UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

João Ricardo Pessoa de Araújo

Formalismo de Hamilton-Jacobi Aplicado a Teorias de Campos Topológicas

Salvador
2016

João Ricardo Pessoa de Araújo

Formalismo de Hamilton-Jacobi Aplicado a Teorias de Campos Topológicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pesquisa e Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Universidade Federal da Bahia – UFBA

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Mario Cezar F. G. Bertin

Salvador

2016

Sobrenome, Nome do autor
Formalismo de Hamilton-Jacobi Aplicado a Teorias de Campos Topológicas/ João Ricardo Pessoa de Araújo. – Salvador, 2016-
110 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Mario Cezar F. G. Bertin

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal da Bahia – UFBA
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

1. Palavra-chave 1. 2. Palavra-chave 2. 3. Palavra-chave 3. I. Orientador. II. Universidade Federal da Bahia. III. Instituto de Física. IV. Título

CDU 555.55:555.55

Texto.

Agradecimentos

“EPÍGRAFE.”

(autor)

Resumo

Sistemas singulares compõe, sem duvida, uma vasta gama dos sistemas de interesse físico. Para melhor elucidar isso basta ser dito que as teorias de gauge são teorias com vínculos. O método de Dirac para tratar sistemas desse tipo é sem duvida o mais e antigo e atualmente ainda o mais utilizado. Nesse trabalho vamos devenvolver um formalismo alternativo para tratar os Sistemas não Hessianos, esse formalismo é o formalismo de Hamilton-Jacobi. O formalismo de Hamilton-Jacobi permite, por meio da condição de integarbilidade, separar os vínculos em invlutivos e não involutos. Os parêrenteses generalizados, por sua vez, são responsáveis por reduzir o espaço de fase do sistema elimando os vínculos não involutivos. Para finalizar o trabalho, vamos aplicar esse formalimso para o modelo BF em duas e três dimensões e para o campo de Yang-Mills topológicamente massívo.

Palavras-chaves: Formalismo de Hamilton-Jacobi 1. Análise de Vínculos 2. Modelo BF 3.

Abstract

Unique systems undoubtedly make up a wide range of systems of physical interest. To further elucidate this one suffices to be told that gauge theories are theories with bonds. Dirac's method for dealing with such systems is undoubtedly the oldest and most widely used. In this work we will develop an alternative formalism to treat non-Hessian Systems, this formalism is Hamilton-Jacobi formalism. Hamilton-Jacobi's formalism allows, through the condition of integrability, to separate the ties into involutive and involuntary. parenthesis widespread, in turn, are responsible for reducing the phase space of the system by eliminating the non-involutive links. To finalize the work, we will apply this formalism for the BF model in two and three dimensions and for the topologically massive Yang-Mills field.

Keywords: Hamilton-jacobi formalism 1. Constrained Analysis 2. Model BF 3.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

O século XX realmente foi marcado por grandes transformações na física. Nesse período que surgiram duas novas teorias que fizeram a comunidade cientifica enxergar a natureza de outra forma. Essas teorias são a Mecânica Quântica e a Relatividade. A mecânica quântica, tal como concebida por Schrödinger em 1926 [1], consiste de um teoria física para descrição do mundo na escala atômica e subatômica. Já a teoria da relatividade ganha maior relevância quando analisa relevância em velocidades próximas a da luz. Esta, também, em sua versão generalizada, descreve muito bem a interação gravitacional de corpos super massivos. As teorias quânticas de campos surgem algum tempo depois com o intuito de construir uma formulação teórica que fosse consistente tanto com a mecânica quântica quando com a relatividade.

Em geral, para se obter a versão quântica de um sistema físico é necessário conhecer a sua estrutura canônica. Obter a estrutura canônica de um teoria, em ultima instancia, presupõe que sejamos capazes de definir uma transformação de Legendre de modo que possamos construir uma hamiltoniana não degenerada. Porem tal passagem nem sempre será algo tão direto. A condição suficiente para que tenhamos uma transformação de Legendre bem definida é que o determinante da matriz Hessiana seja não nulo. Tal condição é conhecia como condição Hessina, e os sistemas que a verificam são denominados de *regulares.* Sempre que a condição Hessiana não for satisfeita esse sistema será chamado de *singular* ou vínculado.

Apesar de sistemas de grande relevância física verificarem a condição Hessina, como por exemplo a partícula livre e a oscilador harmônico, diversos outros, a exemplo do eletromagnetismo, são teorias singulares. Quem primeiro desenvolveu um método para trabalhar com sistemas singulares foi Dirac [1] seguido por Bergman [3]. Tal método ficou conhecido como método de Dirac e é notadamente o método mais utilizado para a analise de sistemas vinculados.

Métodos alternativos foram tentados a fim de se obter uma maior compreensão da estrutura desses sistemas, entre eles podemos citar o formalismo de Faddeev-Jackiw [3] e o formalismo de Hamilton-Jacobi. Nesse trabalho nos dedicaremos a analise do ultimo.

O formalismo de Hamilton-Jaobi tem inicio nas primeiras formulações do calculo variacional, mas são os trabalhos de Hamilton, sobre a formulação Hamiltoniana da mecânica clássica, e os de Jacobi, sobre transformações canônicas, que dão a sua forma final. Porem, foi Caratheodory, que por meio do seu quadro completo, que além de relacionar áreas inicialmente consideradas distinta na matemática: o calculo variacional, a teoria de equações diferencias ordinárias e a teoria das equações diferencias parciais, conseguiu mostrar que o formalismo de Hamilton-Jacobi é independente da formulação Hamiltoniana.

No entanto foi Guller [4] que desenvolveu uma extensão do método das lagrangeanas equivalentes de Caratheodory para lidar com sistemas vinculados. Para sistemas singulares, o formalismo de Hamilton-Jacobi nos conduz a um conjunto de equação diferenciais parciais. Como consequência, vamos poder tratar algumas das variáveis independentes como parâmetros, reduzindo assim o espaço de fase. Assim, sempre que estivermos trabalhando nesse espaço de fase reduzido, onde eliminamos as variáveis relacionadas às velocidades que não podem ser escritas como função dos momentos, podemos obter uma hamiltoniana não degenerada.

Com o passar tempo o formalismo de Hamilton-Jacobi vem sendo aplicado a diversos sistemas com bastante êxito. No contexto da relatividade geral, o formalismo já foi aplicado para estudar os modelos de gravitação em duas e tres dimensões [3], [7] bem como para a gravitação linearizada [7] e a gravitação teleparalela [8]. O formalismo de Halmilton-Jacobi também pode ser utilizado para compreender a estrutura de vínculos dos campos tipo Yang-Mills [9], bem como para o estudar da teoria de Yang-Mills topologicamente massiva [7].

Neste trabalho começaremos fazendo uma revisão de alguns conceitos em mecânica. No capitulo 2 será abordada a formulação lagrangeana da mecânica clássica. Partiremos da segunda lei de Newton, e por meio de uma transformação de coordenadas, mostraremos que a mesma é equivalente a equação de Euler-Lagrange. Em seguida mostramos que está ultima continua valida caso o sistema esteja sujeito a um conjunto de vínculos holônomos. Ainda neste capítulo explicitaremos a equivalência entre o principio de D'Alambert e o de Hamilton, bem como mostraremos que o principio de Hamilton pode ser visto como um caso particular do principio de Weiss.

No capitulo 3 estudaremos o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares. Como proposto por Caratheodory, será por meio das lagrangeanas equivalentes que buscaremos uma curva que deixe o nosso sistema lagrangeano automaticamente integrável. É nesse sentido que obtemos a equação diferencial parcial de HJ, a qual a curva deve verificar. Utilizando o método das características chegaremos às equações de movimento do sistema e, desta forma, estará clara a relação entre o calculo variacional, a teoria das equações diferencias parciais e a teorias das equações diferencias ordinárias.

No capitulo 4 nos dedicaremos a estudar os sistemas singulares. Para resolver o problema da singularidade da matriz Hessiana vamos tratar as variáveis independentes de forma distinta. As variáveis que possuírem velocidades que possam ser escritas como função do momentos, serão consideradas variáveis dinâmicas, já as demais, serão tratadas como parâmetros. No fundo o que estamos fazendo com isso é reduzir o espaço de fase. A cada uma das coordenadas associadas às velocidades não inversíveis estará associada uma equação vínculo. Essas equação de vínculo deverão verificar uma condição de integrabilidade, que nos conduzirá a três casos: i) temos um conjunto completo de vínculos involutivos, e com isso o nosso sistema é integrável, ii) que parte dos nosso vínculos são não involutivos, e com isso precisamos definir os parênteses generalizados, iii) o conjunto de vínculos involutivos não está completo, e com isso precisaremos adicionar novos vínculos à teoria.

As teorias de campo topologicamente massivas, a exemplo do modelo BF em duas e três dimensão, e a teoria de Yang-Mills em (2+1) dimensões, são sistemas genuinamente singulares. Desta forma, eles são ótimos exemplos para aplicarmos o formalismo de analise de vínculo de Hamilton-Jacobi.

Desta forma, dedicamos o capítulo 5 à analise dos vínculos do modelos de gravitação em duas e três dimensões. Sendo o modelo BF em duas dimensões equivalente ao modelo de Jackiw-Teitelbom para gravitação em dimensões menores analisamos a sua estutura de vínculos. Partindo da ação BF em duas dimensões, se obteve as equações de campo, e utilizando a definição de momento canônico e chegou-se ao conjunto de equações de Hamilton-Jacobi. Com as equações de vínculos em mãos, foi aplicada a condição de integrabilidade, definimos os parênteses generalizados e obtivemos diferencial fundamental. Com as equações caracteristicas em mãos conseguimos avaliar os geradores das transformações canônicas e de gauge do sistema. O mesmo caminho foi tomado para fazer a analise do modelo BF tridimensional.

No capítulo 6, temos o objetivo e estudar a teoria de Yang-Mills topologicamente massiva. Como a ação para esse sistema consiste na ação do campo de Yang-Mills livre acrescido de um termo topológico, fizemos primeiro a analisa completa dos vínculos para o campo de Yang-Mills livre. Em seguida se fez a analise do sistema descrito por uma lagrangeana de Chern-Simons assim completando o estudo dos vínculos da teoria de Yang-Mills topologicamente massiva.

O ultimo capítulo foi dedicados a compilar e discutir alguns resultados obtidos ao longo do texto.

Referências

[1] E. Schrödinger, *Collected Papers on Wave Mechanics*, Quantisation as a Problem of Proper Values I, II, III e IV. Chelsea Pub. Co. New York (1978).

[2] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J. Math. **2**, 129 (1950);
P. A. M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3**, 1 (1951);
P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics,* Yeshiva University, New York (1964).

[3] P. G. Bergmann, *Non-linear field theories*, Phys. Rev. **75**, 680 (1949);

[3] L. Faddeev, R. Jackiw, *Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1692 (1988).

[4] Y. Güler, Il Nuovo Cimento B100, 251 (1987);
Y.Güler, Onthedynamicsofsingular, continuoussystems, J.Math.Phys.30, 785(1992);
Y. Güler, Il Nuovo Cimento B107, 1398 (1992).

[5] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Two dimensional BF gravity: A Hamilton- Jacobi analysis*,J. Math. Phys (2012)

[6] N. T. Maia, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, T*hree-dimensional Background Field Gravity: A Hamilton-Jacobi analysis*, J. Math. Phys (2015)

[7] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Hamilton-Jacobi formalism for Linearized Gravity*, Class.Quant.Grav. **28**, 175015 (2011)

[8] B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, J. F. Rocha-Neto, *The Hamilton-Jacobi approach to teleparallelism,* Il Nuovo Cimento **B120**, 981 (2005)

[9] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism,* J. Math. Phys. **55**, 112901 (2014).

[10] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, G. R. Zambrano, *Topologically Massive Yang-Mills field: A Hamilton-Jacobi approach*, J. Math. Phys. **55**, 042902 (2014).

2 Mecânica Clássica

2.1 Equação de Lagrange

A mecânica newtoniana é definida sobre o que chamamos de espaço euclidiano, onde, no mesmo, é usual a utilização de coordenadas cartesianas. Contudo, para alguns sistemas, especialmente aqueles em que as partículas não poderão se mover livremente sobre todo o espaço, devendo ser verificada algumas equações de vínculo entre as coordenadas de suas partículas, é mais conveniente a utilização de outros sistemas de coordenadas. Tais sistemas, em que as partículas terão o movimento restrito a uma dada região do espaço euclidiano, serão chamados de sistemas vinculados e, sobre eles, devem existir o que chamaremos de forças de vínculo. Tais forças irão garantir que as equações de vínculos serão verificadas durante a evolução do sistema. Nesses casos, as equações de movimento deverão incluir informações sobre tais forças de vínculo.

Nos desenvolvimentos a seguir mostraremos como tais forças de vínculo irão nos permitir reescrever as equações de movimento, por meio de um conjunto mínimo de coordenadas independentes, de tal modo que os vínculos sejam levados em conta desde o início. Tal conjunto de coordenadas será chamado de coordenadas generalizadas e será definido com base nas propriedades geométricas do particular sistema utilizado. As coordenadas generalizadas são definidas sobre o que chamamos de variedades de configuração Q, que consistem de espaços matemáticos onde as partículas podem ser consideradas livres para se mover por todo espaço, e o número de coordenadas, que corresponde aos graus de liberdade do sistema, coincide com a dimensão da variedade.

Nesse trabalho faremos uma breve revisão da formulação lagrangeana da mecânica clássica. Sob tal escopo, chamaremos as equações de movimento de equações de Lagrange. Devemos enfatizar que o conteúdo físico nas equações de Lagrange são os mesmos da equações de Newton.

Para um sistema físico de N partículas, onde precisamos de 3 coordenadas cartesianas para determinar a posição de cada uma delas, serão necessários 3N coordenadas para determinar a configuração do sistema. Contudo, devido as forças de vínculo que podem estar atuando sobre o mesmo, nem todas as 3N coordenadas cartesianas serão independentes, devendo algumas delas obedecer equações de vínculo entre as mesmas. Os vínculos que um sistema mecânico verificam podem ser divididos em dois tipos: os vínculos holônomos e os não holônomos. Os vínculos holônomos são aqueles que são dados por uma função das coordenadas cartesianas que sejam identicamente nulas, ou seja

$$f\left(x^1, x^2, ..., x^r, ..., x^{3N}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Os vínculos não holônomos podem ser subdivididos em dois tipos: um é quando existe alguma desigualdade matemática envolvendo as variáveis e o segundo tipo, ocorre quando um dos diferenciais das coordenadas pode ser escrito como combinação linear do diferencial das outras, mas não pode ser reduzido a forma (2.1) .

No formalismo newtoniano, ao estudarmos um sistemas composto de N partículas, temos um conjunto de 3N equação de movimentos, do tipo

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^r\right) = F^r \qquad r = 1, 2, ..., 3N \tag{2.2}$$

e sendo a energia cinética desse sistema dada pela expressão

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^r\right)^2, \tag{2.3}$$

na qual estamos adotando a convenção da soma sobre os índices repetidos. Derivando T com relação a $\dot{x}^r$, ficamos com

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r} = m\dot{x}^r, \tag{2.4}$$

de onde fica clara a relação

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) = F^r. \tag{2.5}$$

Se considerarmos um sistemas conservativo, que são aqueles cujas as forças são obtidas como gradientes de uma função potencial, ou seja

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial x^r}, \tag{2.6}$$

temos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x^r}. \tag{2.7}$$

Agora podemos escolher um conjunto de 3N funções das variáveis x^r e eventualmente do tempo, que vamos supor inversivel, e que seja do tipo

$$q^s = q^s\left(x^r, t\right), \qquad s = 1, 2, ..., 3N. \tag{2.8}$$

Nesse momento vale resaltar que só podemos garantir que a funções sejam inversiveis pois estamos trabalho com um sistema sem vínculos, e com isso com o mesmo numero de coordenadas, sendo assim, possível construir um bijeção entre elas.

As novas variáveis q^s serão as chamadas coordenadas generalizadas. A expressão

$$x^r = x^r\left(q^s, t\right) \tag{2.9}$$

é justamente a inversa de (2.8) onde estamos escrevendo as coordenadas cartesianas como funções das novas variáveis q^s e do tempo.

Dessa forma, tomando a expressão de x^r como definido acima e derivando com relação a t obtemos

$$\dot{x}^r = \frac{dx_r}{dt} = \frac{\partial x^r}{\partial q^s}\dot{q}^s + \frac{\partial x^r}{\partial t}. \tag{2.10}$$

As quantidades $\dot{q}^s$ são chamadas de velocidades generalizadas. Partindo da equação (2.10), podemos obter a relação

$$\frac{\partial \dot{x}^r}{\partial \dot{q}^s} = \frac{\partial x^r}{\partial q^s}, \tag{2.11}$$

onde, utilizando a convenção da soma sobre índices repetidos, também somos capazes de notar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^r}{\partial q^s}\right) &= \frac{\partial}{\partial q^u}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q^s}\right)\dot{q}^u + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^r}{\partial q^s}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q^s}\left[\frac{\partial x_r}{\partial q^u}\dot{q}^u + \frac{\partial x^r}{\partial t}\right] \\ &= \frac{\partial \dot{x}^r}{\partial q^s}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^s}\left(\frac{1}{2}m_r\dot{x}^{r2}\right) \\ &= m\dot{x}^r\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_s} \\ &= m\dot{x}^r\frac{\partial x^r}{\partial q^s}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por sua vez, se tomarmos a derivada de (2.13)com relação ao tempo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right) &= m\ddot{x}^r\frac{\partial x_r}{\partial q^s} + m\dot{x}^r\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^r}{\partial q^s}\right) \\
&= F_r\frac{\partial x^r}{\partial q^s} + m\dot{x}^r\frac{\partial \dot{x}^r}{\partial q^s} \\
&= F_r\frac{\partial x^r}{\partial q^s} + \frac{\partial}{\partial q^s}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^{r2}\right) \\
&= F_r\frac{\partial x^r}{\partial q^s} + \frac{\partial T}{\partial q^s},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde podemos definir a quantidade

$$Q_s \equiv F_r\frac{\partial x^r}{\partial q^s}, \tag{2.15}$$

que chamaremos de força generalizada. A equação escrita sob a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^s} = Q_s, \tag{2.16}$$

será a equação de movimento do sistema e é conhecida como equação de Lagrange. Tal equação pode ser considerada como uma generalização da equação de Newton [Ref. Mukunda]. Se nos restringirmos apenas ao sistemas conservativos podemos escrever a expressão para a força sob a forma

$$F_r = -\frac{\partial V(x^{r'}, t)}{\partial x^r}, \tag{2.17}$$

de onde concluímos que força generalizada será dada por

$$Q_s \equiv -\frac{\partial V}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial q^s} = -\frac{\partial V}{\partial q^s}, \tag{2.18}$$

e com isso,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q^s} + \frac{\partial T}{\partial q^s}. \tag{2.19}$$

Como assumimos que o potencial não depende das velocidades

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^s}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q^s} + \frac{\partial T}{\partial q^s}, \tag{2.20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}^s}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q^s} = 0, \tag{2.21}$$

onde podemos definir uma função

$$L\left(q^s, \dot{q}^s, t\right) = T\left(q^s, \dot{q}^s, t\right) - V\left(q^s, t\right), \tag{2.22}$$

que chamaremos de função de Lagrange, ou lagrangeana, e escrever as equações de movimento para um sistema convservativo por meio da expressão

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^s} = 0. \tag{2.23}$$

Tal equação também é conhecida como equação de Lagrange. Como em (2.8) o que fizemos foi apenas reescrever as 3N coordenadas cartezianas notadamente obtemos em (2.23) é também um conjunto de 3N equações que representam nada mais do que uma reformulação elegante das equações de Newton, desta forma não temos quaisquer vantagens a trabalhar com elas em detrimento das equações de Newton. A grande vantagem da formulação Lagrangeana, como veremos a seguir, consiste justamente no fato da equação (2.23) continua válida para um sistema com vínculos holônomos.

Para obtermos as equações de Lagrange supomos que o nosso potencial deveria depender apenas das coordenadas generalizadas, mas notadamente não precisamos nos restringir a esse tipo de potencial. Vemos claramente que qualquer força generalizada que derive de um potencial do tipo

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^s} - \frac{\partial V(q, \dot{q}, t)}{\partial q^s} \tag{2.24}$$

também irá verificar as equações da Lagrange. Na proxíma seção mostraremos que se as nossas 3N coordenadas generalizadas não forem todas independentes entre si e tiverem que verificar k equações de vínculo, poderem ainda assim encontrar um conjunto de 3N-k equações do tipo (2.8) que descrevam completamente o nosso sistema.

2.2 Princípio de D'Alambert

Até agora não fizemos qualquer restrição ao movimento do sistema. Desta forma, consideramos que as 3N coordenadas de posição, são independentes, e não precisão elas verificar nenhuma equação de vínculo. Contudo, sabemos que para muitos sistemas físicos de interesse essa suposição não pode ser considerada. Desta forma, devemos considerar um caso mais geral onde o nosso sistema de N partículas está sujeito a k vínculos, ou seja, as nossas variáveis cartesianas devem verificar k equações de vínculo. Para estudar tais sistemas, iremos nos apoiar no princípio de D'Alambert.

Deste modo, considerando um sistema sujeito a k equações de vínculos, podemos definir o que chamamos de deslocamento infinitesimal virtual do sistema, a mudança na configuração do mesmo por meio de alguma troca infinitesimal das coordenadas δr^i, consistentes com as forças e os vínculos impostos ao sistema em um dado instante de tempo t. Chamaremos tal deslocamento de virtual, pois o mesmo é tomado a tempo fixo e difere do deslocamento real que ocorre com a evolução temporal, durante o qual as forças e os vínculos podem mudar.

Se considerarmos por sistema em equilíbrio aquele onde a força total atuando sobre cada partícula é igual a zero, ou seja $\mathbf{F} = 0$, assim, claramente, o produto interno $\mathbf{F}\cdot \delta\mathbf{r}$ que é justamente o trabalho da força F ao longo do deslocamento δr deve se anular. Com isso a soma desses produtos sobre todas as partículas também devem ser iguais a zero

$$\delta w = \mathbf{F}_I\cdot \delta\mathbf{r}^I = 0, \tag{2.25}$$

decompondo F_i em forças aplicadas $\mathbf{F}_i^{(a)}$e forças de vínculo $\mathbf{f}_i$

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_I^{(a)} + \mathbf{f}_I, \tag{2.26}$$

com isso

$$\mathbf{F}_I^{(a)}\cdot \delta\mathbf{r}^I + \mathbf{f}_I\cdot \delta\mathbf{r}^I = 0. \tag{2.27}$$

Devemos nos restringir a sistemas tais que o trabalho das forças de vínculos sejam identicamente nulos, o que é sempre verdade se estivermos trabalhando com vínculos holôlomos. Essa condição, a primeira vista, parece ser muito restritiva, porém para inúmeros exemplos de vínculos essa condição é verificada. Por exemplo, para partículas que tenham o seu movimento restrito a uma superfície, as suas forças de vínculo serão perpendiculares a tal superfície e ao mesmo tempo o seu deslocamento virtual deve ser tangente, com isso o trabalho virtual deve se anular.

Portanto temos como condição para o equilíbrio de um sistema que o trabalho virtual das forças aplicadas seja igual a zero.

$$\mathbf{F}_I^{(a)}\cdot \delta\mathbf{r}^I = 0, \tag{2.28}$$

onde com isso, a condição para o equilíbrio de um sistema pode ser expressa dizendo que o trabalho virtual das forças aplicadas deve ser zero. Essa equação é conhecida como princípio do trabalho virtual e apenas nos traz contribuições sobre a estática, já que estamos considerando que o somatorio das forças atuantes sobre cada partícula do sistema é nulo. Note que os coeficientes de δr^I não podem ser feitos iguais a zero, com isto $F_I^{(a)} \neq 0$ uma vez que os δr^I não são completamente independentes pois estão conectados pelas equações de vínculo. Para podermos igualar os coeficientes a zero devemos tratar o princípio envolvendo os deslocamentos virtuais envolvendo as coordenadas generalizadas q^I, pois estas são independentes entre si.

Para estender a ideia do princípio do trabalho virtual para sistemas que possuem uma dinâmica, D'Alambert utilizando as equações de Newton

$$\mathbf{F}_I = \dot{\mathbf{p}}_I \tag{2.29}$$

escritas sob a forma

$$\mathbf{F}_I - \dot{\mathbf{p}}_I = 0, \tag{2.30}$$

definiu

$$\mathbf{I} = -\dot{p}, \tag{2.31}$$

considerando I como uma força criada pelo movimento, também conhecida como força de inércia. Desta forma conseguimos escrever a equação de Newton por

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{I}_I = 0, \tag{2.32}$$

que apesar de aparentar ser meramente uma reformulação das leis de Newton sem nenhum ganho é de fundamental importância para o princípio de D'Alambert. Como nós sabemos, um sistema em equilíbrio é aquele justamente no qual as forças atuantes sob o mesmo são iguais a zero. Desta forma, ao adicionarmos as forças de inércia às forças atuantes, e estendendo o conceito de equilíbrio para sistemas em movimento, construímos uma condição de equilíbrio para o nosso sistema.

Com a generalização do conceito de equilíbrio, o princípio de D'Alambert estabelece que um sistema está em equilíbrio se adicionarmos a ele as forças de inércia. Com isso fica claro que o trabalho virtual das forças de um sistema acrescidas das forças de inércia devem ser identicamente nulo, ou seja

$$(\mathbf{F}_I - \dot{\mathbf{p}}_I) \cdot \delta\mathbf{r}^I = 0. \tag{2.33}$$

Nós podemos chamar de força efetiva a soma

$$\mathbf{F}^e_I = \mathbf{F}_I + \mathbf{I}_I \tag{2.34}$$

e como isso podemos escrever o princípio de D'Alambert da seguinte forma: o trabalho virtual das forças efetivas de um sistema é igual a zero

$$\mathbf{F}^e_I \cdot \delta\mathbf{r}^I = 0. \tag{2.35}$$

Separando as forças do sistema em forças aplicadas e força de vínculo da forma

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_I^{(a)} + \mathbf{f}_I, \tag{2.36}$$

podemos reescrever a equação sob a forma

$$\left(\mathbf{F}_I^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_I\right) \cdot \delta\mathbf{r}^I + \mathbf{f}_I \cdot \delta\mathbf{r}^I = 0. \tag{2.37}$$

Como o trabalho das força de vínculo são iguais a zero, temos

$$\left(\mathbf{F}_I^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_I\right) \cdot \delta\mathbf{r}^I = 0, \tag{2.38}$$

que é conhecido como princípio de D'Alambert. Como as forças de vínculo não irão aparecer nos nossos problemas, com isso iremos trabalhar apenas com as forças aplicadas, podemos remover o índice $^{(a)}$ sem risco de ambiguidade. Devido a existência de forças de vínculo atuando no sistema, os deslocamentos virtuais δr^I não são todos independentes e com isso não podemos fazer todos os seus coeficientes iguais a zero. Desta forma, podemos expressar suas equações de forma mais útil se tratarmos o princípio introduzindo uma expressão envolvendo o deslocamento virtual das coordenadas generalizadas δq^I, que são todas independentes entre si.

Com esse intuito podemos reescrever a expressão da seguinte forma

$$\mathbf{F}_I \cdot \delta\mathbf{r}^I - \dot{\mathbf{p}}_I \cdot \delta\mathbf{r}^I = 0, \tag{2.39}$$

onde o primeiro termo da expressão fica dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I \cdot \delta\mathbf{r}^I &= \mathbf{F}_I \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^I}{\partial q^j} \delta q^j \\ &= Q_j \delta q^j. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Já o segundo termo será expresso como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_I \cdot \delta\mathbf{r}^I &= m\ddot{r}^I \cdot \delta\mathbf{r}^I \\ &= m\ddot{r}^I \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^I}{\partial q^j} \delta q^j \\ &= \left[\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{r}}^I \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^I}{\partial q^j}\right) - m\dot{r}^I \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}^I}{\partial q^j}\right)\right] \delta q^j \\ &= \left[\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{r}}^I \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^I}{\partial q^j}\right) - m\dot{r}^I \cdot \frac{\partial \dot{r}^I}{\partial q^j}\right] \delta q^j \\ &= \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^j\right)^2\right) - \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^j\right)^2\right)\right] \delta q^j, \end{aligned} \tag{2.41}$$

com isso,

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i\right]\delta q^i = 0. \tag{2.42}$$

Note que em coordenadas cartesianas a derivada parcial de T com respeito a q^i é igual a zero. Assim, falando na linguagem da geometria diferencial, esse termo surge devido a curvatura das coordenadas q^j. Se os nossos vínculos forem holônomos, então é possível obter um conjunto de coordenadas independentes q^j que contêm as condições de vínculos implícitas. Para um deslocamento virtual δq^i que é independente de δq^k e com isso o único caminho para (2.42) ser igual a zero é que cada coeficiente individual seja igual a zero, ou seja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i = 0. \tag{2.43}$$

Para forças do tipo

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial r^i}, \tag{2.44}$$

as forças generalizadas serão escritas como

$$Q_j = \mathbf{F}_I \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^I}{\partial q^j} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}^I}\frac{\partial \mathbf{r}^I}{\partial q^j}, \tag{2.45}$$

que é exatamente a mesma expressão para a derivada parcial da função V com respeito a variável q^j

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q^i}, \tag{2.46}$$

desta forma podemos escrever as equações

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{2.47}$$

A equação acima apesar de possuir a mesma forma funcional da equação (2.23) elas são essencialmente bem distintas entre si. Inicialmente podemos mencionar que no primeiro caso tínhamos 3N coordenadas e neste momento possuímos apenas n=3N-k. E esta equação também nos mostra que podemos escrever as equação de Lagrange mesmo que tenhamos um sistema sujeito a vínculos holônomos.

2.3 Princípio de Hamilton

A natureza diferencial das equações de Lagrange ficam claras por meio da sua expressão explicita dada por

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{2.48}$$

Com isso percebemos que as equações de Lagrange caracterizam as propriedades locais das trajetórias γ sobre o espaço de configuração. Contudo, os princípios variacionais devidos a Hamilton e Weiss, são capazes de construir caracterizações globais das equações de movimento. Tais princípios consideram o movimento dinâmico do sistema, em um intervalo de tempo finito, e obtém diretamente a trajetória percorrida no espaço de fase.

Se considerarmos dois pontos no espaço de configuração dados pelas coordenadas $q^i_{(1)}$ e $q^i_{(2)}$ e uma curva γ conectando esse dois pontos, a lagrangeana $L\left(q^i, \dot{q}^i, t\right)$ deve assumir um valor numérico para cada ponto da trajetória. Desta forma, podemos definir um objeto matemático dado pela integral definida da função de lagrange ao longo do tempo, sob a forma

$$A_\gamma = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q^i, \dot{q}^i, t\right) dt, \tag{2.49}$$

que é conhecido como funcional ação. O princípio de Hamilton, que impõe uma condição justamente sobre A, afirma que o movimento de um sistema mecânico ocorre por um tal caminho que a integral definida A torna-se estacionária para toda possível variação infinitesimal da configuração do sistema entre dois pontos fixos.

O princípio de Hamilton, além de fazer afirmações globais sobre o sistema, está em completo acordo com o princípio de D'Alambert. Para mostrar tal afirmação vamos primeiramente multiplicar δw^i por dt e integrar entre t_1 e t_2

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta w^i dt &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[F_i - \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}^i\right)\right] \delta q^i dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} F_i \delta q^i dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}^i\right) \delta q^i dt,\end{aligned} \tag{2.50}$$

onde podemos separar a equação acima em dois termos, tomando a parte

$$\int_{t_1}^{t_2} F_i \delta q^i dt, \tag{2.51}$$

onde

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial q^i}. \tag{2.52}$$

Com isso

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} F_i \delta q^i dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V}{\partial q^i} \delta q^i dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt \\
&= = \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

onde nós assumimos que o trabalho não depende da velocidade. Se agora nos debruçarmos sobre o segundo termo da equação,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}^i\right)\delta q^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}^i \delta q^i\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}^i \frac{d}{dt}\left(\delta q^i\right) dt, \tag{2.54}$$

onde,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}^i \delta q^i\right) dt = \left[m\dot{q}^i \delta q^i\right]_{t_1}^{t_2}, \tag{2.55}$$

e,

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}^i \frac{d}{dt}\left(\delta q^i\right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}^i \frac{d}{dt}\left(\delta q^i\right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}^i \delta \frac{d}{dt} q^i dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}^i \delta \dot{q}^i dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} m\delta\left(\dot{q}^i \cdot \dot{q}^i\right) dt \\
&= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \left(\dot{q}^i\right)^2 dt,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

com isso nós temos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta w^i dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \left(\dot{q}^i\right)^2 dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt - \left[m\dot{q}^i \delta q^i\right]_{t_1}^{t_2}. \tag{2.57}$$

Usando a definição de função lagrangeana $L = T - V$, podemos escrever

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta w^i = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - \left[m\dot{q}^i \delta q^i\right]_{t_1}^{t_2}, \tag{2.58}$$

sendo bem definida a posição de um sistema mecânico nos instantes t_1 e t_2, temos que

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0. \tag{2.59}$$

Nesse caso o termo de contorno deve se anular

$$\left[m\dot{q}^i \delta q^i\right]_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{2.60}$$

e com isso temos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{w}^c = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta A, \tag{2.61}$$

em que

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{2.62}$$

Uma vez que o princípio de D'Alamber requer que $\delta \omega^i$ seja igual a zero, a sua integral no tempo também o será. O que implica em

$$\delta A = 0. \tag{2.63}$$

Assim o princípio de D'Alambert pode ser reformulado. Posto dessa forma o princípio de D'Alambert coincide justamente o princípio de Hamilton, que estabelece que o movimento de um sistema mecânico arbitrário ocorre por tal caminho que a integral definida A torne-se estacionária para uma possível variação do sistema, desde que o ponto inicial e final da configuração do sistema sejam bem determinados.

O raciocínio que nos conduziu ao princípio de Hamilton pode ser construindo no sentido contrário. Podemos partir do postulado de que $\delta A = 0$ e deduzir que $\delta \omega^i = 0$ que é justamente o princípio de D'Alambert. Isso mostra que ambos os princípios são matematicamente equivalentes.

Enquanto o princípio de D'Alambert faz afirmações independentes sobre cada instante de tempo durante o movimento, o princípio de Hamilton inclui todas essas afirmações em uma única, considerando o movimento como um todo.

O princípio de Hamilton também pode ser visto como um caso particular do princípio Weiss, quando os pontos iniciais e finais da configuração do sistema não forem fixos, como enunciaremos a seguir.

2.4 Princípio de Weiss

O princípio de Weiss generaliza o princípio de Hamilton fazendo considerações globais sobre a trajetória de um sistema físico em que os pontos iniciais e finais do sistema não estão fixos. A sua afirmação consiste basicamente em dizer que um sistema mecânico assume dentre todas as possíveis trajetórias justamente aquela para a qual a variação da ação δA só possui contribuição nos termos de fronteira. Afirmações como essa que impõe que um dado funcional assuma uma condição de extremo, são conhecidas como princípios variacionais, e a área da matemática que se debruça sobre este tema é conhecida como cálculo variacional.

Para encontrar a curva que extremiza o funcional A devemos primeiro calcular a sua variação geral. Calcular a variação de um funcional consiste basicamente em procurar a curva para a qual $\delta A = 0$, porém, como não estamos trabalhando com extremos fixos, ou seja, como não devemos impor que a varição da curva nos seus pontos de extremo seja igual a zero, precisamos considerar funções definidas em espaços distintos, e com isso com diferentes limites de integração. Para uma abordagem mais completa sobre o estudo do cálculo das variações podemos consultar [7]

Expressando matematicamente o que tratamos acima, dado um funcional do tipo

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt, \tag{2.64}$$

desejamos encontrar a parte linear do incremento

$$\Delta A = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} L\left(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt. \tag{2.65}$$

Com o objetivo de encontrar a variação δA do funcional, mostraremos que variar o domínio da função, que está expresso pela variação dos limites de integração, é equivalente a variar o parâmetro de integração durante todo o domínio. Para isso, definindo as variações

$$\delta q^i = \bar{q}^i\left(\bar{t}\right) - q^i\left(t\right), \qquad \delta t = \bar{t} - t, \tag{2.66}$$

para o funcional A dado acima, a sua variação sera expressa por

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta\left[\int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L\left(q, \dot{q}, t\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) \delta\left(dt\right), \end{aligned} \tag{2.67}$$

onde consideramos variações no parâmetro de integração dt. Devido a definição do operador δ temos,

$$\delta\left(dt\right) = d\bar{t} - dt = \frac{d\bar{t}}{dt} dt - dt = \left(\frac{d\bar{t}}{dt} - 1\right) dt, \tag{2.68}$$

onde por meio da igualdade,

$$\delta\left(dt\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(t + \delta t\right) - 1\right] dt = \left(1 + \frac{d\left(\delta t\right)}{dt} - 1\right) = \frac{d\left(\delta t\right)}{dt} dt = d\left(\delta t\right), \tag{2.69}$$

podemos mostrar a comutatividade entre os operadores d e δ, podem ser expressa também por$[\delta, d] = 0$.

Definindo um novo funcional $\bar{A}$ da forma

$$\bar{A} = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, \bar{t}\right) d\bar{t} \tag{2.70}$$

podemos, usando a relação obtida acima, expressá-lo da forma

$$\bar{A} = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, \bar{t}\right) d\bar{t} = \int_{t_1}^{t2} L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, t\right) \frac{d\bar{t}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t2} L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, t\right) \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) dt, \tag{2.71}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \bar{A} - A &= \int_{t_1}^{t2} L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, \bar{t}\right) \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) dt - \int_{t_1}^{t2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t2} \left[L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, \bar{t}\right) - L\left(q, \dot{q}, t\right) + L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, \bar{t}\right) \frac{d\delta t}{dt}\right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t2} \left[\delta L + L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, \bar{t}\right) \frac{d\delta t}{dt}\right] dt. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Usandos a expansão

$$L\left(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, t\right) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + ..., \tag{2.73}$$

e expressando a parte linear do incremento por

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}, \tag{2.74}$$

ou seja,

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L + L\frac{d\delta t}{dt}\right] dt \tag{2.75}$$

que é exatamente a equação (87). Assim, mostramos que o problema que envolve a variação no tempo e no domínio é o mesmo: variar o domínio é equivalente a variar o parâmetro em todo o ponto da curva.

Expressando δA de forma mais conveniente,

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L dt + L d\delta t\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L dt + d\left(L\delta t\right) - dL\delta t\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L dt + d\left(L\delta t\right) - dt\frac{dL}{dt}\delta t\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L - \frac{dL}{dt}\delta t\right] dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left(L\delta t\right), \end{aligned} \tag{2.76}$$

e introduzindo o operador

$$\bar{\delta} = \delta - \delta t \frac{d}{dt} \tag{2.77}$$

conhecido como variação a tempo fixo. O mesmo subtrai a parte responsável pela variação temporal do operador δ. Denotando desta forma, ficamos com

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \bar{\delta} L dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left(L\delta t\right), \tag{2.78}$$

e obtemos o termo de fronteira

$$\int_{t_1}^{t_2} d\left(L\delta t\right) = L\delta t \mid_{t_1}^{t_2} . \tag{2.79}$$

Porem (2.79) não é o unico termo de fronteira que podemos obter. Olhando para o primeiro termo do lado direito da equação (2.78) vemos que no mesmo também está implicito termos de fronteira

$$\int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta} q^i\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta} q^i \mid_{t_1}^{t_2}, \tag{2.80}$$

que não faremos iguais a zero, visto que não estamos trabalhando com extremos fixos e com isso não devemos impor nenhuma condição a δt ou δq. Para encontrarmos (2.80) vamos calcular $\bar{\delta} L$, que é dado por

$$\bar{\delta} L = \delta L - \delta t \frac{dL}{dt}. \tag{2.81}$$

Trabalhando primeiro com a parte referente a δL, ficamos com

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i, \tag{2.82}$$

por outro lado

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}, \tag{2.83}$$

então

$$
\begin{aligned}
\delta L - \delta t\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i - \delta t\frac{\partial L}{\partial t} - \delta t\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i - \delta t\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q} \\
&= \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i - \delta t\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i - \delta t\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q} \\
&= \frac{\partial L}{\partial q^i}\left(\delta q^i - \dot{q}^i\delta t\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\delta \dot{q}^i - \ddot{q}^i\delta t\right) \\
&= \frac{\partial L}{\partial q^i}\left(\delta - \delta t\frac{d}{dt}\right)q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\delta - \delta t\frac{d}{dt}\right)\dot{q}^i \\
&= \frac{\partial L}{\partial q^i}\bar{\delta} q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}\dot{q}^i.
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

Com isso,

$$
\bar{\delta}L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\bar{\delta} q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}\dot{q}^i. \tag{2.85}
$$

Agora precisamos calcular $\delta\dot{q}^i$, para isso,

$$
\delta\dot{q}^i = \frac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}} - \frac{dq^i}{dt} = \frac{d\bar{q}^i}{dt}\frac{dt}{d\bar{t}} - \frac{dq^i}{dt}, \tag{2.86}
$$

como $\delta t = \bar{t} - t$, então $\dfrac{dt}{d\bar{t}} = 1 - \dfrac{d\delta t}{d\bar{t}}$, ou seja,

$$
\delta\dot{q}^i = \frac{d\bar{q}^i}{dt}\left(1 - \frac{d\delta t}{d\bar{t}}\right) - \frac{dq^i}{dt} = \frac{d\bar{q}^i}{dt} - \frac{dq^i}{dt} - \frac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}}\frac{d\delta t}{d\bar{t}} = \frac{d\left(\bar{q}^i - q^i\right)}{dt} - \frac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}}\frac{d\delta t}{dt}, \tag{2.87}
$$

que com $\delta q^i = \bar{q}^i - q^i$ torna-se

$$
\delta\dot{q}^i = \frac{d\delta q^i}{dt} - \frac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}}\frac{d\delta t}{d\bar{t}} = \frac{d\delta q^i}{dt} - \frac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}}\frac{d\delta t}{dt}. \tag{2.88}
$$

Agora temos que usar o fato de que as variações δq^i e δt são infinitesimais e apenas os termos em primeira ordem são relevantes. Assim, como o segundo termo a direita já é linear em δt, a derivada $\dfrac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}}$ só deve contribuir em ordem zero, ou seja,

$$
\frac{d\bar{q}^i}{d\bar{t}} \approx \frac{dq^i}{dt} \tag{2.89}
$$

assim em primeira ordem,

$$
\delta\dot{q}^i = \frac{d\delta q^i}{dt} - \frac{d\delta t}{dt}\dot{q}^i, \tag{2.90}
$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\dot{q}^i &= \delta\dot{q}^i - \delta t\ddot{q}^i = \frac{d\left(\delta q^i\right)}{dt} - \frac{d\left(\delta t\right)}{dt}\dot{q}^i = \frac{d}{dt}\left(\delta q^i\right) - \frac{d}{dt}\left(\delta t\dot{q}^i\right) &(2.91)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\delta q^i - \delta t\dot{q}^i\right) = \frac{d}{dt}\left(\bar{\delta}q^i\right), &(2.92)
\end{aligned}$$

então temos $\left[\bar{\delta}, \frac{d}{dt}\right] = 0$. Voltando a (2.85),

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}L &= \frac{\partial L}{\partial q^i}\bar{\delta}q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}\dot{q}^i\\
&= \frac{\partial L}{\partial q^i}\bar{\delta}q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}q^i\right) - \bar{\delta}q^i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\\
&= \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}q^i\right),
\end{aligned}$$

e substituindo na expressão (2.78)ficamos com

$$\begin{aligned}
\delta A &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\bar{\delta}q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}q^i\right)\right]dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left(L\delta t\right)\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right]\bar{\delta}q^i dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}q^i + L\delta t\right). &(2.93)
\end{aligned}$$

Está expressão pode ser rescrita por

$$\begin{aligned}
\delta A &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right]\bar{\delta}q^i dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\delta q^i - \dot{q}^i\delta t\right) + L\delta t\right]\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right]\bar{\delta}q^i dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\delta t + L\delta t\right]\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right]\bar{\delta}q^i dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right)\delta t\right], &(2.94)
\end{aligned}$$

onde definindo a função de Hamilton, ou hamiltoniana,

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L, \tag{2.95}$$

e os momentos canononicamente conjugados,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{2.96}$$

ficamos com

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right]\bar{\delta}q^i dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left[p_i\delta q^i - H\delta t\right]. \tag{2.97}$$

Podemos de forma conveniente definir

$$G \equiv p_i \delta q^i - H\delta t, \tag{2.98}$$

e escrever (2.97) sob a forma

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \bar{\delta} q^i dt + \int_{t_1}^{t_2} dG. \tag{2.99}$$

A função $G = G(t, q, \dot{q}, \delta q, \delta t)$ é denomina função geratriz das variações δt e δq. O principio de Weiss afirma que a variação a ação δA só possui contribuição nos termos de frontira, o que pode ser expresso por,

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dG, \tag{2.100}$$

indicando assim que o primeiro termo da expressão (2.99) deve ser identicamente nulo, assim nos conduzindo a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \bar{\delta} q^i dt = 0. \tag{2.101}$$

Pelo lema fundamental do cálculo variacional, que afirma:

Sendo $y(x)$ é uma função continua no intervalo $[a, b]$, e se

$$\int_a^b f(x)\, h(x)\, dx = 0 \tag{2.102}$$

para todo h definido no mesmo domínio e tal que $h(a) = h(b) = 0$, então $y(x) = 0$ para todo x pertencente ao intervalo $[a, b]$.

E que pode ser demonstrando por: sendo $h(x)$ qualquer, então ele pode ser particularmente

$$h(x) = \delta'(x - x_i) \tag{2.103}$$

para todo x_i pertencente ao intervalo $[a, b]$. Onde $\delta'(x - x_i)$ denota a função delta de Dirac. Com isso temos

$$\int_a^b f(x)\, h(x) = \int_a^b f(x)\, \delta(x - x_i) = y(x_i) = 0 \tag{2.104}$$

fazendo x_i variar em todo intervalo $[a, b]$, fica demostrado que $f(x_i) = 0$ para todo x_i pertencente ao intervalo $[a, b]$.

Com isso obtemos que

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0 \tag{2.105}$$

onde fica evidenciado tanto que as equações de Lagrange podem ser obtidas a partir do princípio de Weiss, como o princípio de Hamilton é um caso particular do princípio de Weiss quando as variações nos extremos são nulas.

Nesse capítulo fizemos uma breve revisão dos conceitos basicos de mecânica clássica, onde por uma tranformações de coordenada obtemos as equações de movimento de Lagrange, que vimos ser equivalente as equações de Newton. Depois nos fizemos valer do princípio de D'Alambert e mostramos que as equações de Lagrange também descrevem um sistema físico que esteja sujeito a vínculos holônomos. Durante essa construção deixamos clara a vantagem de se trabalhar com coordenadas generalizadas bem como vimos que a sua utilização pode reduzir a dimensão do sistema. Nesse sentido concluimos o nosso capítulo fazendo uma breve discussão sobre os princípios de Hamilton e Weiss onde demonstramos a equivalencia entre os princípios de D'Alamber e Hamilton bem como que o segundo é um caso particular do princípio de Weiss.

Referências

[1] LEECH, J. W. *Classical Mechanics*, Chapman and Hall, 1965.

[2] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*, 3º Edição, Addison Wesley, 2002.

[3] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*, 2º Edição, Livraria da Física, 2007.

[4] JOSÉ, J.; SALETAN, E. J. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge Un. Press, 1998.

[5] LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. 4º Edição, Dover Publications, 1986.

[6] SUDARSHAN, E. C. G. ; MUKUNDA, N. *Classical dynamics: A Modern Perspective,* John Wiley & Sons, 1974.

[7] Gelfand, I. M.; Fomin, S. V. *Calculus of variations*, Dover Publications, 2000.

3 Teoria de Hamilton-Jacobi: Sistemas Regulares

Neste capítulo versaremos sobre a teoria de Hamilton-Jacobi para sistemas regulares e para tal usaremos a abordagem de Carathéodory. Por sistemas regulares entendemos, em princípio, por um sistema sem vínculos, já em um próximo momento daremos maior precisão para a definição de sistema regular bem como diferenciá-la dos sistemas singulares.

A equação Hamilton-Jacobi, por sua vez, é comumente apresentada nos textos de mecânica clássica vinculada ao formalismo hamiltoniano e à teoria das transformações canônicas. Com o intuito de encontrar a solução para as equações de Hamilton, busca-se uma transformação canônica que gere uma hamiltoniana transformada identicamente nula, assim surgindo a equação de Hamilton-Jacobi. Desta forma, o formalismo de Hamilton-Jacobi pode muitas vezes ser confundido com um método de integração das equações de movimento.

Por sua vez, Carathéodory, usando a ideia de lagrangeanas equivalentes, obtém as equações de Hamilton-Jacobi de forma independente da abordagem Hamiltoniana. Essas lagrangeanas equivalentes, como veremos a seguir, diferenciam-se pela adição de uma função $S = S(q, t)$. Por outro lado, se nos apoiarmos no princípio de Hamilton, veremos que uma consequência natural da nossa lagrangeana modificada possuir um extremo é que S verifique a equação de Hamilton- Jacobi que, a saber, é uma equação diferencial parcial. Em seguida, mostraremos, por meio do método de Cauchy, que a solução da EDP de HJ pode ser obtida por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Toda essa abordagem de Carathéodory é conhecida como quadro completo, justamente por relacionar áreas da matemática que até então eram tidas como independentes: a teoria das equações diferencias ordinárias (EDO), a teoria das equações diferencias parciais (EDP) e o cálculo das variações.

3.1 Lagrangeanas Equivalentes

Embora sejamos capazes de construir uma relação entre a lagrangeana de um dado sistema físico e o conjunto de equações que regem a sua dinâmica, esta relação não é bijetiva. Uma lagrangeana determina univocamente a dinâmica do sistema, entretanto as equações de movimento do mesmo podem ser obtidas por uma família de lagrangeanas. É justamente por sermos capazes de, partindo de mais de uma legrangeana, descrever a dinâmica de um sistema que conseguimos definir a equivalência entre lagrangeanas.

Sejam L e $\bar{L}$ duas lagrangeanas distintas, estas serão consideradas equivalentes se conduzirem às mesmas equações de movimento. Em outras palavras, para que duas lagrangeanas sejam consideradas equivalentes, precisamos que a relação abaixo seja verificada

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \dot{q}^i \frac{\partial^i \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \ddot{q}^j \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0, \tag{3.1}$$

onde $\Lambda\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) = L - \bar{L}$. Com isso, o problema de determinar lagrangeanas equivalentes se reduz a encontrar um $\Lambda\left(t, q^i, \dot{q}^i\right)$ que verifique a relação acima. Entretanto, esta é uma equação polinomial nas derivadas de q^i, o que indica que os coeficientes desse polinômio devem ser nulos. Fazendo o coeficiente do último termo igual a zero,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0, \tag{3.2}$$

reduzimos a forma de Λ a

$$\Lambda = \dot{q}^i A_i\left(q^j, t\right) - B\left(q^j, t\right), \tag{3.3}$$

e percebemos que Λ é linear em $\dot{q}^i$ sendo A_i e B funções arbitrárias de q^i e t.

Substituindo (3.3) em (3.1) ficamos com:

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \frac{\partial A_j}{\partial q^i}\right) \dot{q}^j + \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q^i} = 0. \tag{3.4}$$

Visto que os coeficientes das derivadas de $\dot{q}^i$ são identicamente nulos, temos:

$$\frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \frac{\partial A_j}{\partial q^i} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q^i} = 0. \tag{3.6}$$

Analisando as igualdades, vemos que (3.5)implica a existência de uma função, digamos S, tal que

$$A_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}. \tag{3.7}$$

Assim substituindo (3.7) em (3.6),

$$B = \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{3.8}$$

Com isso podemos reescrever Λ como,

$$\Lambda\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) = \dot{q}^i \frac{\partial S}{\partial q^i} - \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{3.9}$$

e dessa forma a função $\bar{L}$ torna-se:

$$\bar{L}\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) = L\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) - \dot{q}^i \frac{\partial S}{\partial q^i} - \frac{\partial S}{\partial t} = L\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) - \frac{dS}{dt}. \tag{3.10}$$

Por outro lado, do ponto de vista variacional, a curva que extremiza a ação da lagrangeana original deve ser a mesma que extremiza a lagrangeana modificada, já que ambas as lagrangeanas nos conduzem às mesmas equações de movimento. Nos fazendo valer do princípio de Hamilton, isso pode ser notado se olharmos para a ação modificada

$$\bar{A} = \int dt \left[L\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) - \frac{dS}{dt}\right], \tag{3.11}$$

e calcularmos a variação entorno da trajetória física

$$\delta A = \delta \bar{A} + \delta S\left(t_1, q_{t_1}\right) - \delta S\left(t_2, q_{t_2}\right), \tag{3.12}$$

onde a variação de S é dada por

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q^i}\delta q^i. \tag{3.13}$$

Como a ação é calculada entre pontos fixos, o δq será identicamente nulo, implicando em $\delta S = 0$ e

$$\delta \bar{A} = \delta A. \tag{3.14}$$

Com isso demonstramos a nossa afirmação de que a curva que extremiza a ação da lagrangeana original deve ser a mesma que extremiza a lagrangeana modificada.

Por sua vez, podemos usar a função S para construir uma função lagrangeana $\bar{L}$ que seja identicamente nula para um dada curva ϕ^i, mas que seja positiva para qualquer outra curva q^i que pertença a uma vizinhança fechada. Com isso, nosso problema variacional será especificamente o de encontrar um mínimo.

Qualquer função S que seja continuamente diferenciavel nos conduzirá a um problema de lagrageana equivalente. Porem, uma escolha apropriada de S pode transformar o problema de encontrar um minimo para (3.11) facilmente realizado. Esse será o caso se $S\left(q^i, t\right)$ for tal que para cada q^i e t, $\bar{L}\left(q^i, \dot{q}^i, t\right)$ satisfaça a condição de ser positiva para todo $\dot{q}^i$

$$\bar{L}\left(t, q^i, \dot{q}^i\right) > 0, \tag{3.15}$$

mas admita um ϕ^i que a anule

$$\bar{L}\left(t, q^i, \phi^i\right) = 0. \tag{3.16}$$

Desta forma a solução do nosso problema variacional é dada pelo sistema de EDO

$$\dot{q}^j = \phi^j \left(t, q^j\right) \tag{3.17}$$

serão mínimos do nosso problema variacional.

3.2 Equação de Hamilton-Jacobi

Partindo da expressão

$$\bar{L} = L - \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{3.18}$$

sabemos que se S verifica as relações (3.16) e (3.15) $\bar{L}$ será um mínimo quando calculado sobre $\phi(t)$, e com isso todas as suas primeiras derivadas deverão se anular. Desta forma temos

$$\left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i}\right]_{\dot{q}^i=\phi^i} = 0 \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(L - \frac{dS}{dt}\right)\right]_{\dot{q}^i=\phi^i} &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\frac{dS}{dt}\right]_{\dot{q}^i=\phi^i} \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\dot{q}^j\frac{\partial S}{\partial q^j}\right) - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial t}\right]_{\dot{q}^i=\phi^i} \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta_i^j\frac{\partial S}{\partial q^j} - \dot{q}^j\frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial t}\right]_{\dot{q}^i=\phi^i}.
\end{aligned}$$

que leva a

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{3.20}$$

sendo $S = S\left(t, q^i\right)$ uma função apenas de t e q^i. Aqui, definimos o nosso momento canônico como

$$p_i \equiv \frac{\partial S}{\partial q^i}, \tag{3.21}$$

e assim reescrevermos a equação (3.18) em função do mesmo,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_i\dot{q}^i - L\left(t, q^j, \dot{q}^i\right) = 0. \tag{3.22}$$

Deste modo, se conseguirmos eliminar a dependência em $\dot{q}^i$ obteremos uma equação diferencial parcial para S.

Até aqui o formalismo que construímos é geral e vale para qualquer sistema. Entretanto, por razões didáticas, em um primeiro momento faremos uma forte imposição e nos restringiremos a determinados sistemas físicos, que a posteriori, vamos generalizar. Desta forma, é conveniente que façamos uma breve discussão sobre dois tipos de sistemos físicos: os sistemas regulares e os sistemas singulares.

Partindo da igualdade

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{3.23}$$

onde escrevemos o nosso momento canônico como uma função das posições e velocidades. Desta forma, se conseguirmos inverter essa relação e escrever as velocidades como funções das posições e momentos, vamos ter eliminado a dependência das velocidades na equação (3.22) e teremos condições de construir uma equação diferencial parcial para S. Porém, para que sejamos capazes de inverter tais expressões precisamos que a relação abaixo seja verificada:

$$\det[W] \neq 0, \tag{3.24}$$

onde

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{3.25}$$

é conhecida como matriz Hessiana. Sistemas que verificam a condição Hessiana (3.24) são chamados de Sistemas Regulares. Por outro lado, sistemas que não tem essa condição verificada, são chamados de Sistemas Singulares.

Se a condição Hessiana for válida, ou seja, se estiver tratando de sistemas regulares, seremos capazes de inverter a relação (26) e obtermos uma expressão para as velocidades como função das coordenadas e dos momentos $\dot{q}^i = \eta^i \left(t, q^j, p_j\right)$ e com isso reescrevermos a equação (3.23) como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_i \eta^i - L\left(t, q^j, \eta^j\right) = 0, \tag{3.26}$$

que é a nossa equação diferencial parcial para S. Definindo uma função Hamiltoniana canônica por

$$H\left(t, q^i, p_i\right) \equiv p_i \eta^i - L\left(t, q^j, \eta^j\right), \tag{3.27}$$

obtemos a equação

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q^i, p_i\right) = 0 \tag{3.28}$$

que vem a ser uma equação diferencial parcial, conhecida como equação de Hamilton-Jacobi.

3.3 Equações de Características

Vamos utilizar o método das equações características para encontrar uma relação entre a equação de HJ, que é uma equação diferencial parcial, com um sistema de equação diferenciais ordinárias, que veremos ser as equações de Hamilton. Para tal, vamos tomar uma curva $q = q(t)$ e calcular os valores de S ao longo desta curva por meio de EDOs que determinem a evolução S e de suas derivadas. Veremos que, no geral, nesse sistema de EDOs haverão derivadas de segunda ordem da função S. Porém, por meio de uma escolha útil da curva, conseguiremos eliminar as derivadas de segunda ordem, e o sistema de EDOs que obteremos será de primeira ordem. Tais equações serão chamadas de Equações Características.

Com o intuito de utilizar o método das Características vamos, denotar

$$t = q^0,$$

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial t},$$

e com isso vamos escrever (3.28) da forma

$$H'\left(q^\alpha, p_\alpha\right) \equiv p_0 + H\left(q^\alpha, p_i\right), \tag{3.29}$$

com $\alpha = 0, 1, ...n$.

Derivando p_i com relação ao parâmetro t

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^j, \tag{3.30}$$

verificamos que a evolução de p_i depende de derivadas segundas de S com relação a q^i.

Derivando H' em relação a q^i temos,

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial H'}{\partial q^i} = 0, \tag{3.31}$$

fazendo uma escolha particular pra q^i vemos que é útil impor que este verifique a relação

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \tag{3.32}$$

pois isto irá nos conduzir a um interessante resultado para a evolução do momentos canônicos. Para tal vamos reescrever (3.31) na forma:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} = -\frac{\partial H'}{\partial q^i}. \tag{3.33}$$

Utilizando (3.30) e (3.32) obtemos:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q^i}. \tag{3.34}$$

Derivando S com relação a t:

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial p_i}\dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t} = p_i\dot{q}^i - H. \tag{3.35}$$

Desta forma as equações

$$dp_i = -\frac{\partial H'}{\partial q^i}dt, \tag{3.36}$$

$$dS = \left[p_i\dot{q}^i - H\right]dt, \tag{3.37}$$

$$dq^i = \frac{\partial H'}{\partial p_i}dt, \tag{3.38}$$

consistem em um sistema de $2n+1$ EDO que são conhecidas como equações características.

Como nenhuma das equações características (3.36) ,(3.37) ,(3.38) dependem explicitamente de S, a sua determinação se reduz a uma equação integral após a resolução do sistema:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q^i}, \tag{3.39}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \tag{3.40}$$

que são justamente as equações canônicas de Hamilton. Em outras palavras, resolvendo as equações Hamilton a função S é obtida por mera integração de (3.37).

Nos dedicamos nesse capítulo a fazer uma sucinta introdução ao formalismo de Hamilton-Jacobi. Partimos da definição das lagrangeanas equivalente introduzidas por Carathéodory e vimos como elas podem nos ajudar a buscar uma curva que deixe o nosso sistema automaticamente integravel. Porem foi olhando para a função S que chegamos a equação de Hamilton-Jacobi e vimos que a mesma é condição necessaria para que o nosso problema variacional tenha solução. Sendo a equação de Hamilton-Jacobi uma equação diferencial parcial utilizamos o método das caracteristicas para encontrar um sistema de equações diferenciais ordinarias associadas a ela. Assim vimos como o calculo das variações, a teoria das EDPs e a teoria das EDOs estão relacionadas.

Referências

[1] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, P.J. Pompeia, *Formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory,* Revista Brasileira de Ensino de Física, **29**, 3 (2007).

[2] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, P.J. Pompeia, *Formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory. Parte 2: Sistemas Singulares,* Revista Brasileira de Ensino de Física, **30**, 3 (2008)

[3] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Two dimensional BF gravity: A Hamilton- Jacobi analysis*, accepted in J. Math. Phys. **53**, 102901 (2012)

[4] N. T. Maia, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Three-dimensional Background Field Gravity: A Hamilton-Jacobi analysis,* Class.Quant.Grav. ***32,*** no.18, 185013 (2015)

[5] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Non-Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism*, Ann. Phys. **323**, 3137 (2008)

[6] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism,* J. Math. Phys. **55**, 112901 (2014)

[7] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcáarcel, G. R. Zambrano, *Topologically Massive Yang-Mills field: A Hamilton-Jacobi approach*, J. Math. Phys. **55**, 042902 (2014)

[8] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, American Mathematical Society; 3rd edition (1999)

[9] D. R. Snow, A Sufficiency Technique in Calculus of Variation Using Caratheodory's Equivalent Problems Approach, J. Math. Anal. App. **51** 129-140 (1975)
D. R. Snow, Caratheodory-Hamilton-Jacobi Theory in Optimal Control, J. Math. Anal. App. **17** 99-118 (1967)

[10] L. C. Evans, *Partial Differential Equation*, Amer. Math. Soc (1998),

4 Teoria de Hamilton-Jacobi: Sistemas Singulares

No capítulo anterior definimos dois tipos de sistemas: os regulares e os singulares.Vimos que os sistemas regulares são aqueles que verificam a condição Hessiana, ou seja, possuem o determinante da matriz de mesmo nome não nulo, e nos dedicamos a estudar esse tipo de sistema. Por outro lado, os sistemas singulares (também chamados de vinculados ou não-Hessianos), são aqueles que não verificam tal condição e com isso o determinante da matriz Hessiana é identicamente nulo. Entretanto, foi no caminho para obtermos a equação de Hamilton-Jacobi que percebemos a necessidade da condição Hessiana, para sermos capazes de escrever as velocidades em função das posições e momentos, com isso, obtermos uma equação diferencial parcial para S. Os sistemas vinculados possuem tal nome devido a existência de vínculos entre suas variáveis canônicas. Porém, verifica-se que diversos sistemas físicos de interesse violam a condição Hessiana, constituindo, portanto, os sistemas vinculados. Como exemplo de sistemas que possuem uma matriz Hessiana singular temos o campo eletromagnético e a partícula livre em uma superfície. Desta forma, tais sistemas não poderiam ser negligenciados dos estudos. Um método para tratar esses tipos de sistemas foi desenvolvido primeiramente por Dirac [1], que juntamente com os trabalhos de Bergmann [2], construíram uma mecanismo para tratar sistemas não Hessianos através do formalismo Hamiltoniano.

Contudo, neste capítulo, mostraremos uma abordagem paralela ao método de Dirac para estudar os sistemas não Hessianos. Tal construção, que tem como ponto de partida o uso das lagrangeanas equivalentes de Carathéodory, consiste de uma generalização do formalismo de Hamilton-Jacobi que, mesmo quando a condição Hessiana não for verificada, nos permitirá construir uma Hamitoniana bem definida na região onde os vínculos forem satisfeitos. Essa construção nos levará de maneira natural a um conjunto de equações diferenciais parciais que devem ser satisfeitas pelos vínculos formando um sistema de equações que o sistema não hessiano deverá verificar. Esse sistema de equações será o sistema de Hamilton-Jacobi, e estará para a teoria de sistemas singulares assim como a EDP de HJ está para os sistemas regulares. Na sequência, mostraremos como a teoria das equações diferenciais parciais está intimamente ligada à teoria das equações diferenciais ordinárias por meio do método das características. Este método irá nos conduzir às curvas características, que por sua vez nos mostrará a dependência da mesma com os vínculos da teoria.

4.1 Sistemas Não Hessianos

Na primeira parte do nosso trabalho admitimos a existência de duas lagraneanas distintas que nos conduzem às mesmas equações de movimento, e percebemos que para isso ocorrer elas devem diferir entre si por uma derivada total de uma função do tipo $S = S(q, t)$. Tomando uma análise sob o ponto de vista variacional fica implícito que se ambas lagrangeanas nos conduzem às mesmas equações de movimento, a curva que extremiza a ação de cada uma delas deve coincidir, sendo então um mínimo do funcional. Tal propriedade nos impõe condições sobre essa função, dentre elas temos que a função deve ser a solução de equação diferencial

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}^i - L = 0, \tag{4.1}$$

onde $p_i \equiv \dfrac{\partial S}{\partial q^i}$. A construção da função S, as condições que repousam sobre ela e a necessidade de verificar a equação (4.1) foram obtidas sem se fazer qualquer imposição extra, portanto elas continuam válidas para os sistemas singulares. Porém, reside justamente aqui a distinção entre os sistemas regulares e os que vamos estudar nesse capítulo. Como para os sistemas regulares a condição Hessiana é verificada, conseguimos inverter a relação:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{4.2}$$

e com isso escrever $\dot{q}^i = \dot{\eta}^i \left(t, q^j, p_j\right)$ e, assim, obtermos uma EDP para a função S, que chamamos de equação de Hamilton-Jacobi. A ausência da condição Hessiana nos sistemas singulares, a princípio, nos impede de inverter tal relação, e com isso, de chegarmos à equação de Hamilton-Jacobi. Porém, esse problema pode ser contornado, como veremos a seguir.

Com o intuito de estudar sistemas que violem a condição Hessiana, vamos supor que a nossa lagrangeana seja não Hessiana, ou seja,

$$\det W = det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0. \tag{4.3}$$

Contudo a matriz Hessiana é simétrica e com isso diagonalizável. Então vamos supor, que após ser diagonalizada, ela possua duas submatrizes: uma com m autovalores não-nulos e outra com k autovalores nulos, tal que $k + m = n$, é a dimensão do nosso espaço de configuração. Com isso existirá uma submatriz $m \times m$ que terá determinante não nulo e, portanto, será inversível. Desta forma, dizemos que a matriz W tem posto m. Assim, para a parte inversível da matriz, podemos inverter as relações (4.2) e escrever as velocidades em função das posições e momentos

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \rightarrow \dot{q}^a = \eta^a \left(q^i, p_b\right), \tag{4.4}$$

onde $a, b = 1, ..., m$. Para o conjunto de coordenadas que pertencem ao setor não inversível da matriz Hessiana, não será possível escrever as velocidades como função as posições e dos momentos. Porém, a relação

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}, \tag{4.5}$$

com $z = 1, ..., k$, continua válida. Desta forma consideraremos as equações para as velocidades não inversíveis como equações de vínculo da teoria. Assim, vamos definir

$$H_z \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}, \tag{4.6}$$

e com isso escrever as equações de vínculo por

$$H_z' \equiv p_z - H_z = 0. \tag{4.7}$$

Percebendo essa distinção entre as velocidades inversíveis e as não inversíveis podemos reescrever a equação (4.1) da forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_a \eta^a \left(q^i, p_b\right) + p_z \dot{q}^z - L = 0. \tag{4.8}$$

Com isso, escrevendo

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial t} \ e \tag{4.9}$$

$$H_0 \equiv p_i \dot{q}^i - L, \tag{4.10}$$

ficamos com

$$H_0' = p_0 + H_0 = 0. \tag{4.11}$$

Contudo, aparentemente ainda persiste um problema, que é justamente o fato de Hamiltoniana canônica ser dada por

$$H_0 \equiv p_a \eta^a \left(q^i, p_b\right) + p_z \dot{q}^z - L, \tag{4.12}$$

e com isso depender das velocidades não inversíveis. Porém esse problema só persiste aparentemente, em uma análise um pouco mais criteriosa vemos que essa dependência não existe. Para isso vamos tomar a sua derivada com relação a $\dot{q}^z$

$$\frac{\partial H_0}{\partial q^z} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^z}\left(p_a\eta^a\left(q^i, p_b\right) + p_z\dot{q}^z - L\right) = \dot{q}^z - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z} = H'_z = 0, \tag{4.13}$$

e com isso conseguimos mostrar que, se as equações de vínculo forem respeitadas, a Hamiltoniana canônica não dependerá das velocidades não inversíveis. Isso quer dizer que, na região onde os vínculos forem satisfeitos, a função Hamiltoniana será bem definida.

Desta forma, temos o sistema de equações

$$H'_0 \equiv p_0 + H_0\left(q^i, p_a\right), \tag{4.14}$$

$$H'_z \equiv p_z + H_z\left(q^i, p_a\right), \tag{4.15}$$

que chamaremos de sistema de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi, ou simplesmente sistema de EDP de HJ. Essas equações podem ser escritas de forma mais compacta ,

$$H'_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha\left(q^\alpha, p_a\right), \quad \alpha = 0, m+1, ..k. \tag{4.16}$$

4.2 Equações Características

Da mesma forma que para os sistemas regulares, usaremos o método de Cauchy para obter as expressões para as curvas características do nosso sistema de EDP. Com o objetivo de uma melhor análise, vamos partir de uma função H'_α mais geral

$$H'_\alpha(t^\alpha, q^a, p_{\alpha,} p_a) = 0, \tag{4.17}$$

para, no momento apropriado, recuperar a forma original da mesma. Começaremos por derivar H'_0 em relação a p_i

$$\begin{aligned}\frac{\partial H'_0}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p_a\dot{q}^a + p_z\dot{q}^z - L\right) \\ &= \delta^i_a\dot{q}^a + p_a\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial p_i} + \frac{\partial p_z}{\partial p_i}\dot{q}^z - \frac{\partial L}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial p_i},\end{aligned} \tag{4.18}$$

em que, da definição de momento canônico e da forma dos vínculos, temos:

$$\delta^i_a\dot{q}^i = \frac{\partial H'_0}{\partial p_i} + \frac{\partial H_z}{\partial p_i}\dot{q}^z. \tag{4.19}$$

Sendo $\dot{q}^0 = 0$, podemos reescrever a equação (4.19) sob a forma

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H_0'}{\partial p_a}\dot{q}^0 + \frac{\partial H_z'}{\partial p_a}\dot{q}^z, \tag{4.20}$$

e, com isso, apresenta-la de forma mais compacta por:

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}. \tag{4.21}$$

Essa equação é a nossa primeira equação característica e nos mostra sobre a evolução dinâmica de q^i. Dando seguimento à nossa análise, tomando a derivada de H_α'em relação a q^i,

$$\begin{aligned} \frac{dH_\alpha'}{dq^i} &= \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q^i} + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial q^i} + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^i} \\ &= \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q^i} + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^\beta} + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^a}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

obtemos

$$\frac{\partial H_\alpha'}{\partial q^i} = -\frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^\beta} - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^a} = 0, \tag{4.23}$$

e da definição de momento canônico, temos

$$dp_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^a}dq^a + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^\alpha}dq^\alpha. \tag{4.24}$$

Agora, trabalhando com (4.23) e (4.24),

$$\begin{aligned} dp_i + \frac{\partial H_\alpha'}{\partial q^i}dq^\alpha &= \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^a}dq^a + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^\alpha}dq^\alpha - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^\beta}dq^\alpha - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^a}dq^\alpha \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^a}\left(dq^a - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_a}dq^\alpha\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^\alpha}\left(dq^\alpha - \frac{\partial H_\alpha'}{\partial p_\beta}dq^\alpha\right), \end{aligned} \tag{4.25}$$

e, tendo em vista agora a forma original do nosso H_α' (4.16), juntamente com a equação (4.21), vemos que

$$dp_i = -\frac{\partial H_\alpha'}{\partial q^i}dq^\alpha. \tag{4.26}$$

Essa, portanto, é a nossa segunda equação característica e rege a dinâmica da variável p_i. Diferenciando a função S em relação a t, temos

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q^a}\dot{q}^a + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha, \tag{4.27}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{dS}{dt} = p_a \dot{q}^a - H_\alpha \dot{q}^\alpha, \tag{4.28}$$

e vem a ser a terceira equação característica que descreve a evolução de S.

Desta forma o conjunto de equações

$$dp_a = -\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^a} dq^\alpha, \tag{4.29}$$

$$dS = \left[p_a \frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_a} + H_\alpha \right] dq^\alpha, \tag{4.30}$$

$$dq^a = \frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_a} dq^\alpha, \tag{4.31}$$

serão chamadas de Equações Características do sistema de HJ.

4.3 Integrabilidade

O uso do formalismo de Hamilton-Jacobi nos conduziu de forma natural a um sistema de EDP e o uso do método das características, por sua vez, construiu um conjunto de EDO equivalente. A análise da integrabilidade de um nos levará a métodos de resolução do outro. Começaremos a nossa investigação buscando as condições necessárias e suficientes para a solução completa do sistemas de EDP, com isso assegurando a integrabilidade de suas equações características.

Para tal vamos supor que:

$$q^a = q^a\left(t^\alpha\right), \; p_a = p_a\left(t^\alpha\right), \tag{4.32}$$

sejam soluções das Equações Características. Desta forma gostaríamos de saber sob quais condições o nosso sistema de EDP será integrável, ou seja, possuirá uma solução do tipo:

$$S = S\left(t^\alpha, q^a(t^\alpha)\right). \tag{4.33}$$

Para isso, derivaremos nossa função S com relação a t^α,

$$\frac{dS}{dt^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial S}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial t^\alpha} = p_\alpha \frac{\partial t^\beta}{\partial t^\alpha} + p_a \frac{\partial q^a}{\partial t^\alpha}, \tag{4.34}$$

que pode ser escrita de forma mais compacta por

$$\frac{dS}{dt^\alpha} = p_{i'} \frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}, \tag{4.35}$$

com $i' = 0, 1, ..., n$. Derivando mais uma vez,

$$\frac{\partial^2 S}{dt^\alpha dt^\beta} = \frac{dp_{i'}}{dt^\beta}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha} + p_{i'}\frac{d^2 q^i}{dt^\beta dt^\alpha}, \tag{4.36}$$

por uma análise de simetria de (4.36),percebemos que o lado esquerdo da equação bem como o segundo termo do lado direito são simetricos, o que implica em

$$\frac{dp_{i'}}{dt^\beta}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha} - \frac{dp_{i'}}{dt}\frac{dq^{i'}}{dt^\beta} = 0. \tag{4.37}$$

Definindo o Parêntese de Lagrange como

$$\left(t^\alpha, t^\beta\right) = \frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}\frac{dp_{i'}}{dt^\beta} - \frac{dq^{i'}}{dt^\beta}\frac{\partial dp_{i'}}{dt^\alpha}, \tag{4.38}$$

temos que a condição necessária para a existência de uma solução completa para S é

$$\left(t^\alpha, t^\beta\right) = 0. \tag{4.39}$$

Contudo, ainda desejamos saber se essa é a única condição que precisa ser verificada para obtermos uma solução completa de (4.33). Em outras palavras, o que investigaremos agora são quais as condições suficientes para integrabilidade do sistema. Para isso, vamos considerar um conjunto de funções (4.32) que verifiquem a condição

$$\frac{dp_{i'}}{dt^\beta}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha} - \frac{dp_{i'}}{dt}\frac{dq^{i'}}{dt^\beta} = 0, \tag{4.40}$$

a qual é equivalente a

$$\frac{d}{dt^\alpha}\left(p_{i'}\frac{dq^{i'}}{dt^\beta}\right) = \frac{d}{dt^\beta}\left(p_{i'}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}\right). \tag{4.41}$$

Com isso mostramos que deve existir uma função $\sigma(t^\beta)$ tal que

$$\frac{d\sigma}{dt^\alpha} = p_{i'}\frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}. \tag{4.42}$$

Como as funções $q^i = q^i\left(t^\alpha\right)$ são inversíveis, podemos escrever

$$t^\alpha = t^\alpha\left(q^{i'}\right), \tag{4.43}$$

e por sua vez

$$S\left(t^\alpha, q^{i'}\right) \equiv \sigma\left(t^\alpha\left(q^{i'}\right), q^{i'}\right). \tag{4.44}$$

Desta forma, derivando σ com relação a t^α,

$$\frac{d\sigma}{dt^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q^{i'}} \frac{dq^{i'}}{dt^\alpha} \tag{4.45}$$

e, comparando nosso resultado com a equação (4.42), obtemos

$$p_{i'} = \frac{\partial S}{\partial q^{i'}}. \tag{4.46}$$

Derivando (4.46) com relação a t^α

$$\frac{\partial p_{i'}}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 S}{\partial q^{i'} \partial t^\alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^{i'} \partial q^{j'}} \frac{\partial q^{j'}}{\partial t^\alpha} = 0, \tag{4.47}$$

e usando as equações características, temos

$$\frac{\partial H'_\alpha}{\partial t^z} - \frac{\partial^2 S}{\partial q^{i'} \partial t^{j'}} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^{i'} \partial q^{j'}} \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^z} = 0, \tag{4.48}$$

resultando em

$$\frac{d}{dt^\alpha} H'_\alpha \left(t^\alpha, q^a, p_\alpha, p_a\right) = 0. \tag{4.49}$$

Com isso, podemos afirmar que

$$H'_\alpha \left(t^\alpha, q^a, p_\alpha, p_a\right) = constante, \tag{4.50}$$

que podem ser incluídos na função e expressos sob a forma

$$H'_\alpha \left(t^\alpha, q^a, p_\alpha, p_a\right) = 0. \tag{4.51}$$

Com isso, mostramos que a condição (4.39) é necessária e suficiente para que o sistema de equações de Hamilton-Jacobi seja integrável. Porém, para obtermos essa condição nos fizemos valer das soluções das equação características, o que torna a condição pouco útil. Desta forma, buscando uma melhor maneira de expressar as condições de integrabilidade, veremos que isso pode ser feito por meio das equações dos vínculos. Para isso, vamo definir os parênteses de Poisson entre duas funções F e G definidas sobre o espaço de fase por

$$\left\{F, H'_\beta\right\} = \frac{\partial F}{\partial q^{i'}} \frac{\partial G}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial G}{\partial q^{i'}} \frac{\partial F}{\partial p_{i'}}, \tag{4.52}$$

e substituir as equações características

$$dq^{i'} = \frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_{i'}} dt^\alpha, \tag{4.53}$$

$$dp_{i'} = -\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^{i'}} dt^\alpha, \tag{4.54}$$

na expressão dos parênteses de Lagrange

$$\left(t^\alpha, t^\beta\right) = \frac{dq^{i'}}{dt^\alpha}\frac{dp_{i'}}{dt^\beta} - \frac{dq^{i'}}{dt^\beta}\frac{\partial dp}{dt^\alpha} = \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^{i'}}\frac{\partial H'_\beta}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial H'_\beta}{\partial q^{i'}}\frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_{i'}} = \left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\}. \tag{4.55}$$

Com isso, reescrevemos as condições de integrabilidade por meio dos parênteses de Poisson dos vínculos da teoria. Então, nossa condição de integrabilidade será

$$\left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\} = 0. \tag{4.56}$$

Os vínculos que verificam a condição de integrabilidade serão chamados de involutivos. Vemos que, se definirmos o chamado diferencial fundamental

$$dF = \left\{F, H'_\alpha\right\} dt^\alpha \tag{4.57}$$

podemos, com o uso dos de parênteses de Poisson, obter as equações características calculando o diferencial fundamental de suas respectivas variáveis canônicas

$$dq^i = \left\{q^i, H'_\alpha\right\} = \left[\frac{\partial q^i}{\partial q^j}\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_j} - \frac{\partial q^j}{\partial p_j}\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^j}\right] dt^\alpha = \frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_i} dt^\alpha, \tag{4.58}$$

$$dp_i = \{p_i, H'_\alpha\} = \left[\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^j}\right] dt^\alpha = -\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^i} dt^\alpha, \tag{4.59}$$

bem como obter

$$dH'_\alpha = \left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\} = \left[\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^{i'}}\frac{\partial H'_\beta}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial H'_\beta}{\partial q^{i'}}\frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_{i'}}\right] dt^\alpha = 0, \tag{4.60}$$

o que nos permite escrever a condição de integrabilidade como:

$$dH'_\alpha = 0. \tag{4.61}$$

Tanto a condição dos parênteses de Lagrange das coordenadas, como a dos parênteses de Poisson dos vínculos e do diferencial fundamental são equivalente para determinar a integrabilidade do sistema. A condição de integrabilidade posta sobre a forma dos parênteses de Poisson de vínculos (4.56) pode ser generalizada por

$$\left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\} = C^\gamma_{\alpha\beta} H'_\gamma. \tag{4.62}$$

Omitiremos a demonstração de tal generalização, mas um leitor interessado no assunto pode encontrá-la em [10].

4.4 Parênteses Generalizados

Na seção passada estudamos as condições necessárias para integrabilidade das equações bem como conseguimos expressá-las de forma conveniente. Entretanto, não temos qualquer motivação para acreditar que todos os sistemas físicos devem verificar tal condição. E, de fato, se tentarmos aplicar o método estudado veremos que diversos sistemas físicos de interesse violam a condição de integrabilidade, o que configura um problema para a análise da integrabilidade desses sistemas. Esse problema pode ser contornado com o uso do parênteses generalizados e da inclusão de novos vínculos à teoria.

Para investigar melhor a estrutura dos parênteses generalizados, bem como fazer uma análise mais completa da integrabilidade do sistemas, vamos tomar como ponto de partida o diferencial fundamental

$$dH'_\alpha = \left\{H'_\alpha, H'_\beta\right\} dt, \tag{4.63}$$

que pode ser reescrito sobre a forma

$$dH'_\alpha = \left\{H'_\alpha, H'_0\right\} dt + \left\{H'_\alpha, H'_z\right\} dt^z = 0 \tag{4.64}$$

onde distinguimos a variável tempo dos outros parâmetros do sistema. Nesse momento definiremos uma matriz antissimétrica formada pelos parênteses de Poisson do vínculos

$$M_{xz} \equiv \left\{H'_x, H'_z\right\}, \tag{4.65}$$

o que permitir que escrever (4.64) por

$$M_{xz} dt^z = -\left\{H'_\alpha, H'_0\right\} dt^0. \tag{4.66}$$

Dizemos que dois vínculos estão em involução caso a matriz M_{xz} seja nula. Por outro lado, caso essa condição não se verifique afirmaremos que esses vínculos não estão em involução, ou simplesmente, que são não involutivos. Portanto, se todos os nossos vínculos forem não involutivos, a matriz M_{xz} será regular, e com isso inversível. Desta forma podemos escrever

$$dt^z = -\left(M^{xz}\right)^{-1} \left\{H'_x, H'_0\right\} dt. \tag{4.67}$$

Substituindo esse resultado na expressão da evolução de H'_α

$$dH'_\alpha = \left\{H'_\alpha, H'_0\right\} dt - \left\{H'_\alpha, H'_z\right\} dt^z = \left[\left\{H'_\alpha, H'_0\right\} - \left\{H'_\alpha, H'_z\right\} \left(M^{xz}\right)^{-1} \left\{H'_x, H'_\alpha\right\}\right] dt, \tag{4.68}$$

definimos os parênteses generalizados por

$$\{F, G\}^* = \Big[\{F, G\} - \{F, H'_z\} (M^{xz})^{-1} \{H'_x, G\}\Big] dt. \tag{4.69}$$

Assim a equação de evolução pode ser reescrita por meio dos parênteses generalizados da forma

$$dF = \{F, H'_\alpha\}^* dt, \tag{4.70}$$

e com isso vemos que todos os vínculos estarão em concordância com as condições de integrabilidade.

Porém, se apenas partes dos vínculos forem não involutivos não seremos capazes de inverter a matriz M_{xz}, com isso, impossibilitando a aplicação de tal método. Contudo, iremos nos fazer valer do fato de parte dos vínculos serem não involutivos, e com isso, mesmo que a matriz M_{xz} seja não nula, ela terá posto diferente de zero. Assim, seremos capazes de encontrar uma submatriz de M_{xz} que seja inversível. Para uma melhor análise sob este ponto de vista vamos escrever a equação (4.66) por

$$M_{x\bar{a}} dt^{\bar{a}} + M_{x\bar{z}} dt^{z} = - \{H'_x, H'_0\} dt, \tag{4.71}$$

onde $\bar{a} = 1, .., r$ são os r vínculos não-involutivos e $\bar{z} = r + 1, ..., k$ são os (k-r) vínculos involutivos. Separando a equação em duas, uma para cada tipo de vínculo,

$$M_{\bar{c}\bar{a}} dt^{\bar{a}} + M_{\bar{c}\bar{z}} dt^{\bar{z}} = - \{H'_{\bar{c}}, H'_0\} dt, \tag{4.72}$$

$$M_{\bar{x}\bar{a}} dt^{\bar{a}} + M_{\bar{x}\bar{z}} dt^{\bar{z}} = - \{H'_{\bar{x}}, H'_0\} dt, \tag{4.73}$$

isolando o primeiro termo em (4.72)

$$M_{\bar{c}\bar{a}} dt^{\bar{a}} = - \{H'_{\bar{c}}, H'_0\} dt - \{H'_{\bar{c}}, H'_{\bar{z}}\} dt^{\bar{z}} = - \{H'_{\bar{c}}, H'_{\bar{\theta}}\} dt^{\bar{\theta}}, \tag{4.74}$$

com $\bar{\theta} = 0, r + 1, ..., k$. Então, como a matriz formada pelos vínculos não involutivos é inversível, temos

$$dt^{\bar{a}} = - \left(M^{\bar{a}\bar{c}}\right)^{-1} \{H'_{\bar{c}}, H'_{\bar{\theta}}\} dt^{\bar{\theta}}. \tag{4.75}$$

Desta forma, podemos escrever expressão para o diferencial fundamental como

$$\begin{aligned} dF &= \{F, H'_{\bar{a}}\} \, dt^{\bar{a}} + \{F, H'_{\bar{\theta}}\} \, dt^{\bar{\theta}}, \\ &= \{F, H'_0\} \, dt^{\bar{\theta}} - \{F, H'_{\bar{a}}\} \left(M^{\bar{a}\bar{c}}\right)^{-1} \{H'_{\bar{c}}, H'_{\bar{\theta}}\} \, dt^{\bar{\theta}}, \\ &= \{F, H'_{\bar{\theta}}\}^{*} \, dt^{\bar{\theta}}, \end{aligned} \tag{4.76}$$

onde temos

$$\{F, G\}^{*} \equiv \{F, G\} - \{F, H'_{\bar{a}}\} \left(M^{\bar{a}\bar{b}}\right)^{-1} \{H'_{\bar{b}}, G\} \,. \tag{4.77}$$

Assim, o que fizemos foi eliminar as r variaveis independentes $t^{\bar{a}}$, e mostrar que a dinâmica do sistema só deve depender das $(k - r) + 1$ variaveis $t^{\bar{\theta}}$ que compõem o subconjunto irregular dos vínculos não-involutivos.

Retornando para a equação (4.72), escrita sobre a forma

$$\{H'_{\bar{c}}, H'_{\bar{a}}\} \, dt^{\bar{a}} + \{H'_{\bar{c}}, H'_{\bar{\theta}}\} \, dt^{\bar{\theta}} = 0, \tag{4.78}$$

podemos substituir na mesma a expressão para $dt^{\bar{a}}$(4.75) de onde obtemos

$$\{H'_{\bar{c}}, H'_{\bar{\theta}}\}^{*} \, dt^{\bar{\theta}} = 0 \tag{4.79}$$

que mostra que vínculos $H'_{\bar{c}}$ também deve verificar a condição de integrabilidade $dH'_{\bar{c}} = 0$ para os novos parênteses generalizados.

4.5 Formalismo Simplético e Transformações Canônicas

Nessa seção nos dedicaremos a estabelecer uma relação entre as transformações canônicas e as de gauge. Para tal iremos introduzir o formalismo simpletico bem como mostrar como as condições de integrabilidade de Frobenius pode ser escrita atravez do mesmo.

Com esse objetivo podemos partir do problema varicional ,

$$A \equiv \int_{t_0}^{t_1} L\left(t\right) dt, \tag{4.80}$$

para definir a 1-forma fundamental

$$\Theta = L(t) dt. \tag{4.81}$$

Utilizando a segunda equação característica (4.30), que define a 1-forma diferencial,

$$\Theta_c \equiv p_a dq^a + p_\alpha dt^\alpha - H'_\alpha dt^\alpha, \tag{4.82}$$

podemos, por diferenciação, obter a 2-forma $\omega \equiv -d\Theta_c$. Com isso

$$\omega = dq^a \wedge dp_a + dt^\alpha \wedge dp_\alpha + dH'_\alpha \wedge dt^\alpha. \tag{4.83}$$

Essa forma simplética pode ser separada em dois termos, o primeiro $\omega_p = dq^a \wedge dp_a$ será chamado de principal, e o segundo $a = dt^\alpha \wedge dp_\alpha + dH'_\alpha \wedge dt^\alpha$ vai conter as informações sobre a estrutura de vínculos. Por outro lado a equação (**??**) nos indica que $dH'_\alpha = 0$, com isso o segundo termo se reduz a

$$a = dt^\alpha \wedge dp_\alpha = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^\alpha dt^\beta}\right) dt^\alpha \wedge dt^\beta. \tag{4.84}$$

Devido a simetria em α e β nas derivadas parciais e antissimetria do produto exterior a equação acima (4.84) torna-se identicamente nula. Desta forma, assumir a integrabilidade implica na degenerescencia da forma simpletica canônica $\omega = \omega_p + a$. Com isso, ao aplicarmos o produto interno para esta 2-forma obtemos

$$\begin{aligned} i_{x_\alpha}\omega &= i_{x_\alpha}\left(dq^i \wedge dp_i\right) = \left(i_{x_\alpha} dq^i\right) dp_i - \left(i_{x_\alpha} dp_i\right) dq^i, \\ &= \left\{q^i, H'_\alpha\right\} dp_i - \left\{p_i, H'_\alpha\right\} dq^i, \\ &= \frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^i} dq^i, \\ &= dH'_\alpha, \end{aligned} \tag{4.85}$$

onde vemos que X_α são autovetores que possuem autovalores nulos. Por sua vez, a condição de integrabilidade de Frobenuis pode ser escrita por

$$\begin{aligned} i_{x_\alpha} i_{x_\beta}\omega &= i_{x_\alpha}\left[\left(i_{x_\beta} dq^i\right) dp_i - \left(i_{x_\beta} dp_i\right) dq^i\right] \\ &= \left(i_{x_\beta} dq^i\right)\left(x_\alpha dp_i\right) - \left(i_{x_\beta} dp_i\right)\left(i_{x_\alpha} dq^i\right) \\ &= \frac{\partial H'_\beta}{\partial p_i}\frac{\partial H'_\alpha}{\partial q^i} - \frac{\partial H'_\beta}{\partial q^i}\frac{\partial H'_\alpha}{\partial p_i} \\ &= \left\{H'_{\alpha,} H'_\beta\right\}. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Ambas as expressões (4.85) e (4.86) serão identicamente nulas sempre que a condição de integrabilidade for verificada.

O próximo passo do nosso estudo será analisar as transformações que mantêm a forma simplética ω invariante. Tais transformações são conhecidas como transformações canônicas. Com tal objetivo faremos uma pequena digressão geométrica. Comecemos considerando as variaveis canônicas como um único objeto, a saber $z^I = \left(q^i, p_i\right)$. Agora vamos definir o campo de vetores

$$X_\alpha \equiv \frac{d}{dt^\alpha} = \chi^I_\alpha \frac{\partial}{\partial z^I}, \tag{4.87}$$

onde $\chi_\alpha^I \equiv \left\{z^I, H_\alpha^{'}\right\}$. Desta forma seremos capazes de escrever o diferencial fundamental (4.57)por meio da expressão

$$dF = dt^\alpha X_\alpha F,$$

bem como escrever as equações caracteristicas sob a forma

$$dz^I = dt^\alpha X_\alpha z^I, \qquad dS = dt^\alpha X_\alpha S. \tag{4.88}$$

Para seguir o estudo das transformações canônicas vamos definir uma transformação infinitezimal g do tipo

$$gz^I = z^I + \delta z^I, \tag{4.89}$$

onde

$$\delta z^I = \delta t^\alpha X_\alpha \left(z^I\right), \tag{4.90}$$

e com isso

$$g \equiv 1 + \delta t^\alpha X_\alpha \left(z^I\right). \tag{4.91}$$

Desta forma a sua inversa fica dada por

$$g^{-1} \equiv 1 - \delta t^\alpha X_\alpha, \tag{4.92}$$

o que pode ser demonstrado calculando

$$\begin{aligned} g^{-1}g &= (1 - \delta t^\alpha X_\alpha)\left(1 + \delta t^\beta X_\beta\right) && (4.93)\\ &= 1 - \delta t^\alpha X_\alpha \delta t^\beta X_\beta && (4.94)\\ &\approx 1. && (4.95) \end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned} g\omega g^{-1} &= \omega - \delta t^\alpha X_\alpha \omega \delta t^\beta X && (4.96)\\ &= \omega - \delta t^\alpha \delta t^\beta X_\alpha \omega X_\beta && (4.97)\\ &= \omega - \delta t^\alpha \delta t^\beta i_{x_\alpha} i_{x_\beta} \omega, && (4.98) \end{aligned}$$

vemos que se a condição de integrabilidade for satisfeita a forma simplética permanece invariante, com isso mostrando que g é uma transformação canônica. Por meio da expressão

$$\delta z^I = \delta t^\alpha X_\alpha \left(z^I\right) = \left\{z^I, H'_\alpha\right\} \delta t^\alpha, \tag{4.99}$$

fica claro que se temos um conjunto completo de vínculos involutivos H'_α, que estão associados aos vetores X_α, esses são os geradores das transformações canônicas. Partindo do conjunto dos geradores (4.99) podemos considerar uma classe especial de transformações que são aquelas tomadas a tempo constante, ou seja, onde $\delta t^0 = 0$ que são dadas por

$$\delta z^I = \left\{z^I, H'_z\right\} \delta t^z. \tag{4.100}$$

Essas equações possuem a mesma estrutura de (4.99), porém para que a mesma seja considera uma transformação canônica os seus geradores precisam estar em involução entre si, o que significa verificar a relação

$$\left\{H'_x, H'_y\right\} = C^z_{xy} H'_z. \tag{4.101}$$

Porém, como vimos, esta condição não garante a integrabilidade dos vínculos, pois precisa incluir os geradores dos deslocamentos temporais na álgebra dos parêntese de Poisson (4.101). Desta forma a condição de integrabilidade ainda deve ser dada por

$$\left\{H'_x, H'_y\right\} = C^0_{xy} H'_0 + C^z_{xy} H'_z, \tag{4.102}$$

a partir da qual vemos que algumas das duas igualdades $C^0_{xy} = 0$ ou $H'_0 = 0$ precisam ser verificadas para que as duas equações acima se mantenham em acordo. Agora, fazendo uma análise um pouco mais criteriosa vemos que impor a condição $C^0_{xy} = 0$ implicaria que tivéssemos $\{H'_0, H'_z\} = 0$ o que iria restringir bastante a aplicabilidade da teoria. Por outro lado, a condição $H'_0 = 0$ apenas nos conduzirá a um espaço de fase reduzido Desta forma, as tranformações (4.100) tornam-se as transformações de ponto definidas por Dirac [1]. Para concluir nós vamos definir o objeto

$$G^{can} \equiv H'_z \delta t^z, \tag{4.103}$$

que notadamente é o gerador das transformações canônicas, uma vez que verifica a relação

$$\delta z^I = \left\{z^I, G^{can}\right\}. \tag{4.104}$$

Referências

[1] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J. Math. **2**, 129 (1950); P. A. M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3**, 1 (1951); P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York 1964).

[2] P. G. Bergmann, *Non-linear field theories*, Phys. Rev. 75, 680 (1949)

[3] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Two dimensional BF gravity: A Hamilton- Jacobi analysis*, accepted in J. Math. Phys. **53**, 102901 (2012)

[4] N. T. Maia, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Three-dimensional Background Field Gravity: A Hamilton-Jacobi analysis,* Class.Quant.Grav*.* ***32,*** no.18, 185013 (2015)

[5] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Non-Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism*, Ann. Phys. **323**, 3137 (2008)

[6] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism,* J. Math. Phys. **55**, 112901 (2014)

[7] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcáarcel, G. R. Zambrano, *Topologically Massive Yang-Mills field: A Hamilton-Jacobi approach*, J. Math. Phys. **55**, 042902 (2014)

[8] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, American Mathematical Society; 3rd edition (1999)

[9] D. R. Snow, A Sufficiency Technique in Calculus of Variation Using Caratheodory's Equivalent Problems Approach, J. Math. Anal. App. **51** 129-140 (1975)
D. R. Snow, Caratheodory-Hamilton-Jacobi Theory in Optimal Control, J. Math. Anal. App. **17** 99-118 (1967)

[10] A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko, *Generalized Liouville method of integration of hamiltonian systems*, Funct. Anal. Appl. **12**, 113–121 (1978);
A. T. Fomenko and V. V. Trofimov, *Integrable Systems on Lie Algebras and Symmetric Spaces. Advanced Studies in Contemporary Mathematics,* Gordon and Breach Science Publishers, (1988) Vol. 2.

5 Modelo BF

A Teoria da Relatividade Geral (RG) de Einstein, tal como proposta por ele em 1915 em seu artigo intitulado "Die Feldgleichungen der Gravitation" [1], é construída em um formalismo de segunda ordem em termos da conexão de Christoffell $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ assim, sendo vista como uma teoria métrica [2]. Porém, a RG é invariante sob difeomorfismos cujos parâmetros são funções do espaço-tempo, da mesma forma que uma teoria local de gauge. Então, de forma alternativa, sempre se buscou formular a teoria da gravitação como uma teoria de gauge. Tal construção seria extremamente útil do ponto de vista de uma teoria de unificação pois a RG se assemelharia a outras interações fundamentais conhecidas. Contudo, o modo para se obter uma teoria de gravitação em 4 dimensões como uma teoria de gauge nunca foi completamente compreendido [3].

A relatividade geral constitui-se de uma teoria singular, ao passo que a análise de vínculos para a construção de sua formulação canônica é essencial para se obter uma versão quântica da teoria. Tal análise torna-se extremamente complexa se desejarmos trabalhar em espaço quadridimensional, deixando-a ainda como um problema a ser resolvido. Contudo, o estudo de teorias em dimensões inferiores além de simplificar bastante o problema, tem se mostrado um excelente laboratório teórico para entender o que acontece em 4 dimensões.

Em duas dimensões a teoria da gravitação pode ser formulada como uma teoria de gauge e consequentemente ser descrita em termo das variáveis de Einstein-Cartan, o Zweibein e^{I}_{μ} e a conexão de spin w^{IJ}_{μ}, que são tratadas como quantidades independentes. Porém, em dimensão dois, surgem algumas trivialidades. A ação de Einstein-Hilbert

$$\int d^2x\sqrt{-g}R, \tag{5.1}$$

torna-se um termo de superfície (uma constante) e carece de uma dinâmica [4].

No sentido de solucionar este problema é que Jackiw e Teitelboim propõe a ação

$$W_{JT} = \int d^2x\sqrt{-g}\psi\left(R - K\right), \tag{5.2}$$

onde ψ é um campo dilaton utilizado como multiplicador de Lagrange, e K é a constante cosmológica.

A ação de Jackiw-Teitelboim também pode ser obtida a partir de um formalismo de primeira ordem, por meio de uma ação do tipo BF, com vínculos, constituindo então uma teoria topológica.

Neste capítulo, vamos utilizar o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas não Hessianos com o intuito de estudar os vínculos do modelo BF. Aplicaremos tal ferramenta para o modelo BF em duas e três dimensões, fazendo a análise de vínculo dos mesmos. Em seguida, vamos construir os parênteses generalizados, obter as equações características, bem como construir os geradores das transformações canônicas.

5.1 Modelo BF Bidimensional

As teorias quânticas de campos topológicas foram tratadar por Witten [5] no final da década de 80 e constituem um importante ferramental para o estudo da teoria de gravitação em dimensões menores, bem como para outros campos de interesse físico. Outro exemplo de teoria de campo topológica (TCT) são as tipo Schwarz. O modelo BF, que pode ser considerado como uma generalização das teorias de Chern-Simons, consiste em uma TCT do tipo Schwarz [6].

A ação clássica para o modelo BF é introduzida da seguinte forma: seja uma dada variedade $\mathcal{M}$ de dimensão d, um grupo de Lie $\mathcal{G}$, um campo de conexão A, e uma (d-2)-forma B que assume valores na representação adjunta de $\mathcal{G}$ conhecida como campo de fundo (background field - BF). Assim definimos a ação do modelo BF por

$$W_{BF} = \int_{\mathcal{M}} Tr\left(B \wedge F\right), \tag{5.3}$$

em que F é uma 2-forma, definida por meio do campo de conexão A, e que pode ser expressa através da relação $F = DA = dA + A \wedge A$. Aqui, na definição de F, estamos utilizando o conceito de derivada exterior.

Podemos mostrar que $Tr\left(B \wedge F\right)$ é um invariante de gauge. Para isso tomaremos um elemento g pertencente a representação adjunta de $\mathcal{G}$ e calculamos

$$Tr\left(gBg^{-1} \wedge gFg^{-1}\right) = Tr\left(gB \wedge Fg^{-1}\right) = Tr\left(B \wedge F\right), \tag{5.4}$$

que demonstra a nossa afirmação. Porém o traço do produto exterior $B \wedge F$ não é o único invariante que pode ser construído. Dependendo da dimensão em que estivermos trabalhando será possível construir novos invariantes. Porém, nesse momento, consideraremos apenas o caso bidimensional do modelo BF, e com isso o nosso campo de fundo B será uma 0-forma, e o seu dual, o campo F, uma 2-forma. Podemos expressar os campos B e F em termos dos geradores da álgebra J_a sob a forma

$$F = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} J_a dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{5.5}$$

$$B = B^a J_a, \tag{5.6}$$

do mesmo modo que fazemos com a conexão A

$$A = A^a_\mu J_a dx^\mu. \tag{5.7}$$

Pela relação entre a 2-forma F com o seu campo de conexão A, e utilizando as propriedades da álgebra exterior temos,

$$dA = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right) J_a dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{5.8}$$

$$A \wedge A = \frac{1}{2}\left(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu\right) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} A^a_\mu A^b_\nu \left[J_a, J_b\right] dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{5.9}$$

e com isso obtemos a forma explicita para a 2-forma F que é dada por

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right) J_a + A^a_\mu A^b_\nu \left[J_a, J_b\right]\right\} dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Assim, sendo J_a os geradores da álgebra de Lie g, associado ao grupo de Lie $\mathcal{G}$, eles devem verificar a relação

$$\left[J_a, J_b\right] = f_{ab}{}^{c} J_c, \tag{5.11}$$

onde toda informação do grupo está contida na sua constante de estrutura $f_{ab}{}^{c}$. Com isso podemos escrever

$$F^a_{\mu\nu} J_a = \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right) J_a + A_\mu A_\nu \left[J_a, J_b\right], \tag{5.12}$$

e por sua vez, usando a relação (5.11) de forma adequada,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a{}_{bc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{5.13}$$

Nesse momento podemos definir a derivada covariante por

$$D_\mu A^a_\nu = \partial_\mu A^a_\nu + f_{ab}{}^{c} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{5.14}$$

Agora retornando para a ação,

$$\begin{aligned} W_{BF} &= \int Tr\left(B \wedge F\right) \\ &= \frac{1}{2}\int B^a F^b_{\mu\nu} Tr\left[J_a, J_b\right] dx^\mu \wedge dx^\nu, \end{aligned} \tag{5.15}$$

podemos escrevê-la sob a a forma

$$W_{BF} = \int B^a F^b_{\mu\nu} g_{ab} dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{5.16}$$

definindo $g_{ab} = \dfrac{1}{2} Tr\,[J_a, J_b]$. Tendo em vista as propriedades de linearidade e simetria do traço consideraremos g_{ab} como as componentes de um tensor métrico, desta forma podemos passar da representação contravariante para a representação covariante por meio da expressão

$$B_a = g_{ab} B^b. \tag{5.17}$$

Agora reescrevendo a ação,

$$W_{BF} = \int B_a F^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{5.18}$$

e utilizando as propriedades de antissimetria do produto exterior, ficamos com

$$W_{BF} = \int F^a_{01} B_a d^2x, \tag{5.19}$$

onde fica evidente que a densidade lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = F^a_{01} B_a. \tag{5.20}$$

Partindo da nossa densidade lagrangeana, podemos utilizar a equação de Lie para o modelo BF bidimensional, que depende dos campos A e B sob a forma

$$E^B_a \delta B_a + E^A_a \delta A^a_\nu - \Theta^\mu_\alpha \delta x^\alpha + \partial_\mu G^\mu = 0, \tag{5.21}$$

tanto para obter as equações de movimento quanto para estudar as simetrias do formalismo. Fazendo uso do princípio de Hamilton, o qual considera apenas variações a pontos fixos e despreza os termos de fronteira, podemos obter as equações de Lagrange para os campos B e A. Tendo em vista que a nossa lagrangeana depende apenas linearmente de B e que essa dependência não possui termos envolvendo derivadas do campo, a equação de Euler-Lagrange para B fica determinado por

$$E^B_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_a} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha B_a} = F^a_{01}. \tag{5.22}$$

Já para o campo A temos,

$$\begin{aligned} E_a^A &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^a} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\nu^a}, \\ &= \frac{\partial}{\partial A_\nu^a}\left(B_b F_{01}^b\right) - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\nu^a}\left(B_b F_{01}^b\right), \end{aligned} \tag{5.23}$$

que podemos separar em dois termos. Começando com o primeiro termo do lado direito da expressão 5.23

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_\nu^a}\left(B_b F_{01}^b\right) &= B_b \frac{\partial}{\partial A_\nu^a}\left(\partial_0 A_1^b - \partial_1 A_0^b + f_{cd}\ ^b A_0^c A_1^d\right) \\ &= B_b f_{cd}\ ^b A_1^d \frac{\partial}{\partial A_\nu^a} A_0^c + B_b f_{cd}\ ^b A_0^c \frac{\partial}{\partial A_\nu^a} A_1^d \\ &= B_b f_{cd}\ ^b A_1^d \delta_a^c \delta_0^\nu + B_b f_{cd}\ ^b A_0^c \delta_a^d \delta_1^\nu \\ &= B_c f_{ab}^c \left(\delta_0^\nu A_1^c - \delta_1^\nu A_0^b\right), \end{aligned} \tag{5.24}$$

agora trabalhando com o segundo termo do lado direito da expressão do campo A, temos

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\nu^a}\left(B_b F_{01}^b\right) &= \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\nu^a}\left(\partial_0 A_1^b - \partial_1 A_0^b + f_{cd}\ ^b A_0^c A_1^d\right) B_b \\ &= \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\nu^a}\left(\delta_0^\alpha \delta_1^\nu \delta_a^b - \delta_1^\alpha \delta_0^\nu \delta_a^b\right) B_b \\ &= \delta_1^\nu \partial_0 B_a - \delta_0^\nu \partial_1 B_a, \end{aligned} \tag{5.25}$$

e com isso,

$$\begin{aligned} E_a^A &= f_{ab}\ ^c \left(\delta_1^\nu A_0^b - \delta_0^\nu A_1^b\right) B_c + \delta_1^\nu \partial_0 B_a - \delta_0^\nu \partial_1 B_a \\ &= \delta_0^\nu \left(\partial_1 B_a + f_{ab}\ ^c A_1^b B_c\right) - \delta_1^\nu \left(\partial_0 B_a + f_{ab}\ ^c A_0^b B_c\right) \\ &= \delta_0^\nu D_1 B_a - \delta_1^\nu D_0 B_a. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Então, as equações de movimento serão dadas por

$$F_{01}^a = 0, \tag{5.27}$$

$$D_\mu B_a = 0. \tag{5.28}$$

Podemos também obter as expressões para o tensor momento-energia Θ_α^μ

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\mu}_{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\nu}} \partial_{\alpha} A^{a}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\alpha} \mathcal{L} \\
&= \frac{\partial \left(B_b F^{b}_{01} \right)}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\nu}} \partial_{\alpha} A^{a}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\alpha} \left(B_a F^{a}_{01} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\nu}} \left(\partial_0 A^{b}_{1} - \partial_1 A^{b}_{0} + f^{b}_{cd} A^{c}_{0} A^{d}_{1} \right) B_a \partial_{\alpha} A^{a}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\alpha} B_a F^{a}_{01} \\
&= \frac{\partial}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\nu}} \left(\delta^{\mu}_{0} \delta^{\nu}_{1} \delta^{b}_{a} - \delta^{\mu}_{1} \delta^{\nu}_{0} \delta^{b}_{a} \right) B_b \partial_{\alpha} A^{a}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\alpha} B_a F^{a}_{01} \\
&= B_a \left(\delta^{\mu}_{0} \partial_{\alpha} A^{a}_{1} - \delta^{\mu}_{1} \partial_{\alpha} A^{a}_{0} \right) - \delta^{\mu}_{\alpha} B_a F^{a}_{01},
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

e para o gerador G^{μ}

$$
\begin{aligned}
G^{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\nu}} \delta A^{a}_{\nu} - \Theta^{\mu}_{\alpha} \delta x^{\alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\nu}} \left(\partial_0 A^{b}_{1} - \partial_1 A^{b}_{0} + f^{b}_{cd} A^{c}_{0} A^{d}_{1} \right) B_b \delta A^{a}_{\nu} - \Theta^{\mu}_{\alpha} \delta x^{\alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial \partial_{\mu} A^{a}_{\nu}} \left(\delta^{\mu}_{0} \delta^{\nu}_{1} \delta^{b}_{a} - \delta^{\mu}_{1} \delta^{\nu}_{0} \delta^{b}_{a} \right) B_b \delta A^{a}_{\nu} - \Theta^{\mu}_{\alpha} \delta x^{\alpha} \\
&= \left(\delta^{\mu}_{0} \delta A^{a}_{1} - \delta^{\mu}_{1} \delta A^{a}_{0} \right) B_a - \Theta^{\mu}_{\alpha} \delta x^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

Com isso a equação de Lie

$$
\Delta \mathcal{L} = E^{B}_{a} \delta B_a + E^{A}_{a} \delta A^{a}_{\nu} - \delta x^{\alpha} \Theta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\mu} G^{\mu} = 0, \tag{5.31}
$$

toma a forma

$$
\Delta \mathcal{L} = F^{a}_{01} \delta B_a + \left(\delta^{\nu}_{0} D_1 B_a - \delta^{\nu}_{1} D_0 B_a \right) \delta A^{a}_{\nu} - \partial_{\mu} \Theta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\mu} G^{\mu} = 0. \tag{5.32}
$$

Porém, se nos restringirmos as variações a ponto fixo, ou seja, $\delta x^{\alpha} = 0$, ficamos com

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathcal{L} &= F^{a}_{01} \delta B_a + \left(\delta^{\nu}_{0} D_1 B_a - \delta^{\nu}_{1} D_0 B_a \right) \delta A^{a}_{\nu} - \partial_{\mu} \left[\left(\delta^{\mu}_{0} \delta A^{a}_{1} - \delta^{\mu}_{1} \delta A^{a}_{0} \right) B_a \right] \\
&= F^{a}_{01} \delta B_a + \partial_0 \left(\delta A^{a}_{1} B_a \right) - \delta A^{a}_{1} D_0 B_a - \partial_1 \left(\delta A^{a}_{0} B_a \right) + \delta A^{a}_{0} D_1 B_a \\
&= F^{a}_{01} \delta B_a + B_a D_0 \delta A^{a}_{1} - B_a D_1 \delta A^{a}_{0},
\end{aligned} \tag{5.33}
$$

onde devido a identidade

$$
\begin{aligned}
d \left(\delta A^{a}_{\nu} B_a \right) &= \delta A^{a}_{\nu} D_{\mu} B_a + B_a D_{\mu} \delta A^{a}_{\nu} \\
&= \delta A^{a}_{\nu} \left(\partial_{\mu} B_a + f_{ab}{}^{c} A^{b}_{\mu} B_c \right) + B_a \left(\partial_{\mu} \delta A^{a}_{\nu} + f_{ab}{}^{c} A^{b}_{\mu} \delta A^{c}_{\nu} \right) \\
&= \delta A^{a}_{\nu} \partial_{\mu} B_a + B_a \partial_{\mu} \delta A^{a}_{\nu},
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

podemos expressar

$$B_a D_\mu \delta A^a_\nu = d\left(\delta A^a_\nu B_a\right) - \delta A^a_\nu D_\mu B_a, \tag{5.35}$$

e com isso

$$\Delta\mathcal{L} = F^a_{01}\delta B_a + B_a D_0 \delta A^a_1 - B_a D_1 \delta A^a_0. \tag{5.36}$$

Sendo A^a_μ um campo de gauge, será instrutivo buscarmos agora as transformações para o campo B que mantém a ação do modelo BF invariante. Para tal, vamos considerar uma função arbitrária Λ^a, onde vamos impor que $\delta A^a_\mu = D_\mu \Lambda^a$, com isso vamos poder escrever

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= F^a_{01}\delta B_a + B_a D_0 \delta A^a_1 - B_a D_1 \delta A^a_0 \\ &= F^a_{01}\delta B_a + B_a D_0 D_1 \Lambda^a - B_a D_1 D_0 \Lambda^a \\ &= F^a_{01}\delta B_a + B_a \left[D_0, D_1\right]\Lambda^a, \end{aligned} \tag{5.37}$$

onde é possível obter a regra da comutação

$$\left[D_0, D_1\right]\Lambda^a = -f_{ab}{}^{c}\Lambda^b F^c_{01}. \tag{5.38}$$

Assim temos

$$\Delta\mathcal{L} = \left(\delta B_a - f_{ab}{}^{c} B_b \Lambda^c\right) F^a_{01}, \tag{5.39}$$

tomando-se $\Delta\mathcal{L} = 0$ sobre a transformação $D_\mu = \delta A^a_\mu$ obtemos a relação

$$\delta B_a = f_{ca}{}^{b} B_b \Lambda^c = f_{ab}{}^{c} B_b \Lambda^c, \tag{5.40}$$

que expressa uma restrição sobre o campo B. Diante do exposto, vemos que as transformações de gauge que deixam invariante a teoria são

$$\delta A^a_\mu = D_\mu \Lambda^a, \tag{5.41}$$

$$\delta B_a = f_{ab}{}^{c} B_b \Lambda^c. \tag{5.42}$$

5.1.1 Análise de Hamilton-Jacobi

Buscaremos agora sob o escopo do formalismo de Hamilton-Jacobi estudar o modelo BF em duas dimensões. Encontraremos as suas equações de vínculo, bem como as equações canônicas, testando a sua integrabilidade e encontraremos também os geradores das transformações canônicas. Para isso usamos a a definição de derivada covariante já introduzida para escrever a ação sob a forma

$$W_{BF} = \int B_a \left(\partial_0 A_1^a - D_1 A_0^a\right) dx^2. \tag{5.43}$$

Utilizando a relação

$$B_a D_1 A_0^a = \partial_1 \left(A_0^a B_a\right) - A_0^a D_1 B_a, \tag{5.44}$$

e eliminando os termos de fronteira, já que os mesmo não vão contribuir para a dinâmica do sistema, podemos reescrever a ação do modelo BF de forma conveniente pela expressão

$$W_{BF} = \int \left(B_a \partial_0 A_1^a + A_0^a D_1 B_a\right) dx^2. \tag{5.45}$$

Utilizando a definição de momento canônico

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_\mu^a}, \qquad \Pi^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 B_a}, \tag{5.46}$$

obtemos

$$\pi_a^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_0^a} = 0, \tag{5.47}$$

$$\pi_a^1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_1^a} = B_a, \tag{5.48}$$

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 B_a} = 0. \tag{5.49}$$

Como apenas um dos momentos é diferente de zero, nosso Hamiltoniano canônico se reduz a

$$\mathcal{H}_0 = \pi_a^1 \partial_0 A_1^a - \mathcal{L} = -A_0^a D_1 B_a. \tag{5.50}$$

Definindo $\pi \equiv \partial_0 S$, obtemos conjunto de EDP de HJ

$$H_0 \equiv \pi + \mathcal{H}_0 = 0, \tag{5.51}$$

$$H_a^0 \equiv \pi_a^0 = 0, \tag{5.52}$$

$$H_a^1 \equiv \pi_a^1 + B_a = 0, \tag{5.53}$$

$$H^a \equiv \Pi^a = 0. \tag{5.54}$$

Cada equação vínculo está relacionada a uma coordenada independente do sistema, essas, por sua vez, vão ser identificadas como parâmetros da teoria. Podemos também estender a definição de parênteses de Poisson para campos representando o mesmo sob a seguinte notação

$$\left\{A_\mu^a, \pi_b^\nu\right\} = \delta_b^a \delta_\nu^\mu \delta(x-y), \tag{5.55}$$

$$\left\{B_a, \Pi^b\right\} = \delta_b^a \delta(x-y). \tag{5.56}$$

Com isso, podemos escrever o diferencial fundamental por

$$d\mathcal{F} = \int \left[\{\mathcal{F}, H_0\}\, dx^0 + \left\{\mathcal{F}, H_a^0\right\} dA_a^\mu + \{\mathcal{F}, H^a\}\, dB_a\right] dy, \tag{5.57}$$

que é justamente a equação da evolução dinâmica de uma função $\mathcal{F}$ qualquer definida no espaço de fase. Através da diferencial fundamental também somos capazes de perceber que os de vínculos atuam como geradores da dinâmica na direção dos seus correspondentes parâmetros.

Avaliando a involução dos vínculos por meio da matriz dos parênteses de Poisson dos mesmos, $M_{xz} = \{H'_x, H'_z\}$ obtemos

$$\left\{H_a^0, H_b^1\right\} = \left\{\pi_a^0, \pi_b^1 + B_b\right\} = \left\{\pi_a^0, \pi_b^1\right\} + \left\{\pi_a^0, B_b\right\} = 0, \tag{5.58}$$

$$\left\{H_a^0, H^b\right\} = \left\{\pi_a^0, \Pi^b\right\} = 0, \tag{5.59}$$

$$\left\{H_a^1, H^b\right\} = \left\{\pi_a^1 + B_a, \Pi^b\right\} = \left\{\pi_a^1, \Pi^b\right\} + \left\{B_a, \Pi^b\right\} = \left\{B_a, \Pi^b\right\} = \delta_a^b \delta\left(x-y\right). \tag{5.60}$$

Sendo os vínculos H_a^1 e H^a não são involutivos, podemos denota-los por $h^0 = H^a$ e $h^1 = H_a^1$ e com isso podemos construir a matriz

$$M^{ab} = \left\{h^a(x), h^b(y)\right\} = \begin{vmatrix} 0_{3\times3} & 1_{3\times3} \\ -1_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{vmatrix} \tag{5.61}$$

com $a, b = 0, 1$, que é justamente a matriz do parenteses de Poisson dos vínculos não involutivos. Sua inversa

$$M^{-1}_{ab} = \begin{vmatrix} 0_{3\times3} & -1_{3\times3} \\ 1_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{vmatrix} \tag{5.62}$$

nos permite construir os parênteses generalizados

$$\{\mathcal{F}(x), \mathcal{G}(y)\}^* = \{\mathcal{F}(x), \mathcal{G}(y)\} - \int \{\mathcal{F}(x), h'^s(z)\} M^{-1}_{rs}(z,w) \{h'^r(w), \mathcal{G}(y)\}, \tag{5.63}$$

e assim escrever o diferencial fundamental como

$$dF = \int \left[\{\mathcal{F}, H'\}^* dx^0 + \left\{\mathcal{F}, H'^0_a\right\}^* dA^a_0\right] dx. \tag{5.64}$$

Com o intuito de obter os parênteses canônicos generalizados, aplicaremos a sua definição

$$\begin{aligned} \left\{A^a_\mu, \pi^\nu_b\right\}^* &= \left\{A^a_\mu, \pi^\nu_b\right\} - \int \left\{A^a_\mu, h'^s(z)\right\} M^{-1}_{rs}(z,w) \{h'^r(w), \pi^\nu_b\} \\ &= \delta^a_b \delta^\nu_\mu \delta(x-y) - \int \left[\left\{A^a_\mu, h'^0\right\} M^{-1}_{10} \left\{h'^1, \pi^\nu_b\right\} + \left\{A^a_\mu, h'^1\right\} M^{-1}_{01} \left\{h'^0, \pi^\nu_b\right\}\right] \\ &= \delta^a_b \delta^\nu_\mu \delta(x-y) \end{aligned} \tag{5.65}$$

e

$$\begin{aligned} \left\{A^a_\mu, B_b\right\}^* &= \left\{A^a_\mu, B_b\right\} - \int \left\{A^a_\mu, h'^s(z)\right\} M^{-1}_{rs}(z,w) \{h'^r(w), B_b\} \\ &= -\int \left[\left\{A^a_\mu, h'^0\right\} M^{-1}_{10} \left\{h'^1, B_b\right\} + \left\{A^a_\mu, h'^1\right\} M^{-1}_{01} \left\{h'^0, B_b\right\}\right] \\ &= \delta^a_b \delta^1_\mu \delta(x-y) \end{aligned} \tag{5.66}$$

e obtemos que os únicos parênteses não nulos são

$$\left\{A^a_\mu, \pi^\nu_b\right\}^* = \delta^a_b \delta^\nu_\mu \delta(x-y), \qquad \left\{A^a_\mu, B_b\right\}^* = \delta^a_b \delta^1_\mu \delta(x-y). \tag{5.67}$$

Com a expressão dos parênteses generalizados em mãos, fica evidente a redução do espaço de fase, onde as variáveis B_a e Π^a não são mais consideradas como canonicamente conjugadas. Por sua vez, a variável A_1^a será canonicamente conjugada a B_a que estará fazendo o papel do momento canônico π_a^1. Porém ainda se faz necessário testar a integrabilidade do sistema, para isso usaremos o diferencial fundamental com o intuito de usar a condição de integrabilidade e ver se já possuimos um conjunto completo de vínculos integráveis ou se será preciso adicionar novos vínculos ao modelo. Desta forma,

$$dH_a'^0 = \left\{H_a'^0, H'\right\}^* dx^0 = -D_1 B_a dx^0 \tag{5.68}$$

vemos que a condição de integrabilidade impõe um novo vínculo ao sistema, a saber

$$\mathcal{K}_a' = D_1 B_a. \tag{5.69}$$

Devido a inclusão do novo vínculo ao sistema, necessitamos mais uma vez verificar a condição de integrabilidade do mesmo, para isso

$$d\mathcal{K}_a' = 0, \tag{5.70}$$

que é identicamente safisfeito, onde vemos que o nosso conjunto de vínculos, incluindo o novo vínculo $\mathcal{K}_a'$, consiste em um conjunto completo de vínculos involutivos. Assim, associando ao vínculo (5.69) o parâmetro ω^a, o diferencial fundamental para o nosso sistema será dado por

$$dF = \int \left[\{\mathcal{F}, H_0\}^* dx^0 + \left\{\mathcal{F}, H_a^0\right\}^* dA_0^a + \{\mathcal{F}, \mathcal{K}_a'\}^* d\omega^a\right] dx. \tag{5.71}$$

5.1.2 Equações Características

Na seção precedente fizemos a análise do HJ do modelo BF encontrando um sistema de EDPs para os vínculos canônicos da teoria. Em seguida, fizemos a redução do espaço de fase separando os vínculos em involutivos e não involutivos. Utilizando a condição de integrabilidade encontramos um novo vínculo e $\mathcal{K}_a'$ que fechou o nosso conjunto de vínculo involutivos e desta forma conseguimos escrever o nosso diferencial fundamental. Nesse momento vamos utlizar expressão (5.71) para obter as equações características do sistema. Calculando para o campo A_μ^a

$$dA_\mu^a = \int \left[\left\{A_\mu^a, H_0\right\}^* dx^0 + \left\{A_\mu^a, H_b^0\right\}^* dA_0^b + \left\{A_\mu^a, \mathcal{K}_b'\right\}^* d\omega^b\right] dx, \tag{5.72}$$

temos,

$$\begin{aligned}\left\{A^a_\mu, H_0\right\}^* &= \left\{A^a_\mu, \pi + \mathcal{H}_0\right\}^* \\ &= \left\{A^a_\mu, B_b D_1 A^b_0\right\}^* \\ &= \delta^1_\mu \delta^b_a D_1 A^b_0 \delta\left(x-y\right)\end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\left\{A^a_\mu, H^0_b\right\}^* = \left\{A^a_\mu, \pi^0_b\right\}^* = \delta^a_b \delta^0_\mu \delta\left(x-y\right), \tag{5.74}$$

$$\left\{A^a_\mu\left(x\right), \mathcal{K}'_a\left(y\right)\right\}^* = \int D^y_1 \left\{A^a_\mu\left(x\right), B_b\left(y\right)\right\}^* dy \tag{5.75}$$

$$= -D^x_1 \int \left\{A^a_\mu\left(x\right), B_b\left(y\right)\right\}^* dy \tag{5.76}$$

$$= -\delta^a_b \delta^1_\mu D_1 \delta\left(x-y\right) \tag{5.77}$$

com isso ficamos com:

$$dA^a_\mu = \delta^0_\mu dA^a_0 + \delta^1_\mu \left(D_1 A^a_0 dt - D_1 d\omega^a\right). \tag{5.78}$$

Para o campo B^a_μ

$$dB_a = \int \left[\left\{B_a, H_0\right\}^* dx^0 + \left\{B_a, H^b_0\right\}^* dA^b_0 + \left\{B_a, \mathcal{K}'_b\right\}^* d\omega^b\right] dx, \tag{5.79}$$

temos

$$\begin{aligned}\left\{B_a, H'\right\}^* &= -\left\{B_a, A^b_0 D_1 B_b\right\}^* \\ &= -\left\{B_a, A^b_0\left(\partial_1 B_b + f_{bc}{}^{d} A^c_1 B_d\right)\right\}^* \\ &= -\left\{B_a, A^c_1\right\}^* A^b_0 f_{bc}{}^{d} B_d \\ &= \delta^c_a \delta\left(x-y\right) A^b_0 f_{bc}{}^{d} B_d \\ &= -f_{ab}{}^{c} A^b_0 B_c \delta\left(x-y\right)\end{aligned} \tag{5.80}$$

$$\left\{B_a, H'^0_b\right\}^* = \left\{B_a, \pi^0_b\right\}^* = 0, \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned}\left\{B_a, \mathcal{K}'_b\right\}^* &= \left\{B_a, D_1 B_b\right\}^* \\ &= \left\{B_a, A^c_1\right\}^* f_{bc}{}^{d} B_d \\ &= -\delta^c_a \delta\left(x-y\right) f_{bc}{}^{d} B_d \\ &= f_{ab}{}^{c} B_c \delta\left(x-y\right),\end{aligned} \tag{5.82}$$

e com isso ficamos com

$$dB_a = -f_{ab}{}^{c} B_c \left(A_0^b dt - d\omega^b \right). \tag{5.83}$$

Da mesma forma, se para o momento canônico π_a^μ

$$d\pi_a^\mu = \int \left[\left\{ \pi_a^\mu, H' \right\}^* dx^0 + \left\{ \pi_a^\mu, H_b^{\prime 0} \right\}^* dA_0^b + \left\{ \pi_a^\mu, \mathcal{K}_b^{\prime} \right\}^* d\omega^b \right] dx, \tag{5.84}$$

temos,

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi_a^\mu, H' \right\}^* &= -\left\{ \pi_a^\mu, A_0^b D_1 B_b \right\}^*, \\
&= -\left\{ \pi_a^\mu, A_0^b \right\}^* D_1 B_b - \left\{ \pi_a^\mu, A_1^c \right\}^* f_{bc}{}^{d} A_0^b B_d \\
&= \delta_\mu^0 \delta\left(x-y\right) D_1 B_a - \delta_\mu^q \delta\left(x-y\right) f_{ab}{}^{c} A_0^b B_c,
\end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\left\{ \pi_a^\mu, H_b^{\prime 0} \right\}^* = \left\{ \pi_a^\mu, \pi_b^0 \right\}^* = 0, \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi_a^\mu, \mathcal{K}_b^{\prime} \right\}^* &= \left\{ \pi_a^\mu, D_1 B_b \right\}^* \\
&= -\left\{ \pi_a^\mu, A_1^c \right\}^* f_{bc}{}^{d} B_d \\
&= -\delta_\mu^1 \delta\left(x-y\right) f_{ab}{}^{c} B_c,
\end{aligned} \tag{5.87}$$

e com isso ficamos com

$$d\pi_a^\mu = \delta_\mu^0 D_1 B_a dt - \delta_\mu^1 f_{ab}{}^{c} B_c \left(A_0^b dt + d\omega^b \right). \tag{5.88}$$

Para o momento Π^a,

$$d\Pi^a = \int \left[\left\{ \Pi^a, H' \right\}^* dx^0 + \left\{ \Pi^a, H_b^{\prime 0} \right\}^* dA_0^b + \left\{ \Pi^a, \mathcal{K}_b^{\prime} \right\}^* d\omega^b \right] dx, \tag{5.89}$$

todos os parênteses generalizados são identicamente nulos, o que nos leva a

$$\left\{ \Pi^a, H' \right\}^* = \left\{ \Pi^a, H_b^{\prime 0} \right\}^* = \left\{ \Pi^a, \mathcal{K}_b^{\prime} \right\}^* = 0, \tag{5.90}$$

e por sua vez ficamos com

$$d\Pi^a = 0. \tag{5.91}$$

Então o nosso conjunto de equações características é:

$$dA^a_\mu = \delta^0_\mu dA^a_0 + \delta^1_\mu \left(D_1 A^a_0 dt - D_1 d\omega^a\right), \tag{5.92}$$

$$dB_a = -f_{ab}{}^{c} B_c \left(A^b_0 dt + d\omega^b\right), \tag{5.93}$$

$$d\pi^\mu_a = \delta^\mu_0 D_1 B_a dt - \delta^\mu_1 f_{ab}{}^{c} \left(A^b_0 dt - d\omega^b\right), \tag{5.94}$$

$$d\Pi^a = 0. \tag{5.95}$$

Essas equações são as equações de movimento do sistema e, desta forma, devem ser equivalentes às equações (5.27) e (5.28). A condição de integrabilidade impõe a independência entre os parâmetros t, A^a_μ, ω^a assim a evolução dinâmica do sistema vai ser dada de forma independente na direção de cada um deles. Com isso, analisando a evolução temporal de cada uma das equações características, vemos que ela será dada por

$$\partial_0 A^a_\mu = \delta^1_\mu D_1 A^a_0, \tag{5.96}$$

$$\partial_0 B_a = -f_{ab}{}^{c} A^b_0 B_c, \tag{5.97}$$

$$\partial_0 \pi^\mu_a = \delta^\mu_0 D_1 B_a - \delta^\mu_1 f_{ab}{}^{c} A^b_0 B_c, \tag{5.98}$$

$$\partial_0 \Pi^a = 0. \tag{5.99}$$

Em uma análise um pouco mais cuidadosa, das equações características vemos que a componente $\mu = 0$ de equação (5.96) mostra que A^a_0 é uma constante por evolução temporal, reafirmando o seu caráter de multiplicador de Lagrange. A componente $\mu = 1$ nos conduz a

$$\partial_0 A^a_1 - D_1 A^a_0 = 0, \tag{5.100}$$

que é exatamente a equação de movimento (5.27). Por outro lado, (5.97) nos leva diretamente equação de movimento (5.28) para $\mu = 0$. Seguindo o mesmo raciocínio, a componente $\mu = 0$ da equação (5.98) corresponde justamente ao vínculo encontrado pela condição de integrabilidade. Já a componente $\mu = 1$ da mesma equação reproduz (5.97), que por sua vez, já vimos que é equivalente a equação de movimento (5.28). Por último, vemos que (5.99) a condição de integrabilidade para o vínculo (5.54).

5.1.3 Geradores das Transformações Canônicas e de Gauge

Devido a independência entre os parâmetros da teoria t, A^a_μ, ω^a, na seção passada nós conseguimos estudar a evolução na direção do parâmetro t e com isso obter as equações dinâmicas do sistema. Por outro lado, nós também podemos analisar a evolução nas direções dos parâmetros A^a_μ, ω^a. Tais variações nos conduzem a um conjunto de transformações infinitesimais que podem ser calculados por meio dos parênteses generalizados através da expressão

$$\delta A^a_\mu = \left\{A^a_\mu, G^{can}\right\}^*, \tag{5.101}$$

$$\delta\pi^\mu_a = \left\{\pi^\mu_a, G^{can}\right\}^*, \tag{5.102}$$

onde G^{can} é o gerador das transformações canônicas dado por

$$G^{can} \equiv \int \left[H^0_a dA^a_0 + K_a\delta\omega^a\right] dy. \tag{5.103}$$

Então, o conjunto de transformações canônicas é

$$\delta A^a_\mu = \delta^0_\mu dA^a_0 - \delta^1_\mu D_1\delta\omega^a, \tag{5.104}$$

$$\delta\pi^\mu_a = -\delta^\mu_1 f_{ab}{}^{c} B_c\delta\omega^b, \tag{5.105}$$

em que H^0_a e K_a podem ser considerados os geradores das transformações canônicas na direção de A^a_0 e ω respectivamente.

Agora, vamos tentar relacionar o gerador das transformações canônicas G^{can} com o gerador das transformações de gauge G^{gauge}, para isso vamos partir da equação de Lie (5.36)

$$\Delta\mathcal{L} = F^a_{01}\delta B_a + B_a D_0\delta A^a_1 - B_a D_1\delta A^a_0, \tag{5.106}$$

e tendo em vista (5.53), substituir na mesma as expressões (5.104) e (5.105), ficando com

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= F^a_{01}\pi^1_a - B_a\left(D_0 D_1\delta\omega^a + D_1 dA^a_0\right) \\
&= F^a_{01} f_{ab}{}^{c} B_c\delta\omega^b - B_a\left(D_1 D_0\delta\omega^a + f_{bc}{}^{a}\delta\omega^b F^c_{01} - D_1\delta A^a_0\right) \\
&= -B_a D_1\left(D_0\delta\omega^a - \delta A^a_0\right).
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Portanto, se impusermos que a ação seja invariante sobre transformações do tipo (5.104) e (5.105), o que implica em $\Delta\mathcal{L} = 0$, vamos ser conduzidos a uma relação entre $\delta\omega^a$ e δA_0^a, a saber:

$$\delta\omega^a = -\Lambda^a, \tag{5.108}$$

$$\delta A_0^a = D_0\Lambda^a, \tag{5.109}$$

que esta em completo acordo com (5.41) e (5.42). Em outras palavras, o modelo é invariante por transformações de gauge do tipo:

$$\delta A_\mu^a = D_\mu\Lambda^a, \tag{5.110}$$

$$\delta B_a = f_{ca}{}^{b} B_b\Lambda^c = -f_{ac}{}^{b} B_b\Lambda^c. \tag{5.111}$$

Com isso, sendo (5.103) o gerador das transformações canônicas, temos que o gerador das transformações de gauge sera dado por:

$$G^{can} \equiv \int \left[H_a^0 D_0\Lambda^a - K_a\Lambda\right] dy, \tag{5.112}$$

que pode ser verificado por

$$\left\{A_\mu^a, G^{gauge}\right\}^* = \delta_\mu^0 D_0\Lambda^a + \delta_\mu^1 D_1\Lambda^a = D_\mu\Lambda, \tag{5.113}$$

$$\left\{\pi_a^1, G^{gauge}\right\}^8 = -\delta_1^\mu f_{ab}{}^{c} B_c\Lambda^b. \tag{5.114}$$

5.2 Modelo BF Tridimensional

Na seção anterior estudamos o modelo BF em duas dimensões, encontrando as equações dinâmicas do mesmo, suas equações características, bem como, pela utilização das condições de integrabilidade, obtivemos o conjunto completo de vínculos do sistema. Nesse momento, com o intuito de estender esse estudo para o caso tridimensional, vamos partir da lagrangeana utilizada na seção anterior

$$W_{BF} = \int_{\mathcal{M}} Tr\left(B\wedge F\right), \tag{5.115}$$

e introduzir um novo invariante $Tr\left(B \wedge B \wedge B\right)$. Desta forma a nossa ação será escrita por

$$W_{BF} = \int_{\mathcal{M}} Tr\left(B \wedge F + \sigma B \wedge B \wedge B\right), \tag{5.116}$$

onde σ é uma constante. Diferentemente do caso bidimensional, tanto o nosso campo de conexão A como o nosso campo de fundo B agora serão duas 1-formas, dadas por

$$A = A^a_\mu J_a dx^\mu, \tag{5.117}$$

$$B = B^a_\mu J_a dx^\mu, \tag{5.118}$$

que juntamente com a 2-forma F

$$F = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} J_a dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{5.119}$$

nos conduzem a

$$\begin{aligned} B \wedge F &= \left(B^a_\mu J_a dx^\mu\right) \wedge \left(\frac{1}{2} F^b_{\gamma\nu} J_b dx^\gamma \wedge dx^\nu\right) \\ &= \frac{1}{2} B^a_\mu F^b_{\gamma\nu} J_a J_b dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu, \end{aligned} \tag{5.120}$$

que por sua vez

$$\begin{aligned} Tr\left(B \wedge F\right) &= Tr\left(\frac{1}{2} B^a_\mu F_{\gamma\nu} J_a J_b dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu\right) \\ &= \frac{1}{2} B^a_\mu F^b_{\gamma\nu} Tr\left(J_a J_b\right) dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu \qquad (5.121) \\ &= B^a_\mu F^b_{\gamma\nu} \eta_{ab} dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu \\ &= B_{a\mu} F^a_{\gamma\nu} dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu, \qquad (5.122) \end{aligned}$$

é justamente o primeiro termo da ação BF em três dimensões. Em 5.121 utilizamos a relação $\eta_{ab} = \frac{1}{2} Tr\left(J_a J_b\right)$. Para calcular o segundo termo da ação $Tr\left(B \wedge B \wedge B\right)$ vamos primeiro calcular

$$
\begin{aligned}
B \wedge B &= \left(B^a_\gamma J_a dx^\gamma\right) \wedge \left(B^b_\nu J_b dx^\nu\right) \\
&= \left(B^a_\gamma J_a B^b_\nu J_b dx^\gamma \wedge dx^\nu\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(B^a_\gamma J_a B^b_\nu J_b - B^b_\nu J_b B^a_\gamma J_a\right) dx^\gamma \wedge dx^\nu\right] \\
&= \left\{\frac{1}{2} B^a_\gamma B^b_\nu \left[J_a, J_b\right] dx^\gamma \wedge dx^\nu\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{2} f_{ab}{}^{c} B^a_\gamma B^b_\nu J_c dx^\gamma \wedge dx^\nu\right\},
\end{aligned} \tag{5.123}
$$

em seguida calcularemos

$$
\begin{aligned}
B \wedge (B \wedge B) &= = \left(B^a_\mu J_a dx^\mu\right) \wedge \left\{\frac{1}{2} f_{bc}{}^{d} B^b_\gamma B^c_\nu J_d dx^\gamma \wedge dx^\nu\right\} \\
&= \frac{1}{2} f_{bc}{}^{d} B^a_\mu B^c_\gamma B^d_\nu J_a J_d dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu,
\end{aligned} \tag{5.124}
$$

onde tomando o seu traço

$$
\begin{aligned}
Tr\left(B \wedge B \wedge B\right) &= Tr\frac{1}{2}\left(f_{bc}{}^{d} B^a_\mu B^c_\gamma B^d_\nu J_a J_d dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu\right) \\
&= \frac{1}{2} f_{bc}{}^{d} B^a_\mu B^c_\gamma B^d_\nu Tr\left(J_a J_d\right) dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu \\
&= f_{bc}{}^{d} B^a_\mu B^c_\gamma B^d_\nu \eta_{ad} dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu \\
&= f_{abc} B^a_\mu B^b_\gamma B^c_\nu dx^\mu \wedge dx^\gamma \wedge dx^\nu,
\end{aligned} \tag{5.125}
$$

ficaremos justamente com o segundo termo da ação em questão. Com isso, a ação que utilizaremos para estudar o modelo em três dimensões será

$$
\begin{aligned}
W_{BF} &= \int Tr\left(B \wedge F + \kappa B^a_\mu \wedge B^b_\gamma \wedge B^c_\nu\right) \\
&= \int d^3x \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(B_{a\mu}F^a_{\gamma\nu} - \frac{\Lambda}{3} f_{abc} B^a_\mu B^b_\gamma B^c_\nu\right),
\end{aligned} \tag{5.126}
$$

sendo $\kappa = -\dfrac{\Lambda}{3}$ facilmente podemos reconhecer a lagrangeana do sistema por

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(B_{a\mu}F^a_{\gamma\nu} - \frac{\Lambda}{3} f_{abc} B^a_\mu B^b_\gamma B^c_\nu\right). \tag{5.127}
$$

Agora, da mesma forma que fizemos para o modelo BF em duas dimensões, escreveremos a equação de Lie para, a partir dela, retirar tanto as equações de movimento dos campos como obter algumas simetrias do formalismo. Como os únicos campos independentes são A^a_μ e B^a_μ, a equação de Lie assumira a forma:

$$\Delta\mathcal{L} = E^A_a \delta A^a_\nu + E^B_a \delta B^a_\nu - \Theta^\mu{}_\alpha \delta x^\alpha + \partial_\mu G^\mu \tag{5.128}$$

Para obter a equação de movimento dos campos, calcularemos a equação de Lagrange para cada um deles, onde para o campo A será dada por

$$E^A_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^a_\nu} - \partial_\gamma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\gamma A^a_\nu}, \tag{5.129}$$

que calculando separadamente cada termo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^a_\mu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}\frac{\partial}{\partial A^a_\mu}\left(B_{b\alpha}F^b_{\beta\lambda} - \frac{\Lambda}{3}f_{bcd}B^b_\alpha B^c_\beta B^d_{\beta\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}B_{b\alpha}\frac{\partial}{\partial A^a_\mu}\left(\partial_\beta A^b_\lambda - \partial_\lambda A^b_\beta + f^b{}_{cd}A^c_\beta A^d_\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}B_{b\alpha}\frac{\partial}{\partial A^a_\mu}\left(f^b{}_{cd}A^c_\beta A^d_\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}B_{b\alpha}f^b{}_{cd}\left(\eta^\mu_\beta\delta^c_a A^d_\lambda + A^c_\beta\eta^\mu_\lambda\delta^d_a\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\lambda}f^b{}_{ad}B_{b\alpha}A^d_\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}f^b{}_{ca}B_{b\alpha}A^c_\beta \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\lambda}f^b{}_{ac}B_{b\alpha}A^c_\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\lambda\mu}f^b{}_{ca}B_{b\alpha}A^c_\lambda \\
&= \varepsilon^{\alpha\mu\lambda}f^b{}_{ac}B_{b\alpha}A^c_\lambda \\
&= \varepsilon^{\mu\alpha\lambda}f^a{}_{bc}B_{b\alpha}A^c_\lambda,
\end{aligned} \tag{5.130}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\gamma A^a_\mu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}\frac{\delta}{\delta\partial_\gamma A^a_\mu}\left(B_{b\alpha}F^b_{\beta\lambda} - \frac{\Lambda}{3}f_{bcd}B^b_\mu B^c_\beta B^d_\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}B_{b\alpha}\frac{\delta}{\delta\partial_\gamma A^a_\mu}\left(\partial_\beta A^b_\lambda - \partial_\lambda A^b_\beta + f^b{}_{cd}A^c_\beta A^d_\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda}B_{b\alpha}\left(\eta^\gamma_\beta\eta^\mu_\lambda\delta^b_a - \eta^\gamma_\lambda\eta^\mu_\beta\delta^b_a\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\gamma\mu}B_{a\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\gamma}B_{b\alpha} \\
&= \varepsilon^{\mu\alpha\gamma}B_{a\alpha}
\end{aligned} \tag{5.131}$$

obtemos a equação de movimento do campo

$$
\begin{aligned}
E^A_a &= \partial_\gamma \varepsilon^{\mu\alpha\gamma} B_{a\alpha} - \varepsilon^{\mu\alpha\lambda} f^a_{\ bc} B_{b\alpha} A^c_\lambda \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\gamma} \partial_\gamma B_{a\nu} - \varepsilon^{\mu\nu\gamma} f^a_{\ bc} B_{b\nu} A^c_\gamma \\
&= \varepsilon^{\mu\gamma\nu} \left(\delta^{ab} \partial_\gamma - f^a_{\ bc} A^c_\gamma \right) B_{b\nu} \\
&= \varepsilon^{\mu\gamma\nu} D_\gamma B_{a\nu}. \qquad (5.132)
\end{aligned}
$$

Sob a luz da equação de Lagrange para o campo B

$$
E^B_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^B_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu B^a_\mu} \qquad (5.133)
$$

é notório que apenas o segundo termo irá contribuir para a sua dinâmica. Escrevendo tal termo de forma explícita

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B^a_\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\gamma\nu} \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} \left(B_{b\alpha} F^b_{\gamma\nu} - \frac{\Lambda}{3} f_{bcd} B^b_\alpha B^c_\gamma B^d_\nu \right), \qquad (5.134)
$$

vemos que será útil calcular separadamente o primeiro termo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\gamma\nu} \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} \left(B_{b\alpha} F^b_{\gamma\nu} \right) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\gamma\nu} \eta_{\mu\alpha} \delta^b_a F^b_{\gamma\nu} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\gamma\nu} F^a_{\gamma\nu}, \qquad (5.135)
\end{aligned}
$$

e subtrair do mesmo a expressão para o segundo, que pode ser obtido calculando

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial B^a_\mu} \left(\frac{\Lambda}{3} f_{bcd} B^b_\alpha B^c_\gamma B^d_\nu \right) &= \frac{\Lambda}{3} f_{bcd} \left[B^c_\gamma B^d_\nu \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} B^b_\alpha + B^b_\alpha \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} \left(B^c_\gamma B^d_\nu \right) \right] \\
&= \frac{\Lambda}{3} f_{bcd} \left[B^c_\gamma B^d_\nu \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} B^b_\alpha + B^b_\alpha B^d_\nu \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} B^c_\gamma + B^b_\alpha B^c_\gamma \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} B^d_\nu \right] \\
&= \frac{\Lambda}{3} f_{bcd} \left[\eta^\mu_\alpha \delta^b_a B^c_\gamma B^d_\nu + \eta^\mu_\gamma \delta^c_a B^b_\alpha B^d_\nu + \eta^\mu_\nu \delta^d_a B^b_\alpha B^c_\gamma \right], \qquad (5.136)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\gamma\nu} \frac{\partial}{\partial B^a_\mu} \left(\frac{\Lambda}{3} f_{bcd} B^b_\alpha B^c_\gamma B^d_\nu \right) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\gamma\nu} \frac{\Lambda}{3} f_{acd} B^c_\gamma B^d_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \frac{\Lambda}{3} f_{bad} B^b_\alpha B^d_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\gamma\mu} \frac{\Lambda}{3} f_{bca} B^b_\alpha B^c_\gamma \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\gamma\nu} \frac{\Lambda}{3} f_{abc} B^b_\gamma B^c_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\mu\lambda} \frac{\Lambda}{3} f_{bac} B^b_\gamma B^c_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\nu\mu} \frac{\Lambda}{3} f_{bca} B^b_\gamma B^c_\nu \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\gamma\nu} \Lambda f_{abc} B^b_\gamma B^c_\nu, \qquad (5.137)
\end{aligned}
$$

que fica dado sob a forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B^a_\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}F^a_{\gamma\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\Lambda f_{abc}B^b_\gamma B^c_\nu,$$

sendo o mesmo justamente a equação de movimento do campo B que pode ser escrito como

$$E^B_a = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f_{abc}B^b_\gamma B^c_\nu\right). \tag{5.138}$$

Obtida as equações de movimento para os campos

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f_{abc}B^b_\gamma B^c_\nu\right) = 0 \tag{5.139}$$

$$\varepsilon^{\mu\gamma\nu}D_\gamma B_{a\nu} = 0 \tag{5.140}$$

podemos entender a equação (5.139) como sendo a equação dinâmica da gravidade tridimensional e (5.140) como sendo a condição de torção nula [7].

Assim conseguimos escrever a equação (5.128) por

$$\Delta\mathcal{L} = \varepsilon^{\mu\gamma\nu}D_\gamma B_{a\nu}A^a_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f_{abc}B^b_\gamma B^c_\nu\right)\delta B^a_\mu - \Theta^\mu{}_\alpha \delta x^\alpha + \partial_\mu G^\mu, \tag{5.141}$$

onde

$$\Theta^\mu{}_\alpha = \varepsilon^{\mu\gamma\nu}B_{a\gamma}\partial_\nu A^a_\mu - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \tag{5.142}$$

$$G^\mu = -\varepsilon^{\mu\gamma\nu}B_{a\gamma}\delta A^a_\nu + \Theta^\mu{}_\alpha \delta x^\alpha. \tag{5.143}$$

Considerando apenas as variações a ponto fixo, onde $\delta x^\alpha = 0$, a nossa equação de Lie toma a forma

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= \varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(D_\gamma B_{a\nu}\right)\delta A^a_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f_{abc}B^b_\gamma B^c_\nu\right)\delta B^a_\mu - \varepsilon^{\mu\gamma\nu}\partial_\mu\left(B_{a\gamma}\delta A^a_\nu\right) && (5.144)\\
&= \varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left[\delta A^a_\mu D_\gamma B_{a\nu} - \partial_\gamma\left(B_{a\nu}\delta A^a_\mu\right)\right] + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f_{abc}B^b_\gamma B^c_\nu\right)\delta B^a_\mu \\
&= \varepsilon^{\mu\gamma\nu}B_{a\nu}D_\gamma \delta A^a_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\gamma\nu}\left(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f_{abc}B^b_\gamma B^c_\nu\right)\delta B^a_\mu. && (5.145)
\end{aligned}$$

5.2.1 Análise de Hamilton-Jacobi

Utilizando a definição de momentos canônicos

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A_\mu^a} = \varepsilon^{0\mu\nu} B_{a\nu}, \tag{5.146}$$

$$\Pi_a^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 B_\mu^a} = 0, \tag{5.147}$$

podemos obter as expressões dos momentos conjugados aos campos A_μ^a e B_μ^a. Devido aos únicos momentos canônicos diferentes de zero não dependerem das velocidades $\partial_0 A_\mu^a$, $\partial_0 B_\mu^a$, a Hamiltoniana canônica vai ser dada

$$\mathcal{H}_0 = \pi_a^\mu \partial_0 A_\mu^a - \mathcal{L}, \tag{5.148}$$

que por sua vez pode ser escrita sob a forma

$$\mathcal{H}_c = -\varepsilon^{0\gamma\nu} \left[A_{a0} D_\gamma B_\nu^a + B_{a0} \left(F_{\gamma\nu}^a - \Lambda f_{\ bc}^{a} B_\gamma^b B_\nu^c \right) \right]. \tag{5.149}$$

Definindo $\pi \equiv \partial_0 S$, o conjunto inicial de equações de Hamilton-Jacobi fica dado por

$$\mathcal{H}^{'} \equiv \pi + \mathcal{H}_c = 0 \tag{5.150}$$

$$\mathcal{A}_a^{'0} \equiv \pi_a^0 = 0 \tag{5.151}$$

$$\mathcal{A}_a^{'1} \equiv \pi_a^1 - B_{a2} = 0 \tag{5.152}$$

$$\mathcal{A}_a^{'2} \equiv \pi_a^2 + B_{a1} = 0 \tag{5.153}$$

$$\mathcal{B}_a^{'\mu} \equiv \Pi_a^\mu = 0. \tag{5.154}$$

As equações de Hamilton-Jacobi são relacionadas com os parâmetros da teoria, onde podemos identificar que $\mathcal{H}^{'}$ está associada com o parâmetro temporal, bem como os vínculos $\mathcal{A}_a^{'\mu}$, $\mathcal{B}_a^{'\mu}$ estão associados respectivamente com a variáveis, que agora podem ser tomadas como parâmetros $\lambda_\mu^a \equiv A_\mu^a$ e $\epsilon_\mu^a \equiv B_\mu^a$. Da mesma forma que fizemos no estudo do modelo BF em duas dimensões, podemos escrever a expressão dos Parênteses de Poisson para os campos da seguinte maneira

$$\left\{A_{\mu}^{a}\left(x\right),\pi_{b}^{\nu}\left(y\right)\right\}=\delta_{b}^{a}\delta_{\mu}^{\nu}\delta\left(x-y\right) \tag{5.155}$$

$$\left\{B_{\mu}^{a}\left(x\right),\Pi_{b}^{\nu}\left(y\right)\right\}=\delta_{b}^{a}\delta_{\mu}^{\nu}\delta\left(x-y\right). \tag{5.156}$$

Desta forma, a evolução de uma grandeza física do sistema será dada pelo diferencial fundamental escrito por meio dos Parênteses de Poisson definidos acima, sob a seguinte forma

$$dF\left(x\right)=\int\left[\left\{F\left(x\right),\mathcal{H}'\left(y\right)\right\}dt+\left\{F\left(x\right),\mathcal{A}_{a}^{\prime\mu}\left(y\right)\right\}d\lambda_{\mu}^{a}+\left\{F\left(x\right),\mathcal{B}_{a}^{\prime\mu}\left(y\right)\right\}d\epsilon_{\mu}^{a}\right]d^{2}y. \tag{5.157}$$

O diferencial fundamental pode ser utilizado para testar a integrabilidade do sistema e para encontrar novos vínculos, se for o caso de existirem. Agora, com o intuito de analisar a involução dos vínculos que já conhecemos, calcularemos os parênteses de Poisson dos mesmos,

$$\left\{\mathcal{A}_{a}^{\prime1},\mathcal{A}_{b}^{\prime2}\right\}=\left\{\pi_{a}^{1}-B_{a2},\pi_{a}^{2}-B_{a1}\right\}=0, \tag{5.158}$$

$$\left\{\mathcal{A}_{a}^{\prime1},\mathcal{B}_{b}^{\prime1}\right\}=\left\{\pi_{a}^{1}-B_{a2},\Pi_{b}^{1}\right\}=0, \tag{5.159}$$

$$\left\{\mathcal{A}_{a}^{\prime1},\mathcal{B}_{b}^{\prime2}\right\}=\left\{\pi_{a}^{1}-B_{a2},\Pi_{b}^{2}\right\}=-\delta_{b}^{a}\delta^{2}\left(x-y\right), \tag{5.160}$$

$$\left\{\mathcal{A}_{a}^{\prime2},\mathcal{B}_{b}^{\prime1}\right\}=\left\{\pi_{a}^{2}+B_{a1},\Pi_{b}^{1}\right\}=\delta_{b}^{a}\delta^{2}\left(x-y\right), \tag{5.161}$$

$$\left\{\mathcal{A}_{a}^{\prime2},\mathcal{B}_{b}^{\prime2}\right\}=\left\{\pi_{a}^{2}-B_{a1},\Pi_{b}^{2}\right\}=0, \tag{5.162}$$

$$\left\{\mathcal{B}_{a}^{\prime1},\mathcal{B}_{b}^{\prime2}\right\}=\left\{\Pi_{a}^{1},\Pi_{b}^{2}\right\}=0, \tag{5.163}$$

onde por meio destes somos capazes de construir a matriz M^{ab}, dada por

$$M_{rs}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{ab}\delta^{2}\left(x-y\right),$$

e calcular a sua inversa M_{ab}^{-1}

$$M_{rs}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{ab}\delta^{2}\left(x-y\right)$$

Renomeando os vínculos de forma conveniente por $h^0 \equiv \mathcal{A}_a^{\prime 1}$, $h^1 \equiv \mathcal{A}_a^{\prime 2}$, $h^2 \equiv \mathcal{B}_a^{\prime 1}$, $h^3 \equiv \mathcal{A}_a^{\prime 4}$, conseguimos escrever os parênteses generalizados sob a forma

$$\left\{\mathcal{F}\left(x\right),\mathcal{G}\left(y\right)\right\}^{*} = \left\{\mathcal{F}\left(x\right),\mathcal{G}\left(y\right)\right\} - \int \left\{\mathcal{F}\left(x\right),h^{\prime r}\left(z\right)\right\} M_{rs}^{-1}\left(z,w\right)\left\{h^{\prime s}\left(w\right),\mathcal{G}\left(y\right)\right\} \quad (5.164)$$

com $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$. Utilizando a definição acima conseguimos obter o análogo aos parênteses canônicos para o formalismo dos parênteses generalizados, que são os únicos parênteses generalizados não nulos e são dados por

$$\left\{A_{\mu}^{a}\left(x\right),\pi_{b}^{\nu}\left(y\right)\right\}^{*} = \delta_{b}^{a}\delta_{\mu}^{\nu}\delta^{2}\left(x-y\right), \quad (5.165)$$

$$\left\{B_{0}^{a}\left(x\right),\Pi_{b}^{0}\left(y\right)\right\}^{*} = \delta_{b}^{a}\delta^{2}\left(x-y\right), \quad (5.166)$$

$$\left\{A_{\mu}^{a}\left(x\right),B_{\nu}^{b}\left(y\right)\right\}^{*} = \delta^{ab}\varepsilon_{0\mu\nu}\delta^{2}\left(x-y\right). \quad (5.167)$$

Agora, analisando os PG obtidos, percebemos que B_a^i e Π_i^a não são mais variáveis canonicamente conjugadas. De fato, percebemos que B_a^1 assume o papel de variável canonicamente conjugadas a $-A_a^2$, e B_a^2 o de variável canonicamente conjugada a A_a^1. Depois de construir os parênteses generalizados, reduzimos o espaço de fase do nosso sistema, e desta forma reduzimos a expressão do diferencial fundamental (5.164) a

$$dF\left(x\right) = \int \left[\left\{F\left(x\right),\mathcal{H}^{\prime}\right\}^{*} dt + \left\{F\left(x\right),\mathcal{A}_{a}^{\prime 0}\right\}^{*} dA_{0}^{a} + \left\{F\left(x\right),\mathcal{B}_{a}^{\prime 0}\right\}^{*} dB_{0}^{a}\right] d^{2}y. \quad (5.168)$$

Para analisar a integrabilidade do nosso sistema vamos utilizar a condição de integrabilidade para testar se o nosso conjunto de vínculos involutivos é completo ou se precisamos adicionar novos vínculos a teoria. Para isso vamos calcular

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathcal{A}_a^{'0}, \mathcal{H}^{'}(y)\right\}^* &= \left\{\pi_a^0, \pi + \mathcal{H}_0\right\}^* \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\pi_a^0, A_{b0} D_\gamma B_\nu^b\right\}^* \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu} D_\gamma B_\nu^a,
\end{aligned}
\tag{5.169}
$$

desta forma, devemos incluir na teoria um novo vínculo

$$
\mathcal{C}^{'a} \equiv \varepsilon^{ij} D_i B_j^a = 0. \tag{5.170}
$$

Do mesmo modo que fizemos anteriormente para o campo $\mathcal{A}_a^{'0}$, podemos calcular

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathcal{B}_a^{'0}, H_0(y)\right\}^* &= \left\{\Pi_a^0, \pi + \mathcal{H}_0\right\}^* \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\Pi_a^0, B_{b0}\left(F_{\gamma\nu}^b - \Lambda f^b_{\ cd} B_\gamma^c B_\nu^d\right)\right\}^8 \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\left(F_{\gamma\nu}^a - \Lambda f^a_{\ bc} B_\gamma^b B_\nu^c\right),
\end{aligned}
\tag{5.171}
$$

que também deve ser visto como um novo vínculo

$$
\mathcal{D}^{'} \equiv \varepsilon^{ij}\left[F_{ij}^a - \Lambda f^a_{\ bc} B_i^b B_j^c\right] = 0. \tag{5.172}
$$

É importante notar que a condição de integrabilidade ainda deve ser aplicada aos novos vínculos $\mathcal{C}^{'}$ e $\mathcal{D}^{'}$, porém se aplicadas, perceberemos que nos conduzem a $d\mathcal{C}^{'} = 0$ e $d\mathcal{D}^{'} = 0$. O que implica em um conjunto completo de vínculos involutivos e por sua vez na integrabilidade do sistema.

Também podemos notar que a nossa Hamiltoniana canônica agora pode ser escrita sob a forma

$$
\mathcal{H}_0 = -A_{a0}\mathcal{C}^{'} - B_{b0}\mathcal{D}^{'}, \tag{5.173}
$$

e com isso somos capazes de identificar os campos A_{a0} e B_{a0} como multiplicadores de Lagrange. No sentido de buscar uma álgebra de Lie dos vínculos podemos definir

$$
C^{'a}(\alpha) \equiv \int \alpha(y)\, \mathcal{C}^{'a}(y)\, d^2y, \tag{5.174}
$$

$$
D^{'a}(\beta) \equiv \int \beta(y)\, \mathcal{C}^{'a}(y)\, d^2y, \tag{5.175}
$$

onde $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ são funções de controle. Desta forma as relações

$$
\left\{\mathcal{C}^{'a}(\alpha_1), \mathcal{C}^{'b}(\alpha_2)\right\}^* = f^{ab}_{\ \ c}\,\mathcal{C}^{'c}(\alpha_1, \alpha_2), \tag{5.176}
$$

$$\left\{\mathcal{C}'^{a}\left(\alpha_{1}\right),\mathcal{D}'^{b}\left(\beta_{1}\right)\right\}^{*}=f^{ab}{}_{c}\mathcal{D}'^{c}\left(\alpha_{1},\beta_{1}\right), \tag{5.177}$$

$$\left\{\mathcal{D}'^{a}\left(\beta_{1}\right),\mathcal{D}'^{b}\left(\beta_{2}\right)\right\}^{*}=-\Lambda f^{ab}{}_{c}\mathcal{D}'^{c}\left(\beta_{1},\beta_{2}\right), \tag{5.178}$$

podem ser verificadas.

5.2.2 Equações Características

Na seção anterior utilizamos a álgebra dos parênteses de Poisson dos vínculos para diferenciá-los em involutivos e não involutivos e em seguida nos fizemos valer da condição de integrabilidade para encontrar um conjunto completo de vínculos involutivos: $\mathcal{A}'^{0},\mathcal{B}'^{0},\mathcal{C}'^{0},\mathcal{D}'^{0}$. Renomeando-os de forma adequada e indicando o parâmetro dos quais cada um deles está associado

$$H_{a}^{0}\equiv\mathcal{A}_{a}'^{0}\rightarrow\omega_{a}^{0}, \tag{5.179}$$

$$H_{a}^{1}\equiv\mathcal{B}_{a}'^{0}\rightarrow\omega_{a}^{1}, \tag{5.180}$$

$$H_{a}^{2}\equiv\mathcal{C}_{a}'\rightarrow\omega_{a}^{2}, \tag{5.181}$$

$$H_{a}^{3}\equiv\mathcal{D}_{a}'\rightarrow\omega_{a}^{3}, \tag{5.182}$$

conseguindo escrever o diferencial fundamental do nosso sistema sob a forma

$$dF\left(x\right)=\int\left(\left\{F\left(x\right),\mathcal{H}'\left(y\right)\right\}^{*}dt+\left\{F\left(x\right),\mathcal{H}_{a}'^{\kappa}\right\}^{*}d\omega_{a}^{\kappa}\right)dy, \tag{5.183}$$

onde κ assume valores $\kappa=0,1,2,3$. Desta forma somos capazes de notar que os vínculos assumem o papel de geradores da dinâmica na direção de cada um dos seus parâmetros correspondentes. Neste momento vamos buscar as equações características para todos os campos A_{μ}^{a}e B_{μ}^{a}e todos os momentos conjugados ao mesmo π_{a}^{μ} e Π_{a}^{μ}. Para isso iremos calcular

$$dA_{\mu}^{a}\left(x\right)=\int\left(\left\{A_{\mu}^{a}\left(x\right),\mathcal{H}'\left(y\right)\right\}^{*}dt+\left\{A_{\mu}^{a}\left(x\right),\mathcal{H}_{b}'^{\kappa}\right\}^{*}d\omega_{b}^{\kappa}\right)dy, \tag{5.184}$$

onde se fizermos separadamente

$$
\begin{aligned}
\left\{A^a_\mu(x),\mathcal{H}'(y)\right\}^* &= \left\{A^a_\mu,\pi+\mathcal{H}_0\right\}^*\\
&= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{A^a_\mu,\left[B^b_\nu D_\gamma A_{b0}+B_{b0}\left(F^b_{\gamma\nu}-\Lambda f^b_{\ cd}B^c_\gamma B^d_\nu\right)\right]\right\}^*\\
&= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{A^a_\mu,B^b_\nu\right\}^* D_\gamma A_{b0}-\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\left\{A^a_\mu,B^c_\gamma\right\}^* B^d_\nu+\left\{A^a_\mu,B^d_\nu\right\}^* B^c_\gamma\right]B_{b0}\Lambda f^b_{\ cd}\\
&= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\varepsilon_{0\mu\nu}\delta^{ab}\delta^2(x-y)D_\gamma A_{b0}-\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\varepsilon_{0\mu\gamma}\delta^{ac}\delta^2(x-y)B^d_\nu+\varepsilon_{0\mu\nu}\delta^{ad}\delta^2(x-y)B\right.\\
&= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\varepsilon_{0\mu\nu}\delta^{ab}D_\gamma A_{b0}+\left[\varepsilon_{0\mu\gamma}\delta^{ac}B^d_\nu+\varepsilon_{0\mu\nu}\delta^{ad}B^c_\gamma\right]B_{b0}\Lambda f^b_{\ cd}\right\}\delta^2(x-y)\\
&= -\left\{\delta^i_k\delta^{ab}D_iA_{b0}+\delta^j_k\Lambda f^a_{\ bc}B^c_jB_{b0}+\delta^i_k\Lambda f^a_{\ bc}B^c_iB_{b0}\right\}\delta^2(x-y)\\
&= -\delta^i_k\left\{D_iA^a_0-2\Lambda f^a_{\ bc}B^b_iB_{c0}\right\}\delta^2(x-y)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{A^a_\mu(x),\mathcal{A}'^0_b(y)\right\}^* = \left\{A^a_\mu,\pi^0_b\right\}^*=\delta^0_\mu\delta^a_b\delta^2(x-y), \tag{5.186}
$$

$$
\left\{A^a_\mu(x),\mathcal{B}'^0_b(y)\right\}^* = \left\{A^a_\mu,\Pi^0_b\right\}^*=0, \tag{5.187}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{A^a_\mu(x),\mathcal{C}'_b(y)\right\}^* &= \left\{A^a_\mu,\varepsilon^{0\gamma\nu}D_\gamma B^b_\nu\right\}^*\\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}D_\gamma\left\{A^a_\mu,B^b_\nu\right\}^*\\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}D_\gamma\delta^{ab}\varepsilon_{0\mu\nu}\delta^2(x-y)\\
&= \delta^{ab}\delta^i_kD_i\delta^2(x-y),
\end{aligned}
\tag{5.188}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{A^a_\mu(x),\mathcal{D}'_b(y)\right\}^* &= \left\{A^a_\mu,\frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[F^b_{\gamma\nu}-\Lambda f^b_{\ cd}B^c_\gamma B^d_\nu\right]\right\}^*\\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\left\{A^a_\mu,B^c_\gamma\right\}^*\Lambda f^b_{\ cd}B^d_\nu+\left\{A^a_\mu,B^d_\nu\right\}^*\Lambda f^b_{\ cd}B^c_\gamma\right]\\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\delta^{ac}\varepsilon_{0\mu\gamma}\delta^2(x-y)\Lambda f^b_{\ cd}B^d_\nu+\delta^{ad}\varepsilon_{0\mu\nu}\delta^2(x-y)\Lambda f^b_{\ cd}B^c_\gamma\right]\\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[-\varepsilon_{0\mu\gamma}\Lambda f^a_{\ bc}B^c_\nu+\varepsilon_{0\mu\nu}\Lambda f^a_{\ bc}B^c_\gamma\right]\delta^2(x-y)\\
&= -\frac{1}{2}\left[\delta^i_k\Lambda f^a_{\ bc}B^c_i+\delta^i_k\Lambda f^a_{\ bc}B^c_i\right]\delta^2(x-y)\\
&= -\delta^i_k\Lambda f^a_{\ bc}B^c_i\delta^2(x-y)
\end{aligned}
\tag{5.189}
$$

e com isso obtemos a primeira equação característica para o campo A^a_μ

$$
dA^a_\mu=\delta^0_\mu\delta^{ab}d\omega^0_b-\delta^i_\mu\left[\left(D_iA^a_0-2\Lambda f^a_{\ bc}B^b_iB^c_0\right)dt-\delta^{ab}D_id\omega^2_b+\Lambda f^{ab}_{\ \ c}B^c_id\omega^3_b\right]. \tag{5.190}
$$

Seguindo o procedimento análogo ao que tomamos anteriormente, agora para o campo B_μ^a

$$dB_\mu^a(x) = \int \left(\left\{ B_\mu^a(x), \mathcal{H}'(y) \right\}^* dt + \left\{ B_\mu^a(x), \mathcal{H}_a'^\kappa \right\}^* d\omega_a^\kappa \right) dy, \tag{5.191}$$

vamos começar calculando

$$\begin{aligned} \left\{ B_\mu^a(x), \mathcal{H}'(y) \right\}^* &= \left\{ B_\mu^a, \pi + \mathcal{H}_0 \right\}^* \\ &= -\varepsilon^{0\gamma\nu} \left\{ B_\mu^a, \left[A_{b0} D_\gamma B_\nu^b + B_{b0} \left(F_{\gamma\nu}^b - \Lambda f^b{}_{cd} B_\gamma^c B_\nu^d \right) \right] \right\}^* \\ &= -\varepsilon^{0\gamma\nu} \left\{ B_\mu^a, A_{b0} D_\gamma B_\nu^b \right\}^* - \varepsilon^{0\gamma\nu} \left\{ B_\mu^a, F_{\gamma\nu}^b \right\}^* B_{b0} \end{aligned} \tag{5.192}$$

onde

$$\begin{aligned} \left\{ B_\mu^a, A_{b0} D_\gamma B_\nu^b \right\}^* &= A_{b0} \left\{ B_\mu^a, D_\gamma B_\nu^b \right\}^* + \left\{ B_\mu^a, A_{b0} \right\}^* D_\gamma B_\nu^b \\ &= \left\{ B_\mu^a, A_\gamma^c \right\}^* f^b{}_{cd} A_{b0} B_\nu^d \\ &= -\delta^{ac} \varepsilon_{0\gamma\mu} \delta^2(x-y) f^b{}_{cd} A_{b0} B_\nu^d \\ &= -\varepsilon_{0\mu\gamma} f^a{}_{bc} A_{b0} B_\nu^c \delta^2(x-y) \end{aligned} \tag{5.193}$$

e

$$\begin{aligned} \left\{ B_\mu^a, F_{\gamma\nu}^b \right\}^* &= \left\{ B_\mu^a, F_{\gamma\nu}^b \right\}^* \\ &= \left\{ B_\mu^a, \left(\partial_\gamma A_\nu^b - \partial_\nu A_\gamma^b + f^b{}_{cd} A_\gamma^c A_\nu^d \right) \right\}^* \\ &= \partial_\gamma \left\{ B_\mu^a, A_\nu^b \right\}^* - \partial_\nu \left\{ B_\mu^a, A_\gamma^b \right\}^* + f^b{}_{cd} \left[\left\{ B_\mu^a, A_\gamma^c \right\}^* A_\nu^d + \left\{ B_\mu^a, A_\nu^d \right\}^* A_\gamma^c \right] \\ &= \left\{ -\partial_\gamma \delta^{ab} \varepsilon_{0\mu\nu} + \partial_\nu \delta^{ab} \varepsilon_{0\mu\gamma} + \left[-\varepsilon_{0\mu\gamma} f^a{}_{bc} A_\nu^c + \varepsilon_{0\mu\nu} f^a{}_{bc} A_\gamma^c \right] \right\} \delta^2(x-y) \\ &= \left\{ -\varepsilon_{0\mu\nu} \left(\delta^{ab} \partial_\gamma - f^a{}_{bc} A_\gamma^c \right) + \varepsilon_{0\mu\gamma} \left(\delta^{ab} \partial_\nu - f^a{}_{bc} A_\nu^c \right) \right\} \delta^2(x-y) \\ &= \left\{ -\varepsilon_{0\mu\nu} D_\gamma + \varepsilon_{0\mu\gamma} D_\nu \right\} \delta^2(x-y) \end{aligned} \tag{5.194}$$

com isso

$$\begin{aligned} \left\{ B_\mu^a(x), \mathcal{H}'(y) \right\}^* &= -\varepsilon^{0\gamma\nu} \left[-\varepsilon_{0\mu\gamma} f^a{}_{bc} A_{b0} B_\nu^c \right] \delta^2(x-y) - \varepsilon^{0\gamma\nu} \left\{ -\varepsilon_{0\mu\nu} D_\gamma + \varepsilon_{0\mu\gamma} D_\nu \right\} \delta^2(x-y) B_{b0} \\ &= -\delta_k^i f^a{}_{bc} A_{b0} B_i^c \delta^2(x-y) - \left\{ -\delta_k^i D_i - \delta_k^i D_i \right\} \delta^2(x-y) B_{b0} \\ &= \delta_k^i \left\{ 2 D_i B_{b0} - f^a{}_{bc} A_{b0} B_i^c \right\} \delta^2(x-y) \end{aligned} \tag{5.195}$$

em seguida devemos calcular

$$\left\{B^a_\mu(x), \mathcal{H}'^0_b(y)\right\}^* = \left\{B^a_\mu, \pi^0_b\right\}^* = 0, \tag{5.196}$$

$$\left\{B^a_\mu(x), \mathcal{H}'^1_b(y)\right\}^* = \left\{B^a_\mu, \Pi^0_b\right\}^* = \delta^0_\mu \delta^a_b \delta^2(x-y), \tag{5.197}$$

$$\begin{aligned}\left\{B^a_\mu(x), \mathcal{H}'^2_b(y)\right\}^* &= \left\{B^a_\mu, \varepsilon^{0\gamma\nu} D_\gamma B^b_\nu\right\}^* \\ &= \varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{B^a_\mu, A^c_\gamma\right\}^* f^b{}_{cd} B^d_\nu \\ &= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\varepsilon_{0\gamma\mu}\delta^{ac}\delta^2(x-y) f^b{}_{cd} B^d_\nu \\ &= -\delta^i_k f^a{}_{bc} B^b_\nu \delta^2(x-y)\end{aligned} \tag{5.198}$$

$$\begin{aligned}\left\{B^a_\mu(x), \mathcal{H}'^3_b(y)\right\}^* &= \left\{B^a_\mu, \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[F^b_{\gamma\nu} - \Lambda f^b{}_{cd} B^c_\gamma B^d_\nu\right]\right\}^* \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{B^a_\mu, \left(\partial_\gamma A^b_\nu - \partial_\nu A^b_\gamma + f^b{}_{cd} A^c_\gamma A^d_\nu\right)\right\}^* \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\partial_\gamma \left\{B^a_\mu, A^b_\nu\right\}^* - \partial_\nu \left\{B^a_\mu, A^b_\gamma\right\}^* + f^b{}_{cd}\left[\left\{B^a_\mu, A^c_\gamma\right\}^* A^d_\nu + \left\{B^a_\mu, A^d_\nu\right\}^* A^c_\gamma\right]\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\partial_\gamma \varepsilon_{0\mu\nu}\delta^{ab} - \partial_\nu \varepsilon_{0\mu\gamma}\delta^{ab} - \varepsilon_{0\mu\gamma} f^a{}_{bc} A^c_\nu + \varepsilon_{0\mu\nu} f^a{}_{bc} A^c_\gamma\right]\delta^2(x-y) \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\varepsilon_{0\mu\nu}\left(\delta^{ab}\partial_\gamma + f^a{}_{bc} A^c_\gamma\right) - \varepsilon_{0\mu\gamma}\left(\delta^{ab}\partial_\nu + f^a{}_{bc} A^c_\nu\right)\right]\delta^2(x-y) \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\varepsilon_{0\mu\nu} D_\gamma - \varepsilon_{0\mu\gamma} D_\nu\right]\delta^2(x-y) \\ &= -\delta^i_k D_i \delta^2(x-y)\end{aligned} \tag{5.199}$$

obtendo

$$dB^a_\mu = \delta^0_\mu d\omega^{a1} + \delta^i_\mu \left[\left(D_i B^a_0 - f^a{}_{bc} A^b_0 B^c_i\right) dt - f^{ab}{}_c B^b_i d\omega^2_c - \delta^{ab} D_i d\omega^3_b\right], \tag{5.200}$$

que é justamente a equação característica de B^a_μ. Para obter a equação característica para os momentos canônicos comecemos por calcular

$$d\pi^\mu_a(x) = \int \left(\left\{\pi^\mu_a(x), \mathcal{H}'(y)\right\}^* dt + \left\{\pi^\mu_a(x), \mathcal{H}'^\kappa_a\right\}^* d\omega^\kappa_a\right) dy, \tag{5.201}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\left\{\pi_a^\mu(x), \mathcal{H}'(y)\right\}^* &= \left\{\pi_a^\mu, -\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[A_{b0}D_\gamma B_\nu^b + B_{b0}\left(F_{\gamma\nu}^b - \Lambda f_{cd}^b B_\gamma^c B_\nu^d\right)\right]\right\}^* \\
&= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\pi_a^\mu, A_{b0}D_\gamma B_\nu^b\right\}^* - \varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\pi_a^\mu, B_{b0}F_{\gamma\nu}^b\right\}^* \\
&= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\left\{\pi_a^\mu, A_{b0}\right\}^* D_\gamma B_\nu^b + B_{b0}\left\{\pi_a^\mu, A_\nu^b\right\}^* D_\gamma + \left\{\pi_a^\mu, A_\gamma^c\right\}^* f_{cd}^b B_{b0} A_\nu^d\right] \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\delta_0^\mu \delta_{ab} D_\gamma B_\nu^b + \delta_\nu^\mu \delta_a^b B_{b0} D_\gamma + \delta_\gamma^\mu \delta_a^c \delta^2 f^b{}_{cd} B_{b0} A_\nu^d\right]\delta^2(x-y) \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\delta_0^\mu D_\gamma B_{a\nu} + \delta_\nu^\mu\left(B_{a0}D_\gamma + f_a{}^{bc} A_b B_{c\gamma}\right)\right]\delta^2(x-y), \qquad (5.202)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\pi_a^\mu(x), \mathcal{H}_b'^0(y)\right\}^* = \left\{\pi_a^\mu(x), \mathcal{H}_b'^1(y)\right\}^* = 0, \qquad (5.203)
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\pi_a^\mu(x), \mathcal{H}_b'^2(y)\right\}^* &= \left\{\pi_a^\mu, \varepsilon^{0\gamma\nu} D_\gamma B_\nu^b\right\}^* \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\pi_a^\mu, A_\gamma^c\right\}^* f^b{}_{cd} B_\nu^d \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\delta_\gamma^\mu \delta^2(x-y) f^a{}_{bc} B_\nu^c, \qquad (5.204)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\pi_a^\mu(x), \mathcal{H}_b'^3(y)\right\}^* &= \left\{\pi_a^\mu, \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[F_{\gamma\nu}^b - \Lambda f^b{}_{cd} B_\gamma^c B_\nu^d\right]\right\}^* \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\pi_a^\mu, \left(\partial_\gamma A_\nu^b - \partial_\nu A_\gamma^b + f^b{}_{cd} A_\gamma^c A_\nu^d\right)\right\}^* \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\pi_a^\mu, \partial_\gamma A_\nu^b\right\}^* - \left\{\pi_a^\mu, \partial_\nu A_\gamma^b\right\}^* + f^b{}_{cd}\left\{\pi_a^\mu, A_\gamma^c A_\nu^d\right\}^* \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\delta_\nu^\mu \delta_a^b \partial_\gamma - \delta_\gamma^\mu \delta_a^b \partial_\nu + f^b{}_{cd}\delta_\gamma^\mu \delta_a^c A_\nu^d + f^b{}_{cd}\delta_\nu^\mu \delta_a^d A_\gamma^c\right]\delta^2(x-y) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[\delta_\nu^\mu\left(\delta_a^b \partial_\gamma + f^a{}_{bc} A_\gamma^c\right) - \delta_\gamma^\mu\left(\delta_a^b \partial_\nu + f^a{}_{bc} A_\nu^c\right)\right]\delta^2(x-y) \\
&= \varepsilon^{0\gamma\mu}\delta_\nu^\mu D_\gamma \delta^2(x-y) \qquad (5.205)
\end{aligned}
$$

resultando em

$$
d\pi_a^\mu = \varepsilon^{0\gamma\rho}\left[\delta_0^\mu D_\gamma B_{a\rho} - \delta_\rho^\mu\left(D_\gamma B_{a0} - f_a{}^{bc} A_{b0} B_{c\gamma}\right)\right] + \varepsilon^{0\gamma\rho}\left[\delta_\gamma^\mu f_a{}^{bc} B_{c\rho} d\omega_b^2 + \delta_\gamma^\mu \delta_a^b D_\gamma d\omega_b^3\right]. \qquad (5.206)
$$

Para o último momento,

$$
d\Pi_a^\mu(x) = \int\left(\left\{\Pi_a^\mu(x), \mathcal{H}'(y)\right\}^* dt + \left\{\Pi_a^\mu(x), \mathcal{H}_a'^\kappa\right\}^* d\omega_a^\kappa\right) dy, \qquad (5.207)
$$

calculamos

$$
\begin{aligned}
\left\{\Pi_a^\mu\left(x\right),\mathcal{H}^{'}\left(y\right)\right\}^* &= \left\{\Pi_a^\mu,\pi+\mathcal{H}_0\right\}^* \\
&= \left\{\Pi_a^\mu,-\varepsilon^{0\gamma\nu}\left[A_{b0}D_\gamma B_\nu^b+B_{b0}\left(F_{\gamma\nu}^b-\Lambda f^b_{\ cd}B_\gamma^c B_\nu^d\right)\right]\right\}^* \\
&= -\varepsilon^{0\gamma\nu}\left\{\Pi_a^\mu,B_{b0}\right\}^*\left(F_{\gamma\nu}^b-\Lambda f^b_{\ cd}B_\gamma^c B_\nu^d\right) \\
&= \varepsilon^{0\gamma\nu}\delta_b^a\delta^2\left(x-y\right)\mathcal{H}_b^{'3}\left(y\right),
\end{aligned}
\tag{5.208}
$$

$$
\left\{\Pi_a^\mu\left(x\right),\mathcal{H}_b^{'2}\left(y\right)\right\}^*=\left\{\Pi_a^\mu\left(x\right),\mathcal{H}_b^{'1}\left(y\right)\right\}^*=\left\{\Pi_a^\mu\left(x\right),\mathcal{H}_b^{'3}\left(y\right)\right\}^*0, \tag{5.209}
$$

que completa o nosso conjunto de equações características com a expressão

$$
d\Pi_a^\mu=\delta_0^\mu\mathcal{H}_a^{'3}dt. \tag{5.210}
$$

O nosso conjunto de equações características então fica dado por

$$
dA_\mu^a=\delta_\mu^0\delta^{ab}d\omega_b^0+\delta_\mu^i\left[\left(D_iA_0^a-\Lambda f^a_{\ bc}B_i^bB_0^c\right)dt-\delta^{ab}D_id\omega_b^2+\Lambda f^{ab}_{\ \ c}B_c^id\omega_b^3\right], \tag{5.211}
$$

$$
dB_\mu^a=\delta_\mu^0d\omega^{a1}+\delta_\mu^i\left[\left(D_iB_0^a-f^a_{\ bc}A_0^bB_i^c\right)dt-f^{ab}_{\ \ c}B_i^bd\omega_c^2-\delta^{ab}D_id\omega_b^3\right], \tag{5.212}
$$

$$
d\pi_a^\mu=\varepsilon^{0\gamma\rho}\left[\delta_0^\mu D_\gamma B_{a\rho}-\delta_\rho^\mu\left(D_\gamma B_{a0}-f_a^{\ bc}A_{b0}B_{c\gamma}\right)\right]+\varepsilon^{0\gamma\rho}\left[\delta_\gamma^\mu f_a^{\ bc}B_{c\rho}d\omega_b^2+\delta_\gamma^\mu\delta_a^bD_\gamma d\omega_b^3\right], \tag{5.213}
$$

$$
d\Pi_a^\mu=\delta_0^\mu\mathcal{H}_a^{'3}dt. \tag{5.214}
$$

A independência dos parâmetros é condição necessária para a integrabilidade do sistema, que já vimos que se verifica. Com isso o diferencial fundamental nos diz sobre a evolução temporal do nosso sistema que vai ser dada por

$$
\partial_0A_\mu^a=\delta_\mu^i\left(D_iA_0^a-\Lambda f^a_{\ bc}B_i^bB_0^c\right), \tag{5.215}
$$

$$
\partial_0B_\mu^a=\delta_\mu^i\left(D_iB_0^a-f^a_{\ bc}A_0^bB_i^c\right). \tag{5.216}
$$

Comparando as equações (5.139) com (5.215) percebemos que as suas componentes espaciais coincidem, o que também se repete se analisarmos as equações (5.140) e (5.216).

Do mesmo modo que para o campos, a evolução temporal dos momentos fica dado por

$$\partial_0 \pi_a^\mu = \varepsilon^{0\gamma\rho} \left[\delta_0^\mu D_\gamma B_{a\rho} - \delta_\rho^\mu \left(D_\gamma B_{a0} - f_a{}^{bc} A_{b0} B_{c\gamma} \right) \right], \tag{5.217}$$

$$\partial_0 \Pi_a^\mu = \delta_0^\mu \mathcal{H}_a'^3. \tag{5.218}$$

Nesse momento notamos que a evolução temporal da componente $\mu = 0$ de π_a^μ coincide com a equação de vínculo (5.170). Já a componente espacial do momento está de acordo com a definição do momento canônico.

5.2.3 Geradores das Transformações Canônicas e de Gauge

Na seção passando fizemos uma análise da evolução do sistema na direção temporal e com isso conseguimos obter as equações movimento para os campos A_μ^a e B_μ^a, bem como as equações de vínculos. Contudo, as equações características também podem nos fornecer a evolução do sistema na direção dos parâmetros ω_a^κ. Definindo o nosso gerador das transformações canônicas por

$$G^{can} \equiv \int \mathcal{H}_\kappa'^a \delta\omega_a^\kappa d^2x, \tag{5.219}$$

somos capazes de escrever as varições na direção dos ω_a^κ como

$$\delta A_\mu^a = \left\{ A_\mu^a, G^{can} \right\}^* = \delta_\mu^0 \delta^{ab} d\omega_b^0 - \delta_\mu^i \left[\delta^{ab} D_i d\omega_b^2 - \Lambda f^{ab}{}_c B_c^i d\omega_b^3 \right], \tag{5.220}$$

$$\delta B_\mu^a = \left\{ B_\mu^a, G^{can} \right\}^* = \delta_\mu^0 d\omega^{a1} - \delta_\mu^i \left[f_c^{ab} B_i^b d\omega_c^2 + \delta^{ab} D_i d\omega_b^3 \right]. \tag{5.221}$$

Nesse momento vamos tentar relacionar os geradores das transformações canônicas com os de gauge. Substituindo as variações (5.220) e (5.221) na equação de Lie (5.128) e usando as identidades de Bianchi obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} \;=\; & \varepsilon^{ij} \left[\frac{1}{2} F_{ij}^a \left(\delta\omega^{a1} + f_{abc} B_0^b \delta\omega_c^2 \right) + B_i^a D_j \left(D_0 \delta\omega_a^2 - \delta\omega_a^0 \right) + F_{aoj} D_i \delta\omega^{a3} \right] \\
& \Lambda f_{abc} \varepsilon^{ij} \left[B_0^a B_j^c D_i \delta\omega^{b3} - \frac{1}{2} B_i^b B_j^c \left(\delta\omega^{a1} + f_{mn}^a B_0^n \delta\omega^{m2} \right) \right] \\
& \Lambda f_{abc} \varepsilon^{ij} \left[B_0^a D_i \left(B_j^b \delta\omega^{c3} \right) - B_i^a D_0 \left(B_j^b \delta\omega^{c3} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.222}$$

Com isso, como (5.220) e (5.221) são transformações que deixam a teoria invariante, um possível caminho para investigar a solução $\Delta\mathcal{L} = 0$ é tomar o caso particular em que $\delta\omega^{a3} = 0$, e com isso a equação (5.222) se torna

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= \varepsilon^{ij}\left[\frac{1}{2}F^a_{ij}\left(\delta\omega^{a1}+f_{abc}B^b_0\delta\omega^2_c\right)+B^a_iD_j\left(D_0\delta\omega^2_a-\delta\omega^0_a\right)\right], \\
&\quad -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\Lambda f_{abc}B^b_iB^c_j\left(\delta\omega^{a1}+f^a_{mn}B^n_0\delta\omega^{m2}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.223}
$$

onde vemos que

$$
\delta\omega^0_a=-D_0\delta\omega^2_a, \tag{5.224}
$$

$$
\delta\omega^{a1}=-f_{abc}B^b_0\delta\omega^2_c, \tag{5.225}
$$

são soluções de (**??**). Assim nós podemos obter o gerador das transformações de Gauge que são dados por

$$
G^{gauge}\equiv\int\left[\mathcal{H}'^b_0D_0+f_{abc}\mathcal{H}'^b_1B^c_0-\mathcal{H}'^a_2\right]\delta\omega^3_a d^2x. \tag{5.226}
$$

Neste capítulo utilizamos o modelo BF como uma excenlente escola para praticar as tecnicas desenvolvidas no capítulo anterior. Nesse sentido, analisamos a estrutura de vínculos do modelo BF em duas dimensões. Foi partindo da definição de momento canônico que encontramos os campos conjugados, verificamos quais deles eram inversíveis e associamos os outros a vínculos da teoria.Depois disso, construimo a Hamiltoniana canônica e obtivemos conjunto inicial de vínculos do sistema. Com tal conjunto em mãos, avaliamos quais desses vínculos eram involutivos e quais eram não involutivos e com isso definimos os parênteses generalizados a partir vínculos não involutivos. Em seguida utilizamos as condições de integrabilidade para encontrar novos vínculos que a serem adicionados a teoria. Para finalizar, partimos da independencia linar dos parâmetros parar estudar a evolução temporal dos campos bem como obter os geradores das transformações canônicas e de gauge. O mesmo foi feito para o modelo BF tridimensional.

Referências

[1] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, 1915.

[2] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago, (1984)

[3] R. Jaciw, *Lower Dimensional Gravity*, Nuclear Physics, (1985).

[4] R. Jackiw, *Two Lectures on Two-Dimensional Gravity*, LASSF II, (1995).

[5] E. Witten, *Topological Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. 117, 353, (1988).

[6] M. Weis, *Topological Apects Of Quantum Gravity,* Niels Bohr Institute, Univesity Copen- hagen, (1997).

[7] N. T. Maia, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, *Three-dimensional Background Field Gravity: A Hamilton-Jacobi analysis*, Class.Quant.Grav. **32**, no.18, 185013 (2015)

6 Yang-Mills

6.1 Introdução

Nesse presente capítulo iremos discutir a teoria de Yang-Mills bem como a sua versão em (1+2)-dimensões. Teorias de Yang-Mills são essencialmente teorias de gauge, as quais começaram a ser estudadas quando Weyl percebe que alem das simetrias de Lorentz o eletromagnetismo também é invariante por transformações de gauge. Porem, foi é 1954 que C. N. Yang e R. L. Mills através do famoso trabalho "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance" [1] introduziram as teorias de gauge tal como conhecidas hoje. Desde então as teorias de gauge de Yang-Mills vem demonstrando um importante papel na descrição das teorias físicas, tendo um destaque no que tange a formulação das interações fundamentais.

Podemos dizer que umas das principais características das teorias de YM reside no fato delas serem invariantes por transformações locais de simetria. Na literatura existem diversas forma de se introduzir os campos de gauge, nesta seção vamos introduzi-los partindo da lagrangeana

$$L = \bar{\psi}^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} - m \right) \psi_i \tag{6.1}$$

que representa um sistema de férmions livre de massa m. Sendo essa lagrangeana (6.1) evidentemente invariante sobre transformações do tipo

$$\psi^i = U^i{}_j \psi^j \tag{6.2}$$

onde $U^i{}_j$ são elementos do grupo SU(N) que não depende do ponto do espaço no qual estão atuando. Fato este que fica completamente demonstrado se calcularmos

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} - m \right) \psi_i \quad &\rightarrow \quad \bar{\psi}^k \left(U^\dagger \right)_k{}^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} - m \right) U_i^j \psi_j \\
&= \quad \bar{\psi}^k \left(U^\dagger \right)_k{}^i U_i^j \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} - m \right) \psi_j && (6.3) \\
&= \quad \bar{\psi}^k \delta_k^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} - m \right) \psi_j && (6.4) \\
&= \quad \bar{\psi}^j \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} - m \right) \psi_j .
\end{aligned}$$

Onde em (6.4) nos fizemos valer do fato das matrizes serem unitárias. Desta forma podemos considerar (6.1) um invariante global de gauge. Contudo, se exigirmos que o nosso grupo seja local teremos

$$\partial_\mu \psi \to \mathbf{U}(x)\,\partial_\mu \psi(x) + \partial_\mu \mathbf{U}(x)\,\psi(x) \tag{6.5}$$

que resultara na quebra da invariância da nossa lagrangeana. Este problema pode ser contornado incluindo ao formalismo um campo de conexão

$$A = A_\mu^a J_a dx^\mu, \tag{6.6}$$

e definindo uma derivada covariante por

$$\mathbf{D}_\mu \equiv \mathbf{1}\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu, \tag{6.7}$$

desta forma se substituirmos (6.7) em (6.1)a lagrangena que resultará

$$L = \bar{\psi}^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\mathbf{D}_\mu} - \mathbf{1} \right) \psi_i \tag{6.8}$$

será invariante local de gauge.

Tomando como base o eletromagnetismo nós podemos escrever o tensor $F_{\mu\nu}$, utilizando as derivadas covariantes

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig\left[A_\mu, A_\nu\right], \tag{6.9}$$

onde utilizando a álgebra dos geradores

$$\left[J_a, J_b\right] = if_{ab}{}^{c} J_c, \tag{6.10}$$

ficamos com

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \tag{6.11}$$

onde g é conhecido como constante de acoplamento e f^{abc} são as constante de estrutura da álgebra $su\,(n)$.A lagrangeana para o campo d Yang-Mills livre será dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\mathbf{D}_\mu} - \mathbf{1} \right) \psi_i + gA_\mu^a J_a^\mu. \tag{6.12}$$

6.2 Yang-Mills Livre

Nessa seção vamos utilizar algumas ferramentas desenvolvidas durante esse trabalho para estudar para estudar a teoria de Yang-Mills livre. Dessa forma, partiremos da lagrangeana de um campo tipo Yang-Mills, utilizaremos a definição dos momentos canônicos para encontrar as variáveis dinâmicas bem como separá-las dos parâmetros da teoria. Os últimos vão compor as equações de vínculo e formar o conjunto de equações de Hamilton-Jacobi. Depois de obter os vínculos que compõem a teoria investigaremos se os mesmo estão em involução e em seguida utilizaremos a condição de integrabilidade para avaliar a necessidade de se incluir novos vínculos. Com o conjunto completo de vínculos involutivos em mão seremos capazes de escrever o diferencial fundamental, do qual será possível extrair as informações só sistema.

Sendo a ação para um campo do tipo Yang-Mills sem fontes dada por

$$I = -\frac{1}{4}\int_{\Omega} d\omega F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{a}, \tag{6.13}$$

com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e ω representando um volume quadridimensional em um espaço tempo do tipo Minkowski. A lagrangeana do sistema fica expressa sob a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{a}. \tag{6.14}$$

Sendo a definição de derivada covariante dada por

$$D_{\mu}A^{a}_{\nu} \equiv \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - gf^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}, \tag{6.15}$$

vamos ao longo do texto representar esse operador sob a forma

$$D^{ab}_{\mu} \equiv \delta^{ab}\partial_{\mu} + gf^{abc}A^{c}_{\mu}. \tag{6.16}$$

Com o intuito de obter as equações de campo vamos partir de (6.14) e aplicar a equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^{a}_{\nu}} - \partial_{\mu}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_{\mu}A^{a}_{\nu}} = 0, \tag{6.17}$$

onde calcularemos cada termo de (6.17) separadamente. Começando com o segundo termo do lado esquerdo da equação ficamos com

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^{a}_{\nu}} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^{b}_{\alpha\beta}}\frac{\delta F^{b}_{\alpha\beta}}{\delta A^{a}_{\nu}},$$

onde calculando

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\alpha\beta}} &= -\frac{1}{4}\frac{\delta}{\delta F^b_{\alpha\beta}}\left(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\eta^\alpha_\mu\eta^\beta_\nu\delta^a_b F^{\mu\nu}_b + F^b_{\mu\nu}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\delta^b_a\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(F^{\alpha\beta}_b + F^{\alpha\beta}_b\right) \\
&= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}_b, \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F^b_{\alpha\beta}}{\delta A^a_\nu} &= \frac{\delta}{\delta A^a_\nu}\left(\partial_\alpha A^b_\beta - \partial_\beta A^b_\alpha - gf^{bcd}A^c_\alpha A^d_\beta\right) \\
&= -\frac{\delta}{\delta A^a_\nu}\left(gf^{bcd}A^c_\alpha A^d_\beta\right) \\
&= -gf^{bcd}\left(\delta^\nu_\alpha\delta^c_a A^d_\beta + A^c_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^d_a\right) \\
&= -\delta^\nu_\alpha gf^{bad}A^d_\beta - \delta^\nu_\beta gf^{bca}A^c_\alpha \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

vemos que o mesmo fica dado por

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^a_\nu} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\alpha\beta}}\frac{\delta F^b_{\alpha\beta}}{\delta A^a_\nu} \\
&= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}_b\left(\delta^\nu_\alpha gf^{bad}A^d_\beta + \delta^\nu_\beta gf^{bca}A^c_\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F^{\nu\beta}_b gf^{bad}A^d_\beta + F^{\alpha\nu}_b gf^{bca}A^c_\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F^{\nu\mu}_b gf^{bad}A^d_\mu + F^{\mu\nu}_b gf^{bca}A^c_\mu\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}_b gf^{abc}A^c_\mu + F^{\mu\nu}_b gf^{abc}A^c_\mu\right) \\
&= gf^{abc}A^c_\mu F^{\mu\nu}_b \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

Para o primeiro termo do lado esquerdo da equação temos

$$
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\alpha\beta}}\frac{\delta F^b_{\alpha\beta}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu}, \qquad (6.21)
$$

onde devemos calcular

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F^b_{\alpha\beta}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu} &= \frac{\delta}{\delta\partial_\mu A^a_\nu}\left(\partial_\alpha A^b_\beta - \partial_\beta A^b_\alpha - gf^{bcd}A^c_\alpha A^d_\beta\right) \\
&= \frac{\delta}{\delta\partial_\mu A^a_\nu}\left(\partial_\alpha A^b_\beta - \partial_\beta A^b_\alpha\right) \\
&= \left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^b_a - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\delta^b_a\right), \qquad (6.22)
\end{aligned}
$$

e desta forma substituir (6.18) e (6.22) em (6.21) para obter

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\alpha\beta}}\frac{\delta F^b_{\alpha\beta}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu} \\ &= -\frac{1}{2}F_b^{\alpha\beta}\delta^b_a\left(\eta^\mu_\alpha\eta^\nu_\beta - \eta^\mu_\beta\eta^\nu_\alpha\right) \\ &= -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_a^{\nu\mu} \\ &= -F_a^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Desta forma fica evidente que (6.17) assumi a forma

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^a_\nu} - \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu} &= gf^{abc}A^c_\mu F_b^{\mu\nu} + \partial_\mu F_a^{\mu\nu} \\ &= \left(\delta^b_a\partial_\mu - gf^{acb}A^c_\mu\right)F_b^{\mu\nu} \\ &= \left(D_\mu\right)^b_a F_b^{\nu\mu} \\ &= \left[D_\mu F^{\nu\mu}\right]_a, \end{aligned}$$

onde, com isso, a nossa equação de campo será dada por:

$$D^{ab}_\mu F_b^{\mu\nu} = 0. \tag{6.24}$$

Utilizando a definição de momento canônico

$$\pi_a^{\mu\nu} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu}, \tag{6.25}$$

vemos que os mesmo já foram calculados em (6.23) e ficam dados por

$$\pi_a^{\mu\nu} = F_a^{\nu\mu}. \tag{6.26}$$

Para obtermos o formalismo de Hamilton-Jacobi em teorias de campos singulares, será necessário escolher uma particular parametrização para o campo. Como essa escolha é arbitraria nós vamos preferir trabalhar na parametrização da dinâmica instantânea. Nesse caso, os momentos conjugados vão ser dados pelas projeções de (6.26) no sentido do vetor $u \equiv (1,0,0,0)$, vai ser dada por:

$$\pi_a^\mu = \pi_a^{\mu\nu}u_\nu = \pi_a^{\mu\nu} = -F_a^{0\mu}. \tag{6.27}$$

Diretamente a partir de (6.27) temos

$$\pi_a^0 = -F_a^{00} = 0, \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}\pi_a^i &= -F_a^{0i} = -\partial_0 A_i^a + \partial_i A_0^a + g f^{abc} A_0^b A_i^c \\ &= -\partial_0 A_i^a + \left(\delta^{ab}\partial_i + g f^{abc} A_i^c\right) A_0^b \\ &= -\dot{A}_i^a + D_i^{ab} A_0^b. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Na equação (6.29) é notório que os momentos π_a^i dependem explicitamente das velocidades $\partial_0 A_i^a \equiv \dot{A}_i^a$ e com isso a relação pode ser invertida

$$\dot{A}_i^a = D_i^{ab} A_0^b - \pi_a^i, \tag{6.30}$$

onde escrevemos as velocidades como função das posições e momentos. Nesse momento vale ressaltar a distinção entre π_a^0 e π_a^i. O primeiro será considerado um vínculo do sistema e a sua coordenada canonicamente conjugada A_0^a um parâmetro. Por sua vez, o segundo momento estará associado as velocidades inversíveis e as suas coordenadas canonicamente conjugadas serão as variáveis dinâmicas da teoria.

Sendo o tensor momento-energia dado por

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^\mu A_a^\gamma} \partial_\nu A_a^\gamma - \eta_{\mu\nu} L \\ &= -F_{\mu\gamma}^a \partial_\nu A_a^\gamma + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{6.31}$$

vamos ter que a hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_c \equiv H_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = H_{00}, \tag{6.32}$$

vai assumir a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= -F_{0\gamma}^a \partial_0 A_a^\gamma + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} \\ &= -\left(F_{00}^a \partial_0 A_a^0 + F_{0i}^a \partial_0 A_a^i\right) + \frac{1}{4}\left(F_{00}^a F_a^{00} + F_{0i}^a F_a^{0i} + F_{i0}^a F_a^{i0} + F_{ij}^a F_a^{ij}\right) \\ &= -\pi_a^0 \partial_0 A_a^0 + \pi_i^a \left(D_i^{ab} A_0^b - \pi_a^i\right) + \frac{1}{2} F_{0i}^a F_a^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} \qquad (6.33) \\ &= -\frac{1}{2}\pi_a^i \pi_i^a - A_0^b D_i^{ab} \pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij}, \qquad (6.34) \end{aligned}$$

onde na passagem de (6.33) para (6.34) foram desprezados o termos de divergência total pois não serão relevantes para a ação. Então sendo a hamiltoniana canônica dada por

$$\mathcal{H}_c = -\frac{1}{2}\pi_i^a \pi_a^i - A_0^a D_i^{ab} \pi_b^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij}, \tag{6.35}$$

com isso o sistema de EDP de HJ fica dado por

$$H_0^{'} \equiv \pi_0 + \mathcal{H}_c = 0, \tag{6.36}$$

$$\Phi_a = \pi_a^0 = 0. \tag{6.37}$$

Sendo $H_0^{'}$ e Φ_a os vínculos que o nosso sistema deve verificar, devemos calcular o parênteses de Poisson dos mesmos $\left\{\Phi_a, H_0^{'}\right\}$para verificar a integrabilidade do nosso sistema. Para isso vale ressaltar que como estamos trabalhando com um único campo, A_μ^a, o parêntese fundamental será dado por

$$\left\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\right\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta(x-y). \tag{6.38}$$

Desta forma, utilizando a relação (6.38) podemos calcular

$$\begin{aligned}
\left\{\Phi_0, H_0^{'}\right\} &= \left\{\pi_a^0, \pi_0 + \mathcal{H}_c\right\} \\
&= \left\{\pi_a^0, -\frac{1}{2}\pi_i^c \pi_c^i - A_0^b D_i^{bc}\pi_c^i + \frac{1}{4}F_{ij}^b F_b^{ij}\right\} \\
&= \left\{\pi_a^0, -A_0^b D_i^{bc}\pi_c^i\right\} \\
&= D_i^{ab}\pi_b^i,
\end{aligned} \tag{6.39}$$

e com isso notar a necessidade de incluir um novo vínculo a teoria, que será definido por:

$$\Gamma^a \equiv D_i^{ab}\pi_b^i = 0. \tag{6.40}$$

A condição de integrabilidade ainda precisa ser aplicada sobre o novo vínculo a fim de avaliar se já possuímos o conjunto completo de vínculos involutivos ou se ainda se faz necessário a adição de outro. Para isso vamos definir

$$\Gamma^a[h] \equiv \int_\Sigma d\sigma h(x)\Gamma^a(x), \tag{6.41}$$

e calcular o parênteses de Poisson dos vínculos

$$\begin{aligned}
\left\{\Gamma^a[h_2], \Gamma^b[h_2]\right\} &= \left\{\int dx h_1(x)\left[D_i\pi^i\right]_a(x), \Gamma^b[h_2]\right\} \\
&= \int dx h_1(x)\left[(D_i)_a^c(x)\left\{\pi_c^i(x), \Gamma^b[h_2]\right\} + \left\{(D_i)_a^c(x), \Gamma^b[h_2]\right\}\pi_c^i(x)\right],
\end{aligned} \tag{6.42}$$

calculando cada termo individualmente

$$
\begin{aligned}
\left\{\pi^{i}(x),\Gamma^{b}[h_{2}]\right\} &= \int dy h_{2}(y)\left\{\pi_{c}^{i}(x),(D_{j})_{b}^{d}(y)\,\pi_{d}^{j}(y)\right\} \\
&= \int dy h_{2}(y)\,g f_{bed}\left\{\pi_{c}^{i}(x),-A_{j}^{e}(y)\right\}\pi_{d}^{j}(y) \\
&= \int dy h_{2}(y)\,g f_{bed}\delta_{j}^{i}\delta_{c}^{e}\delta(y-x)\,\pi_{d}^{j}(y) \\
&= h_{2}(x)\,g f_{bcd}\pi_{d}^{i}(x)\,, \qquad (6.43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{(D_{i})_{a}^{c}(x),\Gamma^{b}[h_{2}]\right\} &= \int dy h_{2}(y)\left\{(D_{i})_{a}^{c}(x),(D_{j})_{d}^{b}(y)\,\pi_{d}^{j}(y)\right\} \\
&= -g f_{aec}\int dy h_{2}(y)\,(D_{j})_{d}^{b}(y)\left\{A_{i}^{e}(x),\pi_{d}^{j}(y)\right\} \\
&= -g f_{aec}\int dy h_{2}(y)\,(D_{j})_{d}^{b}(y)\,\delta_{i}^{j}\delta_{d}^{e}\delta(x-y) \\
&= -g f_{aec}\int dy h_{2}(y)\,(D_{i})_{e}^{b}(y)\,\delta(x-y) \\
&= -g f_{aec}\int dy h_{2}(y)\left(\delta_{e}^{b}\partial_{i}^{y}-g f_{bfe}A_{i}^{f}(y)\right)\delta(x-y) \\
&= \left[-g f_{abc}h_{2}(x)\,\partial_{i}^{x}+g f_{aec}h_{2}(x)\,g f_{bfe}A_{i}^{f}(x)\right]. \qquad (6.44)
\end{aligned}
$$

Agora substituindo (6.43) e (6.44) em (6.42) ficamos com

$$
\begin{aligned}
\int dx h_{1}(x)\,(D_{i})_{a}^{c}(x)\left\{\pi_{c}^{i}(x),\Gamma^{b}[h_{2}]\right\} &= g f_{bcd}\int dx h_{1}(x)\,(D_{i})_{a}^{c}(x)\left[h_{2}(x)\,\pi_{d}^{i}(x)\right] \\
&= g f_{bcd}\int dx h_{1}(x)\,(\delta_{a}^{c}\partial_{i}^{x}-g f_{aec}A_{i}^{e}(x))\left[h_{2}(x)\,\pi_{d}^{i}(x)\right] \\
&= g f_{bcd}\int dx h_{1}(x)\,\delta_{a}^{c}\partial_{i}^{x}\left[h_{2}(x)\,\pi_{d}^{i}(x)\right] \\
&\quad -g f_{bcd}\int dx h_{1}(x)\,g f_{aec}A_{i}^{e}(x)\,h_{2}(x)\,\pi_{d}^{i}(x) \qquad (6.45) \\
&= -g f_{abc}\int dx h_{1}(x)\,\pi_{c}^{i}(x)\,\partial_{i}^{x}h_{2}(x) \\
&\quad +g f_{bcd}\int dx h_{3}(x)\left[\delta_{a}^{c}\partial_{i}^{x}\pi_{d}^{i}(x)-g f_{aec}A_{i}^{e}(x)\,\pi_{d}^{i}(x)\right], \qquad (6.46)
\end{aligned}
$$

e com

$$
\begin{aligned}
\int dx h_{1}(x)\left\{(D_{i})_{a}^{c}(x),\Gamma^{b}[h_{2}]\right\}\pi_{c}^{i}(x) &= -\int dx h_{1}(x)\,g f_{abc}h_{2}(x)\,\partial_{i}^{x}\pi_{c}^{i}(x) \\
&\quad +\int dx h_{1}(x)\,g f_{aec}h_{2}(x)\,g f_{bfe}A_{i}^{f}(x)\,\pi_{c}^{i}(x) \\
&= \int dx h_{1}(x)\,g f_{abc}\pi_{c}^{i}(x)\,\partial_{i}^{x}h_{2}(x) \\
&\quad +\int dx h_{1}(x)\,g f_{aec}h_{2}(x)\,g f_{bfe}A_{i}^{f}(x)\,\pi_{c}^{i}(x)\,,
\end{aligned}
$$

o que resulta em

$$
\begin{aligned}
\left\{\Gamma^{a}\left[h_{1}\right],\Gamma^{b}\left[h_{2}\right]\right\} &= g f_{bcd}\int dx h_{3}\left(x\right)\left[\delta_{a}^{c}\partial_{i}^{x}\pi_{d}^{i}\left(x\right)-g f_{aec}A_{i}^{e}\left(x\right)\pi_{d}^{i}\left(x\right)\right]+\int dx h_{3}\left(x\right)\left[g f_{aec}g f_{bfe}A_{i}^{f}\left(x\right.\right. \\
&= g\int dx h_{3}\left(x\right)\left[f_{bcd}\delta_{a}^{c}\partial_{i}^{x}\pi_{d}^{i}\left(x\right)+g\left[f_{afc}f_{cbd}+f_{adc}f_{cfb}\right]A_{i}^{f}\left(x\right)\pi_{d}^{i}\left(x\right)\right] \\
&= g\int dx h_{3}\left(x\right)\left[f_{bac}\partial_{i}^{x}\pi_{c}^{i}\left(x\right)+g f_{abc}f_{cfd}A_{i}^{f}\left(x\right)\pi_{d}^{i}\left(x\right)\right] \\
&= -g f_{abc}\int dx h_{3}\left(x\right)\left[\delta_{c}^{d}\partial_{i}^{x}-g f_{cfd}A_{i}^{f}\left(x\right)\right]\pi_{d}^{i}\left(x\right) \\
&= -g f_{abc}\int dx h_{3}\left(x\right)\left(D_{i}\right)_{c}^{d}\left(x\right)\pi_{d}^{i}\left(x\right).
\end{aligned}
$$

Com isso fica claro que os vínculos fecham a álgebra de Lie

$$
\left\{\Gamma^{a}\left[h_{1}\right],\Gamma^{b}\left[h_{2}\right]\right\}=g f^{abc}\Gamma^{c}\left[h_{3}\right]. \tag{6.48}
$$

Neste momento é importante salientar a importância da definição (6.41), pois sem a mesma não seria possível obter (6.47). Este fato evidencia a natureza global da álgebra dos vínculos, onde localmente ela não se verifica. Para garantir a involução de Γ^a ainda devemos calcular

$$
\begin{aligned}
\left\{\Gamma^{a},H_{0}^{'}\right\} &= \left\{D_{i}\pi_{a}^{i},\pi_{0}+\mathcal{H}_{c}\right\} \\
&= \left\{D_{i}\pi_{a}^{i},-\frac{1}{2}\pi_{j}^{b}\pi_{b}^{j}-A_{0}^{b}D_{j}^{bc}\pi_{c}^{j}+\frac{1}{4}F_{jl}^{b}F_{b}^{jl}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{D_{i}\pi_{a}^{i},\pi_{j}^{b}\pi_{b}^{j}\right\}-A_{0}^{b}\left\{D_{i}\pi_{a}^{i},D_{j}^{bc}\pi_{c}^{j}\right\}+\frac{1}{4}\left\{D_{i}\pi_{a}^{i},F_{jl}^{b}F_{b}^{jl}\right\}
\end{aligned} \tag{6.49}
$$

onde precisamos calcular o primeiro e ultimo termo do lado direito da equação (6.48), uma vez que o segundo termo notadamente já encontramos. Nesse sentido o primeiro termo nos leva a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\{\left(D_{i}\right)_{a}^{b}\pi_{b}^{i},\pi_{j}^{d}\pi_{d}^{j}\right\} &= \left\{\left(D_{i}\right)_{a}^{b}\pi_{b}^{i},\pi_{j}^{d}\right\}\pi_{d}^{j} \\
&= -g f_{acb}\pi_{b}^{i}\pi_{d}^{j}\left\{A_{i}^{c},\pi_{j}^{d}\right\} \\
&= -g f_{acb}\pi_{b}^{i}\pi_{d}^{j}\delta_{ij}\delta^{cd} \\
&= g f_{abc}\pi_{b}^{i}\pi_{i}^{c},
\end{aligned} \tag{6.50}
$$

equando o ultimo fica completamente dado de calcularmos

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_b^i, F_{jl}^d\right\} &= \left\{\pi_b^i, \left(\partial_j A_l^d - \partial_l A_j^b - g f_{def} A_j^e A_l^f\right)\right\} \\
&= \partial_j \left\{\pi_b^i, A_l^d\right\} - \partial_l \left\{\pi_b^i, A_j^d\right\} - g f_{def} \left[A_j^e \left\{\pi_b^i, A_l^f\right\} + \left\{\pi_b^i, A_j^e\right\} A_l^f\right] \\
&= \partial_j \delta_l^i \delta_b^d - \partial_l \delta_j^i \delta_b^d - g f_{def} \left[A_j^e \delta_l^i \delta_f^b + \delta_j^i \delta_e^b A_l^f\right] \\
&= \partial_j \delta_l^i \delta_b^d - \partial_l \delta_j^i \delta_b^d - \left[g f_{deb} A_j^e \delta_l^i + g f_{dbf} \delta_j^i A_l^f\right] \\
&= \delta_l^i \left(\partial_j \delta_b^d - g f_{deb} A_j^e\right) - \delta_j^i \left(\partial_l \delta_b^d - g f_{dfb} A_l^f\right) \\
&= \delta_l^i \left(D_j\right)_b^d - \delta_j^i \left(D_l\right)_b^d
\end{aligned} \tag{6.51}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\{\pi_b^i, F_{jl}^d\right\} F_d^{ij} &= \frac{1}{2}\left[\delta_l^i \left(D_j\right)_b^d - \delta_j^i \left(D_l\right)_b^d\right] F_d^{jl} \\
&= \frac{1}{2}\left[\delta_l^i \left(D_j\right)_b^d F_d^{jl} - \delta_l^i \left(D_j\right)_b^d F_d^{lj}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(D_j\right)_b^d F_d^{ji} - \left(D_j\right)_b^d F_d^{ij}\right] \\
&= \left(D_j\right)_b^d F_d^{ji} \\
&= \left[D_j F^{ij}\right]_b
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Agora substituindo (6.49) e (6.51) em (6.48) ficamos com

$$\left\{\Gamma^a, H_0^{'}\right\} = g f_{abc} \pi_b^i \pi_i^c - A_0^b \left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} + \left(D_i\right)_a^b \left[D_j F^{ij}\right]_b, \tag{6.53}$$

onde por argumentos de simetria e utilizando a identidade de Bianchi generalizada terminamos com

$$\left\{\Gamma^a, H_0^{'}\right\} = -g f^{abc} A_0^b \Gamma^c. \tag{6.54}$$

É justamente o conjunto de igualdades (6.47), (6.53) que garante a completeza do nosso conjunto de vínculos involutivos.

Com a integrabilidade do sistema assegurada, utilizaremos os vínculos canônicos para escrever o diferencial fundamental

$$dF = \int d\sigma \left[\left\{F, H_0^{'}\right\} dt + \left\{F, \Phi_a\right\} \omega^a + \left\{F, \Gamma^a\right\} d\lambda^a\right], \tag{6.55}$$

o qual representara a evolução de uma função F qualquer que esteja definida no espaço de fase. Através da expressão (6.54) podemos obter as equações características para o campo A_μ^a que é dado pela expressão

$$dA_\mu^a = \int d\sigma \left[\left\{A_\mu^a, H_0^{'}\right\} dt + \left\{A_\mu^a, \Phi_b\right\} \omega^b + \left\{A_\mu^a, \Gamma^b\right\} d\lambda^b\right]. \tag{6.56}$$

Calculando cada termo separadamente

$$\left\{A_\mu^a, \Phi_b\right\} = \left\{A_\mu^a, \pi_b^0\right\} = \delta_b^a \delta_\mu^0 \delta\left(x-y\right), \tag{6.57}$$

$$\left\{A_\mu^a, \Gamma^b\right\} = \left\{A_\mu^a, D_i^{bc}\pi_c^i\right\} = \left\{A_\mu^a, \left(\delta^{bc}\partial_i - g f^{bdc} A_i^d\right)\pi_c^i\right\} = -\delta_\mu^i \delta\left(x-y\right) D_i^{ab}, \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
\left\{A_\mu^a, H_0^{'}\right\} &= \left\{A_\mu^a, -\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_a^i - A_0^a D_i^{ab}\pi_b^i + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij}\right\} \\
&= \left\{A_\mu^a, -\frac{1}{2}\pi_i^b\pi_b^i + \pi_a^i D_i^{ab} A_0^b\right\} \\
&= \left\{A_\mu^a, \pi_a^i D_i^{ab} A_0^b\right\} - \left\{A_\mu^a, \frac{1}{2}\pi_i^b\pi_b^i\right\} \\
&= \left\{A_\mu^a, \pi_a^i\right\} D_i^{ab} A_0^b - \left\{A_\mu^a, \pi_i^b\right\}\pi_b^i \\
&= \delta_\mu^i \delta\left(x-y\right) D_i^{ab} A_0^b - \delta_\mu^i \delta_b^a \delta\left(x-y\right)\pi_i^b \\
&= \delta_\mu^i \left(D_i^{ab} A_0^b - \pi_i^b\right)\delta\left(x-y\right),
\end{aligned} \tag{6.59}$$

obtemos a nossa primeira equação característica

$$dA_\mu^a = \delta_\mu^0 d\omega^a + \delta_\mu^i\left[\left(D_i^{ab}A_0^b - \pi_i^b\right)dt - D_i^{ab}d\lambda^b\right]. \tag{6.60}$$

Nesse momento vale que façamos um pequena pausa para interpretar a equação (6.59). Olhando para (6.56) conseguimos ver que $A_0^a = \omega^a$ é uma função arbitraria e independente dos campos. Já a expressão (6.57) mostra que dinâmica da variável λ^a é dado por $\delta A_i^a = D_i^{ab}\delta\lambda^b$, onde evidente tanto a dependência em A_i^a quanto a sua semelha com a forma das transformações canônicas. A evolução temporal é dada por (6.58) de onde conseguimos extrair

$$\dot{A}_0^a = 0, \qquad \dot{A}_i^a = D_i^{ab}A_0^b - \pi_a^i, \tag{6.61}$$

que esta em completo acordo com a já obtida expressão (6.30) .

Agora com o objetivo de determinar a equação característica para o momento canônico vamos calcular

$$d\pi_a^\mu = \int d\sigma\left[\left\{\pi_a^\mu, H_0^{'}\right\}dt + \left\{\pi_a^\mu, \Phi_b\right\}\omega^b + \left\{\pi_a^\mu, \Gamma^b\right\}d\lambda^b\right], \tag{6.62}$$

que é completamente determinado pelos resultados

$$\left\{\pi_a^\mu, \Phi_b\right\} = \left\{\pi_a^\mu, \pi_b^0\right\} = 0, \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned}\left\{\pi_a^\mu, \Gamma^b\right\} &= \left\{\pi_a^\mu, D_i^{ab}\pi_b^i\right\} \\ &= \left\{\pi_a^\mu, \left(\delta^{ab}\partial_i - gf^{abc}A_i^c\right)\pi_b^i\right\} \\ &= \delta_i^\mu \delta_a^c \delta\left(x-y\right) gf^{abc}\pi_b^i \\ &= \delta_i^\mu gf^{abc}\pi_b^i, \end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\begin{aligned}\left\{\pi_a^\mu, H_0^{'}\right\} &= \left\{\pi_a^\mu, -\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_a^i - A_0^a D_i^{ab}\pi_b^i + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij}\right\} \\ &= -\left\{\pi_a^\mu, A_0^a\right\} D_i^{ab}\pi_b^i - A_0^a\left\{\pi_a^\mu, D_i^{ab}\right\}\pi_b^i + \frac{1}{4}\left\{\pi_a^\mu, F_{ij}^a F_a^{ij}\right\} \\ &= \delta_0^\mu D_i^{ab}\pi_b^i - \delta_i^\mu\left(gf^{abc}A_0^c\pi_b^i + D_i^{ab}F_b^{ij}\right), \end{aligned} \tag{6.65}$$

e com isso a equação característica fica dada pela expressão

$$d\pi_a^\mu = \delta_0^\mu D_i^{ab}\pi_b^i dt - \delta_i^\mu\left[\left(gf^{abc}A_0^c\pi_b^i + D_j^{ab}F_b^{ij}\right)dt - gf^{abc}\pi_b^i d\lambda^c\right]. \tag{6.66}$$

A evolução temporal fica evidentemente dada por (6.64) de onde é imediata as relações

$$\dot{\pi}_a^0 = D_i^{ab}\pi_b^i \tag{6.67}$$

$$\dot{\pi}_a^i = -\left(gf^{abc}A_0^c\pi_b^i + D_j^{ab}F_b^{ij}\right). \tag{6.68}$$

Partindo de (6.67) também pode obter

$$D_0^{ab}\pi^{bi} = -D_j^{ab}F_b^{ij}. \tag{6.69}$$

É notado que (6.66) coincide exatamente com a expressão vínculo (6.40), o que é nada mais do a equação do campo (6.24) calculado para $\nu = 0$, fato que podemos deixar mais explicito de escrever sob a forma

$$\Gamma^a = D_i^{ab}\pi_b^i = D_i^{ab}F_b^{i0}. \tag{6.70}$$

Enquanto isso a expressão (6.67) também representa a equação do campo (6.24) porem agora calculada com $\nu = i$ ocorrência que pode ser evidenciada sob a forma

$$D_\mu^{ab}F_b^{\mu\nu} = D_0^{ab}F_b^{i0} + D_j^{ab}F_b^{ij} = 0. \tag{6.71}$$

6.2.1 Yang-Mills Topologicamente Massivo

O estudo de teorias de campos em dimensões menores tem ganhado grande relevância nos últimos anos por, entre outros motivos, servir como um laboratório teórico para entender o que ocorre em dimensões maiores. Esse estudo ganha ainda maior relevância quando os campos podem ser tratados como teorias de gauge. O caso bidimensional dessas teorias com uma dimensão espacial e outra temporal, apesar de bastante estudando na literatura nao possui grau da liberdade dinâmico, o que faz com que os modelos em (2+1)-dimensões mereçam uma atenção especial. O caráter diferenciado das teorias campo em 3 dimensões reside, entre outras coisas, no fato de em (2+1) poder se incluindo um termo de Chern-Simon que seja quadrático no campo de gauge. A inclusão de termos do tipo Chern-Simon na lagrangeana que descreve nossos campos gera o que chamamos de teorias topologicamente massivas. O termo topologicamente massiva advém do fato de que nas teorias clássicas as partículas mediadoras de força não possuem massa, porem quando são acoplados termos de Chern-Simon às mesmas, estes serão responsáveis por um mecanismo de geração de massa do campo fundamental.

Alguns exemplos de teorias topologicamente massivas que podem ser encontradas na literatura são as teorias de Maxwell-Chern-Simon, a teorias de gravitação topologicamente massiva, e a teorias de Yang-Mills topologicamente massiva que consiste no acoplamento de um termo de Chern-Simon com campos de gauge não abelianos.

Devido a importancia dessas teorias dedicaremos a próxima seção a analise da ultima. Sendo esta uma teoria de gauge, a versão topologicamente massiva da teoria de Yang-Mills também consiste de um sistema singular. Desta forma utilizaremos o método de análise de vínculo de Hamilton-Jacobi para obter o conjunto completo que permitam a integrabilidade da teoria, para a partir destes construiremos o diferencial fundamental para dele obter as equações características do sistema.

A ação da teoria de Yang-Mills topologicamente

$$S_{YMTM} = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\mu\nu\gamma} \left(F_{a\mu\nu} A_\gamma^a - \frac{g}{3} f_{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\gamma^c \right) \right] \tag{6.72}$$

consiste na adição de um termo de Chern-Simon

$$\mathcal{L}_{cs} \equiv \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\mu\nu\gamma} \left(F_{a\mu\nu} A_\gamma^a - \frac{g}{3} f_{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\gamma^c \right) \tag{6.73}$$

feito na lagrangeana original. Desta forma podemos escrever a ação como uma soma de duas contribuições, uma $\mathcal{L}_{YM}$ devido ao campo de Yang-Mills livre, e a outra $\mathcal{L}_{cs}$ referente a contribuição do termo de Chern-Simon. Com o intuito de obter as equações de campo de ação S_{YMTM} podemos usar o fato de já termos calculado as contribuições do termo

$\mathcal{L}_{YM}$ e obter as equações movimento da lagrangeana de Chern-Simon dada por

$$E_a^A = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{cs}}{\delta \partial_\mu A_\nu^a} - \frac{\delta \mathcal{L}_{cs}}{\delta A_\nu^a}. \tag{6.74}$$

Partindo do segundo termo do lado direito da equação

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_{cs}}{\delta A_\nu^a} &= \frac{\delta}{\delta A_\nu^a}\left[\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma}\left(F_{b\mu\alpha}A_\gamma^b - \frac{g}{3}f_{bcd}A_\mu^b A_\alpha^c A_\gamma^d\right)\right] \\ &= \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma}\left(F_{b\mu\alpha}\delta_\gamma^\nu\delta_a^b + \frac{\delta F_{b\mu\nu}}{\delta A_\nu^a}A_\gamma^b - \frac{g}{3}f_{bcd}\frac{\delta}{\delta A_\nu^a}\left(A_\mu^b A_\alpha^c A_\gamma^d\right)\right), \end{aligned} \tag{6.75}$$

e calculando separadamente cada termo da expressão (6.74)

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{b\mu\alpha}}{\delta A_\nu^a} &= g f_{bcd}\frac{\delta}{\delta A_\nu^a}\left(A_\mu^c A_\alpha^d\right) \\ &= g f_{bcd}\left(\delta_\mu^\nu\delta_a^c A_\alpha^d + \delta_\alpha^\nu\delta_a^d A_\mu^c\right), \end{aligned} \tag{6.76}$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma}\frac{\delta F_{b\mu\alpha}}{\delta A_\nu^a} &= \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\gamma} g f_{bcd}\left(\delta_\mu^\nu\delta_a^c A_\alpha^d + \delta_\alpha^\nu\delta_a^d A_\mu^c\right) \\ &= \left(\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\nu\alpha\gamma} g f_{bad}A_\alpha^d + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma} g f_{bca}A_\mu^c\right) \\ &= \left(\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\nu\mu\gamma} g f_{bac}A_\mu^c + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma} g f_{bca}A_\mu^c\right) \\ &= \left(\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma} g f_{abc}A_\mu^c + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma} g f_{abc}A_\mu^c\right) \\ &= \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma} g f_{abc}A_\mu^c, \end{aligned} \tag{6.77}$$

e com

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\alpha\gamma}\frac{g}{3}f_{bcd}\frac{\delta}{\delta A_\nu^a}\left(A_\mu^b A_\alpha^c A_\gamma^d\right) &= \varepsilon^{\mu\alpha\gamma}\frac{g}{3}f_{bcd}\left[\frac{\delta A_\mu^b}{\delta A_\nu^a}A_\alpha^c A_\gamma^d + \frac{\delta A_\alpha^c}{\delta A_\nu^a}A_\mu^b A_\gamma^d + \frac{\delta A_\gamma^d}{\delta A_\nu^a}A_\mu^b A_\alpha^c\right] \\ &= \varepsilon^{\mu\alpha\gamma}\frac{g}{3}f_{bcd}\left[\delta_\mu^\nu\delta_a^b A_\alpha^c A_\gamma^d + \delta_\alpha^\nu\delta_a^c A_\mu^b A_\gamma^d + \delta_a^d\delta_\gamma^\nu A_\mu^b A_\alpha^c\right] \\ &= \frac{g}{3}\left[\varepsilon^{\nu\alpha\gamma}f_{acd}A_\alpha^c A_\gamma^d + \varepsilon^{\mu\nu\gamma}f_{bad}A_\mu^b A_\gamma^d + \varepsilon^{\mu\alpha\nu}f_{bca}A_\mu^b A_\alpha^c\right] \\ &= \frac{g}{3}\left[\varepsilon^{\nu\mu\gamma}f_{abc}A_\mu^b A_\gamma^c + \varepsilon^{\mu\nu\gamma}f_{bac}A_\mu^b A_\gamma^c + \varepsilon^{\mu\gamma\nu}f_{bca}A_\mu^b A_\gamma^c\right] \\ &= \frac{g}{3}\left[-\varepsilon^{\mu\nu\gamma}f_{abc}A_\mu^b A_\gamma^c - \varepsilon^{\mu\nu\gamma}f_{abc}A_\mu^b A_\gamma^c - \varepsilon^{\mu\nu\gamma}f_{abc}A_\mu^b A_\gamma^c\right] \\ &= -\varepsilon^{\mu\nu\gamma} g f_{abc}A_\mu^b A_\gamma^c, \end{aligned}$$

o que resulta em

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_{cs}}{\delta A^a_\nu} &= \left(\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\nu}F_{a\mu\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}gf_{abc}A^c_\mu A^b_\gamma + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}gf_{abc}A^b_\mu A^c_\gamma\right) \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(-\frac{\mu}{4}F_{a\mu\gamma} - \frac{\mu}{2}gf_{abc}A^b_\mu A^c_\gamma + \frac{\mu}{4}gf_{abc}A^b_\mu A^c_\gamma\right) \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(-\frac{\mu}{4}F_{a\mu\gamma} - \frac{\mu}{4}gf_{abc}A^b_\mu A^c_\gamma\right) \\
&= -\frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(F_{a\mu\gamma} + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\gamma\right).
\end{aligned} \tag{6.78}
$$

Já para o primeiro termo da equação (6.73), como apenas $F^a_{\mu\nu}$ depende das derivas de A^a_μ a nossa expressão se resume a

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_{cs}}{\delta \partial_\mu A^a_\nu} &= \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta}{\delta\partial_\mu A^a_\nu}\left(\partial_\alpha A^b_\beta - \partial_\beta A^b_\alpha\right)A^b_\gamma \\
&= \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^b_a - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\delta^b_a\right)A^b_\gamma \\
&= \frac{\mu}{4}\left(\varepsilon^{\mu\nu\gamma} - \varepsilon^{\nu\mu\gamma}\right)A^a_\gamma \\
&= \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}A^a_\gamma.
\end{aligned} \tag{6.79}
$$

Com isso a equação de campo fica completamente determinada pela expressão

$$
\begin{aligned}
E^A_a &= \partial_\mu\frac{\delta \mathcal{L}_{cs}}{\delta\partial_\mu A^a_\nu} - \frac{\delta \mathcal{L}_{cs}}{\delta A^a_\nu} \\
&= \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\partial_\mu A^a_\gamma + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(F_{a\mu\gamma} + \varepsilon^{\mu\nu\gamma}gf_{abc}A^b_\mu A^c_\gamma\right) \\
&= \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(\frac{1}{2}F_{a\mu\gamma} + \left(\partial_\mu A^a_\gamma + \frac{1}{2}gf_{abc}A^b_\mu A^c_\gamma\right)\right),
\end{aligned} \tag{6.80}
$$

onde podemos reescrever de forma conveniente o termo $\partial_\mu A^a_\gamma$ como uma soma de um termo simétrico com um antissimétrico da forma

$$
\partial_\mu A^a_\gamma = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^a_\gamma + \partial_\gamma A^a_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^a_\gamma - \partial_\gamma A^a_\mu\right), \tag{6.81}
$$

e utilizar a propriedade de antissimetria do $\varepsilon^{\mu\nu\gamma}$

$$
\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\partial_\mu A^a_\gamma = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^a_\gamma - \partial_\gamma A^a_\mu\right) \tag{6.82}
$$

para expressão a equação de campo da lagrangeana de Chern-Simon por

$$
-\frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}F_{a\mu\gamma} = 0. \tag{6.83}
$$

Assim a equação de campo da ação S_{YMTM} completa fica dada por

$$[D_\mu F^{\mu\nu}]_a - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}F_{a\mu\gamma} = 0. \tag{6.84}$$

Agora, com a finalidade de analisar quais coordenadas estão associadas ao setor nulo da matriz Hessina, e diferencia-las das que serão tratadas como um parâmetro da teoria, utilizaremos a definição de momento canônico, onde da mesma forma que na seção passada vamos trabalho na parametrização do tempo de forma que os momentos conjugados serão dados por

$$\pi^{a\mu} \equiv \pi^{a\mu\nu}u_\nu = \pi^{a\mu 0}, \tag{6.85}$$

desta forma sendo determinador por

$$\pi_a^\alpha \equiv -F^{a0\alpha} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{0\nu\gamma}A_\gamma^a . 6.87 \tag{6.86}$$

Mais uma vez conseguirmos ver a contribuição em separado do termo referente ao campo livre $F^{a0\alpha}$, bem como a parcela advinda da lagrangeana de Chern-Simon $\frac{\mu}{2}\varepsilon^{0\nu\gamma}A_\gamma^a$. A antissimetria do tensor Levi-Civita nos permite diferenciar os momentos canônicos

$$\pi_a^0 = 0, \tag{6.87}$$

$$\pi_a^i \;=\; -\eta^{ij}F_{0j}^a + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}A_j^a, \tag{6.88}$$

onde o primeiro (6.86) resultará diretamente em um vínculo canônico da teoria, e o segundo (6.87) será interpretado como uma equação dinâmica onde notadamente seremos capazes de inverter a relação para escrevê-la sob a forma

$$\partial_0 A_i^a = -\eta_{ij}\pi_a^j + D_i A_0^a - \frac{\mu}{2}\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_k^a. \tag{6.89}$$

Nesse momento somos capazes facilmente de diferenciar a natureza das coordenadas A_0^a, que serão tratados como os parâmetros da teorias, das coordenadas A_i^a que estão relacionadas com a parte inversível da matriz Hessina e são os coordenadas dinâmicas do sistema.

No sentido de escrever a expressão da nossa hamiltoniana canônica, começaremos por grafar de forma conveniente a lagrangeana do nosso sistema. Desta forma, separando a lagrangeana

$$\mathcal{L}_{YMTM} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(F_{a\mu\nu}A_\gamma^a - \frac{g}{3}f_{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\gamma^c\right), \tag{6.90}$$

em dois termos

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a, \tag{6.91}$$

$$\mathcal{L}_{cs} = \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(F_{a\mu\nu}A_\gamma^a - \frac{g}{3}f_{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\gamma^c\right), \tag{6.92}$$

vamos trabalhar com cada um deles de forma individuais. Partindo da equação (6.90), vemos que a mesma pode ser escrita de forma adequada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\left(F_{00}^a F_a^{00} + F_{0i}^a F_a^{0i} + F_{i0}^a F_a^{i0} + F_{ij}^a F_a^{ij}\right) \\ &= -\frac{1}{2}F_{0i}^a F_a^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij}.\end{aligned} \tag{6.93}$$

Já olhando para (6.91) com um pouco mais de cuidado reescrevermos sob a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cs} &= \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\gamma}\left(F_{\mu\nu}^a A_\gamma^a - \frac{g}{3}f_{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\gamma^c\right) \\ &= \frac{\mu}{4}\left(2\varepsilon^{0ij}F_{0i}^a A_j^a + \varepsilon^{0ij}F_{ij}^a A_0^a - g\varepsilon^{0ij}f_{abc}A_0^a A_i^b A_j^c\right) \\ &= \frac{\mu}{2}\varepsilon^{0ij}F_{0i}^a A_j^a + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{0ij}\left(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a\right)A_0^a.\end{aligned} \tag{6.94}$$

Com isso, olhando para as equações (6.86) , (6.87) ,(6.88) e não esquecendo da definição da hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_0 \equiv \pi_a^\mu \partial_0 A_\mu^a - \mathcal{L}$ ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \pi_a^i \partial_0 A_i^a - \mathcal{L} \\ &= -\eta_{ij}\pi_a^i\pi_a^j + \pi_a^i D_i A_0^a - \frac{\mu}{2}\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_k^a\pi_a^i \\ &\quad + \frac{1}{2}F_{0i}^a F_a^{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{0ij}F_{0i}^a A_j^a - \frac{\mu}{4}\varepsilon^{0ij}\left(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a\right)A_0^a.\end{aligned} \tag{6.95}$$

Trabalhando essa equação obtemos

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2}\eta_{ij}\pi_a^i\pi_a^j + \frac{1}{2}\mu\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_k^a\pi_a^i - \frac{1}{8}\mu^2\eta_{ij}\varepsilon^{ik}A_k^a\varepsilon^{jl}A_l^a + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} - A_0^a\left(D_i\pi_a^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a\right), \tag{6.96}$$

que podemos escrever sob a forma:

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2}\eta_{ij}\left[\pi_a^i - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ik}A_{ak}\right]\left[\pi_a^j - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{jl}A_{al}\right] + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} - A_0^a\left[D_i\pi_a^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_{aj}\right]. \tag{6.97}$$

Consequentemente o conjunto de equações Hamilton-Jacobi que definem os nossos vínculos e caracterizam o nosso sistema é

$$\mathcal{H}^{'} \equiv \pi + \mathcal{H}_0 = 0, \tag{6.98}$$

$$\mathcal{H}_a^{'0} \equiv \pi_a^0 = 0, \tag{6.99}$$

Com a finalidade de dar um tratamento adequando para a variável A_0^a vamos associá-la a o parâmetro λ^a, com isso, os vínculos $\mathcal{H}^{'}$ e $\mathcal{H}_a^{'0}$ ficam associados respectivamente $x^0 = t$ e λ^a. Com isso o nosso diferencial fundamental será expresso por

$$dF\left(x\right) = \int d^3y \left[\left\{F\left(x\right), \mathcal{H}^{'}\left(y\right)\right\} dx^0 + \left\{F\left(x\right), \mathcal{H}_a^{'0}\left(y\right)\right\} d\lambda^a\right]. \tag{6.100}$$

Vale ressaltar que ate o momento não fizemos qualquer teste de integrabilidade do sistema, de forma que não temos como afirmar se os vínculos em questão são do tipo involutivos, e se o forem, se constituem em um conjunto completo de modo que garanta a integrabilidade do sistema. Seguindo nesse sentido, utilizaremos a expressão do parêntese fundamental

$$\left\{A_\mu^a\left(x\right), \pi_b^\nu\left(y\right)\right\} = \delta_\mu^\nu \delta_b^a \delta\left(x - y\right), \tag{6.101}$$

para assim utilizar a condição de integrabilidade. Calculando os parênteses de Poisson dos vínculos

$$\left\{\mathcal{H}_a^{'0}\left(x\right), \mathcal{H}_b^{'0}\left(y\right)\right\} = 0, \tag{6.102}$$

vemos evidentemente que os mesmo estão em involução. Desta forma a integrabilidade do sistema depende apenas do parêntese de Poisson de $\mathcal{H}_a^{'0}$ com a hamiltoniana canônica $\mathcal{H}^{'}$. Assim, calculando

$$d\mathcal{H}_a^{'0}\left(x\right) = \int d^3y \left\{\mathcal{H}_a^{'0}\left(x\right), \mathcal{H}^{'}\left(y\right)\right\} dx^0 = \left(D_i \pi_a^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a\right) dx^0, \tag{6.103}$$

verificamos a necessidade de incluir um novo vínculo a teoria

$$\mathcal{C}_a^{'} \equiv D_i \pi_a^i + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a = 0, \tag{6.104}$$

a fim de que a teoria seja integrável. Mesmo que necessária para a integrabilidade do sistema, o vínculo $\mathcal{C}_a^{'}$ não a garante. Após a inclusão do vínculo devemos mais uma vez testar a integrabilidade do sistema, para isso definimos

$$C_a^{'}\left[h\right] = \int d\sigma h\left(x\right) \mathcal{C}_a^{'}\left(x\right), \tag{6.105}$$

onde podemos verificar que os novos vínculos fecham uma álgebra

$$\left\{C_a^{'}\left[h_1\right], C_b^{'}\left[h_2\right]\right\} = f_{ab}{}^{c} C_c^{'}\left[h_3\right]. \tag{6.106}$$

Sendo os parênteses de Poisson

$$\left\{\mathcal{C}_a^{'}, \mathcal{H}^{'}\right\} = \left\{\mathcal{C}_a^{'}, \mathcal{H}_a^{'0}\right\} = 0, \tag{6.107}$$

a condição de integrabilidade $d\mathcal{C}_a^{'} = 0$ está assegurada. Desta forma temos garantido que o conjunto $\mathcal{H}^{'}, \mathcal{H}_a^{'0}, \mathcal{C}_a^{'}$ formam um conjunto completo de vínculos em involução e consequentemente temos que o conjunto de EDPs de Hamilton-Jacobi que caracteriza o nosso sistema fica dado por

$$\mathcal{H}^{'} \equiv \pi + \mathcal{H}_0 = 0, \tag{6.108}$$

$$\mathcal{H}_a^{'0} \equiv \pi_a^0 = 0, \tag{6.109}$$

$$\mathcal{C}^{'} \equiv D_i \pi_a^i + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j^a = 0. \tag{6.110}$$

Desta forma, a evolução de uma variável dinâmica do nosso sistema fica completamente caracterizada pelo diferencial fundamental

$$dF\left(x\right) = \int d^3y \left[\left\{F\left(x\right), \mathcal{H}^{'}\left(y\right)\right\} dx^0 + \left\{F\left(x\right), \mathcal{H}_a^{'0}\left(y\right)\right\} d\lambda^a + \left\{F\left(x\right), \mathcal{C}_a^{'}\left\{y\right\}\right\} d\omega^a\right], \tag{6.111}$$

onde fica notório que os vínculos assumem o papel de geradores. Também é importante lembrar que adição de $\mathcal{C}_a^{'}$ amplia o nosso espaço de fase. Utilizando a expressão (6.110) podemos calcular as equações características do nosso sistema, desta forma, começando pela variável A_μ^a, temos

$$dA_\mu^a\left(x\right) = \int d^3y \left[\left\{A_\mu^a\left(x\right), \mathcal{H}^{'}\left(y\right)\right\} dx^0 + \left\{A_\mu^a\left(x\right), \mathcal{H}_b^{'0}\left(y\right)\right\} d\lambda^b + \left\{A_\mu^a\left(x\right), \mathcal{C}_b^{'}\left\{y\right\}\right\} d\omega^b\right], \tag{6.112}$$

onde se calcularmos

$$\begin{aligned}
\left\{A_{\mu}^{a}(x), \mathcal{C}_{a}^{'}\{y\}\right\} &= \left\{A_{\mu}^{a}, D_{i}\pi_{a}^{i} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_{i}A_{j}^{a}\right\} && (6.113)\\
&= D_{i}\left\{A_{\mu}^{a}, \pi_{b}^{i}\right\} && (6.114)\\
&= D_{i}\delta_{\mu}^{i}\delta_{b}^{a}, && (6.115)
\end{aligned}$$

$$\left\{A_{\mu}^{a}(x), \mathcal{H}_{a}^{'0}(y)\right\} = \left\{A_{\mu}^{a}, \pi_{b}^{0}\right\} = \delta_{b}^{a}\delta_{\mu}^{0}, \quad (6.116)$$

e

$$\begin{aligned}
\left\{A_{\mu}^{a}(x), \mathcal{H}^{'}(y)\right\} &= \left\{A_{\mu}^{a}, -\frac{1}{2}\eta_{ij}\pi_{b}^{i}\pi_{b}^{j} + \frac{1}{2}\mu\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_{k}^{b}\pi_{b}^{i} - A_{0}^{b}\left(D_{i}\pi_{b}^{i} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_{i}A_{j}^{b}\right)\right\}\\
&= -\frac{1}{2}\eta_{ij}\left\{A_{\mu}^{a}, \pi_{b}^{i}\pi_{b}^{j}\right\} + \frac{1}{2}\mu\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_{k}^{b}\left\{A_{\mu}^{a}, \pi_{b}^{i}\right\} - \left\{A_{\mu}^{a}, A_{0}^{b}D_{i}\pi_{b}^{i}\right\}\\
&= -\eta_{ij}\left\{A_{\mu}^{a}, \pi_{b}^{i}\right\}\pi_{b}^{j} + \frac{1}{2}\mu\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_{k}^{b}\delta_{\mu}^{i}\delta_{b}^{a} + D_{i}A_{0}^{b}\left\{A_{\mu}^{a}, \pi_{b}^{i}\right\}\\
&= -\eta_{ij}\delta_{\mu}^{i}\delta_{b}^{a}\pi_{b}^{j} + \frac{1}{2}\mu\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_{k}^{a}\delta_{\mu}^{i} + D_{i}A_{0}^{b}\delta_{\mu}^{i}\delta_{b}^{a}\\
&= \delta_{\mu}^{i}\left(-\eta_{ij}\pi_{a}^{j} + \frac{1}{2}\mu\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_{k}^{a} + D_{i}A_{0}^{a}\right), && (6.117)
\end{aligned}$$

obtemos a nossa primeira equação característica

$$dA_{\mu}^{a} = \delta_{\mu}^{k}\left[-\eta_{jk}\pi^{aj} + D_{k}A_{0}^{a} + \frac{\mu}{2}\eta_{ij}\varepsilon^{jk}A_{k}^{a}\right] + \delta_{\mu}^{0}d\lambda^{a} - \delta_{\mu}^{k}D_{k}d\omega^{a}. \quad (6.118)$$

Para o campo π_{a}^{μ}, temos

$$d\pi_{a}^{\mu}(x) = \int d^{3}y\left[\left\{\pi_{a}^{\mu}(x), \mathcal{H}^{'}(y)\right\}dx^{0} + \left\{\pi_{a}^{\mu}(x), \mathcal{H}_{b}^{'0}(y)\right\}d\lambda^{b} + \left\{\pi_{a}^{\mu}(x), \mathcal{C}_{b}^{'}\{y\}\right\}d\omega^{b}\right], \quad (6.119)$$

onde calculando

$$\left\{\pi_{a}^{\mu}(x), \mathcal{H}_{b}^{'0}(y)\right\} = \left\{\pi_{a}^{\mu}(x), \pi_{b}^{0}\right\} = 0, \quad (6.120)$$

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_{a}^{\mu}(x), \mathcal{C}_{b}^{'}\{y\}\right\} &= \left\{\pi_{a}^{\mu}, D_{i}\pi_{c}^{i} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_{i}A_{j}^{b}\right\}\\
&= -gf_{bcd}\left\{\pi_{a}^{\mu}, A_{i}^{d}\right\}\pi_{c}^{i} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_{i}\left\{\pi_{a}^{\mu}, A_{j}^{b}\right\}\\
&= gf_{bcd}\delta_{i}^{\mu}\delta_{a}^{d}\pi_{c}^{i} - \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_{i}\delta_{a}^{b}\delta_{j}^{\mu}\\
&= \delta_{i}^{\mu}\left(gf_{abc}\pi_{c}^{i} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{ij}\partial_{j}\delta_{a}^{b}\right), && (6.121)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\pi_a^\mu &= \delta_k^\mu \left[D_j F^{jk} + g f_a{}^{bc} \pi_b^k A_{c0} - \frac{\mu}{2} \varepsilon^{jk} D_0 A_j^a \right] dx^0 \\ &+ \delta_0^\mu \left[D_k \pi_a^k + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{kj} \partial_k A_{aj} \right] dx^0 + \delta_k^\mu \left[g f_{abc} \pi^{ck} + \frac{\mu}{2} \delta_{ab} \varepsilon^{jk} \partial_j \right] d\omega^b. \end{aligned} \tag{6.122}$$

Então o nosso conjunto de equações características fica dado por

$$dA_\mu^a = \delta_\mu^k \left[-\eta_{jk} \pi^{aj} + D_k A_0^a + \frac{\mu}{2} \eta_{ij} \varepsilon^{jk} A_k^a \right] + \delta_\mu^0 d\lambda^a - \delta_\mu^k D_k d\omega^a, \tag{6.123}$$

$$\begin{aligned} d\pi_a^\mu &= \delta_k^\mu \left[D_j F^{jk} + g f_a{}^{bc} \pi_b^k A_{c0} - \frac{\mu}{2} \varepsilon^{jk} D_0 A_j^a \right] dx^0 \\ &+ \delta_0^\mu \left[D_k \pi_a^k + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{kj} \partial_k A_{aj} \right] dx^0 + \delta_k^\mu \left[g f_{abc} \pi^{ck} + \frac{\mu}{2} \delta_{ab} \varepsilon^{jk} \partial_j \right] d\omega^b. \end{aligned} \tag{6.124}$$

A condição de integrabilidade garante a independência dos parâmetros, com isso, assegurando que a evolução na direção de um dado parâmetro seja independente da evolução ao longos dos demais. Assim, podemos restringir a nossa analise apenas na direção da evolução temporal, ou seja, ao longo do parâmetro t, e com isso obtemos

$$\partial_0 A_0^a = 0, \tag{6.125}$$

$$\partial_0 A_i^a = -\eta_{ji} \pi^{aj} + D_i A_0^a + \frac{\mu}{2} \eta_{ij} \varepsilon^{jk} A_k^a, \tag{6.126}$$

$$\partial \pi_a^0 = D_i \pi_a^i + \frac{\mu}{2} \varepsilon^{ij} \partial_i A_{aj}, \tag{6.127}$$

$$\partial \pi_a^i = D_j F^{ji} + g f_a{}^{bc} \pi_b^i A_{c0} - \frac{\mu}{2} \varepsilon^{ji} D_0 A_i^a. \tag{6.128}$$

Da equação (6.124) vemos claramente que A_0^a é uma constante. Também conseguimos perceber que a equação (6.125) coincide com a equação dinâmica (6.88). Sendo o momento canônico π_a^0 igual a zero (6.86), vemos que a equação (6.126) é justamente a condição de integrabilidade de $\mathcal{H}_a'^0$, expressa pelo vínculo (6.109). A equação (6.126) pode, alternativamente, ser vista como a componente temporal da equação de campo (6.83), bem como a equação (6.127) é equivalente à componente espacial da mesma equação da campo.

Referências

[1] C. N.YANG; MILLS, R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, Physical Review, v. 96, n. 1, 1954.

[2] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel, Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism, J. Math. Phys. 55, 112901, 2014.

[3] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, C. E. Valcárcel, G. R. Zambrano, Topologically Massive Yang-Mills field: A Hamilton-Jacobi approach, J. Math. Phys. 55, 042902, 2014.

7 Conclusões

Nessa trabalho apresentamos um estudo da teoria de vínculo via formalismo de Hamilton-Jacobi, bem como aplicou o mesmo para analisar a estrutura de vínculo de teorias de campo tolopológicas. O presente texto foi construído sobre abordagem de Caratheodory do formalismo de HJ. Tal abordagem consiste em utilizar as lagrangeanas equivalentes para buscar uma lagrangeana que deixe o sistema automaticamente integrável. É por meio de uma função S que se buscou encontrar uma lagrangeana modificada que seja nula para todas as curtas, exceto uma. O desenvolver do trabalho mostrou que se essa função existir ela deve verificar uma equação diferencial parcial de primeira ordem, a equação de HJ.

Porem, esse estudo foi desenvolvido focando a analise de sistema singulares. Desta forma precisamos fazer uma extensão da abordagem de Caratheodory para resolver alguns problemas relativos ao tratamento dos sistemas não Hessianos. Nesse ponto tivemos que reduzir a dimensão da variedade de configuração do sistema para que nesse novo espaço fosse possível obter uma matiz Hessiana de determinante não nulo. Como consequência surgiu a necessidade de se verificar, não apenas uma, mas sim um sistema de equações de HJ. O passo seguinte foi analisar sob quais condições essas equações eram integrais. Isso nos levou diretamente à condição de integrabilidade do sistema. Também conseguimos meio desta análise obter o gerador das transformação canônicas e de gauge.

Como palco para exibir a ferramenta de análise de vínculos estudada aplicamos a algumas teorias de campo topológicas. Primeiramente, partindo da equivalência entre o modelo de Jackiw-Teteilbom para gravitação bidimensional e o modelo BF em mesma dimensão, conseguimos obter todos os vínculos e fazer toda a análise do sistema, no que tange o formalismo de HJ. Mesmo tal estudo tendo nos conduzido a perceber que em dimensão dois a teoria da gravitação não possui dinâmica, ele serve como laboratório teórico para melhor compreender o que acontece na gravitação em 4 dimensões. Como extensão do estudo feito no início desse capítulo, também aplicamos o formalismo de HJ para o modelo BF em três dimensões. Apesar de ainda significativamente mais simples do que em quatro dimensões, já percebemos que a teoria possui uma dinâmica.

Por completeza o formalismo também foi aplicado a teoria de Yang-Mills topologicamente massiva. Da mesma forma que para o modelo BF conseguimos perfeitamente analisar todos os vínculos do sistema utilizando do formalismo de HJ. Vale ressaltar que o termo topologicamente massivo da teoria de Yang-Mills, que é justamente um termo de Chern-Simon, não passa de um caso particular do termo BF.

Como perspectiva o autor busca estudar mais a fundo as teorias topologicamente massivas, bem como compreender um pouco mais as estruturas geométricas pertencentes a essas teorias. Porem, como um dos maiores objetivos de se estudar os vínculos de uma teoria de campo é justamente tentar construir umas versão quântica dos mesmo, esse será um dos objetivos futuros do autor.

APPENDIX A – APÊNDICE A

APPENDIX B – APÊNDICE B

Referências

[1] Oliveira, M. J. *Termodinâmica*. São Paulo: Livraria da Física Editora, (2013).