



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Estudo das Soluções Solitônicas de Equações
Diferenciais Parciais Não-Lineares com o uso
do Método de Hirota**

Rubicely Francisco do Nascimento

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Estudo das Soluções Solitônicas de Equações
Diferenciais Parciais Não-Lineares com o uso
do Método de Hirota**

Rubicely Francisco do Nascimento

Orientador: Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Salvador-BA,
Agosto de 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

“ESTUDO DAS SOLUÇÕES SOLITÔNICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS NÃO-LINEARES COM O USO DO MÉTODO DE HIROTA”

Por:

RUBICELY FRANCISCO DO NASCIMENTO

Dissertação de mestrado **APROVADA** em sessão pública no dia dois de agosto do ano dois mil e dezoito perante a banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Genilson Ribeiro de Melo

**Professor Dr. Genilson Ribeiro de Melo
(Orientador - UFBA)**

UFBA / INSTITUTO DE FÍSICA
Está conforme o original
Data 27/08/2018
Marcos Paulo S. da Silva
Marcos Paulo S. da Silva
Auxiliar Administrativo
Mat.: 1579953

Humberto de Almeida Borges

**Professor Dr. Humberto de Almeida Borges
(UFBA)**

Leandro H. Ymai

**Professor Dr. Leandro Hayato Ymai
(UNIPAMPA)**

Roberto Rivelino de Melo Moreno
(Coordenador do PGIF/UFBA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, Valdo e Ceixa, que me apoiam desde o início, e aos meus irmãos, Rubinho e Ricardo e a minha cunhada, Cláudia por acreditarem e torcerem por mim.

Agradeço a família aqui da Bahia, em especial Seu Vaner, Dona Cidália, Zelina, Seu Marcos e Zenaide, o apoio de vocês foram de extrema importância.

Agradeço aos colegas do IF-UFBA, em especial Cícero, Laura, Rodrigo e Geziane, pelas horas de estudos, pelos conhecimentos, pelos cafés e por todos almoços compartilhados. Vocês com toda certeza, contribuíram e tornaram mais prazerosa essa jornada.

Agradeço ao professor Genilson Melo pela orientação e paciência.

Agradeço aos professores e funcionários do IF-UFBA e do CETEC-UFRB e a todos que me incentivaram e me apoiaram ao longo da realização do mestrado.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

*Dedico este trabalho aos
meus pais e a minha filha
Agnes.*

RESUMO

O corrente trabalho apresenta um estudo das soluções tipo sólitons com o uso do Método Bilinear de Hirota para os modelos integráveis das equações não-lineares de Korteweg e de Vries (KdV), Korteweg e de Vries modificada (mKdV) e Não-Linear Schrödinger (NLS) em (1+1)-dimensões. Extendendo a equação KdV para modelos (2+1)-dimensionais, encontramos suas soluções tipo sólitons. Ainda com o uso do Método Bilinear de Hirota, estudamos as soluções dromions da equação KdV em (2+1)-dimensões e uma análise gráfica foi feita a partir dos resultados obtidos, com uso do software MAPLE18.

Palavras-chave: Método Bilinear de Hirota, Sólitons, Equações Não-Lineares.

ABSTRACT

The current work presents a study of the soliton solutions using the Bilinear Hirota Method for the integrable models of the non-linear equations of Korteweg and de Vries (KdV), modified Korteweg and Vries (mKdV) and Non-Linear Schrödinger (NLS) in $(1 + 1)$ - dimensions. We extend the KdV equations for $(2 + 1)$ - dimensional models and find their soliton solutions. Also with the use of the Bilinear Hirota Method, we studied the dromions solutions of the KdV equation in $(2 + 1)$ - dimensions and a graphical analysis was made from the obtained results, using the software MAPLE18.

Keywords: Bilinear method of Hirota, Solitons, Nonlinear Equation.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Método Bilinear de Hirota	4
2.1	Equação Korteweg e de Vries (KdV)	5
2.1.1	Solução 1- sóliton	7
2.1.2	Solução 2- sólitons	10
2.1.3	Solução 3- sólitons	13
2.2	Equação Korteweg e de Vries modificada (mKdV)	18
2.2.1	Solução 1- sóliton	20
2.2.2	Solução 2- sólitons	22
2.2.3	Solução 3-sólitons	25
2.3	Equação Não-Linear Schrödinger (NLS)	29
2.3.1	Solução 1- sóliton	30
2.3.2	Soluções 2- sólitons	31
2.3.3	Solução 3- sólitons	34
3	EDPNL em (2+1)-Dimensões	38
3.1	Equação Kadomtsev-Petviashvili ou (KP)	38

3.1.1	Solução 1-sóliton	39
3.1.2	Solução 2-sólitons	40
3.1.3	Solução 3-sólitons	42
3.2	Equação Korteweg-de Vries em (2+1) dimensões	45
3.2.1	Solução 1-sóliton	46
3.2.2	Solução 2-sólitons	47
3.2.3	Solução 3-sólitons	49
4	Soluções Dromions da Equação Korteweg-de Vries em (2+1)-dimensões	53
4.1	Soluções Sóliton-Linha	54
4.2	Aplicações	55
4.2.1	(1,1)-Dromion	55
4.2.2	(2,1)-Dromions	57
4.2.3	(2,2)-Dromions	59
4.2.4	(3,2)-Dromions	62
4.2.5	(3,3)-Dromions	63
5	Considerações Finais	64

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos pesquisas focadas em equações diferenciais não lineares têm despertado o interesse dos físicos, matemáticos, biólogos, químicos, engenheiros e neurocientistas [1], ora no aspecto teórico com modelagens e proposições de novos métodos de soluções, ora experimentais para gerar simulações de situações reais, sendo bastante intensificada com a conseqüente descoberta de novos fenômenos ondulatórios não lineares [2].

Contudo, muitas dificuldades ainda estão presentes no tratamento teórico de tais fenômenos. Como exemplo de tais dificuldades citamos que as equações diferenciais não lineares não obedecem ao princípio da superposição e a ausência de métodos gerais de solução. Conseqüência do primeiro nota-se que, dadas duas soluções distintas de uma determinada equação não linear, a sua soma não constitui uma nova solução e neste sentido as equações não lineares não apresentam soluções gerais conhecidas. Entretanto, tal fato enriquece o tratamento experimental e teórico, possibilitando modelarmos sistemas físicos diversos, como a descrição de pulsos elétricos na forma de sólitons que permitem a comunicação entre os neurônios até a propagação de informações através de fibras óticas.

De maneira semelhante, observa-se a ausência de um método geral de tratamento de soluções para todas as equações não lineares, similarmente aos já bem estabelecidos para as equações diferenciais lineares.

De fato, a primeira observação de uma onda solitária foi feita em 1834, às margens do

canal Eddinburgh-Glasgow, pelo engenheiro naval britânico, John Scott Russel, que observava uma barco sendo puxado por cavalos, quando a embarcação parou e a elevação de água continuou a se propagar com uma velocidade constante e sem se deformar por uma longa distância. Russel, que estava a cavalo, perseguiu a onda por uma distância de 3km, a 15 km/h. Mas seu interesse por esta onda solitária não parou por aí, e fez vários experimentos, descobrindo como produzi-las "em série" [3].

Desde a primeira observação experimental de uma onda solitária e a proposta de uma equação que descrevesse tal fenômeno passaram-se décadas até a proposta feita por Korteweg e de Vries, da famosa equação KdV, que possibilitou a introdução dos sólitons associada a equações não-lineares [4]. Posteriormente, no ano de 1955, Fermi, Pasta e Ulam (FPU) decidiram resolver numericamente as equações de movimento de Newton para uma cadeia unidimensional de massas idênticas ligadas por molas não-lineares [5]. Esse estudo inspirou Zabusky e Kruskal para a análise da equação KdV [6]. Esses conjuntos de trabalhos, não cronologicamente coincidentes, mas conectados por um primeiro lançar as bases e o outro estender a problemática limitada a descrever ondas em águas rasas às aplicações mais gerais das equações não lineares tipo solitônicas.

Nos anos seguintes avanços significativos foram feitos: Em 1967 Gardner, Greene, Kruskal e Miura encontraram um método de solução da equação KdV baseado no espalhamento inverso [7]; Em 1968 seus resultados foram generalizados por P.D. Lax e o importante conceito de par de Lax foi introduzido [8]; Em 1971, Ryogo Hirota introduz o chamado "método direto de Hirota" baseado na introdução dos operadores de Hirota [9]. Estes métodos foram o ponto de partida para diversos outros métodos de solução, como por exemplo, o método de dressing introduzido pelo grupo de física de Sistemas integráveis do Instituto de Física Teórica-Unesp [10–23].

A análise aqui proposta nos permitirá avançar no conhecimento das estruturas das equações diferenciais não lineares e na melhor compreensão de fenômenos físicos complexos da natureza. Em particular, no segundo capítulo descrevemos o Método Bilinear de Hirota e o aplicaremos aos principais modelos integráveis que são as equações KdV, mKdV e NLS em (1+1)-dimensões, encontrando suas soluções solitônicas (as soluções tipo solitons são

soluções localizadas e que possuem invariância no seu perfil mesmo após colisão ou interação com outro sóliton). No terceiro capítulo, encontramos as soluções tipo sólitons-linha (que são soluções tipo sóliton em $(2+1)$ -dimensões [24–29]), utilizando o mesmo método, para equações extendidas da KdV. No quarto capítulo, ainda com o uso do Método Bilinear de Hirota, encontramos as soluções dromions (dromions são soluções exponencialmente localizadas que decaem em todas as direções [24–31]) da equação KdV em $(2+1)$ -dimensões e uma análise gráfica será feita a partir dos resultados obtidos, usando o software MAPLE18. No quinto e último capítulo, incluímos um sumário e discussões.

Capítulo 2

Método Bilinear de Hirota

Descrevemos a seguir o método de Hirota. O objetivo principal deste método é encontrar soluções solitônicas ou periódicas de equações diferenciais não lineares de forma direta.

Em 1971 Ryogo Hirota introduziu um novo método para construções de soluções solitônicas de equações de evolução não lineares. Este método nos permite resolver uma EDPNL (Equação Diferencial Parcial Não-Linear) e envolve dois passos fundamentais.

Primeiro, sob uma determinada transformação de variáveis as equações de evolução podem ser reescritas na forma bilinear, isto é, uma versão da equação original escrita através do uso do operador bilinear [2, 9, 32–36]:

$$D_x^m D_t^n (a \cdot b) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n a(x, t) b(x', t') \Big|_{x=x'; t=t'} \quad (2.1)$$

onde m, n são números inteiros positivos e x, t são as variáveis independentes.

Segundo, uma adequada expansão das novas variáveis em termos do parâmetro ϵ nos permite obter e resolver um conjunto de equações para cada potência de ϵ .

Vejamos agora alguns exemplos: Para $m = 1$ e $n = 0$ temos,

$$\begin{aligned} D_x^1(a \cdot b) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) a(x, t) b(x', t') \Big|_{x=x'} \\ &= (a_x b - a b_{x'}) \Big|_{x=x'} \\ &= (a_x b - a b_x); \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para $m = 2$ e $n = 0$ temos,

$$\begin{aligned} D_x^2(a \cdot b) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 a(x, t) b(x', t') \Big|_{x=x'} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) (a_x b - a b_{x'}) \Big|_{x=x'} \\ &= (a_{xx} b - a_x b_{x'} - a_x b_{x'} + a b_{x'x'}) \Big|_{x=x'} \\ &= (a_{xx} b - 2a_x b_x + a b_{xx}); \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para $m = 0$ e $n = 1$ temos,

$$\begin{aligned} D_t^1(a \cdot b) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) a(x, t) b(x', t') \Big|_{t=t'} \\ &= (a_t b - a b_{t'}) \Big|_{t=t'} \\ &= (a_t b - a b_t); \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para $m = 1$ e $n = 1$ temos,

$$\begin{aligned} D_x^1 D_t^1(a \cdot b) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) a(x, t) b(x', t') \Big|_{x=x'; t=t'} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) (a_t b - a b_{t'}) \Big|_{x=x'; t=t'} \\ &= (a_{xt} b - a_x b_{t'} - a_t b_{x'} + a b_{x't'}) \Big|_{x=x'; t=t'} \\ &= (a_{xt} b - a_x b_t - a_t b_x + a b_{xt}); \end{aligned} \quad (2.5)$$

E assim sucessivamente.

2.1 Equação Korteweg e de Vries (KdV)

A equação de Korteweg - de Vries (KdV), junto às equações Korteweg - de Vries modificada (mKdV) e Não-linear Schrödinger (NLS), é uma das mais importantes equações

da teoria de sistemas integráveis, elas recebem estes nomes em homenagem aos seus desenvolvedores [3], ela descreve ondas solitárias que se propagam a longas distâncias, sem alterar sua composição, mesmo após interações (para mais informações sobre a obtenção dessa equação, ver [1–3, 37]). Essas equações são ditas equações diferenciais parciais não lineares (EDPNL) e possuem soluções do tipo solitônica. Nas próximas seções, faremos o uso do Método Bilinear de Hirota, para encontrar tais soluções.

Dada a equação KdV

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.6)$$

deseja-se encontrar a solução 3-sólitons dessa equação e para tal, será utilizado o Método Bilinear de Hirota, que consiste em encontrar sua forma bilinear através da seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} u &= \phi_x; \\ \phi &= -2 [\ln f]_x; \\ u &= -2 [\ln f]_{xx}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Usando a eq.(2.7) na eq.(2.6),

$$\phi_{xt} - 6\phi_x\phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0. \quad (2.8)$$

Integrando a eq.(2.8) em relação a x , levando as constantes de integração a zero,

$$\phi_t - 3\phi_x^2 + \phi_{xxx} = 0. \quad (2.9)$$

Fazendo a transformação bi-logarítmica:

$$\begin{aligned} \phi &= -2 [\ln f]_x; \\ \phi_t &= -2 [\ln f]_{xt} = -\frac{D_x D_t(f \cdot f)}{f^2}; \\ \phi_x &= -2 [\ln f]_{xx} = -\frac{D_x^2(f \cdot f)}{f^2}; \\ \phi_{xxx} &= -2 [\ln f]_{xxxx} = -\frac{D_x^4(f \cdot f)}{f^2} + 3 \left(\frac{D_x^2(f \cdot f)}{f^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aplicando a eq.(2.10) na eq.(2.9),

$$-\frac{D_x D_t(f \cdot f)}{f^2} - 3 \left(-\frac{D_x^2(f \cdot f)}{f^2} \right)^2 - \frac{D_x^4(f \cdot f)}{f^2} + 3 \left(\frac{D_x^2(f \cdot f)}{f^2} \right)^2 = 0. \quad (2.11)$$

Logo sua forma bilinear será

$$D_x(D_t + D_x^3)(f \cdot f) = 0. \quad (2.12)$$

Por sua vez f pode ser escrita conforme a expansão

$$f = 1 + \epsilon^1 f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots = \sum_{i=0}^n \epsilon^i f_i, \quad f_0 = 1. \quad (2.13)$$

Despreze os termos de ordem maior do que 3, pois estamos interessados em soluções até 3-sólitons,

$$\begin{aligned} f \cdot f &= (1 + \epsilon^1 f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3) \cdot (1 + \epsilon^1 f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3). \\ &= (1 \cdot 1) + \epsilon^1 [(1 \cdot f_1) + (f_1 \cdot 1)] + \epsilon^2 [2(1 \cdot f_2) + (f_1 \cdot f_1)] + 2\epsilon^3 [(1 \cdot f_3) + (f_1 \cdot f_2)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aplicando os operadores de Hirota e resolvendo separadamente os coeficientes das potências de ϵ :

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &: D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^1 &: 2D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_1) = 0; \\ \epsilon^2 &: D_x(D_t + D_x^3)[2(1 \cdot f_2) + (f_1 \cdot f_1)] = 0; \\ \epsilon^3 &: D_x(D_t + D_x^3)[(1 \cdot f_3) + (f_1 \cdot f_2)] = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.1.1 Solução 1- sóliton

Para os coeficientes de ϵ^0 , encontramos a identidade $0=0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_1) = D_x D_t(1 \cdot f_1) + D_x^4(1 \cdot f_1) = 0, \quad (2.16)$$

que implica em

$$f_{1xt} + f_{1xxxx} = 0, \quad (2.17)$$

onde integra-se a eq.(2.17) em relação a x , levando as constantes de integração a zero,

$$f_{1t} + f_{1xxx} = 0. \quad (2.18)$$

Supondo que

$$f_1 = \rho_1 = e^{k_1x + \omega_1t}, \quad (2.19)$$

onde

$$f_{1t} = \omega_1\rho_1 \quad e \quad f_{1xxx} = k_1^3\rho_1, \quad (2.20)$$

substitui-se a eq.(2.20) na eq.(2.18), obtém-se

$$(\omega_1 + k_1^3)\rho_1 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = -k_1^3, \quad (2.21)$$

portanto

$$f_1 = \rho_1 = e^{k_1x - k_1^3t}. \quad (2.22)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)[2(1 \cdot f_2) + (f_1 \cdot f_1)] = 2D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_2) + D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = 0. \quad (2.23)$$

O primeiro termo da soma dá

$$2D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_2) = 2D_x D_t(1 \cdot f_2) + 2D_x^4(1 \cdot f_2) = 0, \quad (2.24)$$

que implica em

$$f_{2xt} + f_{2xxxx} = 0, \quad (2.25)$$

onde escolhemos a solução trivial $f_2 = 0$.

O segundo termo da soma (2.23) leva à identidade nula,

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = D_x D_t(f_1 \cdot f_1) + D_x^4(f_1 \cdot f_1) = 0, \quad (2.26)$$

que nos leva a

$$\begin{aligned} D_x D_t(f_1 \cdot f_1) &= 2(f_{1xt}f_1 - f_{1x}f_{1t}) = 2(-k_1^4 f_1 + k_1^4 f_1) = 0, \\ D_x^4(f_1 \cdot f_1) &= f_{1xxxx}f_1 - 4f_{1xxx}f_{1x} + 3f_{1xx}^2 = k_1^4 f_1^2 - 4k_1^4 f_1^2 + 3(k_1^2 f_1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para os coeficientes de ϵ^3 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)[(1 \cdot f_3) + (f_1 \cdot f_2)] = 0, \quad (2.28)$$

uma vez que $f_2 = 0$, nos resta,

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_3) = f_{3xt} + f_{3xxxx} = 0, \quad (2.29)$$

onde escolhemos a solução trivial $f_3 = 0$.

Logo, a solução 1-sóliton da equação KdV é dada por

$$u = -2[\ln(1 + \rho_1)]_{xx}, \quad \rho_1 = e^{k_1 x - k_1^3 t}, \quad \epsilon^1 = 1 \quad (2.30)$$

Graficamente, a solução 1-sóliton da equação KdV será,

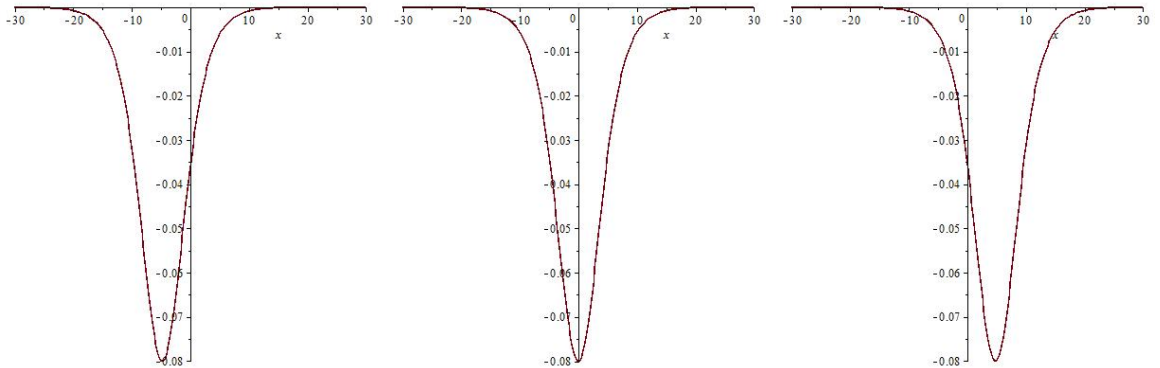


Figura 2.1: Gráfico de $u(x, t)$, com $k_1 = 0.4$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

2.1.2 Solução 2- sólitons

Para os coeficientes de ϵ^0 , encontramos a identidade nula $0 = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_1) = D_x D_t(1 \cdot f_1) + D_x^4(1 \cdot f_1) = 0, \quad (2.31)$$

que implica

$$f_{1xt} + f_{1xxxx} = 0, \quad (2.32)$$

integra-se a eq.(2.32) em relação a x , levando as constantes de integração a zero,

$$f_{1t} + f_{1xxx} = 0. \quad (2.33)$$

Supondo agora que

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_i = e^{k_i x + \omega_i t}, \quad i = 1, 2. \quad (2.34)$$

obtem,

$$f_{1t} = \omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2 \quad e \quad f_{1xxx} = k_1^3 \rho_1 + k_2^3 \rho_2. \quad (2.35)$$

Substitui-se a eq.(2.35) na eq.(2.33), portanto,

$$(\omega_1 + k_1^3) \rho_1 + (\omega_2 + k_2^3) \rho_2 = 0, \quad (2.36)$$

se, e somente se

$$\omega_i = -k_i^3, \quad i = 1, 2. \quad (2.37)$$

Logo,

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad i = 1, 2. \quad (2.38)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)[2(1 \cdot f_2) + (f_1 \cdot f_1)] = 2D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_2) + D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = 0. \quad (2.39)$$

Neste caso, resolve-se inicialmente o segundo termo da soma, na eq.(2.39),

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = D_x D_t(f_1 \cdot f_1) + D_x^4(f_1 \cdot f_1), \quad (2.40)$$

que dará

$$\begin{aligned} D_x D_t(f_1 \cdot f_1) &= 2(-k_1^4 - k_2^4 + k_1 k_2^3 + k_2 k_1^3) \rho_1 \rho_2 \\ D_x^4(f_1 \cdot f_1) &= 2[k_1^4 + k_2^4 - 4(k_1 k_2^3 + k_2 k_1^3) + 6k_1^2 k_2^2] \rho_1 \rho_2, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde,

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = 2[6k_1^2 k_2^2 - 3(k_1 k_2^3 + k_2 k_1^3)] \rho_1 \rho_2. \quad (2.42)$$

Por simplicidade faça,

$$A = 6k_1^2 k_2^2 - 3(k_1 k_2^3 + k_2 k_1^3) = -3k_1 k_2 (k_1 - k_2)^2 \quad (2.43)$$

voltando ao primeiro termo da soma, na eq.(2.39),

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_2) = f_{2xt} + f_{2xxxx}, \quad (2.44)$$

implica que

$$D_x(D_t + D_x^3)[2(1 \cdot f_2) + (f_1 \cdot f_1)] = 2A \rho_1 \rho_2 + 2(f_{2xt} + f_{2xxxx}) = 0. \quad (2.45)$$

Suponha,

$$f_2 = A_{12} \rho_1 \rho_2 \quad (2.46)$$

onde

$$f_{2xt} = -(k_1 + k_2)(k_1^3 + k_2^3) f_2 \quad e \quad f_{2xxxx} = (k_1 + k_2)^4 f_2, \quad (2.47)$$

substitui-se a eq.(2.47) na eq.(2.45),

$$A \rho_1 \rho_2 - (k_1 + k_2)(k_1^3 + k_2^3) A_{12} \rho_1 \rho_2 + (k_1 + k_2)^4 A_{12} \rho_1 \rho_2 = 0. \quad (2.48)$$

Resolve-se para A_{12} ,

$$A_{12} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2. \quad (2.49)$$

Logo,

$$f_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \rho_1 \rho_2, \quad \rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad i = 1, 2. \quad (2.50)$$

Para os coeficientes de ϵ^3 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)[(1 \cdot f_3) + (f_1 \cdot f_2)] = D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_3) + D_x(D_t + D_x^3)[(f_1 \cdot f_2)] = 0, \quad (2.51)$$

resolvendo o segundo termo da soma, na eq.(2.51),

$$D_x(D_t + D_x^3)[(f_1 \cdot f_2)] = D_x D_t(f_1 \cdot f_2) + D_x^4(f_1 \cdot f_2) = 0, \quad (2.52)$$

onde

$$\begin{aligned} D_x D_t(f_1 \cdot f_2) &= f_{1xt} f_2 - f_{1x} f_{2t} - f_{1t} f_{2x} + f_1 f_{2xt}, \\ D_x^4(f_1 \cdot f_2) &= f_{1xxxx} f_2 - 4f_{1xxx} f_{2x} + 6f_{1xx} f_{2xx} - 4f_{1x} f_{2xxx} + f_1 f_{2xxxx}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

assim, temos

$$\begin{aligned} D_x D_t(f_1 \cdot f_2) &= f_2(-k_2^4 \rho_1 - k_1^4 \rho_2), \\ D_x^4(f_1 \cdot f_2) &= f_2(k_2^4 \rho_1 + k_1^4 \rho_2), \end{aligned} \quad (2.54)$$

portanto

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_2) = 0. \quad (2.55)$$

Nos resta o primeiro termo da soma, na eq.(2.51),

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_3) = f_{3xt} + f_{3xxxx} = 0, \quad (2.56)$$

onde escolhemos a solução trivial $f_3 = 0$.

Logo, a solução 2 - sóltions da KdV será dada por

$$u = -2 \ln \left[1 + \rho_1 + \rho_2 + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \rho_1 \rho_2 \right]_{xx}, \quad \rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad \epsilon = 1. \quad (2.57)$$

Graficamente, a solução 2-sólitons da equação KdV será,

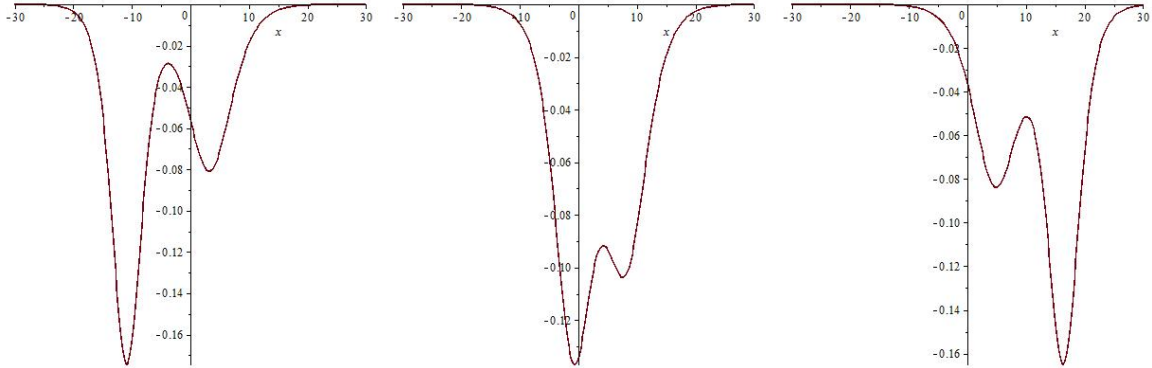


Figura 2.2: Gráfico de $u(x, t)$, com $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

2.1.3 Solução 3- sólitons

Para os coeficientes de ϵ^0 , encontramos a identidade nula $0 = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_1) = D_x D_t(1 \cdot f_1) + D_x^4(1 \cdot f_1) = 0, \quad (2.58)$$

que implica em

$$f_{1xt} + f_{1xxxx} = 0, \quad (2.59)$$

integra-se em relação a x , levando as constantes de integração a zero,

$$f_{1t} + f_{1xxx} = 0. \quad (2.60)$$

Supondo agora que

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad \rho_i = e^{k_i x + \omega_i t}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.61)$$

obtem

$$f_{1t} = \omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2 + \omega_3 \rho_3 \quad e \quad f_{1xxx} = k_1^3 \rho_1 + k_2^3 \rho_2 + k_3^3 \rho_3. \quad (2.62)$$

Substitui-se a eq.(2.62) na eq.(2.60),

$$(\omega_1 + k_1^3) \rho_1 + (\omega_2 + k_2^3) \rho_2 + (\omega_3 + k_3^3) \rho_3 = 0 \quad (2.63)$$

se, e somente se

$$\omega_i = -k_i^3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.64)$$

Portanto,

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad \rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.65)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)[2(1 \cdot f_2) + (f_1 \cdot f_1)] = 2D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_2) + D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = 0. \quad (2.66)$$

Inicialmente resolve-se o segundo termo da soma, na eq.(2.66):

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = D_x D_t(f_1 \cdot f_1) + D_x^4(f_1 \cdot f_1), \quad (2.67)$$

que dará

$$D_x D_t(f_1 \cdot f_1) = 2 \sum_{i < j = 1}^3 (-k_i^4 - k_j^4 + k_i k_j^3 + k_i^3 k_j) \rho_i \rho_j, \quad (2.68)$$

e

$$D_x^4(f_1 \cdot f_1) = 2 \sum_{i < j = 1}^3 [k_i^4 + k_j^4 - 4(k_i k_j^3 + k_i^3 k_j) + 6k_i^2 k_j^2] \rho_i \rho_j. \quad (2.69)$$

Somando as eq.(2.68) e (2.69), obtém-se

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) = 2 \sum_{i < j=1}^3 [6k_i^2 k_j^2 - 3(k_i k_j^3 + k_i^3 k_j)] \rho_i \rho_j. \quad (2.70)$$

Por simplicidade faça

$$B_{ij} = 6k_i^2 k_j^2 - 3(k_i k_j^3 + k_i^3 k_j) = -3k_i k_j (k_i - k_j)^2. \quad (2.71)$$

Voltando ao primeiro termo da soma, na eq.(2.66)

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_2) = f_{2xt} + f_{2xxxx}. \quad (2.72)$$

Substitui-se os resultados das eq.(2.70), (2.71) e (2.72), na eq.(2.66), obtém-se

$$\sum_{i < j=1}^3 B_{ij} \rho_i \rho_j + (f_{2xt} + f_{2xxxx}) = 0. \quad (2.73)$$

Suponha

$$f_2 = \sum_{i < j=1}^3 A_{ij} \rho_i \rho_j, \quad (2.74)$$

onde

$$f_{2xt} = - \sum_{i < j=1}^3 (k_i + k_j)(k_i^3 + k_j^3) A_{ij} \rho_i \rho_j, \quad e \quad f_{2xxxx} = \sum_{i < j=1}^3 (k_i + k_j)^4 A_{ij} \rho_i \rho_j. \quad (2.75)$$

Substitui-se as eq.(2.71) e (2.75) na eq.(2.73) e resolve-se para A_{ij} , levando em

$$A_{ij} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2. \quad (2.76)$$

Logo,

$$f_2 = \sum_{i < j=1}^3 \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 \rho_i \rho_j, \quad \rho_{i,j} = k_{i,j} x - k_{i,j}^3 t. \quad (2.77)$$

Para os coeficientes de ϵ^3 ,

$$D_x(D_t + D_x^3)[(1 \cdot f_3) + (f_1 \cdot f_2)] = D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_3) + D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_2) = 0, \quad (2.78)$$

resolve-se o segundo termo da soma, na eq.(2.78),

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_2) = D_x D_t(f_1 \cdot f_2) + D_x^4(f_1 \cdot f_2) = 0, \quad (2.79)$$

onde

$$D_x D_t(f_1 \cdot f_2) = f_{1xt} f_2 - f_{1x} f_{2t} - f_{1t} f_{2x} + f_1 f_{2xt}, \quad (2.80)$$

$$D_x^4(f_1 \cdot f_2) = f_{1xxxx} f_2 - 4f_{1xxx} f_{2x} + 6f_{1xx} f_{2xx} - 4f_{1x} f_{2xxx} + f_1 f_{2xxxx},$$

assim,

$$\begin{aligned} D_x D_t(f_1 \cdot f_2) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j<l=1}^3 A_{jl} [-k_i^4 + k_i(k_j^3 + k_l^3) + k_i^3(k_j + k_l) - (k_j^3 + k_l^3)(k_j + k_l)] \rho_i \rho_j \rho_l \\ &= -\sum_{i<j<l=1}^3 A_{jl} [k_i^3 - (k_j^3 + k_l^3)] [k_i - (k_j + k_l)] \rho_i \rho_j \rho_l \end{aligned} \quad (2.81)$$

e

$$\begin{aligned} D_x^4(f_1 \cdot f_2) &= \sum_{l>j>i=1}^3 A_{jl} [k_i^4 - 4k_i^3(k_j + k_l) + 6k_i^2(k_j + k_l)^2 - 4k_i(k_j + k_l)^3 + (k_j + k_l)^4] \rho_i \rho_j \rho_l \\ &= \sum_{i<j<l=1}^3 A_{jl} [k_i - (k_j + k_l)]^4 \rho_i \rho_j \rho_l. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Somando as eq.(2.81) e (2.82),

$$D_x(D_t + D_x^3)[(f_1 \cdot f_2)] = \sum_{i<j<l=1}^3 B_{ijl} \rho_i \rho_j \rho_l, \quad (2.83)$$

onde

$$B_{ijl} = A_{jl} [k_i - (k_j + k_l)] \{ [k_i - (k_j + k_l)]^3 - [k_i^3 - (k_j^3 + k_l^3)] \}, \quad (2.84)$$

usando a eq.(2.83) na eq.(2.78),

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 \cdot f_3) + \sum_{i<j<l=1}^3 B_{ijl} \rho_i \rho_j \rho_l = 0, \quad (2.85)$$

assim,

$$f_{3xt} + f_{3xxxx} + \sum_{i<j<l=1}^3 B_{ijl}\rho_i\rho_j\rho_l = 0, \quad (2.86)$$

supondo

$$f_3 = \sum_{i<j<l=1}^3 A_{ijl}\rho_i\rho_j\rho_l, \quad (2.87)$$

onde

$$f_{3xt} = -f_3(k_i + k_j + k_l)(k_i^3 + k_j^3 + k_l^3) \quad e \quad f_{3xxxx} = f_3(k_i + k_j + k_l)^4, \quad (2.88)$$

usando as eq.(2.84) e (2.88) na eq.(2.86), resolvendo para A_{ijl} ,

$$A_{ijl} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 \left(\frac{k_i - k_l}{k_i + k_l} \right)^2 \left(\frac{k_j - k_l}{k_j + k_l} \right)^2. \quad (2.89)$$

Logo, a solução 3-sólitons da KdV é dada por

$$u = -2 \ln \left[1 + \sum_{i=1}^3 \rho_i + \sum_{j>i=1}^3 \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 \rho_i \rho_j + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \left(\frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3} \right)^2 \left(\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} \right)^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \right]_{xx}, \quad (2.90)$$

onde, $\epsilon = 1$. Graficamente, a solução 3-sólitons da equação KdV será,

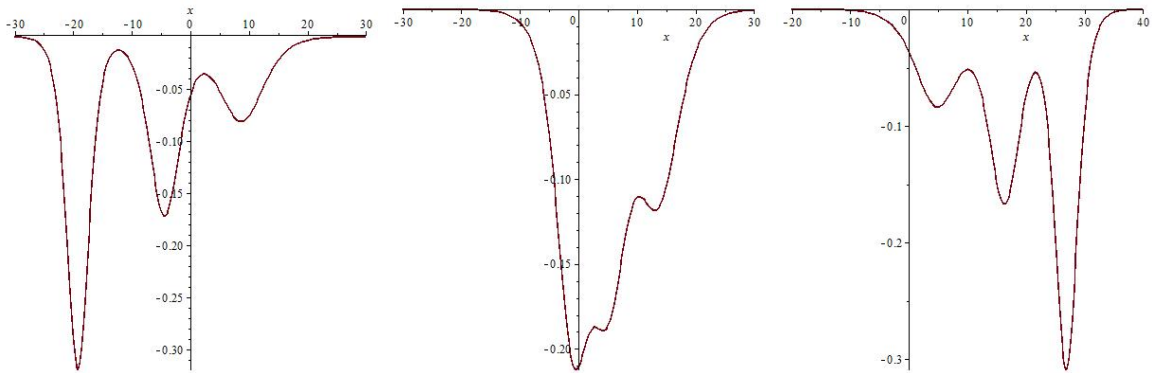


Figura 2.3: Gráfico de $u(x, t)$, com $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$ e $k_3 = 0.8$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

2.2 Equação Korteweg e de Vries modificada (mKdV)

Dada a equação mKdV

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.91)$$

deseja-se encontrar a solução 3-sólitons dessa equação usando o Método Bilinear de Hirota, que consiste em encontrar sua forma bilinear através da seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} u &= i\phi_x; \\ u_t &= i\phi_{xt}; \\ u_x &= i\phi_{xx}; \\ u_{xxx} &= i\phi_{xxx}; \\ i &= \sqrt{-1}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Usando a mudança de variável das eq.(2.92) na eq.(2.91), integra-se a equação resultante em relação a x levando as constantes de integração a zero,

$$\phi_t - 2\phi_x^3 + \phi_{xxx} = 0. \quad (2.93)$$

Fazendo a transformação bi-logarítmica:

$$\begin{aligned} \phi &= \ln \left(\frac{f}{g} \right); \\ \phi_t &= \frac{D_t(f \cdot g)}{fg} = \left[\ln \frac{f}{g} \right]_t; \\ \phi_x &= \frac{D_x(f \cdot g)}{fg} = \left[\ln \frac{f}{g} \right]_x; \\ \phi_{xxx} &= \frac{D_x^3(f \cdot g)}{fg} - 3 \frac{D_x^2(f \cdot g)}{fg} \frac{D_x(f \cdot g)}{fg} + 2 \left(\frac{D_x(f \cdot g)}{fg} \right)^3 = \left[\ln \frac{f}{g} \right]_{xxx}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

aplicando as transformações da eq.(2.94) na eq.(2.93):

$$\frac{D_t(f \cdot g)}{fg} + \frac{D_x^3(f \cdot g)}{fg} - 3 \frac{D_x^2(f \cdot g)}{fg} \frac{D_x(f \cdot g)}{fg} = 0, \quad (2.95)$$

tomando,

$$\frac{D_x^2(f \cdot g)}{fg} = \lambda, \quad (2.96)$$

dá

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)(f \cdot g) &= 3\lambda D_x(f \cdot g) \\ D_x^2(f \cdot g) &= \lambda fg. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Considera-se $\lambda = 0$, pois estamos trabalhando com ondas solitárias, caso contrário, u não tenderia a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)(f \cdot g) &= 0 \\ D_x^2(f \cdot g) &= 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

por sua vez, f e g podem ser escritas de acordo com a expansão:

$$\begin{aligned} f &= 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots = \sum_{i=0}^N \epsilon^i f_i, & f_0 &= 1; \\ g &= 1 + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \epsilon^3 g_3 + \dots = \sum_{i=0}^N \epsilon^i g_i, & g_0 &= 1. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Despreze os termos de ordem maior do que 3, pois estamos interessados na solução 3-sólitons,

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3) \cdot (1 + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \epsilon^3 g_3) \\ &= (1 \cdot 1) + \epsilon[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] + \epsilon^2[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] + \\ &\quad \epsilon^3[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)]. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Aplicando os operadores de Hirota separadamente aos coeficientes das potências de ϵ :

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &: (D_t + D_x^3)(1 \cdot 1) = 0; \\ &\quad D_x^2(1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^1 &: (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] = 0; \\ &\quad D_x^2[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] = 0; \\ \epsilon^2 &: (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] = 0; \\ &\quad D_x^2[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] = 0; \\ \epsilon^3 &: (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] = 0; \\ &\quad D_x^2[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] = 0. \end{aligned} \quad (2.101)$$

2.2.1 Solução 1- sóliton

Para os coeficientes de ϵ^0 , temos a identidade nula, $0 = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] &= f_{1t} + f_{1xxx} - (g_{1t} + g_{1xxx}) = 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] &= f_{1xx} + g_{1xx} = 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Supondo que $f_1 = A_1\rho_1$, $g_1 = B_1\rho_1$, onde $\rho_1 = e^{k_1x + \omega_1t}$ e A_1 , B_1 são constantes,

$$\begin{aligned} f_{1t} &= \omega_1 A_1 \rho_1, & g_{1t} &= \omega_1 B_1 \rho_1, \\ f_{1x} &= k_1 A_1 \rho_1, & g_{1x} &= k_1 B_1 \rho_1, \\ f_{1xx} &= k_1^2 A_1 \rho_1, & g_{1xx} &= k_1^2 B_1 \rho_1, \\ f_{1xxx} &= k_1^3 A_1 \rho_1, & g_{1xxx} &= k_1^3 B_1 \rho_1, \end{aligned} \quad (2.103)$$

substitui-se as eq.(2.103) na eq.(2.102),

$$(A_1 - B_1)\rho_1(\omega_1 + k_1^3) = 0 \quad e \quad (A_1 + B_1)\rho_1 k_1^2 = 0, \quad (2.104)$$

que implica

$$\omega_1 = -k_1^3 \quad e \quad A_1 = -B_1. \quad (2.105)$$

Portanto,

$$f_1 = -g_1 = A_1\rho_1, \quad \rho_1 = e^{k_1x - k_1^3t}. \quad (2.106)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] &= 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Começando por $(f_1 \cdot g_1)$, usando as eq.(2.103), (2.105) e (2.106),

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)(f_1 \cdot g_1) &= (f_{1t}g_1 - f_1g_{1t}) + (f_{1xxx}g_1 - 3f_{1xx}g_{1x} + 3f_{1x}g_{1xx} - f_1g_{1xxx}) = 0 \\ D_x^2(f_1 \cdot g_1) &= f_{1xx}g_1 - 2f_{1x}g_{1x} + f_1g_{1xx} = 0, \end{aligned} \quad (2.108)$$

nos resta

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot 1)] &= f_{2t} + f_{2xxx} - (g_{2t} + g_{2xxx}) = 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot 1)] &= f_{2xx} + g_{2xx} = 0, \end{aligned} \quad (2.109)$$

onde escolhemos a solução trivial $f_2 = g_2 = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^3 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] &= 0 \\ D_x^2[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

onde $f_2 = g_2 = 0$, restando

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_3) + (f_3 \cdot 1)] &= f_{3t} + f_{3xxx} - (g_{3t} + g_{3xxx}) = 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_3) + (f_3 \cdot 1)] &= f_{3xx} + g_{3xx} = 0, \end{aligned} \quad (2.111)$$

portanto a solução trivial $f_3 = g_3 = 0$.

Logo, a solução 1-sóliton para a equação $mKdV$ é dada por

$$u = i \left[\ln \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1} \right]_x, \quad \rho_1 = e^{k_1 x - k_1^3 t}, \quad \epsilon = 1, \quad A_1 = 1. \quad (2.112)$$

Graficamente, a solução 1-sóliton da equação $mKdV$ será,

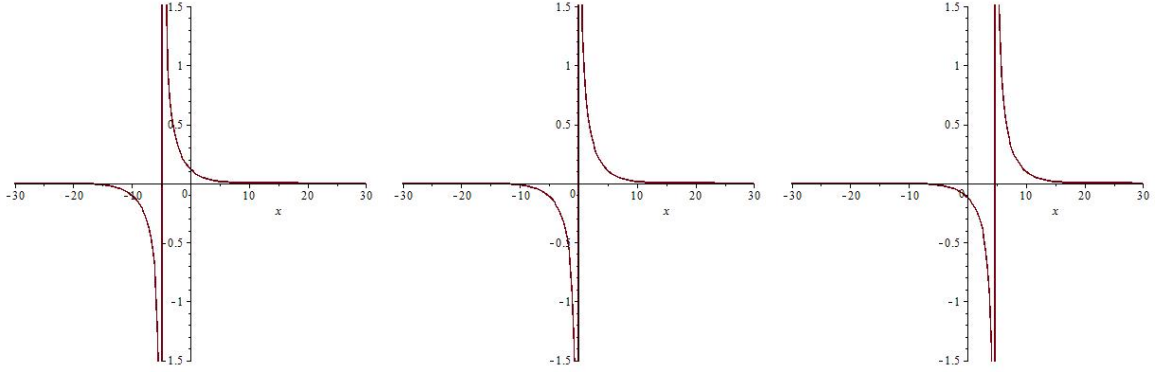


Figura 2.4: Gráfico de $-iu(x,t)$, com $k_1 = 0.4$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

2.2.2 Solução 2- sólitons

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] &= (f_{1t} + f_{1xxx}) - (g_{1t} + g_{1xxx}) = 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] &= f_{1xx} + g_{1xx} = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Supondo que $f_1 = A_1(\rho_1 + \rho_2)$, $g_1 = B_1(\rho_1 + \rho_2)$, onde $\rho_i = e^{k_i x + \omega_i t}$, $i = 1, 2$ e A_1, B_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} f_{1t} &= A_1(\omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2); & g_{1t} &= B_1(\omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2); \\ f_{1x} &= A_1(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2); & g_{1x} &= B_1(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2); \\ f_{1xx} &= A_1(k_1^2 \rho_1 + k_2^2 \rho_2); & g_{1xx} &= B_1(k_1^2 \rho_1 + k_2^2 \rho_2); \\ f_{1xxx} &= A_1(k_1^3 \rho_1 + k_2^3 \rho_2); & g_{1xxx} &= B_1(k_1^3 \rho_1 + k_2^3 \rho_2). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Substituindo os termos das eq.(2.114) na eq.(2.113),

$$\begin{aligned} (A_1 - B_1)[\rho_1(\omega_1 + k_1^3) + \rho_2(\omega_2 + k_2^3)] &= 0, \\ (A_1 + B_1)[k_1^2 \rho_1 + k_2^2 \rho_2] &= 0, \end{aligned} \quad (2.115)$$

onde

$$\omega_i = -k_i^3, \quad i = 1, 2, \quad \Rightarrow A_1 = -B_1. \quad (2.116)$$

Portanto,

$$f_1 = -g_1 = A_1(\rho_1 + \rho_2), \quad \rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad i = 1, 2. \quad (2.117)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] &= 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.118)$$

usando as eq.(2.114), (2.116) e (2.117), na eq.(2.118), para $(f_1 \cdot g_1)$,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)(f_1 \cdot g_1) &= (f_{1t}g_1 - f_1g_{1t}) + (f_{1xxx}g_1 - 3f_{1xx}g_{1x} + 3f_{1x}g_{1xx} - f_1g_{1xxx}) = 0, \\ D_x^2(f_1 \cdot g_1) &= f_{1xx}g_1 - 2f_{1x}g_{1x} + f_1g_{1xx} = -2A_1^2(k_1 - k_2)^2\rho_1\rho_2, \end{aligned} \quad (2.119)$$

logo:

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot 1)] &= f_{2t} + f_{2xxx} - (g_{2t} + g_{2xxx}) = 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot 1)] &= f_{2xx} + g_{2xx} = 2A_1^2(k_1 - k_2)^2\rho_1\rho_2. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Suponha

$$f_2 = A_2\rho_1\rho_2, \quad g_2 = B_2\rho_1\rho_2, \quad (2.121)$$

em que, $\rho_i = e^{k_i x + \omega_i t}$, $i = 1, 2$, temos:

$$\begin{aligned} f_{2t} &= A_2(-k_1^3 - k_2^3)\rho_1\rho_2; \\ f_{2x} &= A_2(k_1 + k_2)\rho_1\rho_2; \\ f_{2xx} &= A_2(k_1 + k_2)^2\rho_1\rho_2; \\ f_{2xxx} &= A_2(k_1 + k_2)^3\rho_1\rho_2; \end{aligned} \quad (2.122)$$

para g_2 , basta trocar A_2 por B_2 . Substituindo os termos das eq.(2.122) nas eq.(2.120),

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot 1)] &= (A_2 - B_2)[(-k_1^3 - k_2^3) + (k_1 + k_2)^3]\rho_1\rho_2 \\ &= (A_2 - B_2)3k_1k_2(k_1 + k_2)\rho_1\rho_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

isso implica que $A_2 = B_2$, portanto $f_2 = g_2$. Usando as eq.(2.121) e (2.122) na segunda eq.(2.120), resolvendo para A_2 ,

$$A_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 A_1^2. \quad (2.124)$$

Logo,

$$f_2 = g_2 = A_1^2 \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \rho_1 \rho_2. \quad (2.125)$$

Para os coeficientes de ϵ^3 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] &= 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.126)$$

onde,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1)] &= 0, \\ D_x^2[(f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.127)$$

se anulam usando as eq.(2.125) e (2.117)

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_3) + (f_3 \cdot 1)] &= (f_{3t} + f_{3xxx}) - (g_{3t} + g_{3xxx}) = 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_3) + (f_3 \cdot 1)] &= f_{3xx} + g_{3xx} = 0, \end{aligned} \quad (2.128)$$

restando assim, escolher a solução trivial $f_3 = g_3 = 0$.

Logo, a solução 2-sólitons para a equação $mKdV$ é dada por

$$u = i \left[\ln \frac{1 + \sum_{i=1}^2 \rho_i + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \rho_1 \rho_2}{1 - \sum_{i=1}^2 \rho_i + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \rho_1 \rho_2} \right]_x, \quad \rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad \epsilon = 1, \quad A_1 = 1. \quad (2.129)$$

Graficamente, a solução 2-sólitons da equação $mKdV$ será,

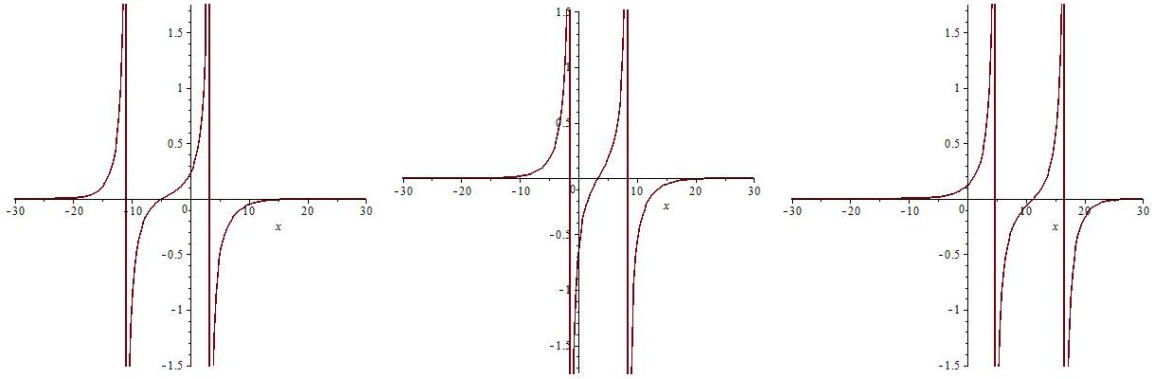


Figura 2.5: Gráfico de $-iu(x, t)$, com $k_1 = 0.4$ e $k_2 = 0.6$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

2.2.3 Solução 3-sólitons

Para os coeficientes de ϵ^0 , temos a identidade nula $0 = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] &= (f_{1t} + f_{1xxx}) - (g_{1t} + g_{1xxx}) = 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_1) + (f_1 \cdot 1)] &= f_{1xx} + g_{1xx} = 0. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Suponha

$$f_1 = A_1(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \quad e \quad g_1 = B_1(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), \quad (2.131)$$

onde $\rho_i = e^{k_i x + \omega_i t}$, $i = 1, 2, 3$ e A_1, B_1 constantes, temos:

$$\begin{aligned} f_{1t} &= A_1(\omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2 + \omega_3 \rho_3); & g_{1t} &= B_1(\omega_1 \rho_1 + \omega_2 \rho_2 + \omega_3 \rho_3); \\ f_{1x} &= A_1(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2 + k_3 \rho_3); & g_{1x} &= B_1(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2 + k_3 \rho_3); \\ f_{1xx} &= A_1(k_1^2 \rho_1 + k_2^2 \rho_2 + k_3^2 \rho_3); & g_{1xx} &= B_1(k_1^2 \rho_1 + k_2^2 \rho_2 + k_3^2 \rho_3); \\ f_{1xxx} &= A_1(k_1^3 \rho_1 + k_2^3 \rho_2 + k_3^3 \rho_3); & g_{1xxx} &= B_1(k_1^3 \rho_1 + k_2^3 \rho_2 + k_3^3 \rho_3); \end{aligned} \quad (2.132)$$

substitui-se as eq.(2.132) na eq.(2.130),

$$\begin{aligned} (A_1 - B_1)[\rho_1(\omega_1 + k_1^3) + \rho_2(\omega_2 + k_2^3) + \rho_3(\omega_3 + k_3^3)] &= 0, \\ (A_1 + B_1)[k_1^2 \rho_1 + k_2^2 \rho_2 + k_3^2 \rho_3] &= 0, \end{aligned} \quad (2.133)$$

onde

$$\omega_i = -k_i^3, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow A_1 = -B_1. \quad (2.134)$$

Portanto,

$$f_1 = -g_1 = A_1(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), \quad \rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.135)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] &= 0, \\ D_x^2[(1 \cdot g_2) + (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot 1)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Usando as eq.(2.132), (2.134) e (2.135) na eq.(2.136) para $(f_1 \cdot g_1)$,

$$(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot g_1) = (f_{1t}g_1 - f_1g_{1t}) + (f_{1xxx}g_1 - 3f_{1xx}g_{1x} + 3f_{1x}g_{1xx} - f_1g_{1xxx}) = 0, \quad (2.137)$$

e

$$\begin{aligned} D_x^2(f_1 \cdot g_1) &= f_{1xx}g_1 - 2f_{1x}g_{1x} + f_1g_{1xx} \\ &= -2A_1^2[(k_1 - k_2)^2\rho_1\rho_2 + (k_1 - k_3)^2\rho_1\rho_3 + (k_2 - k_3)^2\rho_2\rho_3], \end{aligned} \quad (2.138)$$

devemos satisfazer

$$(D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot 1)] = (f_{2t} + f_{2xxx}) - (g_{2t} + g_{2xxx}) = 0 \quad (2.139)$$

e

$$\begin{aligned} D_x^2[(1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot 1)] &= f_{2xx} + g_{2xx} \\ &= 2A_1^2[(k_1 - k_2)^2\rho_1\rho_2 + (k_1 - k_3)^2\rho_1\rho_3 + (k_2 - k_3)^2\rho_2\rho_3]. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Suponha

$$f_2 = A_{12}\rho_1\rho_2 + A_{13}\rho_1\rho_3 + A_{23}\rho_2\rho_3 \quad e \quad g_2 = B_{12}\rho_1\rho_2 + B_{13}\rho_1\rho_3 + B_{23}\rho_2\rho_3, \quad (2.141)$$

onde $\rho_i = e^{k_i x + \omega_i t}$, com $i = 1, 2, 3$, temos que:

$$\begin{aligned} f_{2t} &= A_{12}(-k_1^3 - k_2^3)\rho_1\rho_2 + A_{13}(-k_1^3 - k_3^3)\rho_1\rho_3 + A_{23}(-k_2^3 - k_3^3)\rho_2\rho_3; \\ f_{2x} &= A_{12}(k_1 + k_2)\rho_1\rho_2 + A_{13}(k_1 + k_3)\rho_1\rho_3 + A_{23}(k_2 + k_3)\rho_2\rho_3; \\ f_{2xx} &= A_{12}(k_1 + k_2)^2\rho_1\rho_2 + A_{13}(k_1 + k_3)^2\rho_1\rho_3 + A_{23}(k_2 + k_3)^2\rho_2\rho_3; \\ f_{2xxx} &= A_{12}(k_1 + k_2)^3\rho_1\rho_2 + A_{13}(k_1 + k_3)^3\rho_1\rho_3 + A_{23}(k_2 + k_3)^3\rho_2\rho_3; \end{aligned} \quad (2.142)$$

para g_2 , substitui-se A_{ij} por B_{ij} , com $i < j = 1, 2, 3$. Substituindo as eq.(2.142) na eq.(2.139):

$$\begin{aligned} (A_{12} - B_{12})[(-k_1^3 - k_2^3) + (k_1 + k_2)^3]\rho_1\rho_2 &= (A_{12} - B_{12})3k_1k_2(k_1 + k_2)\rho_1\rho_2 = 0; \\ (A_{13} - B_{13})[(-k_1^3 - k_3^3) + (k_1 + k_3)^3]\rho_1\rho_3 &= (A_{13} - B_{13})3k_1k_3(k_1 + k_3)\rho_1\rho_3 = 0; \\ (A_{23} - B_{23})[(-k_2^3 - k_3^3) + (k_2 + k_3)^3]\rho_2\rho_3 &= (A_{23} - B_{23})3k_2k_3(k_2 + k_3)\rho_2\rho_3 = 0; \end{aligned} \quad (2.143)$$

portanto

$$A_{ij} = B_{ij} \quad \Rightarrow \quad f_2 = g_2. \quad (2.144)$$

Usando a eq.(2.144) na eq.(2.140), resolvendo para A_{ij} podemos dizer que

$$A_{ij} = A_1^2 \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2, \quad \text{com } i < j = 1, 2, 3. \quad (2.145)$$

Logo,

$$f_2 = g_2 = A_1^2 \sum_{i < j=1}^3 \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 \rho_i \rho_j. \quad (2.146)$$

Para os coeficientes de ϵ^3 ,

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] &= 0 \\ D_x^2[(1 \cdot g_3) + (f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1) + (f_3 \cdot 1)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Usando as eq.(2.135) e (2.146) na eq. (2.147) e, em $(f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1)$ implica em

$$(D_t + D_x^3)[(f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1)] = 2A_1\rho_1\rho_2\rho_3 \sum_{i < j} \sum_{l=1}^3 A_{ij} \{ (k_i^3 + k_j^3 - k_l^3) - [(k_i + k_j) - k_l]^3 \}, \quad (2.148)$$

e

$$D_x^2[(f_1 \cdot g_2) + (f_2 \cdot g_1)] = 0, \quad (2.149)$$

que dá

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)[(1 \cdot g_3) + (f_3 \cdot 1)] &= (f_{3t} + f_{3xxx}) - (g_{3t} + g_{3xxx}) = -eq. (2.148) \\ D_x^2[(1 \cdot g_3) + (f_3 \cdot 1)] &= f_{3xx} + g_{3xx} = 0, \end{aligned} \quad (2.150)$$

logo, a segunda equação de (2.150), satisfaz apenas $f_3 = -g_3$.

Suponha

$$f_3 = A_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3, \quad (2.151)$$

temos:

$$\begin{aligned} f_{3t} &= A_3(-k_1^3 - k_2^3 - k_3^3) \rho_1 \rho_2 \rho_3; \\ f_{3x} &= A_3(k_1 + k_2 + k_3) \rho_1 \rho_2 \rho_3; \\ f_{3xx} &= A_3(k_1^3 + k_2^3 + k_3^3) \rho_1 \rho_2 \rho_3; \\ f_{3xxx} &= A_3(k_1 + k_2 + k_3)^3 \rho_1 \rho_2 \rho_3; \end{aligned} \quad (2.152)$$

aplicando as eq.(2.152) na eq.(2.150), usando a eq.(2.147) e resolvendo A_3 ,

$$A_3 = A_1 \frac{\sum_{i<j} \sum_{l=1}^3 A_{ij} \{ (k_i^3 + k_j^3 - k_l^3) - [(k_i + k_j) - k_l]^3 \}}{-(k_1^3 + k_2^3 + k_3^3) + (k_1 + k_2 + k_3)^3}, \quad (2.153)$$

chegamos em:

$$A_3 = A_1^3 \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \left(\frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3} \right)^2 \left(\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} \right)^2. \quad (2.154)$$

Logo, a solução 3-sólitons para a equação $mKdV$ é dada por

$$u = i \left[\ln \frac{1 + \sum_{i=1}^3 \rho_i + \sum_{i<j=1}^3 \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 \rho_i \rho_j + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \left(\frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3} \right)^2 \left(\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} \right)^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{1 - \sum_{i=1}^3 \rho_i + \sum_{i<j=1}^3 \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 \rho_i \rho_j - \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \left(\frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3} \right)^2 \left(\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} \right)^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3} \right]_x \quad (2.155)$$

onde $\rho_i = e^{k_i x - k_i^3 t}$ e $\rho_j = e^{k_j x - k_j^3 t}$, $A_1 = 1$, $\epsilon = 1$.

Graficamente, a solução 3-sólitons da equação $mKdV$ será,

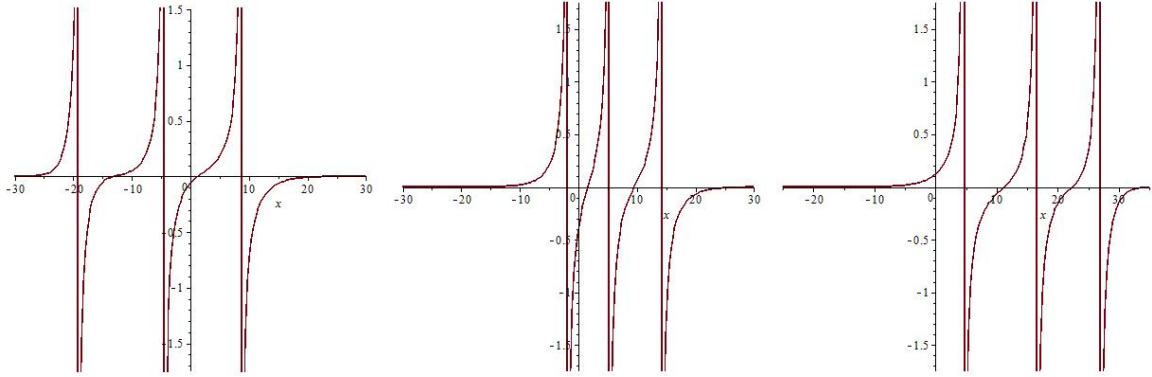


Figura 2.6: Gráfico de $-iu(x, t)$, com $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$ e $k_3 = 0.8$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

2.3 Equação Não-Linear Schrödinger (NLS)

Na sua forma clássica, a equação Não-Linear Schrödinger descreve diversos fenômenos físicos tais como: propagação de um pulso de calor em um sólido; fenômenos de auto-destruição em óptica não linear, entre outros(ver [37, 38]). Outra boa aplicação é a de ondas transversais em águas rasas(ver [37, 39]). Em 1971, uma solução exata e analítica foi obtida, por Zakharov e Shabat(ver [37–39]), para essa equação, que é dada por

$$iu_t + u_{xx} + \delta|u|^2u = 0, \quad \delta = \pm 2 \quad (2.156)$$

Deseja-se encontrar a solução 3-sólitons dessa equação usando o Método Bilinear de Hirota, para isso encontraremos sua forma bilinear através da seguinte mudança de variável

$$u = \frac{g}{f}, \quad (2.157)$$

onde f é uma função real. Substitui-se a eq.(2.157) na eq.(2.156)

$$\frac{iD_t + D_x^2}{f^2}(g \cdot f) - \frac{g}{f} \frac{D_x^2(f \cdot f)}{f^2} + \delta \left| \frac{g}{f} \right|^2 \frac{g}{f} = 0, \quad (2.158)$$

organizando os termos

$$\begin{aligned} (iD_t + D_x^2)(g \cdot f) &= \lambda g f, \\ D_x^2(f \cdot f) - \delta |g|^2 &= \lambda f^2. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Expandindo f e g , em potências de um parâmetro ϵ ,

$$\begin{aligned} f &= 1 + f_2\epsilon^2 + f_4\epsilon^4 + f_6\epsilon^6 + \dots = \sum_{n=0}^N f_{2n}\epsilon^{2n}, & f_0 &= 1, \\ g &= g_1\epsilon + g_3\epsilon^3 + g_5\epsilon^5 + \dots = \sum_{n=1}^N g_{2n-1}\epsilon^{2n-1}, \end{aligned} \quad (2.160)$$

2.3.1 Solução 1- sóliton

Façamos $N = 1$ na eq.(2.160) e aplique na eq.(2.159) para encontrar a solução 1-sóliton,

$$\begin{aligned} (iD_t + D_x^2)[(g_1 \cdot 1)\epsilon + (g_1 \cdot f_2)\epsilon^3] &= \lambda g f, \\ D_x^2[(1 \cdot 1) + [(f_2 \cdot 1) + (1 \cdot f_2)]\epsilon^2 + (f_2 \cdot f_2)\epsilon^4] - \delta|g_1\epsilon|^2 &= \lambda f^2. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Resolvendo separadamente os coeficientes das potências de ϵ :

Para os coeficientes de ϵ^0 , $\lambda = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$(iD_t + D_x^2)(g_1 \cdot 1) = ig_{1t} + g_{1xx} = 0. \quad (2.162)$$

Supondo

$$g_1 = \rho_1 = e^{k_1x + \omega_1t}, \quad (2.163)$$

onde

$$\begin{aligned} ig_{1t} &= i\omega_1\rho_1, \\ g_{1xx} &= k_1^2\rho_1. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Aplicando a eq.(2.164) na eq.(2.162),

$$(i\omega_1 + k_1^2)\rho_1 = 0, \quad (2.165)$$

que implica em

$$\omega_1 = ik_1^2. \quad (2.166)$$

Logo,

$$g_1 = \rho_1 = e^{k_1 x + i k_1^2 t}. \quad (2.167)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$2D_x^2(f_2 \cdot 1) - \delta |g_1|^2 = 0, \quad (2.168)$$

que nos dá

$$2f_{2xx} - \delta \rho_1 \bar{\rho}_1 = 0, \quad (2.169)$$

logo,

$$\begin{aligned} f_{2xx} &= \frac{\delta}{2} \rho_1 \bar{\rho}_1, \\ f_2 &= A_{1\bar{1}} \rho_1 \bar{\rho}_1, \end{aligned} \quad (2.170)$$

em que

$$A_{1\bar{1}} = \frac{\delta}{2} \frac{1}{(k_1 + \bar{k}_1)^2}, \quad (2.171)$$

e k_1 é um número complexo e \bar{k}_1 é o seu complexo conjugado, portanto,

$$f_2 = \frac{\delta}{2} \frac{1}{(k_1 + \bar{k}_1)^2} \rho_1 \bar{\rho}_1. \quad (2.172)$$

Assim, a solução 1-sóliton da eq. NLS

$$u = \frac{\rho_1}{1 + \frac{\delta}{2} \frac{\rho_1 \bar{\rho}_1}{(k_1 + \bar{k}_1)^2}}, \quad \epsilon = 1. \quad (2.173)$$

2.3.2 Soluções 2- sólitons

Façamos $N = 2$ na eq.(2.160) e aplique na eq.(2.159) para encontrar a solução 2-sólitons,

$$\begin{aligned} (iD_t + D_x^2)\{(g_1 \cdot 1)\epsilon + [(g_1 \cdot f_2) + (g_3 \cdot 1)]\epsilon^3 + [(g_1 \cdot f_4) + (g_3 \cdot f_2)]\epsilon^5 + (g_3 \cdot f_4)\epsilon^7\} &= \lambda g f, \\ D_x^2\{(1 \cdot 1) + [(f_2 \cdot 1) + (1 \cdot f_2)]\epsilon^2 + [(f_4 \cdot 1) + (1 \cdot f_4) + (f_2 \cdot f_2)]\epsilon^4 + [(f_2 \cdot f_4) + (f_4 \cdot f_2)]\epsilon^6 + \\ (f_4 \cdot f_4)\epsilon^8\} + \delta[g_1 \bar{g}_1 \epsilon^2 + (g_1 \bar{g}_3 + g_3 \bar{g}_1)\epsilon^4 + g_3 \bar{g}_3 \epsilon^6] &= \lambda f^2. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Resolvendo separadamente os coeficientes das potências de ϵ :

Para os coeficientes de ϵ^0 , teremos $\lambda = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 ,

$$(iD_t + D_x^2)(g_1 \cdot 1) = ig_{1t} + g_{1xx} = 0. \quad (2.175)$$

Suponha

$$g_1 = \rho_1 + \rho_2 = e^{k_1x + \omega_1t} + e^{k_2x + \omega_2t}, \quad (2.176)$$

teremos

$$ig_{1t} = i\omega_1\rho_1 + i\omega_2\rho_2 \quad e \quad g_{1xx} = k_1^2\rho_1 + k_2^2\rho_2. \quad (2.177)$$

Aplicando a eq.(2.177) na eq.(2.175),

$$(i\omega_1 + k_1^2)\rho_1 + (i\omega_2 + k_2^2)\rho_2 = 0, \quad (2.178)$$

isso implica que

$$\omega_i = ik_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.179)$$

Logo,

$$g_1 = \rho_1 + \rho_2 = \sum_{i=1}^2 e^{k_ix + ik_i^2t}. \quad (2.180)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 ,

$$2D_x^2(f_2 \cdot 1) - \delta \bar{g}_1 g_1 = 0, \quad (2.181)$$

que nos dá

$$f_{2xx} = \frac{\delta}{2} \sum_{i,j=1}^2 \rho_i \bar{\rho}_j, \quad (2.182)$$

portanto,

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^2 A_{i\bar{j}} \rho_i \bar{\rho}_j, \quad (2.183)$$

onde,

$$A_{i\bar{j}} = \frac{\delta}{2} \frac{1}{(k_i + \bar{k}_j)^2}, \quad (2.184)$$

assim encontramos

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\delta}{2} \frac{\rho_i \bar{\rho}_j}{(k_i + \bar{k}_j)^2}. \quad (2.185)$$

Para os coeficientes de ϵ^3 ,

$$(iD_t + D_x^2)[(g_1 \cdot f_2) + (g_3 \cdot 1)] = 0, \quad (2.186)$$

nos leva a

$$i(g_{1t}f_2 - g_1f_{2t}) + (g_{1xx}f_2 - 2g_{1x}f_{2x} + g_1f_{2xx}) = -(ig_{3t} + g_{3xx}). \quad (2.187)$$

Suponha,

$$g_3 = \sum_{i,j,l=1}^2 A_{ij\bar{l}} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l, \quad (2.188)$$

onde

$$ig_{3t} = i(ik_i^2 + ik_j^2 - i\bar{k}_l^2)g_3 \quad e \quad g_{3xx} = (k_i + k_j + \bar{k}_l)^2 g_3 \quad (2.189)$$

usando as eq.(2.180), (2.185) e (2.188) na eq.(2.187),

$$\{i[ik_i^2 - (ik_j^2 - i\bar{k}_l^2)] + [k_i^2 - 2k_i(k_j + \bar{k}_l) + (k_j + \bar{k}_l)^2]\} A_{ij\bar{l}} = -A_{ij\bar{l}} \{i(ik_i^2 + ik_j^2 - i\bar{k}_l^2) + (k_i + k_j + \bar{k}_l)^2\}, \quad (2.190)$$

organizandoos termos e resolvendo para $A_{ij\bar{l}}$,

$$A_{ij\bar{l}} = \frac{\delta}{2} \frac{(k_i - k_j)}{(k_i + \bar{k}_l)(k_j + \bar{k}_l)^2}, \quad (2.191)$$

$$g_3 = \sum_{i,j,l=1}^2 \frac{\delta}{2} \frac{(k_i - k_j)}{(k_i + \bar{k}_l)(k_j + \bar{k}_l)^2} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l. \quad (2.192)$$

Para os coeficiente de ϵ^4 ,

$$D_x^2[2(f_4 \cdot 1) + (f_2 \cdot f_2)] - \delta(\bar{g}_1 g_3 + \bar{g}_3 g_1) = 0, \quad (2.193)$$

teremos,

$$f_{4xx} = \frac{\delta}{2} (\bar{g}_1 g_3 + \bar{g}_3 g_1) - (f_2 f_{2xx} - f_{2x}^2), \quad (2.194)$$

onde,

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &= \sum_{m=1}^2 \bar{\rho}_m, \\ \bar{g}_3 &= \sum_{i,j,l=1}^2 \frac{\delta}{2} \frac{(\bar{k}_i - \bar{k}_j)}{(k_i + \bar{k}_l)(k_j + \bar{k}_l)^2} \bar{\rho}_i \bar{\rho}_j \rho_l.\end{aligned}\quad (2.195)$$

Supondo,

$$f_4 = \sum_{i,j,l,m=1}^2 A_{ij\bar{l}\bar{m}} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l \bar{\rho}_m, \quad (2.196)$$

usando as eq.(2.180), (2.185), (2.192), (2.195) e (2.196), na eq.(2.194), e fazendo simplificações, obtemos

$$A_{ij\bar{l}\bar{m}} = \frac{\delta^2}{2^2} \frac{(k_i - k_j)^2 (\bar{k}_l - \bar{k}_m)^2}{(k_i + \bar{k}_l)^2 (k_i + \bar{k}_m)^2 (k_j + \bar{k}_l)^2 (k_j + \bar{k}_m)^2}. \quad (2.197)$$

Logo, a solução 2-sólitons da eq.NLS será

$$u = \frac{\sum_{i=1}^2 \rho_i + \sum_{i<j} \sum_{l=1}^2 A_{ij\bar{l}} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l}{1 + \sum_{i,j=1}^2 A_{ij\bar{j}} \rho_i \bar{\rho}_j + \sum_{i<j} \sum_{l<m} A_{ij\bar{l}\bar{m}} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l \bar{\rho}_m}, \quad \epsilon = 1, \quad (2.198)$$

onde, $\rho_i = e^{k_i x + i k_i^2 t}$, $\rho_j = e^{k_j x + i k_j^2 t}$, $\bar{\rho}_l = e^{\bar{k}_l x + i \bar{k}_l^2 t}$, $\bar{\rho}_m = e^{\bar{k}_m x + i \bar{k}_m^2 t}$,

$$A_{i\bar{j}} = \frac{\delta}{2} \frac{1}{(k_i + \bar{k}_j)^2}, \quad A_{i\bar{j}\bar{l}} = \frac{\delta}{2} \frac{(k_i - k_j)}{(k_i + \bar{k}_l)(k_j + \bar{k}_l)^2} \text{ e } A_{ij\bar{l}\bar{m}} = \frac{\delta^2}{2^2} \frac{(k_i - k_j)^2 (\bar{k}_l - \bar{k}_m)^2}{(k_i + \bar{k}_l)^2 (k_i + \bar{k}_m)^2 (k_j + \bar{k}_l)^2 (k_j + \bar{k}_m)^2}.$$

2.3.3 Solução 3- sólítos

Façamos $N = 3$ na eq.(2.160), aplique na eq.(2.159) e resolva separadamente os coeficientes das potências de ϵ para encontrar a solução 3-sólitons.

Para o coeficiente de ϵ^0 , $\lambda = 0$.

Para o coeficiente de ϵ^1 ,

$$(iD_t + D_x^2)(g_1 \cdot 1) = i g_{1t} + g_{1xx} = 0. \quad (2.199)$$

Suponha

$$g_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = e^{k_1x + \omega_1t} + e^{k_2x + \omega_2t} + e^{k_3x + \omega_3t}, \quad (2.200)$$

portanto,

$$\omega_i = ik_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.201)$$

Logo,

$$g_1 = \sum_{i=1}^3 \rho_i = \sum_{i=1}^3 e^{k_ix + ik_i^2t}. \quad (2.202)$$

Para o coeficiente de ϵ^2 ,

$$2D_x^2(f_2 \cdot 1) - \delta \bar{g}_1 g_1 = 0, \quad (2.203)$$

que nos dá

$$f_{2xx} = \frac{\delta}{2} \sum_{i,j=1}^3 \rho_i \bar{\rho}_j, \quad (2.204)$$

portanto,

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^3 A_{i\bar{j}} \rho_i \bar{\rho}_j, \quad (2.205)$$

onde, $A_{i\bar{j}} = \frac{\delta}{2} \frac{1}{(k_i + \bar{k}_j)^2}$, assim encontramos

$$f_2 = \frac{\delta}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\rho_i \bar{\rho}_j}{(k_i + \bar{k}_j)^2}. \quad (2.206)$$

Para o coeficiente de ϵ^3 ,

$$(iD_t + D_x^2)[(g_1 \cdot f_2) + (g_3 \cdot 1)] = 0, \quad (2.207)$$

nos dá

$$i(g_{1t}f_2 - g_1f_{2t}) + (g_{1xx}f_2 - g_1f_{2xx}) = -(ig_{3t} + g_{3xx}). \quad (2.208)$$

Suponha,

$$g_3 = \sum_{i,j,l=1}^3 A_{i\bar{j}l} \rho_i \bar{\rho}_j \bar{\rho}_l \quad (2.209)$$

usando as eq.(2.202), (2.206) e (2.209) na eq. (2.208),

$$g_3 = \frac{\delta}{2} \sum_{i < j} \sum_{l=1}^3 \frac{(k_i - k_j)}{(k_i + \bar{k}_l)(k_j + \bar{k}_l)^2} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l. \quad (2.210)$$

Para os coeficientes de ϵ^4 ,

$$D_x^2[2(f_4 \cdot 1) + (f_2 \cdot f_2)] - \delta(\bar{g}_1 g_3 + \bar{g}_3 g_1) = 0, \quad (2.211)$$

teremos,

$$f_{4xx} = \frac{\delta}{2}(\bar{g}_1 g_3 + \bar{g}_3 g_1) - (f_{2xx} f_2 - f_{2x}^2), \quad (2.212)$$

onde,

$$\bar{g}_1 = \sum_{m=1}^3 \bar{\rho}_m \quad e \quad \bar{g}_3 = \frac{\delta}{2} \sum_{i < j} \sum_{l=1}^3 \frac{(\bar{k}_i - \bar{k}_j)}{(\bar{k}_i + k_l)(\bar{k}_j + k_l)^2} \bar{\rho}_i \bar{\rho}_j \rho_l. \quad (2.213)$$

Supondo,

$$f_4 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=l+1}^3 A_{ij\bar{l}\bar{m}} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l \bar{\rho}_m, \quad (2.214)$$

usando as eq.(2.202), (2.206), (2.210), (2.213) e (2.214) na eq.(2.212), fazendo algumas simplificações, obtemos

$$A_{ij\bar{l}\bar{m}} = \frac{\delta^2}{2^2} \frac{(k_i - k_j)^2 (\bar{k}_l - \bar{k}_m)^2}{(k_i + \bar{k}_l)^2 (k_i + \bar{k}_m)^2 (k_j + \bar{k}_l)^2 (k_j + \bar{k}_m)^2}. \quad (2.215)$$

Logo, a solução 3-sólitons da eq.NLS será,

$$u = \frac{\sum_{i=1}^3 \rho_i + \sum_{i < j} \sum_{l=1}^3 A_{ij\bar{l}} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l + \sum_{i,j,l,m,n=1}^3 A_{ij\bar{l}\bar{m}\bar{n}} \rho_i \rho_j \rho_l \bar{\rho}_m \bar{\rho}_n}{1 + \sum_{i,j=1}^3 A_{i\bar{j}} \rho_i \bar{\rho}_j + \sum_{i < j} \sum_{j < m} A_{ij\bar{l}\bar{m}} \rho_i \rho_j \bar{\rho}_l \bar{\rho}_m + \sum_{i,j,l,m,n,p=1}^3 A_{ij\bar{l}\bar{m}\bar{n}\bar{p}} \rho_i \rho_j \rho_l \bar{\rho}_m \bar{\rho}_n \bar{\rho}_p} \quad (2.216)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{2}{\delta} (k_i - k_j)^2, \\ A_{i\bar{j}} &= \frac{\delta}{2} \frac{1}{(k_i + \bar{k}_j)^2}, \\ A_{\bar{i}\bar{j}} &= \frac{2}{\delta} (\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2, \end{aligned} \quad (2.217)$$

e

$$\begin{aligned}
A_{ij\bar{l}} &= (A_{ij})A_{i\bar{l}}A_{j\bar{l}}, \\
A_{ijl\bar{m}} &= (A_{ij\bar{l}})A_{i\bar{m}}A_{j\bar{m}}A_{l\bar{m}}, \\
A_{ijl\bar{m}\bar{n}} &= (A_{ijl\bar{m}})A_{i\bar{n}}A_{j\bar{n}}A_{l\bar{n}}A_{\bar{m}\bar{n}}, \\
A_{ijl\bar{m}\bar{n}\bar{p}} &= (A_{ijl\bar{m}\bar{n}})A_{i\bar{p}}A_{j\bar{p}}A_{l\bar{p}}A_{\bar{m}\bar{p}}A_{\bar{n}\bar{p}}.
\end{aligned} \tag{2.218}$$

A existência da solução 3-sólitons, sugere a integrabilidade dessas equações. Podemos provar que existem N - soluções sólitons, para estas equações, usando o método de indução matemática sobre N . Analisando as propriedades algébricas dessas equações, é possível verificar que ela é integrável e conserva grandezas, fisicamente, isso significa que ela conserva massa, energia e momento, dentre outras infinidades de leis de conservação [2, 3]. Observando o comportamento das soluções tipo sólitons, concluímos que ele se propaga a longas distâncias, sem alterar sua forma, a velocidade de propagação, é proporcional a amplitude da onda, conserva sua forma mesmo após interações com outros sólitons, ocorrendo apenas uma mudança de fase. Essas propriedades são de grande importância devido às várias aplicações que podem surgir.

Capítulo 3

EDPNL em (2+1)-Dimensões

Soluções sólitons para modelos integráveis de Equações Diferenciais Parciais Não-Lineares em (1+1)-dimensões, têm sido amplamente estudados e aplicados em diversas áreas da física, matemática, biologia e engenharia [3, 37, 41], conforme citado nos capítulos anteriores. Entretanto, para estes modelos em (2+1)-dimensões, estudos que garantam sua integrabilidade ainda não foram demonstrados. Neste capítulo introduzimos o estudo das soluções tipo sólitons para equações diferenciais não-lineares em (2+1)-dimensões, usando o Método Bilinear de Hirota. Trabalharemos nas próximas seções com as equações KP e KdV em (2+1)-dimensões, ambas generalizadas a partir da KdV em (1+1)-dimensões.

3.1 Equação Kadomtsev-Petviashvili ou (KP)

Dada a equação Kadomtsev-Petviashvili (ou equação KP)

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x \pm u_{yy} = 0, \quad (3.1)$$

através da mudança de variável

$$u = 2(\log f)_{xx}, \quad (3.2)$$

é possível obter a forma bilinear

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f \cdot f) = 0. \quad (3.3)$$

Deseja-se encontrar a solução 3-sólitons da eq.(3.1), entretanto é preciso resolver a eq.(3.3) com o auxílio da série de potências de ϵ tal como

$$f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots = \sum_{n=0}^N \epsilon^n f_n, \quad f_0 = 1, \quad (3.4)$$

onde ϵ é um parâmetro.

3.1.1 Solução 1-sóliton

Toma-se $N = 1$ na eq.(3.4), para obter a solução 1-sóliton da eq.(3.1), em seguida substitui-se na eq.(3.3),

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2][(1 + \epsilon f_1) \cdot (1 + \epsilon f_1)] = 0 \quad (3.5)$$

que equivale a

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2][(1 \cdot 1) + 2(f_1 \cdot 1)\epsilon + (f_1 \cdot f_1)\epsilon^2] = 0, \quad (3.6)$$

e resolve-se separadamente os coeficientes das potências de ϵ , que resulta no sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^1 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2]2(f_1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^2 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_1 \cdot f_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para a primeira eq.(3.7), $0 = 0$. Para a segunda eq.(3.7),

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_1 \cdot 1) = f_{1xt} + f_{1xxx} \pm f_{1yy} = 0. \quad (3.8)$$

Supondo

$$f_1 = \rho_1 = e^{k_1 x + l_1 y + \omega_1 t}, \quad (3.9)$$

substitui-se a eq.(3.9) na eq.(3.8), e para obter $(k_1 \omega_1 + k_1^4 \pm l_1^2) \rho_1 = 0$, onde $k_1 \omega_1 + k_1^4 \pm l_1^2 = 0$, resolve-se para ω_1 ,

$$\omega_1 = -\frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1}, \quad (3.10)$$

e conclui-se que

$$f_1 = \rho_1 = e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1} t}. \quad (3.11)$$

Para a terceira eq.(3.7), $0 = 0$. Portanto, para o caso $N = 1$, a solução 1-sóliton da equação KP será

$$u = 2 [\log(1 + \rho_1)]_{xx}, \quad \rho_1 = e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1} t}, \quad \epsilon = 1. \quad (3.12)$$

Graficamente, a solução 1-sóliton da equação KP será,

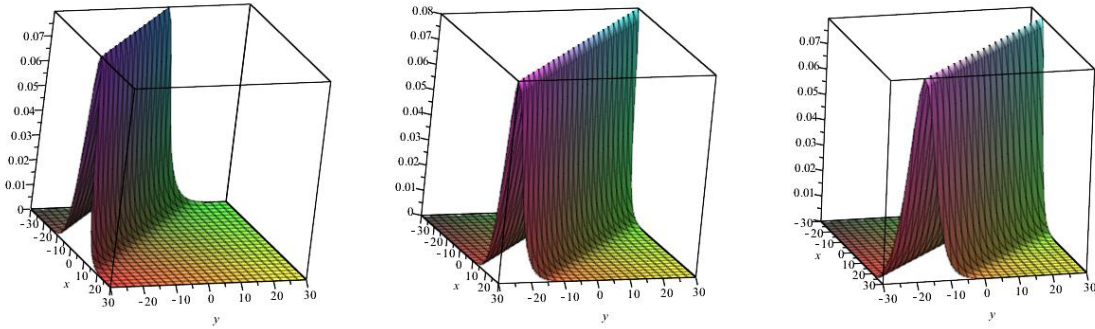


Figura 3.1: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $k_1 = 0.4$ e $l_1 = 0.4$ em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

3.1.2 Solução 2-sólitons

Toma-se $N = 2$ na eq.(3.4), para obter a solução 2-sólitons da eq.(3.1), em seguida substitui-se na eq.(3.3), análogo ao caso $N = 1$,

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2) \cdot (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2) = 0 \quad (3.13)$$

que equivale a

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2] \{(1 \cdot 1) + 2(f_1 \cdot 1)\epsilon + [2(f_2 \cdot 1) + (f_1 \cdot f_1)]\epsilon^2 + 2(f_1 \cdot f_2)\epsilon^3 + (f_2 \cdot f_2)\epsilon^4\} = 0, \quad (3.14)$$

e resolve-se separadamente os coeficientes das potências de ϵ , que resulta no sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^1 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2]2(f_1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^2 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2][2(f_2 \cdot 1) + (f_1 \cdot f_1)] = 0; \\ \epsilon^3 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_2 \cdot f_1) = 0; \\ \epsilon^4 : \quad & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_2 \cdot f_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para a primeira eq.(3.15), $0 = 0$. Para a segunda eq.(3.15),

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_1 \cdot 1) = f_{1xt} + f_{1xxx} \pm f_{1yy} = 0. \quad (3.16)$$

Supondo

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 = e^{k_1x+l_1y+\omega_1t} + e^{k_2x+l_2y+\omega_2t}, \quad (3.17)$$

substitui-se a eq.(3.17) na eq.(3.16), e para obter $(k_1\omega_1 + k_1^4 \pm l_1^2)\rho_1 + (k_2\omega_2 + k_2^4 \pm l_2^2)\rho_2 = 0$, onde $k_i\omega_i + k_i^4 \pm l_i^2 = 0$, com $i = 1, 2$, resolve-se para ω_i ,

$$\omega_i = -\frac{k_i^4 \pm l_i^2}{k_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.18)$$

e conclui-se que

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 = e^{k_1x+l_1y-\frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1}t} + e^{k_2x+l_2y-\frac{k_2^4 \pm l_2^2}{k_2}t}. \quad (3.19)$$

Para a terceira eq.(3.15),

$$(f_{2xt} + f_{2xxx} \pm f_{2yy}) + (f_{1xt}f_1 - f_{1x}f_{1t}) + (f_{1xxx}f_1 - 4f_{1xx}f_{1x} + 3f_{1xx}^2) \pm (f_{1yy}f_1 - f_{1y}^2) = 0, \quad (3.20)$$

aplica-se a eq.(3.19) na eq.(3.20), supondo $f_2 = A_{12}\rho_1\rho_2$, e resolve-se para A_{12} ,

$$A_{12} = \frac{\pm\left(\frac{l_1}{k_1} - \frac{l_2}{k_2}\right)^2 - 3(k_1 - k_2)^2}{\pm\left(\frac{l_1}{k_1} - \frac{l_2}{k_2}\right)^2 - 3(k_1 + k_2)^2}. \quad (3.21)$$

Logo, conclui-se que

$$f_2 = A_{12}\rho_1\rho_2, \quad (3.22)$$

onde A_{12} é conforme a eq.(3.21). Para as demais eq.(3.15), obtém-se $0=0$. Portanto, para o caso $N = 2$, a solução 2-sólitons da eq.(3.1) será

$$u = 2 [\log(1 + \rho_1 + \rho_2 + A_{12}\rho_1\rho_2)]_{xx}, \quad \epsilon = 1, \quad (3.23)$$

e A_{12} conforme a eq.(3.21). Graficamente, a solução 2-sólitons da equação *KP* será,

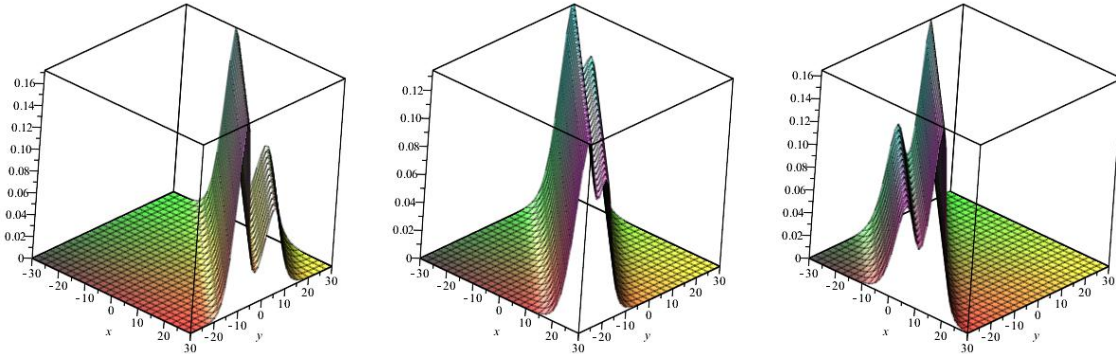


Figura 3.2: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$, $l_1 = 0.4$ e $l_2 = 0.6$ em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

3.1.3 Solução 3-sólitons

Toma-se $N = 3$ na eq.(3.4), para obter a solução 3-sólitons da eq.(3.1), em seguida substitui-se na eq.(3.3), análogo ao caso $N = 1, 2$,

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2][(1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3) \cdot (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3)] = 0, \quad (3.24)$$

que equivale a

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2]\{(1 \cdot 1) + 2(f_1 \cdot 1)\epsilon + [2(f_2 \cdot 1) + (f_1 \cdot f_1)]\epsilon^2 + 2[(f_1 \cdot f_2) + (f_3 \cdot 1)]\epsilon^3 + [(f_2 \cdot f_2) + 2(f_3 \cdot f_1)]\epsilon^4 + 2(f_2 \cdot f_3)\epsilon^5 + (f_3 \cdot f_3)\epsilon^6\} = 0, \quad (3.25)$$

e resolve-se separadamente os coeficientes das potências de ϵ , que resulta no sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^1 : & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^2 : & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2][2(f_2 \cdot 1) + (f_1 \cdot f_1)] = 0; \\ \epsilon^3 : & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2]2[(f_2 \cdot f_1)] + (f_3 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^4 : & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2][(f_2 \cdot f_2) + 2(f_3 \cdot f_1)] = 0; \\ \epsilon^5 : & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_3 \cdot f_2) = 0; \\ \epsilon^6 : & [D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_3 \cdot f_3) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para a primeira eq.(3.26), $0 = 0$.

Para a segunda eq.(3.26),

$$[D_x(D_t + D_x^3) \pm D_y^2](f_1 \cdot 1) = f_{1xt} + f_{1xxxx} \pm f_{1yy} = 0, \quad (3.27)$$

supondo

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = e^{k_1x+l_1y+\omega_1t} + e^{k_2x+l_2y+\omega_2t} + e^{k_3x+l_3y+\omega_3t}, \quad (3.28)$$

substitui-se a eq.(3.28) na eq.(3.27), e para obter $(k_1\omega_1 + k_1^4 \pm l_1^2)\rho_1 + (k_2\omega_2 + k_2^4 \pm l_2^2)\rho_2 + (k_3\omega_3 + k_3^4 \pm l_3^2)\rho_3 = 0$, onde é necessário que $k_i\omega_i + k_i^4 \pm l_i^2 = 0$, com $i = 1, 2, 3$, resolve-se para ω_i ,

$$\omega_i = -\frac{k_i^4 \pm l_i^2}{k_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.29)$$

e conclui-se que

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = e^{k_1x+l_1y-\frac{k_1^4+l_1^2}{k_1}t} + e^{k_2x+l_2y-\frac{k_2^4+l_2^2}{k_2}t} + e^{k_3x+l_3y-\frac{k_3^4+l_3^2}{k_3}t}. \quad (3.30)$$

Para a terceira eq.(3.26),

$$(f_{2xt} + f_{2xxxx} \pm f_{2yy}) + (f_{1xt}f_1 - f_{1x}f_{1t}) + (f_{1xxx}f_1 - 4f_{1xxx}f_{1x} + 3f_{1xx}^2) \pm (f_{1yy}f_1 - f_{1y}^2) = 0, \quad (3.31)$$

aplica-se a eq.(3.30) na eq.(3.31), supondo $f_2 = \sum_{i<j=1}^3 A_{ij}\rho_i\rho_j$, e resolve-se para A_{ij} ,

$$A_{ij} = \frac{\pm(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_j}{k_j})^2 - 3(k_i - k_j)^2}{\pm(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_j}{k_j})^2 - 3(k_i + k_j)^2}, \quad i < j. \quad (3.32)$$

Logo, conclui-se que

$$f_2 = \sum_{i<j=1}^3 A_{ij}\rho_i\rho_j, \quad (3.33)$$

onde A_{ij} é conforme a eq.(3.32). Para a quarta eq.(3.26),

$$(f_{3xt} + f_{3xxxx} \pm f_{3yy}) + (f_{2xt}f_1 - f_{2x}f_{1t} - f_{2t}f_{1x} + f_1f_{2xt}) + (f_{2xxxx}f_1 - 4f_{2xxx}f_{1x} + 6f_{2xx}f_{1xx} - 4f_{2xx}f_{1xxx} + f_2f_{1xxxx}) \pm (f_{2yy}f_1 - 2f_{2y}f_{1y} + f_2f_{1yy}) = 0, \quad (3.34)$$

aplica-se as eq.(3.30) e (3.33) na eq.(3.34), supondo $f_3 = A_{ijl}\rho_i\rho_j\rho_l$, e resolve-se para A_{ijl} ,

$$\begin{aligned} A_{ijl} &= A_{ij}A_{il}A_{jl} \\ &= \frac{\pm(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_j}{k_j})^2 - 3(k_i - k_j)^2 \pm(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_l}{k_l})^2 - 3(k_i - k_l)^2 \pm(\frac{l_j}{k_j} - \frac{l_l}{k_l})^2 - 3(k_j - k_l)^2}{\pm(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_j}{k_j})^2 - 3(k_i + k_j)^2 \pm(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_l}{k_l})^2 - 3(k_i + k_l)^2 \pm(\frac{l_j}{k_j} - \frac{l_l}{k_l})^2 - 3(k_j + k_l)^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Logo, conclui-se que

$$f_3 = A_{ijl}\rho_i\rho_j\rho_l, \quad (3.36)$$

onde A_{ijl} é conforme a eq.(3.35). Portanto, para o caso $N = 3$, a solução 3-sólitons da eq.(3.1) será

$$u = 2 \left[\log \left(1 + \sum_{i=1}^3 \rho_i + \sum_{i<j=1}^3 A_{ij}\rho_i\rho_j + A_{ijl}\rho_i\rho_j\rho_l \right) \right]_{xx}, \quad \epsilon = 1, \quad \rho = e^{kx+ly - \frac{k^4 \pm l^2}{k}t}, \quad (3.37)$$

onde A_{ij} conforme eq.(3.21), A_{ijl} conforme eq.(3.35). Gráficamente, a solução 3-sólitons da equação KP será,

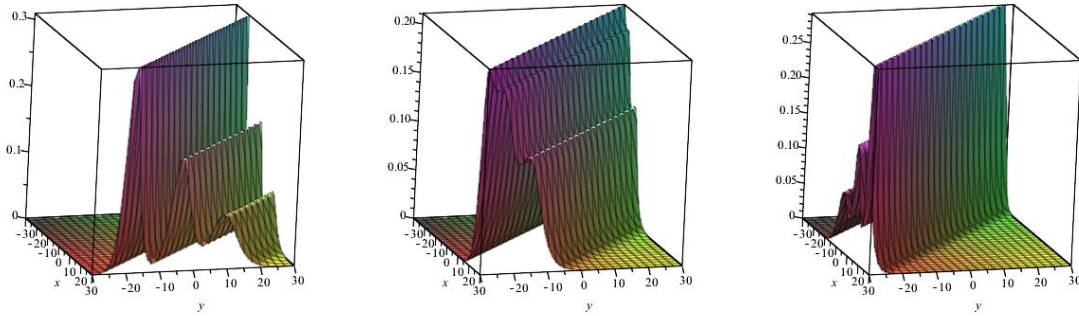


Figura 3.3: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$, $k_3 = 0.8$, $l_1 = 0.4$, $l_2 = 0.6$ e $l_3 = 0.8$ em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

3.2 Equação Korteweg-de Vries em (2+1) dimensões

Dada a equação Korteweg-de Vries em (2+1) dimensões

$$u_t + u_{xxx} = 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x, \quad (3.38)$$

através da mudança de variável

$$u = -2(\log f)_{xy}, \quad (3.39)$$

é possível obter a forma bilinear

$$[D_y(D_t + D_x^3)](f \cdot f) = 0. \quad (3.40)$$

Deseja-se encontrar a solução 3-sólitons da eq.(3.38), entretanto é preciso resolver a eq.(3.40) com o auxílio da expansão em potências de ϵ tal como

$$f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots = \sum_{n=0}^N \epsilon^n f_n, \quad (3.41)$$

onde ϵ é um parâmetro.

3.2.1 Solução 1-sóliton

Toma-se $N = 1$ na eq.(3.41), para obter a solução 1-sóliton da eq.(3.38), em seguida substitui-se na eq.(3.40)

$$[D_y(D_t + D_x^3)][(1 + \epsilon f_1) \cdot (1 + \epsilon f_1)] = 0 \quad (3.42)$$

que equivale a

$$[D_y(D_t + D_x^3)][(1 \cdot 1) + 2(f_1 \cdot 1)\epsilon + (f_1 \cdot f_1)\epsilon^2] = 0, \quad (3.43)$$

e resolve-se separadamente os coeficientes das potências de ϵ , que resulta no sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)](1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^1 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^2 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot f_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para a primeira eq.(3.44), temos a identidade nula $0 = 0$.

Para a segunda eq.(3.44),

$$[D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot 1) = f_{1yt} + f_{1yxxx} = 0. \quad (3.45)$$

Supondo

$$f_1 = \rho_1 = e^{k_1 x + l_1 y + \omega_1 t}, \quad (3.46)$$

substitui-se a eq.(3.46) na eq.(3.45), e para obter $(l_1 \omega_1 + l_1 k_1^3) \rho_1 = 0$, onde $l_1 \omega_1 + l_1 k_1^3 = 0$, resolve-se para ω_1 ,

$$\omega_1 = -k_1^3, \quad (3.47)$$

e conclui-se que

$$f_1 = \rho_1 = e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t}. \quad (3.48)$$

Para a terceira eq.(3.44), $0 = 0$. Portanto, para o caso $N = 1$, a solução 1-sóliton da eq.(3.38)

será

$$u = -2 \left[\log \left(1 + e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t} \right) \right]_{xy}, \quad \epsilon = 1. \quad (3.49)$$

Graficamente, a solução 1-sóliton da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

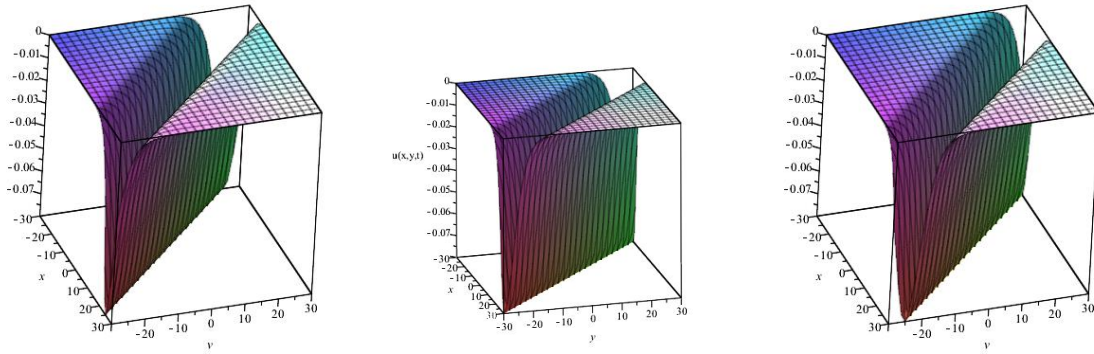


Figura 3.4: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $k_1 = 0.4$ e $l_1 = 0.4$ em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

3.2.2 Solução 2-sólitons

Toma-se $N = 2$ na eq.(3.41), para obter a solução 2-sólitons da eq.(3.38), em seguida substitui-se na eq.(3.40),

$$[D_y(D_t + D_x^3)][(1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2) \cdot (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2)] = 0 \quad (3.50)$$

que equivale a

$$[D_y(D_t + D_x^3)][(1 \cdot 1) + 2(f_1 \cdot 1)\epsilon + [(f_1 \cdot f_1) + 2(f_2 \cdot 1)]\epsilon^2 + 2(f_1 \cdot f_2)\epsilon^3 + (f_2 \cdot f_2)\epsilon^4] = 0, \quad (3.51)$$

e resolve-se separadamente os coeficientes das potências de ϵ , que resulta no sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\epsilon^0 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)](1 \cdot 1) = 0; \\
\epsilon^1 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot 1) = 0; \\
\epsilon^2 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)][(f_1 \cdot f_1) + 2(f_2 \cdot 1)] = 0; \\
\epsilon^3 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)](f_2 \cdot f_1) = 0; \\
\epsilon^4 : \quad & [D_y(D_t + D_x^3)](f_2 \cdot f_2) = 0.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Para a primeira eq.(3.52), temos a identidade nula $0 = 0$.

Para a segunda eq.(3.52),

$$[D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot 1) = f_{1yt} + f_{1yxxx} = 0. \tag{3.53}$$

Supondo

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 = e^{k_1x+l_1y+\omega_1t} + e^{k_2x+l_2y+\omega_2t}, \tag{3.54}$$

substitui-se a eq.(3.54) ns eq.(3.53), e para obter $(l_i\omega_i + l_ik_i^3)\rho_1 = 0$, com $i = 1, 2$, onde $l_i\omega_i + l_ik_i^3 = 0$, resolve-se para ω_i ,

$$\omega_i = -k_i^3, \tag{3.55}$$

e conclui-se que

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 = e^{k_1x+l_1y-k_1^3t} + e^{k_2x+l_2y-k_2^3t}. \tag{3.56}$$

Para a terceira eq.(3.55),

$$\begin{aligned}
[D_y(D_t + D_x^3)][(f_1 \cdot f_1) + 2(f_2 \cdot 1)] = & 2[(f_{1yt}f_1 - f_{1y}f_{1t}) + (f_{1yxxx}f_1 - 3f_{1yxx}f_{1x} + \\
& 3f_{1yx}f_{1xx} - f_{1y}f_{1xxx}) + (f_{2yt} + f_{2yxxx})] = 0,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

supondo

$$f_2 = A_{12}\rho_1\rho_2, \tag{3.58}$$

substitui-se as eq.(3.54) e (3.58) na eq.(3.57), e resolve-se para A_{12} ,

$$A_{12} = \frac{(l_1 - l_2)(k_1 - k_2)}{(l_1 + l_2)(k_1 + k_2)}, \quad (3.59)$$

e conclui-se que

$$f_2 = A_{12}\rho_1\rho_2, \quad (3.60)$$

com A_{12} conforme (3.59). Para as demais eq.(3.55), $0 = 0$. Portanto, para o caso $N = 2$, a solução 2-sólitons da eq.(3.38) será

$$u = -2 [\log (1 + \rho_1 + \rho_2 + A_{12}\rho_1\rho_2)]_{xy}, \quad \epsilon = 1, \quad (3.61)$$

e A_{12} conforme (3.59). Graficamente, a solução 2-sólitons da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

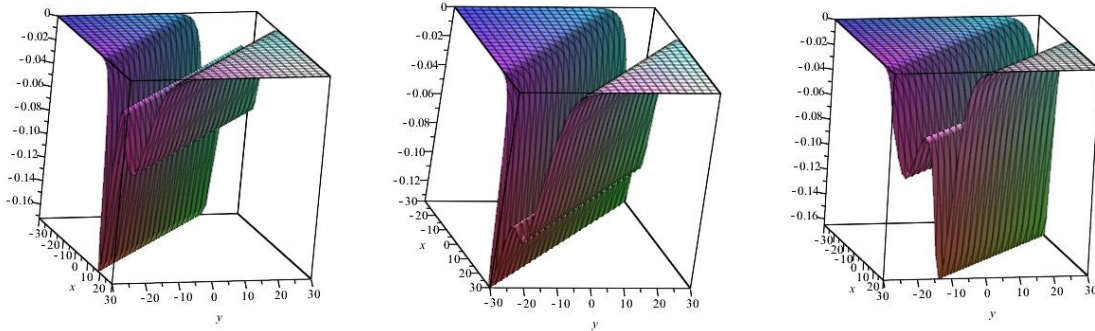


Figura 3.5: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$, $l_1 = 0.4$ e $l_2 = 0.6$ em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

3.2.3 Solução 3-sólitons

Toma-se $N = 3$ na eq.(3.41), para obter a solução 3-sólitons da eq.(3.38), em seguida substitui-se na eq.(3.40)

$$[D_y(D_t + D_x^3)][(1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3) \cdot (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3)] = 0, \quad (3.62)$$

que equivale a

$$\begin{aligned} & [D_y(D_t + D_x^3)]\{(1 \cdot 1) + 2(f_1 \cdot 1)\epsilon + [(f_1 \cdot f_1) + 2(f_2 \cdot 1)]\epsilon^2 + 2[(f_1 \cdot f_2) + (f_3 \cdot 1)]\epsilon^3 + \\ & [(f_2 \cdot f_2) + 2(f_3 \cdot f_1)]\epsilon^4 + 2(f_2 \cdot f_3)\epsilon^5 + (f_3 \cdot f_3)\epsilon^6\} = 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

e resolve-se separadamente os coeficientes das potências de ϵ , que resulta no sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : & \quad [D_y(D_t + D_x^3)](1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^1 : & \quad [D_y(D_t + D_x^3)]2(f_1 \cdot 1) = 0; \\ \epsilon^2 : & \quad [D_y(D_t + D_x^3)][(f_1 \cdot f_1) + 2(f_2 \cdot 1)] = 0; \\ \epsilon^3 : & \quad [D_y(D_t + D_x^3)]2[(f_1 \cdot f_2) + (f_3 \cdot 1)] = 0; \\ \epsilon^4 : & \quad [D_y(D_t + D_x^3)][(f_2 \cdot f_2) + 2(f_3 \cdot f_1)] = 0; \\ \epsilon^5 : & \quad [D_y(D_t + D_x^3)]2(f_2 \cdot f_3) = 0; \\ \epsilon^6 : & \quad [D_y(D_t + D_x^3)](f_3 \cdot f_3) = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para a primeira eq.(3.64), temos a identidade nula $0 = 0$.

Para a segunda eq.(3.64),

$$[D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot 1) = f_{1yt} + f_{1yxxx} = 0, \quad (3.65)$$

supondo

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = e^{k_1x+l_1y+\omega_1t} + e^{k_2x+l_2y+\omega_2t} + e^{k_3x+l_3y+\omega_3t}, \quad (3.66)$$

substitui-se a eq.(3.66) na eq.(3.65), e para obter $(l_i\omega_i + l_i k_i^3)\rho_1 = 0$, com $i = 1, 2, 3$, onde $l_i\omega_i + l_i k_i^3 = 0$, resolve-se para ω_i ,

$$\omega_i = -k_i^3, \quad (3.67)$$

e conclui-se que

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = e^{k_1x+l_1y-k_1^3t} + e^{k_2x+l_2y-k_2^3t} + e^{k_3x+l_3y-k_3^3t}. \quad (3.68)$$

Para a terceira eq.(3.64),

$$[D_y(D_t + D_x^3)][(f_1 \cdot f_1) + 2(f_2 \cdot 1) = 2[(f_{1yt}f_1 - f_{1y}f_{1t}) + (f_{1yxxx}f_1 - 3f_{1yxx}f_{1x} + 3f_{1yx}f_{1xx} - f_{1y}f_{1xxx}) + (f_{2yt} + f_{2yxxx})] = 0, \quad (3.69)$$

supondo

$$f_2 = \sum_{i < j=1}^3 A_{ij} \rho_i \rho_j, \quad (3.70)$$

substitui-se as eq.(3.66) e (3.70) na eq.(3.69), e resolve-se para A_{ij} ,

$$A_{ij} = \frac{(l_i - l_j)(k_i - k_j)}{(l_i + l_j)(k_i + k_j)}, \quad (3.71)$$

conclui-se que f_2 é dado pela eq.(3.70) com A_{ij} conforme eq.(3.71).

Para a quarta eq.(3.64),

$$[D_y(D_t + D_x^3)][(f_1 \cdot f_2) + (f_3 \cdot 1)] = [(f_{1yt}f_2 - f_{2y}f_{1t} - f_{2t}f_{1y} + f_2f_{1yt}) + (f_{1yxxx}f_2 - 3f_{1yxx}f_{2x} + 3f_{1yx}f_{2xx} - f_{1y}f_{2xxx}) + (f_{2yxxx}f_1 - 3f_{2yxx}f_{1x} + 3f_{2yx}f_{1xx} - f_{2y}f_{1xxx}) + (f_{3yt} + f_{3yxxx})] = 0, \quad (3.72)$$

supondo

$$f_3 = A_{123} \rho_1 \rho_2 \rho_3, \quad (3.73)$$

substitui-se as eq.(3.66), (3.70) e (3.73) na eq. (3.72), e resolve-se para A_{123} ,

$$\begin{aligned} A_{123} &= A_{12}A_{13}A_{23} \\ &= \frac{(l_1 - l_2)(k_1 - k_2)}{(l_1 + l_2)(k_1 + k_2)} \frac{(l_1 - l_3)(k_1 - k_3)}{(l_1 + l_3)(k_1 + k_3)} \frac{(l_2 - l_3)(k_2 - k_3)}{(l_2 + l_3)(k_2 + k_3)} \end{aligned} \quad (3.74)$$

e conclui-se que f_3 é dado pela eq.(3.73) com A_{123} conforme eq.(3.74).

Para as demais eq.(3.64), $0 = 0$.

Portanto, para o caso $N = 3$, a solução 3-sólitons da eq.(3.38) será

$$u = -2 \left[\log \left(1 + \sum_{i=1}^3 \rho_i + \sum_{i<j=1}^3 A_{ij} \rho_i \rho_j + A_{123} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \right) \right]_{xy}, \quad \epsilon = 1, \quad (3.75)$$

com A_{ij} conforme eq.(3.71) e A_{123} conforme eq.(3.74). Graficamente, a solução 3-sólitons da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

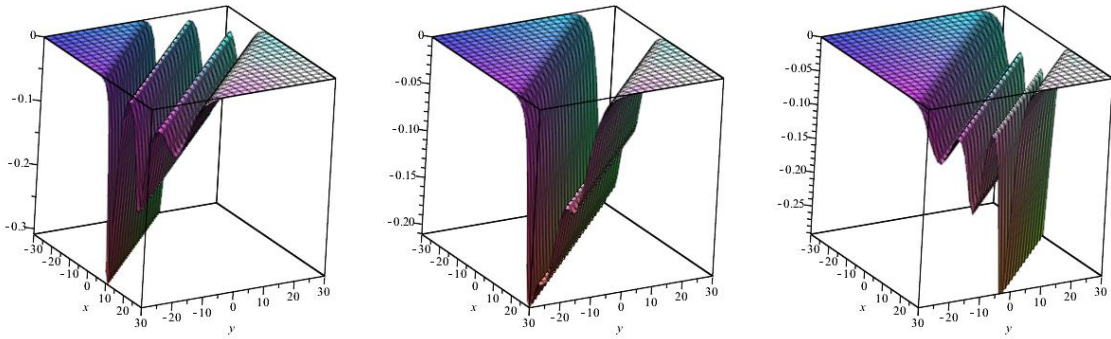


Figura 3.6: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$, $k_3 = 0.8$, $l_1 = 0.4$, $l_2 = 0.6$ e $l_3 = 0.8$ em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente.

A existência da solução 3-sólitons para as equações KP e KdV em (2+1)-dimensões, também sugere a integrabilidade, e podemos provar que existem N - soluções sólítions usando o método de indução matemática sobre N . Porém, não conseguimos verificar sua integrabilidade analisando as propriedades algébricas dessas equações. Observando o comportamento das soluções tipo sólítions em (2+1)- dimensões, concluímos que também se propagam a longas distâncias, sem alterar sua forma, a velocidade de propagação é proporcional a amplitude da onda e conservam sua forma mesmo após interações com outros sólítions, ocorrendo apenas uma mudança de fase. Estes sólítions, agora em (2+1)-dimensões, são ditos line-sólítions ou sólítions de linha. Eles decaem exponencialmente em toda região do espaço, exceto ao longo da linha onde estão ligados ($kx + ly + \omega t = 0$) [24].

No capítulo seguinte, ainda com o uso do Método Bilinear de Hirota, sobre a equação KdV em (2+1)-dimensões, encontraremos uma nova solução tipo sólítions, com estruturas coerentes localizadas, que decaem exponencialmente em todas as direções, conhecida por dro-mion [24-31].

Capítulo 4

Soluções Dromions da Equação Korteweg-de Vries em (2+1)-dimensões

Dromions são soluções de equações de evolução não-linear em (2+1)-dimensões, que possuem uma rica estrutura, pois são soluções exatas e exponencialmente localizadas que decaem em todas as direções [31]. O método de Hirota é utilizado para encontrar estas soluções, a equação KdV em (2+1)-dimensões será trabalhada, e a solução generalizada para multi-dromions será encontrada.

Dada a equação Korteweg-de Vries em (2+1)-dimensões [24, 25, 31]

$$u_t + u_{xxx} = 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x, \quad (4.1)$$

através da mudança de variável

$$u = -2(\log f)_{xy}, \quad (4.2)$$

é possível obter a forma bilinear

$$[D_y(D_t + D_x^3)](f \cdot f) = 0. \quad (4.3)$$

Expandindo f em potência de um parâmetro ϵ ,

$$f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots = \sum_{n=0}^N \epsilon^n f_n; \quad f_0 = 1. \quad (4.4)$$

Encontraremos a solução 1-sóliton-linha, e dela chegaremos na solução dromion.

4.1 Soluções Sóliton-Linha

Tome $N = 1$ na expansão (4.4), aplique na forma bilinear (4.3) e resolva separadamente os coeficientes das potências de ϵ , que resulta no sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : [D_y(D_t + D_x^3)](1 \cdot 1) &= 0; \\ \epsilon^1 : [D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot 1) &= 2(f_{1yt} + f_{1xxx}) = 0; \\ \epsilon^2 : [D_y(D_t + D_x^3)](f_1 \cdot f_1) &= 2[(f_{1t} + f_{1xxx})_y f_1 - 3(f_{1yxx} f_x - f_{1yx} f_{1xx}) - f_{1y}(f_{1t} + f_{1xxx})] = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para os coeficientes de ϵ^0 , temos a identidade nula $0 = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 , conforme feito,

$$f_1 = \rho_1 = e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t}. \quad (4.6)$$

Para os coeficientes de ϵ^2 , $0 = 0$.

Portanto, a solução 1-sóliton-linha da equação (4.1), será dada por

$$u = -2 \left[\log \left(1 + e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t} \right) \right]_{xy}, \quad \epsilon = 1. \quad (4.7)$$

Graficamente, a solução 1-sóliton-linha da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

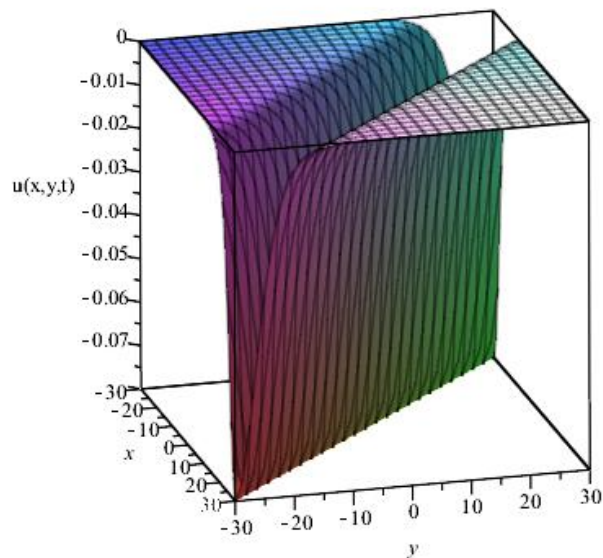


Figura 4.1: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $k_1 = 0.4$ e $l_1 = 0.4$ em $t = 0s$.

Como a escolha dos parâmetros k_1 e l_1 são arbitrárias, podemos fazer uma escolha mais geral sobre f , possibilitando obter uma classe de soluções exponencialmente localizadas.

4.2 Aplicações

Chamaremos de (M, N) -Dromions, as soluções u , onde M corresponde a quantidade de exponenciais, na solução, que dependem apenas de (x, t) e N a quantidade de exponenciais que dependam apenas de y .

4.2.1 (1,1)-Dromion

Suponha,

$$f = 1 + \rho_1 + \rho_2 + K_1 \rho_1 \rho_2, \quad K_1 > 0, \quad \rho_1 = e^{k_1 x - k_1^3 t}, \quad \rho_2 = e^{l_1 y}. \quad (4.8)$$

Uma vez que, dada a expansão (4.4), com $f_1 = \rho_1 + \rho_2$ e $f_2 = K_1\rho_1\rho_2$, satisfazem as eq.(4.5), pois:

$$\begin{aligned}
\epsilon^0 : [D_y(D_t + D_x^3)](1 \cdot 1) &= 0; \\
\epsilon^1 : [D_y(D_t + D_x^3)][(f_1 \cdot 1) + (1 \cdot f_1)] &= 2(f_{1yt} + f_{1xxx}) = 0; \\
\epsilon^2 : [D_y(D_t + D_x^3)][(f_2 \cdot 1) + (f_1 \cdot f_1) + (1 \cdot f_2)] &= 2(f_{2yt} + f_{2xxx}) + 2[(f_{1t} + f_{1xxx})_y f_1 \\
&\quad - 3(f_{1yxx} f_x - f_{1yx} f_{1xx}) - f_{1y}(f_{1t} + f_{1xxx})] = 0; \\
\epsilon^3 : [D_y(D_t + D_x^3)][(f_1 \cdot f_2) + (f_2 \cdot f_1)] &= 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para os coeficientes de ϵ^0 , temos a identidade nula $0 = 0$.

Para os coeficientes de ϵ^1 , temos que f_1 , dada por:

$$f_1 = \rho_1 + \rho_2 = e^{k_1 x - k_1^3 t} + e^{l_2 y}. \tag{4.10}$$

satisfaz a segunda eq.(4.9).

Para os coeficientes de ϵ^2 , dado f_1 conforme a eq.(4.10), teremos que:

$$f_2 = K_1\rho_1\rho_2 = K_1 e^{k_1 x - k_1^3 t} e^{l_2 y}, \quad K_1 > 0, \tag{4.11}$$

satisfaz a terceira eq.(4.9).

Para os coeficientes de ϵ^3 , dadas as eq.(4.10) e (4.11), teremos $0 = 0$.

Portanto, teremos que a solução (1,1)-dromion da eq.(4.1) será

$$u = \frac{2k_1 l_1 (1 - K_1) e^{k_1 x - k_1^3 t} e^{l_1 y}}{(1 + e^{k_1 x - k_1^3 t} + e^{l_1 y} + K_1 e^{k_1 x - k_1^3 t + l_1 y})^2}. \tag{4.12}$$

Graficamente, a solução (1,1)-dromion da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

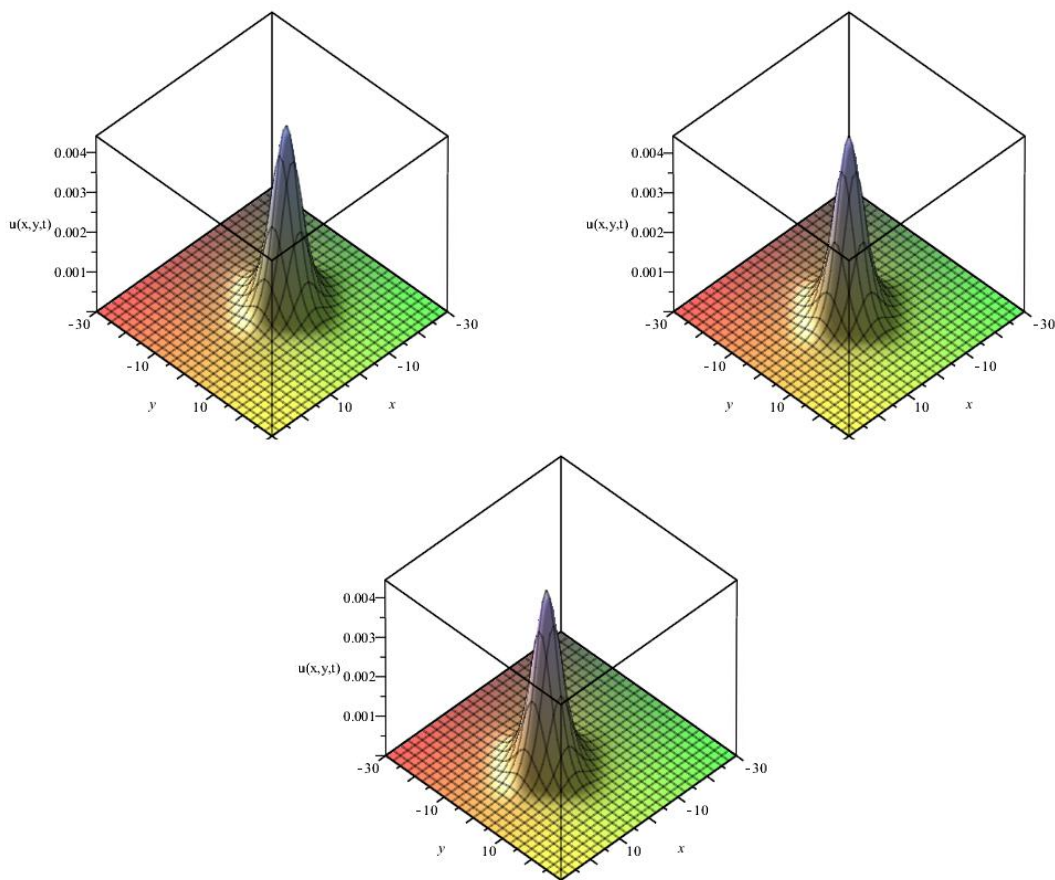


Figura 4.2: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $K_1 = 0.8$, $k_1 = 0.4$ e $l_1 = 0.4$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente. Obtemos a solução (1,1)-Dromion com amplitude de onda positiva, caminhando na direção x , sentido positivo, não havendo alterações na direção y no decorrer do tempo t .

4.2.2 (2,1)-Dromions

Para a solução (2,1)-Dromion da equação (4.1), suponha

$$f = 1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + K_1(\rho_1\rho_2 + \rho_3\rho_2), \quad (4.13)$$

$$K_1 > 0, \quad \rho_1 = e^{k_1x - k_1^3t}, \quad \rho_2 = e^{l_1y}, \quad \rho_3 = e^{k_2x - k_2^3t}.$$

Também é possível verificar que a eq.(4.13) satisfaz as eq.(4.9).

Logo, a solução (2,1)-dromion da eq.(4.1) será

$$u = \frac{-2(1 - K_1)l_1 e^{l_1 y} \sum_{i=1}^2 k_i e^{k_i x - k_i^3 t}}{[1 + \sum_{i=1}^2 e^{k_i x - k_i^3 t} + e^{l_1 y} + K_1 e^{l_1 y} \sum_{i=1}^2 e^{k_i x - k_i^3 t}]^2}. \quad (4.14)$$

Graficamente, a solução (2,1)-dromion da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

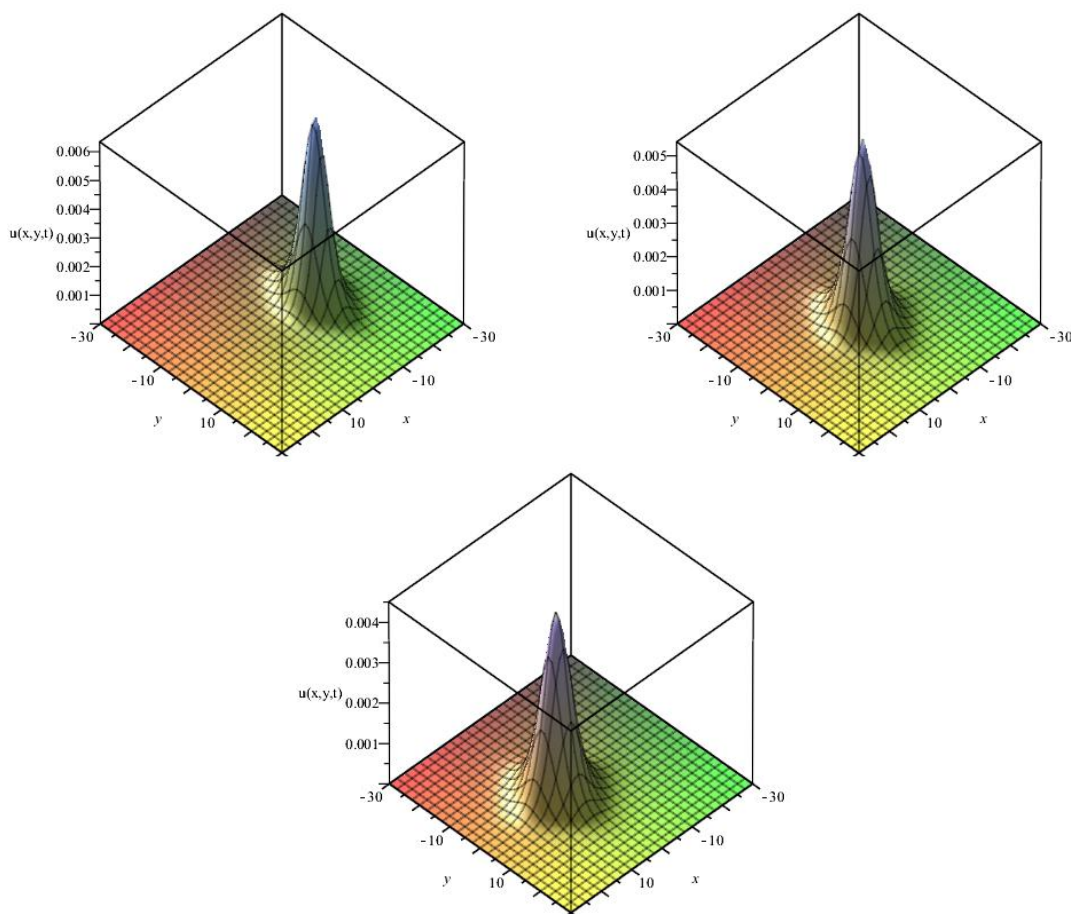


Figura 4.3: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $K_1 = 0.8$, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$ e $l_1 = 0.4$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente. Obtemos uma solução (2,1)-Dromion com amplitude de onda positiva, caminhando na direção x , sentido positivo, não havendo alterações na direção y no decorrer do tempo t .

Ou ainda,

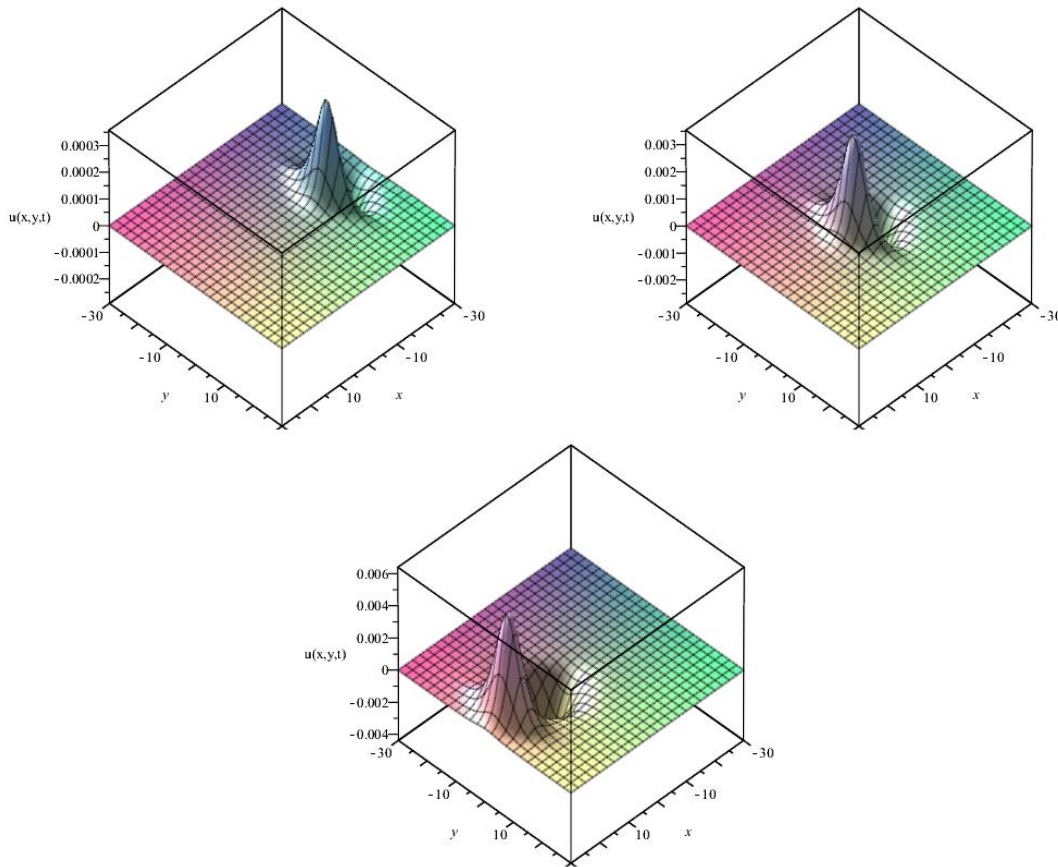


Figura 4.4: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $K = 0.8$, $k_1 = -0.4$, $k_2 = 0.6$ e $l_1 = 0.4$, em $t = -60s$, $t = 0s$ e $t = 60s$, respectivamente. Obtemos uma solução (2,1)-Dromion com uma amplitude de onda positiva maior a frente, e outra amplitude de onda negativa menor atrás. Entre os tempos $t = -60s$ e $t = 0s$, elas estão caminhando juntas na direção x , sentido positivo, já entre os tempos $t = 0s$ e $t = 60s$, elas começam a se distanciarem, na mesma direção e sentido, sendo que a partir do tempo $t = 0s$, a onda de amplitude maior caminha mais rapidamente que a onda de amplitude menor, não havendo alterações na direção y no decorrer do tempo t .

4.2.3 (2,2)-Dromions

Para a solução (2,2)-Dromion da equação (4.1) suponha,

$$f = 1 + \sum_{i=1}^2 e^{k_i x - k_i^3 t} + \sum_{i=1}^2 e^{l_i y} + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 K_j e^{l_j y} e^{k_i x - k_i^3 t}. \quad (4.15)$$

É possível verificar que a eq.(4.15) satisfaz as eq.(4.9).

Portanto, teremos que a solução (2,2)-dromion da eq.(4.1) será

$$u = 2 \frac{[(l_2 - l_1)(K_1 - K_2)e^{(l_1+l_2)y} + \sum_{j=1}^2 l_j(K_j - 1)e^{l_j y}] \sum_{i=1}^2 k_i e^{k_i x - k_i^3 t}}{[1 + \sum_{i=1}^2 e^{k_i x - k_i^3 t} + \sum_{i=1}^2 e^{l_i y} + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 K_j e^{l_j y} e^{k_i x - k_i^3 t}]^2}. \quad (4.16)$$

Graficamente, a solução (2,2)-dromions da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

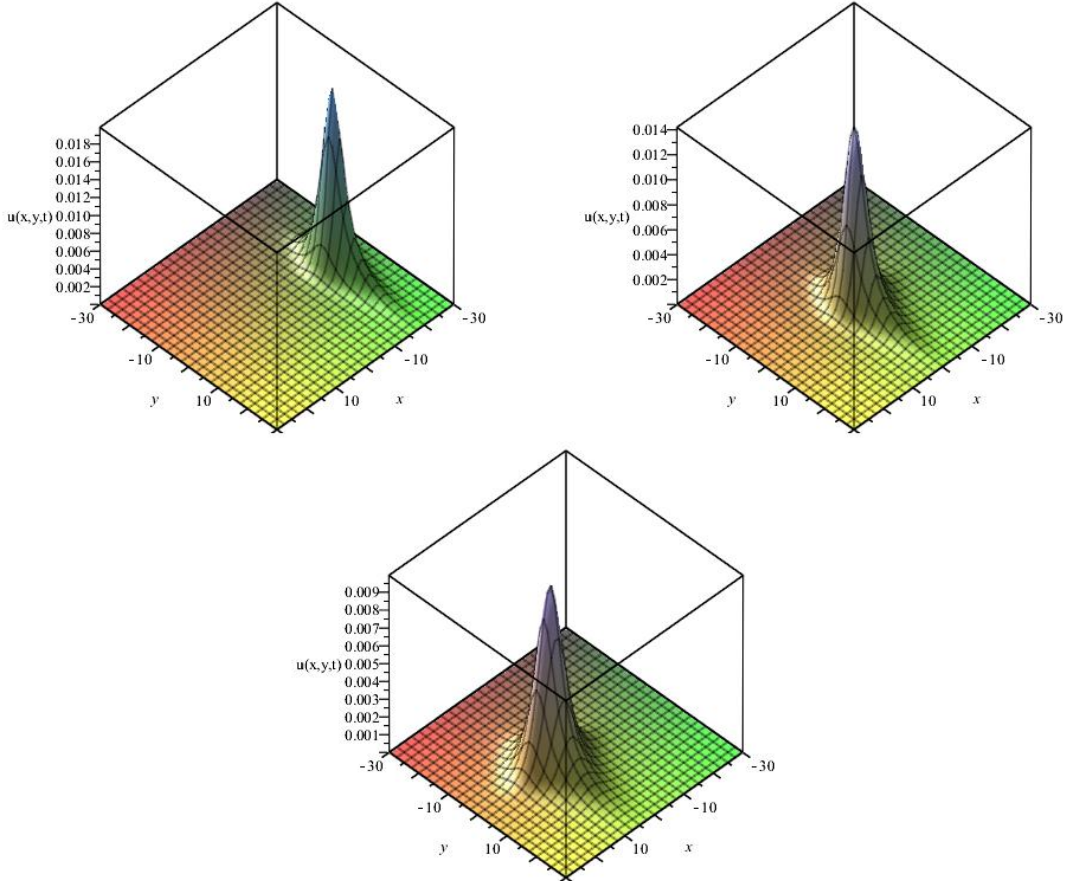


Figura 4.5: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $K_1 = 0.8$, $K_2 = 0.6$, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.8$, $l_1 = 0.4$ e $l_2 = 0.6$, em $t = -30s$, $t = 0s$ e $t = 30s$, respectivamente. Obtemos uma solução (2,2)-Dromion com amplitude de onda positiva, caminhando na direção x , sentido positivo, não havendo alterações na direção y no decorrer do tempo t .

Ou,

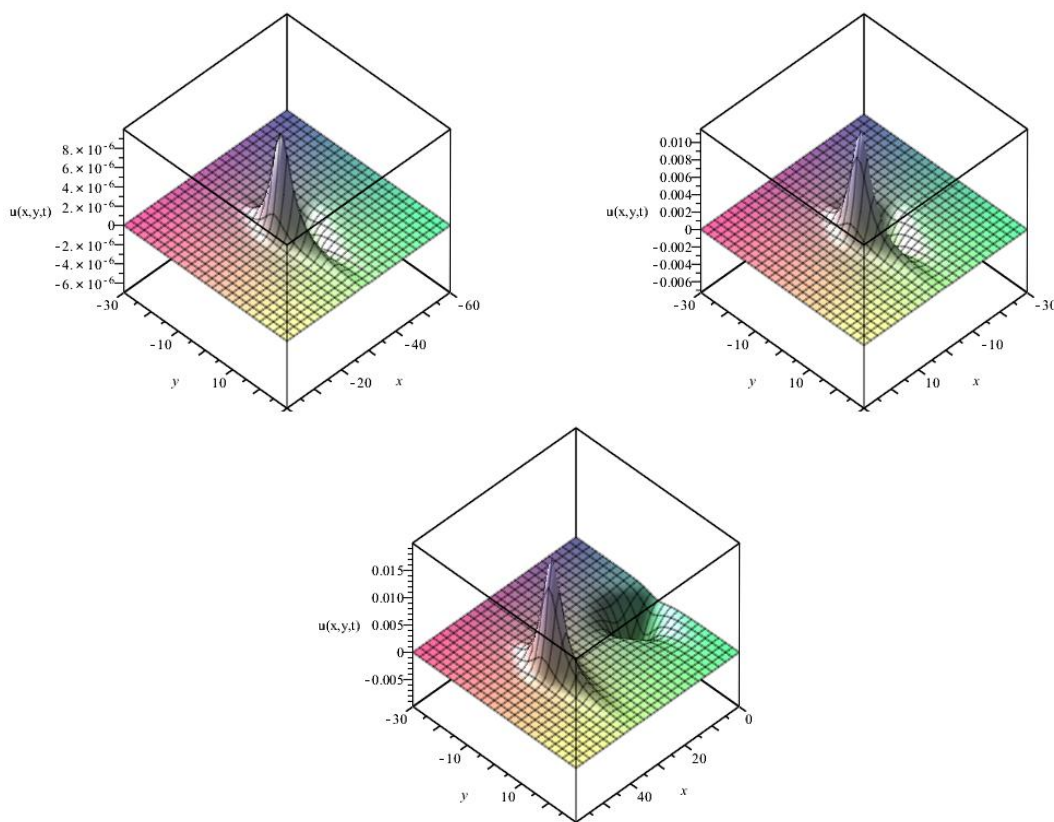


Figura 4.6: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $K_1 = 0.8$, $K_2 = 0.6$, $k_1 = -0.4$, $k_2 = 0.8$, $l_1 = 0.4$ e $l_2 = 0.6$, em $t = -60s$, $t = 0s$ e $t = 60s$, respectivamente. Obtemos um resultado semelhante ao da solução (2,1)-Dromion com amplitudes ondas de sinais opostos, pois estamos tratando duas amplitudes de ondas de sinais iguais, mas elas cruzam com exponenciais em y de sinais opostos, logo teremos uma solução (2,2)-Dromion com uma onda de amplitude maior e positiva a frente, e outra onda de amplitude menor e negativa atrás, elas caminham juntas na direção x , sentido positivo entre os tempos $t = -60s$ e $t = 0s$, sem que uma onda passe pela outra, já entre os tempos $t = 0s$ e $t = 60s$, elas começam a se distanciarem uma da outra, com a onda de amplitude maior a frente, caminhando mais rapidamente que a outra, não havendo alterações na direção y no decorrer do tempo t .

Ou ainda,

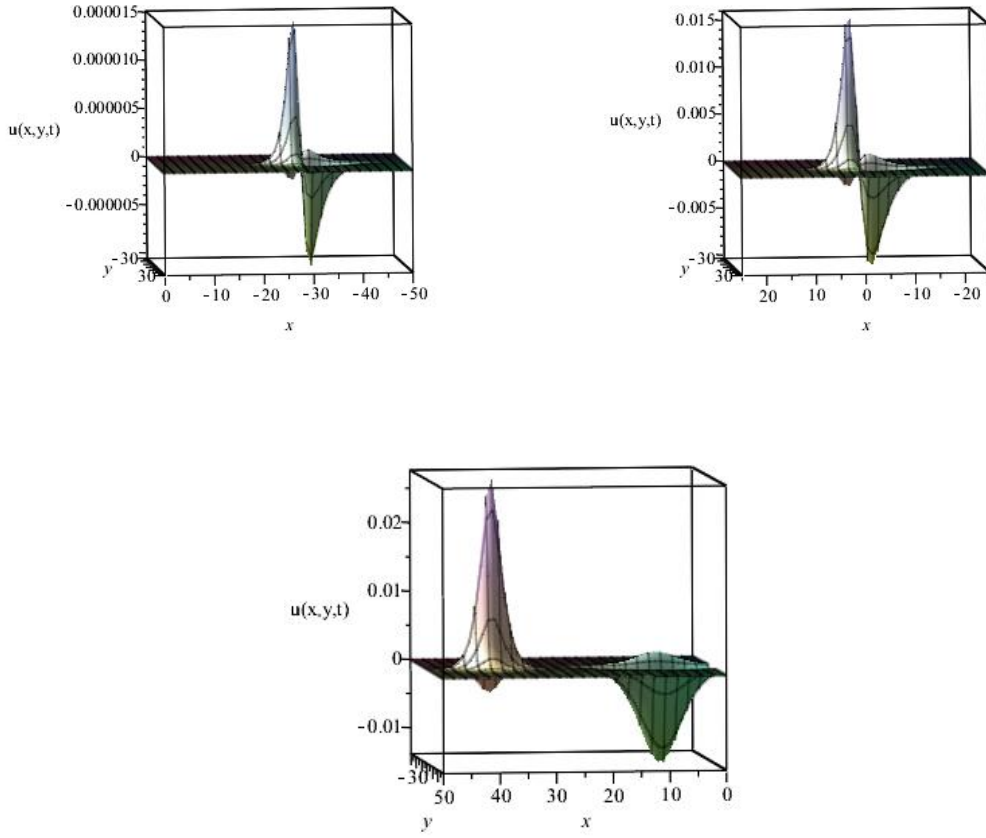


Figura 4.7: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $K_1 = 0.8$, $K_2 = 0.6$, $k_1 = -0.4$, $k_2 = 0.8$, $l_1 = -0.4$ e $l_2 = -0.6$, em $t = -60s$, $t = 0s$ e $t = 60s$, respectivamente. Obtemos uma solução (2,2)-Dromion com duas ondas de amplitudes positivas e negativas, caminhando na direção x , sentido positivo. Entre os tempos $t = -60s$ e $t = 0s$, elas permanecem caminhando juntas na direção x , sentido positivo, já entre os tempos $t = 0s$ e $t = 60s$, elas estão se aproximando, sem que uma onda passe pela outra, não havendo alterações na direção y no decorrer do tempo t .

4.2.4 (3,2)-Dromions

Para a solução (3,2)-Dromion da equação (4.1),

$$u = 2 \frac{[(l_2 - l_1)(K_1 - K_2)e^{(l_1+l_2)y} - \sum_{j=1}^2 l_j(K_j - 1)e^{l_j y}] \sum_{i=1}^3 k_i e^{k_i x - k_i^3 t}}{[1 + \sum_{i=1}^3 e^{k_i x - k_i^3 t} + \sum_{j=1}^3 e^{l_j y} + \sum_{j=1}^2 K_j e^{l_j y} \sum_{i=1}^3 e^{k_i x - k_i^3 t}]^2}. \quad (4.17)$$

Não obtivemos gráficos para soluções (3,2)-Dromions diferente do que já vimos até aqui, partiremos para o próximo caso.

4.2.5 (3,3)-Dromions

Para a solução (3,3)-Dromion da equação (4.1),

$$u = -2 \frac{\sum_{i < j=1}^3 [(l_i - l_j)(K_i - K_j)e^{(l_i+l_j)y} + \sum_{j=1}^3 l_j(K_j - 1)e^{l_j y}] k_i e^{k_i x - k_i^3 t}}{[1 + \sum_{i=1}^3 e^{k_i x - k_i^3 t} + \sum_{j=1}^3 e^{l_j y} + \sum_{j=1}^3 K_j e^{l_j y} \sum_{i=1}^3 e^{k_i x - k_i^3 t}]^2}. \quad (4.18)$$

Graficamente, a solução (3,3)-dromions da equação KdV em (2+1)-dimensões será,

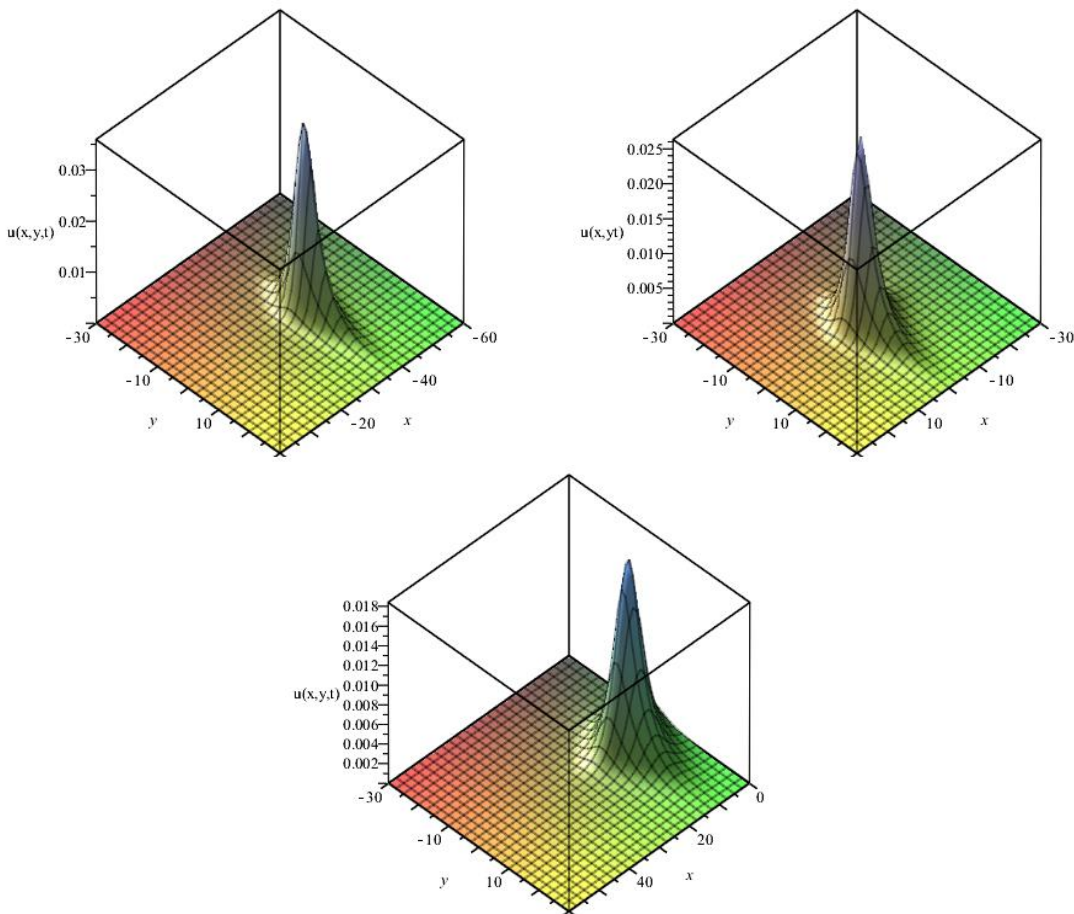


Figura 4.8: Gráfico de $u(x, y, t)$, com $K_1 = 0.8$, $K_2 = 0.6$, $K_3 = 0.4$, $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.6$, $k_3 = 0.8$, $l_1 = 0.4$, $l_2 = 0.6$ e $l_3 = 0.8$, em $t = -60s$, $t = 0s$ e $t = 60s$, respectivamente. Obtemos uma solução (3,3)-Dromions com uma onda de amplitudes positiva caminhando na direção x , sentido positivo, não havendo alterações na direção y no decorrer do tempo t .

Capítulo 5

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho nós abordamos o contexto histórico da equação KdV, em seguida estudamos o Método Bilinear de Hirota, e vimos que através deste método é possível obter soluções do tipo sólitons para as equações KdV, mKdV, NLS e diversas outras equações diferenciais parciais não-lineares em (1+1)-dimensões, através de uma determinada transformação de variáveis, da obtenção da forma bilinear dessa nova equação e da expansão das novas variáveis em termos de um parâmetro ϵ .

A eficácia desse método é deveras importante, pois extendidas as dimensões da equação KdV para a equação KP e equação KdV em (2+1)-dimensões, observou-se que ele permanece oportuno na busca por soluções do tipo sólitons em (1 + 1) e (2 + 1)-dimensões. Essas soluções tipo sólitons dependem de funções exponenciais que por sua vez dependem dos parâmetros arbitrários $k'_i s$ e/ou $l'_j s$. Essa escolha em (2 + 1)-dimensões pode proporcionar diversos tipos de soluções sólitons, como os line-sólitons, solitoff (ver [28,31]) e dromions.

A escolha adequada dos parâmetros $k'_i s$ e $l'_j s$ proporcionaram soluções do tipo dromions, e uma generalização para soluções (M,N)-dromions foi feita(ver [24,25]) , tal que estes são formados pela diferenciação em x e y de (M,N)-funções exponenciais, onde M corresponde às exponenciais que dependem de x e t , e N corresponde às exponenciais que dependem apenas de y . Dromions são riquíssimas estruturas que mantém sua forma, energia e momento ao decorrer do tempo e decaem exponencialmente em todas as direções. Para valores maiores

de M e N , estudos ainda estão em andamento.

Uma análise ainda mais detalhada precisa ser feita para entender o comportamento básico das estruturas destas soluções. Extender o estudo das soluções dromions para outros modelos de equações não-lineares e comparar o comportamento dos novos resultados com os resultados obtidos na literatura, bem como a generalização dessas equações para dimensões em ordens superiores, são pretensões futuras.

Bibliografia

- [1] M. Toda. Nonlinear waves and solitons. Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1989.
- [2] P. G. Drazin and R. S. Johnson. Solitons: An Introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [3] F. A. C. C. Chalub e J. P. Zubelli, Mat. Univ. 30: 41 (2001).
- [4] D. J. Korteweg, G. de Vries, Phys. Mag. 39: 442 (1895).
- [5] E. Fermi, J. R. Pasta, and S. M. Ulman. Studies on nonlinear problems. Technical Report LA-1940, Los Alamos Sci. Lab., 1955.
- [6] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Phys. REv. Lett. 15: 240 (1965).
- [7] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg and de Vries equation. Phys. Rev. Lett. 19 :1095 (1967).
- [8] P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 21: 467 (1968).
- [9] R. Hirota, Phys. Rev. Lett. 27: 1192 (1971).
- [10] J. F. Gomes, G. R. Melo and A. H. Zimmerman, J. Phys. A: Math. Theor.42: 275208 (2009).
- [11] J. F. Gomes, G. R. de Melo and A. H. Zimmerman, J. Phys. A 42: 275208 (2009).
- [12] J. F. Gomes, G. Starvaggi França, G. R. de Melo and A. H. Zimmerman, J. Phys. A 42: 445204 (2009).

-
- [13] J. F. Gomes, G. R. de Melo, L.H. Ymai and A. H. Zimerman, *J. Phys. A* 43: 395203 (2010).
- [14] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, *J. Phys. A* 33: L331 (2000).
- [15] H. Aratyn, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, *J. Geom. Phys.* 46: 21 (2003).
- [16] H. Aratyn, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, *Nucl. Phys. B* 676: 537 (2004).
- [17] H. Aratyn, J. F. Gomes, G. M. de Castro, M.B. Silka and A.H. Zimerman, *J. Physics A* 38: 9341 (2005).
- [18] H. Aratyn, J. F. Gomes, L.H. Ymai and A.H. Zimerman, *J. Phys. A* 41: 312001 (2008).
- [19] L.A. Ferreira, J. L. Miramontes and J.S. Guillen, *J. Phys. Math.* 38: 88 (1997).
- [20] L.A. Ferreira, B. Piette and W. J. Zakrzewski, *Phys. Rev. E* 77: 036613 (2008).
- [21] L.A. Ferreira, H. Aratyn, J. F. Gomes and A.H. Zimerman, *J. Math. Phys.* 38: 1559 (1995).
- [22] L.A. Ferreira, H. Aratyn, J. F. Gomes and A.H. Zimerman, (1997); *Vertex Operators and Sólitons of constrained KP Hierarchies, Supersymmetry and Integrable Models*, Ed. H. Aratyn et. al Springer, p. 197.
- [23] J. F. Gomes, L.H. Ymai and A. H. Zimerman, *Phys. Lett. A*, 373: 1401 (2009).
- [24] M. Lakshmanan, and R. Radha, *J. Phys.* 48: 163 (1997).
- [25] S.-Y. Lou, *J. Phys. A: Math. Gen.* 28: 7227 (1995).
- [26] S.-Y. Lou, *Phys. Scrip.* 65:7 (2002).
- [27] S.-Y. Lou, *J. Phys. A: Gen.* 29: 5989 (1996).
- [28] H.-Y. Ruan, and Y.-X. Chen, *Phys. Rev. E* 62: 5738 (2000).
- [29] H.-Y. Ruan, and Y.-X. Chen, *J. Math. Phys.* 40: 248 (1999).
- [30] J. Hietarinta, *Phys. Rev.Lett. A* 149: 113(1990).

-
- [31] K. W. Chow, J. Phys. Soc. Jpn.65: 1972(1996).
- [32] R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 33: 1456 (1972).
- [33] R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 33: 1459 (1972).
- [34] R. Hirota, J. Math. Phys. 14: 805 (1973).
- [35] R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 35: 286 (1973).
- [36] R. Hirota. The Direct Method in Soliton Theory. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).
- [37] J. L. C. Júnior, Rev. Bras. Fís. 10: 695 (1980).
- [38] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, D. W. McLaughlin, Proc. IEEE, 61, 1443 (1973).
- [39] R. K. Bullough, Phys. Bull., 29, 78(1978).
- [40] S. Yepeng, J. App. Math. Phys,3: 1391 (2015).
- [41] Kivshar, Y. S. and Malomend, B. A., Rev. Mod. Phys. 61:765 (1989).
(2009), 214-221. (1967) 1095.

