



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Testando Cosmologias com Interação no Setor Escuro  
usando dados da Distorção no Espaço do Redshift**

Luan Orion de Oliveira Baraúna Ferreira

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

**Testando Cosmologias com Interação no  
Setor Escuro usando dados da Distorção no  
Espaço do Redshift**

Luan Orion de Oliveira Baraúna Ferreira

**Orientador:** Humberto de Almeida Borges

**Coorientador:** Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade Federal da Bahia como parte dos requi-  
sitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador-BA, 2019

---

## RESUMO

Neste trabalho usamos o modelo de gás de Chaplygin decomposto em matéria sem pressão e energia do vácuo para estudar a distorção no espaço do redshift causado pela velocidade peculiar das galáxias. Introduzindo a matéria bariônica nas equações que descrevem a dinâmica, obtemos a previsão teórica da combinação  $f\sigma_8$  e mostramos que sua evolução depende do modelo de aglomeração da densidade de energia do vácuo. Usando os dados observacionais para as medidas na distorção do espaço dos redshift  $f\sigma_8$ , realizamos um teste estatístico criando Cadeias de Monte Carlo através módulo do Py-MultiNest [1]. Assumindo inicialmente que a densidade de energia do vácuo não é perturbada encontramos como melhor ajuste o conjunto de parâmetros  $\sigma_8(0) = 0.80_{-0.11}^{+0.14}$ ,  $\Omega_{m0} = 0.31_{-0.17}^{+0.19}$  e  $\alpha = -0.05_{-0.58}^{+0.64}$ .

Palavras-chave: Cosmologia, Modelo Alternativo, Setor Escuro, Teoria de Perturbações, Taxa de Crescimento, Distorção no Espaço do Redshift.

# *ABSTRACT*

In this work we use the Chaplygin gas model decomposed in matter pressureless and vacuum energy to study the distortion in redshift space caused by the peculiar velocity of galaxies. Introducing baryons into the equations that describe dynamics, we get the theoretical prediction of the  $f\sigma_8$  combination and show that its evolution depends on the vacuum energy density clustering model. Using the observational data for the redshift space distortion measurements  $f\sigma_8$ , we performed a statistical test building Monte Carlo Chain's through Py-MultiNest [1] algorithm. Assuming that unperturbed vacuum density we find the best fit parameter set  $\sigma_8(0) = 0.80_{-0.11}^{+0.14}$ ,  $\Omega_{m0} = 0.31_{-0.17}^{+0.19}$  and  $\alpha = -0.05_{-0.58}^{+0.64}$ .

Keywords: Cosmology, Alternative Model, Dark Sector, Perturbation Theory, Growth Rate, Redshift Space Distortion.

Salvador, July, 2019

*Dedico este trabalho a  
Tainá Santos Dias Coelho.  
Esta dissertação nasceu  
junto com você.*

---

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Humberto Borges a quem teve a imensa paciência de me orientar na busca pela compreensão do comportamento analítico do universo, a quem pude compartilhar boas seções de Jazz, partidas de xadrez e uma gelada cerveja pela baía de Todos-os-Santos. Agradeço a Cássio Pigozzo que desde a graduação vem mostrando como observar através de outras formas o universo, como manusear as suas grandezas e mais do que isso, como ser um grande ser humano. Agradeço a paciência que essas duas pessoas tiveram comigo ao longo do tempo na minha formação como cientista e cidadão. Agradeço a Práticia Hepp, Jorge Dantas, Iure Baranov, Maroivo e Webert Viana pelas longas discussões nas aulas, no nosso *Journal Club* das terças feiras e pelos corredores.

Agradeço ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia por poder propiciar, de forma comoda e gentil, todas as variáveis necessárias para se fazer ciência de qualidade. Agradeço ao International Institute of Physics no Rio Grande do Norte e ao International Center of Theoretical Physics (ICPT) South American Institute for Fundamental Research, pelos cursos pelas, palestras, debates e amigos formados nas instituições. Agradeço a Associação Nacional de Pós Graduandos, que permitiu a mim, compreender-me enquanto coletivo, enquanto parte de uma juventude cientista em formação num país tão grande como o nosso. Agradeço a União Nacional dos Estudantes pela possibilidade de compartilhar, para um publico tão heterogêneo, um pouco dos segredos do universo.

Agradeço aos amigos que fiz, que amei e que perdi ao longo dessa vasta trajetória, que estiveram do meu lado que me ouviram nos momentos de dificuldade, que compreenderam minha ausências dos espaços amistosos por acreditarem no meu amor pela ciência e pela educação e principalmente por, nos poucos momentos que passamos juntos, terem me feito muito feliz. Em particular a Alexandre Lopes, André Luiz, Péricles Oliveira, Romam Blanco, Lara Machado, Luiz Longo, Michele Mendonça, Victor Hugo, Samara Coelho, Samuel Lacerda (*em memoria*), Felipe Dos (*em memoria*), Rogério Reis, Leonardo Paiva, André Harley, André Couto, Deusdete Junior, Jonatas Costas, Poliana Oliveira, Yasmin Almeida, Eliane Lima, Vinícius Guimarães, Alex Miranda, Thiago Oliveira, Adelson Silva, João Bina e todos os outros passaram por essa trajetória. Em especial a Verônica Andrade

que caminhando ao meu lado, me proporcionou suporte e companheirismo principalmente na reta final e ao amigo, irmão, colega, que vem seguindo de forma visceral do início deste mestrado até os dias de hoje o trilhar da vida espiritual, acadêmica e agora docente no modo co-op, Rafael Menezes.

Agradeço ao suporte financeiro e científico dado pelo CNPq.

Agradeço a todo o povo brasileiro.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	História . . . . .	2
1.2	Mecânica e Relatividade . . . . .	5
1.2.1	Tensores . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Cosmologia</b>	<b>14</b>
2.1	Princípio Cosmológico . . . . .	14
2.2	Matéria Escura . . . . .	17
2.3	Equação de Friedmann . . . . .	20
2.4	Modelos Cosmológicos . . . . .	22
2.4.1	Einstein–de Sitter . . . . .	22
2.4.2	$\Lambda$ CDM O modelo padrão da cosmologia . . . . .	23
2.4.3	Gás de Chaplygin . . . . .	24
2.5	Distâncias Cosmológicas . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Modelo perturbativo</b>	<b>31</b>
3.1	Perturbação na Métrica . . . . .	31
3.1.1	Calibres . . . . .	33
3.1.2	Equações de movimento . . . . .	37
3.1.3	Modelo Geodésico . . . . .	41
3.1.4	Modelo com perturbação do Vácuo . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Distorção no espaço dos redshifts</b>	<b>47</b>
4.1	Distorção no espectro de potência linear . . . . .	48



---

4.2	Previsão teórica para a distorção no espaço dos redshift em modelos com interação . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Análise Estatística</b>	<b>55</b>
5.1	Metodologia . . . . .	56
5.2	Modelo com densidade do vácuo homogêneo . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>70</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>73</b>

# Lista de Figuras

1.1	Atração gravitacional entre corpos massivos de massa $m$ e $M$ afastados a uma distância $d$ . . . . .	5
1.2	Órbita da terra em torno do Sol permeando o Éter. . . . .	7
2.1	Radiação Cosmica de Fundo, imagem oficial do Planck [2]. . . . .	15
2.2	Linhas de absorção no espectro visível de um superaglomerado de galáxias desviadas para o vermelho [3]. . . . .	16
2.3	Relação velocidade-distância entre nebulosas extra-galácticas [4]. . . . .	16
2.4	Diagrama de Hertzsprung-Russell onde o ponto amarelo representa a massa e luminosidade do Sol [5]. . . . .	18
2.5	Curva de matéria visível <i>vs</i> matéria escura [6]. . . . .	19
2.6	Lentes gravitacionais em grandes aglomerados de galáxias contendo matéria escura e matéria bariônica [7]. . . . .	20
2.7	Possíveis curvaturas do universo. A esquerda um universo com curvatura aberta, ao meio um universo espacialmente plano e a direita um universo com curvatura esférica [8]. . . . .	22
2.8	Albert Einstein e Willem de Sitter discutindo o universo. Em 1932 eles publicaram um artigo juntos descrevendo um modelo que mais tarde seria conhecido como universo de Einstein-de Sitter. . . . .	23
2.9	Evolução da função de Hubble para casos particulares do modelo de Gás de Chaplygin Generalizado onde foram utilizados como parâmetros $H_0 = 67.4$ km/s/Mpc e $\Omega_{m0} = 0.315$ de acordo com [9]. . . . .	27

3.1	À esquerda, contraste da densidade da matéria, e à direita o contraste da densidade dos bárions para diferentes valores de $\alpha$ no Gás de Chaplygin decomposto. . . . .	43
3.2	A esquerda, contraste da densidade da matéria total, a direita contraste da densidade dos bárions para diferentes valores de $\alpha$ no Gás de Chaplygin em um modelo com perturbação na energia do vácuo. . . . .	45
3.3	A esquerda, contraste da densidade da matéria, a direita contraste da densidade dos bárions. As linhas tracejadas representam o modelo geodésico e as linhas completas o modelo com perturbação na densidade de energia do vácuo. . . . .	46
4.1	Distorção na distribuição das galáxias. . . . .	49
4.2	A distribuição de galáxias em parte do 2dFGRS, de um total de 141.402 galáxias [10] . . . . .	50
4.3	A função de correlação de redshift-space para o 2dFGRS, $\xi(\sigma, \pi)$ , plotada como uma função da separação de pares transversal ( $\sigma$ ) e radial ( $\pi$ ). A função foi estimada contando pares em caixas de lado $0.2h^{-1}$ Mpc (assumindo uma geometria plana, $\Omega_k = 1$ ), e depois suavizando com um gaussiano de largura $0.5h^{-1}$ Mpc. Esta figura exhibe as distorções do desvio para o vermelho, com alongamentos de "dedos de Deus" em escalas pequenas e efeito Kaiser achatando-se em grandes raios [10]. . . . .	52
4.4	As curvas acima representam o a função crescimento normalizada $f\sigma_8$ . A linha preta em todas as curvas é a representação do $\Lambda$ CDM, as linhas coloridas são plotadas para o Gás de Chaplygin para diferentes valores de $\alpha$ . As curvas tracejadas são para o modelo geodésico ( $\delta\rho_V^c = 0$ ) e as linhas cheias representando o modelo com inhomogeneidade do vácuo ( $\delta\rho_V^c \neq 0$ ). Para todas as curvas foi utilizado $\Omega_{m0} = 0.315$ e $\sigma_{80} = 0.811$ [9]. Em particular, para $\alpha = -0.5$ usou-se $\Omega_{m0} = 0.490$ [11]. . . . .	54

5.1	Análise usando um algoritmo de MCMC com o PyMultiNest para o modelo de Gás de Chaplygin. Neste teste, $\alpha$ , $\Omega_{b0}$ , $\Omega_{c0}$ e $\sigma_8(0)$ são parâmetros livres do modelo ajustado sob a melhor verosimilhança e $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$ é parâmetro derivado. As curvas tracejadas de preto representam o $\Lambda$ CDM e as regiões de roxo representam as curvas de nível do modelo com interação no setor escuro. . . . .	62
5.2	Curvas de confianças para os parâmetros $\sigma_8$ , $\Omega_m$ , $\Omega_b$ e $\Omega_c$ para $\alpha = 0.2$ .	64
5.3	Curvas de confianças para os parâmetros $\sigma_8$ , $\Omega_m$ , $\Omega_b$ e $\Omega_c$ para $\alpha = 0.1$ .	65
5.4	Curvas de confianças para os parâmetros $\sigma_8$ , $\Omega_m$ , $\Omega_b$ e $\Omega_c$ para $\alpha = -0.1$ .	66
5.5	Curvas de confianças para os parâmetros $\sigma_8$ , $\Omega_m$ , $\Omega_b$ e $\Omega_c$ para $\alpha = -0.2$ .	67
5.6	Curvas de confianças para os parâmetros $\sigma_8$ , $\Omega_m$ , $\Omega_b$ e $\Omega_c$ para $\alpha = -0.5$ .	68
5.7	Relação entre $\Omega_{m0}$ e $\sigma_8(0)$ para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	69
6.1	Curvas da função taxa de crescimento gerada para o Gás de Chaplygin num ansatz geodésico $\delta\rho_V = 0$ . Ao lado esquerdo são utilizado os parâmetros cosmológicos de <i>best-fit</i> aqui realizados e a direita os dados parâmetros cosmológicos encontrados em [9]. . . . .	71
6.2	Transporte paralelo num espaço curvo. . . . .	73

# Capítulo 1

## Introdução

A moderna compreensão científica que temos do universo advém de um modelo teórico chamado na literatura de Modelo Padrão da Cosmologia ou  $\Lambda$ CDM [12–14], possuindo como base a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein (1916) [15]. O modelo foi desenvolvido ao longo do século XX, onde em 1920 e em 1929, Edwin Hubble mostra pela observação do desvio para o vermelho, do inglês *redshift*, do espectro eletromagnético observado de galáxia, comprovando que o universo encontra-se em expansão [4], em 1965 Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson observam pela primeira vez a Radiação Cósmica de Fundo [16] e em 1997-1998 estudos realizados com Supernovas do tipo Ia (SNIa) apontam para uma aceleração acelerada do universo [17]. Com o avanço das tecnologias e das observações a cosmologia deixa de ser uma ciência teórica e especulativa e passa a ser tratada como uma ciência capaz de comprovar e embasar as suas argumentações com caráter quantitativo. A cosmologia dá o seu primeiro passo em direção a sua era de ouro, regada de inúmeras comprovações observacionais convergindo ao modelo padrão. Com o advento das observações das Supernovas e o indício da expansão acelerada, a principal candidata e responsável por este fenômeno no modelo padrão é a energia escura [18], que pode ser associada ao vácuo. As observações mostram que a densidade de Energia do Vácuo é diferente no passado para o que é agora, levando ao chamado problema da constante cosmológica. Alternativas são propostas, por exemplo, a partir dos chamados *Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro* da qual a pressão negativa, responsável pela expansão do universo,

seja variável ao longo do tempo  $\Lambda(t)$ , possua dependência com a densidade da matéria escura e se transforme em energia escura via um termo de acoplamento  $Q(t)$ . Cujas condições iniciais indiquem uma taxa de transição maior no início do universo do que observamos hoje. Entretanto, este, como qualquer modelo físico, deve estar amparado pelas observações. Desta forma, neste trabalho, analisamos a taxa de crescimento em grandes estruturas para baixos redshifts estudando o contraste de densidade da matéria para um modelo com interação no setor escuro com diferentes Ansatz da perturbação da energia do vácuo. Este trabalho realiza análise estatística com dados de taxa de crescimento, buscando a restrição de parâmetros de modelos alternativos na cosmologia.

Nas próximas seções, discutiremos brevemente sobre a história do estudo dos céus permeando sobre seus principais personagens, comentaremos sobre a teoria da gravitação Newtoniana e a teoria da gravitação de Einstein. No capítulo 2 discutiremos sobre os modelos cosmológicos e as formas de medir distâncias em largas escalas. No capítulo 3 estudaremos modelos perturbativos dos quais adicionaremos incrementos na métrica para analisarmos um universo em pequenas escalas, estudaremos o observável *Distorção no Espaço dos Redshifts* no capítulo 4 e no capítulo 5 realizaremos uma análise estatística para a taxa de crescimento de um modelo com interação no setor.

## 1.1 História

Desde tempos remotos, o ser humano se fascina pela imensidão e a beleza do céu a noite. Tomado pela completa escuridão, pontos luminosos no céu inundaram o imaginário de diversos povos sobre toda a terra enriquecendo culturas de civilizações extremamente organizadas a tribos aborígenes, primitivas e nômades. As observações contínuas do céu permitiram a diversos povos compreenderem movimentos periódicos da Terra e a partir de tais observações construírem, com base de sua localidade geográfica, seu contato com a natureza e cultura, uma previsibilidade sobre fenômenos celestes criando assim mitos, fábulas e dando inicio a uma das ciências mais antigas, a astronomia.

A compreensão dos estudos dos céus, no antigo Egito, na Babilônia e até nas Américas [19–21], possuía um viés místico de predizer melhores momentos para casamento, negócios e guerra. Os sacerdotes e estudiosos ganhavam um destaque na sociedade por se tornarem as pessoas que ditavam decisões importantes para a vida social.

Por estarem suscetíveis a quase o mesmo fenômeno observativo, diversos povos foram capazes de chegar a conclusões levemente semelhantes sobre posição das estrelas e, a depender das estações, a busca pela causa e consequência dos fatos naturais. Assim o ser humano começava a dar a responsabilidade dos eventos astronômicos a seres mitológicos e divinos. Os que seriam futuros astrônomos, ou seja, as pessoas que portavam o conhecimento dos céus, eram considerados semi-deuses e até mesmo divindades pelos povos por terem a incrível capacidade de predizer os fenômenos celestes.

Mais tarde, essas interpretações dos céus foram capazes de predizer com boa aproximação quais eram os melhores momentos para colheita e plantio a partir das observações das fases da Lua. O céu passa a ser utilizado como um mapa e como um relógio para os viajantes e mais do que uma interpretação mística, o céu começava a possuir uma finalidade prática para a vida das pessoas.

Séculos de observações, constatações e intercâmbios culturais entre diversos povos levou a concluir que os mesmos fatos são observados por diversas nações, logo, possuindo uma raiz em comum.

No ocidente, o filósofo grego Aristóteles, discípulo direto de Platão, compreendia que cada corpo possui o seu “lugar natural” e isso faz parte da inércia, do grego *entelécheia*, de cada corpo. Para Aristóteles se retirarmos uma pedra do chão, ao soltarmos ela retornaria ao seu “lugar natural”, o chão. Este pensamento embasou o geocentrismo da qual a terra encontrava-se no centro, no lugar natural do universo para onde todos os corpos convergiam-se.

Aristóteles simbolizava o momento de transição do pensamento humano do “mundo das ideias” para o mundo concreto, quantitativo e físico, defendendo que *“a matemática é o instrumento científico utilizado para examinar o mundo do ponto de vista de sua quantidade, mas ela não é capaz de nos dar por si só a natureza do mundo”* [22].

No século XVI, o astrônomo Dinamarquês Tycho Brahe recebe do rei Frederico II da Dinamarca a ilha de Hven para que pudesse realizar observações astronômicas. Tycho Brahe teve a acurácia de medir as posições dos astros a erro de aproximadamente 1°. Mais tarde, seu aluno, discípulo e ajudante, Johannes Kepler, foi capaz de mensurar matematicamente os movimentos dos chamados astros errantes, ou mais comumente chamado de planetas, dando origem às três leis de Kepler. Este feito foi apenas possível por conta da precisão de numerosas observações de Tycho que morreu acreditando fielmente no geocentrismo Aristotélico.

Galileu Galilei 1564 — 1642 contestou a hipótese do geocentrismo Aristotélico [23] tentando retirar a Terra do centro do universo e indo de encontro ao pensamento crítico-científico vigente que embasava, para toda a população, os argumentos de uma classe dominante cristã. Galileu, ameaçado de ser jogado na fogueira da santa inquisição negou suas hipóteses sobre o heliocentrismo.

No ano do seu falecimento nasceu na Inglaterra Issac Newton. Newton desenvolveu as leis fundamentais da dinâmica em seu principal livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [24], onde descreveu geometricamente a Lei da Gravitação Universal, prevendo matematicamente a posição dos astros e a relação de forças entre os corpos. A Lei da Gravitação de Newton era capaz de prever com acurácia a posição dos planetas, eclipses e ciclos das marés. Newton trazia para a humanidade, sobre a linguagem da matemática, a possibilidade de prever os fenômenos observados pelos céus. Mesmo sendo extremamente religioso, suas contribuições marcaram o fim da era onde o conhecimento estava inundada por misticismos e o nascimento de uma nova era de uma ciência determinística, A Física.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.1)$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (1.2)$$



## 1.2 Mecânica e Relatividade

Em meados do século XVI a Europa ocidental encontrava-se no final do que foi conhecido como era das trevas. As principais ideias do iluminismo cercavam as diversas camadas da sociedade não mais feudal. Com o advento das ideias trazidas por Copérnico, Kepler e Galilleu Galilei, a sociedade intelectual começava a se afastar da concepção divina para compressão da relação homem-natureza como ocorrera nos séculos anteriores. Desse contexto, diversos pensadores filósofos e cientistas começaram a se dedicar ao estudo dos movimentos dos corpos. Newton, no escopo dessa física clássica, descreve a força gravitacional como uma força de campo e que possui seu módulo proporcional ao produto das massa e é inversamente proporcional ao quadrado da distância, segundo a lei de forças

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{d^2} \hat{d}, \quad (1.3)$$

onde a constante da gravitação universal e possui o valor  $G = 6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$ .

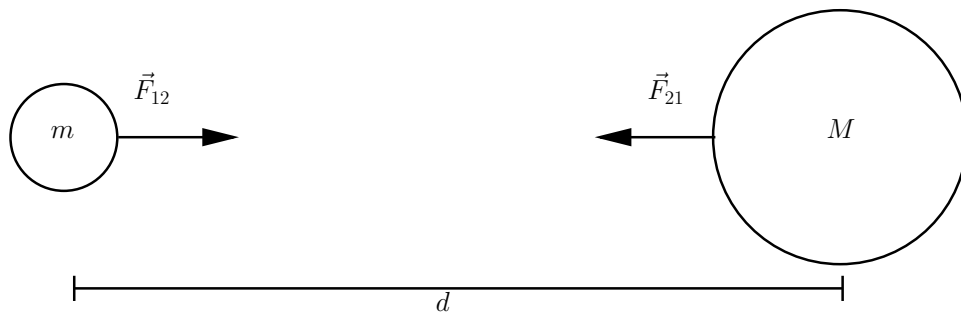


Figura 1.1: Atração gravitacional entre corpos massivos de massa  $m$  e  $M$  afastados a uma distância  $d$ .

Segundo a Teoria Newtoniana da Gravitação, a transmissão de informação é instantânea. Para que tal tipo de transmissão possa ocorrer, considera-se o espaço euclidiano e o tempo absoluto.

A física clássica possui como principal função a descrição do movimento dos corpos e de sua mecânica. E um dos problemas transitórios entre a física clássica e a física moderna está associado a diferentes medidas realizadas por observadores em diferentes referencias. As transformações Galileanas descrevem como um fenômeno é mensurado

através do ponto de vista de um observador que se deslocava com velocidade  $\vec{v}$  em relação a um outro observador e são escritas através das relações

$$x' = x + v_x t, \quad (1.4)$$

$$y' = y + v_y t, \quad (1.5)$$

$$z' = z + v_z t, \quad (1.6)$$

$$t' = t. \quad (1.7)$$

Um dos conceitos importantes da mecânica Newtoniana é o de *referencial inercial*, no qual um objeto se movimenta com velocidade constante em relação ao observador em um espaço e tempo absoluto. Estas são as bases das transformações Galileanas. Desta forma, as observações de um fenômeno físico dependem da velocidade com que observadores, e consequentemente o meio em que estavam inserido, moviam-se em relação ao outro. Assim como no som, onde a velocidade e a frequência de onda captada por um observador depende da velocidade entre observador, a fonte e a velocidade relativa do ar gerando assim o efeito Doppler .

A dependência entre o observador, o referencial e o meio se estendem ao eletromagnetismo clássico que propunha a existência de um meio chamado Éter na qual as informações, em particular as ondas eletromagnéticas e consequentemente a luz, se propagavam. A origem deste problema estava ligada à observação da *aberração estelar*, proposta em 1725 por James Bradley (1693-1762) [25–28]. Neste fenômeno, ocorre um desvio da luz das estrelas devido ao movimento de translação da Terra em torno do Sol como ilustra a Figura 1.2.

Na tentativa observar este meio, entre abril e julho de 1887 Albert A. Michelson e Edward W. Morley comparam a velocidade da luz em direções perpendiculares com um movimento relativo em diferentes direções [29]. Suas observações constataram ínfimas variações associadas a velocidades da luz o que era a uma sólida afirmação contrária a existência do éter.

Em 26 de Setembro de 1905 Albert Einstein publica um artigo intitulado “Zur

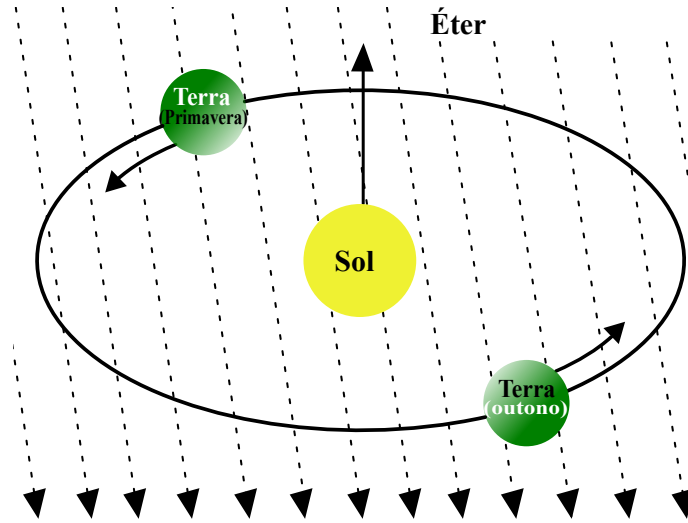


Figura 1.2: Órbita da terra em torno do Sol permeando o Éter.

*Elektrodynamik bewegter Körper*” (A Eletrodinâmica dos corpos em movimento) [30] demonstrando uma inconsistência entre a mecânica Newtoniana e as equações de Maxwell trazendo também incongruências com a hipótese de que luz possuía um meio para se propagar. Para grandes velocidades, as transformações de referencias necessitavam de correções. Hendrik Lorentz escreve novas transformações para um corpo que se movimenta na direção  $x$ . As transformações de coordenadas são dadas pelas transformações de Lorentz [31]

$$x' = \gamma(x - v_x t), \quad (1.8)$$

$$y' = y, \quad (1.9)$$

$$z' = z, \quad (1.10)$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v_x x}{c^2} \right), \quad (1.11)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.12)$$

Aqui a menor distância entre dois pontos pode ser escrita pelo elemento de linha

invariante pelas transformações acima, e dada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.13)$$

Esse elemento de linha pode ser escrito como o produto de dois vetores e quando escrito sobre coordenadas curvilíneas torna-se o elemento de derivada covariante.

Um problema emergente da construção dessa teoria era uma incompatibilidade entre a relatividade especial e a gravitação newtoniana, uma vez que a mesma estabelecia uma relação entre inércia e energia, porém, nada tinha a dizer à respeito da relação entre inércia e peso. Através disso, Einstein se convenceu que o princípio de equivalência seria o ponto de partida para a generalização da teoria que abrangesse também a gravitação. O Princípio de Equivalência de Newton [24] afirmava que a massa gravitacional era equivalente até a ordem de  $10^{-8}$ , à massa inercial porém não estabelecia nenhum mediador para a interação gravitacional, atuando de forma instantânea com a distância. Outro problema é que a Lei de Gravitação Universal e as leis do movimento de Newton carregam intrinsecamente a noção de um referencial inercial absoluto.

Quando um corpo está submetido a uma aceleração, ou seja, um referencial encontra-se acelerado em relação a outro, “*forças fictícias*” começam a surgir nesses corpos. Esses referenciais com variação da velocidade são chamados de referenciais não-inerciais.

Se um observador, dentro de um elevador encontra-se parado sobre a superfície da Terra, ou seja, sobre a influência de campo gravitacional, e abandona um corpo em queda livre dentro do elevador o mesmo constatará que a bola está sujeita a uma aceleração de  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Analogamente, se colocarmos um elevador no espaço com uma aceleração de  $9,8 \text{ m/s}^2$ , um observador que realizar o mesmo procedimento será capaz de observar que o mesmo corpo também está sujeito a uma aceleração de mesmo módulo e pode ser levado a pensar que encontra-se também sobre influência do campo gravitacional.

O Princípio de Equivalência afirma que o movimento realizado por um corpo massivo dentro de um campo gravitacional é equivalente ao movimento realizado entre referen-

ciais não inerciais acelerados entre si. A hipótese de Einstein foi que a equivalência dos referenciais é para todos os fenômenos físicos e não somente para fenômenos mecânicos. Dessa forma o Princípio de Equivalência de Einstein incorpora e generaliza o Princípio de Equivalência de Newton [32].

Para tal, é necessária uma invariância de transformação entre coordenadas, sejam em referenciais inerciais ou não. Logo a distância entre dois pontos num espaço tridimensional dado pelo elemento de linha  $ds^2$  tem que ser sempre a mesma. Onde esse elemento, invariante por transformação de coordenadas, pode ser escrito como o produto escalar de um quadrivetor  $x^\mu = x(t, x, y, z)$  de forma que o índice grego  $\mu$  corre entre 0 e 3, sendo 0 a coordenada temporal e de 1 a 3 coordenadas espaciais

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu, \quad (1.14)$$

o que pode ser escrito como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.15)$$

De forma que para um espaço plano no qual se conserve as transformações de Lorentz a matriz  $\eta_{\mu\nu}$  representa o espaço de Minkowski [33]

$$\eta_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Aqui adotaremos a assinatura  $(-1, 1, 1, 1)$ . Sendo a equação acima generalizada para qualquer métrica do espaço como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.17)$$

Desta forma a relatividade geral, abarca os fenômenos relativos a referencias inerciais ou não, mensurados pela mecânica e a generaliza para todos os fenômenos físico. Para a construção dessa teoria é necessário compreender o universo não mais plano e absoluto como proposto por Newton, mas sim curvo. Assim, todas os fenômenos físicos devem também respeitar as transformações de coordenadas curvas.

### 1.2.1 Tensores

Fruto do seu trabalho de doutorado em 1854, o estudante de Carl Friedrich Gauss, publica o trabalho *As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria* como requisito para a admissão como docente na Universidade de Göttingen. Uma das principais contribuições de Riemann foi a introdução da métrica Riemannina, inserindo a noção de geodésica que seria a curva que minimiza a distância entre pontos numa geometria não Euclidiana como melhor relata [34].

O elemento de linha escrito por um vetor em um espaço curvo é representado através de derivada covariantes em coordenadas curvilinearas cuja transformação de coordenadas entre  $x$  e  $x'$  é dada por:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \quad (1.18)$$

As derivadas de coordenadas cartesianas são descritas por vetores com derivadas totais. Isso não ocorre no caso de coordenadas curvilíneas pois os coeficientes de transformações dependem estritamente do espaço e a diferença entre vetores após um transporte paralelo no espaço curvo, logo essa diferenciação em coordenadas curvilíneas é descrita por um tensor invariante por transformação de coordenada.

As derivadas em coordenadas curvilíneas são descritas como as derivadas convencionais, mais um pequeno acréscimo.

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \quad (1.19)$$

Nos acréscimos, as componentes do vetor paralelo dependem das próprias componentes e essa dependência deve ser linear assim:

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l, \quad (1.20)$$

Onde  $\Gamma$  representa os Símbolos de Christoffel que fazem a correção da variação de cada coordenada em relação a diferença na métrica e é descrito por:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right), \quad (1.21)$$

de forma que a diferenciação de um quadri vetor em um espaço curvo descrito sobre coordenadas curvilíneas é:

$$D_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\beta \quad (1.22)$$

Assim, como demonstramos no **Apêndice A 6** definimos o Tensor de Riemann como

$$R_{\nu\beta\gamma}^\mu = \Gamma_{\lambda\gamma}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\lambda + \partial_\beta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\nu\beta}^\mu. \quad (1.23)$$

Este tensor carregará as informações referentes a métrica e suas transformações cujo desenrolar do desenvolvimento dessa nova geometria fez com que Einstein, juntamente com o matemático alemão Marcel Grossman, interpretassem a densidade da matéria numa certa região, logo a intensidade do campo gravitacional, proporcional a curvatura do espaço tempo [35].

Consideremos um fluido descrito pela sua densidade de energia de repouso  $\rho$  e pressão isotrópica  $p$ , não possuindo forças de cisalhamento, viscosidade, carga, ou condução de calor. Escreveremos um tensor chamado de **tensor momento-energia**

como uma quantidade tensorial que representara as propriedades desse fluido [36–38],

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

Um quadrivetor representando a velocidade deste fluido no espaço curvo

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (1.25)$$

pode ser escrito de forma covariante  $u_\mu$  ou contravariante  $u^\mu$ . A relação de ambos se dá através da simetria com a métrica do espaço tal que na forma covariante  $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$ , e contravariante  $u^\mu = g^{\mu\nu}u_\nu$ . Podendo assim escrever a Equação (1.24)

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + ph^{\mu\nu} \quad (1.26)$$

onde  $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$  é o **tensor projeção**. Utilizaremos como forma abreviada a notação “;” para indicar derivadas covariantes e “;” para indicar derivadas contravariantes em todas as coordenadas. Assim, das identidade tensoriais derivadas da geometria Riemanniana temos a Identidade de Bianchi [39], a derivada covariante do tensor momento energia que representa na forma tensorial a conservação da energia,

$$\boxed{T_{\nu;\mu}^\mu = 0}.$$

Por fim, as equações que irão reger a relação entre a curvatura do espaço tempo descrito pelo Tensor de Ricci, respeitando a equação e continuidade para um fluido perfeito serão as equações de Einstein de campo de [40].

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

As equações de campo de Einstein (1.27) descritas pelos tensores métricos e o tensor momento energia consolidam a generalização da mecânica newtoniana e da relatividade



---

restrita descrevendo também a gravitação não mais como uma força, mas sim, como uma propriedade geométrica do espaço. Essas considerações dão base para o desenvolvimento da compreensão física do universo e solucionam problemas como o periélio anômalo do Mercúrio cuja gravitação Newtoniana era incapaz de explicar. Dessa forma a relatividade geral de Einstein e sua teoria da gravitação não só explicavam todo o que já previa a mecânica Newtoniana como resolvia problemas que a mesma era incapaz.

# Capítulo 2

## Cosmologia

Os estudos dos céus e do universo são divididos em três grandes áreas. São elas a **astronomia** responsável pelo estudo do movimento e da dinâmica dos corpos celestes, planetas, cometas, asteroides, satélites, naturais e artificiais [41,42], a **astrofísica** encarregada de estudar a natureza física e química dos corpos celestes como galáxias e aglomerados de galáxias, supernovas, quasares, buracos negros, entre outros, possuindo como principal alicerce a química, a física nuclear [43] e a mecânica quântica [44]. Por fim a **cosmologia** (do grego Κοσμολογία, Κοσμο= cosmos/ordem/mundo + λογία= “discurso”/“estudo”) é a área responsável por estudar o universo como um todo, sua origem, evolução, composição e história usando como base todo o conhecimento astronômico e astrofísico para consolidar suas argumentações. Por mais que estejam relativamente separadas, avanços em qualquer uma dessas áreas contribui significativamente para a outra [45].

### 2.1 Princípio Cosmológico

A teoria que descreve o universo como compreendemos hoje parte de um princípio que afirma que em larga escala, mais precisamente escalas menores que  $100\text{Mpc} \sim 300$  milhões de anos luz, **o universo é homogêneo e isotrópico**, ou seja, não existe nenhuma região ou direção privilegiada no universo. Esta hipótese fundamenta também na suposição teórica de George Gamov, Ralph Alpher e Robert Herman [46] de que o

universo era bombardeado por todas as direções por uma radiação emitida na frequência do micro-ondas, caracterizada pela emissão do corpo negro que foi descoberta acidentalmente e experimentalmente em 1965 por Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson [16]. Essa emissão chamada de Radiação Cósmica de Fundo, ou do, inglês *Cosmic Microwave Background* (CMB) como mostra a imagem oficial do Planck ( )Figura 2.1) e é uma evidência histórica da formação primordial do universo.

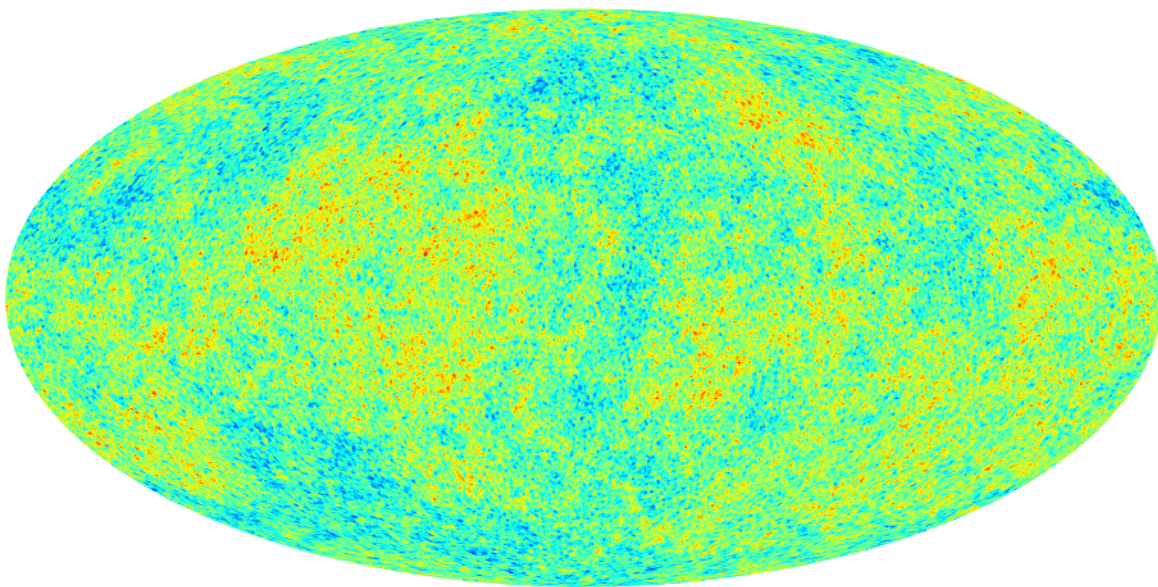


Figura 2.1: Radiação Cósmica de Fundo, imagem oficial do Planck [2].

Quando as observações de galáxias e aglomerados de galáxias são realizadas em grandes distâncias é possível perceber distorções no espectro eletromagnético emitido pelas galáxias causado pelo efeito doppler da luz para o vermelho caso elas estejam se afastando do observador, como mostra a Figura 2.2, ou para o azul caso a fonte esteja se aproximando do observador. Este efeito é a primeira evidência observacional de um universo, homogêneo e isotrópico em movimento.

A velocidade de afastamento da fonte, pode ser mensurado pela seguinte relação

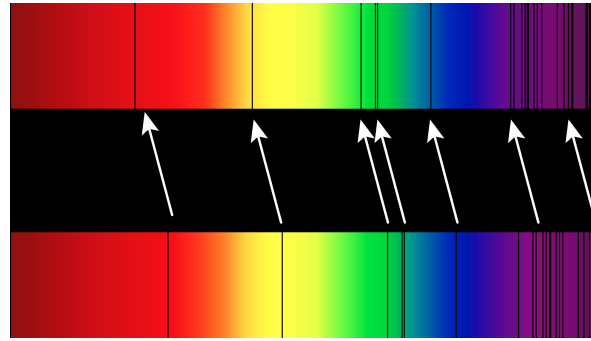


Figura 2.2: Linhas de absorção no espectro visível de um superaglomerado de galáxias desviadas para o vermelho [3].

entre o comprimento de onda observado e o emitido através de

$$\lambda_{observado} = \lambda_{fonte} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad (2.1)$$

onde  $v$  representa a velocidade do corpo em relação ao observador,  $c$  a velocidade da luz,  $\lambda_{fonte}$  o comprimento de onda emitido pelo corpo e  $\lambda_{observado}$  o comprimento de onda observado.

Em 1929 o astrônomo Edwin Powell Hubble publicou o trabalho *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae* [4], mostrando a relação entre a velocidade afastamento das galáxias e sua distância até nós.

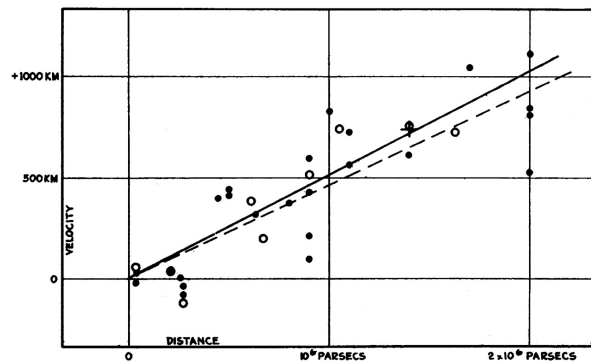


Figura 2.3: Relação velocidade-distância entre nebulosas extra-galácticas [4].

Constatando que a velocidade de afastamento aumentava com a distancia, O gráfico

2.3 foi construído com 46 galáxias levando-o à chamada de **Lei de Hubble-Lemaître**

$$v = H_0 d, \quad (2.2)$$

onde  $v$  é a velocidade,  $d$  a distância, e  $H_0$  é o parâmetro de Hubble-Lemaître e possui a unidade de medida de  $km \cdot s^{-1} Mpc^{-1}$ . Este desvio para o vermelho, observado por Hubble pode ser usado como medida de distância e pode ser mensurado através de

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1, \quad (2.3)$$

onde  $z$  é o desvio relativo.

## 2.2 Matéria Escura

Compreender a quantidade de matéria no universo é um dos papéis fundamentais da cosmologia para determinar sua origem e evolução, uma vez que a mesma, possui um papel essencial na dinâmica cosmológica. A principal forma de medir a massa de um determinado corpo celeste é utilizando a matéria luminosa [47]. Podemos usar como exemplo a matéria total do sistema solar. Os planetas, asteroides e poeira possuem somados uma quantidade de massa muito inferior a quantidade de massa do Sol. No caso das estrelas da seqüência principal sabe-se que a eficiência na emissão luminosa é tanto maior quanto maior for a sua massa. O diagrama de Hertzsprung-Russell é um gráfico de distribuição que mostra a relação entre a magnitude absoluta ou luminosidade versus a massa estelar e a temperatura efetiva como mostra a Figura 2.4. De forma que, não só no nosso sistema solar, mas nas galáxias, o grande responsável pela sua matéria é a matéria luminosa ou mais especificamente a matéria bariônica.

Mensuramos essa quantidade de massa usando a razão entre a luminosidade emitida pelo Sol e sua massa

$$\frac{L_{\odot}}{M_{\odot}} \approx \text{Cte.} \quad (2.4)$$

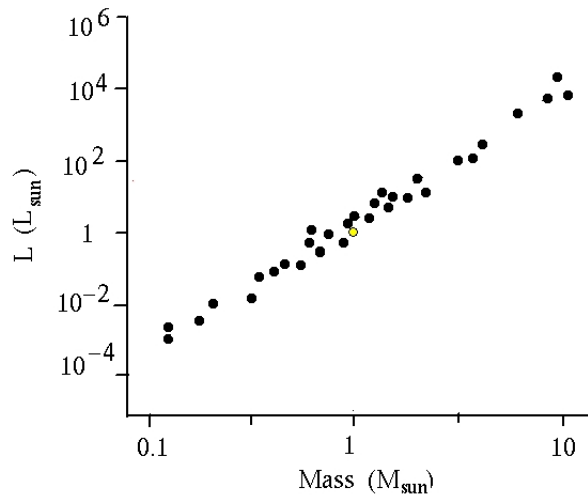


Figura 2.4: Diagrama de Hertzsprung-Russell onde o ponto amarelo representa a massa e luminosidade do Sol [5].

Assim, supõe-se pela astrofísica que essa relação serve para qualquer corpo luminoso, podendo inclusive extrapolar essa relação para galáxias.

Outra forma de mensurar a massa de uma galáxia é utilizando a velocidade de rotação de uma galáxia segundo a relação,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (2.5)$$

Esta relação respeita a mecânica newtoniana uma vez que a velocidade de rotação de um sistema é proporcional a sua distribuição de massa. Logo, espera-se pela distribuição de matéria bariônica ou matéria visível que a velocidade de rotação das galáxias tenda a diminuir com o raio uma que vez observacionalmente percebe-se um decaimento do numero corpos luminosos nas galáxias diretamente proporcional ao raio da galáxia, entretanto o que se observa é o que mostra Figura 2.5,

Para que seja possível manter a velocidade de rotação das galaxias é necessário haver uma *auréola* ou do ingles halo, de matéria, mesmo que não seja observada visivelmente [48, 49]. Esta constatação observacional informa que deve existir mais matéria nas galáxias do que conseguimos observar por conta desse fenômeno gravitacional. A essa contribuição a mais de matéria é dado o nome de **Matéria Escura**. Ela é extremamente necessária para as galáxias, servindo como uma cola cósmica para as galáxias e para os

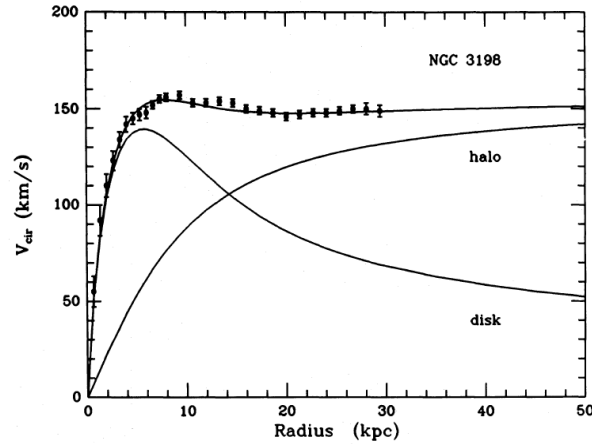


Figura 2.5: Curva de matéria visível *vs* matéria escura [6].

aglomerados de galáxias.

Outra evidência da matéria escura estão nas lentes gravitacionais como mostra a Figura 2.6 [50, 51]. Uma das principais evidências que validou a teoria da relatividade geral de Albert Einstein foi a observação da deflexão dos raios luminosos por corpos massivos comprovando que a matéria, curvando o espaço-tempo possui a possibilidade de alterar a direção e até aumentar a intensidade da luz observada segundo a referência [52]. Observa-se também que galáxias e aglomerados de galáxias são defletidas por corpos não luminosos mostrando que existem em determinadas regiões do espaço algo que interage gravitacionalmente sem emitir luz.

Uma importante pergunta que guia a cosmologia é a origem dessa matéria e qual é sua porcentagem no universo. Observações da Radiação Cósmica de Fundo e as próprias observações do parâmetro de Hubble em larga escala, recentemente realizadas pelo satélite Planck em 2018 [9], discriminam um valor de  $\Omega_c h^2 = 0.120 \pm 0.001$  para a densidade da matéria escura fria,  $\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0001$  para a densidade dos bárions,  $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km/s/Mpc}$  para o parâmetro de Hubble e  $\Omega_{m0} = 0.315 \pm 0.007$  para a densidade da matéria para o modelo padrão da cosmologia.

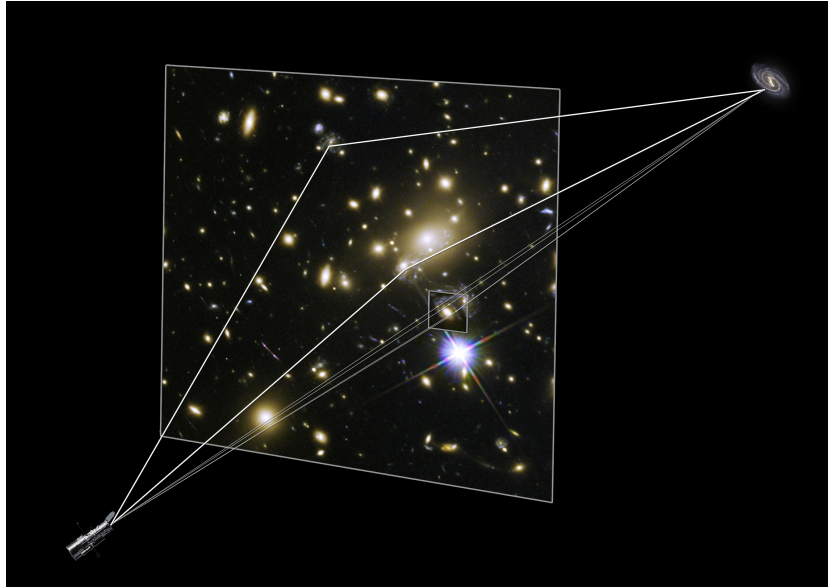


Figura 2.6: Lentes gravitacionais em grandes aglomerados de galáxias contendo matéria escura e matéria bariônica [7].

## 2.3 Equação de Friedmann

Supondo um universo com curvatura  $k$  e respeitando o princípio cosmológico uma das possíveis soluções para as equações de campo de Einstein é a solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ou FLRW [53], cuja métrica que descreve o universo é

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - k^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \phi^2 \right), \quad (2.6)$$

onde  $a(t)$  representa o fator de escala,  $r, \theta, \phi$  são coordenadas comóveis e  $t$  o tempo cosmológico.

Para tal métrica, a equação de Friedmann é dada por

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}. \quad (2.7)$$

do qual é definido a função de Hubble como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.8)$$



Assim descremos a massa do universo como

$$M = \rho_c \frac{4\pi}{3} r^3, \quad (2.9)$$

onde  $\rho_c$  é a densidade crítica para para a expansão o universo e  $r$  é o raio do universo.

Assim

$$\frac{1}{2} H_0^2 m r^2 - \frac{4G\pi}{3} \rho_c m r^2 = 0. \quad (2.10)$$

A densidade crítica é:

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.11)$$

Uma das formas de comparação dentre modelos cosmológicos é o parâmetro de densidade total

$$\Omega_c \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho}{3H_0^2}, \quad (2.12)$$

onde a densidade pode ser descrita como o somatório das densidades dos corpos.

$$\Omega_0 = \Omega_{m0} + \Omega_{k0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda 0}, \quad (2.13)$$

onde  $\Omega_m$  representa a densidade da matéria,  $\Omega_k$  a densidade de curvatura,  $\Omega_r$  a densidade da radiação e  $\Omega_\Lambda$  a densidade da constante cosmológica. Se  $\Omega_0 = 1$  estamos em um universo plano, se  $\Omega_c > 1$  encontramos o universo com geometria hiperbólica, caso  $\Omega_c < 1$  o universo encontra-se com curvatura esférica como mostra a Figura 2.7.

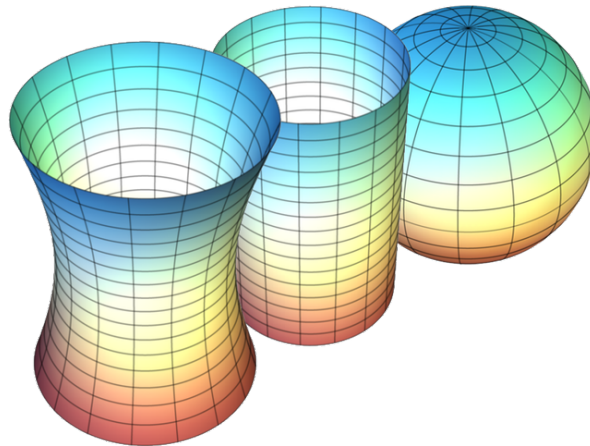


Figura 2.7: Possíveis curvaturas do universo. A esquerda um universo com curvatura aberta, ao meio um universo espacialmente plano e a direita um universo com curvatura esférica [8].

## 2.4 Modelos Cosmológicos

Cada modelo cosmológico possuirá um específico formato do qual o parâmetro de Hubble evoluirá juntamente com os parâmetros do modelo. Os parâmetros devem ser ajustados de acordo com as observações e as suposições teóricas.

### 2.4.1 Einstein–de Sitter

Em 1917 Einstein escreve o artigo *Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity* [54] onde propõe um universo esférico e estático fruto da solução das suas equações de campo. Entretanto, um universo estático colapsaria por força gravitacional.

O matemático, físico e astrônomo neerlandês Willem de Sitter propôs um universo que possui dinâmica porém sem matéria e em 1932 juntos publicam um artigo intitulado *On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe* [55] assumindo um universo espacialmente plano e desaparecendo com a constante cosmológica 2.8. No modelo, Einstein e de Sitter derivaram de uma relação simples entre a densidade média de matéria no universo e sua expansão de acordo com

$$H^2 = \frac{\kappa \rho_m}{3}. \quad (2.14)$$

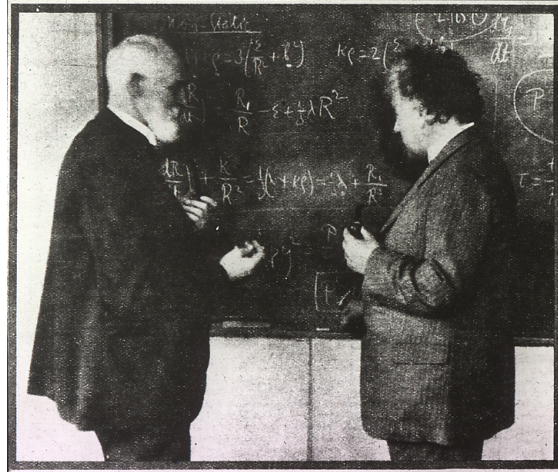


Figura 2.8: Albert Einstein e Willem de Sitter discutindo o universo. Em 1932 eles publicaram um artigo juntos descrevendo um modelo que mais tarde seria conhecido como universo de Einstein-de Sitter.

O universo de Einstein-de-Sitter foi particularmente popular nos anos 80, depois que a teoria da inflação cósmica que previu que a curvatura do universo deveria estar muito próxima de zero. Porém, nos anos 90 com as observações de galáxias, a radiação cósmica de fundo, supernovas e a comprovação de um universo acelerado esse modelo deu espaço a outro modelo cosmológico que abrangesse constante cosmológica e matéria escura fria.

### 2.4.2 $\Lambda$ CDM O modelo padrão da cosmologia

Nesta seção consideramos o universo na fase espacialmente plano, composto por constante cosmológica, matéria bariônica e matéria escura fria. Para este modelo conhecido como  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  *Cold Dark Mater*) escrevemos a função que determina o parâmetro de Hubble para cada instante de tempo do universo como

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a^{-3} + (1 - \Omega_{m0})}. \quad (2.15)$$

Tal modelo encontra-se possui dois parâmetros livres  $H_0$  e  $\Omega_{m0}$  que podem ser estimados determinados pelas observações.

Outro termo importante para a contribuição da dinâmica do universo é o fator de

desaceleração

$$q(t) \equiv -\frac{1}{r} \frac{1}{H^2} \frac{d^2}{dt^2} \quad (2.16)$$

que descreve a variação na taxa de expansão e pode ser escrita como

$$\frac{\rho_c(t)\Omega(t)}{3H^2} = \frac{\Omega(t)}{2}. \quad (2.17)$$

O fator de desaceleração do universo descreve uma parte importante da dinâmica do universo, sua relação com  $H$  e com  $\Omega$  descreve uma parte importante da construção do modelo estudado.

### 2.4.3 Gás de Chaplygin

As recentes observações de Supernovas do tipo Ia [17] demonstram que vivemos em um universo em expansão acelerada. A candidata responsável por esse fenômeno, a chamada *energia escura*  $\Lambda$  é adicionada nas equações de Einsteins para solucionar este observável universo não estático.

No universo primordial um ponto de corte na escala de Planck leva a uma constante cosmológica que é, respectivamente,  $10^{123}$  a  $10^{55}$  vezes maior do que o valor observado,  $\Lambda/8\pi G \simeq 10^{-47}$  GeV. A ausência de uma simetria fundamental que poderia definir o valor de  $\Lambda$  para zero ou um valor muito pequeno leva-nos *ao problema da constante cosmológica*. A maioria dos cenários cosmológicos favorece um grande período dependente de tempo no passado (para gerar inflação em  $z \gg 10^{10}$ ) como mostra [56].

Entretanto por que a densidade da energia escura e a densidade de energia da matéria não possuem a mesma ordem de grandeza hoje? [57]

Uma possibilidade para a solucionar esse problema é imaginar que o termo cosmológico responsável pela expansão não é uma constante e sim uma quantidade variável no tempo que dependa das coordenadas, que decai com a expansão do universo

desde um alto valor inicial até o pequeno valor hoje observado. Para que seja possível respeitar a conservação covariante da energia total é preciso que o termo cosmológico responsável pela expansão dependente das coordenadas e do tempo esteja acoplado à matéria. Uma solução para esse problema é imaginar um gás cuja pressão esteja associada a função que descreve a densidade da matéria ao longo do tempo.

Neste modelo concebe-se a ideia de um fluido, mas especificamente um gás, cuja a pressão externa exercida sobre o mesmo tenha a dependência com densidade de energia escrita por

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (2.18)$$

onde  $A$  é uma constante e  $\alpha$  um parâmetro livre do modelo.

Um gás que possui a pressão escrita nesta configuração é chamada de Gás de Chaplygin em homenagem ao físico Soviético Sergey Alexeyevich Chaplygin (1869-1920) [?]. Usando a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.19)$$

ou

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} \left( \rho - \frac{A}{\rho^\alpha} \right) = 0, \quad (2.20)$$

e integrando a Equação (2.20)

$$\int \frac{d\rho}{\left( \rho - \frac{A}{\rho^\alpha} \right)} = - \int 3 \frac{da}{a}, \quad (2.21)$$

encontramos a solução

$$\rho = \left[ A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (2.22)$$

onde  $B$  surge como uma constante de integração.

Podemos pensar num gás composto por duas componentes, uma composta por matéria cujo o termo da pressão sera nulo uma vez a matéria possui apenas efeito de acoplamento gravitacional, e uma componente composta pelo vácuo com equação de estado  $p_V = -\rho_V$ . Sendo assim, o gás ficaria com as seguintes densidades

$$\rho = \rho_m + \rho_V, \quad (2.23)$$

$$p_V = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (2.24)$$

Dessa forma, se aumentamos a quantidade de matéria no universo a pressão poderá aumentar ou diminuir, esse vinculo dependerá do valor de  $\alpha$ . Dessa forma somos capazes de obter

$$\rho_V = \rho_{V0} \left( \frac{H}{H_0} \right)^{-2\alpha}. \quad (2.25)$$

Fixando  $a_0 = 1$  e  $H(a_0) = H_0$ , avaliados no tempo presente, podemos expressar as constantes  $A$  e  $B$  em termos de  $H_0$  e  $\Omega_{m0}$

$$A = (3H_0^2)^{1+\alpha} (1 - \Omega_{m0}), \quad (2.26)$$

$$B = \Omega_{m0} (3H_0)^{1+\alpha}. \quad (2.27)$$

de modo a encontrar que

$$H = H_0 \left[ 1 - \Omega_{m0} + \frac{\Omega_{m0}}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}, \quad (2.28)$$

$$\rho_m = 3H^2 - 3H_0^{2(1+\alpha)} (1 - \Omega_{m0}) H^{-2\alpha}. \quad (2.29)$$

Um modelo cosmológico, descrito pelo Gás de Chaplygin sem radiação, sem curvatura, contendo somente energia escura e matéria, possui uma dependência de três parâmetros. A constante de Hubble  $H_0$  o parâmetro de densidade da matéria hoje  $\Omega_{m0}$  e  $\alpha$ .

Observe que se fizermos o parâmetro  $\alpha = 0$  recuperamos a Equação (2.15) que é o parâmetro de Hubble para o  $\Lambda$ CDM, nesse caso, podemos afirmar que o  $\Lambda$ CDM é um caso particular para a classe de modelos construídos sobre o Gás de Chaplygin.

Uma análise inicial para a evolução da função de Hubble para diferentes valores de  $\alpha$  usando  $\Omega_{m0} = 0.315$  e  $H_0 = 67.4$  [9] com os dados de [58] é visto na Figura 2.9

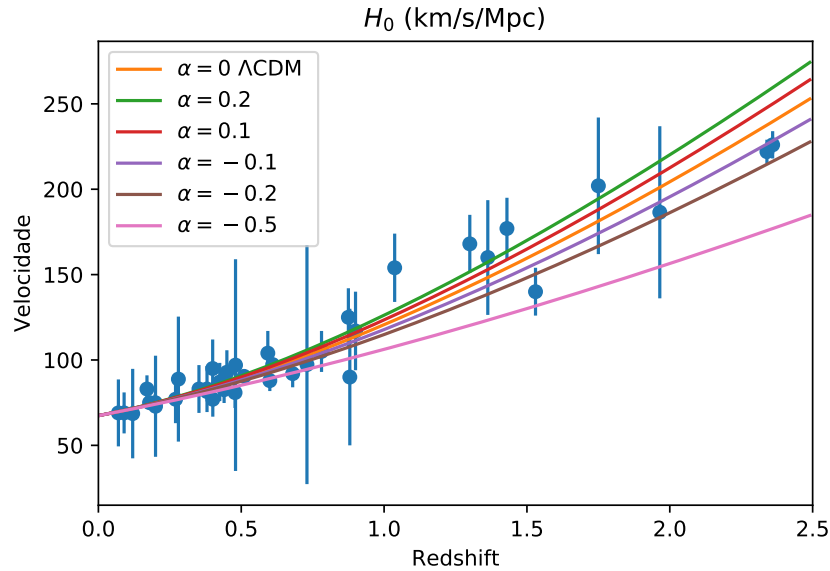


Figura 2.9: Evolução da função de Hubble para casos particulares do modelo de Gás de Chaplygin Generalizado onde foram utilizados como parâmetros  $H_0 = 67.4$  km/s/Mpc e  $\Omega_{m0} = 0.315$  de acordo com [9].

Logo, o modelo de Gás de Chaplygin ou abreviadamente GCG (*Generalized Chaplygin Gás*) discrimina uma série de modelos cosmológicos dependentes do parâmetro  $\alpha$  do qual o  $\Lambda$ CDM é um caso particular.

## 2.5 Distâncias Cosmológicas

Uma vez estabelecida a métrica do universo é necessário um método para medir distâncias. Como não podemos estender uma régua de onde estamos até os corpos luminosos a única informação que temos é da luz que chega até nós e o seu desvio para vermelho.

Supondo que um feixe de luz viaje em linha reta seguindo a métrica FLRW de acordo com a Equação (2.6), e supondo que a observação seja feita em  $t = 0$  na posição

$s = 0$  correspondente a  $z = 0$ , a **distância própria percorrida**  $d_p$  será

$$d_p \equiv s = \int_0^{s_1} ds. \quad (2.30)$$

Já que  $ds = -cdt/a(t)$ , a relação para a distância se tornará

$$d_p = - \int_{t_0}^t \frac{c}{a(t)} dt. \quad (2.31)$$

Para que possamos escrever essa distância em função do redshift é necessário fazer uma mudança de variável de  $dt$  para  $dz$  uma vez que a informação física que possuímos é  $z$ , logo

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dt} dt = -\left(\frac{a_0}{a}\right) \left(\frac{da/dt}{a}\right) dt = -(1+z)H dt, \quad (2.32)$$

assim, fazendo a devida mudança de variável

$$d_p = c \int_t^{t_0} \frac{a_0}{a} dt = -c \int_z^0 (1+z') \frac{dz'}{(1+z')H(z')}. \quad (2.33)$$

Logo a distância própria será calculada como

$$d_p = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.34)$$

Outra forma de medirmos distâncias é através das chamadas velas padrões. Supondo que uma classe de corpos celestes possuem a mesma magnitude aparente em todo o universo, podemos dizer que  $L_s$  é a luminosidade absoluta emitida por esse corpo e que  $f$  é o fluxo mensurado, definiremos **distância luminosidade** como:

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi f}. \quad (2.35)$$

Podemos relacionar a distância própria e a distância luminosidade como demonstra



[59, 60] de forma que

$$d_L = a_0 r(1+z) = d_p(1+z), \quad (2.36)$$

assim,

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.37)$$

Generalizando para o caso de um universo com curvatura

$$d_L = \begin{cases} \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} \sin \left( \sqrt{-\Omega_K} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) & \text{para } k < 0 \\ \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} & \text{para } k = 0 \\ \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} \sinh \left( \sqrt{\Omega_K} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) & \text{para } k > 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

onde  $E(z) \equiv H(z)/H_0$ .

Outra forma de medir distâncias em escalas cosmológicas é a **distância diâmetro angular** através do comprimento do objeto  $l$  perpendicular a linha de visão e a abertura angular  $\delta\theta$  como

$$D_A \equiv \frac{l}{\delta\theta} \quad (2.39)$$

de forma que

$$ds = ar\delta\theta = l. \quad (2.40)$$

Para que possamos mensurar essa distância precisamos saber de corpos que possuem constantemente o mesmo comprimento como uma *régua padrão* para isso temos

$$l = \frac{a_0 r \delta\theta}{1+z}, \quad (2.41)$$

o que nos leva

$$D_A = \frac{a_0 r}{1+z} \quad (2.42)$$

assim

$$D_A(1+z) = d_p(t_0) = \frac{d_L}{1+z} \quad (2.43)$$

Dessa forma, mensuramos a distância diâmetro angular como

$$D_A = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.44)$$

Medir distâncias em cosmologia é de extrema importância para área de pesquisa uma vez que a distância dos corpos dirá muito sobre a própria estrutura do universo e será utilizado no cálculo da distorção no espaço dos redshift no **Capítulo 3** e em seguida no **Capítulo 5** onde, de forma estatística, mensuraremos os melhores valores para diversos parâmetros cosmológicos.

# Capítulo 3

## Modelo perturbativo

O princípio cosmológico, alicerce da cosmologia moderna, possui como principal pilar a compreensão de que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Porém, no universo observável flutuações no campo de densidade da matéria estão presentes, sendo necessário relaxar a hipótese de homogeneidade e isotropia que se fundamenta na métrica de FLRW. A métrica do espaço-tempo é escrita como a soma de uma parte não perturbada, neste caso FLRW, e uma parte que chamamos de métrica perturbada [61].

### 3.1 Perturbação na Métrica

Considere a métrica de FLRW espacialmente plana ( $k = 0$ ) na forma

$$ds^2 = a^2(t) [-d\eta + dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (3.1)$$

onde  $dt = a d\eta$ . Podemos escrever que a métrica do espaço-tempo é construída pela soma de uma métrica de base  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  mais uma pequena perturbação  $\delta g_{\mu\nu} \ll 1$ , de forma que o intervalo invariante fica escrito como

$$ds^2 = [g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu, \quad (3.2)$$

onde

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

A contribuição  $\delta g_{\mu\nu}$  da métrica possui componentes escalares, vetoriais e tensoriais, dessa forma

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{(escalar)} + \delta g_{\mu\nu}^{(vetorial)} + \delta g_{\mu\nu}^{(tensorial)}. \quad (3.4)$$

As **perturbações escalares** na métrica são dadas por,

$$\delta g_{\mu\nu}^{(s)} = \begin{pmatrix} \delta g_{00} & \delta g_{0i} \\ \delta g_{i0} & \delta g_{ij} \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} -2\phi & \nabla_i B \\ \nabla_i B & \psi \delta_{ij} + \nabla_i \nabla_j E \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde quatro potencias da métrica  $\phi$ ,  $B$ ,  $\psi$  e  $E$  devem ser incluídos.

As **perturbações vetoriais** na métrica serão,

$$\delta g_{\mu\nu}^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & s_i \\ s_i & \nabla_i F_j + \nabla_j F_i \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

onde os vínculos  $\nabla^i s_i = 0$  e  $\nabla^i F_i = 0$  devem ser satisfeitos, isto é, os dois vetores devem ser livres de divergências.

Finalmente as **perturbações tensoriais** na métrica serão,

$$\delta g_{\mu\nu}^{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde  $h_{ij}$  é livre de traço e livre de divergência

$$h_i^i = h_{ij}^j = 0, \quad (3.8)$$

que darão origem às ondas gravitacionais.

No regime linear, como aqui é tratado, as ondas gravitacionais não se acoplam às flutuações da matéria e as perturbações vetoriais decaem com a expansão do universo. As perturbações de interesse cosmológico estão nas flutuações escalares da métrica pois estas se acoplam às flutuações na densidade da matéria. Sendo assim, a métrica para a componente escalar, interessante para este trabalho, pode ser escrita como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2\nabla_i B dx^i d\eta + (1 + 2\psi\delta_{ij} + \nabla_i \nabla_j E) dx^i dx^j \right]. \quad (3.9)$$

### 3.1.1 Calibres

Ao introduzir pequenas flutuações em torno da métrica de FLRW pequenas transformações de coordenadas do espaço-tempo podem induzir flutuações fictícias nas quantidades observáveis do universo. Os potenciais da métrica devem ser invariantes por uma transformação geral das coordenadas, e para que isso ocorra condições devem ser fixadas sobre a métrica, em outras palavras, o calibre deve ser escolhido [60] Cap 4

Considere uma transformação geral das coordenadas dada por

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (3.10)$$

onde  $\xi^\mu \ll 1$  é um 4-vetor infinitesimal  $x^\mu$  representa o vetor de base.

Sob uma mudança das coordenadas o tensor métrico se transforma como

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (3.11)$$

A derivada parcial que aparece na expressão acima fica na forma

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha, \quad (3.12)$$

de modo que a equação (3.11) pode ser aproximada, em primeira ordem, por

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \approx g_{\mu\nu}(x) - \partial_\nu \xi^\alpha g_{\mu\alpha}(x) - \partial_\mu \xi^\beta g_{\nu\beta}(x). \quad (3.13)$$

Sabendo que

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \tilde{g}_{\mu\nu}(x + \xi), \quad (3.14)$$

e expandido-a em série de potência em torno do ponto  $x$  até a primeira ordem, obtemos

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \approx \tilde{g}_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \xi^\beta(x). \quad (3.15)$$

Usando a relação acima na expressão (3.13) encontramos a lei de transformação da métrica perturbada

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - g_{\mu\alpha}^{(0)} \partial_\nu \xi^\alpha - g_{\nu\beta}^{(0)} \partial_\mu \xi^\beta - \partial_\beta g_{\mu\nu}^{(0)} \xi^\beta. \quad (3.16)$$

Vamos agora verificar como as transformções de coordenadas atuam nas flutuações escalares da métrica. Para isso, comecemos por considerar as componentes  $\mu = 0$  e  $\nu = 0$  na lei de transformação acima. Neste caso, encontramos

$$\tilde{\phi} = \phi - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \quad (3.17)$$

onde definimos  $\mathcal{H} = a'/a$  da qual o índice “'” representa a derivada em relação ao tempo conforme.

Considerando as componentes espacial e temporal  $\mu = i$  e  $\nu = 0$ , encontramos

$$a^2 \nabla_i \tilde{B} = a^2 \nabla_i B + a^2 \nabla_i B + a^2 \nabla_i \xi^0 - a^2 \delta_{ij} \partial_o \xi^i. \quad (3.18)$$

Todo vetor pode ser decomposto em dois vetores perpendiculares entre si, de forma que:

$$\xi_i = \nabla_i \xi + \xi_i^\Gamma,$$

e como

$$\nabla_i \xi^i = \nabla^i \nabla_i \xi,$$

obtemos

$$\tilde{B} = B + \xi^0 - \xi'. \quad (3.19)$$

Por fim, tomando as componentes  $\mu = i$  e  $\nu = j$ , obtemos

$$2a^2 \left( \tilde{\psi} \delta_{ij} + \nabla_i \nabla_j \tilde{E} \right) = 2a^2 (\psi \delta_{ij} + \nabla_i \nabla_j E) - 2a^2 \partial_i \xi_j - 2a^2 \mathcal{H} \delta_{ij} \xi^0. \quad (3.20)$$

Para  $i \neq j$  obtemos

$$\tilde{E} = E - \xi. \quad (3.21)$$

e para  $i = j$  temos

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H} \xi^0. \quad (3.22)$$

Podemos perceber que em uma determinada transformada de coordenadas os novos potenciais irão depender dos incrementos das coordenadas e suas derivadas.

Em resumo, listamos os potenciais da métrica escritos nessas novas coordenadas como [62]

$$\tilde{\phi} = \phi - \xi^{0'} - \mathcal{H} \xi^0, \quad (3.23)$$

$$\tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad (3.24)$$

$$\tilde{E} = E - \xi, \quad (3.25)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H} \xi^0. \quad (3.26)$$

Com esses potenciais escalares podemos fazer restrições particulares aos potenciais de calibre, de forma que, possamos escrever as equações de uma forma simplificada ou conveniente de acordo com determinado problema físico.

Não fica difícil mostrar que as flutuações na densidade de energia e no potencial

velocidade se transformam como

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho - \rho'\xi^0, \quad (3.27)$$

$$\tilde{v} = v + \xi', \quad (3.28)$$

onde  $v$  representa o campo de velocidades do fluido irrotacional que pode ser definido pela perturbação da 4-velocidade  $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$ , uma vez que  $\delta u_i \equiv v_{,i}$ .

### Calibre Newtoniano

Existem muitas possibilidades para fixar o calibre. O primeiro calibre a ser analisado é o calibre Newtoniano, ou calibre longitudinal como pode ser visto com mais detalhes em [55, 63, 64]. Nesse calibre adotamos um sistema de coordenadas tal que  $\tilde{B} = \tilde{E} = 0$ . Com esta condição, fixamos completamente o sistema de coordenadas

$$\xi = E, \quad (3.29)$$

$$\xi^0 = E' - B. \quad (3.30)$$

Nestas condições os potenciais escalares da métrica se transformam como

$$\tilde{\phi} = \phi - \mathcal{H}(E' - B) - (E' - B), \quad (3.31)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H}(E' - B). \quad (3.32)$$

Nota-se que os potenciais acima são invariantes por uma transformação geral das coordenadas.



### Calibre Síncrono

O calibre síncrono é definido pela escolha  $\tilde{\phi} = \tilde{B} = 0$ , de modo que não conseguimos fixar unicamente o sistema de coordenadas dado por

$$\xi^0 = \frac{1}{a} \int a\phi d\eta + C_2(x^i), \quad (3.33)$$

$$\xi = \int \left[ B + \frac{1}{a} \int a\phi d\eta + C_2(x^i) \right] d\eta + C_1(x^i). \quad (3.34)$$

Desta forma observamos que o calibre síncrono possui uma dependência com uma família de curvas a serem especificadas. O calibre síncrono é muito usado na literatura como podemos ver em [65,66], quando eliminamos adequadamente as flutuações fictícias aqui presentes.

### Calibre Comóvel Ortogonal

Neste calibre definimos o sistema de coordenadas ao fazer a escolha  $\tilde{v} = \tilde{B} = 0$ . Desta maneira, as flutuações se transformam como

$$\tilde{\phi}^c = \phi + \mathcal{H}(B + v) + (B + v)', \quad (3.35)$$

$$\tilde{E}^c = E + \int v d\eta, \quad (3.36)$$

$$\tilde{\phi}^c = \phi - \mathcal{H}(B + v), \quad (3.37)$$

$$\tilde{\delta\rho}^c = \delta\rho + \rho'_0(B + v). \quad (3.38)$$

### 3.1.2 Equações de movimento

Por completeza, iremos apresentar de forma breve o conjunto de equações que governam a evolução das perturbações no calibre Newtoniano. O procedimento consiste em decompor as equações de Einstein em duas partes: uma que descreva a evolução do universo homogêneo e isotrópico desacoplada de uma parte perturbada na ordem linear. Os detalhes dos cálculos podem ser encontrados no livros textos [60,67]. Desta

forma, as equações de Einstein perturbadas levam às componentes

$$-\nabla^2\psi + 3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) = -\frac{a^2}{2}\delta\rho, \quad (3.39)$$

$$\psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = \frac{a^2}{2}\delta p + \frac{a^2}{3}\nabla^2\pi, \quad (3.40)$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi = -\frac{a^2}{2}(\rho + p)v, \quad (3.41)$$

$$\psi - \phi = a^2\pi, \quad (3.42)$$

onde  $\pi$  representa o estresse anisotrópico que resulta em

$$\delta u_j = a^2\delta u^j + a^2 B_j = v_{,j}, \quad (3.43)$$

e  $\delta\rho$  e  $\delta p$  são as flutuações no campo de densidade e pressão. A componente temporal da 4-velocidade se relaciona com a métrica através de

$$\delta u_0 = \delta u^0 = -\phi. \quad (3.44)$$

O próximo passo será obter as equações de conservação de energia e momento assumindo que o fluido perfeito é composto por duas componentes interagentes, matéria sem pressão e vácuo com pressão  $p_V = -\rho_V$ . A equação de conservação para cada componente será

$$T_m^{\nu\mu}{}_{;\mu} = Q^\nu, \quad (3.45)$$

$$T_V^{\nu\mu}{}_{;\mu} = -Q^\nu. \quad (3.46)$$

O tensor energia-momento de um fluido perfeito para cada componente é

$$T_A^{\mu\nu} = \rho_A u^\mu u^\nu + p_A h^{\mu\nu}. \quad (3.47)$$

onde  $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$  representa um tensor de projeção e  $Q^\mu$  um 4-vetor de transferência

energia-momento entre as componentes que pode ser decomposto em

$$Q^\mu = u^\mu Q + \bar{Q}^\mu, \quad (3.48)$$

onde  $Q = -u_\mu Q^\mu$ ,  $\bar{Q}^\mu = h^\mu_\nu Q^\nu$ ,  $u_\mu \bar{Q}^\mu = 0$  e  $u_\mu u^\mu = -1$ .

Em seguida projetamos as equações (3.45) e (3.46) ao longo de  $u^\mu$  e  $h^{\mu\nu}$ , para obter as equações de conservação de energia e momento considerando a taxa de expansão  $\Theta = 3H$ .

$$\rho_{m,\mu} u^\mu + \Theta \rho_m = -u_\mu Q^\mu, \quad (3.49)$$

$$\rho_{V,\mu} u^\mu = u_\mu Q^\mu, \quad (3.50)$$

$$\rho_m u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = \bar{Q}^\mu, \quad (3.51)$$

$$\rho_{V,\nu} h^{\nu\mu} = -\bar{Q}^\mu. \quad (3.52)$$

## Vácuo

A perturbação na equação (3.52) resulta na seguinte relação

$$\partial^i \delta p_V^c = -\partial^i \delta \rho_V^c = -\delta \bar{Q}^i, \quad (3.53)$$

onde utilizamos calibre comóvel com  $B = 0$ . Note que na ausência do termo espacial  $\delta Q^i$  o vácuo estaria distribuído homogêneamente no universo, e a matéria seguiria um movimento geodésico no espaço. Em outras palavras, a existência da transferência de momento está diretamente relacionada com perturbações na densidade de energia do vácuo.

A perturbação da equação (3.50) nos leva a transferência de energia entre as componentes

$$\delta Q^c = \dot{\rho}_V (\dot{v} + \phi) - \delta \dot{\rho}_V^c, \quad (3.54)$$

onde  $\delta(u^\nu u^\mu) = \partial_j (\dot{v} + \phi)$ , estamos adotando o ponto sobre as quantidades para representar derivadas com relação ao tempo cosmológico. Portanto, será necessário o

conhecimento da evolução das perturbações na densidade de energia do vácuo  $\delta\rho_V$  e da combinação  $\dot{v} + \phi$  para a determinação os termos fontes acima.

### Matéria sem pressão

Nos voltamos agora para a componente de matéria sem pressão. Perturbando a equação de momento (3.51) até primeira ordem, encontramos que

$$(\dot{v} + \phi)_{,j} = \frac{\delta\bar{Q}_j^c}{\rho_m}. \quad (3.55)$$

Como vimos, a existência da transferência de momento é devido a flutuações no termo de vácuo. Portanto, a combinação  $\dot{v} + \phi$  fica determinada pela lei de evolução para  $\delta\rho_V$ .

Finalmente, a perturbação na equação de conservação de energia (3.49) resulta em

$$\dot{\delta}_m^c + \frac{Q}{\rho_m} \delta_m^c + \delta\Theta^c = \frac{\delta Q^c}{\rho_m} + \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right) (\dot{v} + \phi). \quad (3.56)$$

A equação nos mostra que as perturbações no densidade de matéria deverão ser afetadas pela escolha do ansatz para a evolução das perturbações no termo de vácuo, além das soluções de base.

### Matéria bariônica

Vamos incluir nesta subseção equações que descrevem a evolução das perturbações da componente bariônica sem pressão. Sabemos que a interação dos bárions com os fótons em tempos primordiais faz com que a evolução das flutuações de densidade dos bárions seja diferente da evolução da matéria escura. Nesta fase, as flutuações de matéria escura podem crescer gravitacionalmente, enquanto que a dos bárions não por conta da pressão do fluido fóton-bárion. Mas em tempos tardios, quando a energia escura domina a taxa de expansão do universo, diferenças na evolução da densidade das duas componentes devido a interação no setor escuro deverão existir.

Como a componente bariônica se conserva separadamente das componentes escuras, fica direto obter a equação de evolução para o contraste de densidade  $\delta_b$ . Basta, tomar

os termos de transferência de energia-momento iguais a zero nas equações obtidas para a matéria sem pressão na subseção anterior. Sendo assim, temos

$$\dot{\delta}_b^c + \delta\Theta^c = 0, \quad (3.57)$$

$$(\dot{v}_b + \phi)_{,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_b = -\phi. \quad (3.58)$$

A primeira equação mostra que a evolução da densidade de energia dos bárions depende da perturbação na taxa de expansão do universo  $\delta\Theta^c$ , que será dada pela equação de Raychaudury apresentada na subseção abaixo. A segunda mostra que os bárions sem pressão, que representam em torno de 4 % do conteúdo de energia total, seguem geodésicas e caem nos poços de potenciais gravitacionais criados pela matéria.

### Equação de Raychaudury

Para completar e fechar o sistema de equações acima, necessitamos de uma equação de evolução para a perturbação da taxa de expansão  $\delta\Theta^c$  e de um ansatz para a densidade de energia do vácuo  $\delta\rho_V$ .

Como dissemos, a equação de Raychaudhuri [68] descreve a evolução da taxa de expansão do universo  $\Theta$ , sendo dada por

$$\Theta_{;\mu}u^\mu = -\frac{1}{3}\Theta^2 + (u^\mu_{;\nu}u^\nu)_{;\mu} - \frac{1}{2}(\rho_m - 2\rho_V), \quad (3.59)$$

onde estão ausentes as contribuições da vorticidade e de cisalhamento. Perturbando tal equação até a ordem linear, podemos encontrar

$$\delta\dot{\Theta}^c + \frac{2}{3}\Theta\delta\Theta^c + \frac{1}{2}\rho_m\delta_m^c = \delta\rho_V^c + \left(\frac{\nabla^2}{a^2} + \dot{\Theta}\right)(\dot{v} + \phi). \quad (3.60)$$

### 3.1.3 Modelo Geodésico

Como vimos nas discussões anteriores, é necessário escolher um ansatz para a perturbação na densidade do vácuo e assim determinar a evolução das flutuações de densidade de matéria e dos bárions. A escolha mais simples é assumir que o termo de vácuo

está distribuído homogêneamente através de todo espaço, isto é, ao fazermos a escolha  $\delta\rho_\Lambda^c = 0$  aqueles termos fontes que aparecem nas equações acima são identicamente iguais a zero. Portanto, o conjunto de equações se reduz para

$$\dot{v} = -\phi, \quad (3.61)$$

$$\dot{v}_b = -\phi, \quad (3.62)$$

$$\dot{\delta}_m^c + \frac{Q}{\rho_m} \delta_m^c + \delta\Theta^c = 0, \quad (3.63)$$

$$\dot{\delta}_b^c + \delta\Theta^c = 0, \quad (3.64)$$

$$\delta\dot{\Theta}^c + \frac{2}{3}\Theta\delta\Theta^c + \frac{1}{2}\rho_m\delta_m^c = 0. \quad (3.65)$$

As duas primeiras equações mostram que matéria e os bárions seguem geodésicas, e chamaremos este de modelo geodésico. Agora é direto obter equações diferenciais de segunda ordem para  $\delta_m$  e  $\delta_b$ . Para isso, diferenciamos as equações (3.63) e (3.64) com relação ao tempo e usando as equações (3.65)-(3.60) obtemos

$$\ddot{\delta}_m^c + \left(2H + \frac{Q}{\rho_m}\right) \dot{\delta}_m^c + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\rho_m}\right) + 2H\frac{Q}{\rho_m} - \frac{1}{2}\rho_m\right] \delta_m^c = 0, \quad (3.66)$$

$$\ddot{\delta}_b^c + 2H\dot{\delta}_b^c - \frac{1}{2}\rho_m\delta_m^c = 0. \quad (3.67)$$

Aqui as soluções de base são

$$\frac{Q}{\rho_m} = -3\alpha H_0(1 - \Omega_{m0}) \left(\frac{H}{H_0}\right)^{-(2\alpha+1)}, \quad (3.68)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\rho_m}\right) = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{Q}{H}, \quad (3.69)$$

$$H = H_0 \left[1 - \Omega_{m0} + \frac{\Omega_{m0}}{a^{3(1+\alpha)}}\right]^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}, \quad (3.70)$$

$$\rho_m = 3H^2 - 3H_0^{2(1+\alpha)}(1 - \Omega_{m0})H^{-2\alpha}, \quad (3.71)$$

$$\rho_b = 3H_0^2 \Omega_{b0} a^{-3}. \quad (3.72)$$

As equações diferenciais serão integradas usando-se em  $z = 1000$  as condições iniciais

$$\delta_m = \delta_b = 10^{-5} \text{ e } \frac{d\delta_m}{dz} = \frac{d\delta_b}{dz} = 0.$$

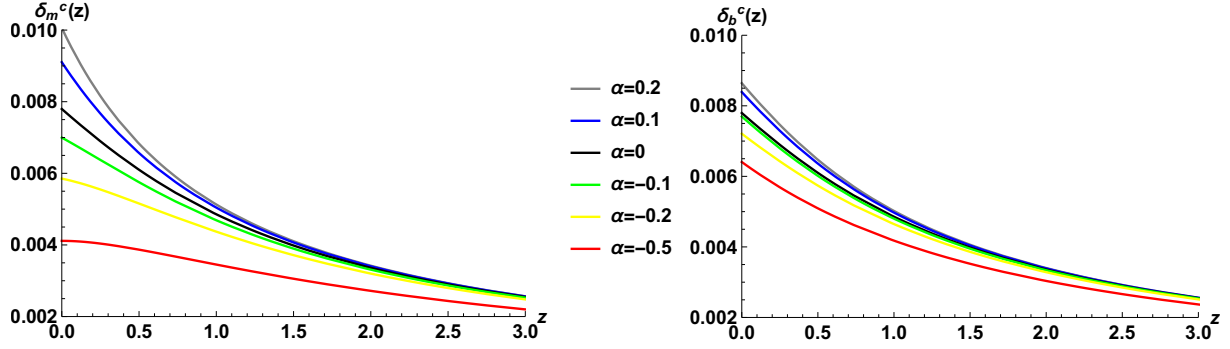


Figura 3.1: À esquerda, contraste da densidade da matéria, e à direita o contraste da densidade dos bárions para diferentes valores de  $\alpha$  no Gás de Chaplygin decomposto.

As curvas da figura 3.1 foram geradas usando  $\Omega_{m0} = 0.314$  para todos os valores de  $\alpha$  com exceção de  $\alpha = -0.5$  onde foi utilizado  $\Omega_{m0} = 0.49$  como consta na literatura [11]. Note que para o modelo com  $\alpha = 0$ ,  $\delta_m^c$  e  $\delta_b^c$  possuem a mesma taxa de evolução já que o termo  $Q/\rho_m$  está ausente na equação (3.78). Porém o mesmo não ocorre para valores de  $\alpha$  diferentes de zero, já que para  $\alpha < 0$  matéria é criada suprimindo  $\delta_m$ , enquanto que para  $\alpha > 0$  matéria é aniquilada.

### 3.1.4 Modelo com perturbação do Vácuo

Uma segunda possibilidade está em adotar uma escolha covariante para as perturbações na densidade de energia do vácuo como propõe [69]. Aqui vamos assumir a forma

$$\delta\rho_\Lambda^c = \frac{2Q}{3\rho_m} \delta\Theta^c. \quad (3.73)$$

De maneira que os termos perturbativos na transferência energia-momento (3.53) e (3.62) ficam explicitamente dados por

$$\delta\bar{Q}_j = \delta\rho_{\Lambda,j}^c, \quad (3.74)$$

$$\frac{\delta Q^c}{\rho_m} = \frac{Q}{3\rho_m^c} \delta_m^c + \left[ 2H - \frac{2Q}{3\rho_m} + \frac{2QH^2}{3\rho_m^2} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 - \frac{(2\alpha + 1)\rho_m}{2H} \right] \frac{\delta \rho_\Lambda^c}{\rho_m}, \quad (3.75)$$

onde  $k$  representa o número de onda comóvel. Neste caso, o conjunto de equações se reduz a

$$\dot{v} + \phi = -\frac{\delta \rho_V^c}{\rho_m}, \quad (3.76)$$

$$\dot{v}_b = -\phi, \quad (3.77)$$

$$\dot{\delta}_m^c + \frac{Q}{\rho_m} \delta_m^c + \delta \Theta^c = \frac{\delta Q^c}{\rho_m} + \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right) (\dot{v} + \phi), \quad (3.78)$$

$$\dot{\delta}_b^c + \delta \Theta^c = 0, \quad (3.79)$$

$$\delta \dot{\Theta}^c + \frac{2}{3} \Theta \delta \Theta^c + \frac{1}{2} \rho_m \delta_m^c = \delta \rho_V^c + \left( \frac{\nabla^2}{a^2} + \dot{\Theta} \right) (\dot{v} + \phi). \quad (3.80)$$

As duas primeiras equações mostram que a matéria não segue geodésica a não ser que a perturbação na densidade de energia do vácuo seja zero ou muito pequena. A equação (3.79) possui a mesma forma que no caso de vácuo homogêneo, porém sua evolução depende da perturbação da taxa de expansão como descrita pela equação (3.80).

De posse dos termos fontes obtidos acima, podemos encontrar equações diferenciais de segunda ordem para a evolução de  $\delta_m$  e  $\delta_b$ , realizando procedimento análogo àquele realizado no caso do modelo geodésico, é possível encontrar as seguintes equações

$$\ddot{\delta}_m^c + \left[ \frac{2Q}{3\rho_m} + 2H + \left( A - \frac{\dot{K}}{K} \right) \right] \dot{\delta}_m^c + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{2Q}{3\rho_m} \right) + 2H \left( \frac{2Q}{3\rho_m} \right) - \frac{1}{2} \rho_m K + \frac{2Q}{3\rho_m} \left( A - \frac{\dot{K}}{K} \right) \right] \delta_m^c = 0, \quad (3.81)$$

$$\ddot{\delta}_b^c + 2H \dot{\delta}_b^c - \frac{1}{2} \rho_m \delta_m^c = -\frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m K} \left[ \frac{H^2}{\rho_m} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left( \dot{\delta}_m^c + \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m} \delta_m^c \right), \quad (3.82)$$

onde definimos as seguintes funções

$$K(a, k) = 1 - \frac{2Q}{3\rho_m^2} \left[ A - H - \frac{(2\alpha + 1)\rho_m}{2H} \right], \quad (3.83)$$



$$\begin{aligned} \dot{K}(a, k) = & -\frac{2}{3\rho_m} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right) + \frac{Q}{\rho_m} \left( 3H - \frac{Q}{\rho_m} \right) \right] \left[ A - H - \frac{(2\alpha + 1)\rho_m}{2H} \right] \\ & - \frac{2Q}{3\rho_m^2} \left[ \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right) + \frac{1}{2}\rho_m + \frac{2}{3} \frac{k^2}{a^2 \rho_m} \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right) - \frac{2}{3} \frac{k^2}{a^2 \rho_m} \frac{Q}{\rho_m} \left( \frac{Q}{\rho_m} - H \right) \right. \\ & \left. - \frac{(2\alpha + 1)}{2} \left( \frac{Q}{H} - \frac{\rho_m^2}{2H^2} - 3\rho_m \right) \right], \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$A(a, k) = \frac{Q}{3\rho_m} + \frac{2QH^2}{3\rho_m^2} \left( \frac{k}{aH} \right)^2. \quad (3.85)$$

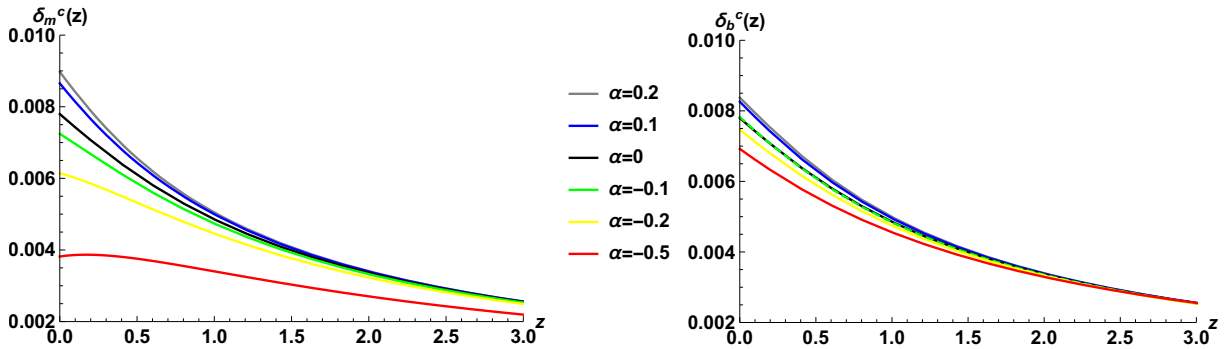


Figura 3.2: A esquerda, contraste da densidade da matéria total, a direita contraste da densidade dos bárions para diferentes valores de  $\alpha$  no Gás de Chaplygin em um modelo com perturbação na energia do vácuo.

As equações acima são evidentemente mais complicadas quando comparadas com aquelas obtidas no modelo geodésico por conta da dependência com a escala  $k$  já que novos termos surgem pela introdução das perturbações no vácuo. Usando-se em  $z = 1000$  as condições iniciais  $\delta_m = \delta_b = 10^{-5}$  e  $\frac{d\delta_m}{dz} = \frac{d\delta_b}{dz} = 0$ , plotamos na Figura 3.2 a evolução de  $\delta_m$  e  $\delta_b$  adotando  $k = 0.01$ . Na Figura 3.3 apresentamos as curvas do contraste de matéria e bárions para o modelo geodésico e para o modelo com perturbação na densidade do vácuo.

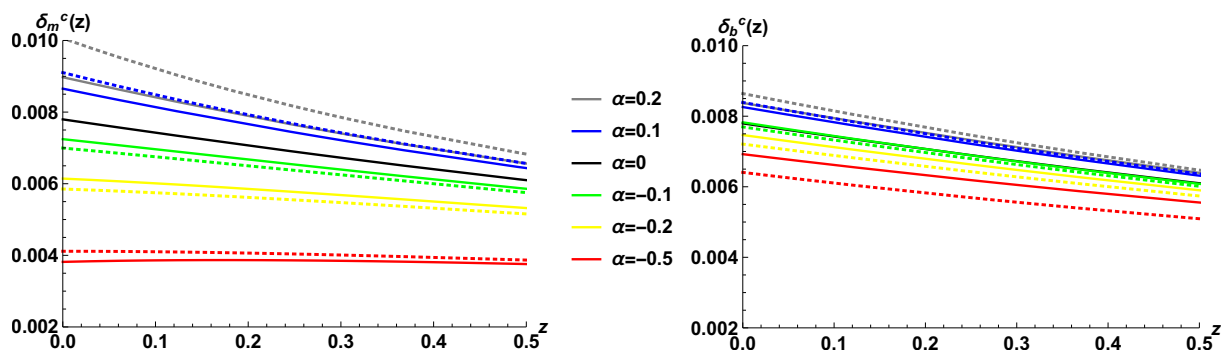


Figura 3.3: A esquerda, contraste da densidade da matéria, a direita contraste da densidade dos bárions. As linhas tracejadas representam o modelo geodésico e as linhas completas o modelo com perturbação na densidade de energia do vácuo.

# Capítulo 4

## Distorção no espaço dos redshifts

Os aglomerados de galáxias são estruturas que consistem em centenas de milhares de galáxias. A dinâmica do universo mostra que todos os corpos tendem a afastar-se uns dos outros em larga escala, entretanto as galáxias dentro dos aglomerados de galáxias possuem uma velocidade peculiar, fruto da interação gravitacional.

Usando o redshift como medida indireta de distância, a distância a uma galáxia seria dada pela lei de Hubble

$$cz = Hr. \quad (4.1)$$

Entretanto, as instabilidades gravitacionais locais fazem com que as galáxias adquiram velocidades peculiares que distorcem o fluxo Hubble. Sendo assim, quando olhamos para o redshift o que de fato medimos é a soma da velocidade de expansão de Hubble com a velocidade peculiar projetada ao longo da linha de visada

$$cz = Hr + \vec{v}_g \cdot \hat{r}. \quad (4.2)$$

Assim, velocidades peculiares das galáxias produzem distorções no espaço do redshift.

Para visualizar como a distorção no espaço do redshift muda o padrão de aglomeração das galáxias devido à queda gravitacional, considere uma perturbação esféricamente simétrica num universo dominado pela matéria. Considere que as galáxias

estão dispostas sobre uma camada esférica como mostrado na Figura 4.1. No regime linear, quando as sobre-densidades são pequenas,  $\delta \ll 1$ , todas as galáxias sobre a camada irão cair para o centro com mesma velocidade (indicada pelas setas) no espaço real. Um observador externo observará a camada com simetria esférica seguindo o fluxo de Hubble. Porém, devido ao efeito produzido pelas velocidades peculiares, no espaço do redshift as galáxias parecerão achatadas ao longo da linha de visada, topo da Figura 4.1. A razão é que as galáxias mais próximas de nós estão se afastando mais por causa da queda gravitacional para o centro, enquanto que as galáxias do outro lado estão se movendo em nossa direção e parecem mais próximas do que de fato deveria ser. Este efeito é visível em grandes escalas de distâncias.

À medida que as sobre-densidades crescem e a camada esférica atinge o regime não linear, um estágio de inversão (turnaround) é atingido quando a velocidade peculiar é exatamente igual à velocidade de Hubble. No espaço do redshift a camada aparecerá completamente esmagada, meio da Figura 4.1. Finalmente, quando a camada esférica desacopla do fluxo de Hubble e tende ao colapso a velocidade peculiar excede a velocidade da expansão de Hubble, e a distribuição das galáxias aparece alongada ao longo da linha de visada conforme Figura 4.1. Portanto, a natureza da distorção muda quando passamos do regime linear para o regime não linear no colapso gravitacional. A distribuição que aparece alongada ao longo da linha de visada é conhecido por “dedo de deus” apontando para o observador, enquanto que o esmagamento ao longo da linha de visada é conhecido por efeito Kaiser [70].

Para ilustrar esse efeito podemos usar como referência um mapa dos redshifts como mostra na Figura 4.2 que determina a estrutura em grande escalas em duas grandes fatias do Universo para uma profundidade de cerca de 2,5 bilhões de anos-luz (redshift  $\sim 0,2$ ).

## 4.1 Distorção no espectro de potência linear

Como vimos, as galáxias não seguem exatamente a expansão de Hubble mas possuem uma velocidade peculiar adicional causado pelo campo gravitacional local devido ao

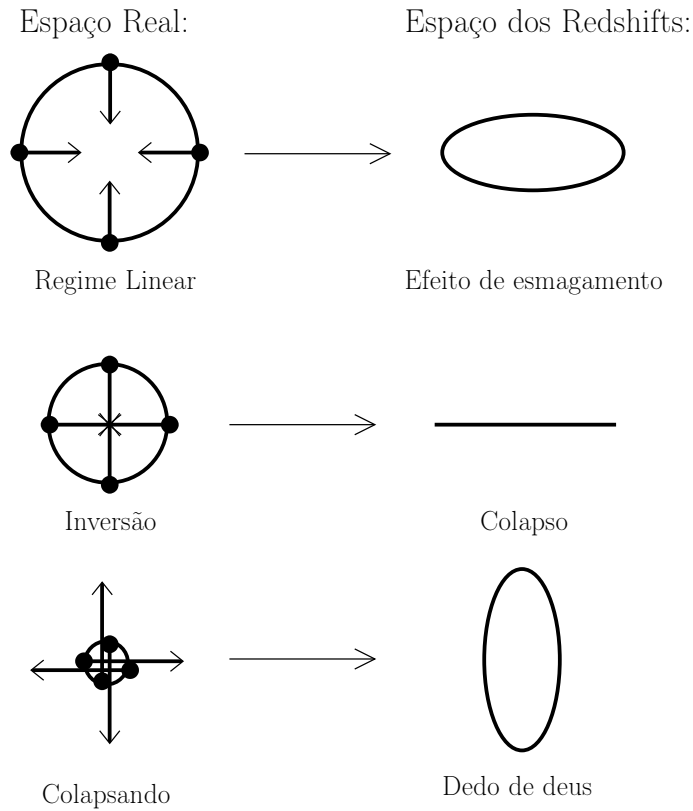


Figura 4.1: Distorção na distribuição das galáxias.

conteúdo energético ali distribuído. Isto implica que as sobre-densidades medidas no espaço do redshift serão distorcidas com relação as sobre-densidades no espaço real. O ponto de partida está na afirmação de que o número de galáxias em um determinada região permanece o mesmo quando olhamos para o espaço do redshift ou para o espaço real. Então

$$n_s(\vec{s})dV_s = n_r(\vec{r})dV_r, \quad (4.3)$$

onde  $n_s$  representa a densidade numérica das galáxias localizada em  $\vec{s}$  no espaço do redshift e  $n_r$  no espaço real. O contraste de densidade das galáxias pode ser obtido via contagem numérica das galáxias

$$\delta_g = \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}}, \quad (4.4)$$

onde  $\bar{n}$  é o valor médio. O volume nos dois espaços está relacionado pelo Jacobiano  $J$  da transformação

$$dV_r = JdV_s, \quad (4.5)$$

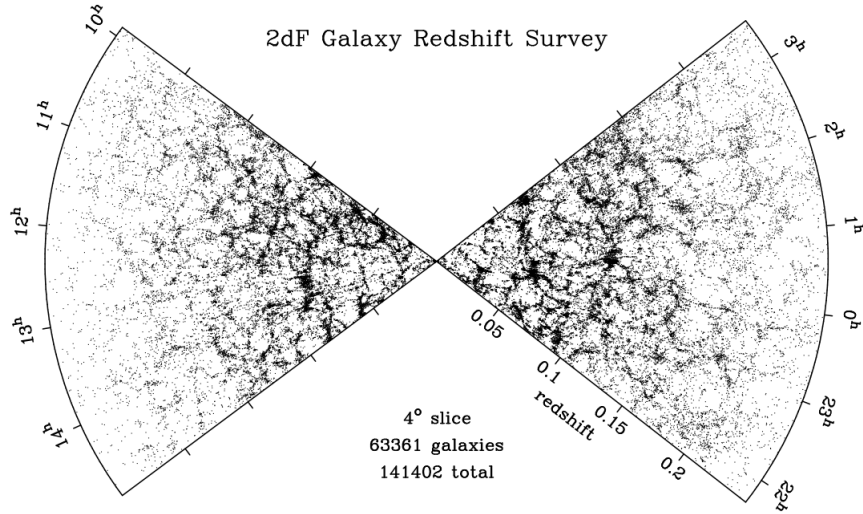


Figura 4.2: A distribuição de galáxias em parte do 2dFGRS, de um total de 141.402 galáxias [10].

onde  $dV_s = \sin \theta d\theta d\phi s^2 ds$  e  $dV_r = \sin \theta d\theta d\phi r^2 dr$ . Usando (4.5) e (4.4) em (4.3), podemos escrever

$$1 + \delta_{gs} = (1 + \delta_{gr}) \frac{r^2 dr}{s^2 ds}. \quad (4.6)$$

Já que o redshift observado é dado pela (4.2), isto é,

$$\vec{s} = \vec{r} + \frac{\vec{v}_g \cdot \hat{r}}{H}, \quad (4.7)$$

então a expressão (4.6) torna-se

$$1 + \delta_{gs} = (1 + \delta_{gr}) \left( 1 + \frac{\vec{v}_g \cdot \hat{r}}{Hr} \right)^{-2} \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\vec{v}_g \cdot \hat{r}}{H} \right) \right]^{-1}. \quad (4.8)$$

No regime linear, a velocidade peculiar é muito pequena quando comparada com a distância  $r$  das galáxias até nós, de modo que podemos tomar  $v \ll r$  e  $\partial v / \partial r \ll 1$ . Fazendo uma expansão até a primeira ordem, obtemos que

$$1 + \delta_{gs} = (1 + \delta_{gr}) \left[ 1 - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\vec{v}_g \cdot \hat{r}}{H} \right) - \frac{2(\vec{v}_g \cdot \hat{r})}{Hr} \right]. \quad (4.9)$$

Assumindo que o tamanho da região que contém as galáxias é muito menor que a

distância  $r$  podemos negligenciar o parcela  $2(\vec{v} \cdot \hat{r})/Hr$  acima. Além disso, nós podemos usar um sistema de coordenadas cartesianas com o versor radial  $\hat{r} = \hat{z}$  fixo e apontando para o centro da região, uma vez que a direção de  $r$  muda muito pouco de uma galáxia para a outra no plano de observação. De posse destas aproximações, obtemos

$$\delta_{gs} \approx \delta_{gr} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\vec{v}_g \cdot \hat{z}}{H} \right). \quad (4.10)$$

A equação acima quantifica a distorção no espaço do redshift para as sobre-densidades devido à velocidade peculiar das galáxias.

Sabendo que os bárions seguem geodésicas e que da equação de conservação da energia no calibre newtoniano [11] (ver equação 18), é possível obter

$$- \frac{\nabla \cdot \vec{v}_b}{H} = f_b \delta_b, \quad (4.11)$$

onde definimos a taxa de crescimento por

$$f = \frac{\dot{\delta}}{H\delta}. \quad (4.12)$$

Portanto, no espaço de Fourier é possível escrever

$$\delta_{gs}(k) = \delta_{gr}(k)(1 + f_b \mu^2), \quad (4.13)$$

onde  $\mu$  é definido como sendo ângulo  $\hat{k} \cdot \hat{z}$  entre a linha de visada e o número de onda da perturbação. Portanto, o espectro de potência observado é dado por

$$P_{gs}(k) = P_{gr}(k)(1 + f_b \mu^2)^2, \quad (4.14)$$

onde  $P(k) = \delta^2(k)$ .

Vemos que o espectro de potência observado depende, além do ângulo  $\mu$ , da taxa de crescimento  $f_b$  dos bárions, onde assumimos que não existe bias entre as velocidades das galáxias e dos bárions. Além disso, o espectro de potência observado pode ser normalizado através da dispersão do número de galáxias dentro de esferas de 8 Mpc de

raio,  $\sigma_8$ , como assim são observado as grandes estruturas no universo, definido como

$$\sigma_8^2 = \langle \delta^2 \rangle . \quad (4.15)$$

Portanto, as medidas na distorção no espaço do redshift estão relacionadas com medida da combinação  $f\sigma_8$ .

De acordo com a Figura 4.3 podemos perceber que na direção longitudinal, ou seja, na direção de observação  $\sigma$ , é possível observar a distorção do espaço dos redshift em função da distribuição de massa local.

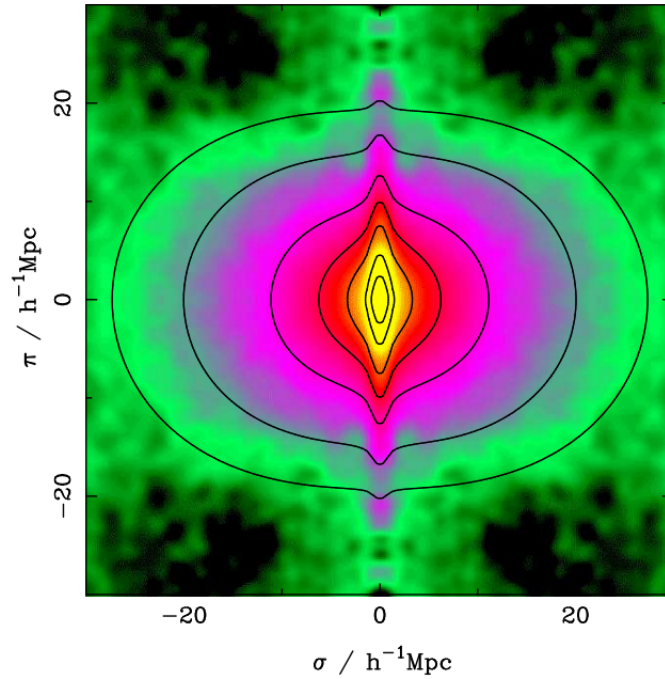


Figura 4.3: A função de correlação de redshift-space para o 2dFGRS,  $\xi(\sigma, \pi)$ , plotada como uma função da separação de pares transversal ( $\sigma$ ) e radial ( $\pi$ ). A função foi estimada contando pares em caixas de lado  $0.2h^{-1}$  Mpc (assumindo uma geometria plana,  $\Omega_k = 1$ ), e depois suavizando com um gaussiano de largura  $0.5h^{-1}$  Mpc. Esta figura exhibe as distorções do desvio para o vermelho, com alongamentos de "dedos de Deus" em escalas pequenas e efeito Kaiser achatando-se em grandes raios [10].



## 4.2 Previsão teórica para a distorção no espaço dos redshift em modelos com interação

A quantidade observável é de fato a combinação  $f_b\sigma_{8b}$ . A taxa de crescimento  $f_b$  pode ser obtida via solução de  $\delta_b$  pelas equações acopladas (3.66) e (3.67) para o modelo geodésico, e pelas equações (3.81) e (3.82) quando consideramos perturbações na densidade de energia do vácuo.

A dispersão do número de galáxias  $\sigma_8$  pode ser obtido via

$$\sigma_{b8}(z) = \frac{\sigma_{b8}(0)}{\delta_b(0)} \delta_b(z), \quad (4.16)$$

ou seja, a predição teórica será dada por

$$f_b(z)\sigma_{b8}(z) = f_b(z) \frac{\sigma_{b8}(0)}{\delta_b(0)} \delta_b(z). \quad (4.17)$$

Os parâmetros livres do modelo serão  $\Omega_{m0}$ ,  $\sigma_8(0)$  e  $\alpha$ .

Na Figura 4.4 plotamos a solução numérica de  $f_b\sigma_8$  para diversos valores do parâmetro  $\alpha$ . A curva preta representa o modelo  $\Lambda$ CDM, a tracejada o modelo com perturbação na densidade de energia do vácuo e a cheia o modelo geodésico. Para  $\alpha > 0$  a curva para o modelo geodésico fica mais alta quando comparada com o caso de vácuo não homogêneo quando olhamos para o redshift  $z < 1$ . Vemos o contrário para  $z > 1$ , sendo a maior diferença na região  $z < 1$ . Para  $\alpha < 0$ , todas as curvas aqui apresentadas ficam abaixo da curva do  $\Lambda$ CDM (exceto a curva tracejada verde em  $z$  próximo de 0). Fica também evidente as diferenças na evolução de  $f_b\sigma_{b8}$  quando comparamos o modelo de vácuo homogêneo com o não homogêneo.

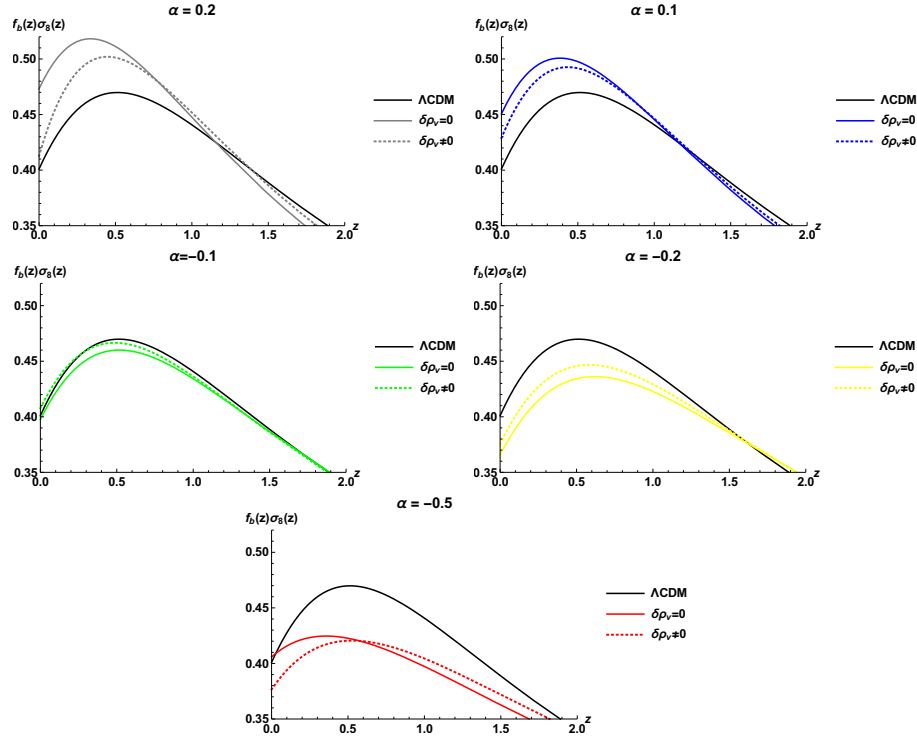


Figura 4.4: As curvas acima representam a função crescimento normalizada  $f\sigma_8$ . A linha preta em todas as curvas é a representação do  $\Lambda$ CDM, as linhas coloridas são plotadas para o Gás de Chaplygin para diferentes valores de  $\alpha$ . As curvas tracejadas são para o modelo geodésico ( $\delta\rho_V^c = 0$ ) e as linhas cheias representando o modelo com inhomogeneidade do vácuo ( $\delta\rho_V^c \neq 0$ ). Para todas as curvas foi utilizado  $\Omega_{m0} = 0.315$  e  $\sigma_{80} = 0.811$  [9]. Em particular, para  $\alpha = -0.5$  usou-se  $\Omega_{m0} = 0.490$  [11].

# Capítulo 5

## Análise Estatística

Nas últimas décadas a cosmologia vem sendo desenvolvida muito além das predições teóricas e analíticas. O colossal conjunto de observações limitados pela tecnologia e precisão da observação vem permitindo estimar os valores dos parâmetros dos modelos cosmológicos. Estimando pois, por se tratar de um grande número de observações não tão precisas, encontramos com uma duvidosa acurácia os valores desses parâmetros. Assim, a cosmologia moderna encontra-se refém não somente das observações, mas também da forma estatística da qual analisaremos tais observações.

Para apontarmos com uma certa precisão valores para parâmetros cosmológicos precisamos de um certo nível de confiabilidade estatística, ou seja, uma boa probabilidade de que aquele valor estime realmente a melhor aproximação para tal grandeza física. Duas formas de analisarmos um evento estatístico é através da probabilidade *frequentista* e a probabilidade *bayesiana*.

Para os frequentistas, a probabilidade de um determinado evento ocorrer depende do número de vezes  $n$  que um determinado evento ocorreu dentro de um espaço amostral  $N$ , de forma que

$$P = \frac{n}{N} \tag{5.1}$$

Já a estatística Bayesiana compreende a probabilidade dentro de um grau de con-

fiança para uma determinada variável  $x$  dentro de um certo intervalo  $x + dx$ . “*Frequentistas consideram distribuição de probabilidades de eventos, enquanto bayesianos consideram hipóteses como evento*” [59].

Para eventos independentes dizemos que a probabilidade de  $P(x_1)$  e  $P(x_2)$  ocorrerem é a probabilidade de  $P(x_1)$  ocorrer vezes a probabilidade de  $P(x_1)$  ocorrer condicionada a  $P(x_2)$  ocorrer

Apenas no caso de eventos independentes,  $P(x_2|x_1) = P(x_2)$  e então  $P(x_1, x_2) = P(x_1)P(x_2)$ . Como a probabilidade de que dois eventos ocorram pode ser escrita como  $P(x_1, x_2)$  ou  $P(x_2, x_1)$ , se substituimos  $x_1$  por  $D$  e  $x_2$  por  $H$ , obtemos o teorema de Bayes [59]:

$$P(H|D) = \frac{P(H)P(D|H)}{P(D)} \quad (5.2)$$

De forma que  $H$  refere-se ao modelo que esta sendo estudado e  $D$  os dados. Definimos como *likelihood* ou verossimilhança o termo  $P(D|H)$  que nos diz a probabilidade dos dados que temos, admitindo que a hipótese  $H$  ser verdadeira e que iremos escrever como  $L(H)$  de acordo com [59] mais detalhes em() [71–75]).

## 5.1 Metodologia

Dentro de uma estatística Bayesiana e utilizando os dados da distorção no espaço do redshift compilados em [76], aqui escritos na Tabela 5.1, buscamos estimar o valor de  $f\sigma_8$  definido pela equação (4.17) com parâmetros  $\alpha$ ,  $\sigma_8(0)$ ,  $\Omega_{b0}$  e  $\Omega_{c0}$ . Para isso, reproduzindo a método descrito por [76] calculamos a distância comóvel entre duas galáxias separadas pelo ângulo  $d\theta$  através de

$$dl_{\perp} = (1 + z)D_A(z)d\theta, \quad (5.3)$$

onde  $D_A(z)$  é o diâmetro angular (2.44). Para duas galáxias separadas pelo redshift  $dz$  ao longo da linha de visada a separação é dada pela distância

$$dl_{\parallel} = \frac{cdz}{H(z)}. \quad (5.4)$$

Os parâmetros cosmológicos derivam das observações e de um modelo chamado de modelo fiducial ou modelo de base. Dessa forma, diversos outros parâmetros derivam desses grandezas mensuradas sob este modelo. Quando a análise é feita para um modelo alternativo, usando como base parâmetros cosmológicos mensurados através de um determinado modelo cosmológico é necessário realizar a correção Alcock-Paczynski [77, 78]. Assim suponhamos um modelo fiducial  $H'(z)$ , a separação correspondente se torna

$$dl'_{\perp} = (1+z)D'_A d\theta = \left(\frac{D'_A}{D_A}\right) dl_{\perp} = \frac{dl_{\perp}}{f_{\perp}}, \quad (5.5)$$

$$dl'_{\parallel} = \frac{cdz}{H'} = \left(\frac{H}{H'}\right) dl_{\parallel} = \frac{dl_{\parallel}}{f_{\parallel}}, \quad (5.6)$$

onde  $F \equiv f_{\parallel}/f_{\perp}$  é um termo de anisotropia induzida e será utilizada para a correção do efeito Alcock-Paczynski. De forma que  $f\sigma'_8$  seja obtido a partir de um modelo fiducial, neste caso o  $\Lambda$ CDM, com uma certo  $H'(z)$  também fiducial do mesmo modelo. Assim o valor correspondente deste  $f\sigma_8$  para o modelo estudado é aproximadamente

$$f\sigma_8(z) \sim qf\sigma'_8(z), \quad (5.7)$$

onde

$$q = \frac{H(z)D_A(z)}{H'(z)D'_A(z)}. \quad (5.8)$$

Para que possamos encontrar os melhores parâmetros dentro de uma estatística Bayesiana construímos a análise utilizando as Cadeias de Monte Carlo [79,80]. Ao longo dos anos, vários métodos capazes de calcular as evidências Bayesianas foram desenvol-

vidos, como a utilização da média harmônica [81] e do temperamento paralelo [82]. Os problemas com esses métodos são a imprecisão do método para a média harmônica e o alto custo computacional para o temperamento paralelo: esse método pode facilmente consumir 100 vezes mais tempo do que os algoritmos MCMC comuns [83]. Esforços mais recentes incluem o algoritmo de amostragem Aninhado [76], uma versão muito melhorada que foi implementada no MultiNest. Estes métodos recentes sobre uma transformação da integral para um problema unidimensional e, que em seguida, usam um truque inteligente para evitar o cálculo do inverso do PDF. O algoritmo MultiNest do FHB09 foi testado com sucesso em vários problemas *toy model* e parece ser muito mais eficiente que os métodos tradicionais. Ao analisar modelos complicados com muitos parâmetros ( $\sim 100$  ou mais), a escala com dimensionalidade é crucial para realizar uma estatística confiável usando o código do Python MultiNest [1] como descreve [84].

Tabela 5.1: Tabela com os valores para  $f\sigma_8$  encontrados na literatura entre 2006 e 2018.

Index	Dataset	$z$	$f\sigma_8(z)$	Refs.	Cosmologia Fiducial
1	SDSS-LRG	0,35	$0,44 \pm 0,05$	[85]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.25, 0.756)$ [86]
2	VVDS	0,77	$0,49 \pm 0,18$	[85]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.25, 0.78)$
3	2dFGRS	0,17	$0,51 \pm 0,06$	[85]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.3, 0.9)$
4	2MRS	0,02	$0,314 \pm 0,048$	[87, 88]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.266, 0.65)$
5	SnIa+IRAS	0,02	$0,398 \pm 0,065$	[88, 89]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.3, 0.814)$
6	SDSS-LRG-200	0,25	$0,3512 \pm 0,0583$	[90]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.276, 0.8)$
7	SDSS-LRG-200	0,37	$0,4602 \pm 0,0378$	[90]	
8	SDSS-LRG-60	0,25	$0,3665 \pm 0,0601$	[90]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.276, 0.8)$
9	SDSS-LRG-60	0,37	$0,4031 \pm 0,0586$	[90]	
10	WiggleZ	0,44	$0,413 \pm 0,08$	[91]	$(\Omega_{m0}, h, \sigma_8) = (0.27, 0.71, 0.8)$
11	WiggleZ	0,6	$0,39 \pm 0,063$	[91]	$C_{ij} = \text{Eq.}(3.3)$
12	WiggleZ	0,73	$0,437 \pm 0,072$	[91]	
13	6dFGS	0,067	$0,423 \pm 0,055$	[92]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.27, 0.76)$
14	SDSS-BOSS	0,3	$0,407 \pm 0,055$	[92]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.25, 0.804)$
15	SDSS-BOSS	0,4	$0,419 \pm 0,041$	[92]	
16	SDSS-BOSS	0,5	$0,427 \pm 0,043$	[92]	
17	SDSS-BOSS	0,6	$0,433 \pm 0,067$	[92]	
18	Vipers	0,8	$0,47 \pm 0,08$	[93]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.25, 0.82)$
19	SDSS-DR7-LRG	0,35	$0,429 \pm 0,089$	[94]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.25, 0.809)$ [95]
20	GAMA	0,18	$0,36 \pm 0,09$	[96]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.27, 0.8)$
21	GAMA	0,38	$0,44 \pm 0,06$	[96]	
22	BOSS-LOWZ	0,32	$0,384 \pm 0,095$	[97]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.274, 0.8)$
23	SDSS DR10 E DR11	0,32	$0,48 \pm 0,1$	[97]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.274, 0.8)$ [98]
24	SDSS DR10 E DR11	0,57	$0,417 \pm 0,045$	[97]	
25	SDSS-MGS	0,15	$0,49 \pm 0,145$	[99]	$(\Omega_{m0}, h, \sigma_8) = (0.31, 0.67, 0.83)$
26	SDSS-veloc	0,1	$0,37 \pm 0,13$	[100]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.3, 0.89)$ [101]
27	FastSound	1,4	$0,482 \pm 0,116$	[102]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.27, 0.82)$ [96]
28	SDSS-CMASS	0,59	$0,488 \pm 0,06$	[94]	$(\Omega_{m0}, h, \sigma_8) = (0.307115, 0.6777, 0.8288)$
29	BOSS DR12	0,38	$0,497 \pm 0,045$	[103]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.31, 0, 0.8)$
30	BOSS DR12	0,51	$0,458 \pm 0,038$	[103]	
31	BOSS DR12	0,61	$0,436 \pm 0,034$	[103]	

32	BOSS DR12	0,38	$0,477 \pm 0,051$	[104]	$(\Omega_{m0}, h, \sigma_8) = (0.31, 0.676, 0.8)$
33	BOSS DR12	0,51	$0,453 \pm 0,05$	[104]	
34	BOSS DR12	0,61	$0,41 \pm 0,044$	[104]	
35	Vipers v7	0,76	$0,44 \pm 0,04$	[104]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.308, 0.8149)$
36	Vipers v7	1,05	$0,28 \pm 0,08$	[105]	
37	BOSS LOWZ	0,32	$0,427 \pm 0,056$	[104]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.31, 0.8475)$
38	BOSS CMASS	0,57	$0,426 \pm 0,029$	[104]	
39	Vipers	0,727	$0,296 \pm 0,0765$	[106]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.31, 0.7)$
40	6dFGS+SnIa	0,02	$0,428 \pm 0,0465$	[107]	$(\Omega_{m0}, h, \sigma_8) = (0.3, 0.683, 0.8)$
41	Vipers	0,6	$0,48 \pm 0,12$	[108]	$(\Omega_{m0}, \Omega_b, n_s, \sigma_8) = (0.3, 0.045, 0.96, 0.831)$
42	Vipers	0,86	$0,48 \pm 0,1$	[108]	
43	Vipers PDR-2	0,6	$0,55 \pm 0,12$	[109]	$(\Omega_{m0}, \Omega_b, \sigma_8) = (0.3, 0.045, 0.823)$
44	Vipers PDR-2	0,86	$0,4 \pm 0,11$	[109]	
45	SDSS DR13	0,1	$0,48 \pm 0,16$	[110]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.25, 0.89)[91]$
46	2MTF	0,001	$0,505 \pm 0,085$	[111]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.3121, 0.815)$
47	Vipers PDR-2	0,85	$0,45 \pm 0,11$	[112]	$(\Omega_b, \Omega_{m0}, h) = (0.045, 0.30, 0.8)$
48	BOSS DR12	0,31	$0,469 \pm 0,098$	[113]	$(\Omega_{m0}, h, \sigma_8) = (0.307, 0.6777, 0.8288)$
49	BOSS DR12	0,36	$0,474 \pm 0,097$	[113]	
50	BOSS DR12	0,4	$0,473 \pm 0,086$	[113]	
51	BOSS DR12	0,44	$0,481 \pm 0,076$	[113]	
52	BOSS DR12	0,48	$0,482 \pm 0,067$	[113]	
53	BOSS DR12	0,52	$0,488 \pm 0,065$	[113]	
54	BOSS DR12	0,56	$0,482 \pm 0,067$	[113]	
55	BOSS DR12	0,59	$0,481 \pm 0,066$	[113]	
56	BOSS DR12	0,64	$0,486 \pm 0,07$	[113]	
57	SDSS DR7	0,1	$0,376 \pm 0,038$	[114]	$(\Omega_{m0}, \Omega_b, \sigma_8) = (0.282, 0.046, 0.817)$
58	SDSS-IV	1,52	$0,42 \pm 0,076$	[115]	$(\Omega_{m0}, \Omega_b h^2, \sigma_8) = (0.26479, 0.02258, 0.8)$
59	SDSS-IV	1,52	$0,396 \pm 0,079$	[116]	$(\Omega_{m0}, \Omega_b h^2, \sigma_8) = (0.31, 0.022, 0.8225)$
60	SDSS-IV	0,978	$0,379 \pm 0,176$	[117]	$(\Omega_{m0}, \sigma_8) = (0.31, 0.8)$
61	SDSS-IV	1,23	$0,385 \pm 0,099$	[117]	
62	SDSS-IV	1,526	$0,342 \pm 0,07$	[117]	
63	SDSS-IV	1,944	$0,364 \pm 0,106$	[117]	

---



Assim, utilizando os dados da Tabela 5.1 realizamos uma análise estatística de acordo [76] onde caculamos o melhor ajuste, do inglês *best-fit*, ou  $\chi^2_{min}$  construído como a minimização de

$$\chi^2 = \sum_{ij} V^i C_{ij}^{-1} V^j, \quad (5.9)$$

onde,

$$V^i(z_i, \Omega_{m0}, \sigma_8) \equiv f\sigma_{8i} - \frac{f\sigma_8(z_i, \Omega_{m0}, \sigma_8)}{q(z_i, \Omega_{m0}, \Omega'_{m0})}. \quad (5.10)$$

De forma que  $q(z_i, \Omega_{m0}, \sigma_8)$  seja o fator de correção fiducial como vimos na Equação (5.7) e  $C_{ij}^{-1}$  é o inverso da matriz de covariância [67,118], ou, mais especificamte, a *Matriz de Fisher* [119–121], onde se assume ser a diagonal da matriz de covariância exceto para os dados coletados por WiggleZ [91], para esses dados a matriz de covariância conhecida é

$$C_{ij}^{\text{WiggleZ}} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 6.400 & 2.570 & 0.000 \\ 2.570 & 3.969 & 2.540 \\ 0.000 & 2.540 & 5.184 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

## 5.2 Modelo com densidade do vácuo homogêneo

Utilizando a estatística acima descrita com o código do PyMultiNest realizamos inicialmente um teste para o modelo fiducial do  $\Lambda$ CDM e testamos livremente os parâmetros  $\alpha$ ,  $\Omega_{b0}$ ,  $\Omega_{c0}$  e  $\sigma_8(0)$  do modelo Gás de Chaplygin, a saber, a densidade de matéria bariônica, a densidade de matéria escura fria e o normalização do espectro de potência em uma esfera de raio de  $8 \text{ Mpc}^{-1}$ . Aqui assumimos que a densidade de energia do vácuo é espacialmente homogênea. Considerando todos como parâmetros livres encontramos as curvas de confianças de acordo com a Figura 5.1.

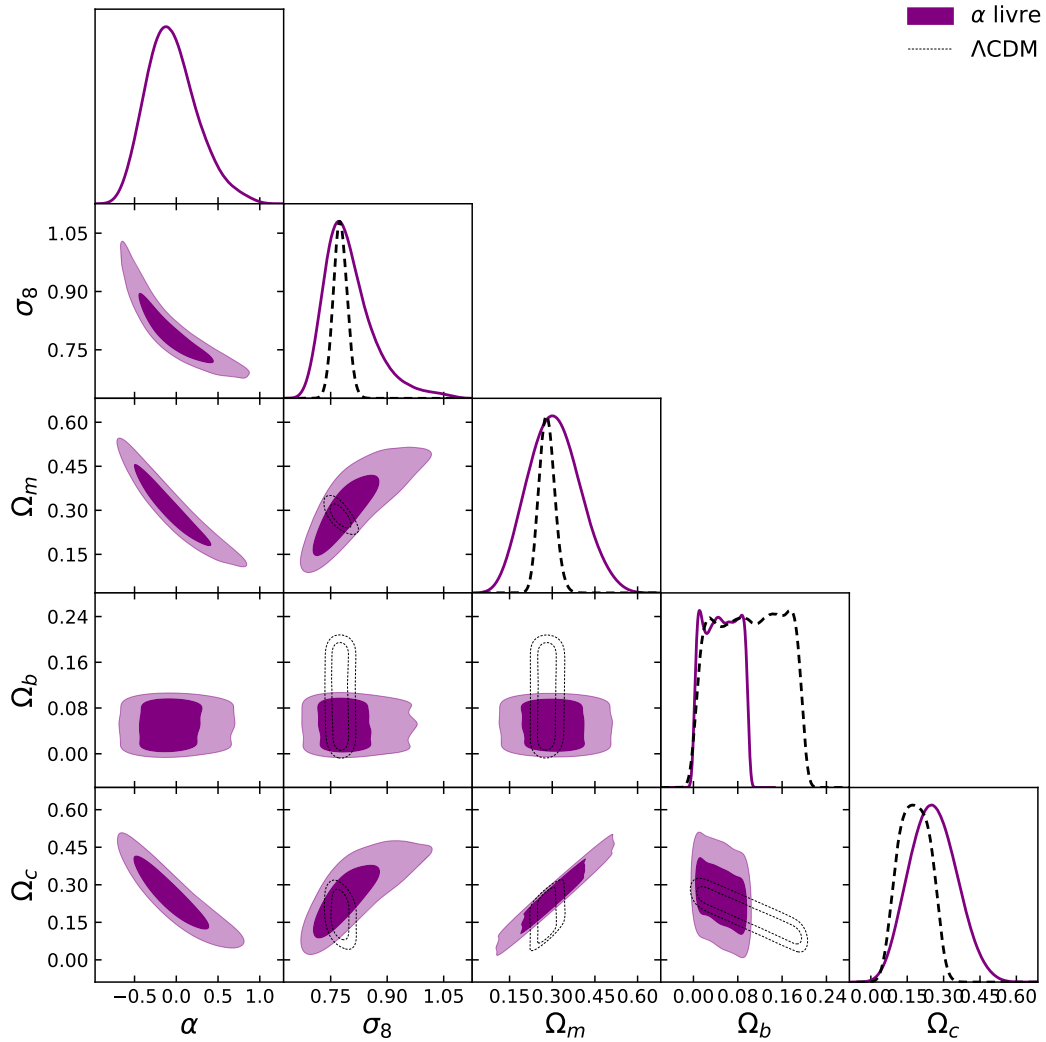


Figura 5.1: Análise usando um algoritmo de MCMC com o PyMultiNest para o modelo de Gás de Chaplygin. Neste teste,  $\alpha$ ,  $\Omega_{b0}$ ,  $\Omega_{c0}$  e  $\sigma_8(0)$  são parâmetros livres do modelo ajustado sob a melhor verossimilhança e  $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$  é parâmetro derivado. As curvas tracejadas de preto representam o  $\Lambda$ CDM e as regiões de roxo representam as curvas de nível do modelo com interação no setor escuro.

Em seguida, realizou-se o mesmo teste, agora fixando-se alguns valores de  $\alpha$  na busca por encontrar o *best-fit* dos parâmetros para cada caso particular. Os melhores ajustes para todos os parâmetros livres dos modelos e para diversos valores fixos de  $\alpha$  encontram-se na tabela abaixo da qual as Figuras 5.2 a 5.6 representam as curvas de confiança para, respectivamente,  $\alpha = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = -0.1$ ,  $\alpha = -0.2$  e  $\alpha = -0.5$ .

Vale ressaltar que os valores encontramos para  $\sigma_8$  e  $\Omega_{m0}$  utilizando o teste estatístico da distorção no espaço do redshift utilizando os dados da Tabela 5.1, coincidem com os

Parâmetros	$\alpha$ livre	$\Lambda$ CDM	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = -0.1$	$\alpha = -0.2$	$\alpha = -0.5$
$\sigma_8$	$0.80^{+0.14}_{-0.11}$	$0.776^{+0.037}_{-0.036}$	$0.760^{+0.035}_{-0.033}$	$0.747^{+0.032}_{-0.032}$	$0.793^{+0.039}_{-0.037}$	$0.815^{+0.045}_{-0.042}$	$0.917^{+0.064}_{-0.060}$
$\Omega_b$	$0.050^{+0.047}_{-0.047}$	$0.102^{+0.093}_{-0.096}$	$0.049^{+0.047}_{-0.046}$	$0.050^{+0.048}_{-0.047}$	$0.050^{+0.047}_{-0.047}$	$0.050^{+0.047}_{-0.047}$	$0.048^{+0.048}_{-0.045}$
$\Omega_c$	$0.26^{+0.19}_{-0.18}$	$0.18^{+0.11}_{-0.11}$	$0.207^{+0.077}_{-0.071}$	$0.182^{+0.075}_{-0.073}$	$0.261^{+0.078}_{-0.074}$	$0.291^{+0.081}_{-0.078}$	$0.401^{+0.077}_{-0.077}$
$\Omega_m$	$0.31^{+0.19}_{-0.17}$	$0.281^{+0.054}_{-0.052}$	$0.256^{+0.055}_{-0.050}$	$0.232^{+0.052}_{-0.049}$	$0.311^{+0.056}_{-0.053}$	$0.341^{+0.058}_{-0.054}$	$0.449^{+0.056}_{-0.054}$
$\alpha$	$-0.05^{+0.64}_{-0.58}$						

Tabela 5.2: Melhores ajustes para os parâmetros  $\sigma_8$ ,  $\Omega_{b0}$ ,  $\Omega_{c0}$ ,  $\alpha$  e consequentemente  $\Omega_{m0}$ .

valores encontrados por [76] para o modelo de  $\Lambda$ CDM garantindo a reprodutibilidade do método. Para este teste foram usados 2000 livepoints, o simple efficien para este teste foram os parâmetros cosmológicos e os Priors foram  $\alpha$ ,  $\Omega_{b0}$ ,  $\Omega_{c0}$  e  $\sigma_8(0)$ .

Analisamos também isoladamente curvas de confiança para os testes para a relação entre  $\Omega_{m0}$  e  $\sigma_8(0)$  como mostra a Figura 5.7.

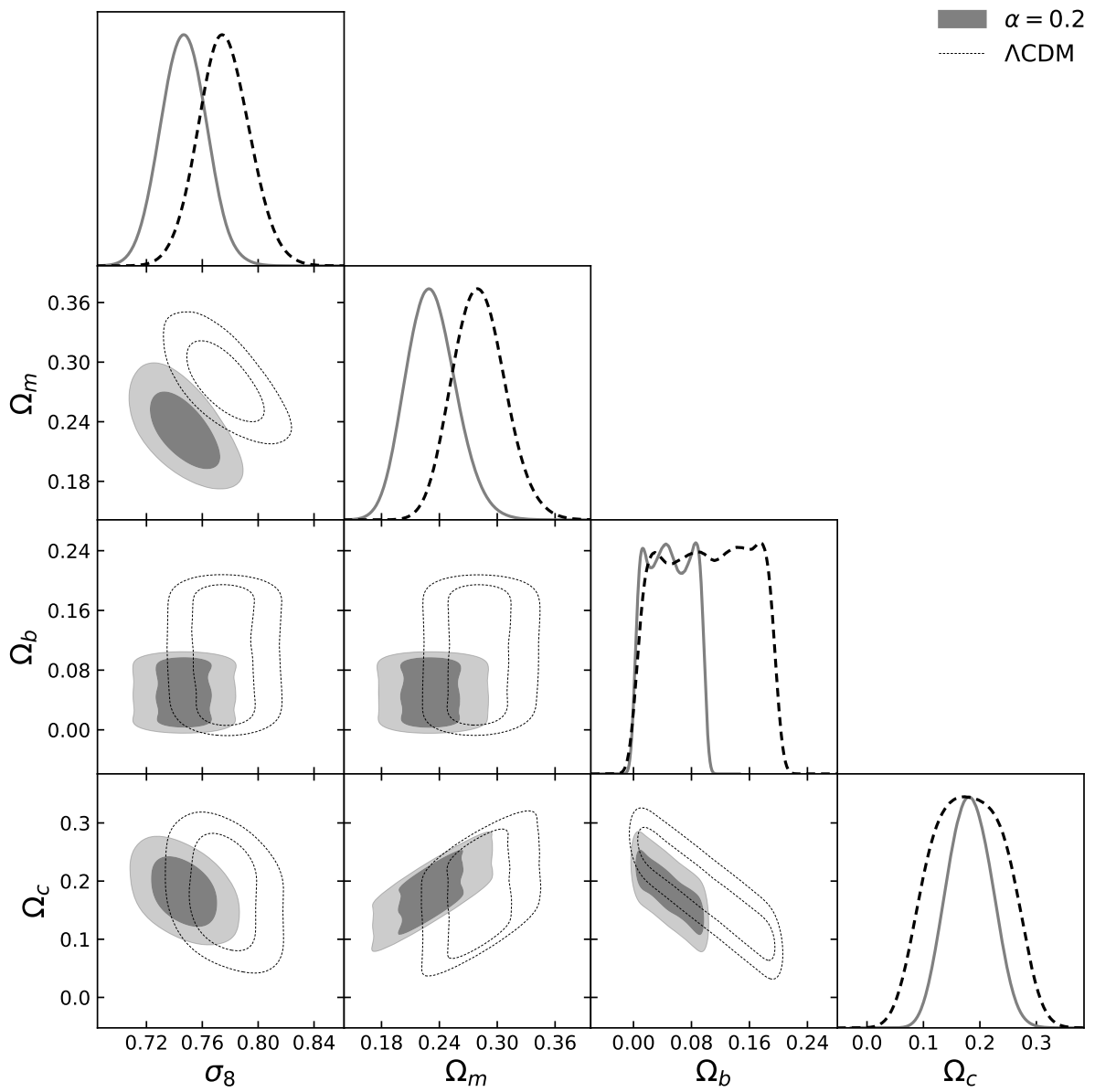


Figura 5.2: Curvas de confiança para os parâmetros  $\sigma_8$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b$  e  $\Omega_c$  para  $\alpha = 0.2$ .

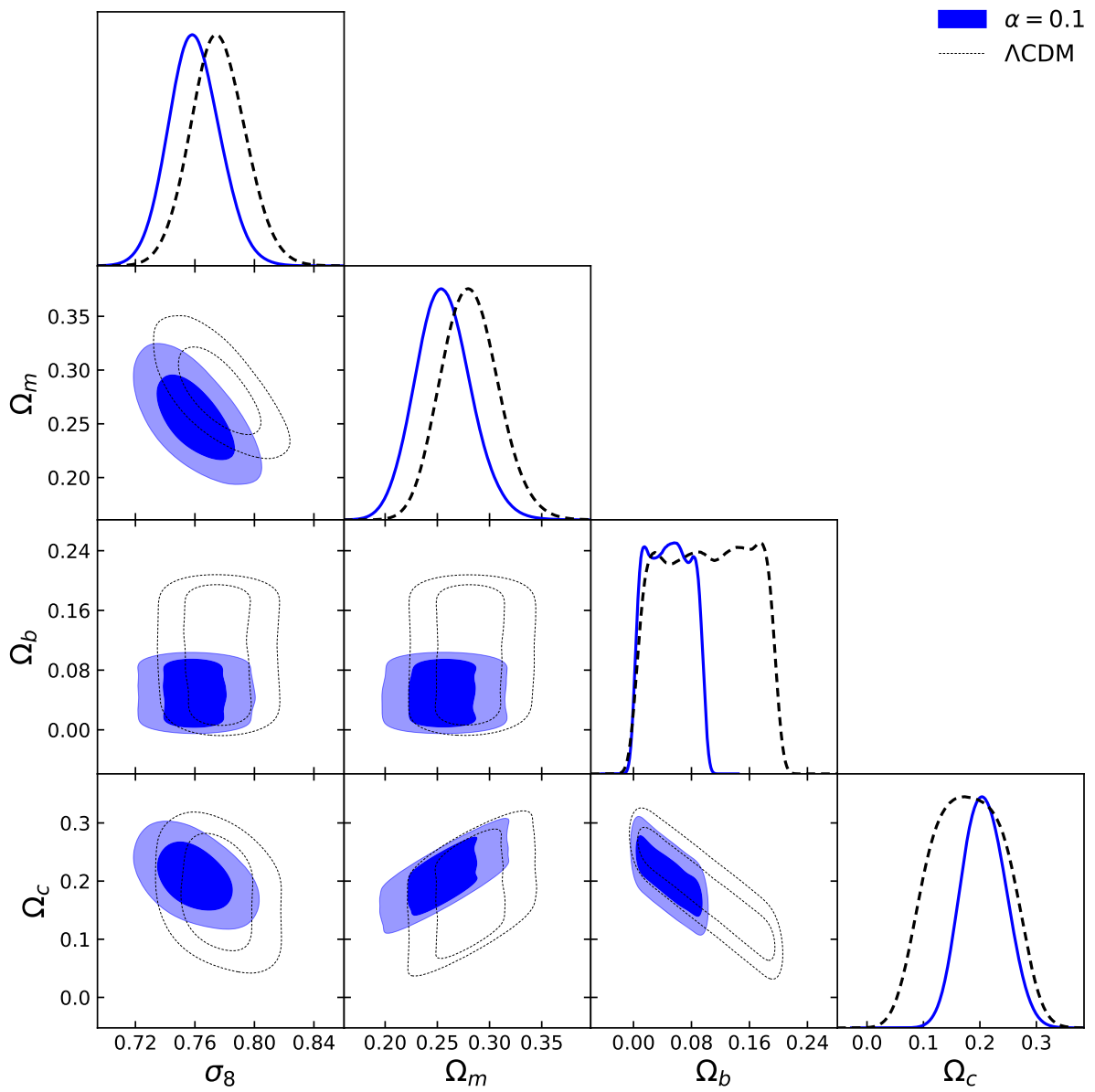


Figura 5.3: Curvas de confiança para os parâmetros  $\sigma_8$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b$  e  $\Omega_c$  para  $\alpha = 0.1$ .

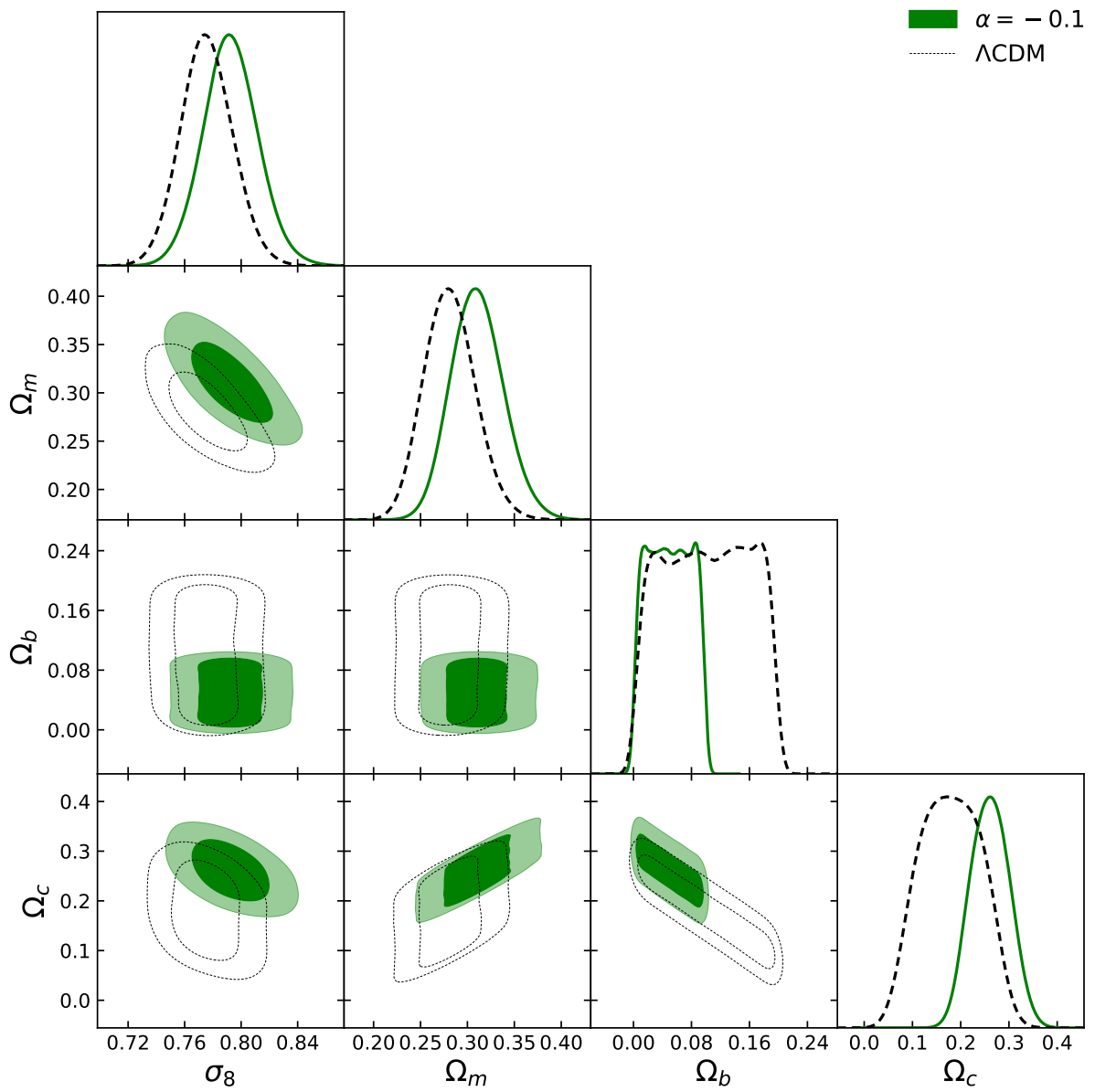


Figura 5.4: Curvas de confiança para os parâmetros  $\sigma_8$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b$  e  $\Omega_c$  para  $\alpha = -0.1$ .

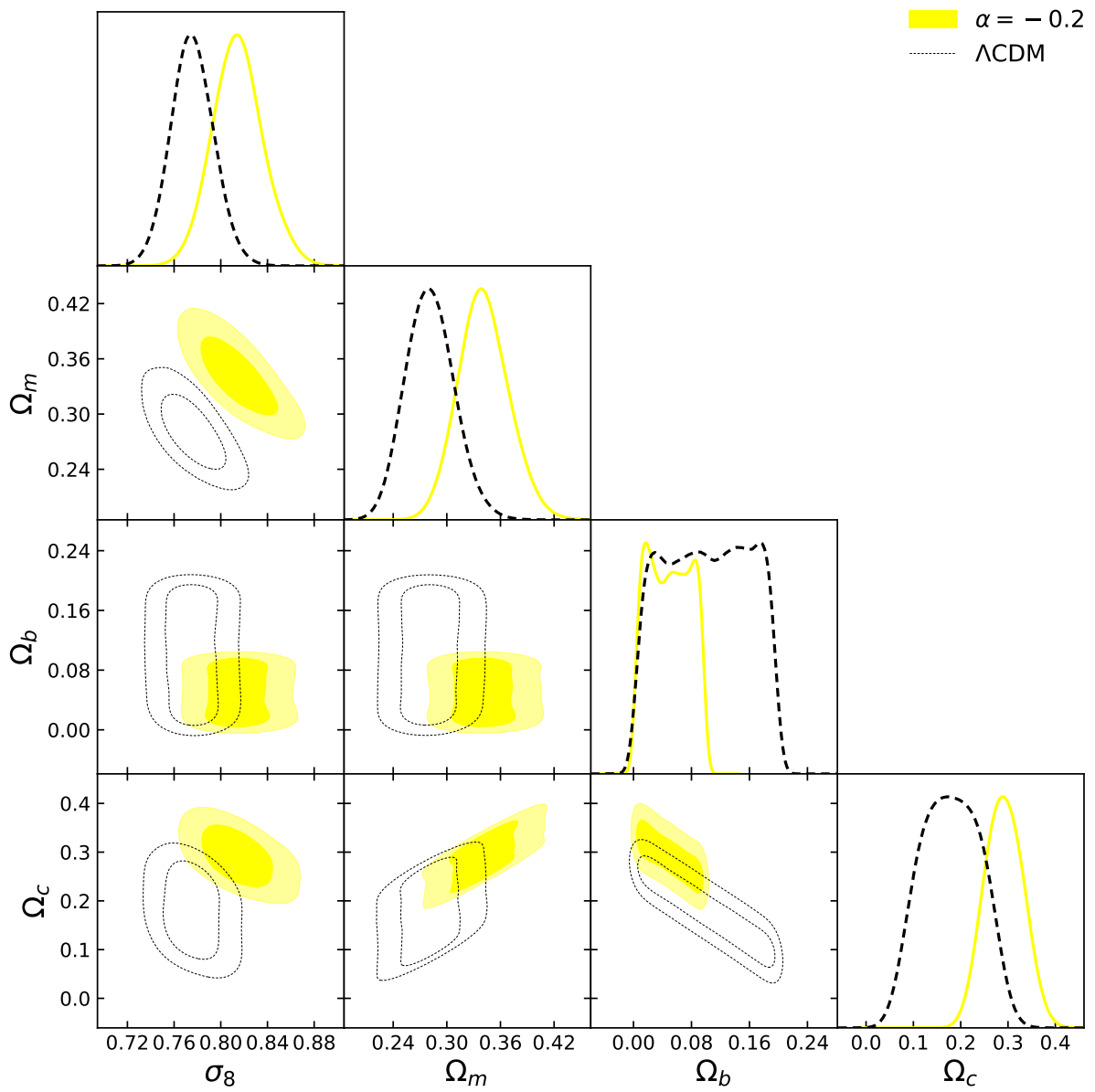


Figura 5.5: Curvas de confiança para os parâmetros  $\sigma_8$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b$  e  $\Omega_c$  para  $\alpha = -0.2$ .

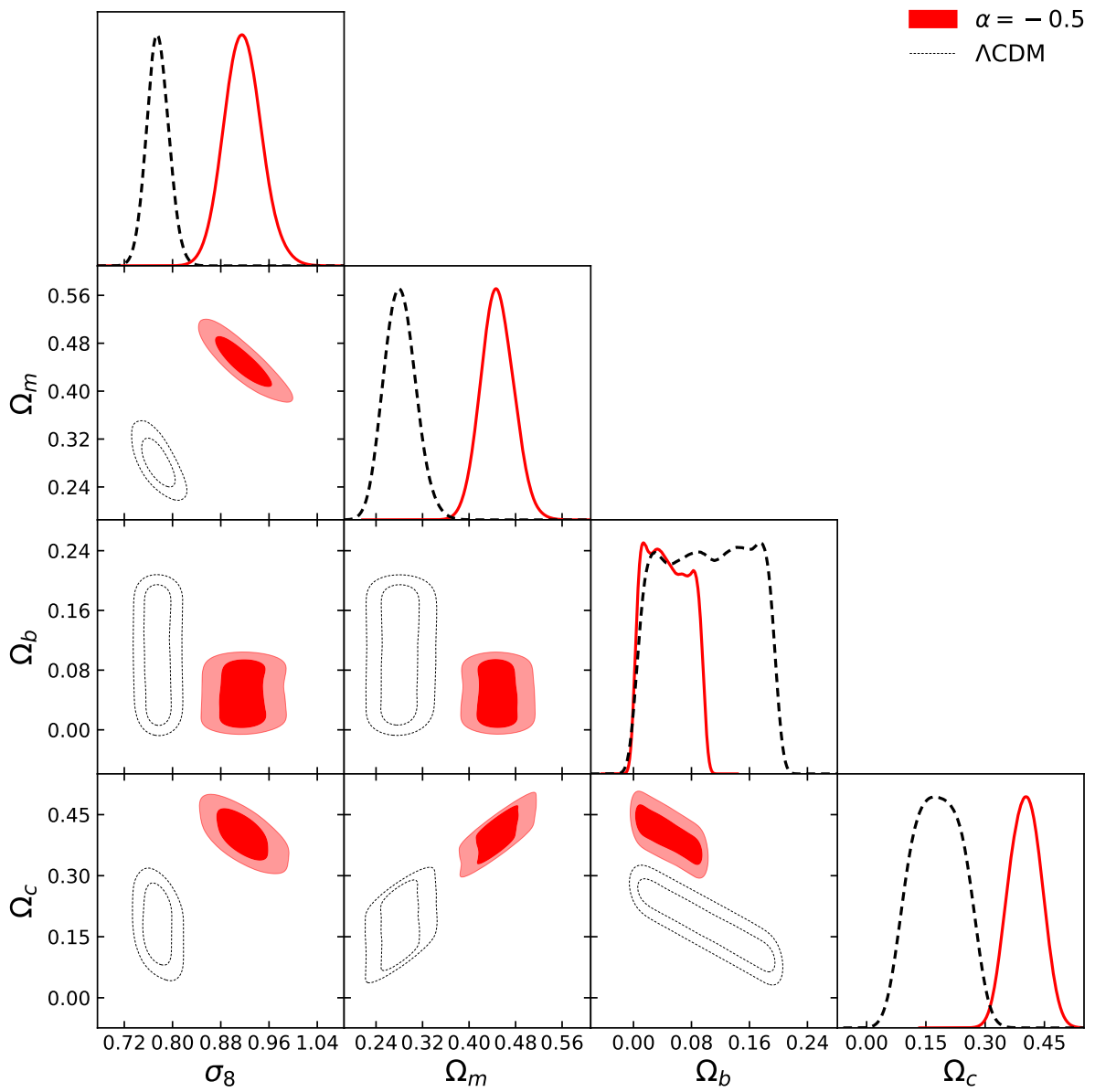


Figura 5.6: Curvas de confiança para os parâmetros  $\sigma_8$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b$  e  $\Omega_c$  para  $\alpha = -0.5$ .



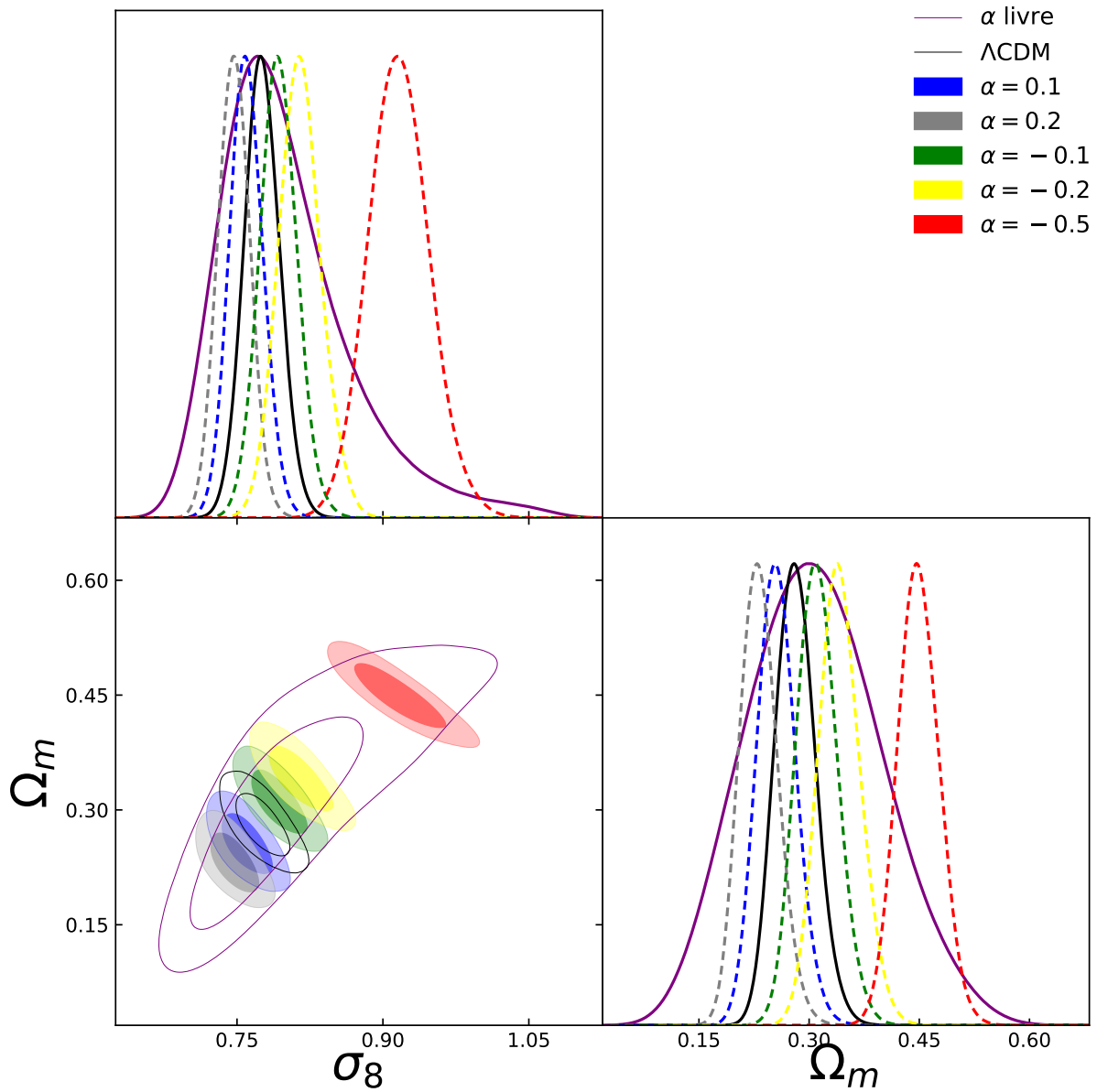


Figura 5.7: Relação entre  $\Omega_{m0}$  e  $\sigma_8(0)$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

# Capítulo 6

## Conclusões

Primeiramente é notável uma correlação de  $\Omega_{m0}$  com  $\alpha$ , o que já era de se esperar pelo modelo, uma vez que o parâmetro  $\alpha$  irá determinar a interação no setor escuro, logo, percebe-se que para valores positivos de  $\alpha$  a densidade da matéria tende a diminuir pois ao longo da evolução do universo a matéria vai diluindo-se em energia escura. Para valores negativos de  $\alpha$ , a densidade da matéria será maior pois a energia escura transforma-se em matéria escura. Na figura 6.1 ao lado esquerdo plotamos as curvas com os parâmetros ajustados de acordo com os valores encontrados na análise estatística e ao lado direito as curvas geradas com os parâmetros de [9] com exceção de  $\alpha = -0.5$  onde foi utilizado  $\Omega_{m0} = 0.49$ , como anteriormente comentado. Os dois gráficos na parte inferior mostram as curvas plotadas juntos com os dados da Tabela 5.1.

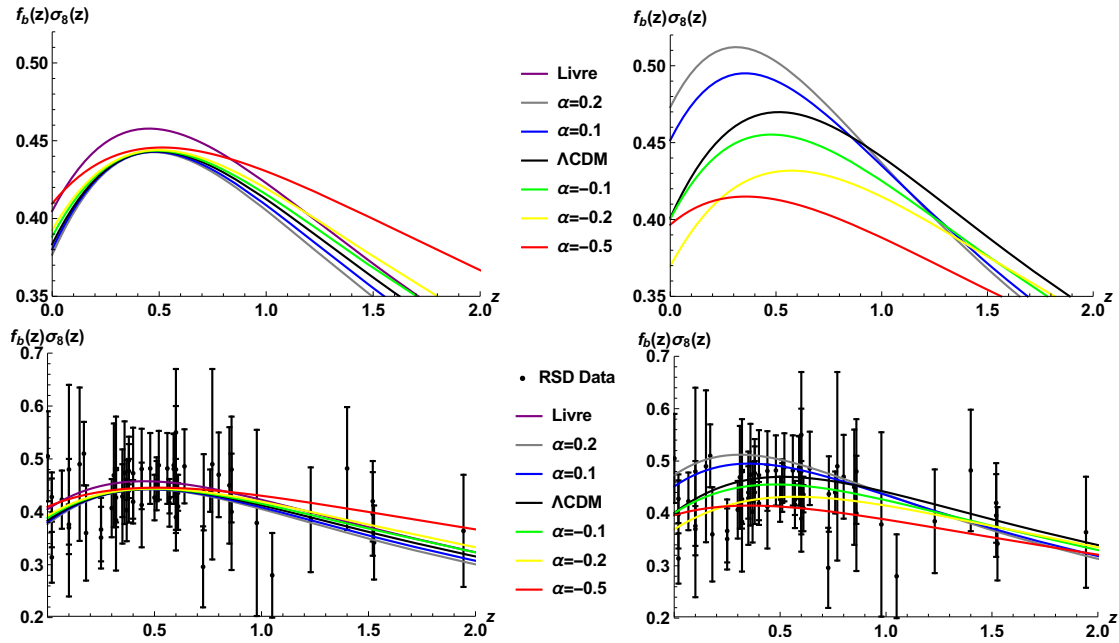


Figura 6.1: Curvas da função taxa de crescimento gerada para o Gás de Chaplygin num ansatz geodésico  $\delta\rho_V = 0$ . Ao lado esquerdo são utilizados os parâmetros cosmológicos de *best-fit* aqui realizados e a direita os dados parâmetros cosmológicos encontrados em [9].

É possível também perceber um erro grande associado a discrepância dos valores encontrados para cada parâmetro cosmológico em especial para  $\alpha$ . Este fenômeno se dá principalmente pelo fato de que um único observável não discrimina com, qualidade, parâmetros cosmológicos, o observável aqui estudado encontrava-se somente com 63 dados e as próprias barras de erros informadas pelo pacote de dados permitem um passeio menos restrito dentro espaço de parâmetros, convergindo assim para baixos valores de *verossimilhança*.

Por conta da complexidade de integração das equações (3.81) e (3.82) não será possível apresentar o resultado estatístico para o ansatz com  $\delta\rho_V \neq 0$  uma vez que o tempo de processamento computacional, dada a rotina construída, ainda está muito longo. Futuramente, esperamos publicar os resultados aqui apresentados juntamente com os resultados para o ansatz inhomogêneo (3.73). Publicaremos os testes combinando-os com diversos observáveis a serem implementados como CMB, BAO, supernovas e  $H(z)$ .



# Apêndice A

Tomando um quadri vetor  $A^\mu$  sobre o ponto  $x^\alpha$  em um espaço curvo, podemos fazer o transporte paralelo pelos caminhos (1), adicionando um incremento  $dx^\alpha$  em seguida pelo caminho (2) adicionando um incremento  $\delta x^\alpha$ . Ou através (3) adicionando inicialmente um incremento  $\delta x^\alpha$  e em seguida pelo caminho (4) adicionando um incremento  $dx^\alpha$ , tornando o quadri vetor como  $A^\mu(x^\alpha + \delta x^\alpha + dx^\alpha)$  como mostra a Figura 6.2.

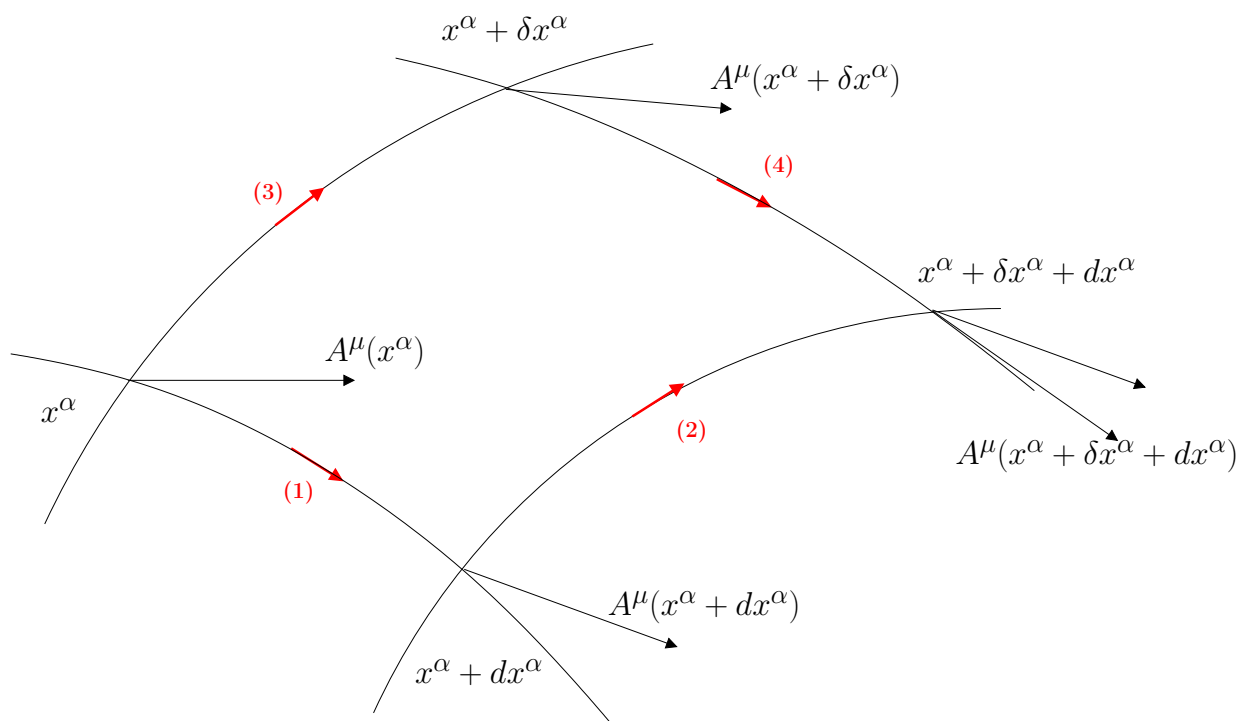


Figura 6.2: Transporte paralelo num espaço curvo.

Seguindo o caminho (1)

$$A^\mu(x + dx) = A^\mu(x) + \overline{\delta A}^\mu(x), \quad (6.1)$$

onde  $\overline{\delta A}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x)A^\alpha(x)dx^\beta$  e em seguida indo pelo caminho (2)

$$A^\mu(x + dx + \delta x) = A^\mu(x + dx) + \overline{\delta A}^\mu(x + dx), \quad (6.2)$$

onde  $\overline{\delta A}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + dx)A^\alpha(x + dx)\delta x^\beta$ . Expandindo em série de Taylor

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x + dx) \cong \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x) + \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x)dx^\beta. \quad (6.3)$$

Organizando as equações finalmente, encontrarmos através do caminho (1)  $\rightarrow$  (2) a seguinte contribuição para a métrica

$$A^\mu(x + dx + \delta x) = A^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha \delta x^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha A^\nu dx^\gamma \delta x^\beta + \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\nu \delta x^\beta. \quad (6.4)$$

Agora, se seguirmos inicialmente o caminho (3),

$$A^\mu(x + \delta x) = A^\mu(x) + \overline{\delta A}^\mu(x) \quad (6.5)$$

onde agora  $\overline{\delta A}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x)A^\alpha(x)\delta x^\beta$ . Em seguida o caminho (4)

$$A^\mu(x + \delta x + dx) = A^\mu(x + \delta x) + \overline{\delta A}^\mu(x + \delta x), \quad (6.6)$$

onde agora  $\overline{\delta A}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \delta x)A^\alpha(x + \delta x)dx^\beta$ .

Analogamente

$$A^\mu(x + dx + \delta x) = A^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha \delta x^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha A^\nu dx^\beta \delta x^\gamma + \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta \delta x^\nu. \quad (6.7)$$

A diferença entre os vetores, fruto do transporte paralelo em um espaço curvo é  $\Delta A^\mu = A_2 - A_1$ , logo temos

$$\Delta A^\mu = (\Gamma_{\lambda\gamma}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\lambda + \partial_\beta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\nu\beta}^\mu) A^\nu dx^\beta dx^\gamma \quad (6.8)$$

De forma que definimos o tensor de Riemann na Equação 1.23 como:

$$R_{\nu\beta\gamma}^\mu = \Gamma_{\lambda\gamma}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\lambda + \partial_\beta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\nu\beta}^\mu. \quad (6.9)$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Johannes Buchner. PyMultiNest: Python interface for MultiNest. *Astrophysics Source Code Library*, page ascl:1606.005, June 2016.
- [2] The Cosmic Microwave Background | Planck Mission - <http://planck.cf.ac.uk/science/cmb> - Acesso em 26-05-2019.
- [3] The redshift, May 2019. Page Version ID: 897777364.
- [4] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, March 1929.
- [5] Stellar Properties - <http://www.if.ufrgs.br/oei/stars/propmotion/proper.html>. Acesso em 20-07-2019.
- [6] Sophie Kretzschmar. Search for Dark Matter in Z+MET Evenets with the CMS Detector at  $\sqrt{s} = 13$  TeV.
- [7] Rob Garner. Hubble Highlights — Shining a Light on Dark Matter, February 2017.
- [8] Adrián. La cosmologia classica frente a la relativista y la supuesta curvatura del universo., May 2015.
- [9] Planck Collaboration, N. Aghanim, and et al. Akrami. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *arXiv:1807.06209 [astro-ph]*, July 2018. arXiv: 1807.06209.



- 
- [10] J. A. Peacock and Cole et al. A measurement of the cosmological mass density from clustering in the 2df Galaxy Redshift Survey. *Nature*, 410(6825):169–173, March 2001. arXiv: astro-ph/0103143.
- [11] S. Carneiro and H. A. Borges. Dynamical system analysis of interacting models. *General Relativity and Gravitation*, 50(10):129, October 2018. arXiv: 1704.07825.
- [12] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1–23, January 1989.
- [13] T. Padmanabhan. Cosmological constant—the weight of the vacuum. *Physics Reports*, 380(5):235–320, July 2003.
- [14] Douglas Scott. The Standard Model of Cosmology: A Skeptic’s Guide. *arXiv:1804.01318 [astro-ph]*, April 2018. arXiv: 1804.01318.
- [15] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie [AdP 49, 769 (1916)]. *Annalen der Physik*, 14(S1):517–571, 2005.
- [16] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. 142:419–421, July 1965.
- [17] Robert P. Kirshner. Supernovae, an accelerating universe and the cosmological constant. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 96(8):4224–4227, 1999.
- [18] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev. D*, 37:3406–3427, Jun 1988.
- [19] Francisco Carlos Pessoa Faria. *Os astrônomos pré-históricos do Ingá*. IBRASA, 1987. Google-Books-ID: BI2f4fReZlAC.
- [20] Telma Cristina Dias Fernandes, Marcos Daniel Longhini, and Deividi Márcio Marques. A construçao de um antigo instrumento para navegacao maritima e seu emprego em aulas de Astronomia e Matemática. *História da Ciência e Ensino: construindo interfaces*, 4(0):62–79, December 2011.

- [21] Enos Picazzio. A influencia da astronomia na ciencia e na humanidade. *ComCiência*, (112):0–0, 2009.
- [22] Benito Pepe. A Astronomia de Aristóteles, October 2009.
- [23] Galileu Galilei. Carta de Galileu Galilei a Fortunio Liceti em Pádua. *Scientiae Studia*, 1(1):75–80, March 2003.
- [24] Isaac Newton and et al. Chittenden. *Newton's Principia : the mathematical principles of natural philosophy*. New-York : Published by Daniel Adee.
- [25] Ótica (Universitário) | Ondas eletromagneticas e eter | e-fisica.
- [26] M. Delambre. *Histoire de l'astronomie au dix-huitième siècle*. Courcier, 1827.
- [27] Joseph Stratford. *Gloucestershire Biographical Notes*. "Journal" Office, 1887. Google-Books-ID: NfIgAAAAMAAJ.
- [28] Bradley, James (bap. 1692, d. 1762), astronomer | Oxford Dictionary of National Biography.
- [29] A. A. Michelson and E. W. Morley. On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science*, s3-34(203):333–345, November 1887.
- [30] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [31] H. A. Lorentz. Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Smaller than that of Light. In *Collected Papers: Volume V*, pages 172–197. Springer Netherlands, Dordrecht, 1937.
- [32] O. A. Acevedo and et al. Morais. O Princípio de Equivalência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(3), 2019.

- [33] Lorentz et al. *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*. Courier Corporation, January 1952. Google-Books-ID: S1dmLWLhdqAC.
- [34] R. G. G. Amorim, S. Ulhoa, P. M. M. Rocha, R. a. S. Paiva, R. G. G. Amorim, S. Ulhoa, P. M. M. Rocha, and R. a. S. Paiva. Elementos de geometria Riemanniana: Análise da esfera S<sup>2</sup>. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 37(2):2302–1–2302–9, June 2015.
- [35] John Michels and American Association for the Advancement of Science. *Science*. New York, N.Y. : [s.n.], 1880.
- [36] Bernard F. Schutz. Hamiltonian Theory of a Relativistic Perfect Fluid. *Physical Review D*, 4(12):3559–3566, December 1971.
- [37] B. V. Ivanov. Static charged perfect fluid spheres in general relativity. *Physical Review D*, 65(10):104001, April 2002.
- [38] Patricio S. Letelier. Anisotropic fluids with two-perfect-fluid components. *Physical Review D*, 22(4):807–813, August 1980.
- [39] Ravindra S. Kulkarni. On the Bianchi identities. *Mathematische Annalen*, 199(4):175–204, December 1972.
- [40] M. E. Cahill and A. H. Taub. Spherically symmetric similarity solutions of the Einstein field equations for a perfect fluid. *Communications in Mathematical Physics*, 21(1):1–40, March 1971.
- [41] Anthony Lelliott and Marissa Rollnick. Big Ideas: A review of astronomy education research 1974–2008. *International Journal of Science Education*, 32(13):1771–1799, September 2010.
- [42] Janelle M. Bailey and Timothy F. Slater. A Review of Astronomy Education Research. *Astronomy Education Review*, 2(2):20–45, September 2003.

- [43] R E Tribble et al. Indirect techniques in nuclear astrophysics: a review. *Reports on Progress in Physics*, 77(10):106901, oct 2014.
- [44] Remington et al. A review of astrophysics experiments on intense lasers. *Physics of Plasmas*, 7(5):1641–1652, April 2000.
- [45] Lawrence M. Krauss. Cosmology and astrophysics 1992. *AIP Conference Proceedings*, 272(1):158–184, February 1992.
- [46] Alpher et al. THERMAL COSMIC RADIATION AND THE FORMATION OF PROTOGALAXIES. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 58(6):2179–2186, December 1967.
- [47] Virginia Trimble and Markus J. Aschwanden. Astrophysics in 2002. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 115(807):514–591, may 2003.
- [48] Julio F. Navarro. The structure of cold dark matter halos. *Symposium - International Astronomical Union*, 171:255–258, 1996.
- [49] Douglas Clowe et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal*, 648(2):L109–L113, aug 2006.
- [50] Sidney Liebes. Gravitational Lenses. *Physical Review*, 133(3B):B835–B844, February 1964.
- [51] F. Zwicky. Nebulae as Gravitational Lenses. *Physical Review*, 51(4):290–290, February 1937.
- [52] Aggeliki Kassiola and Israel Kovner. Elliptic Mass Distributions versus Elliptic Potentials in Gravitational Lenses. *The Astrophysical Journal*, 417:450, November 1993.
- [53] A. Friedmann. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 21(1):326–332, December 1924.
- [54] Albert Einstein. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)*, 1917:142–152, 1917.

- 
- [55] A. Einstein and W. de Sitter. On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18(3):213–214, March 1932.
- [56] Varun Sahni. The Cosmological Constant Problem and Quintessence. *Classical and Quantum Gravity*, 19(13):3435–3448, July 2002. arXiv: astro-ph/0202076.
- [57] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier. The Chaplygin gas as a model for dark energy. *The Tenth Marcel Grossmann Meeting*, pages 840–859, February 2006. arXiv: gr-qc/0403062.
- [58] Fotios Anagnostopoulos and Spyros Basilakos. Constraining the dark energy models with  $H(z)$  data: an approach independent of  $H_0$ . *Physical Review D*, 97(6):063503, March 2018. arXiv: 1709.02356.
- [59] Cássio Bruno Magalhães Pigozzo. Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro. page 111.
- [60] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, June 2010. Google-Books-ID: qKoPBgAAQBAJ.
- [61] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, 215(5):203–333, June 1992.
- [62] James M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, 22(8):1882–1905, October 1980.
- [63] Nora Elisa Chisari and Matias Zaldarriaga. Connection between Newtonian simulations and general relativity. *Physical Review D*, 83(12):123505, June 2011.
- [64] Karel Van Acoleyen. Lemaitre–Tolman–Bondi solutions in the Newtonian gauge: from strong to weak fields. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(10):028, October 2008.

- [65] Steven Weinberg. Fluctuations in the cosmic microwave background. I. Form factors and their calculation in the synchronous gauge. *Physical Review D*, 64(12):123511, November 2001.
- [66] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges. *The Astrophysical Journal*, 455:7, December 1995. arXiv: astro-ph/9506072.
- [67] Scott Dodelson and Michael D. Schneider. The effect of covariance estimator error on cosmological parameter constraints. *Physical Review D*, 88(6):063537, September 2013.
- [68] Naresh Dadhich. Derivation of the Raychaudhuri Equation. *arXiv:gr-qc/0511123*, November 2005. arXiv: gr-qc/0511123.
- [69] R. F. vom Marttens, L. Casarini, W. Zimdahl, W. S. Hipólito-Ricaldi, and D. F. Mota. Does a generalized Chaplygin gas correctly describe the cosmological dark sector? *Physics of the Dark Universe*, 15:114–124, March 2017.
- [70] Nick Kaiser. Evolution and clustering of rich clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 222(2):323–345, September 1986.
- [71] David Parkinson and Andrew R. Liddle. Bayesian Model Averaging in Astrophysics: A Review. *Statistical Analysis and Data Mining*, 6(1):3–14, January 2013. arXiv: 1302.1721.
- [72] T. D. Saini, J. Weller, and S. L. Bridle. Revealing the Nature of Dark Energy Using Bayesian Evidence. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 348(2):603–608, February 2004. arXiv: astro-ph/0305526.
- [73] Roberto Trotta. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. *Contemporary Physics*, 49(2):71–104, March 2008. arXiv: 0803.4089.
- [74] M. P. Hobson, S. L. Bridle, and O. Lahav. Combining cosmological data sets: hyperparameters and Bayesian evidence. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 335(2):377–388, September 2002.

- 
- [75] Rene Andrae. Error estimation in astronomy: A guide. *arXiv:1009.2755 [astro-ph, physics:physics]*, September 2010. arXiv: 1009.2755.
- [76] Lavrentios Kazantzidis and Leandros Perivolaropoulos. Evolution of the  $f\sigma_8$  tension with the planck  $\lambda$  cdm determination and implications for modified gravity theories. *Physical Review D*, 97(10):103503, May 2018.
- [77] Charles Alcock and Bohdan Paczyński. An evolution free test for non-zero cosmological constant. *Nature*, 281(5730):358, October 1979.
- [78] Martin Lopez-Corredoira. Alcock-Paczynski cosmological test. *The Astrophysical Journal*, 781(2):96, January 2014. arXiv: 1312.0003.
- [79] Gamerman et al. *Markov Chain Monte Carlo : Stochastic Simulation for Bayesian Inference, Second Edition*. Chapman and Hall/CRC, May 2006.
- [80] Gilks et al. *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall/CRC, December 1995.
- [81] Michael A. Newton and Adrian E. Raftery. Approximate Bayesian Inference with the Weighted Likelihood Bootstrap. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 56(1):3–26, 1994.
- [82] David J. Earl and Michael W. Deem. Parallel tempering: Theory, applications, and new perspectives. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 7(23):3910–3916, November 2005.
- [83] Mark E. J. Newman and G. T. Barkema. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Clarendon Press, 1999. Google-Books-ID: KKL2nQEACAAJ.
- [84] Rutger van Haasteren. Bayesian evidence: can we beat MultiNest using traditional MCMC methods? *arXiv:0911.2150 [astro-ph, physics:gr-qc]*, November 2009. arXiv: 0911.2150.

- [85] Yong-Seon Song and Will J. Percival. Reconstructing the history of structure formation using redshift distortions. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(10):004–004, October 2009.
- [86] Max Tegmark and Eisenstein et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Physical Review D*, 74(12):123507, December 2006.
- [87] Marc Davis and Nusser et al. Local gravity versus local velocity: solutions for  $\beta$  and non-linear bias. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 413(4):2906–2922, June 2011.
- [88] Michael J. Hudson and Stephen J. Turnbull. THE GROWTH RATE OF COSMIC STRUCTURE FROM PECULIAR VELOCITIES AT LOW AND HIGH REDSHIFTS. *The Astrophysical Journal*, 751(2):L30, May 2012.
- [89] Turnbull et al. Cosmic flows in the nearby universe from Type Ia supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420(1):447–454, February 2012.
- [90] L. Samushia, W. J. Percival, and A. Raccanelli. Interpreting large-scale redshift-space distortion measurements. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420(3):2102–2119, March 2012.
- [91] Blake et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: joint measurements of the expansion and growth history at  $z < 1$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(1):405–414, September 2012.
- [92] Florian Beutler and Blake et al. The 6df Galaxy Survey:  $z \approx 0$  measurements of the growth rate and  $\sigma_8$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(4):3430–3444, July 2012.
- [93] S. de la Torre, L. Guzzo, and Peacock et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS) - Galaxy clustering and redshift-space distortions at  $z \approx 0.8$  in the first data release. *Astronomy & Astrophysics*, 557:A54, September 2013.



- [94] Chia-Hsun Chuang and Yun Wang. Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of  $H(z)$ ,  $DA(z)$  and  $f(z) \sigma_8(z)$  from the Sloan Digital Sky Survey DR7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435(1):255–262, October 2013.
- [95] E. Komatsu and Smith et al. SEVEN-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL INTERPRETATION. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):18, January 2011.
- [96] Chris Blake and Baldry et al. Galaxy And Mass Assembly (GAMA): improved cosmic growth measurements using multiple tracers of large-scale structure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436(4):3089–3105, December 2013.
- [97] Chuang et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: single-probe measurements from CMASS anisotropic galaxy clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 461(4):3781–3793, October 2016.
- [98] Hinshaw et al. NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL PARAMETER RESULTS. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):19, September 2013.
- [99] Okumura et al. The Subaru FMOS galaxy redshift survey (FastSound). IV. New constraint on gravity theory from redshift space distortions at  $z \approx 1.4$ . *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 68(3), June 2016.
- [100] Tegmark et al. The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey. *The Astrophysical Journal*, 606(2):702, May 2004.

- [101] Cullan Howlett, Ashley J. Ross, Lado Samushia, Will J. Percival, and Marc Marrera. The clustering of the SDSS main galaxy sample – II. Mock galaxy catalogues and a measurement of the growth of structure from redshift space distortions at  $z = 0.15$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(1):848–866, May 2015.
- [102] Ariel G. Sánchez and Montesano et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological implications of the full shape of the clustering wedges in the data release 10 and 11 galaxy samples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(3):2692–2713, May 2014.
- [103] Shadab Alam and Ata et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 470(3):2617–2652, September 2017. arXiv: 1607.03155.
- [104] Beutler et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: anisotropic galaxy clustering in Fourier space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 466(2):2242–2260, April 2017.
- [105] Michael J. Wilson. Geometric and growth rate tests of General Relativity with recovered linear cosmological perturbations. *arXiv:1610.08362 [astro-ph]*, October 2016. arXiv: 1610.08362.
- [106] Hawken et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey - Measuring the growth rate of structure around cosmic voids. *Astronomy & Astrophysics*, 607:A54, November 2017.
- [107] Huterer et al. Testing . 2017(05):015–015, May 2017.
- [108] Torre et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS) - Gravity test from the combination of redshift-space distortions and galaxy-galaxy lensing at  $0.5 < z < 1.2$ . *Astronomy & Astrophysics*, 608:A44, December 2017.

- [109] Pezzotta et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS) - The growth of structure at  $0.5 < z < 1.2$  from redshift-space distortions in the clustering of the PDR-2 final sample. *Astronomy & Astrophysics*, 604:A33, August 2017.
- [110] Feix et al. Speed from light: growth rate and bulk flow at  $z \approx 0.1$  from improved SDSS DR13 photometry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 468(2):1420–1425, June 2017.
- [111] Howlett et al. 2mtf – VI. Measuring the velocity power spectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471(3):3135–3151, November 2017.
- [112] F. G. Mohammad and Granett et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS): An unbiased estimate of the growth rate of structure at  $z = 0.85$  using the clustering of luminous blue galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, 610:A59, February 2018. arXiv: 1708.00026.
- [113] Wang et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: a tomographic analysis of structure growth and expansion rate from anisotropic galaxy clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(3):3160–3166, December 2018. arXiv: 1709.05173.
- [114] Shi et al. Mapping the Real Space Distributions of Galaxies in SDSS DR7: II. Measuring the growth rate, clustering amplitude of matter and biases of galaxies at redshift 0.1. *The Astrophysical Journal*, 861(2):137, July 2018. arXiv: 1712.04163.
- [115] Gil-Marín et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: structure growth rate measurement from the anisotropic quasar power spectrum in the redshift range  $0.8 < z < 2.2$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 477(2):1604–1638, June 2018. arXiv: 1801.02689.

- 
- [116] Hou et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: anisotropic clustering analysis in configuration-space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 480(2):2521–2534, October 2018. arXiv: 1801.02656.
- [117] Zhao et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: a tomographic measurement of cosmic structure growth and expansion rate based on optimal redshift weights. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 482(3):3497–3513, January 2019. arXiv: 1801.03043.
- [118] Andy Taylor, Benjamin Joachimi, and Thomas Kitching. Putting the precision in precision cosmology: How accurate should your data covariance matrix be? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 432(3):1928–1946, July 2013.
- [119] Adam Amara and Alexandre Réfrégier. Systematic bias in cosmic shear: extending the Fisher matrix. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391(1):228–236, November 2008.
- [120] P. E. Jupp and K. V. Mardia. Maximum Likelihood Estimators for the Matrix Von Mises-Fisher and Bingham Distributions. *The Annals of Statistics*, 7(3):599–606, May 1979.
- [121] C. G. Khatri and K. V. Mardia. The von Mises–Fisher Matrix Distribution in Orientation Statistics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 39(1):95–106, 1977.