



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

**Taxa de Crescimento das Estruturas em  
Modelos com Interação**

Patrícia Hepp

Dissertação de Mestrado

Salvador - Bahia, Brasil  
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Patrícia Hepp

**Taxa de Crescimento das Estruturas em Modelos com  
Interação**

*Trabalho de mestrado apresentado ao Instituto de Física  
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do tí-  
tulo de Mestre em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Humberto de Almeida Borges*

Salvador - Bahia, Brasil  
2017

---

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador prof. Dr. Humberto de Almeida Borges por todo o apoio como professor, carinho e respeito como ser humano, e por me dar o suporte em todo este percurso e nas horas em que mais precisei, que não foram nada fáceis. Aos professores Maria das Graças Reis Martins, Mário Bertin e ao João Ricardo por todo o apoio, luta e compreensão comigo. Aos amigos Leonardo, Edwin, Alfredo, Tássia, Tiago, Luan, Isabela, Roman, Elvis, Viviane e Natacha pela amizade e carinho tanto em momentos felizes, quanto em momentos não tão felizes, e à minha amiga Juliana (Juju) por me ensinar a abraçar! Em especial, aos amigos Maroivo caldeira, Andreia Simões, e Jorge Dantas pelas palavras certas (e lindas) de amizade na hora exata. Também quero deixar aqui o meu agradecimento sincero aos amigos Eric Pinto e Eduardo Reis pelo cuidado e apoio em um momento muito difícil desta jornada, quando o nosso amigo Deivis Duarte não pode mais estar entre nós... Agradeço sempre em orações ao meu grande amigo Deivis Duarte e à Salomé por serem a família que me acolheu em uma terra que até então não era minha. Gostaria de agradecer ao pessoal da graduação e da pós graduação do Instituto de Física da UFBA e aos servidores pelo carinho mútuo. Quero agradecer ao amigo e irmão Jeferson Gonçalves por toda a parceria e amizade que perdura desde a nossa graduação no nosso querido Rio Grande (entenda-se cidade do Rio Grande, entenda-se Rio Grande do Sul). À Capes que financiou parte do trabalho.

*Dedico mais esta conquista à minha mãe (que também fez o papel de pai), minha amiga, meu alicerce, ponto de partida e para onde/quem sempre posso voltar. Meus eternos amor e gratidão. Amo-te.*

*Ao meu irmão, que é o meu sonho realizado, um dos meus mais lindos presentes. Para dar o exemplo de vencedora para ti, guri, a mana não desistiu deste sonho!*

*E ao meu amigo e irmão de coração, que está sempre comigo em pensamento, Deivis Duarte. No teu último leito, eu te prometi que realizaria este sonho... Aqui estamos!*

*"Você pode conhecer o nome de um pássaro em todas as línguas do mundo, mas apesar disso não saberá absolutamente nada a respeito dele. Então, olhemos o pássaro para saber o que ele faz, e isso o que conta. Eu aprendi muito cedo a diferença entre saber o nome de alguma coisa e saber a respeito da coisa."*

—R.P. FEYNMAN (circa 1970)

---

## RESUMO

Na presente dissertação, estudamos a evolução da taxa de crescimento das estruturas em larga escala. Usamos a teoria das perturbações cosmológicas num formalismo invariante de gauge no modelo de gás de Chaplygin generalizado. O mesmo é decomposto em duas componentes escuras interagentes, que são matéria escura e vácuo. Consideramos o caso em que i) a matéria escura segue geodésica e o caso em que ii) o termo de vácuo é perturbado. Em ambos os casos o impacto sobre a evolução do contraste de densidade da matéria escura é, com boa aproximação, desprezível, corroborando a afirmação de que o espectro de potência de matéria e o espectro das anisotropias na radiação cósmica de fundo não serão afetadas. Porém, as diferenças são sensíveis na taxa de crescimento da matéria escura, indicando que a escolha de um modelo de vácuo homogêneo ou inhomogêneo seria importante para a comparação com as observações das distorções no espaço do *redshift* da distribuição espacial das galáxias.

---

# ABSTRACT

In this work we study the growth rate evolution of large scale structures. We use the theory of cosmological perturbations in a invariant gauge formalism in generalized Chaplygin gas model. This gas is decomposed into two dark interacting components, which are dark matter and vacuum. We consider the case where i) the dark matter follows geodesic and the case where ii) the vacuum term is perturbed. In both cases the impact on the evolution of dark matter density contrast is negligible with good approximation, corroborating the assertion that the matter power spectrum and the anisotropies spectrum in the cosmic background radiation is not affected. However the differences are sensitive in the growth rate of dark matter, indicating that a choice of a homogeneous or inhomogeneous vacuum model would be important for the comparison with the observations of the redshift space distortion in galaxies.

---

# SUMÁRIO

	<b>Página</b>
<b>Capítulo 1—Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução	1
<b>Capítulo 2—Descrição do Universo</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução	3
2.2 Contexto Histórico	3
2.3 A Teoria do Big Bang	4
2.4 Cinemática do Universo	5
2.5 Matéria Escura e Energia Escura	6
<b>Capítulo 3—Modelos Cosmológicos</b>	<b>9</b>
3.1 Introdução	9
3.2 Equações de Einstein	9
3.2.1 Matéria sem pressão	12
3.2.2 Radiação	13
3.2.3 Energia do Vácuo	13
3.2.4 Parâmetros Cosmológicos	14
3.3 Modelo $\Lambda$ CDM	14
3.4 Equações de Balanço de Energia-Momento	15
3.4.1 Modelo $\Lambda(t)$ CDM	16
3.5 Modelo de Fluido Composto por duas Componentes Interagentes	16
3.5.1 Modelo do Gás de Chaplygin	19
<b>Capítulo 4—Teoria da Perturbação Cosmológica</b>	<b>22</b>
4.1 Introdução	22
4.2 Perturbação Linear	23
4.3 Perturbando as Equações de Conservação Energia-Momento	23
4.3.1 Vácuo	24

4.3.2	Matéria Escura	25
4.3.3	Modelo Geodésico	26
4.3.4	Modelo de vácuo não homogêneo	27
<b>Capítulo 5—Resultados e Análises</b>		<b>30</b>
5.1	Função Crescimento	30
5.2	Resultados	31
5.2.1	Análise para $\alpha = 0,1$	32
5.2.2	Análise para $\alpha = 0,2$	34
5.2.3	Análise para $\alpha = -0,1$	37
5.2.4	Análise para $\alpha = -0,2$	39
5.2.5	Análise para $\alpha = -0,5$	42
<b>Capítulo 6—Conclusões</b>		<b>46</b>

---

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama de Hubble mostrando a relação entre as velocidades das galáxias e suas respectivas distâncias. Fonte:	6
2.2	Gráfico da velocidade rotacional da galáxia <i>NGC3198</i> em relação à distância do seu centro. Fonte: Rubin et al. / Ap JL 1978.	7
3.1	Figura que ilustra um universo com curvatura $k = 1$ . Fonte: <a href="http://www.astropt.org">www.astropt.org</a> .	11
3.2	Figura que ilustra um universo com curvatura $k = -1$ . Fonte: <a href="http://www.astropt.org">www.astropt.org</a> .	11
3.3	Figura que ilustra um universo com curvatura $k = 0$ . Fonte: <a href="http://www.astropt.org">www.astropt.org</a> .	11
5.1	Contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala $a$ .	32
5.2	Diferença em porcentagem ao usar diferentes valores de escala $k$ .	32
5.3	Função Crescimento em função do <i>redshift</i> .	33
5.4	Diferença percentual para $k = 0,1 \text{ Mpc}^{-1}$ e $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$ .	33
5.5	Função Crescimento em relação ao <i>redshift</i> .	33
5.6	Diferença percentual na comparação do modelo $\Lambda$ CDM e dos modelos com e sem perturbação no termo cosmológico.	33
5.7	Contraste de densidade de matéria escura em função do <i>redshift</i> .	34
5.8	Diferença relativa percentual ao usar diferentes valores de escala $k$ .	34
5.9	Contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala $a$ .	34
5.10	Diferença em porcentagem para $k = 0,1 \text{ Mpc}^{-1}$ e $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$ .	34
5.11	Função Crescimento versus <i>redshift</i> .	35
5.12	Diferença em porcentagem ao usar diferentes $k$ .	35
5.13	Função Crescimento em relação ao <i>redshift</i> .	36
5.14	Diferença percentual na comparação dos dois modelos citados.	36
5.15	Contraste de densidade de matéria escura em função de $z$ .	36
5.16	Diferença em porcentagem ao usar diferentes valores de $k$ .	36
5.17	Contraste de densidade versus fator de escala.	37
5.18	Diferença em porcentagem para diferentes $k$ em relação ao <i>redshift</i> .	37
5.19	Função Crescimento em relação ao <i>redshift</i> .	38

5.20	Diferença em porcentagem entre usar diferentes $k$ .	38
5.21	Função Crescimento versus <i>redshift</i> .	38
5.22	Diferença percentual na comparação dos modelos $\Lambda$ CDM, modelo com perturbação em $\Lambda$ e modelo geodésico.	38
5.23	Contraste de densidade de matéria escura em função de $z$ .	39
5.24	Diferença relativa percentual em relação ao modelo geodésico.	39
5.25	Contraste de densidade de ME versus fator de escala $a$ .	39
5.26	Diferença em porcentagem entre usar diferentes valores para a escala $k$ .	39
5.27	Função Crescimento versus <i>redshift</i> .	40
5.28	Diferença em porcentagem entre usar diferentes valores de escala $k$ .	40
5.29	Função Crescimento versus <i>redshift</i> .	41
5.30	Diferença percentual na comparação dos modelos citados.	41
5.31	Contraste de densidade de matéria escura em função de $z$ .	41
5.32	Diferença percentual relativa em relação de $z$ .	41
5.33	Contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala.	42
5.34	Diferença em porcentagem entre usar diferentes $k$ .	42
5.35	Função Crescimento versus <i>redshift</i> .	43
5.36	Diferença percentual entre usar diferentes $k$ .	43
5.37	Função Crescimento versus <i>redshift</i> .	43
5.38	Diferença percentual na comparação dos modelos citados.	43
5.39	Contraste de densidade em função de $z$ .	44
5.40	Diferença percentual relativa em função do <i>redshift</i> .	44
5.41	Função Crescimento versus <i>redshift</i> .	44
5.42	Diferença percentual na comparação dos modelos citados.	44

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

### 1.1 INTRODUÇÃO

A palavra Cosmologia vem da junção das palavras gregas “cosmo” - mundo- e “logos” - estudo, então esta é uma ciência que *estuda o mundo*, ou melhor, estuda a origem, estrutura e evolução do universo. Para entender o mundo em que vivemos precisamos de modelos e para que sejam considerados aceitáveis, estes precisam ser testados e comprovados cientificamente. Para isto, nesta área de pesquisa, são disponibilizados dados, como por exemplo de satélites como o *Hubble Space Telescope (HST)* [1] e o *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* [2].

A teoria do *Big Bang (BB)* foi proposta para explicar a origem e a evolução do cosmos e, a partir dela que surgiram os conceitos de matéria escura, agregadora por meio de atração gravitacional, e de energia escura, que age como uma força repulsiva acelerando a expansão do universo.

A atual expansão acelerada do universo indicada pelas observações das supernovas do tipo Ia [3–5], anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo (*CMB - Cosmic Microwave Background Radiation*), observações das estruturas em larga escala (*LSS- Large Scale structure*), entre outras, vem sendo um dos problemas mais fascinantes da cosmologia moderna e tem sido o foco de pesquisa de teóricos e experimentais da área. A explicação mais simples é a que consiste em propor a existência de uma componente de energia que atua como uma força anti-gravitacional, conhecida como energia escura [6], e que pode ser associada a uma constante cosmológica nas equações de Einstein [7–9]. As observações têm mostrado que, em torno de 70% da energia presente no universo está em forma de energia escura, 25% está na forma de matéria escura que desempenha função crucial na formação das galáxias e dos aglomerados de galáxias, 4% na forma de bárions e menos de 1% está na forma de radiação.

O cenário com constante cosmológica, associada com as flutuações quânticas do vácuo, e matéria escura fria é conhecido como o modelo padrão da cosmologia, ou modelo  $\Lambda$ CDM<sup>1</sup>. Tal modelo tem se mostrado bem sucedido quando testado contra as observações mais precisas como, por exemplo, as observações de supernovas do tipo Ia, o espectro das anisotropias de temperatura da radiação cósmica de fundo, o espectro de potência de matéria da distribuição das estruturas em larga escala. Entretanto, apesar do sucesso relativo frente às observações, o problema é que a densidade de energia do vácuo hoje observada é bem menor quando comparada com o valor teoricamente previsto pelas teorias quânticas de campos [9]. Então, se a causa da presente expansão acelerada é uma constante cosmológica, precisamos encontrar um mecanismo para obter o pequeno valor da densidade de energia consistente com as observações. No entanto, se a origem da energia escura não é uma constante cosmológica, o caminho está aberto para estudar modelos alternativos [10]- [11] que possam ser construídos para explicar a atual expansão acelerada do universo.

Neste sentido, investigamos modelos com interação entre matéria escura e termo cosmológico associado ao vácuo no nível de *background* e no nível perturbativo, assumindo que a contribuição da radiação é desprezível e que os bárions, nesta etapa de estudo, pode ser desconsiderada por simplicidade.

Neste trabalho, iremos estudar o contraste de densidade de matéria escura em relação ao *redshift* e a taxa linear de crescimento  $f$ . A taxa crescimento será obtida usando-se a teoria das perturbações cosmológicas lineares num modelo cosmológico de gás de Chaplygin generalizado decomposto, considerando-se dois casos:

- 1) A influência das perturbações no termo cosmológico sobre  $f$  dentro de um formalismo invariante de *gauge*, onde o termo de vácuo é perturbado;
- 2) Comparar os resultados obtidos em 1) com aqueles que foram obtidos considerando o modelo em que a matéria escura segue geodésica (sem perturbação no termo de vácuo).

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 vamos tratar da descrição do universo e do modelo do  $BB$ , no capítulo 3 veremos as equações de campo de Einstein, modelos cosmológicos e o modelo do gás de Chaplygin. No capítulo 4, veremos a parte perturbativa deste trabalho e o contraste de densidade de matéria escura, no capítulo 5 temos a descrição da função crescimento e a análise dos resultados e, por fim, teremos as conclusões e perspectivas no capítulo 6.

---

<sup>1</sup>Que será discutido no capítulo 3.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## DESCRIÇÃO DO UNIVERSO

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, faremos uma breve discussão sobre Cosmologia dentro de um contexto histórico, mais especificamente sobre a teoria do *Big Bang*, abordando a cinemática do universo, onde iremos definir alguns parâmetros necessários para o entendimento global do assunto, e as motivações para que fosse postulada a existência da matéria escura e da energia escura.

### 2.2 CONTEXTO HISTÓRICO

Sabemos que não existe somente matéria luminosa no cosmos; o que podemos ver é menos que 5% do seu conteúdo total. O restante está em uma forma que não podemos ver, mas que podemos inferir por meio de observações, que estão em forma de matéria escura (*ME*) e de energia escura (*EE*) [12].

Vamos descrever, aqui, brevemente o que são a matéria escura fria e a energia escura para que haja um entendimento dos assuntos que serão discutidos posteriormente, mas estes serão descritos com mais detalhes ao longo deste trabalho. A matéria escura fria é um tipo de matéria não relativística (a baixas velocidades), sem pressão, que interage muito fracamente, e somente via interação gravitacional que agrega os bárions para a formação das estruturas em larga escala presente no universo observável. A energia escura é uma energia repulsiva que tem como uma boa candidata a energia de vácuo, e que faz com que a expansão do universo seja acelerada.

Para entender como a *ME* e a *EE* foram descobertas, vamos voltar ao século passado e partir do contexto histórico em que estas se fizeram presentes.

## 2.3 A TEORIA DO BIG BANG

A teoria do *Big Bang*, ou Grande Explosão<sup>1</sup> em português, foi proposta para explicar o início e a evolução do universo, e os criadores desta ideia tomaram como base a teoria da relatividade geral de Einstein.

Em 1907, Albert Einstein (1879-1955) defendeu a importância da gravitação na propagação da luz através do princípio da equivalência, onde um observador que está em um referencial acelerado não seria capaz de diferenciar os efeitos medidos no referencial em que ele se encontra dos efeitos medidos na presença de um campo gravitacional. Neste, e em outro trabalho (de 1911), Einstein argumentou que a propagação da luz é afetada pela presença de um campo gravitacional expressivo [13].

Em 1915, Einstein publicou a teoria da relatividade geral, em que o universo é formado por uma estrutura quadridimensional chamada espaço-tempo, e esta é perturbada pela presença de matéria e energia. Esta perturbação seria, mais precisamente, uma curvatura, que é responsável pelo efeito da atração gravitacional; ou melhor, a gravidade seria um efeito da curvatura da geometria do espaço-tempo. Como consequência, a geometria seria não mais rígida como na teoria Newtoniana, mas com uma estrutura quadridimensional que pode ser deformável pela distribuição de matéria e seu movimento, uma vez que a transmissão da informação das perturbações gravitacionais se fariam numa velocidade limite, ou seja, à velocidade da luz.

Podemos citar algumas das previsões da teoria, como a deflexão da luz por um corpo massivo, a propagação de ondas gravitacionais neste espaço-tempo maleável devido a eventos em algum ponto do espaço-tempo, redshift gravitacional da luz.

Através de suas equações de campo, que serão vistas no capítulo 3, Einstein percebeu que o tensor energia-momento agia de forma a curvar o espaço-tempo, fazendo com que a matéria contida no universo sofresse uma atração gravitacional. Para balancear esta atração e o universo permanecesse estático, como a comunidade científica pensava na época, ele introduziu a constante cosmológica ( $\Lambda$ ) em suas equações, que seria de cunho repulsivo [14].

A partir da análise das equações de campo de Einstein, Alexander Friedmann (1888 - 1925) e Georges Lemaître (1894 - 1966), mesmo pesquisando independentemente, chegaram à conclusão teórica que o universo estaria em expansão [15]. Para isto, eles adotaram a hipótese de um universo plano e o Princípio Cosmológico, onde o universo é considerado homogêneo e isotrópico em largas escalas (acima de 100 Mpc, onde  $100 \text{ Mpc} = 3,086 \cdot 10^{24} \text{ m}$ ). Outra conclusão foi que a expansão teria se originado a partir da singularidade<sup>2</sup>, que seria um evento ocorrido a altíssimas temperaturas e então, somente quando a temperatura começou a diminuir, apareceram as condições para a formação e existência de elementos fundamentais.

Esta teoria também possibilitou a previsão da existência de uma radiação que teria sido formada com o universo primordial. Esta recebeu o nome de Radiação Cósmica de Fundo<sup>3</sup> (*RCF*) e foi detectada por Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-) no ano de 1965. Tal radiação é isotrópica (em largas escalas), possui espectro de corpo negro e é uma comprovação de que o universo era muito mais quente e denso no passado do que é hoje. Através dessa

<sup>1</sup>Nome que faz referência à expansão, contudo não significa que realmente houve uma explosão.

<sup>2</sup>Expansão de matéria, radiação e energia a partir de um raio que tendia a zero.

<sup>3</sup>Usualmente conhecida na literatura como Cosmic Microwave Background Radiation - *CMB*.

radiação, pode-se inferir que o universo era preenchido por um fluido (dito plasma de quarks e glúons) formado por radiação e partículas elementares livres altamente energéticas que interagem, fazendo com que este plasma esfriasse até que fosse possível a combinação de elétrons com prótons e núcleos atômicos para a formação de átomos. Este é o processo chamado *recombinação*, em que os fótons puderam viajar livremente no universo, chegando a sua temperatura atual de aproximadamente  $2,7K$ , o que informa que a idade do universo é cerca de 13,7 bilhões de anos [2, 16].

Na década de 1990, os satélites WMAP (cujo dados citados anteriormente encontram-se no *site* da referência [2]), COBE<sup>4</sup> [17], e HST<sup>5</sup> [1] foram capazes de obter dados diretos, como as anisotropias em pequenas escalas na temperatura ( $\approx 10^{-5}K$ ) e indiretos, como a constante de Hubble  $H_0$ .

Após a Grande Explosão, iniciou-se a Era Inflacionária em que houve uma expansão exponencial de matéria e possibilitou as perturbações no espaço-tempo, que deram origem às estruturas cosmológicas tais como galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias. Estas perturbações serão discutidas no capítulo 4.

Atualmente, a teoria do *BB* é o modelo cosmológico vigente, em conjunto com o modelo  $\Lambda$ CDM, e é o mais bem aceito pela comunidade científica por ter suas teorias validadas através de muitas pesquisas e dados observacionais.

## 2.4 CINEMÁTICA DO UNIVERSO

Em 1912, o astrônomo americano Vesto Slipher (1875-1969) mediu as linhas espectrais de emissão e absorção de 41 galáxias e percebeu que a maioria delas apresentava um deslocamento para o vermelho, e algumas como Andrômeda apresentavam o deslocamento para o azul. Este deslocamento de linhas indicava que o corpo celeste que as emite está se afastando ou se aproximando do observador. Quando o objeto emissor se aproxima do observador, esse apresenta um desvio para o azul (*blueshift*), e quando o emissor se afasta, temos o desvio para o vermelho (*redshift*).

O *redshift* é um parâmetro muito utilizado para cálculos cosmológicos e para medições de propriedades de objetos astronômicos, como estrelas e galáxias. Na cosmologia, podemos atribuir o desvio das linhas espectrais à velocidade de afastamento ou de aproximação dos corpos, a variações do campo gravitacional entre o objeto emissor e o observador e à expansão do espaço-tempo [18].

O *redshift* ( $z$ ) é definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_{observ} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}}, \quad (2.1)$$

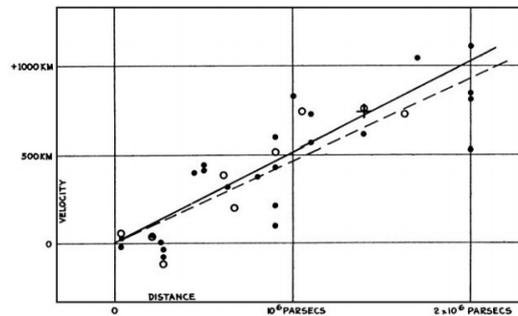
onde  $\lambda_{observ}$  é o comprimento de onda observado e  $\lambda_{emit}$  é o comprimento de onda emitido.

Usando os resultados de Slipher sobre o avermelhamento de galáxias, os astrônomos americanos Edwin Hubble (1889 - 1953) e Milton Humason (1891-1972) compararam as distâncias

<sup>4</sup>Cosmic Background Explorer.

<sup>5</sup>Hubble Space Telescope.

das galáxias com as suas velocidades de afastamento e chegaram à conclusão que elas se afastavam com velocidade proporcionais à sua distância, ou seja quanto mais distante a galáxia, maior a sua velocidade de recessão, como podemos ver na figura (2.1)



**Figura 2.1** Diagrama de Hubble mostrando a relação entre as velocidades das galáxias e suas respectivas distâncias. Fonte:

O estudo da comparação de distâncias *versus* velocidade de afastamento das galáxias gerou o que conhecemos hoje como a lei de Hubble, que veio a público em 1929 e pode ser representada como [15], [18]

$$v = H_0 d, \quad (2.2)$$

onde  $H_0$  é a chamada constante de Hubble (que hoje é de  $H_0 \approx 70 \text{ km/sMpc}$ ) e  $d$  é a distância da galáxia.

Para determinar a taxa de expansão do universo, usa-se o parâmetro de Hubble que é dado por

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.3)$$

onde  $\dot{a} = \frac{da(t)}{dt}$  e  $a(t)$  é o fator de escala, que é a distância entre dois pontos em um universo em expansão.

## 2.5 MATÉRIA ESCURA E ENERGIA ESCURA

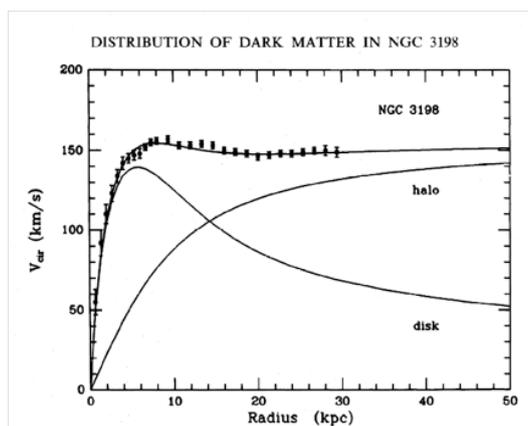
Em 1937, o astrônomo suíço Fritz Zwicky (1898-1974) publicou seus estudos sobre as massas e as velocidades de rotação de galáxias (que na época eram chamadas de “Nebulae”) [19] e aglomerado de galáxias. Estudando o aglomerado de galáxias chamado Coma (*Coma cluster*), que é um dos mais numerosos contendo aproximadamente 10.000 galáxias [20], Zwicky observou que a velocidade de rotação destas era muito maior do que previa a teoria, que a massa luminosa dos corpos em questão não era suficiente para dar conta dos dados observacionais e ainda, que a matéria intergaláctica não era suficiente para manter-se unida por atração gravitacional. Deveria, então, haver uma maior quantidade de matéria para reproduzir, teoricamente,

os resultados obtidos, e sem esta quantidade “faltante” as galáxias não sofreriam a atração gravitacional necessária para se manterem unidas, formando os aglomerados. Afim de solucionar esses casos aparentemente sem explicação, Zwicky postulou a existência da matéria escura.

Este assunto, no entanto, foi deixado de lado até os meados de 1970, quando a astrônoma (também americana) Vera Rubin (1928 – 2016) estudou este problema mais profundamente. Para isto, ela mediu a velocidade tangencial de rotação de certas galáxias por meio da previsão Newtoniana através das forças gravitacional e centrípeta<sup>6</sup>.

$$\frac{GM(r)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 \propto \frac{1}{r},$$

onde a massa total da galáxia  $M(r)$  é uma função de distribuição de massa em um meio onde a densidade não é constante. A partir da expressão acima, percebe-se que a velocidade tangencial será inversamente proporcional à distância do centro da galáxia ( $r$ ).



**Figura 2.2** Gráfico da velocidade rotacional da galáxia *NGC3198* em relação à distância do seu centro. Fonte: Rubin et al. / Ap JL 1978.

A figura (2.2) mostra a velocidade prevista pela teoria e a observada, além de trazer pontos na curva observada que foram medidos por físicos experimentais. Estas são velocidades medidas em diferentes pontos da galáxia e quanto mais distante do centro, menor deveria ser o valor encontrado. Somando-se a isto, a curva deveria cair de uma maneira mais incisiva do que a encontrada experimentalmente. Contudo, Rubin e seu grupo notaram um padrão muito diferente do esperado. Eles observaram uma curva quase constante e este comportamento seria bem explicado fazendo uso da “massa faltante” de Zwicky, ou melhor, da matéria escura.

Pelo comportamento observado, a *ME* seria uma massa que não interage eletromagneticamente, mas interage muito fracamente com a matéria bariônica e somente via força gravitacional. Ainda, há como detectar se há algum corpo massivo, constituído por *ME*, perto de corpos

<sup>6</sup>Esta é considerada uma boa aproximação, pois as equações de campo de Einstein quando usadas a baixas velocidades, retomam as equações de Newton.

celestes via lentes gravitacionais, pois esta afeta o movimento das galáxias nos aglomerados e superaglomerados, e também afeta o movimento de estrelas e gases dentro das galáxias.

As observações cruciais para a disseminação do conceito de energia escura ocorreram em 1998, com a observação da aceleração da velocidade de expansão do universo através os estudos que Adam Riess e sua equipe [4] fizeram sobre supernovas do tipo Ia<sup>7</sup> e com a confirmação dada por Sam Perlmutter e sua equipe [3]. Nessa época, acreditava-se em um universo em expansão desacelerada devida a atração gravitacional, mas observações de supernovas do tipo Ia mostraram que esses objetos estavam a velocidades menores do que deveriam estar, e assim, o universo estaria sofrendo uma aceleração causada por algo que foi nomeado como energia escura.

Essa energia tem uma pressão negativa que corresponde a uma repulsão, da mesma maneira que a pressão positiva vem da matéria que cria a atração gravitacional e deve ser homogênea em grandes escalas. As análises de dados de supernovas do tipo Ia mostram que o universo está em expansão acelerada, justamente o que demanda esta componente de pressão negativa, pois é esta pressão a responsável pela expansão [21].

Como visto anteriormente através da teoria do *BB*, o universo está em expansão acelerada e a suposta responsável por esta aceleração é a energia escura. Uma candidata em potencial à energia escura é a energia de vácuo que, no passado evolutivo do universo, seria o estado de mínima energia, onde as partículas começaram a ser criadas e aniquiladas a partir de uma perturbação na energia [22].

---

<sup>7</sup>São estrelas variáveis que resultam da grande explosão de uma anã branca.

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## MODELOS COSMOLÓGICOS

### 3.1 INTRODUÇÃO

Como mencionado anteriormente, as equações de campo de Einstein deram origem ao modelo padrão da cosmologia atual, e a partir delas, é possível criar modelos para tentar descrever com maior precisão como o universo evolui. Assim, trataremos neste capítulo das equações de campo de Einstein, da descrição do pano de fundo que permeia o universo, e do modelo do Gás de Chaplygin, que relaciona pressão e densidade.

### 3.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

A teoria da relatividade geral contém uma descrição geométrica da gravitação, e mostra que é possível aplicá-la na dinâmica global do universo a partir do Princípio Cosmológico, onde o universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas, e é caracterizado pela taxa de expansão, pela densidade de energia e pela curvatura do espaço-tempo.

As equações de campo de Einstein são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde os índices gregos variam entre 0, 1, 2, 3, em que o valor 0 corresponde à coordenada temporal, e os valores que variam entre 1, 2 e 3, são as coordenadas espaciais. De agora em diante, usaremos as unidades naturais, onde  $8\pi G \equiv c \equiv 1$ .

A expressão (3.1) é um conjunto de equações que relaciona a geometria do universo, descrita no lado esquerdo, com a distribuição de matéria e energia, que podemos ver no lado direito. Ela é formada pelo tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , de assinatura  $(-, +, +, +)$ ,

pelo escalar de curvatura  $R$ , pelo termo cosmológico  $\Lambda$  e tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Cada um destes tensores tem um conjunto próprio de equações que vamos explicitar a seguir:

- $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}. \quad (3.2)$$

O tensor de Ricci é formado pelos símbolos de Christoffel, que são

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}(\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}g_{\mu\lambda}), \quad (3.3)$$

onde a notação usada é  $\partial_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$ , e também por sua derivação parcial (em que a vírgula simboliza esta derivação)

$$\Gamma_{\nu\mu,\alpha}^{\alpha} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (3.4)$$

- $R$  é o escalar de curvatura, que também é conhecido como escalar de Ricci (por ser obtido através da contração do tensor de Ricci)

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

- $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento de um fluido perfeito dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho u_{\mu}u_{\nu} + ph_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

onde a quadrivelocidade é escrita em função das coordenadas  $x_{\mu}$  e do elemento de linha  $ds$

$$u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{ds}. \quad (3.7)$$

Adotando um sistema de coordenadas em que os observadores são comóveis no background, suas componentes são  $u^0 = 1$  e  $u^i = 0$ . A quadrivelocidade do fluido obedece a relação  $u^{\mu}u_{\mu} = -1$ .

O operador projeção  $h_{\mu\nu}$  é dado por

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}, \quad (3.8)$$

sendo que a quadrivelocidade e o operador projeção são ortogonais ( $u_{\mu}h^{\mu\nu} = 0$ ).

O elemento de linha de um universo homogêneo e isotrópico em largas escalas é dado por

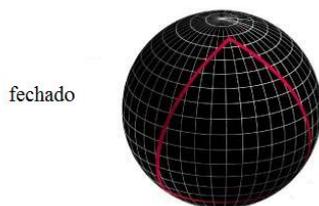
$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.9)$$

chamado de elemento de linha de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (*FLRW*), que descreve um espaço-tempo quadridimensional, sendo que  $a(t)$  é o fator de escala no tempo próprio  $t$ , que é o instante medido por um observador (comóvel) que vê o universo em expansão uniforme em torno de si, e  $k$  é a curvatura espacial do universo [23].

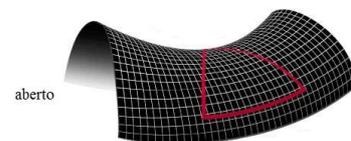
O termo de curvatura  $k$  contido na equação (3.10) pode assumir três valores que dão origem a três tipos diferentes de geometria:

- $k = 1$ , universo fechado ou esférico.
- $k = 0$ , universo plano, com geometria euclidiana.
- $k = -1$ , universo aberto, com formato de sela

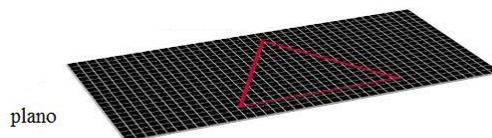
como podemos ver nas figuras abaixo:



**Figura 3.1** Figura que ilustra um universo com curvatura  $k = 1$ . Fonte: [www.astropt.org](http://www.astropt.org).



**Figura 3.2** Figura que ilustra um universo com curvatura  $k = -1$ . Fonte: [www.astropt.org](http://www.astropt.org).



**Figura 3.3** Figura que ilustra um universo com curvatura  $k = 0$ . Fonte: [www.astropt.org](http://www.astropt.org).

Tomando as componentes  $0 - 0$  das equações de Einstein, obtemos a equação de Friedmann

$$3H^2 = \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.10)$$

onde  $H$  é a taxa de expansão do universo e  $\rho$  é a densidade de energia total contida no universo.

As referências [24, 25], apontam para um universo com curvatura plana ( $k = 0$ ). Sendo assim, podemos reescrever a equação de Friedmann como

$$3H^2 = \rho, \quad (3.11)$$

onde a taxa de expansão é conhecida através da densidade total de matéria e energia no universo.

A conservação do tensor energia-momento é obtida por

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (3.12)$$

A derivação covariante de (3.12) é definida como sendo

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} \equiv T^{\mu\nu}{}_{,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T^{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T^{\mu\alpha} = 0. \quad (3.13)$$

Reescrevendo a expressão acima com  $\nu = 0$ , assumindo a isotropia ( $T^{i0} = 0$ ) e com os índices mudos  $\mu$  do primeiro termo e  $\alpha$  do segundo termo sendo iguais a zero, teremos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.14)$$

A expressão (3.14) trata-se da equação da continuidade que relaciona pressão e densidade, e descreve a conservação de matéria no universo [26, 27].

As equações (3.11) e (3.14) nos permitem conhecer a evolução da densidade de energia e a taxa de expansão do universo, através do termo  $H$ , assim que obtivermos uma equação de estado para a pressão.

A densidade total  $\rho$  pode ser descrita em termos das densidades de matéria bariônica, de matéria escura, de radiação e da densidade de energia do vácuo. Como já mencionamos anteriormente, as duas primeiras densidades são tratadas como uma só densidade, descrita como  $\rho_m$ . Vamos comentá-las, brevemente, nas próximas subseções.

### 3.2.1 Matéria sem pressão

Num universo homogêneo e isotrópico dominado por matéria sem pressão, a expressão (3.14) se torna  $\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0$ , pois  $p_m = 0$ . Usando a definição do parâmetro de Hubble ( $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ ), teremos

$$\frac{d\rho_m}{\rho_m} = -3\frac{da}{a}. \quad (3.15)$$

A equação acima tem como solução

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}, \quad (3.16)$$

em que  $\rho_{m0}$  é a densidade de matéria hoje e  $a_0 = 1$  é o fator de escala atual parametrizado a unidade.

Podemos perceber que a densidade cai com o cubo do fator de escala, que está relacionada à taxa de expansão do universo.

### 3.2.2 Radiação

Na fase primordial do universo em que este era denso e opaco, a radiação dominava o conteúdo energético com pressão  $p_r = \rho_r/3$ . Repetindo o processo anterior, vamos encontrar

$$\frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4 \frac{da}{a}. \quad (3.17)$$

Neste caso, a solução da equação de continuidade pode ser escrita como

$$\rho_r = \rho_{r0} a^{-4}. \quad (3.18)$$

Podemos perceber que a densidade de energia de radiação cai com a quarta potência do fator de escala, que está relacionada à taxa de expansão do universo.

### 3.2.3 Energia do Vácuo

A energia do vácuo é uma boa candidata a energia escura, que é responsável pela aceleração da expansão do universo. A sua equação de estado vem da primeira lei da termodinâmica, onde a variação da energia interna  $U$  através de uma variação adiabática no volume  $V$ , é igual ao trabalho ( $dU = -PdV$ , em que  $P$  é a pressão do gás), e é dada por

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (3.19)$$

onde  $\Lambda$  é o termo cosmológico, também conhecido como termo de vácuo.

Substituindo a equação acima em (3.14), teremos

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0, \quad (3.20)$$

o que nos leva a

$$\rho_\Lambda = \Lambda. \quad (3.21)$$

Desta vez, podemos perceber que a densidade de energia do vácuo é constante. Este é o caso do modelo  $\Lambda$ CDM, que vamos abordar na próxima seção.

### 3.2.4 Parâmetros Cosmológicos

Incluindo matéria sem pressão, termo cosmológico e radiação, a equação de Friedmann fica na forma

$$3H^2 = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda. \quad (3.22)$$

Dividindo a expressão (3.22) por  $3H_0^2$ , teremos

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda0}), \quad (3.23)$$

onde os parâmetros de densidade de matéria, de radiação e de energia de vácuo são respectivamente

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{r0} = \frac{\rho_{r0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{\Lambda0} = \frac{\rho_{\Lambda0}}{3H_0^2}. \quad (3.24)$$

Os subíndices “zero” dizem respeito aos parâmetros atuais.

No caso plano, temos que  $\Omega_{total} = 1$  e no presente estudo,  $\Omega_r$  é suprimido.

## 3.3 MODELO $\Lambda$ CDM

Neste modelo, o universo espacialmente plano é composto, em tempos tardios, basicamente por duas componentes dominantes. Uma é a constante cosmológica de Einstein com densidade de energia  $\rho_\Lambda$ , associada à energia escura que é responsável pela atual aceleração na expansão do universo, como mencionamos na subseção (3.2.3). A descoberta da energia escura veio à tona em 1998 [23], quando medidas de distâncias de supernovas revelaram que o universo estaria em expansão acelerada.

Hoje, sabemos que esta energia tem a propriedade de representar uma pressão negativa, que corresponde a uma repulsão, assim como a pressão positiva criada pela matéria pode ser entendida como atração gravitacional, e esta energia também deve ser homogênea em larga escala e aproximadamente constante no tempo. A outra componente é a matéria escura fria com densidade de energia  $\rho_m$ , que tem a propriedade de aglomerar as estruturas em larga escala observáveis, funcionando como uma “cola” cósmica.

Usando a expressão (3.23) em relação ao *redshift*, onde  $a^{-1} = (1+z)$ , vamos obter o parâmetro de Hubble

$$H(z) = H_0 [1 - \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0}(1+z)^3]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.25)$$

sendo que  $\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{m0}$ .

A partir de (3.25), onde já deixamos de escrever o termo de radiação, obtemos informação de como o universo se expande.

Como já mencionamos o termo cosmológico, agora vamos abordar o termo *CDM*, de matéria escura fria. A matéria escura sendo considerada fria, ou seja a velocidades não relativísticas, vai ao encontro das observações cosmológicas. Estas concluem que, para haver formação de estruturas no universo, a matéria originária deveria ter baixas energias, consequentemente, baixas velocidades, para que pudesse sofrer atração gravitacional e, por consequência, fazer com que a matéria bariônica pudesse se atrair, também gravitacionalmente.

Com os dados observacionais atuais podemos afirmar que, enquanto a matéria escura (juntamente com a matéria bariônica) produz uma força atrativa capaz de desacelerar a expansão do universo, a energia escura produz uma repulsão, fazendo com que a expansão seja acelerada.

### 3.4 EQUAÇÕES DE BALANÇO DE ENERGIA-MOMENTO

É importante conhecer as equações de balanço de energia e de momento, pois é através delas que podemos descrever a dinâmica do fluido que compõe o universo. Além da forma como obtivemos a equação da continuidade (3.14), uma outra forma de obter as equações de movimento consiste em tomar diretamente a derivada covariante do tensor energia-momento (3.6).

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = (\rho u^\mu u^\nu + p h^{\mu\nu})_{;\mu} = 0. \quad (3.26)$$

o que nos leva a

$$(\rho + p)_{,\mu} u^\mu u^\nu + (\rho + p)\theta u^\nu + (\rho + p)u^\mu u^\nu{}_{;\mu} + p_{,\mu} g^{\mu\nu} = 0. \quad (3.27)$$

Projetando a equação acima ao longo da quadrivelocidade do fluido escuro, obtemos a equação de balanço de energia

$$\rho_{,\mu} u^\mu + (\rho + p)\theta = 0, \quad (3.28)$$

onde podemos definir a expansão escalar como sendo  $\theta \equiv u^\mu{}_{;\mu}$ .

Da mesma forma, projetando a mesma equação ao longo do operador projeção  $h_{\mu\sigma}$ , encontraremos a equação de balanço de momento

$$(\rho + p)u^\mu u^\nu{}_{;\mu} + p_{,\mu} h^{\mu\nu} = 0. \quad (3.29)$$

Estas equações são válidas em qualquer sistema de referência. Em particular, se consideramos num universo homogêneo e isotrópico, com observadores comóveis, a transferência de momento será igual a zero, e a equação de continuidade (3.14) é recuperada.

A partir de (3.28) e (3.29), podemos começar a descrição do universo como sendo permeado por um fluido composto de matéria escura e energia de vácuo; contudo, para descrever este termo, devemos introduzir o modelo  $\Lambda(t)$ CDM.

### 3.4.1 Modelo $\Lambda(t)$ CDM

Este modelo estuda o termo cosmológico como sendo dependente do tempo. Vários estudos acerca deste tema vêm sendo realizados (e.g. [28, 29],) e mostram uma diferença significativa nos valores teórico e observado de  $\Lambda$ . Pela existência desta discrepância que surgiu a ideia de que o termo cosmológico não era constante, mas sim poderia variar através do passar do tempo.

Os estudos relacionados a este tema mostram que o valor de  $\Lambda$  decai desde o  $BB$ , com a expansão, até a época atual, sendo que hoje este valor é de aproximadamente  $\rho_{\Lambda 0} = 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ , o que significa dizer que há 5 átomos de hidrogênio em um espaço de  $1 \text{ m}^3$ , valor este que é 10 milhões de vezes menor que o melhor vácuo que se pode obter em laboratórios na Terra [15].

Como  $\Lambda$  é dependente do tempo, mesmo que continue sendo interpretado como energia de vácuo, é descrito por uma equação que envolve o parâmetro de Hubble  $H(t)$ .

$$\rho_{\Lambda} = \Lambda(t) = \sigma H(t), \quad (3.30)$$

onde  $\sigma$  uma constante positiva bem definida do modelo, e a expressão para a pressão da energia de vácuo é

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} = -\Lambda. \quad (3.31)$$

Com o termo referente à energia de vácuo sendo variável, dependente do tempo, podemos explicar as flutuações entre matéria e energia e a diferença na densidade destas da época primordial até o tempo presente.

## 3.5 MODELO DE FLUIDO COMPOSTO POR DUAS COMPONENTES INTERAGENTES

Desde 1998, as observações da supernova do tipo Ia (SNIa) mostram que o universo se encontra em uma fase de expansão acelerada [3, 30], e esta constatação também vem dos resultados de observações da anisotropia na radiação cósmica de fundo (CMB) [31] e dos dados das estruturas em larga escala (LSS) [32]. Considerando o modelo padrão da cosmologia, esta expansão acelerada prediz que o universo é permeado por um fluido formado pela energia escura, cuja pressão é negativa. E há também a possibilidade deste fluido ser composto por uma mistura da energia escura e da matéria escura. Estes são modelos que podemos encontrar na literatura, como por exemplo [23, 33].

Vamos considerar a conservação do tensor  $E - M$  de um sistema de duas componentes: matéria escura, simbolizada pelo índice “m”, e energia escura, simbolizada pelo índice “ $\Lambda$ ”.

$$T_m^{\mu\nu}{}_{;\mu} = Q_m^{\mu}. \quad (3.32)$$

$$T_{\Lambda}^{\mu\nu}{}_{;\mu} = -Q_{\Lambda}^{\mu}, \quad (3.33)$$

em que a conservação do tensor energia-momento total desse fluido é a soma das expressões acima, onde  $T_{total;\mu}^{\mu\nu} = T_{m;\mu}^{\mu\nu} + T_{\Lambda;\mu}^{\mu\nu} = 0$ .

As equações (3.28), agora com o termo de transferência de energia, para os termos de matéria escura e energia de vácuo, tornam-se

$$-u_{\mu} T_{m;\mu}^{\mu\nu} = -u_{\mu} Q_m^{\mu} \quad (3.34)$$

e

$$-u_{\mu} T_{\Lambda;\mu}^{\mu\nu} = u_{\mu} Q_{\Lambda}^{\mu} \quad (3.35)$$

Do mesmo modo, as equações (3.29), com o termo de transferência de energia  $Q$ , para os termos de matéria escura e energia de vácuo, podem ser escritas como

$$h_{\nu\sigma} T_{m;\mu}^{\mu\nu} = h_{\nu\sigma} Q_m^{\mu} \quad (3.36)$$

e

$$h_{\nu\sigma} T_{\Lambda;\mu}^{\mu\nu} = -h_{\nu\sigma} Q_{\Lambda}^{\mu}. \quad (3.37)$$

O quadrivetor transferência energia-momento pode ser separado em partes proporcionais à quadravelocidade, tais como

$$Q^{\mu} = u^{\mu} Q + \bar{Q}^{\mu}, \quad (3.38)$$

onde  $Q$  é o termo paralelo e  $\bar{Q}$  é o termo perpendicular.

Assim, como fizemos para o modelo de base, as equações de balanço de energia e de momento (gerais) com o termo da transferência de energia, serão

$$\rho_{,\mu} u^{\mu} + (\rho + p)\theta = -u_{\mu} Q^{\mu} \quad (3.39)$$

e

$$(\rho + p)u_{,\mu}^{\nu} u^{\mu} + p_{,\mu} h^{\mu\nu} = h_{\mu\nu} Q^{\mu}. \quad (3.40)$$

Como temos as componentes de matéria escura e de vácuo, cada uma delas tem as suas equações de balanço que são:

Para ME, as equações são

$$\rho_{m,\mu}u^\mu + \rho_m\theta = -u_\mu Q^\mu \quad (3.41)$$

e

$$\rho_m u_{;\mu}^\nu u^\mu = h_{\mu\nu} Q^\mu. \quad (3.42)$$

Para o termo de vácuo, temos que

$$\rho_{\Lambda,\mu}u^\mu + (\rho_\Lambda + p_\Lambda)\theta = u_\mu Q^\mu \quad (3.43)$$

e

$$(\rho_\Lambda + p_\Lambda)u_{;\mu}^\nu u^\mu + p_{\Lambda,\mu}h^{\mu\nu} = -h_{\mu\nu}Q^\mu. \quad (3.44)$$

Se projetarmos  $Q$  ao longo da quadrivelocidade, teremos

$$u_\mu Q^\mu = u_\mu u^\mu Q + u_\mu \bar{Q}^\mu. \quad (3.45)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é  $-Q$  pois  $u_\mu u^\mu = -1$ , e o segundo termo é zero, pois eles são ortogonais. Então, podemos reescrever

$$-u_\mu Q^\mu = Q. \quad (3.46)$$

Se projetarmos a quadritransferência de energia-momento ao longo do tensor projeção e fizermos o procedimento análogo ao anterior, teremos que

$$h_{\mu\nu}Q^\mu = \bar{Q}_\nu. \quad (3.47)$$

Usando o referencial comóvel  $u^\mu = (1, 0)$  nas expressões (3.39) e (3.40), teremos que

$$\rho_{;0} + (\rho + p)\theta = Q^0 \quad (3.48)$$

onde

$$\rho_{;0} = \dot{\rho}, \quad Q^0 \equiv Q.$$

Então, teremos

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = Q. \quad (3.49)$$

Para matéria escura, a poeira não causa pressão ( $p_m = 0$ ). Então, a expressão (3.49) pode ser reescrita como

$$\dot{\rho}_m + \rho_m\theta = Q. \quad (3.50)$$

Para energia escura, a pressão é escrita como  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , e podemos reescrever a expressão (3.49) como

$$\dot{\rho}_\Lambda = -Q. \quad (3.51)$$

Através do termo  $Q$ , podemos igualar as expressões (3.50) e (3.51), obtendo:

$$\dot{\rho}_m + \rho_m\theta = -\dot{\rho}_\Lambda. \quad (3.52)$$

onde o termo  $-\dot{\rho}_\Lambda$  pode ser interpretado como uma fonte. Desta expressão, podemos concluir que, à medida que a variação temporal da densidade de matéria escura aumenta, a variação temporal da densidade de energia do vácuo diminui e isto se dá através do termo de transferência de energia  $Q$ .

### 3.5.1 Modelo do Gás de Chaplygin

Entre os modelos de fluido formado por componentes escuras, o gás de Chaplygin e o seu modelo generalizado têm sido muito estudados para interpretar a aceleração do universo [23, 34].

O modelo do Gás de Chaplygin ( $gC$ )<sup>1</sup>, assim como os modelos anteriormente mencionados [35], descreve o universo como sendo permeado por um fluido perfeito, que deve ter uma pressão negativa para indicar a expansão acelerada do universo e, assim, contrabalancear a força da gravidade. No modelo do Gás de Chaplygin generalizado ( $gCg$ ), a pressão é relacionada com a densidade de energia  $\rho$  através da equação de estado

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (3.53)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro livre e  $A$  é uma constante positiva do modelo.

Vamos analisar a expressão (3.53) em relação ao parâmetro  $\alpha$ :

- Se fizermos  $\alpha = 1$ , recuperaremos a equação original do Gás de Chaplygin [36].
- Se  $\alpha = 0$ , voltamos ao modelo  $\Lambda$ CDM, onde a pressão é constante e negativa.

Usando a equação da continuidade (3.14) e a expressão (3.53), vamos obter uma expressão para a densidade que esteja relacionada ao parâmetro  $\alpha$ , ou seja

$$\dot{\rho} + 3H \left( \rho - \frac{A}{\rho^\alpha} \right) = 0, \quad (3.54)$$

lembrando que  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ . Assim, é possível verificar como a densidade de energia varia com o fator de escala  $a(t)$ . Para chegar à solução de (3.54), devemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} \left( \rho - \frac{A}{\rho^\alpha} \right) &= 0 \\ \int \frac{d\rho}{\left( \rho - \frac{A}{\rho^\alpha} \right)} &= - \int 3 \frac{da}{a} \end{aligned}$$

e, desta forma, chegaremos à seguinte solução:

$$\rho = \left[ A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}}, \quad (3.55)$$

onde  $B$  é uma constante de integração, que pode ser obtida através da normalização de (3.55) para os valores atuais,  $\rho(t) \rightarrow \rho(t_0)=\rho_0$ ,  $a(t) \rightarrow a(t_0)=a_0$  e  $a_0 \equiv 1$ . Com estas considerações,  $B$  será

$$B = \rho_0^{(1+\alpha)} - A, \quad (3.56)$$

---

<sup>1</sup>Nome dado para homenagear o matemático, físico e engenheiro russo Sergey Chaplygin (1869 - 1942), que percebeu o comportamento similar em estudos aerodinâmicos [23].

e então teremos uma expressão para densidade em termos da constante  $A$ , de  $\alpha$  e do fator de escala  $a(t)$ :

$$\rho(t) = \left[ A + \frac{(\rho_0^{(1+\alpha)} - A)}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{(1+\alpha)}}. \quad (3.57)$$

Vamos analisar a equação (3.57):

Se  $a \ll 1$  (no passado), teremos que

$$\rho(t) \propto a^{-3}, \quad (3.58)$$

ou seja, no passado, temos uma fase dominada por matéria, predominantemente  $ME$ . Por outro lado, se  $a \gg 1$ , então

$$\rho(t) \propto A^{\frac{1}{(1+\alpha)}}. \quad (3.59)$$

Como  $A$  e  $\alpha$  são parâmetros do modelo (constantes), podemos inferir que  $\rho$  faz o papel da constante cosmológica e que, em uma era mais recente, temos uma fase dominada pela energia do vácuo.

Estes resultados nos possibilitam concluir que podemos tratar o gás de Chaplygin como um fluido que pode ser separado em duas componentes, e que estas componentes são a  $ME$  e  $EE$  [35, 37].

Vamos decompor o fluido em duas componentes, uma delas com pressão igual a zero. Assim, temos

$$\rho = \rho_m + \rho_\Lambda, \quad p = p_m + p_\Lambda. \quad (3.60)$$

A decomposição implica que

$$p_m = 0, \quad p_\Lambda = -\frac{A}{\rho^\alpha}. \quad (3.61)$$

Além disso para a componente de energia do vácuo nós iremos tomar a equação de estado

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (3.62)$$

Com esta decomposição, a equação de continuidade toma a forma

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\dot{\rho}_\Lambda. \quad (3.63)$$

Com o auxílio das equações de continuidade, de Friedmann e da (3.62) podemos obter a densidade de energia do vácuo [38]

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \left( \frac{H}{H_0} \right)^{-2\alpha}. \quad (3.64)$$

onde o parâmetro  $A$  do modelo e a constante  $B$  de integração podem ser escritas como

$$A = \rho_{\Lambda 0} (3H_0^2)^\alpha, \quad (3.65)$$

$$B = (3H_0^2)^{(1+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\rho_{\Lambda 0}}{3H_0^2} \right]. \quad (3.66)$$

Aqui o subíndice 0 indica o valor presente para as quantidades correspondentes.

Então, vemos que se  $\alpha < 0$ , a densidade de energia do vácuo decai ao longo da expansão cósmica, enquanto que a matéria escura é criada no processo. No caso contrário  $\alpha > 0$  a matéria escura é aniquilada no processo. Caso tomemos o valor  $\alpha = -1/2$ , a densidade de energia do vácuo decai com a expansão linearmente com  $H$ , e neste caso a matéria é criada a uma taxa constante. Por outro lado, para  $\alpha = 0$  nós re-obtemos o modelo padrão com constante cosmológica e matéria conservada.

Agora, podemos obter o parâmetro de Hubble e a densidade de matéria escura, respectivamente dadas por

$$H = H_0 \left[ 1 - \Omega_{m0} + \frac{\Omega_{m0}}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}, \quad (3.67)$$

$$\rho_m = 3H^2 - 3H_0^{2(1+\alpha)}(1 - \Omega_{m0})H^{-2\alpha}, \quad (3.68)$$

com

$$\Omega_{\Lambda 0} = \frac{\rho_{\Lambda 0}}{3H_0^2}, \quad (3.69)$$

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{3H_0^2}. \quad (3.70)$$

Podemos escrever a equação de continuidade (3.63) na forma

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q, \quad (3.71)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = -Q, \quad (3.72)$$

onde a transferência de energia entre as componentes é dada por

$$Q = 6\alpha H_0 \Omega_{\Lambda 0} \left( \frac{H}{H_0} \right)^{-(2\alpha+1)} \dot{H}, \quad (3.73)$$

O sinal de  $Q$  depende do sinal do parâmetro  $\alpha$  do gCg, já que  $\dot{H} < 0$ . Se  $Q > 0$  o vácuo decai em matéria escura, se o caso oposto é considerado  $Q < 0$  a matéria escura decai na energia do vácuo.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## TEORIA DA PERTURBAÇÃO COSMOLÓGICA

### 4.1 INTRODUÇÃO

As estruturas hoje observadas como galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias foram formadas a partir de pequenas perturbações na densidade de energia devido a instabilidades gravitacionais. Essas perturbações podem crescer e formar as estruturas observadas atualmente [39]. Para investigar o crescimento das perturbações, precisamos analisar a evolução destas em um universo em expansão, e como estamos tratando de pequenas perturbações, vamos usar a teoria das perturbações em primeira ordem, ou de ordem linear.

No presente estudo, vamos investigar se a perturbação no termo cosmológico em modelos com interação tem impacto sobre a taxa de crescimento da matéria escura, o que traz informações importantes acerca da formação de estruturas, pois esta interação entre o termo de vácuo e a matéria escura afeta mais o crescimento das estruturas hoje do que no passado [40].

O espaço é encurvado pela densidade “extra” de matéria, onde esse excesso é proveniente de uma flutuação que fez com que a matéria sofresse uma aglutinação e, para descrevê-la, usamos a definição do contraste de densidade

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \rho(t)}{\rho(t)}, \quad (4.1)$$

onde  $\rho(t)$  é a densidade de energia da base.

Em grandes escalas, as perturbações são consideradas pequenas ( $\delta \ll 1$ ), e podemos tratar a sua evolução dentro do regime linear. O contraste de densidade é medido, através da contagem de galáxias, como o número de objetos por volume observado [41]. Se  $\delta > 0$ , teremos mais matéria se aglomerando para formar as estruturas como as conhecemos hoje.

## 4.2 PERTURBAÇÃO LINEAR

Aplicar a teoria de perturbação linear é como fazer uma expansão em série de Taylor, onde somente os termos de ordem 0, que são os termos não perturbados, e os de primeira ordem nos interessam. Os termos de ordem superior serão desprezados neste estudo. Isto quer dizer que as mudanças nas quantidades como por exemplo, na quadrivelocidade do fluido e na métrica do espaço-tempo serão do tipo  $u^\mu \rightarrow u^\mu + \delta u^\mu$  e  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ , onde o primeiro termo significa o termo de base (não perturbado) e o segundo refere-se ao termo linear da perturbação.

Consideramos a perturbação mais geral no elemento de linha até primeira ordem de aproximação como

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + 2a^2 B_{,i} dx^i dt + a^2 [(1 + 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,i,j}] dx^i dx^j, \quad (4.2)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a delta de Kronecker e  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $B$  e  $E$  são funções escalares da métrica.

O potencial velocidade da matéria  $v$  é definido por

$$\delta u_j = a^2 \delta u^j + a^2 B_j = v_{,j}, \quad (4.3)$$

e a componente temporal perturbada da quadrivelocidade está relacionada com a perturbação da métrica através do potencial  $\phi$

$$\delta u_0 = \delta u^0 = -\phi. \quad (4.4)$$

## 4.3 PERTURBANDO AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO ENERGIA-MOMENTO

Na relatividade geral, as equações de campo são invariantes sob transformação de coordenadas. O que permite separá-las em duas partes, como fizemos anteriormente: o termo não perturbado, que são as equações de base, e a parte perturbada até primeira ordem de aproximação. Vamos perturbar a expressão da conservação do tensor energia-momento assumindo que existe interação entre matéria escura e vácuo. Neste caso, obtemos

$$\delta T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \delta(\rho u^\mu u^\nu)_{;\mu} + \delta(ph^{\mu\nu})_{;\mu} = \delta Q^\nu, \quad (4.5)$$

que resulta nas equações de balanço de energia e de momento para cada componente escura

$$\rho_{m,\mu} \delta u^\mu + \delta \rho_{m,\mu} u^\mu + (\delta \rho_m + \delta p_m) \theta + (\rho_m + p_m) \delta \theta = \delta Q. \quad (4.6)$$

$$\rho_{\Lambda,\mu} \delta u^\mu + \delta \rho_{\Lambda,\mu} u^\mu + (\delta \rho_\Lambda + \delta p_\Lambda) \theta + (\rho_\Lambda + p_\Lambda) \delta \theta = -\delta Q, \quad (4.7)$$

e

$$(\rho_m + p_m) \delta(u^\nu{}_{;\mu} u^\mu) + (\delta \rho_m + \delta p_m) \delta(u^\nu{}_{;\mu} u^\mu) + \delta p_{m,\mu} h^{\mu\nu} + p_{m,\mu} \delta h^{\mu\nu} = \delta Q^\nu. \quad (4.8)$$

$$(\rho_\Lambda + p_\Lambda) \delta(u^\nu{}_{;\mu} u^\mu) + (\delta \rho_\Lambda + \delta p_\Lambda) \delta(u^\nu{}_{;\mu} u^\mu) + \delta p_{\Lambda,\mu} h^{\mu\nu} + p_{\Lambda,\mu} \delta h^{\mu\nu} = -\delta Q^\nu. \quad (4.9)$$

Para completar as equações acima, podemos conhecer o termo  $\delta \dot{u}_\nu$ , que é obtido através de

$$\delta(u^\nu{}_{;\mu} u^\mu) = \delta u_{\nu,\mu} - \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma u_\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \delta u_\sigma, \quad (4.10)$$

e resulta em

$$\delta(u_{;\mu}^{\nu} u^{\mu}) = \partial_j(\dot{v} + \phi), \quad (4.11)$$

onde  $v$  é a velocidade do fluido, que é considerado irrotacional. Isto significa que a matéria se atrai radialmente, não há vorticidade.

Podemos reescrever as equações (4.6) - (4.9) como

$$\delta\dot{\rho}_m - \dot{\rho}_m\phi + (\delta\rho_m + \delta p_m)\theta + (\rho_m + p_m)\delta\theta = \delta Q, \quad (4.12)$$

$$\delta\dot{\rho}_\Lambda - \dot{\rho}_\Lambda\phi + (\delta\rho_\Lambda + \delta p_\Lambda)\theta + (\rho_\Lambda + p_\Lambda)\delta\theta = -\delta Q, \quad (4.13)$$

e

$$(\rho_m + p_m)\partial_j(\dot{v} + \phi) + \delta(p_{m,\mu} h^{\mu\nu}) = \delta\bar{Q}^\nu. \quad (4.14)$$

$$(\rho_\Lambda + p_\Lambda)\partial_j(\dot{v} + \phi) + \delta(p_{\Lambda,\mu} h^{\mu\nu}) = -\delta\bar{Q}^\nu, \quad (4.15)$$

uma vez que usamos observadores comóveis no universo homogêneo e isotrópico.

#### 4.3.1 Vácuo

A fim de encontrar um conjunto de equações básicas para calcular a perturbação na densidade de matéria escura  $\delta_m = \delta\rho_m/\rho_m$ , nós começamos por considerar as equações para o densidade de energia do vácuo. A equação de perturbação do momento para tal componente escura (4.15), onde ao usarmos a equação de estado no nível de base igual a  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  produz o seguinte resultado

$$\delta(p_{\Lambda,\mu} h^{\mu\nu}) = -\delta\bar{Q}^i. \quad (4.16)$$

Para conhecer  $\delta\bar{Q}_0$  e  $\delta\bar{Q}_i$ , vamos perturbar a expressão (3.38), que pode ser separada em duas partes, sendo uma paralela e outra perpendicular  $\bar{Q}^\mu$  à quadrivelocidade  $u^\mu$ , como anteriormente exposto. Então

$$\delta\bar{Q}^0 = 0, \quad (4.17)$$

indica que não há perturbação na parte temporal de  $\bar{Q}^\mu$ . Por outro lado,

$$\delta\bar{Q}^i = \partial^i(\delta\rho_\Lambda + \dot{\rho}_\Lambda v), \quad (4.18)$$

em que  $v$  é a velocidade do fluido.

O lado direito de (4.18) é justamente a expressão da perturbação na densidade do termo de vácuo num sistema de coordenadas invariante de *gauge*, ou seja, aqui a quantidade escalar invariante de *gauge* que caracteriza perturbações sobre hipersúfícies comóveis é naturalmente introduzida, e de agora em diante cada quantidade escalar terá a forma abaixo

$$\delta\mathcal{A}^c = \delta\mathcal{A} + \dot{\mathcal{A}}v. \quad (4.19)$$

Logo, teremos

$$\delta\bar{Q}^i = \partial^i\delta\rho_\Lambda^c, \quad (4.20)$$

o que implica que a equação (4.16) equivale a tomar a equação de estado para o vácuo até primeira ordem de aproximação como

$$\delta p_\Lambda^c = -\delta \rho_\Lambda^c. \quad (4.21)$$

Ou seja, tal equação não produz nenhuma dinâmica no sistema a duas componentes, somente confirma que equação de estado da base e a nível perturbativo até primeira ordem de aproximação seguem a mesma forma.

A equação (4.13) nos permite encontrar a função transferência de energia perturbada entre as componentes escuras

$$\delta Q^c = \dot{\rho}_\Lambda (\dot{\nu} + \phi) - \delta \dot{\rho}_\Lambda^c. \quad (4.22)$$

Então, se assumimos que a componente associada ao vácuo está uniformemente distribuída no espaço num sistema de coordenadas em que os observadores são comóveis com a matéria (sistema de repouso do fluido) a equação nos diz que o termo de transferência de energia será nulo. Este será o caso para o modelo de concordância  $\Lambda$ CDM. Por outro lado, não podemos evitar a possibilidade de que um vácuo dinâmico possa ter perturbações e de como sua dinâmica possa afetar a formação das estruturas.

### 4.3.2 Matéria Escura

Para que a física descrita pelas equações sejam válidas independente do *gauge*, usaremos quantidades invariantes de *gauge* construídas no *gauge* comóvel (4.19). Sendo assim, obteremos as equações básicas para a evolução das perturbações de densidade da matéria escura sem pressão. Usando  $p_m = 0$  e  $\delta p_m = 0$  nas equações (4.12) e (4.14), em seguida usando (4.19) para cada quantidade escalar obtemos as seguintes equações para o balanço de energia e balanço de momento, respectivamente

$$\dot{\delta}_m^c + \frac{Q}{\rho_m} \delta_m^c + \delta \theta^c = \frac{\delta Q^c}{\rho_m} + \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right) (\dot{\nu} + \phi), \quad (4.23)$$

$$(\dot{\nu} + \phi)_{;j} = \frac{\delta \bar{Q}_j}{\rho_m}. \quad (4.24)$$

A última delas nos mostra que se a transferência de momento  $\delta \bar{Q}_j$  não é igual a zero no sistema de coordenadas invariante de *gauge* comóvel, a perturbação no termo de vácuo não será nulo pela (4.20) e como consequência, as partículas de matéria escura são forçadas a se desviarem de seus movimentos geodésicos. Isto significa que a evolução das perturbações da matéria serão afetadas pelas soluções de base impressas nas funções  $Q$ ,  $\rho_m$  e  $H$  e pela dinâmica perturbativa do vácuo descrita pelos termos fontes no lado esquerdo de (4.23). Aqui temos usado a equação de continuidade  $\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q$ .

Para completar o sistema de equações, precisamos da equação de Raychaudhuri dada por

$$\theta_{;\mu} u^\mu + \frac{1}{3} \theta^2 - (u^\mu_{; \nu} u^\nu)_{;\mu} + \frac{1}{2} (\rho_m - 2\rho_\Lambda) = 0. \quad (4.25)$$

Perturbando a equação (4.25) e realizando alguns cálculos, é possível obtê-la na forma

$$\delta\dot{\theta}^c + \frac{2}{3}\theta\delta\theta^c + \frac{1}{2}\rho_m\delta_m^c = \delta\rho_\Lambda^c + \left(\frac{\nabla^2}{a^2} + \dot{\theta}\right)(\dot{v} + \phi), \quad (4.26)$$

onde o lado direito contém informação sobre o modelo perturbativo para o vácuo através da transferência de energia e de momento.

Ao passarmos para o espaço de Fourier, realizamos a seguinte mudança

$$\nabla^2 \rightarrow -k^2. \quad (4.27)$$

onde  $k$  é o número de onda comóvel associado ao comprimento de onda dado pela relação  $\lambda \propto \frac{a}{k}$ .

### 4.3.3 Modelo Geodésico

Vamos tratar do modelo geodésico para descrever o fluido cósmico onde o vácuo somente exerce influência sobre a matéria escura no nível de base, e esta percorre o menor caminho possível, que é a trajetória geodésica. Se assumirmos um modelo em que o vácuo está uniformemente distribuído no espaço, não haverá perturbações na densidade do vácuo, ou seja  $\delta\rho_\Lambda = 0$ . Isto significa que o vetor transferência momento-energia é paralelo à quadrivelocidade do fluido  $Q^\mu = Qu^\mu$  [42], não havendo transferência de momento. Então,  $\delta\rho_\Lambda = 0 \rightarrow \dot{v} + \phi = 0 \rightarrow \delta Q^c = 0$ . O termo  $\dot{v} + \phi = 0$  age no fluido como se fosse uma força gravitacional produzida pelas perturbações no vácuo. Se esta força é nula, o fluido tende a percorrer o menor caminho, que é a geodésica. Então, temos uma expressão simplificada para a equação de balanço da energia

$$\dot{\delta}_m^c + \frac{Q}{\rho_m}\delta_m^c + \delta\theta^c = 0. \quad (4.28)$$

e outra para a equação de Raychaudhuri

$$\delta\dot{\theta}^c + \frac{2}{3}\theta\delta\theta^c + \frac{1}{2}\rho_m\delta_m^c = 0. \quad (4.29)$$

As equações acima são as mesmas obtidas no *gauge* síncrono comóvel [43], em que diferenciando a equação de conservação da energia (4.28) com respeito ao tempo e eliminando  $\delta\theta^c$  and  $\delta\dot{\theta}^c$  usando a (4.28) e a equação de Raychaudhuri (4.29), nós obtemos uma equação diferencial de segunda ordem no tempo para o contraste de densidade da matéria escura

$$\ddot{\delta}_m^c + \left(\frac{Q}{\rho_m} + 2H\right)\dot{\delta}_m^c + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\rho_m}\right) + 2H\frac{Q}{\rho_m} - \frac{1}{2}\rho_m\right]\delta_m^c = 0. \quad (4.30)$$

Para o modelo  $\Lambda$ CDM, temos que  $\rho_\Lambda = \Lambda \rightarrow \dot{\rho}_\Lambda = 0 \rightarrow Q = 0$  e com  $H = \frac{\theta}{3}$ , podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$\ddot{\delta}_m^c + 2H\dot{\delta}_m^c - \frac{1}{2}\rho_m\delta_m^c = 0. \quad (4.31)$$

A equação (4.31) se assemelha à equação do oscilador harmônico amortecido, onde o segundo termo tem o papel de afastar a matéria, ou seja, a expansão atua como um atrito cósmico, e o terceiro termo mostra o quanto a matéria está agregando através da gravidade produzida pela sua densidade.

A partir desta expressão, podemos obter informações de como o contraste de densidade de matéria escura se comporta em função do tempo remoto até hoje.

#### 4.3.4 Modelo de vácuo não homogêneo

Um outro modelo perturbativo seria permitir que o termo de vácuo aglomere. Neste caso, uma equação diferencial para o contraste de densidade da matéria escura pode ser obtida seguindo os mesmos passos dos apresentados na seção anterior. Portanto, não é difícil mostrar que a equação seja dada por

$$\ddot{\delta}_m^c + \left[ \frac{Q}{\rho_m} + 2H \right] \dot{\delta}_m^c + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right) + 2H \frac{Q}{\rho_m} - \frac{1}{2} \rho_m \right] \delta_m^c = \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta Q^c}{\rho_m} \right) + \quad (4.32)$$

$$\left[ \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right] \frac{d}{dt} (\dot{\nu} + \phi) + \left[ 2H \frac{Q}{\rho_m} - 6H^2 - 3\dot{H} + \frac{k^2}{a^2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right) \right] (\dot{\nu} + \phi) + 2H \frac{\delta Q^c}{\rho_m} - \delta \rho_\Lambda^c. \quad (4.33)$$

O termo fonte do lado esquerdo, como pode ser visto acima, contabiliza as contribuições da transferência momento-energia devido às inhomogeneidades da energia escura descrita pela densidade de energia vácuo. A dependência com a escala  $k$  na equação é acompanhada pela transferência de momento entre as componentes escuras através dos segundo e terceiro termos.

Em seguida, afim de determinar os termos fonte que aparecem no lado esquerdo da equação diferencial de segunda ordem, será necessário escrever a densidade de energia do vácuo numa forma covariante. Nesta perspectiva, vamos assumir o ansatz [35]

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} \left( \frac{\theta}{3H_0} \right)^{-2\alpha}, \quad (4.34)$$

onde a taxa da expansão escalar é  $\theta = u^\mu_{;\mu}$  com  $u^\mu$  sendo a quadrivelocidade da matéria. No universo da base  $\theta = 3H$ . Então, obtemos a forma covariante para o quadri vetor transferência energia-momento

$$Q_\nu = -\frac{2}{3} \alpha \Omega_{\Lambda 0} (3H_0)^{2(\alpha+1)} \theta^{-(2\alpha+1)} \theta_{,\nu}. \quad (4.35)$$

No sistema de repouso da matéria, onde as componentes da quadrivelocidade são  $u_0 = -1$ ,  $u^0 = 1$  e  $u_i = 0 = u^i$ , temos que  $\bar{Q}^\mu = 0$ , e isto mostra que não existe transferência de momento no universo homogêneo e isotrópico. O resultado (3.73) é então recuperado

$$\dot{\rho}_\Lambda = Q_0 = -Q = -6\alpha H_0 \Omega_{\Lambda 0} \left( \frac{\theta}{3H_0} \right)^{-(2\alpha+1)} \frac{\dot{\theta}}{3}, \quad (4.36)$$

$$Q_i = 0. \quad (4.37)$$

Por outro lado, as quantidades acima perturbadas serão dadas por

$$\delta\rho_\Lambda^c = \frac{2Q}{3\rho_m} \delta\theta^c, \quad (4.38)$$

$$\frac{\delta Q^c}{\rho_m} = \frac{Q}{3\rho_m} \delta_m^c + \left[ 2H - \frac{2Q}{3\rho_m} \left( 1 - \frac{k^2}{a^2\rho_m} \right) - \frac{(2\alpha+1)\rho_m}{2H} \right] \frac{\delta\rho_\Lambda^c}{\rho_m}, \quad (4.39)$$

$$\delta\bar{Q}_j = \delta\rho_{\Lambda,j}^c. \quad (4.40)$$

Se assumimos, dentro do modelo apresentado, que a transferência de momento entre a matéria escura e o vácuo dada pela (4.40) é desprezível, o que corresponde a assumir uma densidade de energia do vácuo aproximadamente homogênea, ainda assim teremos uma contribuição proporcional ao contraste de densidade da matéria escura no termo de transferência de energia (4.39) para a dinâmica do sistema a duas componentes interagentes, ou seja,  $\delta Q^c = (Q/3)\delta_m^c$ . Neste caso particular, a equação diferencial obtida seria aquela dada por (4.30) mas com a substituição  $Q/\rho_m \rightarrow (2/3)Q/\rho_m$ .

Fazendo as substituições necessárias, chegaremos na equação diferencial de segunda ordem para o contraste de densidade

$$\delta_m^c + \left[ 2H(1-G) + \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m} + L \right] \dot{\delta}_m^c + \left[ \frac{2}{3} \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m} \right) + \frac{4}{3} H \frac{Q}{\rho_m} (1-G) + \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m} L - \frac{1}{2} \rho_m (1-G) \right] \delta_m^c = 0. \quad (4.41)$$

Como a equação é muito extensa, definimos as seguintes funções

$$G(\alpha, k) \equiv B + \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m^2} \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right), \quad (4.42)$$

e

$$B(\alpha, k) \equiv \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m^2} \left[ 2H - \frac{(2\alpha+1)\rho_m}{2H} - \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m} \left( 1 - \frac{k^2}{a^2\rho_m} \right) \right], \quad (4.43)$$

$$L(\alpha, k, \rho_m) \equiv \frac{E - GD}{K}, \quad (4.44)$$

$$E(\alpha, k) \equiv A + \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m^2} C + \frac{2}{3} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m^2} \right) \right] \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right) + 2HB - \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m}, \quad (4.45)$$

$$A(\alpha, k) \equiv \frac{2}{3} \frac{d}{dt} \frac{Q}{\rho_m^2} \left[ 2H - \frac{(2\alpha+1)\rho_m}{2H} - \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m} \left( 1 - \frac{k^2}{a^2\rho_m} \right) \right], \quad (4.46)$$

$$C(\alpha, k) \equiv 2H \frac{Q}{\rho_m} - 6H^2 - 3\dot{H} + \frac{k^2}{a^2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right), \quad (4.47)$$

$$D(\alpha, k) \equiv 2HB + \frac{4}{3} H \frac{Q}{\rho_m^2} \left( \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right) - \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m^2} - \frac{2}{3} \frac{Q}{\rho_m^2} \left( 3\dot{H} - \frac{k^2}{a^2} \right), \quad (4.48)$$

$$K(\alpha, k) = 1 - B - \frac{2Q}{3\rho_m^2} \left[ \frac{Q}{\rho_m} - 3H \right]. \quad (4.49)$$

Para termos uma idéia de como as flutuações na densidade de energia vácuo no modelo de interação, parametrizadas pelo parâmetro  $\alpha$  do gCg, afetam as flutuações de matéria quando comparadas com o modelo geodésico, as equações diferenciais (4.41) e (4.30) serão resolvidas numericamente para as condições iniciais  $\delta_m^c(t_i)$  e  $\dot{\delta}_m^c(t_i)$ , dadas em altos *redshifts*. Isto será feito no próximo capítulo.

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## RESULTADOS E ANÁLISES

Neste capítulo, iremos analisar a evolução da taxa linear de crescimento das estruturas em larga escala onde os modelos de interação entre a matéria e o termo de vácuo são parametrizados pelo modelo de gás de Chaplygin generalizado.

### 5.1 FUNÇÃO CRESCIMENTO

Como é de nosso interesse verificar se existem diferenças na taxa de evolução de crescimento das estruturas iremos considerar dois modelos perturbativos, a saber:

- i) O modelo geodésico, onde assumimos que a taxa de transferência de energia entre as componentes escuras segue o potencial velocidade da matéria. Neste caso, a transferência de momento será igual a zero nos níveis de base e perturbativo, o que implica tratar o vácuo dinâmico como homogêneo. A consequência é que as partículas de matéria seguirão geodésicas no sistema de coordenadas comóveis.
  
- ii) O modelo em que o termo de vácuo dinâmico é inhomogêneo e descrito por (4.34), resultando numa dinâmica dada pela equação diferencial de segunda ordem (4.41) obtida dentro de um formalismo invariante de *gauge*.

O crescimento em largas escalas de estruturas é melhor examinado através do contraste de densidade de matéria no universo  $\delta = \delta\rho_m/\rho_m$ .

Assim sendo, podemos escrever a taxa de crescimento da seguinte forma

$$f = \frac{\dot{\delta}_m}{H\delta_m}. \quad (5.1)$$

Esperamos que a observação da taxa linear de crescimento das perturbações da densidade de matéria escura nos proporcione informação sobre a interação entre a matéria e o vácuo. No procedimento padrão, a taxa de crescimento  $f$  das estruturas em larga escala é obtida através da observação do campo de velocidade peculiar das galáxias através das medidas de distorções no espaço dos *redshift*, provenientes de pesquisas sobre galáxias, o que será brevemente detalhado a seguir. Entretanto, não estamos interessados em fazer análise observacional no presente estudo, podendo vir a fazê-lo futuramente.

## 5.2 RESULTADOS

O nosso objetivo é analisar diferentes modelos de fluido com interação entre a matéria escura e o termo cosmológico - que é associado a energia de vácuo.

Através da expressão (4.41), analisamos o cenário com perturbação no termo cosmológico. Para este modelo, estudamos o impacto de tais perturbações sobre a evolução do contraste de densidade da matéria escura e da taxa de crescimento em função do *redshift*. Como a equação diferencial a ser calculada numericamente depende da escala, em princípio, obtemos as diferenças percentuais relativas em função do *redshift*, quando analisamos estas escolhendo diferentes valores de escala ( $k = 0,1$  e  $k = 0,01$ ) no regime linear dentro do universo observável.

Analisamos os modelos para diferentes escalas, pois é a partir de  $k$  que obtemos a informação da distância, medida pelo *redshift*. Como  $k$  é inversamente proporcional ao comprimento de onda ( $k \propto \frac{1}{\lambda}$ ) e o *redshift* é obtido a partir de  $\lambda$ , então, quando temos  $k = 0,1 \text{ Mpc}^{-1}$ , sabemos que estamos analisando o contraste em um espaço da ordem 10 Mpc. Do mesmo modo, quando a escala é de  $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$ , a escala observada é da ordem de 100 Mpc, e a diferença relativa nos informa qual é a diferença entre usar estes dois valores de  $k$ .

Posteriormente, plotamos gráficos da função crescimento e do contraste de densidade, ambos em relação ao *redshift*, e as respectivas diferenças percentuais relativas, afim de comparar os modelos onde há a perturbação no termo cosmológico e onde este não sofre perturbação, que é o modelo geodésico. Para ter um parâmetro nestas comparações, inserimos o modelo  $\Lambda$ CDM nestas análises.

Vamos apresentar, primeiramente, os valores do parâmetro  $\alpha$  ( $\alpha = 0,1$  e  $\alpha = 0,2$ ) positivos, pois estes representam modelos de interação onde ocorre aniquilação de matéria escura devido ao decaimento da densidade de energia do vácuo. Posteriormente, mostraremos os gráficos obtidos para  $\alpha < 0$  ( $\alpha = -0,1$ ,  $\alpha = -0,2$  e  $\alpha = -0,5$ ), que é o cenário em que temos criação de matéria escura no universo.

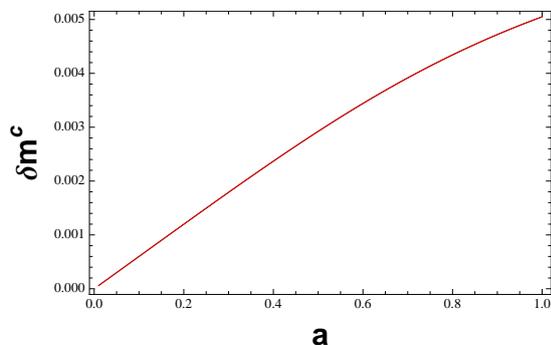
Vamos discutir os gráficos que foram obtidos usando-se do programa *Mathematica*, quando resolvemos numericamente as equações (4.30) e (4.41) e usamos as seguintes condições iniciais:

- $z = 1000$  até  $z = 0$ .
- $\delta(1000) = 10^{-5}$ .
- $\delta'(1000) = 10^{-8}$ ,

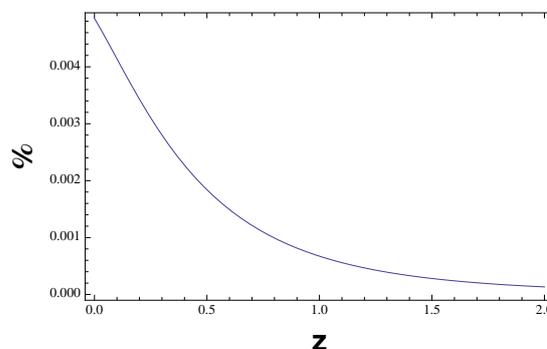
de modo a obtermos o valor  $f = 1$  em altos redshifts.

### 5.2.1 Análise para $\alpha = 0,1$

Nesta subseção, vamos começar apresentando os resultados obtidos quando consideramos que o termo cosmológico é inhomôgeneo.



**Figura 5.1** Contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala  $a$ .



**Figura 5.2** Diferença em porcentagem ao usar diferentes valores de escala  $k$ .

A figura (5.1) mostra a evolução do contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala quando tomamos os valores  $\alpha = 0,1$  e  $\Omega_{m0} = 0,3$ . A curva em preto foi gerada tomando-se a escala  $k = 0,1$  e a curva em vermelho, quando tomamos  $k = 0,01$ . A figura (5.2) mostra a diferença percentual relativa quando usamos as diferentes escalas mencionadas.

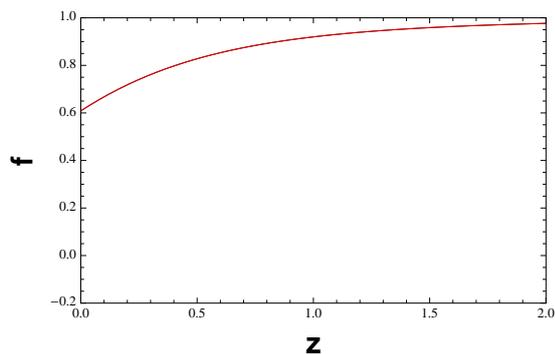
Podemos perceber, no gráfico da esquerda, que as curvas quase coincidem, o que quer dizer que o modelo não mostra diferença relevante no uso das diferentes escalas. Também podemos perceber que o contraste aumenta com o fator de escala, ou seja, hoje, em  $a = 1$ , o universo apresenta uma quantidade maior de matéria escura do que no passado.

O gráfico da direita mostra que a diferença relativa é aproximadamente 0,005% hoje (em  $z = 0$ ) e mostra uma queda no passado. Isto quer dizer que, se analisarmos a quantidade de matéria acumulada em 10 Mpc e em 100 Mpc, a diferença será praticamente nula, ou seja, dentro das escalas lineares observáveis, o contraste de densidade de matéria escura para este modelo é com muita boa aproximação independente da escala.

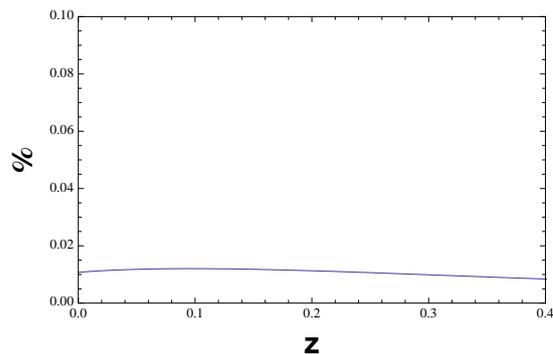
Logo a seguir, apresentamos os gráficos para a evolução linear da função crescimento  $f$  em função do *redshift* à esquerda para o modelo com  $\alpha = 0,1$  utilizando-se novamente dos valores 0,1 e 0.01 para a escala  $k$ , e à direita a diferença relativa também em função do *redshift* quando calculamos  $f$  dentro destas escalas.

A figura (5.3) mostra que as curvas para os diferentes valores de escala são coincidentes hoje, em  $z = 0$ , e praticamente coincidentes no passado. Além de mostrar que a função crescimento sofre uma pequena redução de tempos remotos até o presente.

A figura (5.4) mostra a diferença relativa percentual no uso dos diferentes valores para a escala. Sabendo que a função crescimento tem dependência na escala de distância  $k$ , podemos concluir que, se resolvermos usar uma escala de  $k = 0,1$ , ou outra, de  $k = 0,01$ , a diferença relativa é vagamente maior do que 0,01% hoje e mostra um comportamento praticamente constante através do tempo.

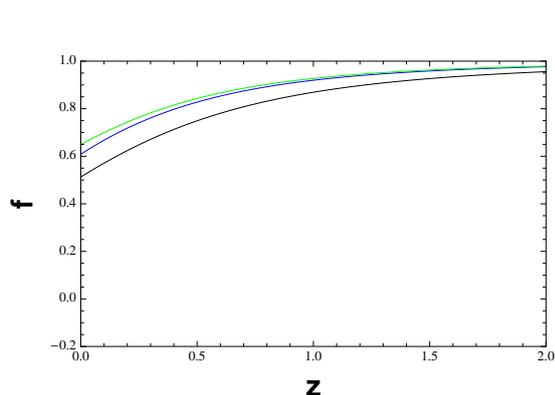


**Figura 5.3** Função Crescimento em função do *redshift*.

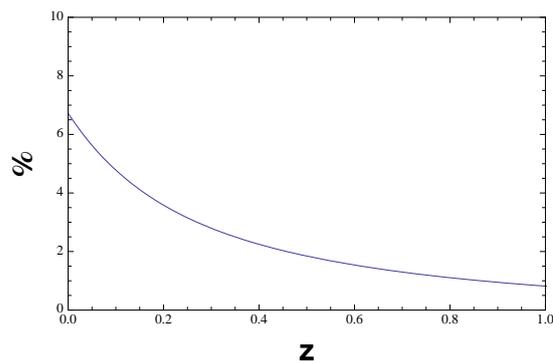


**Figura 5.4** Diferença percentual para  $k = 0,1 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$ .

Agora apresentaremos os gráficos que mostram a comparação entre perturbar ou não o termo de vácuo. A curva em preto é o modelo  $\Lambda$ CDM, a curva em azul é a evolução da taxa de crescimento com perturbação no termo cosmológico e a curva em verde mostra a evolução de  $f$  obtida no modelo geodésico.



**Figura 5.5** Função Crescimento em relação ao *redshift*.



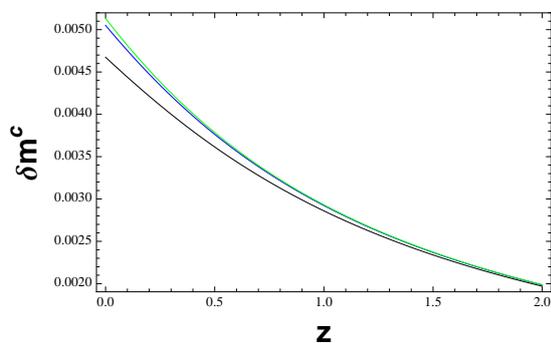
**Figura 5.6** Diferença percentual na comparação do modelo  $\Lambda$ CDM e dos modelos com e sem perturbação no termo cosmológico.

O gráfico (5.5) relaciona a função crescimento com o *redshift* para os três diferentes modelos citados anteriormente. Os três casos mostram um comportamento muito semelhante, onde percebemos uma diminuição na função crescimento. Contudo, neste caso, tanto o modelo perturbativo quanto o modelo geodésico mostram um valor maior para a função crescimento do que o modelo  $\Lambda$ CDM. Podemos ver que as curvas em azul e em verde são praticamente coincidentes no passado, onde a curva do modelo geodésico (verde) apresenta um valor levemente maior da  $f$  do que o modelo com perturbação em  $\Lambda$ .

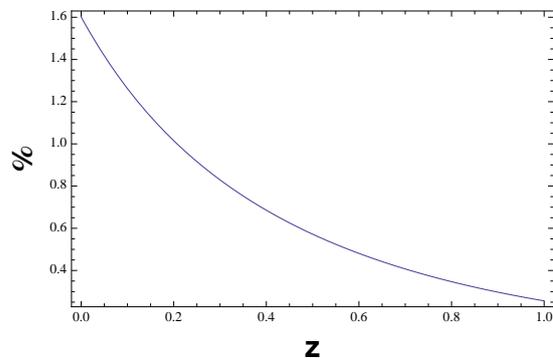
O gráfico (5.6) mostra que o percentual da diferença relativa é de menos que 7% hoje e cai no passado. Este diferença foi calculada em relação ao modelo com perturbação em  $\Lambda$ .

As próximas figuras mostram as curvas do contraste de densidade de matéria escura e a diferença percentual relativa em função do *redshift*, sendo que esta diferença percentual é relativa

ao modelo geodésico.



**Figura 5.7** Contraste de densidade de matéria escura em função do *redshift*.



**Figura 5.8** Diferença relativa percentual ao usar diferentes valores de escala  $k$ .

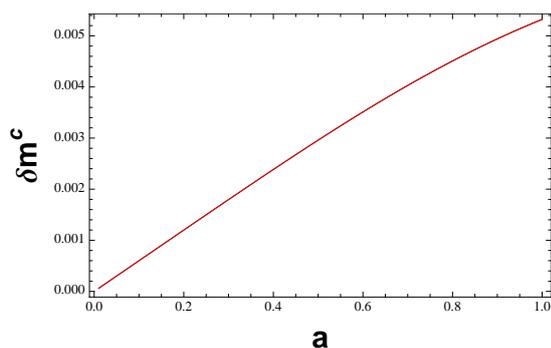
O gráfico (5.7) mostra um crescimento no contraste de densidade de matéria para os três modelos, porém o aumento foi menor para o modelo  $\Lambda$ CDM.

O gráfico (5.8) mostra que a diferença relativa é em torno de 1,6% hoje e cai a zero no passado.

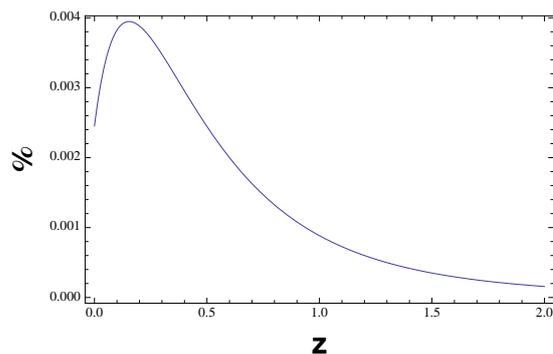
### 5.2.2 Análise para $\alpha = 0,2$

Vamos analisar os gráficos com  $\alpha = 0,2$  e  $\Omega_{m0} = 0,3$ .

Para os quatro primeiros gráficos desta subseção, vamos apresentar os resultados obtidos quando consideramos que o termo cosmológico é inomogêneo.



**Figura 5.9** Contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala  $a$ .



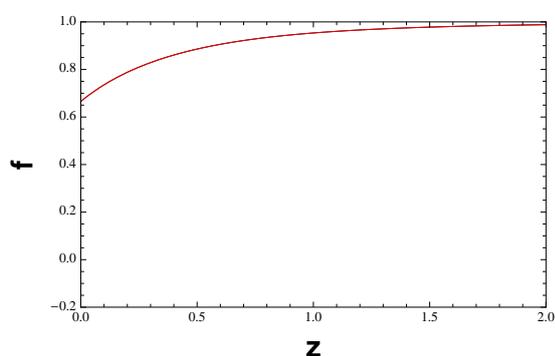
**Figura 5.10** Diferença em porcentagem para  $k = 0,1 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$ .

A figura (5.9) mostra o contraste de densidade de matéria escura em relação ao fator de escala  $a$ , quando tomamos os valores de escala  $k = 0,1$  e  $k = 0,01$ , com  $\alpha = 0,2$  e  $\Omega_{m0} = 0,3$ . A curva em preto foi gerada tomando-se a escala  $k = 0,1$  e a curva em vermelho, quando tomamos  $k = 0,01$ . As curvas são coincidentes, o que significa que não há diferença em usar um

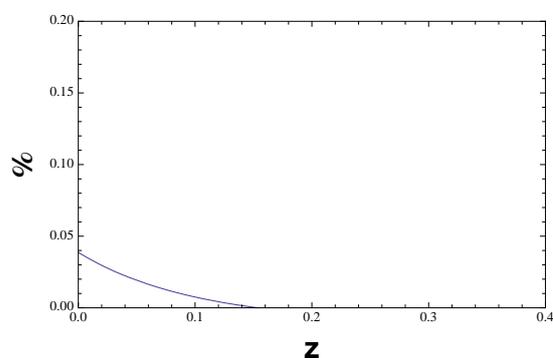
ou outro valor para a escala  $k$ . Também mostram um aumento do contraste de matéria hoje e que, no passado, teríamos um contraste praticamente nulo.

A figura (5.10) mostra a diferença relativa menor que 0,003%, hoje, no uso das diferentes escalas. Isso nos permite concluir que, se analisarmos a quantidade de matéria acumulada em 10 Mpc e em 100 Mpc, a diferença será praticamente nula, ou seja, dentro das escalas lineares observáveis o contraste de densidade de matéria escura para este modelo é independente da escala.

Os gráficos a seguir mostram a evolução da função crescimento linear  $f$  e da diferença percentual relativa, ambas em função do *redshift*, para o modelo com  $\alpha = 0,2$ , utilizando-se novamente os valores 0, 1 e 0,01 para a escala  $k$ .



**Figura 5.11** Função Crescimento versus *redshift*.

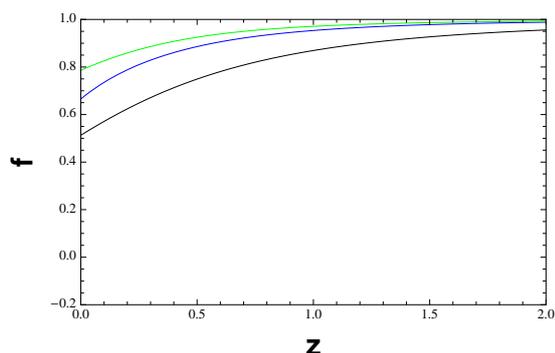


**Figura 5.12** Diferença em porcentagem ao usar diferentes  $k$ .

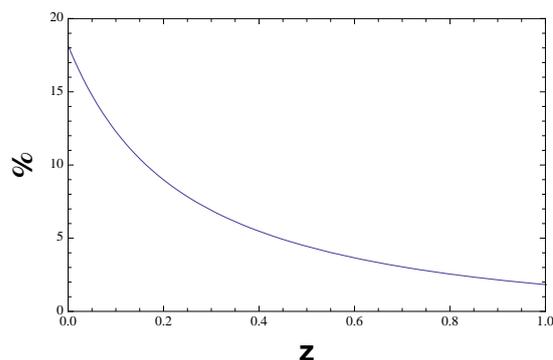
A figura (5.11) apresenta um decréscimo na evolução da função crescimento, do passado até os tempos atuais ( $z = 0$ ), e podemos verificar que as curvas em preto ( $k = 0, 1$ ) e em vermelho ( $k = 0,01$ ) têm o mesmo comportamento. Podemos concluir que, para  $\alpha = 0,2$ , teremos os mesmos resultados para  $f$ , o que torna indiferente a escolha da escala  $k$ .

Através da figura (5.12), percebemos que a discrepância para os diferentes valores de escala é menor que 0,05% na era atual.

Agora apresentaremos os gráficos que mostram a comparação entre perturbar ou não perturbar o termo de vácuo. A curva em preto corresponde ao modelo  $\Lambda$ CDM, a curva em azul corresponde ao modelo com perturbação no termo cosmológico, e a curva em verde, ao modelo geodésico.



**Figura 5.13** Função Crescimento em relação ao *redshift*.

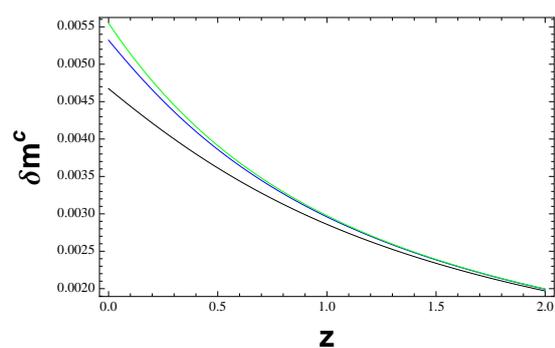


**Figura 5.14** Diferença percentual na comparação dos dois modelos citados.

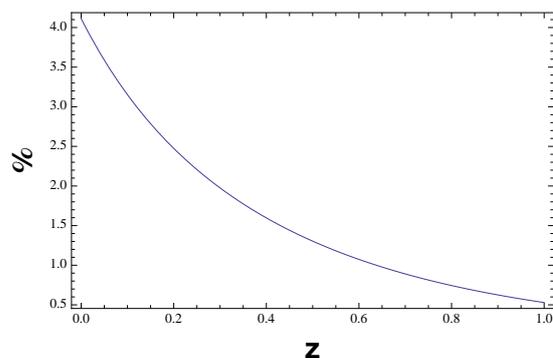
O gráfico (5.13) relaciona a função crescimento com o *redshift* para os três diferentes modelos. As curvas para os três modelos mostram uma diminuição da função crescimento de eras remotas até o presente, sendo que o modelo  $\Lambda$ CDM mostra uma menor evolução de  $f$  do que os modelos onde perturbamos o termo de vácuo e o modelo geodésico.

A figura (5.14) mostra uma diferença percentual relativa ao utilizar os dois modelos perturbativo, que aumenta com o passar do tempo, chegando a aproximadamente 18% hoje.

As próximas figuras mostram as curvas do contraste de densidade de matéria escura e a diferença percentual relativa em função do *redshift*, sendo que esta diferença percentual é relativa ao modelo geodésico.



**Figura 5.15** Contraste de densidade de matéria escura em função de  $z$ .



**Figura 5.16** Diferença em porcentagem ao usar diferentes valores de  $k$ .

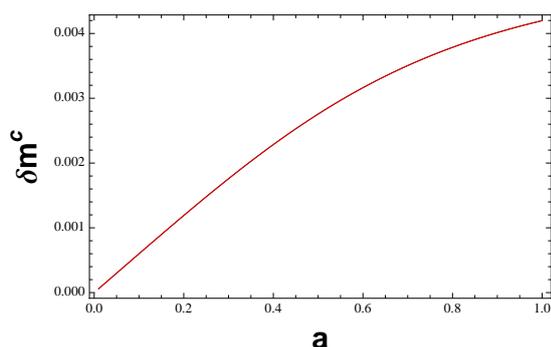
O gráfico (5.15) mostra um crescimento no contraste de densidade de matéria para os três modelos. Contudo, o aumento foi menor para o modelo  $\Lambda$ CDM, e as curvas para o modelo perturbado e o modelo não perturbado apresentam uma mínima diferença entre si.

A figura (5.16) mostra que a diferença relativa é um pouco maior que 4% hoje, sendo ainda menor no passado.

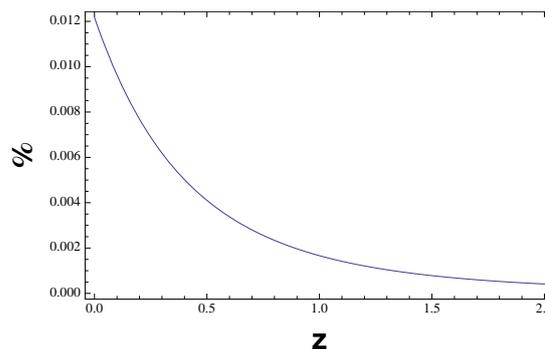
### 5.2.3 Análise para $\alpha = -0,1$

A partir desta subseção, vamos analisar os valores de  $\alpha$  negativos. Eles constituem um modelo onde ocorre criação de matéria escura devido ao decaimento da densidade de energia do vácuo.

Os gráficos apresentados a seguir foram obtidos quando consideramos a perturbação no termo cosmológico, e os parâmetros do modelo são  $\alpha = -0,1$  e  $\Omega_{m0} = 0,3$ .



**Figura 5.17** Contraste de densidade versus fator de escala.



**Figura 5.18** Diferença em porcentagem para diferentes  $k$  em relação ao *redshift*.

A figura (5.17) relaciona o contraste de densidade de matéria escura com o fator de escala  $a$ . A curva em preto foi gerada para a escala  $k = 0,1$  e a curva em vermelho, para  $k = 0,01$ . Podemos perceber que as curvas são coincidentes e que o contraste de densidade mostra um aumento no presente ( $a = 1$ ).

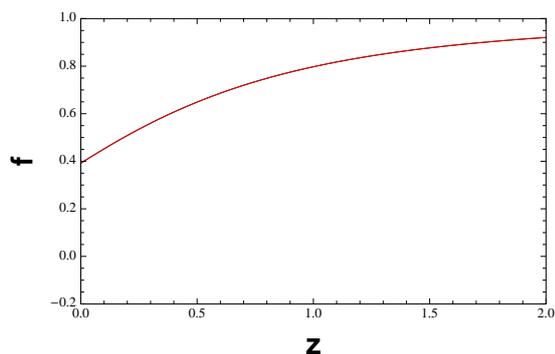
O gráfico (5.18) mostra a diferença relativa no uso dos diferentes valores para a escala  $k$ . A partir dele, concluímos que a diferença relativa é aproximadamente 0,012% hoje e cai no passado. Isto quer dizer que, se analisarmos a quantidade de matéria acumulada em 10 Mpc e em 100 Mpc, a diferença será praticamente nula.

As figuras a seguir são da evolução linear da função crescimento  $f$  em função do *redshift*, à esquerda, para o modelo com  $\alpha = -0,1$ , com valores de escala  $k = 0,1$  e  $k = 0.01$ . À direita, a diferença relativa em função do *redshift* ao calcularmos a função crescimento dentro destas escalas.

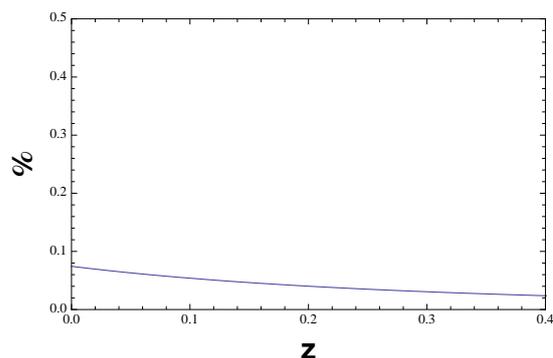
O gráfico (5.19) relaciona a função crescimento com o *redshift*. As duas curvas geram o mesmo resultado, e mostram uma diminuição na evolução da função crescimento com o passar do tempo.

O gráfico (5.20) mostra que a diferença relativa no uso dos diferentes valores de  $k$  é menor que 0,08% hoje e é ainda menor no passado.

Agora apresentaremos os gráficos que mostram a comparação entre perturbar ou não o termo de vácuo. A curva em preto é o modelo  $\Lambda$ CDM, a curva em azul é a função crescimento com perturbação em  $\Lambda$  e a curva em verde mostra a função crescimento para o modelo geodé-

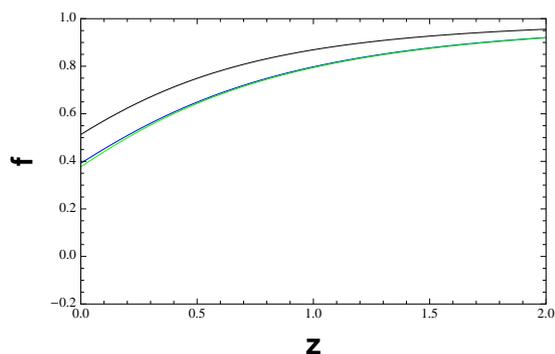


**Figura 5.19** Função Crescimento em relação ao *redshift*.

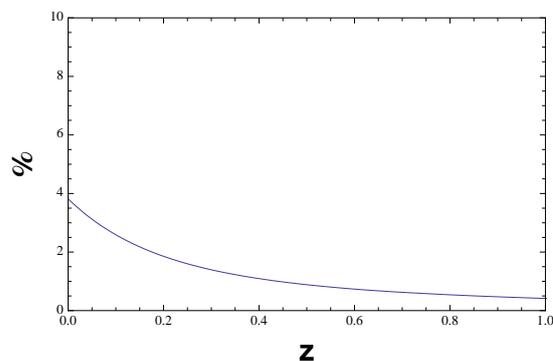


**Figura 5.20** Diferença em porcentagem entre usar diferentes  $k$ .

sico.



**Figura 5.21** Função Crescimento versus *redshift*.



**Figura 5.22** Diferença percentual na comparação dos modelos  $\Lambda$ CDM, modelo com perturbação em  $\Lambda$  e modelo geodésico.

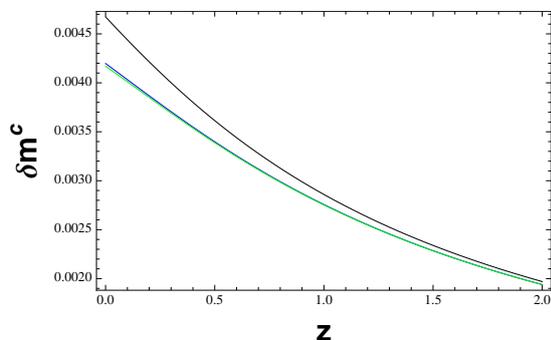
A figura (5.21) mostra as três curvas dos diferentes modelos já citados para a função crescimento em função do *redshift*. Como a partir desta subseção, começamos a tratar com valores de  $\alpha$  negativos, a evolução da função crescimento será inversa aos gráficos anteriormente apresentados. A curva em preto, que é a curva do modelo  $\Lambda$ CDM, mostra uma maior evolução na função crescimento do que as outras curvas. Entretanto, todas as curvas mostram uma queda de  $f$  no presente, e as curvas em verde, do modelo geodésico, e em azul, do modelo que perturba o termo de vácuo, são quase coincidentes, vindo a se diferenciarem de uma forma sutil no presente.

O gráfico (5.22) mostra uma diferença relativa menor que 4% no uso dos diferentes modelos atualmente, que cai a zero no passado.

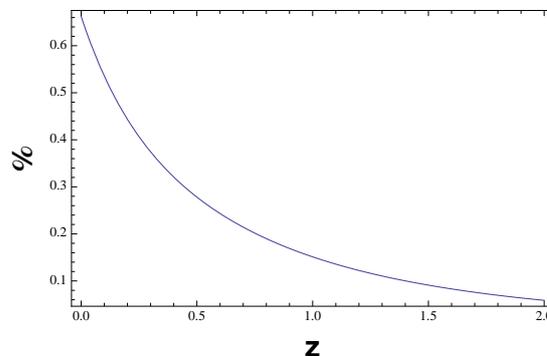
As figuras a seguir mostram as curvas do contraste de densidade de matéria em relação ao *redshift*, à esquerda, e a diferença relativa em usar os diferentes modelos.

As próximas figuras mostram as curvas do contraste de densidade de matéria escura e a di-

ferença percentual relativa em função do *redshift*, sendo que esta diferença percentual é relativa ao modelo geodésico, que é a curva em verde.



**Figura 5.23** Contraste de densidade de matéria escura em função de  $z$ .



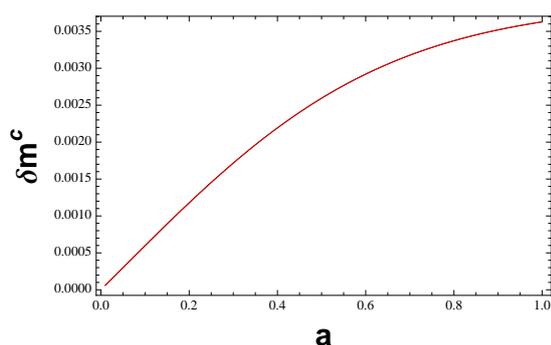
**Figura 5.24** Diferença relativa percentual em relação ao modelo geodésico.

O gráfico (5.23) mostra um crescimento na evolução do contraste de densidade de matéria para os três modelos, porém o aumento se mostrou maior para o modelo  $\Lambda$ CDM, enquanto que as curvas para os outros dois modelos, geodésico e com perturbação em  $\Lambda$ , mostram uma mínima diferença na era atual.

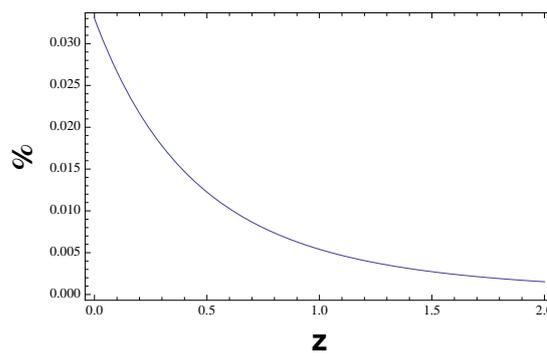
O gráfico (5.6) mostra que a diferença relativa é em torno de 0,7% hoje, caindo a zero no passado.

#### 5.2.4 Análise para $\alpha = -0,2$

Os gráficos a seguir foram obtidos quando usamos o modelo onde há perturbação no termo cosmológico, e os parâmetros do modelo são  $\alpha = -0,2$  e  $\Omega_{m0} = 0,3$ .



**Figura 5.25** Contraste de densidade de ME versus fator de escala  $a$ .



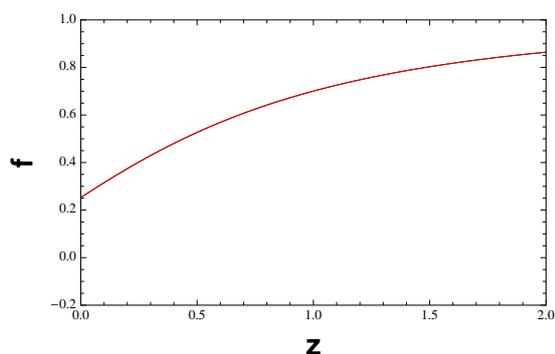
**Figura 5.26** Diferença em porcentagem entre usar diferentes valores para a escala  $k$ .

A figura (5.25) faz uma relação entre o contraste de densidade de matéria escura e o fator de escala  $a$ . A curva em preto foi gerada para  $k = 0,1$  e a curva em vermelho, para  $k = 0,01$ .

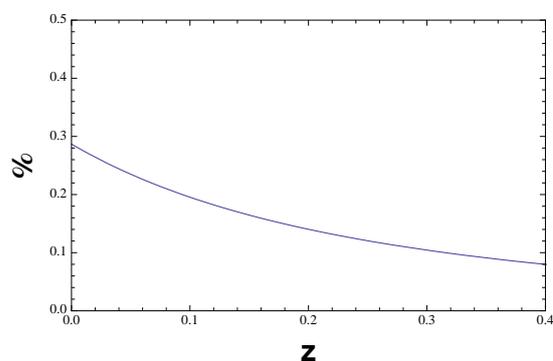
Podemos ver que as curvas se sobrepõem e que o contraste de densidade mostra um aumento no presente ( $a = 1$ ).

O gráfico (5.26) mostra a diferença relativa para diferentes valores de escala  $k$ . A partir desta figura, vemos que a diferença relativa é menor que 0,05% hoje e cai no passado. Isto quer dizer que a diferença no valor de  $k$  não se mostra relevante dentro das escalas lineares observáveis.

As figuras a seguir são da evolução linear da função crescimento  $f$  em função do *redshift*, à esquerda, para o modelo com  $\alpha = -0,2$ , com valores de escala  $k = 0,1$  e  $k = 0,01$ . E à direita, a diferença relativa em função do *redshift* ao calcularmos a função crescimento dentro destas escalas.



**Figura 5.27** Função Crescimento versus *redshift*.

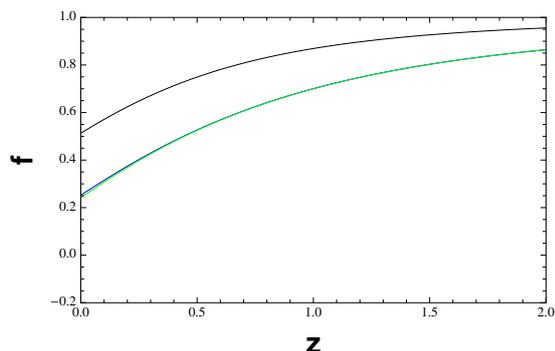


**Figura 5.28** Diferença em porcentagem entre usar diferentes valores de escala  $k$ .

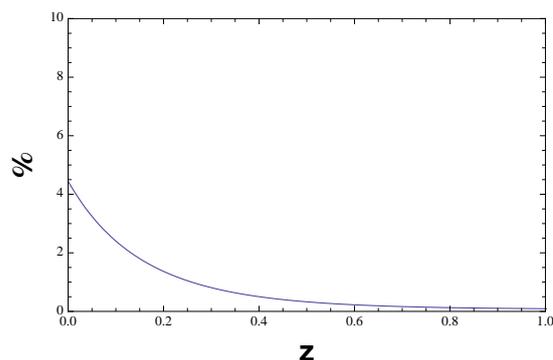
O gráfico (5.27) relaciona a função crescimento com o *redshift*. As duas curvas geram o mesmo resultado, e mostram uma diminuição na evolução da função crescimento com o passar do tempo, de  $z = 2$  no passado até  $z = 0$  hoje.

O gráfico (5.28) mostra que a diferença relativa no uso dos diferentes valores de  $k$  é de aproximadamente 0,3% hoje e é ainda menor no passado.

Agora apresentaremos os gráficos que mostram a comparação entre perturbar ou não o termo de vácuo. A curva em preto é o modelo  $\Lambda$ CDM, a curva em azul é a função crescimento com perturbação em  $\Lambda$  e a curva em verde mostra a função crescimento para o modelo geodésico.



**Figura 5.29** Função Crescimento versus *redshift*.

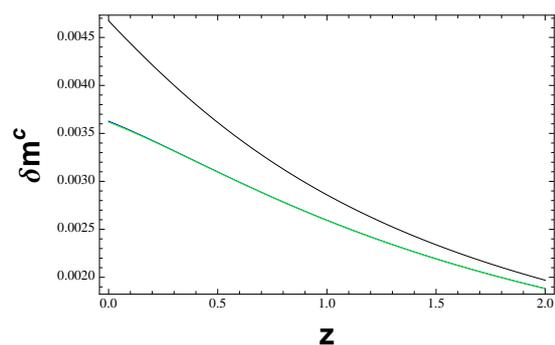


**Figura 5.30** Diferença percentual na comparação dos modelos citados.

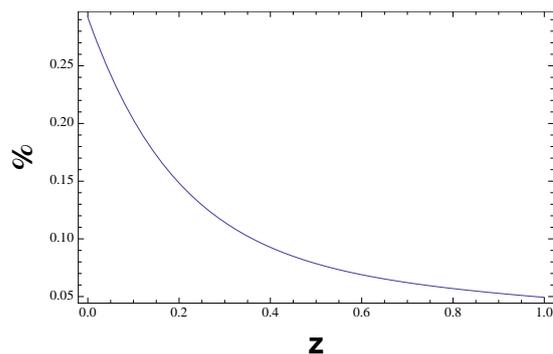
O gráfico (5.29) relaciona a função crescimento com o *redshift* para os três diferentes modelos. As curvas para os três modelos mostram uma diminuição da função crescimento de era remotas até o presente. Sendo que o modelo  $\Lambda$ CDM mostra uma evolução de  $f$  maior do que os modelos onde perturbamos o termo de vácuo e o modelo geodésico, e estes dois últimos mostram uma evolução quase igual, ou seja a curva em verde se encontra quase sobreposta à curva em azul.

E a figura (5.30) mostra uma diferença relativa um pouco maior que 4% e diminui no passado.

As próximas figuras mostram as curvas do contraste de densidade de matéria escura e a diferença percentual relativa em função do *redshift*, sendo que esta diferença percentual é relativa ao modelo geodésico.



**Figura 5.31** Contraste de densidade de matéria escura em função de  $z$ .



**Figura 5.32** Diferença percentual relativa em relação de  $z$ .

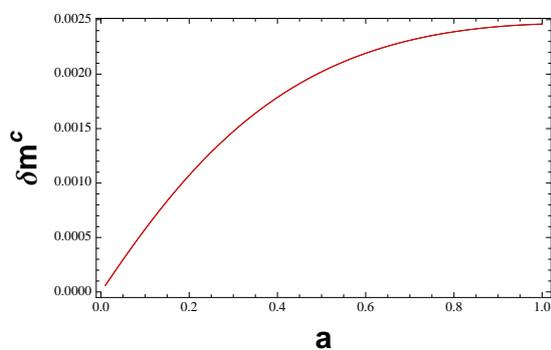
O gráfico (5.31) relaciona o contraste de densidade de matéria escura com o *redshift* para os três diferentes modelos. As curvas para os três modelos mostram um aumento no contraste de densidade até o presente. Sendo que o modelo  $\Lambda$ CDM mostra uma evolução maior e mais

acentuada do que as curvas dos outros modelos, com perturbação em  $\Lambda$  e o modelo geodésico, onde estas duas últimas curvas se sobrepõem, mostrando assim a mesma evolução.

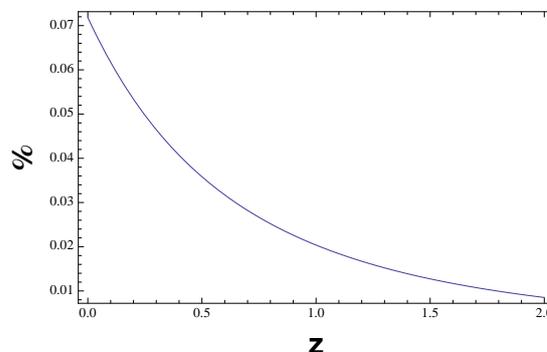
E a figura (5.32) mostra uma diferença relativa de aproximadamente 0,3% hoje e diminui no passado.

### 5.2.5 Análise para $\alpha = -0,5$

Nesta subseção, vamos apresentar os resultados obtidos quando consideramos que o termo cosmológico é inhomogêneo. Os melhores parâmetros para esta análise são  $\alpha = -0,5$  e  $\Omega_{m0} = 0,45$  [46,47].



**Figura 5.33** Contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala.

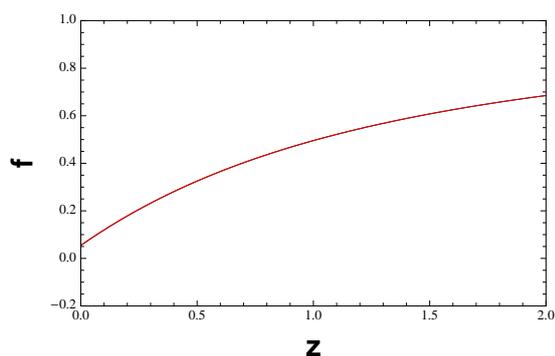


**Figura 5.34** Diferença em porcentagem entre usar diferentes  $k$ .

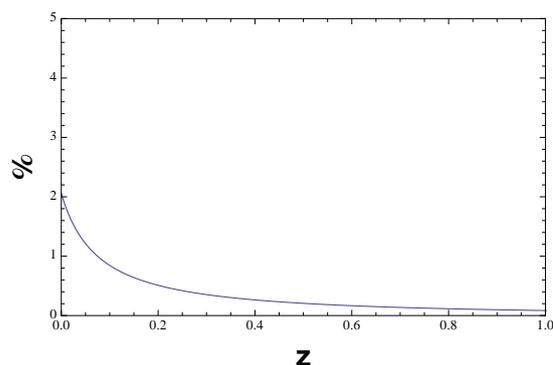
A figura (5.33) mostra a evolução do contraste de densidade de matéria escura em função do fator de escala, quando tomamos o valor  $\alpha = -0.5$  utilizando o valor  $\Omega_{m0} = 0.45$ . A curva em preto foi gerada tomando-se a escala  $k = 0,1$  e a curva em vermelho foi gerada para  $k = 0,01$ . Podemos perceber que as curvas praticamente coincidem, o que quer dizer que o modelo não mostra diferença relevante no uso dos valores das diferentes escalas. Também podemos perceber que o contraste aumenta com o fator de escala  $a$ .

A figura (5.34) mostra que a diferença relativa é aproximadamente 0,07%, hoje (em  $z = 0$ ), no uso dos diferentes valores para a escala  $k$ . E esta diferença percentual relativa mostra uma diminuição à medida em que se olha para o passado. Isto quer dizer que, se analisarmos a quantidade de matéria acumulada em 10 Mpc e em 100 Mpc, a diferença será praticamente nula, ou seja, dentro das escalas lineares observáveis o contraste de densidade de matéria escura para este modelo é, com muito boa aproximação, independente da escala.

Logo a seguir, apresentamos os gráficos para a evolução da função crescimento linear  $f$  em função do *redshift*, à esquerda, para o modelo com  $\alpha = -0.5$  utilizando novamente os valores 0,1 e 0,01 para a escala  $k$ , e à direita a diferença relativa também em função do *redshift* quando calculamos  $f$  dentro destas escalas.



**Figura 5.35** Função Crescimento versus *redshift*.

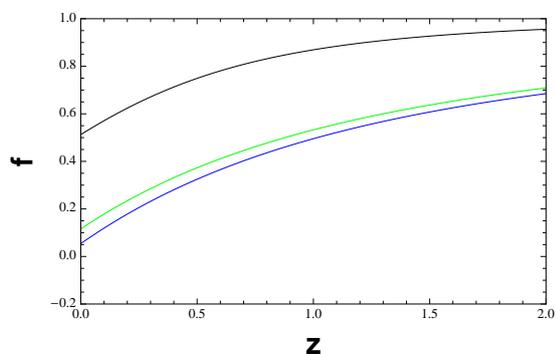


**Figura 5.36** Diferença percentual entre usar diferentes  $k$ .

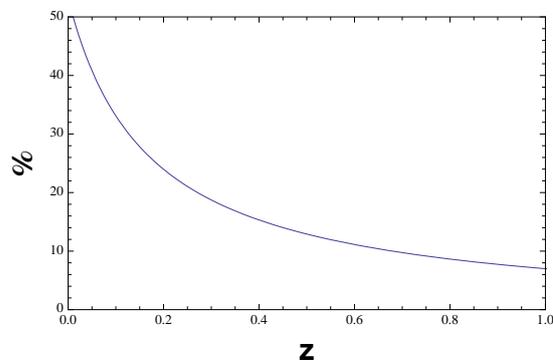
A figura (5.35) mostra um decrescimento na evolução de  $f$  até aproximadamente 0,0 no presente, onde as curvas em preto e em vermelho são coincidentes.

O gráfico (5.36) mostra que a diferença relativa no uso dos diferentes valores de  $k$  de aproximadamente 2% hoje e vai a valores muito próximos de zero no passado.

Agora apresentaremos os gráficos que mostram a comparação entre perturbar ou não o termo de vácuo. A curva em preto é o modelo  $\Lambda$ CDM, a curva em azul é modelo com perturbação no termo cosmológico e a curva em verde mostra a função crescimento para o modelo geodésico.



**Figura 5.37** Função Crescimento versus *redshift*.



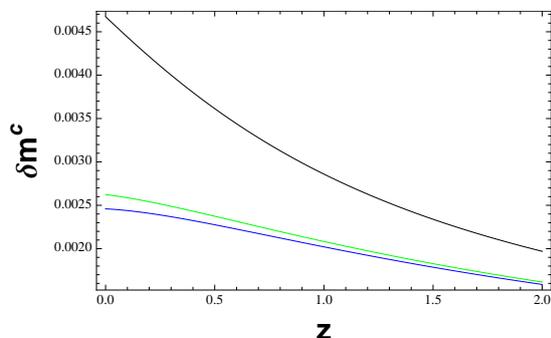
**Figura 5.38** Diferença percentual na comparação dos modelos citados.

O gráfico (5.37) mostra a diminuição na evolução de  $f$  em relação ao *redshift* para as três curvas.

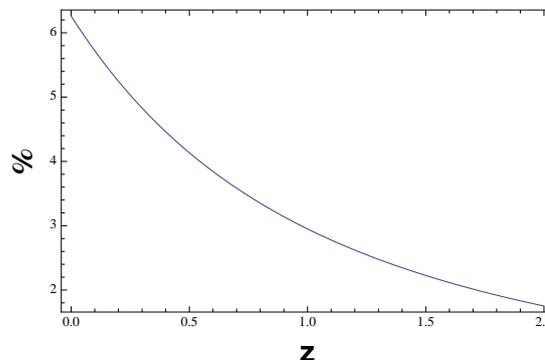
O gráfico (5.38) mostra a diferença relativa no uso dos diferentes modelos. Hoje, a diferença relativa é em torno de 50%, porém ele cai a quase 0,0% no passado. Isto quer dizer que há diferença entre avaliar a evolução da taxa de crescimento com os diferentes modelos que citamos.

As próximas figuras mostram as curvas do contraste de densidade de matéria escura e a di-

ferença percentual relativa em função do *redshift*, sendo que esta diferença percentual é relativa ao modelo geodésico.



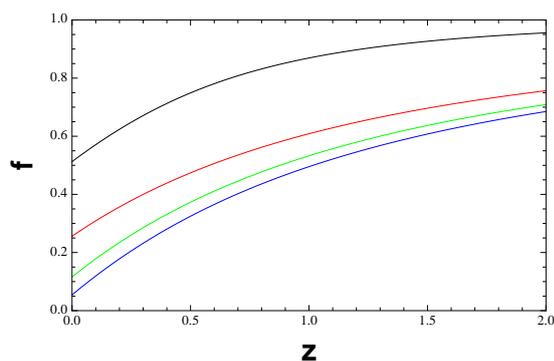
**Figura 5.39** Contraste de densidade em função de  $z$ .



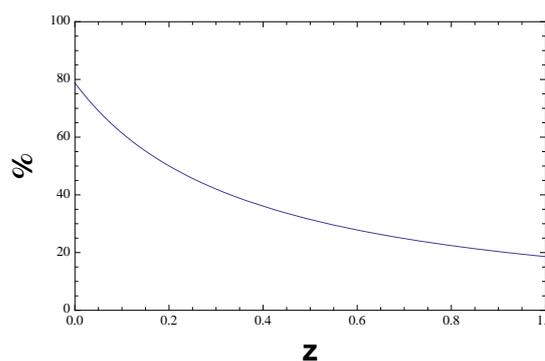
**Figura 5.40** Diferença percentual relativa em função do *redshift*.

O gráfico (5.39) relaciona o contraste de densidade de matéria escura com o *redshift* para três diferentes modelos, onde a curva em preto representa o modelo  $\Lambda$ CDM, a curva em azul representa o modelo com perturbação no termo de vácuo e a curva em verde, o modelo geodésico. Nesta figura, vemos que a evolução do contraste para o modelo  $\Lambda$ CDM se difere bastante dos outros dois modelos. Para a curva em preto, podemos perceber que o contraste de densidade de matéria escura cresce até o presente. Enquanto que as duas curvas, em verde e em azul, crescem muito suavemente desde o passado até os dias atuais ( $z = 0$ ).

E a figura (5.40) mostra a diferença percentual relativa de menos de 7% hoje e cai a zero no passado.



**Figura 5.41** Função Crescimento versus *redshift*.



**Figura 5.42** Diferença percentual na comparação dos modelos citados.

Para finalizar, incluímos na figura 5.41 o caso em que  $\delta Q^c \propto \delta_m^c$  o que implica em desprezar as perturbações na densidade de energia do vácuo em (4.39). Como vemos, a taxa de crescimento dada pela curva vermelha se afasta daquela obtida dentro do modelo geodésico dada

pela curva verde, recebendo assim um reforço. A diferença percentual relativa é mostrada na figura 5.42.

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## CONCLUSÕES

Estudar o crescimento das perturbações da matéria é crucial para entender a formação das estruturas no universo que se expande.

Neste trabalho estudamos a evolução do crescimento linear das estruturas em larga escala usando um formalismo invariante de *gauge* em modelos com interação entre matéria escura e termo de vácuo. O gás de Chaplygin generalizado foi decomposto em duas componentes escuras, uma matéria escura sem pressão e a outra energia escura com pressão negativa, parametrizando uma classe de modelos de interação através do parâmetro  $\alpha$ . Para valores positivos de  $\alpha$ , temos aniquilação de matéria escura e para valores negativos de  $\alpha$  temos criação de matéria escura.

A contribuição dos bárions foi negligenciada na análise, o que nos permitiu descrever a dinâmica perturbativa através de uma equação diferencial de segunda ordem no tempo para o contraste de densidade da matéria escura.

Estudamos dois modelos perturbativos, que são: i) o modelo perturbativo em que a matéria escura segue geodésica, que corresponde assumir que a densidade de energia do vácuo dinâmico está homogeneamente distribuída no espaço. Neste modelo não há transferência de momento, uma vez que o quadri vetor transferência de energia-momento é paralelo à quadri-velocidade  $Q^\mu = Qu^\mu$ ; ii) assumindo um modelo em que o termo de vácuo dinâmico é inhomogêneo e descrito por (4.34), resultando numa dinâmica dada pela equação diferencial de segunda ordem (4.41). Estudamos, também, o modelo  $\Lambda$ CDM (em que  $\alpha = 0$ ) a título de comparação.

Resolvendo a equação diferencial (4.41) com condições iniciais fixadas em altos *redshifts* mostramos que, para o caso não geodésico, o crescimento das estruturas é com muito boa aproximação independente das escalas lineares observadas para uma ampla faixa de valores de  $\alpha$ .

Mostramos que o contraste de densidade da matéria escura  $\delta_m$  para os modelos de interação aqui considerados muda muito pouco quando comparamos sua evolução obtida dentro do modelo perturbativo em que a matéria escura segue geodésica, com aquela obtida do modelo em que a energia do vácuo é perturbada. Isto indica que podemos usar um ou outro modelo para construir, por exemplo, o espectro de potência de matéria.

Porém, quando comparamos a taxa de crescimento  $f$  obtidas dentro dos dois modelos perturbativos aqui considerados, como pode ser visto para os valores dos parâmetros  $\alpha = 0,2$  e  $\alpha = -0,5$  escolhidos, encontramos diferenças sensíveis na evolução, da mesma forma que há uma diferença sutil ao usarmos o modelo em que as perturbações na densidade de energia do vácuo são desprezadas.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Hubble space telescope. <http://hubblesite.org/>. 03 Mar. 2017. 1, 5
- [2] TEAM., N. S. Wilkinson microwave anisotropy probe. <https://map.gsfc.nasa.gov/index.html>. 03 Mar. 2017. 1, 5
- [3] PERLMUTTER ET AL, S. *Astrophys. J.*, v. 517, n. 565, 1999. 1, 8, 16
- [4] RIESS ET AL., A. G. *Astrophys. J.*, v. 607, n. 665, 2004. 1, 8
- [5] ASTIER ET AL., P. *Astron. Astrophys.*, v. 447, n. 31, 2006. 1
- [6] TEGMARK ET AL., M. *Phys. Rev. D*, v. 69, n. 103501, 2004. 1
- [7] PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. *Mod. Phys.*, v. 75, n. 559, 2003. 1
- [8] PADMANABHAN, T. *Phys. Rept.*, v. 380, n. 235, 2003. 1
- [9] WEINBERG, S. *Rev. Mod. Phys.*, v. 61, n. 1, 1989. 1, 2
- [10] M. OZER, M.; TAHA, O. *Nucl. Phys. B*, v. 171, n. 363, 1986. 2
- [11] FABRIS, J.C., S. I.; SOLà, J. *JCAP*, v. 0702, n. 016, 2007. 2
- [12] ADE ET AL., P. *Astronomy and Astrophysics*, Berlin, v. 594, n. A13, 2016. 3
- [13] SHU, F. H. *The physical universe: An introduction to astronomy*. ed: University Science Books, California, 1982. 4
- [14] MISNER, CHARLES W., T. K. S. W. J. A. *Gravitation*. W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1973. 4
- [15] S.O. KEPLER & SARAIVA, M. D. F. O. *Astronomia e astrofísica*. Porto Alegre: Editora da Universidade - Universidade do Rio Grande do Sul, 2003. 4, 6, 16
- [16] STANEV, T. *High energy cosmic rays*. Springer, 2010. 5

- [17] Cosmic background explorer. <https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>. 03 Mar. 2017. 5
- [18] MIRANDA, W. L. D. A. *Testes observacionais em modelos de quintessência com métrica anisotrópica*. 106f. 2011. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Salvador Bahia., 2011. 5, 6
- [19] ZWICKY, F. *The Astrophysical Journal*, v. 86, n. 3, 1937. 6
- [20] Earth sky. earthsky.org. 06 June 2017. 6
- [21] PIGOZZO, C. B. *Testes observacionais em modelos cosmológicos com interação vácuo-matéria*. 93f. 2008. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Salvador Bahia., 2008. 8
- [22] CARROL, S. *Dark matter, dark energy: The dark side of the universe, part 1 of 2*. The Teaching Company, 2007. 8
- [23] AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University, 2010. 11, 14, 16, 19
- [24] LIMA, J.; SANTOS, R. *RBEF*, v. 40, n. 1, 2017. 12
- [25] TAKADA, M.; DORÉ, O. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 12, 2015. 12
- [26] HOUJUN, MO, B. F. V. D.; WHITE, S. *galaxy formation and evolution*. Cambridge University Press, 2010. 12
- [27] DODELSON, S. *Modern cosmology*. Academic Press, 2003. 12
- [28] BORGES, H. *Phys. Rev. D*, v. 77, n. 043513, 2008. 16
- [29] BORGES, H.; CARNEIRO, S. *Gen. Rel. Grav.*, v. 37, n. 1385, 2005. 16
- [30] RIESS, A.G. ET AL, . *Astron. J.*, v. 116, n. 1009, 1998. 16
- [31] SPERGEL, D.N.ET AL, . *Astrophys. J. Suppl.*, v. 148, n. 175, 2003. 16
- [32] POPE, A.C. ET AL, . *Astrophys. J.*, v. 607, n. 655, 2004. 16
- [33] WEINBERG, S. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. 16
- [34] ZIMDAHL, W. ET AL, . *JCAP*, v. 1104, 2011. 19
- [35] VOM MARTTENS, L. ET AL, . *Phys.Dark Univ.*, v. 15. 19, 20, 27
- [36] GORINI, V. ET AL, . *JCAP*, v. 0802, n. 016, 2008. 19
- [37] BORGES, H. D. A. *Evolução de perturbações em um modelo cosmológico com densidade de vácuo variável*. 63f. 2007. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Salvador Bahia., 2007. 20

- [38] BORGES ET AL., H. *Phys. Letter. B*, v. 727, n. 37, 2013. 20
- [39] FUÑO, A. R. *Perturbações da matéria num modelo cosmológico com interações no setor escuro*. 93f. 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO, Instituto de Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Vitória Espírito Santo., 2014. 22
- [40] MARCONDES ET AL., J. *JCAP*, v. 12, n. 009, 2016. 22
- [41] DANTAS JUNIOR, J. F. *Aplicação da estatística mediana na restrição de parâmetros cosmológicos*. 64f. 2015. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Curso de Pós-Graduação em Física, Salvador Bahia., 2015. 22
- [42] SANTIAGO ET AL., J. D. *Class. Quant. Grav.*, v. 29, n. 145017, 2012. 26
- [43] BORGES, H.; WANDS, D. *ArXiv*, , n. 1709.08933. 26
- [44] HUTERER, D. ET AL, . *Astrop. Phys*, v. 63, n. 23, 2015.
- [45] THOMAS, B. C. ET AL, . *Astrophys. J.*, v. 601, n. 1, 2004.
- [46] VELTEN, H. ET AL, . *MNRAS*, v. 452, n. 1443, 2015. 42
- [47] CARNEIRO, S.; PIGOZZO, C. *JCAP*, v. 1410, n. 060, 2014. 42
- [48] BERTOLAMI, O. *Nuovo Cimento*, v. 93, n. 36, 1986.
- [49] FREESE ET AL., K. *Nucl. Phys. B*, v. 287, n. 797, 1987.
- [50] SHAPIRO, I.; SOLÀ, J.; STEFANCIC, H. *JCAP*, v. 0501, n. 012, 2005.
- [51] CARROL, S. *Dark matter, dark energy: The dark side of the universe, part 2 of 2*. The Teaching Company, 2007.
- [52] HORVATH, J.; ALLEN, M. *Cosmologia física: do micro ao macro cosmos e vice-versa*. Editora Livraria da Física, 2011.