explorados.

## Apêndice A

# Relações de Anti-Comutação na Álgebra Produto e os Grupos de Trança

Desenvolveremos neste apêndice as relações de comutação (4.42) e (4.43). Temos então que

$$\begin{aligned}
 \{\Gamma_i, \Gamma_j\} &= \{\gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}, \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n}\} \\
 &= (\gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}) (\gamma_{j_1} \otimes \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n}) \\
 &\quad + (\gamma_{j_1} \otimes \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n}) (\gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}) \\
 &= \gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n} + \gamma_{j_1} \gamma_{i_1} \otimes \gamma_{j_2} \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{j_n} \gamma_{i_n}.
 \end{aligned}$$

Se  $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_n = j_n$ ,

$$\begin{aligned}
 \{\Gamma_i, \Gamma_j\} &= \gamma_{i_1} \gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{i_n} + \gamma_{i_1} \gamma_{i_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{i_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{i_n} \\
 &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \\
 &= 2(1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1). \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Se  $i \neq j$  um número ímpar de vezes, isto é,  $2k + 1$  vezes, temos que ao anticomutar todos os fatores da segunda parcela, todas as posições dos geradores invertidos serão

antecedidas por um sinal negativo:

$$\begin{aligned}\{\Gamma_i, \Gamma_j\} &= \gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n} - \gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Se  $i \neq j$  um número par de vezes, isto é,  $2k$  vezes, temos que ao anticomutar todos os fatores da segunda parcela, todas as posições dos geradores são invertidas, permanecendo o sinal positivo

$$\begin{aligned}\{\Gamma_i, \Gamma_j\} &= \gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n} + \gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n} \\ &= 2(\gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n}).\end{aligned}\tag{A.3}$$

Sumarizando,

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_n j_n} (1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1),\tag{A.4}$$

se  $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_n = j_n$ , ou se  $i \neq j$   $2k + 1$  vezes onde  $\delta_{i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_n j_n} = \delta_{i_1, j_1} \delta_{i_2, j_2} \dots \delta_{i_n, j_n}$ , ou

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2(\gamma_{i_1} \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_2} \gamma_{j_2} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n} \gamma_{j_n}),\tag{A.5}$$

se  $i \neq j$  um número par de vezes, isto é,  $2k$  vezes.

Verificaremos agora as relações envolvendo o grupo de tranças, discutido no capítulo 4. Provaremos a identidade

$$(B \otimes 1)(1 \otimes B)(B \otimes 1) = (1 \otimes B)(B \otimes 1)(1 \otimes B),\tag{A.6}$$

com  $B$  definido por

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1)].\tag{A.7}$$

Observe que

$$B \otimes 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1 \otimes 1)]\tag{A.8}$$

e

$$1 \otimes B = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1)].\tag{A.9}$$

Após um pouco de álgebra e fazendo uso das relações de anticomutação entre os bivectores, temos

$$\begin{aligned} (B \otimes 1)(1 \otimes B)(B \otimes 1) &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1 \otimes 1)] \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1)] \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1 \otimes 1)] \right\}. \end{aligned}$$

Então

$$(B \otimes 1)(1 \otimes B)(B \otimes 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1 \otimes 1) + (1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1)]. \quad (\text{A.10})$$

Ademais,

$$\begin{aligned} (1 \otimes B)(B \otimes 1)(1 \otimes B) &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1)] \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1 \otimes 1)] \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes 1 \otimes 1) + (1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1)] \right\}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$(1 \otimes B)(B \otimes 1)(1 \otimes B) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1) + (\gamma_1 \otimes \gamma_3 \gamma_1 \otimes 1)]. \quad (\text{A.11})$$

Logo, a identidade está demonstrada.

## Apêndice B

# Representação de Schwinger da Álgebra $su_q(2)$ .

Neste apêndice explicitaremos as relações de comutação para a nossa proposta de deformação do  $SU_q(2)$  bem como o espaço de representação associado. Considere então os geradores

$$\begin{aligned} S_{+q} &= a_{1q}^\dagger a_{2q}, \\ S_{-q} &= a_{2q}^\dagger a_{1q}, \\ S_{0q} &= \frac{1}{2}(N_{1q} - N_{2q}), \end{aligned} \tag{B.1}$$

com

$$N_{1q} = a_{1q}^\dagger a_{1q} \quad \text{e} \quad N_{2q} = a_{2q}^\dagger a_{2q}. \tag{B.2}$$

Sejam portanto as relações de comutação

$$\begin{aligned}
[S_{+q}, S_{-q}] &= S_{+q}S_{-q} - S_{-q}S_{+q} \\
&= a_{1q}^\dagger a_{2q} a_{2q}^\dagger a_{1q} - a_{2q}^\dagger a_{1q} a_{1q}^\dagger a_{2q} \\
&= a_{1q}^\dagger a_{1q} a_{2q} a_{2q}^\dagger - a_{1q} a_{1q}^\dagger a_{2q}^\dagger a_{2q} \\
&= a_{1q}^\dagger a_{1q} \left[ \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) + a_{1q}^\dagger a_{1q} \right] a_{2q} a_{2q}^\dagger \\
&\quad - \left[ \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) + a_{1q}^\dagger a_{1q} \right] a_{2q}^\dagger a_{2q} \\
&= \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) (a_{1q}^\dagger a_{1q} - a_{2q}^\dagger a_{2q}) \\
&= \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) S_{0q}, \tag{B.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{0q}, S_{+q}] &= S_{0q}S_{+q} - S_{+q}S_{0q} \\
&= \frac{1}{2}(a_{1q}^\dagger a_{1q} - a_{2q}^\dagger a_{2q})a_{1q}^\dagger a_{2q} - a_{1q}^\dagger a_{2q} \frac{1}{2}(a_{1q}^\dagger a_{1q} - a_{2q}^\dagger a_{2q}) \\
&= \frac{1}{2}(a_{1q}^\dagger a_{1q} a_{1q}^\dagger a_{2q} - a_{2q}^\dagger a_{2q} a_{1q}^\dagger a_{2q} - a_{1q}^\dagger a_{2q} a_{1q}^\dagger a_{1q} + a_{1q}^\dagger a_{2q} a_{2q}^\dagger a_{2q}) \\
&= \frac{1}{2}(a_{1q}^\dagger a_{1q} a_{1q}^\dagger a_{2q} - a_{2q}^\dagger a_{2q} a_{2q}^\dagger a_{1q} - a_{1q}^\dagger a_{1q}^\dagger a_{1q} a_{2q} + a_{2q}^\dagger a_{2q}^\dagger a_{2q} a_{1q}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ a_{1q}^\dagger \left[ a_{1q}^\dagger a_{1q} + \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) \right] a_{2q} - a_{1q}^\dagger a_{1q}^\dagger a_{1q} a_{2q} \right. \\
&\quad \left. - \left[ a_{2q} a_{2q}^\dagger - \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) \right] a_{2q} a_{1q}^\dagger + a_{2q} a_{2q}^\dagger a_{2q} a_{1q}^\dagger \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) (a_{1q}^\dagger a_{2q} - a_{2q} a_{1q}^\dagger) \\
&= \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) S_{+q}, \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{0_q}, S_{-q}] &= S_{0_q} S_{-q} - S_{-q} S_{0_q} \\
&= \frac{1}{2} (a_{1_q}^\dagger a_{1_q} - a_{2_q}^\dagger a_{2_q}) a_{2_q}^\dagger a_{1_q} - a_{2_q}^\dagger a_{1_q} \frac{1}{2} (a_{1_q}^\dagger a_{1_q} - a_{2_q}^\dagger a_{2_q}) \\
&= \frac{1}{2} (a_{1_q}^\dagger a_{1_q} a_{2_q}^\dagger a_{1_q} - a_{2_q}^\dagger a_{2_q} a_{2_q}^\dagger a_{1_q} - a_{2_q}^\dagger a_{1_q} a_{1_q}^\dagger a_{1_q} + a_{2_q}^\dagger a_{1_q} a_{2_q}^\dagger a_{2_q}) \\
&= \frac{1}{2} (a_{1_q}^\dagger a_{1_q} a_{1_q} a_{2_q}^\dagger - a_{1_q} a_{1_q}^\dagger a_{1_q} a_{2_q}^\dagger - a_{2_q}^\dagger a_{2_q} a_{2_q}^\dagger a_{1_q} + a_{2_q}^\dagger a_{2_q}^\dagger a_{2_q} a_{1_q}) \\
&\quad \frac{1}{2} \left\{ \left[ a_{1_q} a_{1_q}^\dagger + \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) \right] a_{2_q}^\dagger - a_{1_q}^\dagger a_{1_q} a_{1_q} a_{2_q}^\dagger \right. \\
&\quad \left. - a_{2_q}^\dagger \left[ \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) + a_{2_q} a_{2_q}^\dagger \right] a_{1_q} + a_{2_q}^\dagger a_{2_q}^\dagger a_{2_q} a_{1_q} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) (a_{2_q}^\dagger a_{1_q} - a_{2_q}^\dagger a_{1_q}) \\
&= -\left( \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q - q^{-1}} \right) S_{-q}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

A representação no espaço de Fock é dada por

$$\begin{aligned}
S_{+q} |n_1, n_2, \hbar\rangle &= a_{1_q}^\dagger a_{2_q} |n_1, n_2, \hbar\rangle \\
&= [\hbar]_q \sqrt{n_2(n_1 + 1)} |n_1 + 1, n_2 - 1, \hbar\rangle, \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{-q} |n_1, n_2, \hbar\rangle &= a_{2_q}^\dagger a_{1_q} |n_1, n_2, \hbar\rangle \\
&= [\hbar]_q \sqrt{n_1(n_2 + 1)} |n_1 - 1, n_2 + 1, \hbar\rangle, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{0_q} |n_1, n_2, \hbar\rangle &= (a_{1_q}^\dagger a_{1_q} - a_{2_q}^\dagger a_{2_q}) |n_1, n_2, \hbar\rangle \\
&= \frac{1}{2} [\hbar]_q (n_1 - n_2) |n_1, n_2, \hbar\rangle. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Definindo

$$|s, m, \hbar\rangle = \left| \frac{n_1 + n_2}{2}, \frac{n_1 - n_2}{2}, \hbar \right\rangle, \tag{B.9}$$

temos

$$\begin{aligned}
S_q^2 |s, m, \hbar\rangle &= [\hbar]_q s(s + 1) |s, m, \hbar\rangle, \\
S_{0_q} |s, m, \hbar\rangle &= [\hbar]_q m |s, m, \hbar\rangle, \tag{B.10}
\end{aligned}$$

descrevendo um sistema deformado de spin 1/2.

## Bibliografia

- [1] Nielsen, M. A., Chuang, I. H.: *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [2] Diósi, L., *A Short Course in Quantum Information Theory*, Springer, Berlin (2007).
- [3] Preskill, J., *Quantum Computation and Information*, Caltech (1998); [http://theory.caltech.edu/people/preskill/ph\\_229/](http://theory.caltech.edu/people/preskill/ph_229/)
- [4] Feynman, R. P., Int. J. Theor. Phys., **21**, 467 (1982).
- [5] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N., Phys. Rev. **48**, 696 (1935).
- [6] Bennet, C. H., Wiesner, S. J., Phys. Rev. Lett., **69**, 20 (1992).
- [7] Bennet, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Josza, R., Peres, A., Wootters, W., Phys. Rev. Lett., **70**, 1895 (1993).
- [8] Lloyd, S., J. Mod. Opt., **41**, 12 (1994).
- [9] Chuang, I. L., Yamamoto, Y., Phys. Rev. A, **52**, 3489 (1995).
- [10] Cirac, J., Zoller, Phys. Rev. Lett., **74**, 4091 (1995).
- [11] DiVicenzo, D. P., Science, **270** (1995).
- [12] Loss, D. P. Vicenzo, Phys. Rev. A, **57**, 120 (1998).
- [13] Bosschi, D., Branca, S., De Martini, F., Hardy, L., Popescu, S., Phys. Rev. Lett., **80**, 1121 (1998).
- [14] Bennet, C. H., Bessete, F., Brassard, G., Salvail, L., Smolin, J., J. of Cryptology, **5**,1 (1992)
- [15] Hughes, R., Alde D., Dyer, P., Luther, G., Morgan, G. Schauer, M., Contemp. Phys., **36**, 3 (1995).

- [16] Muller, A., Zbinden, H., Gisin, N., Europhys. Lett., **33** (1996).
- [17] Bethune, D. S., Risk, W., J. Quantum Electronics, **36**, 100 (2000).
- [18] Schmitt-Manderbach, T. *et al.*, Phys. Rev. Lett., **98**, 1010504 (2007)
- [19] Dixon, A. R., Yuan, Z. L., Dynes, J. F., Sharpe, A. W., Shields, A. J., Optics Express, **16**, 23 (2008).
- [20] Brglinski, R. K., Chen, G., *Mathematics of Quantum Computation*, Chapman&Hall, Florida (2002).
- [21] Ekert A., Knight, P. L., Am. J. Phys. **63**, 415 (1995).
- [22] Brub, D., J. of Math. Phys., **43**, 9 (2002).
- [23] Holevo, A. S., Russ. Math. Surv. **53**, 1295 (1998) e quant-ph/9809023.
- [24] Holevo, A. S., Shirokov, M. E., Commun. Math. Phys. **249**, 217 (2004) e quant-ph/0306196.
- [25] Verstraete, F., Dehaene, J., De Moor, B. e Verschelde, H., Physical Review A, **65**, 052112 (2002).
- [26] Havel, T. F. Doran, C. J.: *Interaction and entangled in the multiparticle spacetime algebra*. In: Dorst, L., Doran, C. J., Lasenby, J. (eds.). *Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering*. Birkhäuser, Basel (2002).
- [27] Havel, T. F. Doran, C. J.: Geometric Algebra in Quantum Information Processing. In: Lomonaco S. (ed.) *Quantum Computation and Quantum Information Science*, vol. 305, p. 81. American Mathematics Society, Providence (2001).
- [28] Baylis, W. E.: *Quantum/Classical interface: a geometric from the classical side*. In: Byrnes, J. (ed.) *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute*. Kluwer Academic, Dorderechet (2004).
- [29] Frescura, F. A. M., Hiley, B., Found. of Phys., **10**, 1 (1980).
- [30] Hestenes, D., Sobczyk, G., *Clifford Algebras and Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*, Mathematics Lecture Note Series , Addison Wesley, Reading, Mass. (1980).
- [31] Holland, P. R., J. Phys. A: Math. Gen., **16**, 2363 (1983).
- [32] Frescura, F. A. M., Hiley, B. J., Rev. Brasil. Fis, volume especial, Os 70 anos de Mário Schönberg, 49, (1984).

- [33] Fernandes, M. C. B., "*Geometric Algebras and the Foundations of Quantum Theory*, Phd Thesis, Birkbeck College, Dept. Phys., London University (1995).
- [34] Hiley, B. J., Fernandes, M., *Process and Time, Temporality and Now*, ed. H. Atmanspacher and E. Ruhbau, 365-383, Springer-Verlag (1997)
- [35] Monk, N. A. M. , Hiley, B. J., *Found. Phys. Letts*, **11**, 371 (1998).
- [36] Vianna, J. D. M., Fernandes, M. C. B., Santana, A. E., *Found. Phys.*, **35**,109 (2005).
- [37] Schönberg, M., *Anais Acad. Bras. Cienc.* **28**, 11 (1956); 473 (1957); 30 (1958); *Suppl. Nuovo Cimento*, **6**, 356 (1957)
- [38] Bohm, D., Hiley, B. J., *Relativistic Phase Space arising out of the Dirac Algebra*, 67-76 in *Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy and Theoretical Biology* ( Essays in Honor of Wolfgang Yourgrau) edited by A. Van der Merwc, Plenum Press (1983).
- [39] Fernandes, M.C.B., Vianna, J. D. M., *Found. Phys.*, **29**, 20 (1999).
- [40] Dirac, P. A. M., *Phys. Rev. B*, **139**, 684 (1965).
- [41] Vlasov, A. Y.: *Phys. Rev. A* **63**, 054302 (1999).
- [42] Zeng, G., Li, Y., Lee, M. H., *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 145304 (2008).
- [43] Knill, E., Technical Report LAUR **96**, 2807, Los Alamos National Laboratory (1996); quant-ph/9608049.
- [44] Lidar, D. A., Bacon, D., Kempe, J. and Whaley, K. B., *Phys. Rev. A*, **63**, 022306 (2001).
- [45] Lidar, D. A., Bacon, D., Kempe, J. and Whaley, K. B., *Phys. Rev. A*, **63**, 022307 (2001).
- [46] Knill, E., Laflame, R., Viola, L. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2525 (2000).
- [47] Appleby, D. M., *J. Math. Phys.* **46**, 052107 (2005).
- [48] Zhang, Y., *J. Phys. A: Math. Theor.* **39** 11599 (2006).
- [49] Freedman, M., Kitaev, A., Larsen, M. J., e Wang, Z. *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** 31 (2004).
- [50] Wilczek, F., *Phys. Rev. Lett.* **49** 14 (1982).
- [51] Kitaev, A. Y., *Annals. Phys.* **303** 3 (2002).

- [52] Riesz, M., in *Comptes Rendus 12 me Cong. Math. Scand.* ( Lund, 1953) p.241
- [53] Frescura, F. A. M., Hiley, B. J., *Found. Phys.* **10**, 9/10 (1980).
- [54] Vianna, J. D. M., Trindade, M. A. S., Fernandes, M. C. B., *Int. J. Theor. Phys.*, **47**, 961 (2008).
- [55] Takahashi, Y. and Umezawa, H., *Collect. Phenom.* **2**, 55 (1975).
- [56] Umezawa, H., *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics* (AIP, New York, 1995).
- [57] Santana, A. E., Neto, A. M., Vianna, J. D.M., Khanna, F. C., *Physica A*, **280**, 405, (2000).
- [58] Khanna, F. C., Malbouisson, A.P.C., Malbouisson, J.M.C., Santana, A. E., *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications*, World Scientific Publishing Company (2009).
- [59] Pierce, R. S., *Associative Algebras*, Springer Verlag, New York, 1982.
- [60] Van der Waerden, B. L., *Modern Algebra*, vol. II, Frederick Ungar Publishing, Leipzig (1940).
- [61] Artin, E., *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New Jersey (1957).
- [62] Porteous I. R., *Clifford Algebras and Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [63] Cartan, É., *Theory of Spinors*, MIT Press, Cambridge (1967).
- [64] Lounesto, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [65] Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, vol. 1, Princeton University Press, Princeton (1946).
- [66] Chevalley, C., *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras*, Columbia University Press, New York (1954).
- [67] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol (1996).
- [68] Albert, A. , *Structure of Algebras*, Am. Math. Soc. Coll. Publ. vol 24 (1961).
- [69] Bohm, D. e Hiley, B. J., *Found. Phys.* **11**, 179 (1981).
- [70] Misra, B., Prigogine, I., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **76**, 4768 (1979).

- [71] Greub, W., *Multilinear Algebra*, 2nd edn, Berlin: Springer (1978).
- [72] Benn, I., Tucker, R., *An Introduction to Spinors and Geometry with applications in Physics*, Adam Hilger, Bristol (1987).
- [73] Weyl, H., *Theory of groups and Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1931).
- [74] Wigner, E. P., *Group Theory and its applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York (1959).
- [75] Cotton, F. A., *Chemical Applications of Group Theory*, Willey-Interscience, New York (1971).
- [76] Tinkhan, M., *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).
- [77] Vianna, J. D. M., *Teoria de Grupos Aplicada à Física*, Brasília (1979)
- [78] Fazzio A., Watari, K., *Introdução à Teoria de Grupos*, Editora UFSM, Santa Maria, (1997).
- [79] Boerner, H., *Representation of Groups*, North-Holland Publish Company, Amsterdam (1963).
- [80] Varadarajan, V. S., *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, Springer-Verlag, New York (1984).
- [81] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York (1972).
- [82] Hermann, R., *Lie Groups for Physicists*, W. A. Benjamin Inc., Massachusetts (1966).
- [83] Gilmore, R., *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Representations*, Dover, New York (2005).
- [84] Hall, B., *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*, Springer-Verlag, New York (1972).
- [85] George, H., *Lie Algebras in Particle Physics*, Westview Press, Cambridge (1999).
- [86] Sattinger, D. H., Weaver, O. L., *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1986).
- [87] Pauli, W., *Handbuch der Physik*, **24**, 2end.pt.2., Springer, Leipzig (1933).

- [88] Lomont, J. S., *Applications of Finite Groups*, Academic Press, New York (1959).
- [89] Hamermesh, M., *Group Theory and its Applications of Physical Problems*, Addison-Wesley, Massachusetts (1962).
- [90] Tung, Wu-ki, *Group Theory in Physics*, World Scientific, Singapore (1985).
- [91] Emch, G. G., *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Wiley-Interscience, New York (1972).
- [92] Hiley, B., *Algebraic Quantum Mechanics, Algebraic Spinors and Hilbert Space*, não publicado (2002).
- [93] Nussenzveig, H. M., *Curso de Física Básica, vol. 4*, Blucher, São Paulo (1998).
- [94] Bohm, D., Phys. Rev. **85**, 180 (1952).
- [95] Bell, J. S., Physics 1 **195**, 180 (1965).
- [96] Aspect, A., Grongier, P. e Roger, G., Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [97] Aspect, A., Dalibard, J. e Roger, G., Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [98] Campos, R. A., Saleh, B. E. A. e Tiech, M. C., Phys. Rev. A **52**, 3486 (1995).
- [99] Monroe, C., Meekhof, D. M., King, B. E., Itano, W. M. e Wineland, D. J., Phys. Rev. Lett. **75**, 4717 (1995).
- [100] Linden, N., Kupce, E. e Freeman, R., Fortsch. Phys. (1999). arXiv: quant-ph/9907003.
- [101] Chuang, I. L. e Yamamoto, Y., Phys. Rev. A. **52**, 3489 (1995).
- [102] Lima, E. L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, IMPA, Rio de Janeiro, (1993).
- [103] Massey, W., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer, New York (1967).
- [104] Brody, D. C., Hughstone, J. Geom. Phys. **38**, 19 (2001).
- [105] Mosseri, R., *Two and Three Q-bits and Hopf Fibrations*, quant-ph/0310053 (2003).
- [106] Vaz Jr, J., Rev. Bras. Ens. Fís. **19**, 2 (1997).
- [107] Amaral, B. L., *Aplicações da geometria ao estudo do emaranhamento*, monografia, Instituto de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte (2006).

- [108] Kwiat, P. G., Berglund, J.B., Altepeter, J.B., White, A.G., Science, **290** (2000).
- [109] Schwinger, J., "*On Angular Momentum*", Report. US AEC NYO- 3071 (não publicado) (reeditado em 1965 em Quantum Theory of Angular Momentum; ed. L. C. Biedenharn e H. Van Dam: New York Academic, p.229).
- [110] Matsubara, T., Prog. Theor. Phys., **14**, 351 (1951).
- [111] Schwinger, J. S., J. Math. Phys., **2**, 407 (1961).
- [112] Santana, A. E., Matos Neto, A., Vianna, J. D. M. e Khanna, F. C., Physica A, **280**, 405 (2000).
- [113] Santana, A. E., Khanna, F.C., Revzen, M., Phys. Rev. A, **65**, 032119 (2002).
- [114] Vitiello, G., Iorio, A., Ann. of Phys., **241**, 496 (1995).
- [115] De Martino, S., De Siena, S., Vitiello, G., Int. J. of Mod. Phys. B, **10**, 1615 (1996).
- [116] Kopf, T., Santana, A.E., Khanna, F. C., J. Math. Phys., **38**, 10 (1997).
- [117] Majid, S., *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [118] Korbicz, J. K., Wehr, J. e Lewenstein, M., J. Math. Phys., **50**, 062104 (2009).
- [119] Majid, S., *Algebraic Approach to Quantum Gravity II: noncommutative spacetimes, in Approaches to Quantum Gravity*, Ced. D. Oriti., C. U. P., 466-492 (2009).
- [120] Kim, J. S., Phys. Rev. A, **81**, 062328 (2010).
- [121] Monteiro, M. R., Roditi, I., Mod. Phys. Lett B, **7** (1993).
- [122] Monteiro, M. R., Roditi, I., Physica A, **206** (1994).
- [123] Tsallis, C., J. Sta. Phy. **52**, 479 (1988).
- [124] Tsallis, C., Brazilian J. of Phys. **39**, 337 (2009).
- [125] Tamarit, F. A., Cannas, S. A., Tsallis, C., European Phys. J. B **1**, 545 (1998).
- [126] Tsallis, C., Queiros, S., Europhysics Lett **69**, 893 (2005).
- [127] Malacarne, L. C., Mendes, R. S., Mendes, E. K. Phys. Rev. E, **65**, 017106 (2001).

- [128] Borges, E. P., J. of Phys. A, Mathematical and General **31**, 23 (1998).
- [129] Lenzi, E. K., Borges, E. P., Mendes, R. S., J. of Phys. A, Mathematical and General **32**, 48 (1998).
- [130] Umarov, Tsallis, C., Gell-mann, M., Steinberg, S. J. of Math. Phys., **51**, 033502 (2010).
- [131] MacFarlane, A. J., J. Phys. A **22**, 4581 (1989).
- [132] L. C. Biedenharn, J. Phys. A **22**, L873 (1989).
- [133] Chang, Z., Yan, H., Phys. Rev. A **43**, 11 (1991).
- [134] Chang, Z., Yan, H., Phys. Rev. A **44**, 11 (1991).
- [135] Tsallis, C., Phys. Lett. A **195** (1994).
- [136] Abe, S. Phys. Lett. A **224**, 326 (1997).
- [137] Lavagno, Narayana Swamy, P. Chaos, Solitons and Fractals **13**, 437 (2002).
- [138] Ubriaco, M. R., Physica A **305**, 305 (2002).
- [139] Mendes, R. S., Braz. J. Phys., **29**, 1 (1999).
- [140] Barnett, S. M. e Knight, P. L., J. Opt. Soc. Am. B **2**, 467 (1985).
- [141] Mann, A., Revzen, M., Phys. Lett. A **134**, 273 (1989).
- [142] DiVicenzo, D. P., Phys. Rev. A, **51**, 2, (1995).
- [143] Lidar, D., K. B. Whaley, “*Irreversible Quantum Dynamics*”, F. Bencatti and R. Floreanini, pp. 83-120 (Springer Lecture Notes in Physics, vol. 622, Berlin, 2003).
- [144] Uhlmann, A., Rep. Math. Phys., **9**, 273 (1976).
- [145] Josza, R., J. of Mod. Opt., **41**, 273 (1976).
- [146] Mandel, L., Optics Letters, **4**, 7 (1979).
- [147] Oliveira, T. P., *Teletransporte quântico de estados térmicos*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade de Brasília (2008).
- [148] Dieks D., Phys. Lett. A, **92**, 271 (1982).
- [149] Wothers, W. K., Zurek, W. H., Nature, **299**, 802 (1982)

- [150] Barnum, H., Caves, C.M., Fuchs, C. A., Josza, R., Schumacher, B., Phys. Rev. Lett. **76**, 2828 (1996).
- [151] Mor, T., Phys. Rev. Lett., **80**, 3137 (1998).
- [152] Westmoreland, M. D., Schumacher, B. arXiv: quant-ph/981014 (1998).
- [153] Van Enk, S. J., arXiv: quant-ph/9805006 (1998).