



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Pós-Graduação

**Análise da dinâmica de difusão em  
multiplex mediante o controle da distância  
entre suas camadas pelo método de Monte  
Carlo.**

Alfredo Blanco Serrano

Dissertação de Mestrado

Salvador - Bahia  
8 de março de 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Alfredo Blanco Serrano

**Análise da dinâmica de difusão em multiplex mediante o controle da distância entre suas camadas pelo método de Monte Carlo.**

*Trabalho de mestrado apresentado ao Instituto de Física como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade*  
Co-orientador: *Prof. Dr. Jesus Gomez Gardenes*

Salvador - Bahia  
8 de março de 2017



*"Porque en un principio no era nada y el tiempo  
acumulado en mi ha formado mi historia, la historia del  
conocimiento que traigo ahora."  
A mi madre.*



---

# AGRADECIMENTOS

Eu tenho certeza que na vida as coisas se conseguem com esforço e trabalho duro, mas parte desta luta por nossos objetivos são muitas vezes um canal para pequenas motivações e ajudas de diversas pessoas que querem ver você bem sucedido. A todos os que me mostraram de alguma forma sua ajuda, compreensão e apoio, eu quero e desejo agradecer de coração e em forma particular a estas pessoas:

- Ao professor Roberto Fernandes Silva Andrade por sua orientação, compreensão e leitura crítica durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao professor Jesus Gomez Gardenes por toda sua ajuda, ideias e sugestões sobre o trabalho.
- Aos meus caros colegas de física Leonardo Rojas, Edwin Edgar Mozo Luis, Rosana Andrade, Gustavo Cuba Supanta, pelos conselhos e acompanhamento em todo este processo.
- A Laura Lara Ortiz pela amizade e sua ajuda no início de meus estudos de pós-graduação, além de nossa convivência diária.
- A Emma Nain Rodriguez Márquez pela generosidade de seu coração e compartilhar muitos espaços e momentos, que ficaram dentro de nós.
- Finalmente ao programa de Pós-graduação em Física e à CAPES pelo suporte financeiro.

E especialmente:

- Aos meus pais que com sua paixão e ajuda em minha vida, transformaram as coisas complexas em simples, por isso hoje cumpro mais um novo objetivo. OBRIGADO!!!
- Por último e igualmente importante a minha irmã por sua ajuda e às novas gerações que neste instante estão iniciando uma nova trilha em sua barriga.



---

## RESUMO

Nesta dissertação, mostra-se um estudo da dinâmica de difusão em um tipo especial de configuração de redes complexas ou modelo Multiplex [1]. Para tal fim, são usados elementos teóricos como a definição de distância inter-redes [2], para a implementação computacional do método de renumeração de nós por meio do método de Monte Carlo [3,4]. Este método estocástico foi implementado e usado de duas formas diferentes em um Multiplex de duas camadas. Primeiramente foi baseado na forma tradicional, como é utilizado no modelo de Ising [5–7], para poder aproximar a distância inter-redes das duas redes que formam o Multiplex. A outra forma tem a finalidade inversa, qual seja a de aumentar a distância inter-redes das duas redes do Multiplex e assim observar menores tempos de relaxação da difusão do Multiplex. Estas duas formas de aplicação da distância inter-redes por meio da renumeração de nós, juntamente com as diferentes configurações possíveis do Multiplex usando os modelos já conhecidos de redes complexas, permitem por consequência a modificação dos estados espectrais de difusão do Multiplex. Esta manipulação dos estados de difusão de um Multiplex, possibilitam a obtenção de resultados com potenciais aplicações em redes reais que interagem e cumprem com a configuração de um Multiplex. Portanto as relações entre as mudanças nas distâncias inter-redes, a dinâmica difusiva, e o espectro do Multiplex, são o foco principal da análises nesta dissertação.

**Palavras-chave:** Modelo Multiplex, Difusão, Distância Inter-Redes, Monte Carlo.



---

# ABSTRACT

This work provides a study of the dynamic diffusion of the Multiplex model [1] formed by two layers. This analysis requires theoretical elements such as the inter-network distance [2] and the computational implementation of the renumbering method of nodes through Monte Carlo [3, 4]. This stochastic method was implemented and used in two different ways. First, it considers the traditional way, as is used in the Ising model [5–7], in order to approximate the distance between the two network layers that form the multiplex. In the second way, the stochastic method was used for the opposite purpose, i.e., to increase the distance between the two multiplex layers, and so observe smaller relaxation times of the multiplex diffusion. These two forms of application of the inter-network distance through the renumbering of nodes, along with the different possible configurations of the multiplex using complex networks models, allow for a controlled modification of spectral states of multiplex diffusion. This manipulation of the diffusion states of a Multiplex, through this method hints for potential applications in real networks that interact and comply with the configuration of a multiplex. Therefore, the relations among diffusive dynamics, Multiplex spectrum, and their dependence on the changes in inter-network distances was the main focus of analysis, this dissertation.

**Keywords:** Multiplex Model, Diffusion, Inter-Network Distance, Monte Carlo.



---

## RESUMEN

En este trabajo, se mostrará un estudio de la dinámica de difusión de un tipo especial de configuración de redes complejas o modelo Multiplex [1]. Para tal fin, son usados elementos teóricos como la definición de distancia entre-redes [2], para la implementación computacional de método de reenumeración de nodos por medio del método de Monte Carlo [3, 4]. Este método estocástico fue implementado y usado de dos formas diferentes en un Multiplex de dos capas. primeramente fue basado en la forma tradicional, como es utilizado en el modelo de Ising [5–7], para poder aproximar la distancia entre-redes de las dos redes que forman el Multiplex. La otra forma tiene una finalidad inversa, la cual es, aumentar la distancia entre-redes de las dos redes del Multiplex y así observar menores tiempos de relajación en el proceso de difusión del Multiplex. Estas dos formas de aplicación de la distancia entre-redes por medio de reenumerar los nodos, junto con las diferentes configuraciones posibles del Multiplex usando los modelos ya conocidos de redes complejas, permiten por consecuencia la modificación de los estados espectrales de difusión del Multiplex. Esta manipulación de los estados de difusión del Multiplex, posibilitan la obtención de resultados con potenciales aplicaciones en redes reales que interactúan y cumplen con la configuración de un Multiplex. Por tanto las relaciones entre los cambios en las distancias entre-redes, la dinámica difusiva, y el espectro del Multiplex, son el foco principal del análisis de esta disertación.

**Palabras-clave:** Modelo Multiplex, Difusão, Distância Inter-Redes, Monte Carlo.



---

# SUMÁRIO

	<b>Página</b>
<b>Capítulo 1—Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2—Redes Complexas</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução à Teoria Dos Grafos	7
2.2 Redes Complexas	9
2.2.1 Propriedades das Redes	10
2.3 Tipos de Redes	13
2.3.1 Modelo de Erdős-Rényi	13
2.3.2 Modelo De Watts-Strogatz	16
2.3.3 Modelo de Barabási-Albert	18
2.4 Teoria espectral	21
2.5 Difusão em redes complexas	23
<b>Capítulo 3—Modelo de Interação Inter-Redes</b>	<b>27</b>
3.1 Introdução	27
3.2 Estrutura Das Multi-Redes	29
3.2.1 Definições e Formalismo das Multi-Redes	30
3.3 Redes Multiplexs	31
3.3.1 Propriedades	32
3.3.2 Propriedades Espetrais	36
3.3.3 Difusão	37
3.3.4 Difusão em Multiplex de Duas Camadas	38
<b>Capítulo 4—Distância Entre Duas Redes</b>	<b>43</b>
4.1 Propriedades dos vizinhos em redes complexas	44
4.2 Distância Inter-redes	46
4.3 Método De Monte Carlo	48
4.4 Conceitos Básicos	49

4.5	Distância Mínima entre duas Redes	51
4.6	Planejamento do Problema	53
4.6.1	Construção do Multiplex de duas Camadas	53
4.6.2	Afastamento Topológico por Renumeração de Nós	55
<b>Capítulo 5—Resultados e Discussões</b>		<b>57</b>
5.1	Multiplexs formados por redes RTI	57
5.1.1	Redes Aleatórias	57
5.1.2	Redes Livres de escala	71
5.1.3	Redes Small World	79
5.2	Multiplex formados por Redes RES	83
5.2.1	Redes Aleatórias	83
5.2.2	Redes Libre de Escala	88
5.2.3	Redes Small World	97
5.3	Difusão Em Multiplex RTD	106
5.3.1	Redes Aleatórias e Small World	106
5.3.2	Redes Aleatórias e Livre de escala	112
5.3.3	Small World e Scale Free	116
<b>Capítulo 6—Conclusões</b>		<b>119</b>

---

## LISTA DE FIGURAS

- 1.1 No gráfico a, apresenta-se uma foto da cidade de Königsberg ressaltando os pontes que a formam. No gráfico b, apresenta-se um diagrama qualitativo do problema dos pontes. No gráfico c, apresenta-se o grafo que corresponde a uma abstração matemática do problema das pontes Königsberg. Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Seven\\_Bridges\\_of\\_K%C3%B6nigsberg](https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg) 2
- 1.2 Representação da estrutura da internet. Em azul North America (ARIN), em verde Europe (RIPE), em roxo Latin America (LACNIC), em vermelho Asia Pacific (APNIC), em amarelo Africa (AFRINIC), em branco redes altamente ligadas. Fonte: [www.opte.org](http://www.opte.org) 3
- 2.1 Tipos de Grafos, (a) grafo comum não direcionado, (b) grafo direcionado ou dígrafo cíclico, (c) dígrafo acíclico. Fonte: Autor 8
- 2.2 Rede de 5 nós com relacionamento. Fonte: Autor 9
- 2.3 Exemplos de três possíveis redes geradas pelo modelo  $G_{5,0.25}^{ER}$ , Repare que são conexas, mas não necessariamente sempre o modelo vai gerar redes conexas. Fonte: Autor 14
- 2.4 Exemplos de redes aleatórias com probabilidades entre 0,1 e 0,5. Fonte: [8] 15
- 2.5 Propriedades do modelo de Watts e Strogatz para diferentes valores de  $\rho$ . Fonte: [9]. 17
- 2.6 Características de clusterização  $C(\rho)$ , baixa distância  $d(\rho)$ . Fonte: [9] 18
- 2.7 Exemplos do crescimento de uma rede livre de escala, iniciando com 3 nós e a medida que vão avançando os passos pode-se ver a formatação. Fonte: Autor 20
- 2.8 Combinações para uma rede de 3 nós e duas arestas. Fonte: Autor 21
- 2.9 Par de grafos mais pequenos que compartilham o espectro e são chamados coespetrais ou isoespetrais. Fonte: [10]. 23
- 3.1 Rede de amizade de uma pessoa no Facebook. Fonte: [71] 28

3.2	Diferentes tipos de redes reais com suas interações.	29
3.3	Redes insoladas de 6 vértices apresentadas com diferente topologia em camadas sinalizadas como $C_1, C_2, C_3, C_4$ .	30
3.4	Multiplex de duas camadas formado por redes de redes de 6 nós. As conexões entre redres só estão entre vértices iguais das redes.	32
3.5	Representação da projeção de um Multiplex formado por duas camadas de sete nós	33
3.6	Multiplex formado por três camadas e cada camada formada por quatro nós. Representa como o coeficiente de clusterização de qualquer nó das redes é sempre zero, mas na rede projeção estes mesmos nós são diferentes de zero.	35
3.7	Espectro de uma rede tipo Multiplex de duas camadas de 6 nós. Em cores se apresentam a evolução dos diferentes autovalores $\lambda_i$ para as diversas mudanças no parâmetro $D_x$ .	41
3.8	Espectro de uma rede tipo Multiplex de duas camadas de 6 nós. Em cor vermelho se apresenta a evolução do autovalor $\lambda_2$ para as diversas mudanças no parâmetro $D_x$ . Como parte do análises apresenta-se diversos autovalores $\lambda_2$ para diferentes casos.	41
3.9	Espectro de uma rede tipo Multiplex formado por duas redes livres de escala de 1000 nós. Inicialmente as duas redes eram iguais, mas foram adicionadas 400 arestas na rede $L_2$ de forma aleatória, fazendo com que a rede $L_2$ tenha um tempo de relaxamento maior que o tempo do Multiplex.	42
4.1	Rede conexa formada por 6 nós e 9 arestas.	44
4.2	Rede conexa formada por 6 nós e 6 arestas.	45
4.3	Três redes simples <b>a</b> , <b>b</b> e <b>c</b> formadas por 4 nós, onde se evidencia as diferenças estruturais entre <b>c</b> com as redes <b>a</b> e <b>b</b> . Por outro lado, as redes <b>a</b> e <b>b</b> apresentam de forma intencional numerações diferentes para ressaltar o fato que, com estas numerações, o valor de $\delta(\alpha, \beta)$ é diferente de zero apesar de compartilhar a mesma estrutura.	48
4.4	Gráficos da probabilidade de um sistema em um estado $m$ passar a um estado $n$ versus a mudança de energia $\Delta E$ , com diferentes valores de $\beta$ no modelo de Ising de duas dimensões. O gráfico da esquerda apresenta o método de Monte Carlo e a gráfica da direita o método de Metropolis.	51
4.5	Fluxograma para o algoritmo Metropolis aplicado na procura da menor distância $\delta^{min}(\alpha, \beta)$ , entre duas redes.	52
4.6	Gráfico do tempo de evolução de $\delta(\alpha, \beta)$ versus passos em Monte Carlo. As curvas de "pontos" e "linha-ponto" correspondem foram feitas com duas redes, que são Apollonian network e Caley tree. Para os "pontos" o número de nós é de 124 e para "linha-ponto" 1096. As outras curvas correspondem a redes Apollonianas iguais, mas com numerações de nós diferentes inicialmente, também para 124 e 1096 nós.	53
4.7	Tipos de Multiplex	54

- 4.8 Multiplex de duas camadas, onde foi trocado por renumeração de nós os nós  $5'$  e  $6'$ . Na Figura (b), foi permutada a numeração dos nós  $5'$  e  $6'$ , que agora não se encontram mais imediatamente embaixo dos nós 5 e 6. No entanto, as conexões entre o nó 5 e o novo nó  $5'$ , bem como entre o nó 6 e o novo nó  $6'$  devem ser mantidas. Para que os novos nós  $5'$  e  $6'$  fiquem imediatamente abaixo dos nós 5 e 6, a posição entre eles foi também trocada na Figura c, mas neste caso todas as conexões em  $L_2$  entre os nós  $5'$  e  $6'$  foram trocadas entre si. 56
- 5.1 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 354 y 50 nós renumerados pelo método de Monte Carlo. Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumenta. 59
- 5.2 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 355 y 354 nós renumerados pelo método de Monte Carlo. Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumenta. 60
- 5.3 Comparação dos espectros de 355 (em cor roxo) nós renumerados e o caso de máximo afastamento topológico inter-redes (em cor verde) de  $1 \times 10^7$  nós renumerados em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$ . 61
- 5.4 Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo. 62
- 5.5 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 433 y 50 nós renumerados pelo método de Monte Carlo. 63
- 5.6 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 434 y 433 nós renumerados pelo método de Monte Carlo. 64
- 5.7 Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo. 65
- 5.8 Comparação dos espectros de 434 (em cor roxo) nós renumerados e o caso de máximo afastamento topológico inter-redes (em cor verde) de  $5 \times 10^6$  nós renumerados em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$ . 65
- 5.9 Comparação dos espectros de 355 (em cor roxo) nós renumerados e a troca do vértice com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$ . 69

- 5.10 Comparação dos espectros de 355 (em cor roxo) nós reenumerados,  $1 \times 10^7$  (em cor preto) nós reenumerados e a troca de dois dos vértices com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.1}^{ER}$ . 69
- 5.11 Comparação dos espectros de 434 (em cor roxo) nós reenumerados e a troca do vértice com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.01}^{ER}$ . 70
- 5.12 Comparação dos espectros de 434 (em cor roxo) nós reenumerados,  $5 \times 10^6$  (em cor preto) nós reenumerados e a troca de três dos vértices com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.01}^{ER}$ . 70
- 5.13 Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{100}^{L.E.}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo. 72
- 5.14 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{100}^{L.E.}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde, roxo, preto e azul estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 100, 500, 3000 e  $1 \times 10^6$  nós reenumerados pelo método de Monte Carlo. 73
- 5.15 Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{367}^{L.E.}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo. 74
- 5.16 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{367}^{L.E.}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumenta. 74
- 5.17 Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{1000}^{L.E.}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo. 75
- 5.18 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{1000}^{L.E.}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumenta mostrando que este comportamento é independente do tamanho que as redes possuam. 76
- 5.19 Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala **RTI** de 100 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 49 nós e o método de Monte Carlo de  $1 \times 10^6$ . 77
- 5.20 Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala **RTI** de 367 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 182 nós e o método de Monte Carlo de  $1 \times 10^6$ . 78
- 5.21 Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala **RTI** de 1000 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 499 nós e o método de Monte Carlo de  $10 \times 10^6$ . 78
- 5.22 Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$  de 500 nós, em função do número de passos do método de Monte Carlo. 79

- 5.23 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$ , obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Note-se que para afastamentos maiores a 1000 renumerações o espectro muda seu comportamento, mostrando valores de  $\lambda_2$  menores. 80
- 5.24 Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo. 81
- 5.25 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$ , obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . 82
- 5.26 Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.5$ , obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . 82
- 5.27 Distância inter-redes entre redes  $\dot{G}_{500,0.5}^{ER}$  que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo. 84
- 5.28 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes  $\dot{G}_{500,0.5}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 85
- 5.29 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes  $\dot{G}_{500,0.5}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 85
- 5.30 Distância inter-redes entre redes  $\dot{G}_{500,0.05}^{ER}$  que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo. 86
- 5.31 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes  $\dot{G}_{500,0.05}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 87
- 5.32 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes  $\dot{G}_{500,0.05}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 87
- 5.33 Distância inter-redes entre redes livre de escala de 100 nós que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo. 88
- 5.34 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes livre de escala de 100 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 89

- 5.35 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes livre de escala de 100 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 90
- 5.36 Distância inter-redes entre redes livre de escala de 367 nós que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo. 90
- 5.37 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes livre de escala de 367 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 91
- 5.38 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes livre de escala de 367 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 91
- 5.39 Distância inter-redes entre redes livre de escala de 1000 nós que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo. 93
- 5.40 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes livre de escala de 1000 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 93
- 5.41 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes livre de escala de 1000 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 94
- 5.42 Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala de 100 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 49 nós e o método de renumeração de  $1 \times 10^4$  para ter uma pequena diferença percentual de 8.4%. 95
- 5.43 Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala de 367 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 128 nós e o método de renumeração de  $1 \times 10^4$  para ter uma pequena diferença percentual de 9.1%. 96
- 5.44 Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala de 1000 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 499 nós e o método de renumeração de  $1 \times 10^4$  para ter uma pequena diferença percentual de 3.7%. 96
- 5.45 Distância inter-redes entre redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$  que formam o Multiplex **RES** de duas camadas, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo 98

- 5.46 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 99
- 5.47 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 99
- 5.48 Distância inter-redes entre redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$  que formam o Multiplex **RES** de duas camadas, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo. 101
- 5.49 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 101
- 5.50 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.07$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 102
- 5.51 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.2$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 102
- 5.52 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 103
- 5.53 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 103
- 5.54 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.07$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 104
- 5.55 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.2$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 104
- 5.56 Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 105

- 5.57 Três diferentes gráficos de distância inter-redes, entre redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho_s$  e redes aleatórias com probabilidade  $\rho_a$  que formam o Multiplex **RTD**, em função dos passos do método de Monte Carlo. 108
- 5.58 Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para a aproximação das redes de pequeno mundo e aleatória com probabilidade  $\rho = 0.1$ . Apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 109
- 5.59 Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para a aproximação das redes de pequeno mundo e aleatória com probabilidade  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 109
- 5.60 Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para a aproximação das redes de pequeno mundo e aleatória com probabilidade  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.. 110
- 5.61 Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para o afastamento de duas redes Small World de 500 nós com  $\rho = 0.1$ , apresentando o comportamento de  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 111
- 5.62 Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para o afastamento de duas redes Small World de 500 nós com  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento de  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 111
- 5.63 Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para o afastamento de duas redes Small World de 500 nós com  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento de  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós. 112
- 5.64 Dois diferentes gráficos de distância inter-redes, entre a rede aleatória com probabilidade  $\rho_a$  e rede livre de escala de 500 nós que formam o Multiplex **RTD**, em função dos passos do método de Monte Carlo. 113
- 5.65 Espectros de afastamento e aproximação pela renumeração de nós do Multiplex **RTD** formado pela rede aleatória com probabilidade  $\rho_a$  junto à rede livre de escala de 500 nós. (a) e (b) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_a = 0.1$ . (c) e (d) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_a = 0.01$ . Note-se que a renumeração muda o comportamento espectral, tanto na aproximação como no afastamento, para valores altos do coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ . 115
- 5.66 Dois diferentes gráficos de distância inter-redes, entre a rede de pequeno mundo com probabilidade  $\rho_s$  e rede livre de escala de 500 nós que formam o Multiplex **RTD**, em função dos passos do método de Monte Carlo. 116

5.67 Espectros de afastamento e aproximação pela renumeração de nós do Multiplex **RTD** formado pela rede de pequeno mundo com probabilidade  $\rho_s$  junto à rede livre de escala de 500 nós. (a) e (b) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede de pequeno mundo  $\rho_s = 0.5$ . (c) e (d) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede de pequeno mundo  $\rho_s = 0.05$ . Note-se a existência da super difusão em todos os casos e a similaridade no comportamento comportamento espectral com os outros casos dos Multiplex **RTD**, tanto na aproximação como no afastamento, para valores altos do coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ .



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

Nesta introdução, relatam-se diversos conceitos dos capítulos de forma resumida sem fazer uma explicação detalhada ou aprofundar as definições. Para ser mais explícitos, trata-se de uma pequena mostra resumida da teoria apresentada e desenvolvida nos diferentes capítulos do texto, para que o leitor possa obter uma ideia clara e básica de cada capítulo. Por outro lado, se começara com uma breve história, muito necessária para entender o contexto no qual se desenvolvem as redes complexas e as contribuições mais importantes que vão aparecendo ao longo da dissertação.

As redes complexas hoje em dia, ocupam uma parte fundamental de nossas vidas e portanto não é possível negar sua existência e a influência que podem chegar a ter. A grande prova de sua existência nas redes reais, reside nos inumeráveis exemplos que estão ao nosso redor, por exemplo temos as redes de comunicação, as redes neurológicas, as redes sociais, as redes de amizades e até a internet, que é uma rede formada por outras redes de diferentes tipos (Facebook, Twitter, Instagram, etc.). Pode-se até pensar pelos exemplos que estas redes reais são uma invenção do homem, mas a realidade é outra, pois existem muitos tipos de redes na natureza (por exemplo as células são um bom exemplo de redes complexas em sistemas biológicos). Tudo isto, constitui um espaço abstrato, ao qual temos acesso unicamente mediante ferramentas matemáticas, tais como a matemática discreta ou teoria de grafos. Desemaranhar as propriedades das redes complexas pode ser uma tarefa peculiarmente difícil, mas se conseguir, as implicações e benefícios que podem trazer em diferentes disciplinas <sup>1</sup> serão muitos para um melhor desenvolvimento e compreensão das redes reais.

A definição de rede complexa é ainda uma questão um pouco polêmica, já que existem inu-

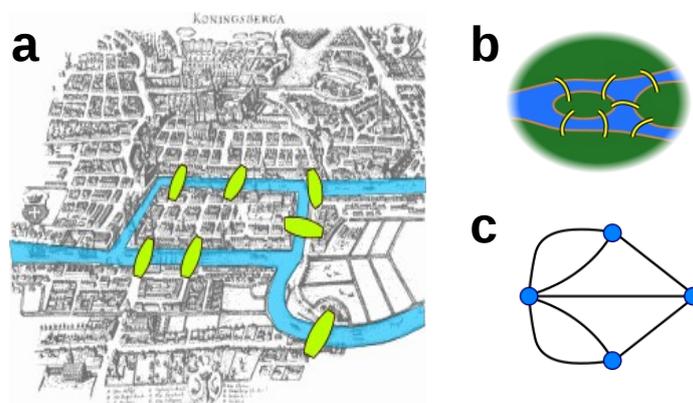
---

<sup>1</sup>As redes complexas envolvem diferentes campos como a biologia, a química, a economia, a neuro-ciência, etc

meráveis formas em que são apresentadas as redes complexas em diversos textos da literatura [11–15], ou seja, para diferentes autores existem diferentes formas de catalogar o que é uma rede complexa, mas todas as definições apresentadas levam a dizer que uma rede complexa é a descrição de diferentes tipos de sistemas (físicos, biológicos ou sociais) por meio de objetos matemáticos da teoria de grafos, e apresentando diversas características de complexidade, sejam estruturais, de tamanho, ou introduzidas em função de suas propriedades físicas e topológicas.

A forma mais fácil de representar uma rede complexa é mediante um grafo formado por dois conjuntos (um formado pelas arestas  $E$  e outro pelos vértices  $V$ ). Estes conjuntos junto a seus objetos ajudam a extrair informações das redes para seu posterior análises e desta forma permitir a construção da teoria de redes complexas [11, 16].

A história do estudo das redes na forma de grafos teve início formal na cidade Königsberg (ver Figura 1.1a), pela resolução do problema chamado "problema das pontes de Königsberg". Cidade atravessada por um rio que forma duas ilhas, que estão ligadas entre si e com o resto da cidade por sete pontes (ver Figura 1.1b). O problema consiste em estabelecer um caminho que passa uma e só uma única vez por cada uma das sete pontes, iniciando em qualquer ponto e retornando ao mesmo lugar. Tempo depois em 1735 o matemático Leonhard Euler apresentou a solução ao problema de Königsberg, originando assim a teoria de grafos.

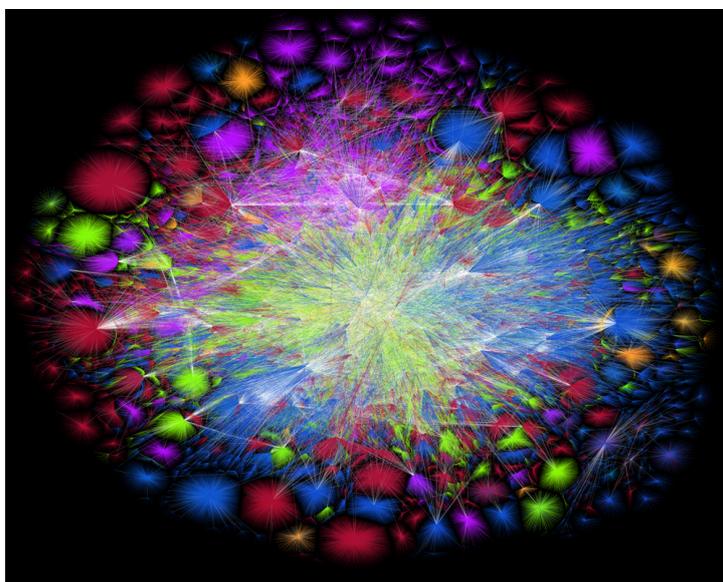


**Figura 1.1** No gráfico a, apresenta-se uma foto da cidade de Königsberg ressaltando os pontes que a formam. No gráfico b, apresenta-se um diagrama qualitativo do problema dos pontes. No gráfico c, apresenta-se o grafo que corresponde a uma abstração matemática do problema das pontes Königsberg. Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Seven\\_Bridges\\_of\\_K%C3%B6nigsberg](https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg)

Para mostrar que não era possível, Euler substituiu cada ilha por um ponto e cada ponte por uma linha, criando assim um grafo (ver Figura 1.1c), o primeiro grafo para resolver problemas. A partir de Euler a modelagem mediante grafos foi desenvolvido até converter-se no que é na

atualidade e desse modo, diferentes redes do mundo real podem ser representadas e caracterizadas por meio de redes complexas. É possível, por exemplo, modelar toda a estrutura física de uma grande rede de computadores tal como a internet. Nesse caso, os computadores conectados à internet referem-se aos vértices da rede enquanto que os cabos e meios de transmissão podem representar as arestas da rede. Outras analogias podem ser também utilizadas, tais como o conteúdo que possuem as páginas Web, relações sociais entre um grupo de pessoas, redes organizacionais ou redes de negócios entre companhias, redes neuronais, redes metabólicas, cadeia alimentar, entre outras. Como ilustração da modelagem de redes complexas com grafos, considere a Figura 1.2, onde mostra-se de forma aproximada a estrutura da internet, onde os routers são os nós da rede e suas conexões as arestas.

O estudo mais formal das redes complexas, teve início a meados de 1960, quando Erdős e Rényi apresentaram seu modelo de rede aleatória (Capítulo 2). Por exemplo, as redes sociais são constituídas por pessoas (vértices), e pelas diferentes interações que se apresentam (arestas), quando os sociólogos utilizavam redes sociais, com a finalidade de estudar o comportamento da sociedade e as muitas relações entre os indivíduos, as pesquisas eram focadas em características muito específicas das redes, como a centralidade (o vértice mais central) e a conectividade (vértices com maior número de conexões)<sup>2</sup>. A centralidade e a conectividade eram usadas para determinar as pessoas que melhor se relacionavam com os demais ou para identificar as pessoas mais influentes da rede [17], por exemplo, em Facebook um cantante ou um político famoso poderiam cumprir com as duas características de centralidade e conectividade.



**Figura 1.2** Representação da estrutura da internet. Em azul North America (ARIN), em verde Europe (RIPE), em roxo Latin America (LACNIC), em vermelho Asia Pacific (APNIC), em amarelo Africa (AFRINIC), em branco redes altamente ligadas.

Fonte: [www.opte.org](http://www.opte.org)

---

<sup>2</sup>Estas características e outras serão relatadas na Secção 2.2.1 do Capítulo 2

Com o passar do tempo e graças aos avanços da tecnologia da comunicação e à disponibilidade de melhores computadores, as redes complexas foram potencializadas com novas ferramentas que permitiram trabalhar com redes muito grandes, encerrando um número de vértices maior ao normal, dando assim solução a um dos problemas principais, como a falta de ferramentas para fazer cálculos em redes de grande tamanho. As pesquisas antes focadas nas pequenas redes e nas propriedades de vértices individuais ou arestas, passaram a considerar propriedades estatísticas em larga-escala. Atualmente, são comuns estudos com redes envolvendo milhões ou bilhões de vértices, os quais antes eram compostos por dezenas ou em casos extremos, centenas de vértices. Tudo isto permitiu a evolução da teoria e a criação de diferentes modelos que puderam recriar certas propriedades físicas e estruturais das redes reais, que serão apresentadas na Seção 2.3 do Capítulo 2. Os modelos criados mediante a modelagem, permitiram que as redes foram separadas e catalogadas em três grandes grupos principais de modelos (Aleatoria, mundo pequeno e livre de escala), conforme certas propriedades estruturais que podiam diferenciar algumas redes de outras. Não obstante, estes avanços não foram ainda suficientes para ter uma representação completa de uma rede real mediante a criação de um modelo.

Um dos modelos mais importantes, criado em 1959, e considerado por muitos anos um objeto de estudo das redes complexas, é o modelo de rede aleatória criado por Erdős e Rényi [18–21]. Mas com os avanços na capacidade de cálculo dos computadores, revelou-se várias características que diferem substancialmente as redes reais das redes aleatórias. As principais diferenças estavam na topologia e evolução da rede no tempo, apresentando propriedades organizacionais bastante robustas.

Nos seguintes anos surgiram novos modelos que tentavam imitar a natureza estrutural e dinâmica das redes reais. Um desses novos modelos são as redes de mundo pequeno ou modelo Watts y Strogatz (1998). A criação deste novo tipo de redes de mundo pequeno, foi feita pela observação de certas características estruturais presentes nas redes reais, em especial o efeito de mundo pequeno (pequena distância média entre os vértices de uma rede). Mas também, o modelo não conseguiu modelar mais outras características importantes presentes nas redes reais, por exemplo, a distribuição de grau em forma de lei de potências<sup>3</sup>. Embora as redes de mundo pequeno não puderam abstrair todas as propriedades das redes reais, não deixou de ser um marco de referência importante para a criação de mais outros modelos com novas variações importantes, que aportam numerosas descobertas sobre a natureza das redes reais.

Devido às diferenças entre as redes de mundo pequeno y as redes reais, foi introduzido o modelo de rede livre de escala ou modelo Barabási-Albert (1999) [13, 14, 20, 22, 23]. O modelo livre de escala conseguiu combinar as propriedades do pequeno mundo com a lei de potências na distribuição de graus, convertendo-se no modelo que melhor conseguia simular as redes reais. Basicamente as redes livre de escala são redes criadas com duas premissas, a primeira é o fato da dinâmica de crescimento presente em redes reais e que ainda nenhum modelo havia tido em consideração. A segunda premissa é vista na forma como acontece a dinâmica de cres-

---

<sup>3</sup>Uma das principais características dos sistemas complexos é a lei de potências, presente sempre e que para alguns autores identifica se um sistema é complexo ou não.

cimento das redes reais, que aparentemente não corresponde à forma de crescimento de uma rede aleatória, pelo contrario, mostra um tipo de ligação preferencial, ou seja, existe alguns nós na rede com um número significativo de grau e portanto uma maior probabilidade de ter mais ligações que outros nós com um numero de grau menor. Com estes dois fatos se constituiu as redes livres de escala e até hoje representam um padrão referencial nas pesquisas de redes reais. Apesar de haver uma semelhança entre o modelo livre de escala e as redes reais, é ressaltar que o modelo ainda não consegue ter todas as características estruturais presentes nas redes reais.

Apesar da grande evolução da teoria das redes complexas mostrada até agora, pode-se dizer que ainda apresentam-se algumas dificuldades. Por exemplo, a teoria não considera de forma explícita a interação que duas ou mais redes possam ter, como é o caso das redes reais, que estão em constante interação <sup>4</sup>. Isto leva a pensar na existência de um novo modelo, que defina as propriedades e formas estruturais a consideração da possível interação entre duas redes ou mais. Este modelo em sua forma mais geral é o modelo de multi-rede apresentado no Capítulo 3 e surgiu para atender os problemas das interações entre redes existentes na vida real. Por isso, o modelo de multi-rede se converteu na base fundamental de mais outros modelos, cada um focado a resolver diversos problemas de interações entre redes complexas. Um destes modelos é o modelo Multiplex apresentado no Capítulo 3 Secção 3.3. Suas aplicações em redes reais fazem que seja uma das principais motivações pelas quais foram estudadas e trabalhadas nesta dissertação, além de ser um modelo muito simples mas poderoso na hora de tentar explicar processos como os de difusão (Ver Secção 3.3.3 Capítulo 3).

Devido à necessidade de comparar de forma explícita, tanto qualitativamente como quantitativamente duas redes, no Capítulo 4, explora-se uma nova grandeza que não precisa de utilizar as propriedades estruturais já conhecidas da teoria das redes complexas <sup>5</sup> (Ver Capítulo 2). Por isto, é apresentado a grandeza de distância entre duas redes [2], que mostra as semelhanças ou diferenças topológicas que duas redes qualquer possuem <sup>6</sup>. Mas a distância entre duas redes é uma grandeza suscetível e dependente da numeração dos nós que as redes possuam, como consequência disto duas redes topologicamente iguais com numeração de nós diferente, podem ter um valor de distância entre redes maior de zero. (Secção 4.2 Capítulo 4). Por isto, é preciso a aplicação desta grandeza junto com um processo de renumeração de nós, que consiga a exploração de todas as possíveis numerações de nós e obter com certeza o valor da distância que mostre as semelhanças ou diferenças topológicas de duas redes. Devido à grande quantidade de numerações possíveis em uma rede (ao redor de  $n!$ ) é utilizado o método de Monte Carlo e deste modo saber com certeza se duas redes tem algum tipo de semelhança topologia. Por exemplo, se existisse uma forma de relacionar uma dependência entre os processos de difusão entre redes e as semelhanças topológicas que duas redes tem, seria uma importante ferramenta para melhorar os problemas de transporte em redes reais.

---

<sup>4</sup>Um dos exemplos mais comuns disto são as interações que existem entre as diferentes redes criadas na internet ou também em nossas vidas, onde a rede de amigos pode ter interações com a rede de trabalho ou de família.

<sup>5</sup>As propriedades estruturais das redes não mostram de forma explícita a diferença entre duas redes, sendo mais propriedades das redes individuais.

<sup>6</sup>Se duas redes são topologicamente iguais, então o valor da distância será de zero, mas se pelo contrario são diferentes o valor é maior que zero.

Com tudo o exposto até agora, é claro dizer em forma geral que o objetivo desta dissertação é o análises nos processos de difusão em redes tipo Multiplex em função das mudanças topológicas. Isto mediante a aplicação da grandeza de distância entre duas redes junto ao método de Monte Carlo <sup>7</sup>. É importante aclarar que, o método de Monte Carlo é um método que comumente é utilizado para a maximização de funções, sem ainda existir na literatura uma aplicação para minimizar funções, mas neste trabalho foi desenvolvido tanto a maximização como a minimização, mostrando um claro avanço e inovação na aplicação do método de Monte Carlo. No contexto desta dissertação, isto quer dizer aumentar ou diminuir a distância entre redes. Portanto, mediante um processo de renumeração de nós é possível aumentar ou até diminuir a distância entre duas redes (Ver Capítulo 4), tudo isto aplicado no modelo Multiplex traz consequências na dinâmica de difusão, por exemplo, otimizar a difusão entre duas redes mediante uma melhor configuração nas redes que formam o modelo Multiplex.

Desta forma, são apresentados e resumindo os objetivos desta dissertação:

- Análises da dinâmica de difusão para diferentes passos feitos pelo método de Monte Carlo, mediante a utilização de diversos tipos redes complexas na configuração do Multiplex.
- Utilização do método de Monte Carlo, em uma forma não usual como resposta à natureza do problema de difusão em redes Multiplex de duas camadas.
- Mostrar a possibilidade de manipular a difusão mediante o método de Monte Carlo sem modificar a forma estrutural das redes que o formam.
- propõe quando se possa, métodos não estocásticos para a manipulação da difusão do Multiplex de duas camadas.
- Mostrar as aplicações do modelo Multiplex em redes reais e a importância da otimização dos problemas de difusão.

Por último apresentamos no Capítulo 5 e 6 as discussões e análises sobre os resultados obtidos no estudo da dinâmica espectral do modelo Multiplex além de suas possíveis repercussões e aplicações em redes reais.

---

<sup>7</sup>As mudanças topológicas são a consequência de manter a forma estrutural do modelo Multiplex em cada nova renumeração de uma das redes que o formam.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## REDES COMPLEXAS

Neste capítulo apresentaremos uma série de conceitos fundamentais sobre a teoria de redes complexas, baseados na teoria de grafos, para depois poder abordar a teoria das redes Multiplex apresentada no Capítulo 3. Nas primeiras secções 2.1 e 2.2 a seguir, apresentamos uma breve descrição dos conceitos fundamentais na teoria de grafos e redes complexas como suas principais definições e propriedades. Damos assim ao caro leitor as ferramentas introdutórias para depois começar a abordar os principais modelos apresentados na secção 2.3 que são baseados em certas características estruturais que possuem as redes reais. Na secção 2.4 deste capítulo apresentamos a teoria espectral das matrizes laplacianas das redes complexas. Tratamos também algumas de suas representações matriciais e como mediante a teoria espectral, pode-se caracterizar algumas de suas propriedades estruturais. No final do capítulo apresentamos a teoria de difusão em redes complexas, e sua dinâmica, encontrando o tempo para o qual uma rede termina seu processo de difusão. Além disto mostra-se a importância da teoria espectral no processo de difusão em redes complexas. Esperamos que após ler esse capítulo, ter-se-á um conhecimento básico das redes complexas e seus processos dinâmicos básicos.

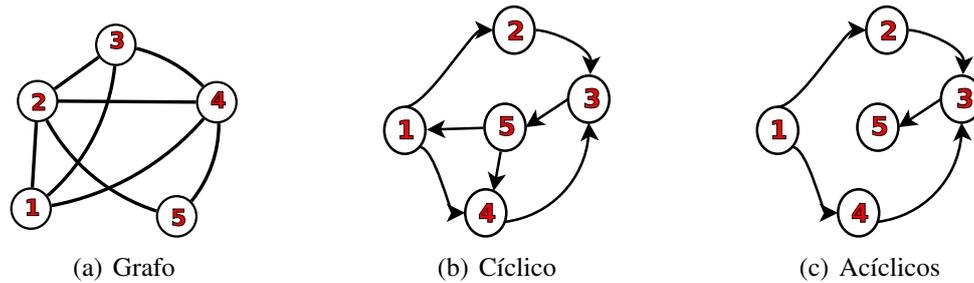
### 2.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

A teoria dos grafos [12, 19] é a principal ferramenta utilizada para a abstração de uma rede real. Estas estruturas matemáticas, chamadas grafos, são compostas por um conjunto de vértices (nós) e outro conjunto de pares de nós (arestas). As arestas são utilizadas para indicar uma relação entre os pares de nós que ligam, em conformidade com o problema modelado <sup>1</sup>. Mais formalmente dizemos que um grafo  $G(V, E)$  está formado por um par de conjuntos, tal que os elementos de  $V$  são seus vértices (ou nós) e os elementos de  $E$ , suas arestas (ver Figura 2.1(a)).

---

<sup>1</sup>Os problemas podem ser de uma grande variedade, tecnologia ou interesse intelectual e em diversas áreas do conhecimento. Alguns são: a internet, redes de citações, redes celulares, etc.

Além disso, um grafo pode ser direcionado (ou também chamado dígrafo) ou não. Em um grafo direcionado, cada aresta tem um sentido que liga um vértice origem a um vértice destino. Há dois tipos de dígrafos, alguns são cíclicos (ver Figura 2.1(b)), quando existe um caminho de um vértice para ele mesmo, ou pelo contrario acíclicos (ver Figura 2.1(c)), quando não existe caminho. Em seguida vamos formalizar o conceito de redes não direcionadas, e então definir matematicamente suas propriedades topográficas (estruturais).



**Figura 2.1** Tipos de Grafos, (a) grafo comum não direcionado,(b) grafo direcionado ou dígrafo cíclico, (c) dígrafo acíclico.

Fonte: Autor

Como já vimos uma rede está formada por dois conjuntos (vértices e arestas). Para os vértices ou nós, serão definimos o número de objetos que contem o conjunto  $\mathbf{V}$ , como  $n = |\mathbf{V}|$ . A existência de um relacionamento entre nós da mesma rede será representado por um par não-ordenado, caso a rede seja direcionada, o par passa ser ordenado. Desta forma se  $i, j \in \mathbf{V}$  estão relacionados, iremos representar este fato pelo par não-ordenado  $(i, j)$ . Isto representa a existência do relacionamento que chamaremos de aresta. O conjunto de todos os relacionamentos, ou seja, de todas as arestas será denotado por  $\mathbf{E}$ . Desta forma, temos que:

$$\mathbf{E} = \{(i, j) | i, j \in \mathbf{V}, i \text{ está relacionado com } j\}, \quad (2.1)$$

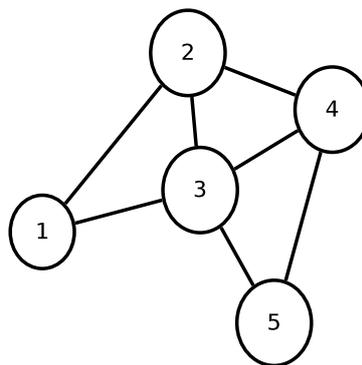
é o conjunto que identifica todas as arestas em uma rede. Para o número de arestas no conjunto  $\mathbf{E}$ , será definido  $m$ , que é a quantidade de pares não-ordenados em  $\mathbf{E}$ , ou seja  $m = |\mathbf{E}|$ . Finalmente uma rede será definida por estes dois conjuntos,  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  ou  $G_{\mathbf{V}, \mathbf{E}}$  [21]. Para o caso de dígrafos temos relacionamentos assimétricos<sup>2</sup>. Entretanto podemos estender a definição da Equação 2.1, para dígrafos. Basta para isso representar o relacionamento como um par ordenado, onde a ordem dos vértices no par é importante. O seja, o par  $(i, j)$  será diferente do par  $(j, i)$ , pois identificam dois possíveis e distintos relacionamentos.

Uma das formas podemos representar uma rede, ou seja, sua estrutura é por meio de uma matriz. Esta matriz, que contem toda a informação sobre os nós e seus relacionamentos mais próximos, é conhecida como matriz de adjacência ou vizinhança e está definida pela Equação 2.2.

<sup>2</sup>Neste caso, o fato de um objeto  $i$  estar relacionado com outro  $j$  não implica que  $j$  esteja relacionado com  $i$ . Exemplos são amizade, hiperlinks entre páginas web, troca de email, entre muitos.

$$\mathbf{A} = \begin{cases} 1 & \text{Se } (i, j) \in \mathbf{E}, \\ 0 & \text{Caso contrario.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Repare que se a matriz de adjacência possui um relacionamento simétrico se está representando uma rede não direcionada e então a matriz será simétrica com relação a sua diagonal principal, pois neste caso temos  $\mathbf{A}(i, j) = \mathbf{A}(j, i)$ . Por outro lado se o relacionamento não é simétrico, ou seja se for assimétrico, como por exemplo em uma rede direcionada, então a matriz de vizinhança não será simétrica.



**Figura 2.2** Rede de 5 nós com relacionamento. Fonte: Autor

Na Figura 2.2 apresenta-se um exemplo de uma rede com 5 nós não direcionada e a matriz de adjacência para esta rede está definida pela Equação 2.3. Repare que cada vértice da rede corresponde com uma das linhas e das colunas da matriz de adjacência, então para a rede da Figura 2.2 a matriz de adjacência é de  $5 \times 5$ , e os relacionamentos entre um par de vértices  $(i, j)$  são representados pelo número um. Pode-se constatar que a matriz é simétrica com respeito a sua diagonal principal, de forma que apresenta todas as propriedades para matrizes simétricas já conhecida na literatura.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

## 2.2 REDES COMPLEXAS

Conforme ao mostrado na Seção 2.1, um grafo ou rede é formado por dois conjuntos  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{E}$  de vértices e arestas. No entanto, há dificuldade em se encontrar na literatura uma conceituação clara e universal, mas nós chamamos de rede complexa um tipo especial de grafo que cumpre

certas propriedades topográficas<sup>3</sup>. E são estas propriedades que fazem que muitos cientistas de diversos campos tentem usar a teoria das redes complexas em suas pesquisas [11, 16, 25]. Porém é importante lembrar que nem todo grafo pode ser considerado uma rede complexa, pois às propriedades que falaremos a seguir não estão presentes em grafos simples.

### 2.2.1 Propriedades das Redes

As redes complexas apresentam diversas propriedades que podem ser de ajuda em caracterizar e analisar uma rede qualquer que estejamos trabalhando. Por isso, existe na literatura um bom número de propriedades gerais que vem sendo utilizadas para caracterizar uma rede. Os resultados permitem classificar as redes de acordo com essas propriedades. As mais importantes são:

**Graus e Distribuição de Graus** O grau de um vértice qualquer está definido como o número de arestas que incidem nele ou relacionamentos. Na rede do exemplo (ver Figura 2.2) o grau de um vértice pode ser obtido somando os elementos da sua respectiva linha ou coluna na matriz de adjacência (ver Equação 2.3). Por exemplo, o nó 4 tem grau 3. Neste exemplo, como a matriz é simétrica, o grau também pode ser obtido somando a coluna 4. Portanto iremos denotar por  $k_i$  o grau do vértice  $i \in \mathbf{V}$ .

É importante notar que a soma do grau de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas da rede<sup>4</sup>.

$$\sum_{i \in \mathbf{V}} k_i = 2m. \quad (2.4)$$

Também é possível obter o grau médio de uma rede, que é dada pela média aritmética do grau de todos os vértices.

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbf{V}} k_i = \frac{2m}{n}. \quad (2.5)$$

Uma importante propriedades estrutural de qualquer rede é sua **Distribuição de Graus**. Por exemplo, considere uma rede definida como  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  e seja  $n_k$  o número de vértices com grau igual a  $k$ . A fração de vértices com grau  $k$  é simplesmente dada por:

$$f(k) = \frac{n_k}{n}. \quad (2.6)$$

A Equação 2.6 é função de distribuição probabilística que indica a probabilidade de um determinado vértice ter grau fixo. Em um dígrafo, por outro lado, cada vértice tem um grau de entrada e saída, acarretando em uma equação diferente para o cálculo da distribuição de graus. Essa nova equação é escrita em função de  $f(j, k)$ , representando a fração de vértices que têm, simultaneamente, grau de entrada  $j$ , e grau de saída  $k$ .

<sup>3</sup>Alguns outros autores definem uma rede complexa como aquela cuja estrutura não segue um padrão regular, e outros trabalhos entendem as redes complexas como aquelas que modelam grandes sistemas, privilegiando o tamanho [24]

<sup>4</sup>Isto ocorre porque cada aresta possui duas pontas e desta forma é contada duas vezes quando somamos os graus de todos os vértices.

Em seções mais à frente se mostrará como uma rede aleatória tem uma distribuição de Poisson. No entanto a maior parte das redes reais tem um distribuição que segue uma lei de potências da forma  $p(k') \sim k^{-\alpha}$  para uma constante  $\alpha$  qualquer maior que zero [11, 20, 21].

**Coeficiente de aglomeração ou clusterização** Também conhecido como fenômeno de transitividade. Esse fenômeno ocorre quando um vértice **A** está conectado a um vértice **B**, e o vértice **B** está conectado a um vértice **C**, aumentando as chances do vértice **A** também estar conectado ao vértice **C**. Iremos a definir o coeficiente de clusterização<sup>5</sup> de um vértice  $i \in \mathbf{V}$  como sendo a fração de arestas que os vizinhos de  $i$  possuem entre si e o máximo de arestas que eles poderiam possuir entre si. Dado que o grau do vértice  $i$  é  $k_i$ , o maior número de arestas entre seus vizinhos é dado por  $\binom{k_i}{2}$ . Ou seja todos os pares de vizinhos de  $i$  possuem aresta entre si. Seja  $E_i$  o numero efetivo de arestas entre os vizinhos do vértice  $i$ . Podemos definir o coeficiente de clusterização do vértice  $i$  como:

$$C_i = \frac{E_i}{\binom{k_i}{2}} = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (2.7)$$

Utilizando a definição da Equação 2.7, pode-se agora definir o coeficiente de clusterização médio da rede, como sendo a media aritmética destes.

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbf{V}} c_i \quad (2.8)$$

Repare que assumimos que todos os coeficientes estavam definidos, o que nem sempre é o caso. Nestes casos a media deve ser apenas sobre os vértices que possuem coeficientes de clusterização definidos.

**Densidade de uma rede** A densidade de uma rede esta definida como a fração de suas arestas que possuem  $m \in \mathbf{E}$ , e o numero total possível  $\binom{n}{2}$ .

$$\rho = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{\bar{k}}{(n-1)} \quad (2.9)$$

Sua definição tem certa semelhança com a Equação 2.7, mas seu significado é totalmente diferente. Note que a definição da Equação 2.9 tem como intervalo  $0 \leq \rho \leq 1$ , e mostra como tão densa ou não pode ser uma rede. Para redes que são suficientemente grandes,  $n \rightarrow \infty$ , pode-se aproximar.

$$\rho = n/c. \quad (2.10)$$

Uma rede para a qual sua densidade  $\rho$  é constante quando  $n \rightarrow \infty$  é chamada de densa, e uma rede para a qual  $\rho \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$  é chamada de não densa<sup>6</sup> [20].

<sup>5</sup>Repare que o coeficiente de clusterização não está definido para vértices com grau zero ou grau um. Além que é importante ressaltar que existem outras definições para o coeficiente de clusterização de uma rede, e para nossa definição equação 2.7 contem vantagens e desvantagens [20]

<sup>6</sup>Estas definições de densa e não densa só cumprem para quando podemos fazer que  $n \rightarrow \infty$  o qual teoricamente está bom mas não para a maior parte das redes do mundo real. Uma rede de amizade é um exemplo de uma rede não densa.

**Caminhos e distância** Um caminho é definido como uma sucessão de vértices sem repetição, onde existe uma aresta entre cada par de vértices adjacentes na sucessão. Por outra parte o comprimento de um caminho é definido pelo número de arestas que o define, ou equivalentemente, pelo número de vértices da sequência menos um. Como é lógico, existem muitos caminhos diferentes entre um par de vértices  $(i, j)$ , é por isso que a distância entre dois vértices será o comprimento do menor caminho entre eles ou também chamado de geodésica. Determinar o mínimo caminho entre um par de vértices qualquer é de suma importância. Por exemplo para as comunicações ou para a internet. Assim, esta é uma característica importante para a caracterização de uma estrutura interna em uma rede [13, 14].

A importância em conhecer a distância em uma rede, cumpre um papel central no estudo da estrutura das redes, pois capturam o quão próximo os vértices da rede estão uns dos outros. Portanto em muitas situações é importante representar todos os comprimentos de menor caminho em uma rede, como uma matriz  $D$  onde o elemento matricial  $d_{i,j}$  é a mínima distância entre um par de vértices  $i, j$ . O valor máximo de  $d_{i,j}$  corresponde ao diâmetro da rede.

**Distância média e diâmetro** Uma importante propriedade estrutural de uma rede é sua distância média e seu diâmetro. A distância média é dada pela média aritmética das distâncias entre todos os pares de vértices da rede<sup>7</sup>. Seja  $d_{i,j}$  a distância entre os vértices  $i, j \in \mathbf{V}$ . A distância média  $\bar{d}$  está definida pela Equação 2.11.

$$\bar{d} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i>j \in \mathbf{V}} d_{i,j} \quad (2.11)$$

Repare que na Equação 2.11 assumimos que a distância entre qualquer par de vértices está definida. Se não for assim, o valor de  $d$  diverge na equação 2.11 [21]. Entretanto, muitas redes não são conexas<sup>8</sup>. Em caso que a rede seja não conexa, o cálculo da distância média e do diâmetro devem desconsiderar estes pares ou considerar apenas os pares que pertencem a maior componente conexa [9]. Por outro lado em muitas situações é importante representar todos os comprimentos de menor caminho em uma rede, como uma matriz  $D$  onde o elemento matricial  $d_{i,j}$  é a distância mínima entre um par de nos  $i$  e  $j$ .

Outra definição alternativa e que é de extrema utilidade para muitas redes, é considerar a média harmônica da distância mínima [26]. Em alguns artigos pode-se encontrar como eficiência de  $G$  [27, 28]. A vantagem de esta nova definição (Equação 2.12) é que não diverge quando as redes são não conexas, ampliando assim as aplicações ao mundo real.

$$E = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i>j \in \mathbf{V}} \frac{1}{d(i,j)} \quad (2.12)$$

<sup>7</sup>Se define também como a média de geodésicas sobre todos os pares de vértices de uma rede [9].

<sup>8</sup>As redes não são conexas quando, não possuem caminhos entre todos os pares de vértices, logo a distância entre estes pares de vértices não está definida.

A eficiência tem uma parte importante na caracterização estrutural, porque é um indicador da capacidade do tráfego na rede. Repare que qualquer contribuição referente a um vértice sem relacionamento nenhum na Equação 2.12, dá como resultado zero. Evitando assim a divergência presente na Equação 2.11.

## 2.3 TIPOS DE REDES

Existem diversos tipos de redes reais em muitos domínios diferentes e algumas com propriedades estruturais iguais ou particulares. Por isso, é importante capturar estes aspectos fundamentais destas redes reais, para posteriormente estudá-las mais a fundo, além de poder encontrar novas redes semelhantes a elas. Será por isso necessário generalizar-las. Para isto precisamos a ajuda da matemática e em particular dos modelos matemáticos que capturem as diferentes estruturas das redes reais. De esta forma as redes geradas pelos modelos irão ter determinadas propriedades estruturais.

No que se segue, iremos apresentar três modelos muito conhecidos para representar as redes, além de discutir suas diferentes propriedades estruturais que os caracterizam. Sendo assim então que pode-se determinar quais modelos podem-se empregar quando queremos capturar determinadas propriedades estruturais que aparecem em redes reais e que são objeto de estudo.

### 2.3.1 Modelo de Erdős-Rényi

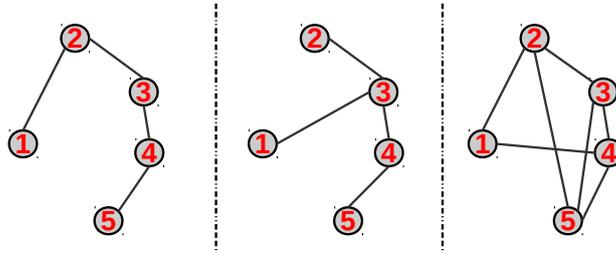
É Um dos modelos mais antigos e mais estudados. O modelo é também conhecido por diferentes nomes, como modelo binomial ou modelo de rede aleatória, todos reconhecidos na literatura [21,29]. O estudo do modelo foi começado por Erdős e Rényi (**ER**) na época de 1959, com a criação de uma rede com  $n$  vértices e  $m$  arestas,  $G_{n,m}^{ER}$ . No princípio, os vértices são criados sem relacionamento algum entre eles, e por um processo aleatório vai-se escolhendo pares de vértices para atribuir uma aresta entre pares, com a premissa de não ter múltiplas conexões, até acabar com o número de arestas  $m$ . Originalmente o modelo nasceu para estudar o significado de métodos probabilísticos, além das propriedades nas redes como uma função do incremento das arestas de forma aleatória [18].

Um modelo alternativo para **ER**, consiste em conectar cada par de vértices mediante uma probabilidade  $0 < \rho < 1$  com um número fixo de nós. Conseqüentemente o número total de arestas  $m$  é uma grandeza aleatória com um valor esperado  $\langle m \rangle = \rho[n(n-1)/2]$ . Este procedimento define um ensemble diferente denotado como  $G_{n,p}^{ER}$ .<sup>9</sup> A geração de redes **ER** forma um ensemble das possíveis redes com todas as conexões alternativas. O ensemble pode ser descrito pelo conjunto de todas as matrizes de adjacência correspondentes a cada rede.

A Figura 2.3 ilustra possíveis redes geradas pelo modelo  $G_{5,0.25}^{ER}$ . Repare que o modelo pode

<sup>9</sup>Os dois modelos tem uma forte analogia, respectivamente com os ensembles canônico e grande canônico da mecânica estatística [30].

gerar qualquer estrutura de rede com cinco vértices. Definimos o espaço amostral  $\mathbf{S}$  do  $G_{n,p}^{ER}$  como sendo o conjunto de redes que podem ser geradas pelo modelo. Podemos observar que



**Figura 2.3** Exemplos de três possíveis redes geradas pelo modelo  $G_{5,0.25}^{ER}$ . Repare que são conexas, mas não necessariamente sempre o modelo vai gerar redes conexas. Fonte: Autor

qualquer rede com  $n$  vértices pode ser gerada, pois uma aresta qualquer pode ou não ser incluída na rede. Porém se temos um total de  $\binom{n}{2}$  arestas possíveis em uma rede com  $n$  vértices, podemos obter o tamanho do espaço amostral.

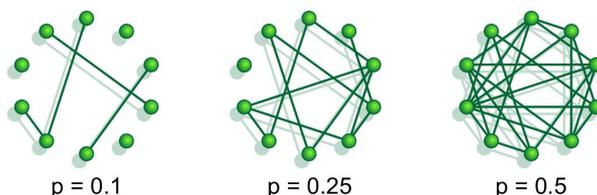
$$|\mathbf{S}| = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}. \quad (2.13)$$

É de grande interesse, poder determinar a probabilidade do modelo gerar uma rede particular com um determinado número  $m$  de arestas [18, 19]. Considere um conjunto de  $m$  arestas. Portanto a probabilidade de uma aresta aparecer entre um par de nós  $(i, j)$  na rede gerada pelo modelo é  $p$ , independente do par  $(i, j)$  e é dada por  $p = 2m/n(n-1)$ . Além disso a probabilidade de uma outra aresta não aparecer na rede é  $(1-p)$ . Assim podemos definir a probabilidade como:

$$P[G_{n,m}^{ER}] = p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m} \quad (2.14)$$

As redes **ER** são dos modelos mais estudados, apesar de não ter as propriedades necessárias para sua comparação com as redes reais, devido às diferenças em suas características estruturais como por exemplo, o coeficiente de clusterização médio muito baixo, inversamente proporcional a  $n$  e sua distância média bem curta, proporcionais a  $\log n$ . Outro aspecto importante são as propriedades estruturais que possuem em função de  $p$ , e que são estudadas na teoria de grafos para  $n$  nós quando  $n \rightarrow \infty$ . Muitas propriedades das redes aleatórias podem ser determinadas com apenas argumentos probabilísticos, pelo qual Erdős e Rényi usaram para seus estudos com redes aleatórias. Entre as questões abordadas algumas são de importância para as redes complexas como: Pode uma rede qualquer ser conexa ou possuir pelo menos um triângulo de nós relacionado por arestas? De que maneira o diâmetro da rede depende de seu tamanho?

O objetivo principal para Erdős e Rényi foi determinar para qual probabilidade de conexão  $\rho$  uma propriedade em particular  $Q$  será mais provável que surja. Na Figura 2.4 temos um exemplo da evolução de uma rede aleatória. Na construção se começa com  $n = 10$  nós insulados e então vai-se agregando por um processo aleatório arestas, a medida que a probabilidade vai-se acrescentando, eventualmente chegaremos à uma rede com o



**Figura 2.4** Exemplos de redes aleatórias com probabilidades entre 0,1 e 0,5. Fonte: [8]

máximo de arestas possíveis  $m = n(n - 1)/2$ , que neste caso é de  $m = 45$  com uma probabilidade de  $\rho = 1$ . A grande descoberta de Erdős e Rényi quando fizeram este procedimento evolutivo com uma propriedade particular  $Q$ , foi que muitas destas propriedades aparecem de forma repentina, ou seja, para uma probabilidade em particular quase qualquer rede tem alguma propriedade<sup>10</sup>, ou pelo contrario quase nenhuma rede tem. A transição de uma propriedade  $Q$  de ser pouco provável a ser muito provável acontece de uma forma repentina. Para muitas destas propriedades existe uma probabilidade critica  $\rho_c = 1/n$ , correspondente a um grau critico médio  $\langle k \rangle_c = 1$ . Erdős e Rényi mostraram este resultado [19,31]. As regras para a determinação de uma determinada propriedade  $Q$  são:

- Se  $\rho(n)$  acrescenta seu valor de forma mais devagar que  $\rho_c(n)$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então quase toda rede com probabilidade de conexão  $\rho(n)$  não cumpre a propriedade  $Q$ .
- Se  $\rho(n)$  acrescenta seu valor de forma mais rápida que  $\rho_c(n)$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então quase toda rede com probabilidade de conexão  $\rho(n)$  cumpre a propriedade  $Q$ .

De forma matemática esta propriedade é indicada pela Equação 2.15. A transição para  $\rho_c$  tem características típicas de uma transição de segunda ordem, em particular se é considerado como parâmetro ordem o tamanho da maior componente. Esta transição é do mesmo tipo como as consideradas nas transições de campo médio da percolação. Repare que na percolação a rede é vista com um tamanho fixo  $n$ , e então a Equação 2.15 é reduzida tão só a questão de se  $\rho$  é menor ou maior que  $\rho_c$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,\rho}(Q) = \begin{cases} 0 & \text{Se } \frac{\rho(n)}{\rho_c(n)} \rightarrow 0, \\ 1 & \text{Se } \frac{\rho(n)}{\rho_c(n)} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

<sup>10</sup>Em especial as propriedades estruturais por exemplo, cada par de nós  $i, j$  está relacionado por um caminho de arestas.

O valor proposto para  $\rho_c$ , ou seja, o limite de  $\rho_c(n \rightarrow \infty)$  é obtido pelo método de escalonamento de tamanhos finitos<sup>11</sup>. A base de este procedimento é baseado na ideia que existe este limite, e em consequência mostrando o fato que a percolação é independente da escolha do tamanho. Isto é usualmente o caso no sistemas dimensionalmente finitos, os quais são a maior parte dos sistemas de carácter físico nos que se tem interesse para a teoria de percolação.

Para concluir está seção vamos apresentar o calculo da probabilidade de um nó na rede ter um determinado grau  $k$  no modelo  $G(n, \rho)$ . Erdős e Rényi estudaram a distribuição de grau mínimo e máxima [34], mas tempo depois foi estudada a distribuição de grau, de forma muito mais completa por Béla Bollobás [35]. A probabilidade que um nó  $i$  tenha  $k = k_i$  arestas é uma distribuição binomial.

$$\rho(k = k_i) = C_{n-1}^k \rho^k (1 - \rho)^{n-1-k}. \quad (2.16)$$

Na Equação 2.16 os fatores são:  $\rho^k$  que é a probabilidade para a existência de  $k$  arestas,  $(1 - \rho)^{n-1-k}$  a probabilidade da ausência das arestas restantes, e  $C_{n-1}^k = \binom{n-1}{k}$  é o número de formas de selecionar os pontos finais das arestas  $k$ . O valor esperado de grau neste caso corresponde à  $\langle k \rangle = (n - 1)\rho$ . Se consideramos também um valor suficientemente grande para  $n$ , e um valor fixo  $\langle k \rangle$ , a distribuição de graus se aproxima a uma distribuição de Poisson, Equação 2.17, por isto as redes **ER** são às vezes chamadas redes aleatórias de Poisson.

$$\rho(k) = \exp^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (2.17)$$

### 2.3.2 Modelo De Watts-Strogatz

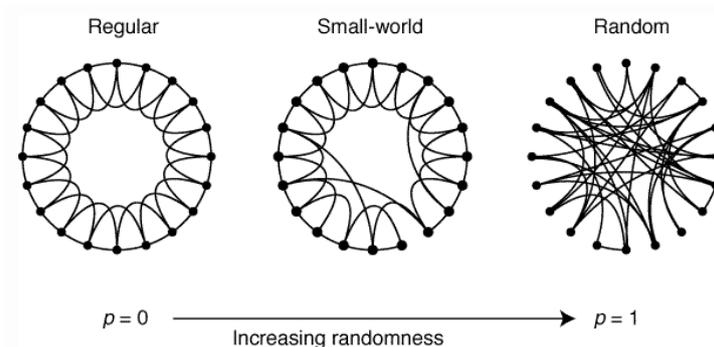
No final da década dos 90, Duncan Watts e Steven Strogatz estavam estudando as estruturas das diferentes redes reais em diversos domínios e como consequência, eles observaram que algumas destas redes possuíam as seguintes características estruturais em comum: Alta clusterização, muito esparsas, e pequena distância média entre os nós, ou chamado também fenômeno de mundo pequeno<sup>12</sup>. Eles decidiram nomear as redes que tenham estas características como de **Small World Network** (redes de mundo pequeno), e propuseram um modelo simples  $G_{n,m}^{WS}$  que fosse capaz de capturar estas três características [9], coisa que o modelo  $G_{n,p}^{ER}$ , não possuía.

O modelo proposto  $G_{n,m}^{WS}$ , inicia com  $n$  nós espalhados em forma de um anel onde cada nó está simetricamente conectado a seus  $2w$  nós ao redor. O termo  $w$  é o numero de vizinhos mais próximos que pela topologia é 2 neste caso. Por exemplo o nó  $n_i$  tem os vizinhos mais

<sup>11</sup>Método que consiste em encontrar dois valores para os expoentes críticos utilizado neste caso na teoria de percolação, mas muito conhecido na física estadística [5, 32, 33].

<sup>12</sup>O psicólogo Stanley Milgram, nos anos 60 mostrou a ideia de que a distância, medida em número de ligações de conhecimento direto, ou graus de separação, entre dois elementos típicos de uma rede de ligações sociais é de facto bastante pequena, mesmo em redes com muitos elementos.

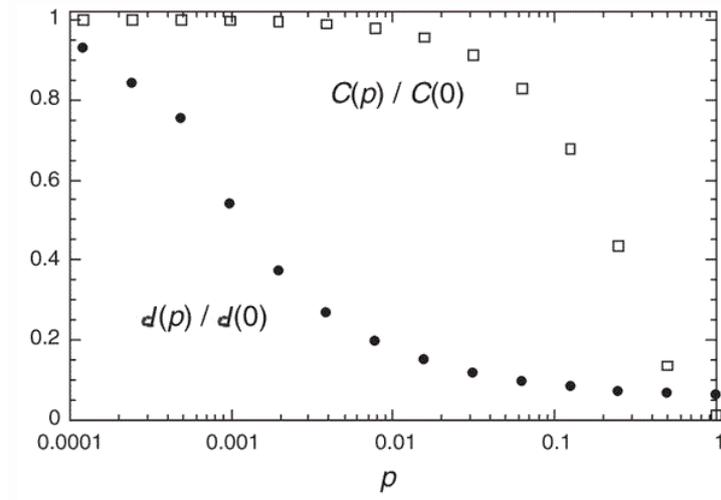
próximos  $n_{i-1}$  e  $n_{i+1}$ . O total de arestas é então  $m = nw$ . O modelo é baseado no reposicionamento das arestas<sup>13</sup>, dependendo de uma probabilidade  $\rho$ . O parâmetro  $\rho$  é fundamental, pois domina o tipo de rede que o modelo irá gerar. A mudança do parâmetro  $\rho$  faz interpolar entre uma rede regular de dimensão finita ( $\rho = 0$ ), e uma rede aleatória sem estrutura  $G_{n,\rho}^{ER}$  quando todas as arestas estão reposicionadas aleatoriamente ( $\rho = 1$ ). Na Figura 2.5 se mostra como a medida que o parâmetro  $\rho$  aumenta o modelo tem uma transição entre uma rede regular e a rede aleatória, e estando entre estes dois extremos, estão as redes de mundo pequeno que tem as propriedades mais parecidas das redes reais.



**Figura 2.5** Propriedades do modelo de Watts e Strogatz para diferentes valores de  $\rho$ . Fonte: [9].

Para entender melhor a coexistência do coeficiente de clusterização  $C(\rho)$ , e o tamanho do caminho médio  $\bar{d}(\rho)$  no modelo, consideramos a Figura 2.6. Nela se mostra o comportamento de  $C(\rho)$ , e  $d(\rho)$ , quando  $\rho$  vai obtendo diferentes valores entre zero e um. Para uma rede regular temos que  $d(0) \simeq n/2w \gg 1$  e  $C(0) \simeq 3/4$ . Ou seja, teremos uma alta clusterização e distância alta. Por outro lado, quando  $\rho \rightarrow 1$  o modelo converge a uma rede aleatória e:  $d(1) \sim \ln n / \ln w$ ,  $C(1) \sim w/n$ . Ou seja, teremos uma rede com baixa clusterização e distância baixa. Estes limites podem sugerir que sempre que existe um grande valor para  $C$  ele está associado a um grande valor de  $d$ , ou pelo contrario um valor pequeno de  $C$  está sempre associado com um pequeno valor de  $d$ . Watts e Strogatz encontraram que existe um intervalo de  $\rho$  no qual  $d(\rho)$  está perto de  $d(1)$  e  $C(\rho) \gg C(1)$ , observando que a distância começa a decrescer bem antes da clusterização. Desta forma temos redes que exibem relativamente alta clusterização e baixas distancias chamadas de mundo pequeno.

<sup>13</sup>note que o número de arestas  $m$ , é independente da probabilidade  $\rho$  e fixo.



**Figura 2.6** Características de clusterização  $C(\rho)$ , baixa distância  $d(\rho)$ . Fonte: [9]

De forma geral o algoritmo do modelo pode-ser apresentado em dois simples passos:

1. **Ordem:** Começa com um anel de  $n$  vértices nos quais cada vértice está relacionado com seus vizinhos mais próximos. Para garantir ter uma rede esparsa e com baixa distância todo o tempo, consideramos que:  $n \gg w \gg \ln(n) \gg 1$ .
2. **Aleatoriedade:** Muda-se cada um das arestas da rede regular com certa probabilidade  $\rho$ , com a condição que não exista arestas que começam e terminam no mesmo vértice e nem arestas duplicadas. Ou seja, cada aresta é única e conecta sempre um par de vértices  $i, j$  sendo  $i \neq j$ . Pela variação de  $\rho$  pode-se dar conta da transição entre ordem (rede regular  $\rho = 0$ ) e desordem (rede aleatória  $\rho = 1$ ).

Apesar do resultado ilustrado na Figura 2.6 ter sido obtido numericamente, com simulações do modelo, é possível realizar um tratamento analítico aproximado das características induzidas pelo modelo [36]. Assim como em outros modelos, o modelo de Watts e Strogatz acabou recebendo algumas críticas. Por exemplo, o modelo deixa de capturar uma propriedade fundamental de muitas redes reais, que é a distribuição de grau em forma de lei de potências. De esta forma muitos outros modelos e variações foram propostos desde seu surgimento.

### 2.3.3 Modelo de Barabási-Albert

O estudo da maioria das redes complexas tem sido iniciado pelo desejo de entender vários sistemas reais, variando de redes de comunicação à cadeia alimentar. A inability dos modelos para descrever alguns tipos de sistemas tais como redes genéticas <sup>14</sup>, fizeram que no final da década dos 90, quando queria-se fazer algum tipo de análises das redes reais que possuíam

<sup>14</sup>Onde os nós são proteínas e genes, enquanto as arestas se representam pelas interações químicas entre eles. Outro exemplo são as redes do sistema nervoso, onde os vértices são as células nervosas conectadas mediante os axônios como arestas.

algum tipo de topologia complexa, foram representados mediante os dois únicos modelos que existiam na época (rede aleatória e rede de mundo pequeno). Mas os resultados dos modelos não podiam ser aplicados às mesmas redes reais. A dificuldade na descrição destes sistema está em sua topologia e seu tamanho bem maior.

Os resultados experimentais no estudo de redes reais mostraram que muitas destas redes apresentam comportamento de livre de escala, ou seja, a distribuição de graus que seguiam era da forma de uma lei de potências. As redes com estas características diferem bastante das redes aleatórias ou small-world, pois apresentam alguns poucos nós com uma conectividade muito alta, chamados de hubs, enquanto que a maioria dos nós apresentam baixa conectividade. Porém a distribuição de graus destes sistemas desvia-se de uma distribuição de Poisson apresentada para as redes aleatórias e a teoria de small-world. Devido estas características nas redes reais, alguns pesquisadores passaram a se questionar a respeito de quais mecanismos seriam responsáveis pelo surgimento da característica de livre de escala nesses sistemas [37].

Barabási e Albert, em 1999 [37], apresentaram um modelo que consistia basicamente em crescer uma rede preferencialmente adicionando novas conexões a nós mais conectados. Eles argumentavam que a natureza de livre de escala em redes reais está baseada em dois mecanismos compartilhados entre muitas redes reais. O primeiro mecanismo apontado por Barabási e Albert é o crescimento da rede, pois as redes reais são dinâmicas. Ou seja, a quantidade de nós e arestas vão crescendo a cada instante. O segundo mecanismo é a ligação preferencial, visto que em alguns sistemas (redes de amizade, redes de colaboração científica, a internet,...etc) as ligações entre os sítios parece se dar de forma preferencial e não de forma aleatória. Ou seja, existe uma tendencia de que os nós mais jovens se conectem a nós altamente conectados [38].

Estes dois ingredientes, crescimento e conexão preferencial, inspiraram o modelo de Barabási-Albert, o qual levou a uma rede com distribuição de graus em lei de potências. Vale a pena salientar que o modelo proposto por Barabási-Albert não foi o primeiro a incluir ligação preferencial e obter uma distribuição de graus em lei de potência. Acredita-se que a primeira consideração rigorosa de ligação preferencial se deu por volta de 1925 por Yule [39], que usou para explicar a distribuição da lei de potência do número de espécies por gênero de plantas com flores, processo que ficou conhecido como "Processo de Yule". Posteriormente, outros modelos com estas características foram propostos também por Simon [40], por Price [15], dentre outros.

O algoritmo para a construção de uma rede Barabási-Albert é o seguinte:

1. **Crescimento:** Parte-se de um pequeno número de nós,  $n_0$ , sendo um novo nó adicionado a cada passo. A cada novo nó são adicionadas  $m$  ( $m \leq n_0$ ) arestas.
2. **Conexão preferencial:** Cada nova aresta deve ligar o novo nó a um nó  $i$  existente na rede, escolhido com probabilidade:

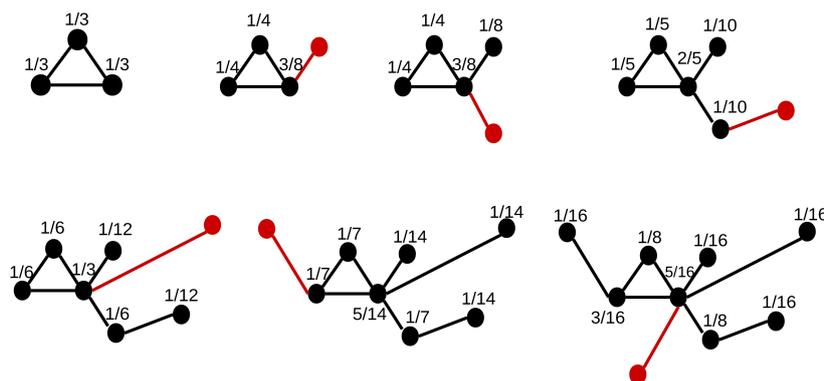
$$\rho(i) = \frac{k_i}{\sum k_j}. \quad (2.18)$$

Esta regra de ligação preferencial privilegia os nós que tem maior conectividade de tal forma que os nós mais conectados têm mais chance de adquirir ligações, como mostra a Figura 2.7. Repare que uma vez é estabelecido um hub ou nó privilegiado com mais conexões, não há como os outros nós possam ter igual ou maior número de ligações.

Barabási-Albert mostraram também de forma analiticamente que  $\rho(k) \sim k^{-\gamma}$  com  $\gamma = 3$ , no limite termodinâmico. Devido ao crescimento constante da rede a probabilidade que um nó tenha mais ou menos ligações varia com o tempo. Portanto é possível calcular a taxa com a qual determinado nó adquire ligações. No modelo Barabási-Albert todos os nós adquirem ligações a uma mesma taxa. Ou seja, os nós que mais antigos são, sempre serão os hubs da rede. A evolução temporal de um nó qualquer é dada por:

$$k_i(t) = m \left( \frac{t}{t_i} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

Repare que na Equação 2.19 temos a evolução temporal da conectividade do nó  $i$  nascido no tempo  $t_i$ .



**Figura 2.7** Exemplos do crescimento de uma rede livre de escala, iniciando com 3 nós e a medida que vão avançando os passos pode-se ver a formatação. Fonte: Autor

Além da distribuição em lei de potência o modelo de Barabási-Albert precisa cumprir outras propriedades importantes das redes reais, tais como o carácter de pequeno mundo. Barabási e Albert calcularam o comprimento do menor caminho ( $\bar{d}$ ), e perceberam que este é muito menor neste modelo do que grafos aleatórios com o mesmo número de nós. Mostrando que  $\bar{d}$  aumenta aproximadamente de forma logarítmica com  $n$  [37]. Assim, como era esperado, esta rede é uma rede de pequeno mundo.

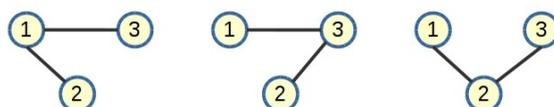
Apesar destes resultados apresentados, o modelo Barabási-Albert é um modelo que captura de forma mínima os mecanismos responsáveis para uma distribuição em lei de potência. Porém quando é comparado com redes reais é evidente que apresenta certas limitações como: prediz uma distribuição de conectividade em lei de potência com expoente fixo ( $\gamma = 3$ ), enquanto que os expoentes medidos para algumas redes reais variam entre 2 e 3 em geral. Estas diferenças

abrem a questão para perguntar se poderíamos mudar o expoente de escala da distribuição. Por outro lado, em 2001, Bianconi e Barabási observaram que o modelo Barabási-Albert negligencia um importante aspecto das redes reais, onde existem alguns nós mais competitivos que outros sem ser sempre a idade um fato na obtenção de ligações, ou seja, nem todos os nós são igualmente suscetíveis a adquirir ligações. Inúmeros exemplos em sistemas reais demonstram que a conectividade do nó e a taxa de crescimento não depende apenas de sua idade<sup>15</sup>. É possível portanto associar esse comportamento que possuem certos nós para disputar por ter mais ligações e este comportamento foi chamado de "qualidade" do nó. Bianconi e Barabási propuseram uma variante do modelo livre de escala que levasse em conta esta habilidade de qualidade em 2001 [41].

## 2.4 TEORIA ESPECTRAL

O espectro de uma rede ou grafo é por definição, o espectro da matriz de adjacência  $\mathbf{A}$ <sup>16</sup>, que é o conjunto de autovalores junto com suas multiplicidades<sup>17</sup>. O espectro laplaciano de uma rede ou grafo é o conjunto de autovalores ou espectro da matriz laplaciana  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ , onde  $\mathbf{D} = \vec{k}\mathbf{I}$ , sendo  $\vec{k}$  um vetor coluna correspondente aos graus dos vértices da rede. O espectro de uma rede ou grafo é utilizado para estudar as propriedades estruturais das redes por meio de suas representações matriciais e de seus respectivos espectros. Isto leva às propriedades espectrais das matrizes de representação, que é o elemento central da teoria espectral [42, 43].

Para tornar mais claro tudo, vamos considerar um exemplo. A Figura 2.8 mostra as combinações de uma rede simples sem arestas repetidas e não dirigidas, com  $n = 3$  e  $m = 2$ , e na Equação 2.20 se apresentam as matrizes de adjacência correspondentes a cada uma das redes.



**Figura 2.8** Combinações para uma rede de 3 nós e duas arestas. Fonte: Autor

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

<sup>15</sup>Por exemplo, na internet tem sites que adquirem um numero maior de hiperlinks em um tempo muito menor ultrapassando facilmente sites mais antigos. Outro exemplo são nas redes de colaboração científica onde existem pesquisas que em um curto espaço de tempo adquirem um grande número de citações.

<sup>16</sup>Em matemáticas, o espectro de uma matriz é o conjunto dos autovalores da matriz.

<sup>17</sup>Existem dois tipos de multiplicidade, a multiplicidade geométrica que é a dimensão do correspondente espaço formado pelos autovetores, e a multiplicidade algébrica a qual corresponde com a multiplicidade das raízes do polinômio característico.

Repare que o espectro para todas elas é o mesmo  $\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ , e seus autovetores são:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A matriz laplaciana para cada rede é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Os autovalores para os três laplacianos são iguais também e são: 0, 1, 3. Os autovetores são apresentados embaixo na Equação 2.23

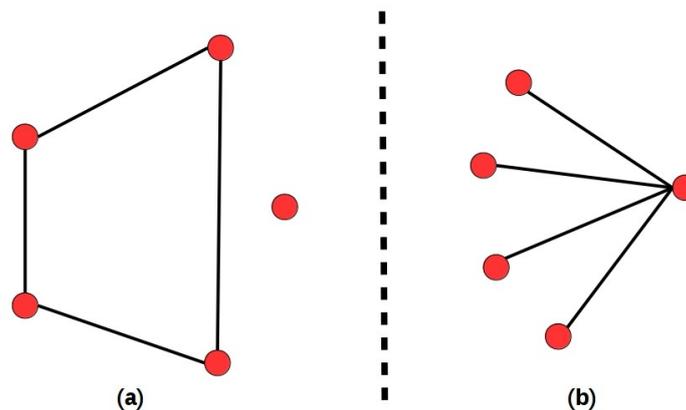
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Assim como no exemplo anterior, temos os espectros das matrizes de adjacência  $\mathbf{A}$  e laplaciana  $\mathbf{L}$  junto com seus autovetores.

Como particularidade do espectro das matrizes que representam os gráficos (seja a de adjacência, laplaciana, ou outra como as matrizes de adjacência de ordem superior definidas no Capítulo 4), cabe ressaltar o fato que duas redes não isomórficas podem chegar a compartilhar um mesmo espectro (autovalores e multiplicidades). Esta particularidade se conhece como redes coespectrais ou isoespectrais [44, 45]. Os primeiros em apresentar este fenômeno foram Collatz e Sinogowitz em 1957. Por exemplo, na Figura 2.9 é apresentado o par de grafos coespectrais de menor tamanho, apesar da notória diferença entre um grafo e outro o espectro dos dois é  $-2, 0^3, 2$ . Além disso, a determinação de grafos que sejam únicos por causa de seu espectro é um problema muito difícil, só uma pequena fração de grafos podem não ser coespectrais, mas é concebível que quase todos os grafos tem esta propriedade.

Com isto podemos dizer certas características principais que tem o espectro (em especial a matriz laplaciana por sua grande importância neste trabalho), e observar como influi para caracterizar algumas propriedades estruturais nas redes. Se temos uma rede simples sem arestas repetidas como as apresentadas na Figura 2.8, e temos sua matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  sendo real e simétrica, (ver Equação 2.20) então todos seus autovalores são reais e também para cada autovalor  $\lambda_i$  suas multiplicidades, algebraica e geométrica coincidem. Também seus autovetores são ortogonais. Já que a diagonal da matriz de adjacência está composta por zeros. O traço  $tr\mathbf{A}$  é a soma de seus autovalores e é zero. Quando a rede é direcionada seus autovalores podem ter uma parte imaginária, ou seja, são números complexos.

De mesma forma, a matriz laplaciana satisfaz com algumas propriedades. Se temos uma rede simples sem arestas repetidas, dizemos que o espectro da matriz laplaciana tem autovalores que são reais e seus autovetores são ortogonais também. Além disso, a matriz lapla-



**Figura 2.9** Par de grafos mais pequenos que compartilham o espectro e são chamados coespetrais ou isoespetrais. Fonte: [10].

ciana é uma matriz simétrica, positiva semi-definida<sup>18</sup> e singular (a soma dos elementos de todas suas filas é zero). Com respeito a Seus autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ , são todos positivos  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n$ , onde  $n$  coincide com o número de nós da rede. Repare que o primeiro autovalor do espectro é zero e seu autovetor tem todas suas entradas iguais a 1. O seu segundo menor autovalor, chamado de conectividade algébrica<sup>19</sup>, desempenham um papel relevante em diversas aplicações. Fiedler mostrou [46] com ajuda do teorema de Perron-Frobenius que um grafo é conexo se, e somente se, o seu segundo menor autovalor Laplaciano é positivo. Também como vai-se mostrar na seguinte seção o segundo menor autovalor cumpre uma grande importância nos problemas de transporte ou processos de difusão em redes.

## 2.5 DIFUSÃO EM REDES COMPLEXAS

A difusão é um processo físico muito conhecido na literatura, se define como o processo pelo qual existe um transporte de partículas de uma substância a outra devido a uma diferença de concentração, passando por uma barreira ou membrana. Este processo não precisa de um aporte de energia e acontece devido às mudanças de entropia no sistema. O transporte de partículas é feito seguindo o inverso do gradiente de concentração, ou seja, de uma concentração alta a uma de menor concentração. Pode-se também ter uma versão análoga do processo de difusão, em redes complexas, e assim observar como acontece a propagação em diferentes tipos de redes de alguma quantidade como: informação em redes sociais, transporte de pessoas em uma rede de aeroportos ou até a propagação de uma doença em uma rede de pessoas, etc... Mas em todos estes exemplos fica bem claro a importância de compreender e dominar os processos de difusão em redes complexas, já que se fosse o caso poderíamos obter os resultados que nós

<sup>18</sup>Já que existem diversas definições análogas para matriz positiva semi-definida, neste trabalho optamos por dizer que uma matriz é positiva semi-definida se é possível ser expressada em termos da matriz de incidência  $\mathbf{L} = \mathbf{BB}'$  formada por nós em suas filas e arestas nas colunas.

<sup>19</sup>A conectividade algébrica de um grafo é o segundo menor autovalor da sua matriz Laplaciana associada.

queremos, bem seja aumentando a propagação da informação em uma rede como a internet ou pelo contrario diminuir a propagação de doenças em uma rede de pessoas, reduzindo as pessoas contagiadas. Tudo isto com tão só algum tipo de mudança topológica na rede, resultando a rede com uma nova infraestrutura que faça que o processo de difusão seja controlado.

Para ter uma melhor ideia do modelo de difusão, vamos a apresentar a difusão em redes complexas com maior clareza. Seja uma rede qualquer  $G(n, m)$ , conexa e sem arestas repetidas. Então assumindo primeiro que temos uma quantidade de uma substância de qualquer tipo nos vértices desta rede, e está substância pode-se mover com total facilidade pelas arestas da rede de um vértice a cada vez. Denotamos a quantidade de substância que um vértice qualquer  $i$  possui como  $\Psi_i$ . Quando a substância flui de um vértice  $j$  a seu vizinho  $i$  pela aresta que os relaciona, então existe uma taxa de variação tais que  $D(\Psi_j - \Psi_i)$ , onde  $D$  é uma constante chamada constante de difusão da rede. Para um pequeno intervalo de tempo a taxa de variação desta quantidade  $\Psi_i$  de um vértice  $i$  com todos os vértices que tem relacionamento é:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = D \sum_j A_{ij} (\Psi_j - \Psi_i). \quad (2.24)$$

O elemento matricial  $A_{ij}$  na Equação 2.24, pertence à matriz de adjacência da rede, e identifica as diferentes arestas que o vértice  $i$  tem com os diferentes vértices  $j$  da rede. A Equação 2.24 também funciona para redes simples não direcionadas como para as direcionadas, mas neste trabalho vamos focar só em redes não direcionadas que são as de interesse nesta dissertação. Tomando a Equação 2.24 e expandindo seus termos:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = D \sum_j A_{ij} \Psi_j - D \Psi_i \sum_j A_{ij}, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = D \sum_j A_{ij} \Psi_j - D \Psi_i k_i, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = D \sum_j (A_{ij} - \delta_{ij} k_i) \Psi_j. \quad (2.27)$$

Nas Equações 2.26 e 2.27 o termo  $k_i$  representa o grau do vértice  $i$ , e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker o qual é zero se  $i \neq j$  ou 1 se  $i = j$ . Agora escrevemos a Equação 2.27 em sua forma matricial para obter uma maior generalização dos resultados

$$\frac{d\Psi}{dt} = D(\mathbf{A} - \mathbf{C})\Psi, \quad (2.28)$$

onde  $\Psi$  é um vetor composto por todos os  $\Psi_i$  das quantidades de substâncias que os vértices tem. Ou seja, representa como a substância se está espalhando por toda a rede até chegar a um ponto máximo, no qual a substância se espalhou completamente. A matriz  $\mathbf{A}$  representa a matriz de adjacência da rede. Repare que o termo  $\delta_{ij} k_i$  na Equação 2.27 transforma-se em uma matriz diagonal onde cada elemento de sua diagonal representa o grau do vértice  $i$ . É comum

definir:  $L = (C - A)$  na Equação 2.28 e assim obter a Equação 2.29 que é a equação de difusão para redes complexas

$$\frac{d\Psi}{dt} + DL\Psi = 0. \quad (2.29)$$

A Equação 2.29 mostra uma grande semelhança com a equação utilizada para a difusão ordinária de um gás, com a única diferença que o fator laplaciano  $\nabla^2$  presente na difusão é neste caso representado por  $L$ . É por isso que a matriz  $L$  se conhece como a matriz laplaciana <sup>20</sup>, mas sua importância se estende a mais situações que só processos de difusão [36]. A matriz laplaciana de forma geral e para uma rede qualquer será definida por sua importância neste trabalho como:

$$L = \begin{cases} k_i & \text{Se } i = j, \\ -1 & \text{se } i \neq j \text{ se existe uma aresta entre } i \text{ e } j, \\ 0 & \text{se } i \neq j \text{ se não existe uma aresta entre } i \text{ e } j. \end{cases} \quad (2.30)$$

Agora voltando para a Equação 2.29 encontraremos que é possível escrever o estado de qualquer vértice, ou seja o vetor  $\Psi$ , como uma combinação linear de autovetores  $v_i$  da matriz laplaciana  $L$

$$\Psi = \sum_i a(t) \vec{v}_i. \quad (2.31)$$

Fazendo a substituição na Equação 2.29 e com a consideração que  $L\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$  temos:

$$\sum_i \left( \frac{da_i}{dt} + D\lambda_i a_i \right) \vec{v}_i = 0. \quad (2.32)$$

Como o laplaciano é uma matriz simétrica e quadrada, então seus autovalores são reais. Considerando também que os autovetores do laplaciano formam uma base ortonormal, multiplicamos a Equação 2.32 pelo autovetor  $v_j$  para obter:

$$\frac{da_j}{dt} + D\lambda_j a_j = 0, \quad (2.33)$$

e a Equação 2.33 é uma equação diferencial de ordem 1, cuja soluções são bastantes conhecidas na literatura, então, a solução é dela forma:

$$a_j(t) = a_j(0)e^{-D\lambda_j t}. \quad (2.34)$$

Agora, como já se falou o verdadeiro interesse é tentar dominar o processo de difusão, e parte fundamental disto consiste em conhecer o tempo total no qual acontece a difusão até chegar a um estado estacionário. Por isso, mostrar como encontrar o tempo total da difusão, ou mais precisamente chamado tempo de relaxamento, torna-se em uma questão de suma importância, não só para esta secção como também para o desenvolvimento deste trabalho. Para poder encontrar o tempo de relaxamento, precisamos multiplicar a Equação 2.34 pelos autovetores da base,

$$\Psi = \sum_j a_j(0)\vec{v}_j e^{-D\lambda_j t}. \quad (2.35)$$

<sup>20</sup>A matriz laplaciana é uma analogia discreta do operador laplaciano  $\nabla^2$ , e tem um proposito similar. Além disso, a matriz laplaciana surge da análises de passeios aleatórios e redes elétricas [47].

A Equação 2.35 é extremamente importante, já que ela relaciona o estado de um nó com os autovalores e autovetores da matriz laplaciana e o tempo. Analisando bem a Equação 2.35 podemos observar que nela quando o tempo vai passando a sua solução converge para a estacionária, ou seja, as soluções da equação de difusão deixam de ter uma dependência temporal para virar a ser contantes. Porém se fazemos com que  $t \rightarrow \infty$ , chegamos a o que é conhecido como a solução estacionária  $a_1 \vec{v}_1$ . Mas ainda precisamos saber quanto tempo exatamente é preciso para chegar a esta solução estacionária, já que a resposta a esta pergunta nos dará a expressão do tempo no qual acontece o processo de difusão, para uma rede qualquer. Para isto repetimos o mesmo processo de aumentar o valor de  $t$ . Para conseguir entender melhor o comportamento, escrevemos a Equação 2.35 expandida em seus fatores com a condição já conhecida na secção anterior que  $\lambda_1 = 0$ .

$$\Psi = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 e^{-D\lambda_2 t} + a_3 \vec{v}_3 e^{-D\lambda_3 t} \dots, a_n \vec{v}_n e^{-D\lambda_n t}. \quad (2.36)$$

Na Equação 2.36 observamos que a medida que o tempo vai aumentando o comportamento assintótico da Equação 2.36 vai tornando os termos cada vez mais menores um por vez, começando desde o termo com o autovalor mais alto. Portanto o último termo em ser apagado antes da solução estacionária é o termo cujo autovalor corresponde a  $\lambda_2$ . Repare que o tempo de relaxação da rede no processo de difusão vai ter que ser proporcional ao segundo menor autovalor, e será:

$$t \sim \frac{1}{\lambda_2}. \quad (2.37)$$

Temos claro agora o tempo de relaxação de uma rede no processo de difusão (ver Equação 2.37). Mas é claro o papel crucial que joga a matriz laplaciana e seu espectro de autovalores junto com seus autovetores na dinâmica de difusão. Por isso a procura dos autovalores e autovetores da matriz laplaciana vista na secção anterior, torna-se de suma importância se quiser analisar algum tipo de dinâmica de difusão em uma rede complexa.

Com todos os resultados apresentado ate aqui damos uma primeira parte da base teórica apropriada para o entendimento e análises feitas no capítulo 4. Mas para completar agora começaremos o seguinte Capítulo com um abordagem a um tipo de redes compostas por duas ou mais redes chamadas de Multiplex.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

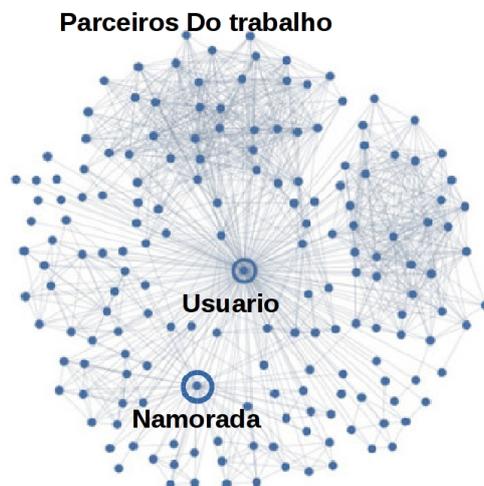
# MODELO DE INTERAÇÃO INTER-REDES

### 3.1 INTRODUÇÃO

Como já foi apresentado no Capítulo 2, as redes complexas são uma abstração de estruturas reais, tentando explicar suas diferentes características e diversas propriedades que podem influir nas dinâmicas que apresentem no decorrer do tempo. As redes reais não possuem uma natureza estática, pelo contrário estão em constantes mudanças estruturais, fazendo que sejam evolutivas e como consequência um objeto de estudo para a criação de novos modelos (ver Capítulo 2). Mas a realidade na qual o ser humano está inserido, rodeado de redes e muitas vezes envolvidos nelas, mostra que, geralmente as redes não são independentes e interagem, em alguns casos misturam-se, ocasionando que sejam mais difíceis de entender suas características e propriedades como um conjunto de redes.

Os modelos apresentados, discutidos no Capítulo 2, foram pensados para redes isoladas. Neste caso não se considera a interação entre duas ou mais redes como acontece na realidade. Considere por exemplo, a interação que existe nas redes de transporte aéreo, cada empresa seja, Avianca, Tam, Gold, etc, dá origem a uma rede específica com seus nós sendo todos os diferentes aeroportos onde a empresa opera, e as arestas das redes, os diferentes voos entre aeroportos que cada empresa tem para oferecer.

Neste capítulo, vamos centrar nossa discussão nas interações que as redes podem ter, e em apresentar o modelo de Multiplex, mostrando suas estruturas, formação e as dinâmicas difusivas entre redes que possam apresentar. Um dos exemplos de redes reais nas quais o modelo aqui apresentado está baseado, são as redes sociais, nas quais a maior parte das pessoas já estão



**Figura 3.1** Rede de amizade de uma pessoa no Facebook. Fonte: [71]

inseridas e interagem constantemente. Por isso são um foco de atenção em muitas pesquisas. Agora, pode-se pensar em um tipo de rede como a rede de amizades que uma pessoa pode ter no Facebook (ver Figura 3.1). Repare que a forma estrutural da rede se assemelha com a rede livre de escala, apresentada no Capítulo 2. Porém uma pessoa hoje em dia não faz parte de uma só rede social ou de amizades, mas também apresenta interação em diversas redes sociais de outros tipos, seja de trabalho ou de algum tipo de interesse social como uma rede formada por quem gostam dos restaurantes. Os tipos mais comuns de redes são construídas pelos aplicativos modernos no celular, Whatsapp, Line, Twitter, Telegram, entre muitos outros. Além disso, uma pessoa envolvida nas diferentes redes, frequentemente interage em todas elas. Neste caso os relacionamentos ou conexões mudam de uma rede a outra dependendo explicitamente dos interesses que a rede tem para oferecer. Como consequência, as formas estruturais das redes reais que uma pessoa possui mudam de uma rede a outra (ver Figura 3.2). Isto pode ser o mais interessante de estudar, mais especialmente a interação entre redes das quais uma pessoa faz parte já que as diferenças estruturais fazem que cada rede seja única e portanto suas interações podem apresentar características especiais em suas dinâmicas de difusão. Este é o tema de especial interesse neste trabalho.

Desde uma visão mais geral, todas as redes podem interagir entre si, e estas novas interações das redes levam à novas estruturas que os modelos já conhecidos não podem descrever, com novas propriedades e dinâmicas estruturais. Por isso é necessário um novo modelo de multi-rede, sustentado com um formalismo matemático, que possa explicar as interações inter-redes. Entre os modelos que estão surgindo, encontra-se o modelo de Multiplex apresentado neste capítulo, que é um caso particular do modelo de multi-redes, e sua grande aplicação está nas interações entre redes sociais, de transporte entre outras.



**Figura 3.2** Diferentes tipos de redes reais com suas interações.

Definiremos nas primeiras seções deste capítulo a estrutura de um Multiplex e suas principais propriedades para os interesses deste trabalho, e deixaremos para as últimas seções de igual forma como no Capítulo 2, a dinâmica espectral e o processo de difusão em Multiplex.

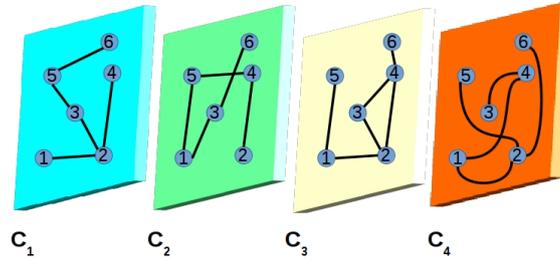
### 3.2 ESTRUTURA DAS MULTI-REDES

Começamos esta seção descrevendo o formalismo do modelo geral multi-rede. Apresentamos, suas representações matriciais e definições respectivas. A formatação usada tem uma grande similaridade com a apresentada no Capítulo 2 para as redes complexas. Em alguns casos não precisaremos de dar muita explicação, já que os conceitos são iguais, só que estão extrapolados para o modelo de multi-rede. No final será definido o modelo de Multiplex junto a suas características e principais diferenças com o modelo geral de multi-rede.

A forma básica do modelo de multi-rede é representada por multi-camadas, onde cada uma das camadas representa uma rede, direcionada ou não e que pode ser igual ou diferente das outras camadas. Na Figura 3.3 é apresentado como exemplo qualitativo, um sistema de quatro redes formada por 6 nós, onde cada uma das camadas estão diferenciadas e sinalizadas por  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ . Mas no mundo real, as redes não estão insuladas como foi apresentado no Capítulo 2 e na Figura 3.3, pelo contrário elas se relacionam. Por exemplo, na Figura 3.3 estas redes podem estar relacionadas de muitas formas, e o modelo de multi-rede leva isto em suas considerações.

O modelo de multi-rede é inspirado em redes reais que interagem entre si, e por isso é necessário uma generalização das redes complexas já tratadas no Capítulo 2.

Nos últimos anos, muitos artigos foram criados como resposta para tentar explicar a estrutura de interação entre redes reais e sua dinâmica [48–52]. Muitas propostas foram apresentadas, tais como: redes de redes [53, 54], redes multidimensionais [48], redes multi-nível [55], redes



**Figura 3.3** Redes insoladas de 6 vértices apresentadas com diferente topologia em camadas sinalizadas como  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ .

Multiplex [56], redes interagentes [57], redes interdependentes [58, 59], e muitos outros que foram introduzidos com seus respectivos focos e formalismo matemático. Mas todos baseados no tensor de representações [49, 50]. Essa é a intenção desta secção, mostrar de forma geral a estrutura e formalismo matemático que acompanha o modelo de multi-redes e a partir deste chegar a o modelo de Multiplex, foco principal de este capítulo, com suas principais características.

### 3.2.1 Definições e Formalismo das Multi-Redes

Definimos o modelo de multi-rede como:  $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ , sendo  $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in \{1, \dots, M\}\}$ , uma família de grafos <sup>1</sup>, onde  $G_\alpha$  corresponde a um grafo qualquer das  $M$  camadas. Portanto  $G_\alpha = (X_\alpha, E_\alpha)$ , tem a forma usual apresentada no Capítulo 2 de uma rede complexa. Por outra parte o outro conjunto  $\mathcal{C}$ , que faz parte da definição, está formado pelos diferentes relacionamentos entre a rede de uma camada  $G_\alpha$ , e outra rede na camada  $G_\beta$ , com  $\alpha \neq \beta$ , e será definido como:

$$\mathcal{C} = \{E_{\alpha\beta} \subseteq X_\alpha \times X_\beta; \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}, \alpha \neq \beta\}. \quad (3.1)$$

Chamaremos os diferentes elementos do conjunto das arestas  $E_\alpha$  e  $E_{\alpha\beta}$ , arestas intra-camada, e arestas inter-camada. Além disso,  $X_\alpha = \{x_1^\alpha, \dots, x_{N_\alpha}^\alpha\}$ , é o conjunto de  $N$  vértices, pertencentes a uma rede qualquer em uma camada  $\alpha$  das diferentes  $M$  camadas que existem. Repare

<sup>1</sup>Ou em nosso contexto são as  $M$  camadas com suas respectivas redes, direcionadas ou não direcionadas.

que esta notação é parecida com a apresentada no Capítulo 2 mas com a diferença que está sinalizada a camada  $\alpha$  para a qual faz parte. A matriz de adjacência correspondente a uma rede  $G_\alpha$  será denotada como  $A^{[\alpha]} = (a_{ij}^\alpha) \in \mathbb{R}^{N_\alpha \times N_\alpha}$  e definida assim,

$$a_{ij}^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } (X_i^\alpha, X_j^\alpha) \in E_\alpha, \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (3.2)$$

agora precisamos definir a matriz de adjacência do modelo multi-redes que define a representação dos relacionamentos intra-camadas e inter-camada, onde tem que cumprir que  $1 \leq i, j \leq N_\alpha$  e  $1 \leq \alpha \leq M$ . A matriz correspondente ao conjunto de arestas  $E_{\alpha\beta}$  será a matriz  $A^{[\alpha,\beta]} = (a_{ij}^{\alpha\beta}) \in \mathbb{R}^{N_\alpha \times N_\beta}$ ,

$$a_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } (X_i^\alpha, X_j^\beta) \in E_{\alpha\beta}, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Este modelo matemático é muito suscetível para descrever modelos sociais e uma boa quantidade de outros modelos em redes complexas. por exemplo, uma pessoa que interage com diferentes tipos de redes de amizades, ou seja, as redes de amizades podem apresentar diferentes tipos de relacionamentos para uma mesma pessoa, tudo isto em função de suas necessidades. Em outras palavras, uma pessoa pode mudar suas preferencias em relacionar-se com outras, dependendo de suas necessidades, sejam culturais, politicas, desportivas ou de trabalho. Isto faz que exista para cada uma das preferencias, uma rede diferente, e com a localização de suas arestas conetando vértices de forma diferente. Além disso uma pessoa pode mudar constantemente no tempo suas preferencias para falar, causando que pule entre as diferentes redes ou também em muitas ocasiões pode estar em vários tipos de conversa ao mesmo tempo, isto mostra a existência de uma interação inter-camadas que é o que o modelo de multi-redes quer descrever.

### 3.3 REDES MULTIPLEXS

As redes Multiplexs,  $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{C})$ , são um tipo especial do modelo de multi-redes. Como foi já apresentado, existem outros modelos multi-redes como: redes temporais [60], redes interatuantes [52], redes multidimensionais [48], etc, todos com suas diferentes propriedades e aplicações. Para o modelo de interesse deste trabalho, o modelo Multiplex, apresentamos suas principais características, que o diferencia do modelo geral,

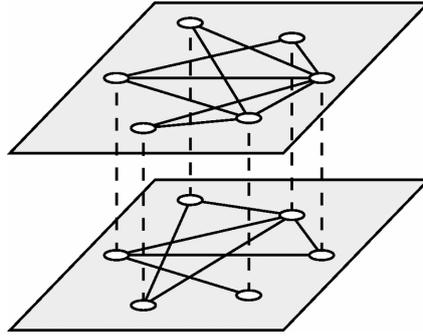
$$X_1 = X_2 = \dots = X_M = X. \quad (3.4)$$

Primeiramente está a condição de homogeneidade, consistindo que para todas as camadas do Multiplex, o número de nós serão fixo (ver Equação 3.4). A segunda condição, é a ligação única entre os nós de uma camada e sua contraparte na outra camada, ou seja, a conexão inter-camada só pode ser possível entre nós iguais, como se mostra na representação qualitativa da

Figura 3.4 <sup>2</sup>. Repare que no exemplo representativo apresentado na Figura 3.4, está formado por duas camadas com igual número de nós e cada nó tem uma conexão inter-camada, com sua contra parte na outra rede. Este fato estende-se para no caso geral, onde, temos um Multiplex formado por  $M$  camadas e suas conexões inter-camada,  $E_{\alpha\beta}$ , apresentassem só entre nós de uma camada,  $X_i^\alpha$ , e sua contraparte na camada imediatamente acima,  $X_i^{\alpha+1}$ , e na camada embaixo,  $X_i^{\alpha-1}$ . Todo isto ocasiona que a matriz de adjacência apresente grandes diferenças com a matriz de adjacência do modelo geral multi-rede. Com todo o anterior, então precisamos de mudar também a definição para o conjunto das arestas,  $E_{\alpha\beta}$ , mas tendo em conta as consequências das considerações da Equação 3.4, e já apresentadas na Figura 3.4,

$$E_{\alpha\beta} = \{(x,x); x \in X\} \text{ para cada } 1 \leq \alpha \neq \beta \leq M. \quad (3.5)$$

Isto faz que o modelo Multiplex tenha aplicações particulares nas redes reais, já que não é possível que um modelo como o Multiplex, possa ser utilizado para qualquer caso. O modelo Multiplex como foi apresentado na introdução tem muitas aplicações nas redes sociais de transporte entre outras.



**Figura 3.4** Multiplex de duas camadas formado por redes de redes de 6 nós. As conexões entre redres só estão entre vértices iguais das redes.

### 3.3.1 Propriedades

Nesta secção, apresentaremos algumas propriedades essenciais para o desenvolvimento e entendimento das redes Multiplex. Começamos enunciando as propriedades como uma extrapolação das já apresentadas no Capítulo 2 pois o leitor está já familiarizado com seu significado físico. Além disso a presenta-se outras propriedades que são de uso exclusivo em sistemas multi-redes e foram escolhidas para o melhor entendimento deste trabalho.

Consideremos primeiro um sistema Multiplex composto por  $M$  camadas, e todas as redes das camadas são redes não direcionadas formadas por  $N$  nós. Pode-se associar a cada camada

<sup>2</sup>Os nós da rede estão conetados com sua contraparte na outra rede fazendo isto uma grande diferença com o modelo de multi-rede. En alguns casos e para outras situações o modelo geral sofre pequenas mudanças para-se acomodar melhor com a realidade de um problema específico [51].

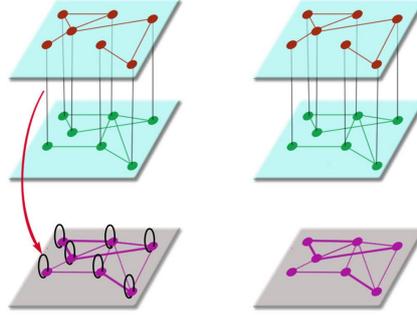
$\alpha = \{1, \dots, M\}$ , uma matriz de adjacência  $A^{[\alpha]} = a_{ij}^{[\alpha]}$ . Onde,  $a_{ij}^{[\alpha]} = 1$  quando existe um aresta entre os nós  $i$  e  $j$  em uma camada  $\alpha$ . Com está descrição apresentaremos em seguida algumas das propriedades dos Multiplex.

**Grau:** O grau de um nó foi definido no Capítulo 2 como o número de arestas que um vértices pode possuir. Para generalizar este conceito para um nó  $i \in X$  do modelo de Multiplex, definimos o vector,

$$\vec{k}_i = \{k_i^{[1]}, \dots, k_i^{[M]}\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

onde os elementos  $k_i^{[\alpha]}$  são o grau do nó  $i$  pertencente à camada  $\alpha$ , em outras palavras,  $k_i^{[\alpha]} = \sum_j a_{ij}^{[\alpha]}$ . Repare que  $\sum_i k_i^{[\alpha]} = 2K^{[\alpha]}$ , onde  $K^{[\alpha]}$  é o número total de arestas da camada  $\alpha$ . Este tipo de vector-grau é a natural extrapolação da definição estabelecida no Capítulo 2 sobre redes complexas com uma só camada ou mono-camada.

**Rede de Projeção:** A rede de projeção do modelo Multiplex, consiste na formação de uma única rede a partir da projeção de todas as  $M$  redes. Por exemplo na Figura 3.5 mostra-se um Multiplex de duas camadas e embaixo uma rede formada pela projeção das duas camadas. Repare que na figura algumas arestas tem uma espessura maior, representando que existe mais de uma aresta que conecta os nós. A rede de projeção será definida como:



**Figura 3.5** Representação da projeção de um Multiplex formado por duas camadas de sete nós

$proj(\mathcal{M}) = \tilde{M} = (\tilde{X}, \tilde{E})$ , onde,

$$\tilde{X} = \bigsqcup_{1 \leq \alpha \leq M} X_\alpha = \{x_i^\alpha; x_i^\alpha \in X_\alpha\}, \quad (3.7)$$

ou seja, é a união de todos os nós pertencentes às redes  $G_\alpha$  com  $\alpha = \{1, \dots, M\}$  e  $\tilde{E}$  está dado pela união das arestas intra-camadas e inter-camada,

$$\tilde{E} = \left( \bigcup_{\alpha=1}^M \{(x_i^\alpha, x_j^\alpha); (x_i^\alpha, x_j^\alpha) \in E_\alpha\} \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \{(x_i^\alpha, x_i^\beta); x_i \in X\} \right). \quad (3.8)$$

Repare que  $\tilde{M}$  é uma rede com  $N \times M$  nós, e que suas matrizes de representação (adjacência, vizinhança e laplaciana), são quadradas e de dimensão  $NM$ .

**Clusterização:** O coeficiente de clusterização introduzido por Watts e Strogatz, pode ser entendido para o modelo de Multiplex em diversas formas. Este coeficiente quantifica de forma matemática a tendencia dos nós a formar triângulos, ou como se fala muitas vezes "the friend of your friend is my friend". Para uma rede  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  o coeficiente de clusterização de um nó  $i$  é

$$C_i = \frac{\text{Número de ligações entre vizinhos de } i}{\text{número total de possíveis ligações dos vizinhos de } i}. \quad (3.9)$$

Ou seja, se pensamos em três pessoas,  $i, j$  e  $k$ , que formam parte de uma rede, e existem os relacionamentos entre  $i, j$  e  $i, k$ , então pode-se dizer que o coeficiente de clusterização da pessoa  $i$  é, a probabilidade que  $j$  e  $k$  também estejam relacionados. O coeficiente de clusterização é definido usualmente como a média de todos os coeficientes dos nós da rede.

Para uma definição do coeficiente de clusterização de um nó  $i \in X$  do Multiplex, vai-se primeiramente proceder a introdução de uma pequena notação necessária. Para um nó  $i \in X$  temos que  $\mathcal{N}(i)$  será o conjunto de todos os vizinhos de  $i$  na rede projeção,  $\tilde{M}$ , e para cada  $\alpha \in \{1, \dots, M\}$  temos que  $\mathcal{N}_\alpha(i) = \mathcal{N}(i) \cap X_\alpha$ , ou seja,  $\mathcal{N}_\alpha(i)$  é conjunto de todos os vizinhos do nó  $i$  na rede que fica na camada  $\alpha$ . Por último, definimos  $S_\alpha(i)$  como o grafo formado por  $\mathcal{N}_\alpha(i)$  e as arestas,

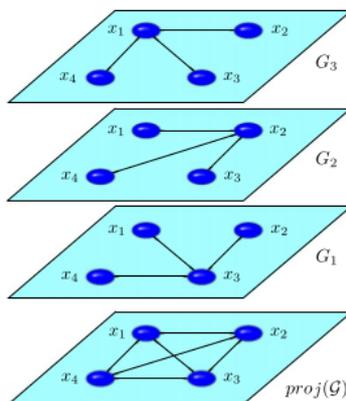
$$\tilde{E}_\alpha = \{(k, j) \in E_\alpha; k, j \in \mathcal{N}_\alpha(i)\}. \quad (3.10)$$

Em outras palavras, com o conjunto de nós e arestas dos vizinhos de um nó  $i$  em uma camada  $\alpha$ , se gera um subgrafo,  $S_\alpha(i)$ , com o conteúdo a camada  $\alpha$ . Similarmente pode-se dizer que o subgrafo  $\tilde{S}(i)$  é gerado pelo conjunto de nós,  $\mathcal{N}(i)$ . Com esta notação, agora pode-se definir o coeficiente de clusterização de um Multiplex,

$$C_M(i) = \frac{2 \sum_{\alpha=1}^M |\tilde{E}_\alpha(i)|}{\sum_{\alpha=1}^M |\mathcal{N}_\alpha(i)| (|\mathcal{N}_\alpha(i)| - 1)}. \quad (3.11)$$

O coeficiente de clusterização de  $M$  será a media de todos os  $C_M(i)$ , sobre todo o conjunto de nós. Repare que pode existir casos onde o coeficiente de clusterização de um nó ou nós pode ser zero, mas na rede de projeção é diferente de zero. Este é o caso do seguinte exemplo apresentado na figura 3.6, onde os coeficientes de clusterização das redes  $G_1, G_2, G_3$  são zero, mas o da rede projeção é diferente de zero <sup>3</sup>

<sup>3</sup>No artigo [55] tentam resolver este problema fazendo uma relação entre diferentes coeficiente de clusterização.



**Figura 3.6** Multiplex formado por três camadas e cada camada formada por quatro nós. Representa como o coeficiente de clusterização de qualquer nó das redes é sempre zero, mas na rede projeção estes mesmos nós são diferentes de zero.

**Métrica** A estrutura métrica de um Multiplex está relacionada com sua topologia, ou seja, todas as definições já apresentadas para redes complexas, como distância, caminhos, distância média, diâmetro entre vértices e eficiência. Eles são parte da métrica em redes complexas e serão apresentadas para redes Multiplex. Assim, para expandir os conceitos clássicos da métrica em redes complexas para redes tipo Multiplex serão definidos mais alguns conceitos.

Seja  $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ , um Multiplex, onde consideramos um conjunto de arestas intra-camadas e inter-camada,

$$E(\mathcal{M}) = \{E_1, E_2, \dots, E_M\} \cup \mathcal{C}. \quad (3.12)$$

Um caminho de comprimento  $q - 1$ , será definido como a sequência

$$\{x_1^{\alpha_1}, l_1, x_2^{\alpha_2}, l_2, \dots, l_{q-1}, x_q^{\alpha_q}\}. \quad (3.13)$$

Ela é composta por nós, com  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \in \{1, \dots, M\}$  e arestas  $l_i = \{x_i^{\alpha_i}, x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\}$ . Um caminho  $w(r)$  é fechado se, para um  $r < q$ ,  $x_1^{\alpha_1} = x_r^{\alpha_r}$ . Ou seja, o nó com que inicia o caminho é o mesmo com que acaba. A distância ou comprimento foi definida no Capítulo 2 com relação ao número de arestas, só que essa definição pode mudar para redes Multiplex e depende se temos a consideração do tipo de aresta, já que o Multiplex utiliza arestas intra-camada e inter-camada. Outra definição que faz parte da métrica e que pode ser facilmente generalizada, é o menor caminho entre dois nós  $i, j$ , que não é mais que a menor distância entre dois nós. Ressaltamos de novo a existência de diferentes tipos de arestas. Por outra parte, o maior comprimento que existe entre dois nós do Multiplex, será chamado como o diâmetro do Multiplex  $D(\mathcal{M})$ , de forma igual à que foi usada em redes complexas. Por último, seja  $d_{i,j}$ , o conjunto de caminhos com menor distância, entre um par de nós  $i, j$ . Com no caso anterior, pode-se definir agora a distância

média entre dois nós  $i, j$ , em uma rede tipo Multiplex,

$$L(\mathcal{M}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{i,j \in X_{\mathcal{M}} \\ i \neq j}} d_{ij}, \quad (3.14)$$

onde  $|X_{\mathcal{M}}| = N$ . Assim como a distância média entre dois nós (ver Equação 2.11), para redes complexas apresenta uma divergência, acontece o mesmo para redes Multiplex (ver Equação 3.14) quando não é conexo. Repare que como resposta à esta divergência existe o conceito de eficiência e ele será igualmente utilizado em redes Multiplex,

$$L(\mathcal{M}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{i,j \in X_{\mathcal{M}} \\ i \neq j}} \frac{1}{d_{ij}}. \quad (3.15)$$

Note que a eficiência das camadas do Multiplex podem ser comparável com a eficiência da projeção do Multiplex e a eficiência do Multiplex, conseguindo estabelecer relações entre estes parâmetros [55].

### 3.3.2 Propriedades Espectrais

Da mesma forma como já foi mencionado, as redes complexas são vistas em termos gerais, como uma abstração matemática das redes reais ou modelos teóricos. Uma das muitas formas para estudar e compreender suas propriedades estruturais e dinâmicas é através das representações matriciais, tais como a matriz de adjacência e a matriz laplaciana, entre outros.

Para redes Multiplex,  $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ , ocorre uma situação similar àquele apresentada nas redes mono-camada ou redes complexas insoladas, onde as representações matriciais cumprem parte importante para caracterizar propriedades estruturais e descrever dinâmicas de transporte de informação ou difusivas. Como consequência existem matrizes homologas em Multiplex que podem desempenhar as mesmas funcionalidades como nas redes complexas insoladas. Existem umas matrizes que são as mais utilizadas na pesquisa de propriedades estruturais e dinâmicas difusivas. A matriz de adjacência de cada camada  $A^{[\alpha]}$ , a matriz de adjacência da projeção do Multiplex  $\overline{A_{\mathcal{M}}}$  e o espectro da matriz da adjacência do Multiplex, são algumas destas representações matriciais que estão relacionadas com diversos processos. Por outra parte a matriz supra-laplaciana ou matriz laplaciana do Multiplex  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \mathcal{L}$  é definida da seguinte forma,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} D_1 \mathbf{L}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 \mathbf{L}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_M \mathbf{L}^M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{\beta \neq 1}^M D_{1\beta} \mathbf{I} & -D_{12} \mathbf{I} & \dots & -D_{1M} \mathbf{I} \\ -D_{21} \mathbf{I} & \sum_{\beta \neq 2}^M D_{2\beta} \mathbf{I} & \dots & -D_{2M} \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -D_{M1} \mathbf{I} & -D_{M2} \mathbf{I} & \dots & \sum_{\beta \neq M}^M D_{M\beta} \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Na equação 3.16  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $N \times N$  e  $\mathbf{L}^\alpha$  é a matriz laplaciana da rede  $G_\alpha$  cujos elementos  $L_{ij}^\alpha$  são os apresentados no Capítulo 2 para uma rede complexa.

### 3.3.3 Difusão

A difusão em redes complexas já foi abordado no Capítulo 2. Entretanto o que pretendemos nesta secção é dar uma forma conceitual e formal do processo. É preciso, como primeira medida, entender a difusão como um processo de transporte através das redes [22]. Estes processos são boas aproximações a uma significativa quantidade de problemas dinâmicos reais <sup>4</sup>. Esta variedade de processos são o resultado de análises nas dinâmicas de difusão simples e passeios aleatórios [29, 61, 62]. É por isso que para redes Multiplex, onde temos um conjunto de redes interagentes não insoladas e não direcionadas, permite-se uma melhor compreensão das redes reais e seus processos de transporte de informação ou difusivos. A difusão portanto é um tópico fundamental, já que envolve comportamentos dinâmicos e sua compreensão ajuda na compressão das redes reais que interagem entre si. Tais processos de difusão ou de transporte foram já discutidos na introdução e no Capítulo 2, e por isso são uma parte fundamental e principal da motivação e desenvolvimento deste trabalho.

A forma de dedução da equação de difusão para redes Multiplex, tem uma grande semelhança com apresentada para redes complexas insoladas. Porém neste caso esta analogia leva a uma equação de difusão com algumas diferenças e com diversas implicações não apresentadas na difusão de redes complexas insoladas. Estas diferenças são devidas às estruturas e tipos de relacionamentos <sup>5</sup> que apresentam as redes Multiplex.

De forma igual ào apresentado no Capítulo 2, no qual imaginamos um fluido que tenta-se espalhar por uma rede qualquer, pode-se neste caso aplicar este mesmo processo dedutivo. É claro que deve-se ter em conta que no Multiplex existem dois tipos de ligações: as ligações intra-camada  $E_\alpha$  e as inter-camada  $E_{\alpha\beta}$ . Portanto, seguindo a ideia já apresentada temos a equação de estado de um vértice  $i$  em uma camada  $\alpha$ , podemos escrever a generalização da Equação 3.16 da seguinte maneira

$$\frac{dx_i^\alpha}{dt} = D_\alpha \sum_{j=1}^N w_{ij}^\alpha (x_j^\alpha - x_i^\alpha) + \sum_{\beta=1}^M D_{\alpha\beta} (x_i^\beta - x_i^\alpha), \quad (3.17)$$

onde  $x_i^\alpha(t)$  denota o estado de um nó ( $i = 1, \dots, N$ ), em uma rede ( $G_\alpha$  com  $\alpha = 1, \dots, M$ ). Por outra parte os coeficientes de difusão intra-camada ( $D_\alpha$  com  $\alpha = 1, \dots, M$ ) na Equação 3.17, são em forma geral diferentes para cada camada que forma o Multiplex, o mesmo acontece

<sup>4</sup>Alguns destes problemas reais são: navegação e fluxos de diferentes tipos, dados em redes computacionais, sistemas de transporte como redes de ônibus e de aeroportos

<sup>5</sup>Os relacionamentos no Multiplex, são claramente diferenciados por seus coeficientes de difusão inter-camadas e intra-camadas e além disso, as diferentes relacionamentos entre as diferentes camadas que apresentam configurações estruturais diferentes. Todo isto faz que a difusão em redes Multiplex seja de um grande atrativo nas pesquisas atuais [63].

para os coeficientes de difusão inter-camada ( $D_{\alpha\beta}$  com  $\alpha, \beta = 1, \dots, M$ ). Repare que a Equação 3.17 no lado direito está formada pela soma de dois termos acompanhados dos coeficientes de difusão intra-camada e inter-camada. Estes termos representam as contribuições na equação de difusão feitas pelas redes consideradas como redes complexas de uma camada e de muitas camadas, ou seja, os relacionamentos inter-camada.

Utilizando um tratamento algebraico na Equação 3.17, como foi feito no Capítulo 2, pode-se obter a equação de difusão para as redes Multiplex em sua forma matricial,

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathcal{L}\mathbf{X}, \quad (3.18)$$

onde a matriz supra-laplaciana  $\mathcal{L}$ , é uma matriz  $NM \times NM$  e sua forma já foi apresentada na Equação 3.16. Repare que a equação da matriz supra laplaciana está formada pela composição de duas matrizes e pode ser simplificada como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_s. \quad (3.19)$$

Aqui a soma dos laplacianos  $\mathcal{L}_o$ , que são as matrizes laplacianas formadas em sua diagonal pelos laplacianos das camadas e seu valor de difusão intra-camada  $D_\alpha L^\alpha$ . O outro laplaciano  $\mathcal{L}_s$ , representa os diversos relacionamentos inter-camada com seus coeficientes de difusão. Os dois laplacianos são matrizes simétricas e portanto, o supra-laplaciano também é uma matriz simétrica. Como consequência deste fato, se cumpre todas as propriedades de difusão de redes complexas já conhecidas e o tempo de relaxamento de um Multiplex conexo corresponde ao inverso do primeiro autovalor diferente de zero, ou seja,

$$\tau = \frac{1}{\lambda_2}. \quad (3.20)$$

### 3.3.4 Difusão em Multiplex de Duas Camadas

Nesta secção vai se tentar explicar todas as consequências e repercussões que podem acontecer quando consideramos um Multiplex de duas camadas. Estas repercussões estão relacionadas com a difusão e super difusão, da qual ainda não se falou com formalidade. O caso de um Multiplex formado por duas camadas é de interesse especial, já que é a base principal em que este trabalho está sustentado. Mas porque é de tal importância em redes Multiplex de duas camadas? A resposta à esta pergunta é baseada mais na importância fundamental <sup>6</sup>, que existe em nosso mundo no qual estamos com redes que interagem ao redor.

As redes Multiplex de duas camadas podem ser comparadas, ou até certo ponto visualizadas de forma analógica, com casos onde existem duas redes reais interagindo, e onde o transporte de informação será de suma importância para seus desenvolvimentos. Alguns dos casos, já falados na introdução deste capítulo e que têm muita aplicabilidade são as redes de transporte tais com

<sup>6</sup>Percebida já pelo caro leitor na aplicação de redes Multiplex [64, 65] e na recente aparição do modelo de multi-rede [1].

redes aéreas, onde cada uma das diferentes empresas que oferecem voos formam sua própria rede, sendo seus vértices o conjunto de todos os diferentes destinos que oferecem, e suas arestas neste cenário serão as diferentes relacionamentos que existem entre os diversos destinos oferecidos, ou seja, os voos aos diferentes lugares do país ou do mundo. Mas um caso muito comum na vida real é quando um voo está atrasado e muitas vezes precisa ser reprogramado pela empresa. Nesta situação, o usuário precisa chegar a seu destino e é por isso que a empresa primeiramente procura voos com outras empresas. Neste momento, do ponto de vista da teoria das redes complexas, é claro que se tem duas redes reais interagindo para poder dar solução a um problema de difusão, ou em outras palavras, transporte de pessoas entre dois locais.

A existência deste exemplo e muitos mais de redes reais, onde pode-se evidenciar de fato um modelo, onde duas ou mais redes estão interagindo, para dar solução aos problemas de difusão que apresentem é muito comum. Por todo isto existe uma grande importância em poder se chegar a controlar os processos difusivos mediante a configuração topologia das redes. Mas porque a configuração topologia e não adição de novos vértices e relacionamentos? Isto é principalmente pelas implicações que dão lugar. Por exemplo, pode-se pensar que com a adição de mais vértices e relacionamentos a rede pode resolver o problema da difusão, mas esta ideia representa dois grandes problemas: o primeiro é a facilidade da rede para a criação de novos vértices e relacionamentos, que no caso da rede do exemplo anterior é muito difícil no curto prazo e a segunda é que não existe certeza absoluta que o problema da difusão seja resolvido de igual forma para todos os pontos da rede.

Com todo está justificativa dada, é evidente a importância de estudar a dinâmica da difusão e em gerar novas propostas que possam de alguma forma fazer que exista um melhor controle. Por isso, a grande importância teórica que recai nesta seção está ligada à apresentação, de forma clara, da dinâmica da difusão em redes Multiplex baseados no artigo [63].

Começamos fazendo algumas considerações na Equação 3.16, para simplificar o supra-laplaciano. Definimos os coeficientes de difusão intra-camadas  $D_\alpha = 1 \forall \alpha$  e o coeficiente inter-camada  $D_{\alpha\beta} = D_x \forall \alpha, \beta$ . Então, o supra laplaciano de um Multiplex se redefine,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{L}^M \end{pmatrix} + D_x \cdot \begin{pmatrix} (M-1)\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \dots & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & (M-1)\mathbf{I} & \dots & -\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \dots & (M-1)\mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

A Equação 3.21 é útil para o estudo do efeito do coeficiente de difusão inter-camada. Ou seja, pode-se pesquisar as variações no tempo de relaxamento  $\tau(\lambda_2)$  do Multiplex quando há mudanças do coeficiente de difusão inter-camada,  $D_x$ . O fator  $M$  na Equação 3.21, representa o número de camadas que o Multiplex possui, ou seja, para este caso  $M = 2$ .

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^2 \end{pmatrix} + D_x \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

A Equação 3.22 é o supra-laplaciano do Multiplex de duas camadas. Como já foi discutido, o supra-laplaciano em geral (ver Equação 3.21) serve para poder ter informações do tempo de

relaxamento de um Multiplex quando se faz pequenas mudanças no coeficiente de difusão inter-camada  $D_x$ , porém, o estudo se torna mais claro se consideramos apenas o supra-laplaciano de duas camadas (ver Equação 3.22). Na referência [63] se faz um análises da dinâmica espectral para um Multiplex de duas camadas e utilizando teoria de perturbações se encontra, entre outras coisas, dois fatos muito importantes relacionados com o coeficiente de difusão inter-camadas  $D_x$  e que envolvem de forma direta o comportamento do menor autovalor diferente de zero  $\lambda_2$ . Isto é de grande importância já que qualquer coisa que envolva este autovalor pode conduzir a mudanças nos tempos de relaxamento do Multiplex.

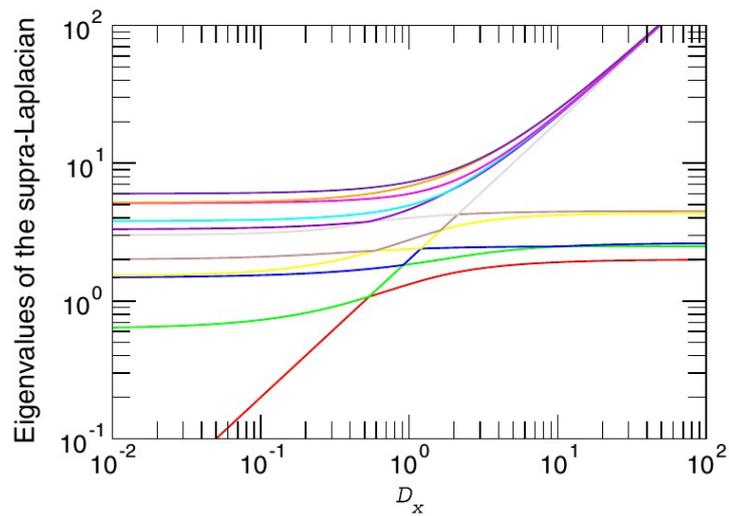
Quando se faz o gráfico dos autovalores versus os valores do parâmetro  $D_x$  (ver Figura 3.7), observa-se certas características. Na Figura 3.7, copiada do artigo [63], apresentam os diferentes autovalores  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{12}$  de um Multiplex de duas camadas formado por duas redes de 6 nós (ver Figura 3.4), com um intervalo dos valores inter-camada  $10^{-2} \leq D_x \leq 10^2$ . Cada cor representa um dos diferentes autovalores. Note que o menor autovalor diferente de zero  $\lambda_2$  será a linha de cor vermelho e ela apresenta um comportamento linear para valores muito pequenos de  $D_x$ .

Anteriormente foi mostrado no artigo [66] para um caso geral de  $M$  camadas e em relação com o parâmetro  $D_x$  que:

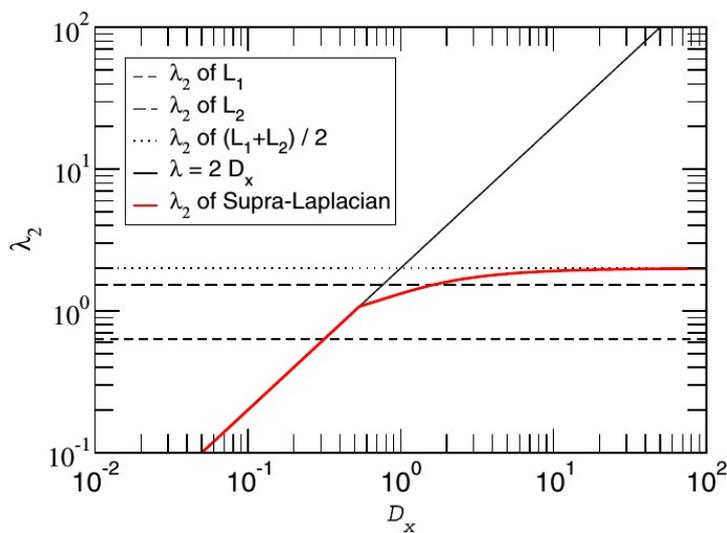
- se  $D_x \ll 1$ , então o conjunto  $M - 1$  de autovalores de  $\mathcal{L}$  tem um comportamento linear.
- se  $D_x \gg 1$ , então o conjunto  $N - 1$  de autovalores de  $\mathcal{L}$  são aproximadamente o conjunto  $N - 1$  de autovalores diferentes de zero do laplaciano de uma simples camada, formada pela média das  $M$  camadas do Multiplex com  $N$  nós.

Estes dois fatos, podem ser observados na Figura 3.8, onde é apresentado o mesmo espectro da Figura 3.7 unicamente com autovalor de interesse  $\lambda_2$ . Isto permite observar o comportamento de  $\lambda_2$  como função do parâmetro  $D_x$ . Note que na Figura 3.8, pode-se ver que, quando os valores de  $D_x \ll 1$ , o autovalor  $\lambda_2$  se comporta de forma linear, mas quando  $D_x \gg 1$  o autovalor converge a um autovalor  $\lambda_2$  do laplaciano de uma rede simples, formada pela media das redes  $L_1$  e  $L_2$  que formam o Multiplex como se espera que seja. Outro fato importante é que, para valores  $D_x \ll 1$ , o tempo de difusão é da forma  $\tau \propto (M \cdot D_x)$ .

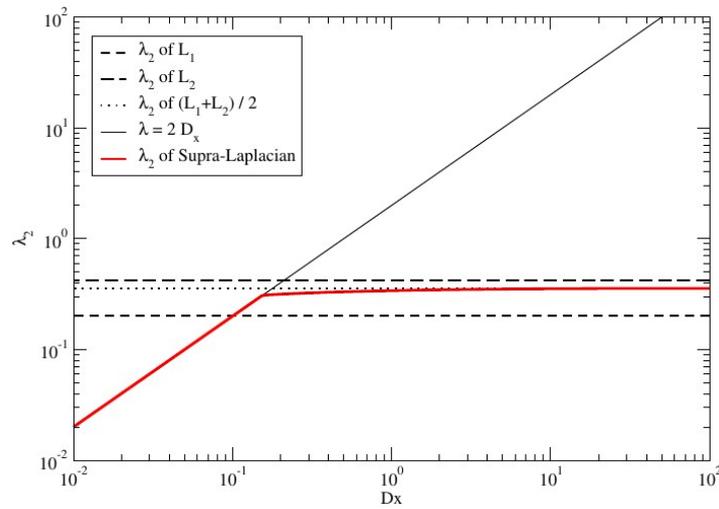
Outro aspecto apresentado é a super difusão, que consiste em que o Multiplex tem um menor tempo de relaxamento que as camadas isoladas  $\tau < \tau_1 < \tau_2$ . Ou, visto de outra forma, o autovalor  $\lambda_2$  do supra-laplaciano é maior que os autovalores das redes isoladas  $L_1$  e  $L_2$ . Mas não há garantia que a super-difusão exista sempre que  $D_x \gg 1$ .



**Figura 3.7** Espectro de uma rede tipo Multiplex de duas camadas de 6 nós. Em cores se apresentam a evolução dos diferentes autovalores  $\lambda_i$  para as diversas mudanças no parâmetro  $D_x$ .



**Figura 3.8** Espectro de uma rede tipo Multiplex de duas camadas de 6 nós. Em cor vermelho se apresenta a evolução do autovalor  $\lambda_2$  para as diversas mudanças no parâmetro  $D_x$ . Como parte do análises apresenta-se diversos autovalores  $\lambda_2$  para diferentes casos.



**Figura 3.9** Espectro de uma rede tipo Multiplex formado por duas redes livres de escala de 1000 nós. Inicialmente as duas redes eram iguais, mas foram adicionadas 400 arestas na rede  $L_2$  de forma aleatória, fazendo com que a rede  $L_2$  tenha um tempo de relaxamento maior que o tempo do Multiplex.

Considere-se por exemplo a Figura 3.9, formada por um Multiplex de duas camadas de redes livres de escala com 1000 nós cada rede. Em um princípio as duas redes eram iguais, mas foram adicionadas 400 arestas mais na rede  $L_2$  aleatoriamente. Isto faz que o autovalor  $\lambda_2$  de uma das camadas seja maior que o autovalor  $\lambda_2$  do supra-laplaciano, mostrando assim que não sempre existe super-difusão em um Multiplex.

---

---

## CAPÍTULO 4

---

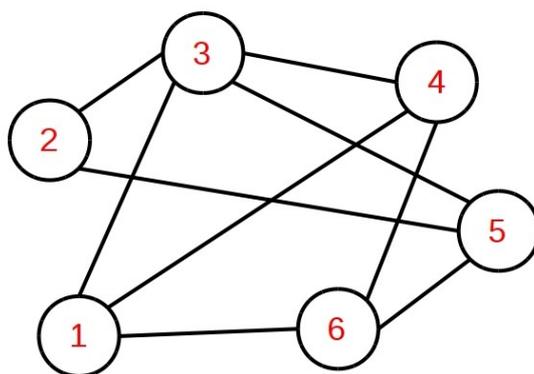
### DISTÂNCIA ENTRE DUAS REDES

No início de este trabalho foram apresentadas as redes complexas de forma isolada (Ver capítulo 2), além de um conjunto de ferramentas para caracterizar suas propriedades estruturais. No segundo capítulo tentou-se dar uma visão mais ampla de redes complexas e se apresentou o conceito de multi-rede, onde as redes interagem entre si de diferentes formas, formando assim novos modelos, entre os quais se prestou maior ênfase no modelo de Multiplex. Agora, para completar este desenvolvimento teórico, precisamos formular grandezas que permitam-nos diferenciar uma rede de outra, já que as propriedades apresentadas no Capítulo 2 não são suficientes para se conseguir diferenciar de forma clara uma rede de outra. Por exemplo, imagine o caso onde existem duas redes livres de escala. Neste cenário é possível caracterizar as duas redes pelas ferramentas já apresentadas, mas como as duas redes compartilham uma natureza estrutural idêntica, faz que estas ferramentas não garantam uma maneira de conseguir diferenciar de forma mais precisa uma rede do outra. Este problema é maior no caso das multi-redes, já que é importante ter uma medida por médio de uma grandeza, que seja precisa e mostre quão semelhantes ou diferentes podem ser duas redes.

Este capítulo está formado por duas partes, na primeira será apresentada uma grandeza que ajudará a diferenciar duas redes complexas, conexas e de igual número de nós. Esta grandeza é chamada de distância entre duas redes. A distância entre duas redes é proposta no artigo [2] onde, além da introdução de este conceito, utiliza-se o método de Monte Carlo como uma forma estocástica para reduzir a distância ou afastamento que duas redes possuem. Na segunda parte será apresentado o método de Monte Carlo como uma ferramenta que pode controlar a aproximação ou o afastamento que duas redes tem. Enfatizamos que a utilização do método de Monte Carlo para aumentar a distância de duas redes e não somente para reduzi-la [2], como tem sido feito até agora, é uma nova proposta deste trabalho e tem isto fundamental importância no estudo de redes Multiplex aqui apresentado.

#### 4.1 PROPRIEDADES DOS VIZINHOS EM REDES COMPLEXAS

Nesta secção vai-se aprofundar o conceito de vizinhos de um nó em uma rede, para poder dar uma melhor conceituação do conceito de distância entre duas redes. Considere uma rede qualquer  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  (ver Figura 4.1), conexa e sem arestas repetidas. É possível caracterizar mediante as propriedades estruturais uma rede em alguns dos tipos de modelos já apresentados no Capítulo 2. Tais propriedades são o índice de clusterização  $C_i$ , a distância média  $\bar{d}$ , a distribuição de graus  $f(k)$ , entre outros muitos que existem na literatura. Focaremos nossa atenção na grandeza  $n_k$  utilizada na definição da distribuição de graus (ver Equação 2.6)  $f_k$  e definida como o número de vértices com grau igual a  $k$ . Para explorar mais a fundo o conceito de vizinhos



**Figura 4.1** Rede conexa formada por 6 nós e 9 arestas.

de uma rede qualquer  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  apresentamos na Figura 4.1 um exemplo de uma rede simples, formada por 6 nós e 9 arestas. Note-se que a rede é conexa, sem arestas repetidas e não é um dígrafo. A matriz de adjacência, apresentada pela Equação 4.1 representa as conexões que um nó qualquer da rede tem com seus vizinhos mais próximos.

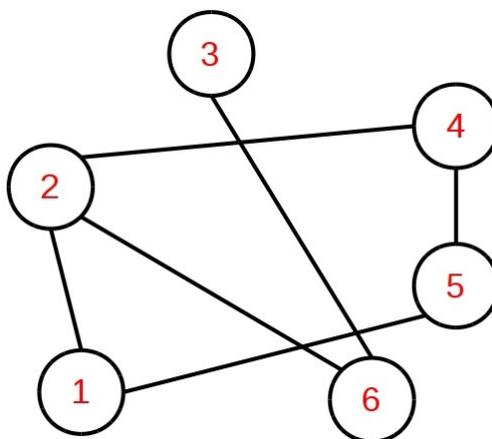
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Mas agora imagine que estamos interessados não apenas nos vizinhos mais próximos, mas também naqueles que estão separados por duas arestas, ou seja, os vizinhos de segunda ordem. A matriz de vizinhos com duas arestas de distância ou de segunda ordem será diferente da matriz da Equação 4.1, que poderia chamar-se neste contexto de matriz de primeira ordem. Até pode-se formar uma rede onde os vizinhos mais próximos sejam os de segunda ordem (ver Figura 4.2). Repare que, para este exemplo, a medida que a ordem é maior o número de arestas é menor até uma ordem no qual será zero. Portanto, é claro que a rede de ordem máxima ficará com uma matriz de vizinhos  $\mathbf{A}_{max} = \mathbf{A}_D$ , onde  $D$  faz referência ao diâmetro da rede inicial (ver

Figura 4.1), e uma matriz de vizinhos de ordem maior que o diâmetro da rede será uma matriz nula, ou seja  $\mathbf{A}_{D+1} = 0$ .

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Agora pode-se generalizar este conceito assim de matrizes de vizinhos para o caso de uma



**Figura 4.2** Rede conexa formada por 6 nós e 6 arestas.

rede geral. Seja  $\mathbf{A}_k \forall k = \{0, 1, 2, \dots, D\}$  as matrizes de vizinhos de uma rede  $G(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  e para cada matriz  $\mathbf{A}_k$  lhe corresponde uma rede  $G^k$  tal que  $G^k \in G$ . O conjunto de todas as redes de diferente grau formam o espaço de vizinhos, que representam a forma estrutural da rede  $G^1$ . A matriz  $\mathbf{A}_0$  que representa a rede  $G^0$  será igual à matriz identidade  $I$ . Repare que, as redes  $G^k$  indicam a estrutura de caminhos mínimos entre nós da rede  $G^1$ , ou seja, a distância mais curta de comprimento  $k$  entre pares de nós da rede. Com todo isto é necessário ter um método ou equação que permita encontrar de forma comoda as matrizes de vizinhos de qualquer ordem. No Artigo [67], é obtida uma equação de recorrência (ver Equação 4.3) que permite encontrar qualquer matriz de vizinhos,

$$\mathbf{A}_k = \left( \bigoplus_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_j \right) \otimes \mathbf{A}_1 - \left( \bigoplus_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_j \right). \quad (4.3)$$

Repare que a Equação 4.3 é uma equação de recorrência e  $k = \{2, 3, \dots, D\}$ , já que as matrizes de vizinhos  $\mathbf{A}_0 = I$  e  $\mathbf{A}_1$  são conhecidas. Os símbolos  $\oplus$  e  $\otimes$  utilizados, são as somas e produtos Booleanos [68], cuja definição é apresentada a em seguida. Note que existem diferenças notórias entre a álgebra Booleana e a álgebra normal, já que a primeira é baseada em um conjunto de apenas dois elementos, 0 e 1, que obedecem às seguintes regras para as operações de soma, subtração e produto:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 1;$$

$$0 \ominus 0 = 0, \quad 1 \ominus 0 = 1, \quad 0 \ominus 1 = 0, \quad 1 \ominus 1 = 0;$$

$$0 \otimes 0 = 0, \quad 1 \otimes 0 = 0, \quad 0 \otimes 1 = 0, \quad 1 \otimes 1 = 1.$$

Com isto pode-se dizer que temos um espaço de vizinhos e que com ajuda da Equação 4.3 os cálculos computacionais podem ser bastante rápidos por causa da álgebra Booleana. Por último definiremos uma matriz formada por todas as distâncias estruturais entre nós. Esta matriz apresenta toda a informação sobre a distância mínima entre qualquer par de nós em uma rede. Ou seja, temos obtido uma matriz que tem informação sobre todas os comprimentos mais curtos entre qualquer par de nós. Esta informação topológica pode ser utilizada para definir de forma precisa quão similares ou distintas podem ser duas redes, ou em nosso contexto qual será o afastamento topológico que duas redes podem ter:

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^D i\mathbf{A}_i \quad (4.4)$$

Além disto, também se cumprem propriedades de invariância com respeito ao espectro do espaço de vizinhos apresentadas no Artigo [67].

## 4.2 DISTÂNCIA INTER-REDES

Utilizando o conceito de espaço de vizinhos apresentado na seção anterior, pode-se definir a distância entre duas redes, mas temos que ressaltar uma importante dependência, relacionada com a natureza da matriz de adjacência e que de fato pode gerar mudanças importantes na Equação 4.4. Esta dependência está relacionada ao fato que redes iguais em sua topologia com numeração de nós diferente podem gerar matrizes de adjacência diferentes (ver exemplo no Capítulo 2, Seção 2.4). Por isso é claro que para identificar duas redes como isomórficas <sup>1</sup>, é preciso ter em conta a distância baseada na Equação 4.4 e as possíveis combinações na numeração de nós que uma rede pode ter <sup>2</sup> e que afetam de forma direta a medida da distância entre duas redes, comprometendo a forma de distinguir as duas redes.

Definimos que, para que duas redes quaisquer sejam iguais ou isomórficas, a distância entre as duas redes deve ser igual a zero. Por outro lado, se a distância tem um valor maior a zero, significa que este valor de distância mostra quão grandes podem ser suas diferenças topológicas. Portanto, a medida desta grandeza fornece como resultado uma forma adequada de

<sup>1</sup>Ser isomórficas significa que as duas redes são iguais estruturalmente.

<sup>2</sup>Para isto tem se que ter em conta  $N!$  possíveis formas de renumeração.

diferenciar quaisquer duas redes, mesmo que elas possam compartilhar as mesmas propriedades estruturais já apresentadas no Capítulo 2.

A definição de distância vai ser dada por uma medida Euclideana, e oferece uma solução ao problema de diferenciar duas redes e abre as possibilidades em temas referentes a redes multi-rede e mais precisamente nas redes Multiplex.

Sejam duas redes  $G_\alpha$  e  $G_\beta$ , com igual numero de nós  $N$ , conexas e sem arestas repetidas. Então se define a distância inter-redes como a grandeza  $\delta(\alpha, \beta)$  [2] cujo valor apresenta as diferenças estruturais entre duas redes.

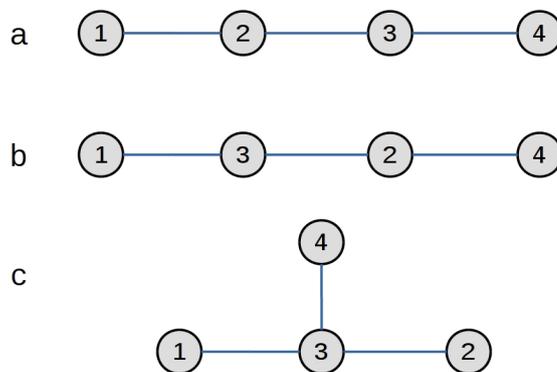
$$\delta^2(\alpha, \beta) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N \left[ \frac{(\hat{A}_\alpha)_{i,j}}{D_\alpha} - \frac{(\hat{A}_\beta)_{i,j}}{D_\beta} \right]^2. \quad (4.5)$$

Repare que na Equação 4.5 os termos  $D_\alpha$  e  $D_\beta$  corresponde aos diâmetros das redes  $G_\alpha$  e  $G_\beta$ . Se eles são iguais podem ser omitidos da equação mas no caso geral onde os diâmetros de cada redes são diferentes, então cumprem um papel de normalização, fazendo que o resultado da soma tenha valores entre zero e um. Apesar que a Equação 4.5 precisa que as duas redes tenham igual número de nós, ela pode ser utilizada para casos onde o número de nós são quase iguais ou com uma diferença muito pequena. Nestes casos podem ser descartados ou apagados alguns nós da rede com maior número de nós, mediante um processo seletivo que tenha como consideração nós que não interferem muito na estrutura da rede. Por outra parte para dizer que duas redes são topologicamente iguais a distância entre elas tem que ser zero, mas repare que para que isto aconteça a Equação 4.5 precisa de igual forma estrutural  $(\hat{A}_\alpha)_{i,j} = (\hat{A}_\beta)_{i,j}$  e além disso compartilhar o mesmo diâmetro de rede  $D_\alpha = D_\beta$ .

Por causa da dependência apresentada nas matrizes de adjacência, e por transitividade apresentada também pela Equação 4.5, já que está baseada no espaço de matrizes de adjacência, precisa-se ter em consideração, que o resultado da expressão  $\delta(\alpha, \beta)$  na Equação 4.5 depende da numeração atribuída a cada nó da rede. Se consideramos uma rede com  $N$  nós, temos  $N!$  maneiras de numerar os nós sem alterar a topologia da rede. Do mesmo modo, o valor  $\delta(\alpha, \beta)$  pode assumir  $N!$  valores diferentes. Desta forma devemos tomar o menor valor de  $\delta(\alpha, \beta)$  como a distância entre duas redes, o que leva em conta todas as combinações de numeração, para assim obter a medida da distância precisa.

Como um exemplo, considere a Figura 4.3, onde temos 3 redes simples marcadas como **a**, **b** e **c**, todas com 4 nós. Repare que as redes **a** e **b** tem uma forma estrutural igual mas a numeração que possuem é diferente, ao passo que na rede **c** encontra-se uma diferença estrutural com relação as redes **a** e **b**. Se obtemos os valores de  $\delta(\alpha, \beta)$  para as matrizes **a** e **b** obteremos que são diferentes de zero, mas como pode-se perceber estruturalmente ou topologicamente as duas são iguais o que leva a procurar uma numeração adequada onde  $\delta(\alpha, \beta)$  é zero. Se pelo contrario consideramos a rede **c** com respeito às redes **a** e **b**, e considerando que sua forma topológica é diferente, é claro que não existe uma numeração de nós que faça que o valor de  $\delta(\alpha, \beta)$  seja zero com quaisquer das outras redes. Por outra parte, dos  $4!$  valores existentes

da comparação da rede **c** com as redes **a** ou **b**, existe um destes que será menor aos outros. A procura deste valor mínimo será o referencial da existência de uma diferença estrutural ou não entre duas redes quaisquer.



**Figura 4.3** Três redes simples **a**, **b** e **c** formadas por 4 nós, onde se evidencia as diferenças estruturais entre **c** com as redes **a** e **b**. Por outro lado, as redes **a** e **b** apresentam de forma intencional numerações diferentes para ressaltar o fato que, com estas numerações, o valor de  $\delta(\alpha, \beta)$  é diferente de zero apesar de compartilhar a mesma estrutura.

Assim a Equação 4.5 abre as possibilidades para um processo que busque diminuir ou aumentar o valor da distância através da mudança da numeração, sem alterar as propriedades topológicas de nenhuma delas. Pode-se então concluir que, para ter uma melhor definição da distância entre redes e assim diferenciar se duas redes são isomórficas ou não, utilizamos o fato que,  $\delta(\alpha, \beta)$  assume um valor mínimo da distância  $\delta^{min}(\alpha, \beta)$ , ao qual pertence uma ou mais das possíveis  $N!$  numerações. Então, a partir disto dizemos que, duas redes são isomorfas, se e somente se sua distância mínima é igual a zero. Caso contrario, se a distância mínima é maior que zero, então optemos uma distinção topológica entre as duas redes.

### 4.3 MÉTODO DE MONTE CARLO

Como foi apresentado na secção anterior, para obter de forma exata a distância mínima entre duas redes é preciso utilizar da Equação 4.5 fixando uma numeração para uma das redes, por exemplo a rede  $\alpha$ , e variando-se todas as  $N!$  numerações da outra rede  $\beta$ . Devido à pouca praticidade de fazer estes passos um de cada vez (a menos que  $N$  seja muito pequeno) é necessário se adotar um método estocástico para tentar obter  $\delta^{min}(\alpha, \beta)$  de uma forma mais rápida e pratica. Por isso, nesta seção se apresentará os conceitos fundamentais para o entendimento de um dos métodos estocásticos mais utilizados que será usado para encontrar a distância mínima aproximada entre duas redes, de forma rápida.

Em 1946, o matemático Stanislaw Ulam dentro de um jogo de paciência tentou calcular as probabilidades de sucesso de uma determinada jogada utilizando a tradicional análises combinatoria. Após isto, ele percebeu que uma alternativa mais prática seria simplesmente realizar inúmeras jogadas, mas Ulam sabia que técnicas, como esta, não eram muito usadas por envolverem cálculos extremamente demorados, tediosos e sujeito a erros.

Entretanto, nessa mesma época ficou pronto o primeiro computador eletrônico o **ENIAC**<sup>3</sup>. Quando Ulam soube isto, sugeriu o uso de métodos de amostragem estatística desde uma perspectiva estocástica, para solucionar o problema da difusão de nêutrons em material sujeito a fissão nuclear.

Posteriormente esse método ficou estalecido como o método de Monte Carlo e formalizado em 1949 [3]. Atualmente, o método de Monte Carlo pode ser descrito como método de simulação estatística que utiliza sequências de números aleatórios para resolver problemas por médio de amostragem aleatória [4, 6].

#### 4.4 CONCEITOS BÁSICOS

No método de Monte Carlo, a única exigência é que o sistema físico ou matemático seja descrito (modelado) em termos de funções de densidade de distribuição de probabilidade (PDF, do inglês probability density function), que delineiam o processo físico. Uma vez conhecidas essas distribuições, a simulação de Monte Carlo pode proceder fazendo as mostragem aleatórias a partir das mesmas. Este processo é repetido inúmeras vezes e o resultado desejado é obtido por técnicas estatísticas sobre um determinado número de amostras que podem chegar a milhões.

Em forma geral o método de Monte Carlo consiste em estimar determinadas quantidades, observando -se o comportamento de um número grande de eventos individuais ou número de passos de Monte Carlo. Em outras palavras solucionar um dado problema pelo método de Monte Carlo consiste em realizar uma simulação matemática do fenômeno físico de interesse ao invés de solucionar a equação o conjunto de equações que o regem, sendo isto uma de suas principais características.

Podemos então resumir os componentes primários para qualquer tipo de simulação:

1. Funções de densidade de distribuição de probabilidade (PDF).
2. Gerador de números aleatórios.
3. Técnicas de amostragem.

Por exemplo, para o modelo de Ising [7] o objetivo é coletar mostras dos estados, que estão distribuídas conforme a distribuição de Boltzmann, construída por um processo de Markov [3, 4].

---

<sup>3</sup>Antes disto eram utilizados dispositivos mecânicos para fazer os cálculos.

A eficiência do método está ligada ao fato de não levar em conta a probabilidade das configurações em si, mas sim a razão entre elas (ver Equação 4.6), pois a razão entre as probabilidades de duas dadas configurações ou estados <sup>4</sup> pode ser determinada independentemente das outras.

Em geral, para um sistema físico que obedece a distribuição de Boltzmann, seja  $\Delta E = E_m - E_n$ , para duas configurações  $m$  e  $n$  quaisquer. A razão entre as probabilidade transição entre dois estados pode ser escrita como,

$$\frac{P_{m \rightarrow n}}{P_{n \rightarrow m}} = \frac{P_m}{P_n} = e^{-\beta \Delta E}. \quad (4.6)$$

A Equação 4.6 é conhecida como a condição da transição de probabilidade e pode-se mostrar que se uma transição de probabilidade satisfaz a Equação 4.6 então a distribuição de equilíbrio do sistema vai ser uma distribuição de Boltzmann. A Equação 4.6 tem muitas soluções, mas para um problema se procura a mais eficiente. A continuação apresentamos uma lista de possíveis escolhas que cumprem com a Equação 4.6.

$$P_{m \rightarrow n} = A \cdot e^{-\frac{1}{2}\beta(E_n - E_m)}, \quad (4.7)$$

$$P_{m \rightarrow n} = A \cdot \frac{e^{-\beta(E_n - E_m)}}{1 + e^{-\beta(E_n - E_m)}}, \quad (4.8)$$

$$P_{m \rightarrow n} = A \cdot \begin{cases} e^{-\beta(E_n - E_m)} & E_n - E_m > 0, \\ 1 & E_n - E_m \leq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Estas equações que satisfaz a condição de transição de probabilidade podem ser escritas como:

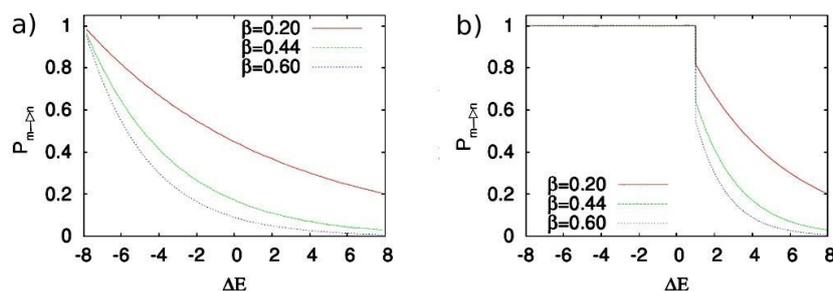
$$P_{m \rightarrow n} = g(m \rightarrow n)A(m \rightarrow n), \quad (4.10)$$

Na Equação 4.10  $g(m \rightarrow n)$  é a probabilidade de seleção de um estado  $n$  quando o sistema está no estado  $m$ , ou seja o primeiro passo em um algoritmo de Monte Carlo será a seleção do estado  $m \neq n$  com probabilidade  $g(m \rightarrow n)$ . O segundo passo é aceitar a mudança com probabilidade  $A(m \rightarrow n)$ , por isso  $A$  é chamada como o radio de aceitação entre os estados  $m$  e  $n$ . Na pratica o ideal será ter um máximo radio de aceitação  $A(m \rightarrow n) = 1$  para todo  $m$  para o qual  $g(m \rightarrow n) > 0$ . Por exemplo, pode-se utilizar a Equação 4.7 que satisfaz a transição de probabilidade e  $A = e^{-\beta z}$ .

$$P_{m \rightarrow n} = e^{-\frac{1}{2}\beta(E_n - E_m + 2z)}. \quad (4.11)$$

Na Figura 4.4 se apresenta a dependência de  $P_{m \rightarrow n}$  representada pela Equação 4.11, repetido à mudança de energia para diferentes valores de  $\beta$ . Repare que para diversos valores de  $\beta$  a probabilidade de transição  $P_{m \rightarrow n}$  é muito pequena sempre que  $\Delta E = 0$  (ver Figura 4.4 a). Por isso, em 1953 Nicolas Metropolis propôs uma variante do método de Monte Carlo conhecida como método de Metropolis, com a peculiaridade de que é muito mais eficiente [69] (ver Figura 4.4 b) para valores de  $\Delta E = 0$  e é dado pela Equação 4.9. O método de Metropolis é muito mais utilizado e é aplicado a muitos sistemas por sua simplicidade e eficiência.

<sup>4</sup>Um sistema como o modelo de Ising pode ter um grande número de configurações  $2^N$  e todas dependendo dos estados de spin  $\pm 1$  de cada átomo que o forma.



**Figura 4.4** Gráficos da probabilidade de um sistema em um estado  $m$  passar a um estado  $n$  versus a mudança de energia  $\Delta E$ , com diferentes valores de  $\beta$  no modelo de Ising de duas dimensões. O gráfico da esquerda apresenta o método de Monte Carlo e a gráfico da direita o método de Metropolis.

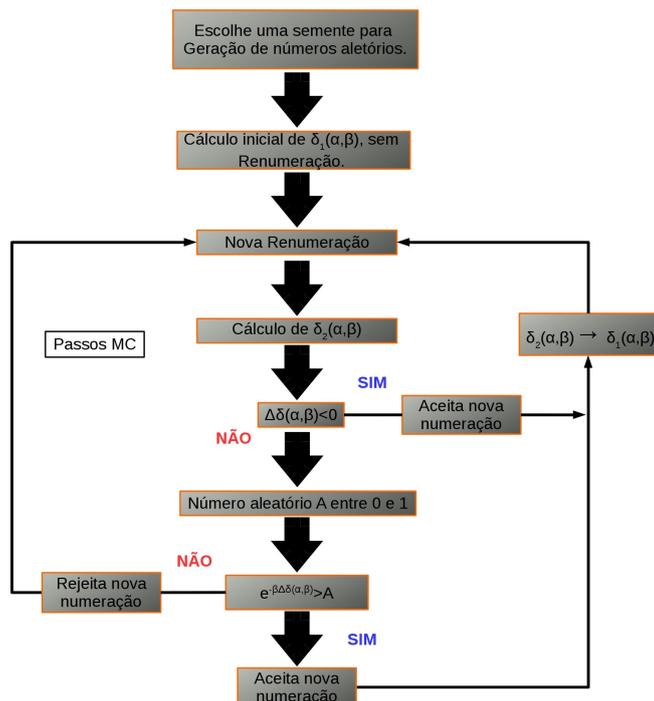
#### 4.5 DISTÂNCIA MÍNIMA ENTRE DUAS REDES

Como já foi mostrado, para obter a distância mínima entre duas redes  $\delta^{min}(\alpha, \beta)$ , precisa-se de uma única numeração de nós, de todas as possíveis numerações que formam o espaço de  $N!$  combinações diferentes. Devido ao fato da dificuldade para implementar os cálculos de todas as combinações das distâncias  $\delta(\alpha, \beta)$  obtidas com todas as possíveis numerações, no artigo [2] se implementa o método de Metropolis. Com ajuda da Equação 4.5, fazemos as seguintes considerações especiais de definição do método. A principal etapa do processo é a busca de uma nova renumeração de uma das redes (por exemplo fixamos a renumeração da rede  $\alpha$  e buscamos uma nova numeração para a rede  $\beta$ ) de forma tal que a distância  $\delta(\alpha, \beta)$  diminua. Consideramos apenas renumerações sucessivas da rede  $\beta$  que difiram entre si pela troca dos números de um par de nós. Este processo pode ser sumarizado pela Equação 4.12, onde observa-se, que os termos de energia presentes na Equação 4.9 são neste caso trocados pelo valor de  $\Delta\delta(\alpha, \beta) = \delta_1(\alpha, \beta) - \delta_2(\alpha, \beta)$ . Neste caso  $\delta_1(\alpha, \beta)$  e  $\delta_2(\alpha, \beta)$  representam dois valores de distâncias associadas às duas numerações adotadas para a rede  $\beta$  e não necessariamente são diferentes. Este procedimento, permite a procura do valor da distância entre duas redes  $\alpha$  e  $\beta$  de forma rápida, além de obter uma forma de conseguir diferenciar as duas redes. Repare que, o valor da distância mínima  $\delta^{min}(\alpha, \beta)$  será um indicador da diferença estrutural entre duas redes quaisquer. Cabe ressaltar que, a Equação 4.12 cumpre com as especificações necessárias para a execução do método de Metropolis.

$$P_{m \rightarrow n} = \begin{cases} e^{-\beta(\delta_1(\alpha, \beta) - \delta_2(\alpha, \beta))} & \delta_1(\alpha, \beta) - \delta_2(\alpha, \beta) > 0, \\ 1 & \delta_1(\alpha, \beta) - \delta_2(\alpha, \beta) \leq 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Como parte de uma explicação mais específica do algoritmo de Metropolis é apresentado o fluxograma do método na Figura 4.5.

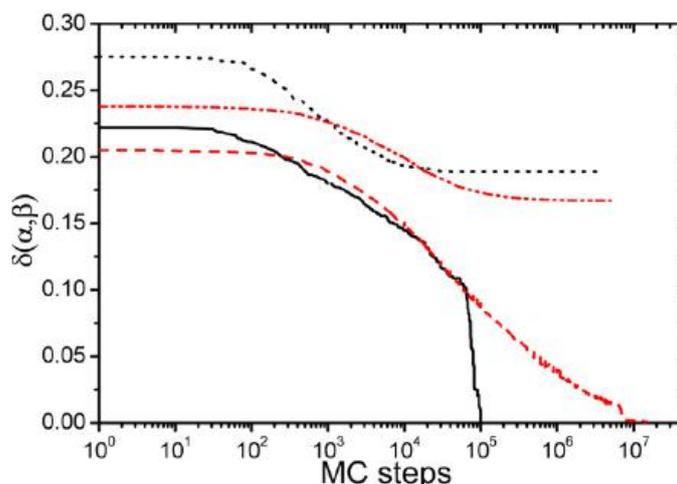
Repare que o fluxograma da Figura 4.5 começa com a escolha da semente para a geração de números aleatórios. Esta parte do algoritmo é de extrema importância já que se não fosse feito e a semente fora considerada fixa, então a geração de números aleatórios seriam iguais sempre que fosse utilizado a mesma semente. Ao considerar uma semente fixa se tira do método a parte de aleatoriedade na geração de números aleatórios, criando uma seqüência de números



**Figura 4.5** Fluxograma para o algoritmo Metropolis aplicado na procura da menor distância  $\delta^{min}(\alpha, \beta)$ , entre duas redes.

aleatórios repetitiva. Por outra parte, uma semente fixa pode ajudar de forma fácil em conseguir identificar um nó da rede que presente algum tipo de propriedade na renumeração de nós. A utilização da semente fixa vai ser utilizada neste trabalho (Capítulo 5) como parte fundamental na ajuda do reconhecimento de certos nós em redes Multiplex de duas camadas.

Com ajuda do método de Metropolis pode-se encontrar a mínima distância entre duas redes, sendo iguais estruturalmente se este valor é zero ou pelo contrario apresentaram certo grau de diferença estrutural se este valor é diferente de zero. Na Figura 4.6, se apresentam as simulações feitas no artigo [2], no qual apresenta a distância mínima encontrada para diferentes configurações de redes. Note que para o caso de duas redes que são de diferentes tipos, o valor da distância mínima não alcança a ser zero, mostrando assim a existência de diferenças estruturais entre as duas redes. Como é de esperar na Figura 4.6, para o caso de redes iguais, os valores das distâncias conseguem ser zero, depois de  $10^5$  passos do método, mostrando que sua natureza estrutural é igual.



**Figura 4.6** Gráfico do tempo de evolução de  $\delta(\alpha, \beta)$  versus passos em Monte Carlo. As curvas de "pontos" e "linha-ponto" correspondem foram feitas com duas redes, que são Apollonian network e Caley tree. Para os "pontos" o número de nós é de 124 e para "linha-ponto" 1096. As outras curvas correspondem a redes Apolonianas iguais, mas com numerações de nós diferentes inicialmente, também para 124 e 1096 nós.

## 4.6 PLANEJAMENTO DO PROBLEMA

Nesta secção, apresentamos de forma geral a construção dos Multiplex de duas camadas analisados na dissertação. No início, apresentamos desde uma visão geral as redes a tratar e classificamos elas com respeito ao jeito que foram geradas. Por último é mostrado de forma ilustrativa os dois tipos de Multiplex feitos com as diferentes combinações de redes, que se podem formar para posteriormente iniciar o desenvolvimento do trabalho.

### 4.6.1 Construção do Multiplex de duas Camadas

Para começar o estudo da difusão dos Multiplex de duas camadas tratados nesta dissertação, vamos a explicar os procedimentos adotados para gerar as estruturas Multiplex (ver Capítulo 3) neste trabalho. As redes tratadas no trabalho para a construção do Multiplex podem ser separadas por sua topologia em três classes gerais. Na primeira classificação, temos as redes que são geradas estatisticamente e topologicamente iguais. Ou seja, para os vértices  $i$  e sua contraparte na outra camada  $i'$  (ver Figura 4.7), suas conexões com outros vértices da mesma rede serão os mesmos, e portanto suas matrizes de adjacência e de vizinhança são iguais<sup>5</sup>. Este grupo de redes serão chamadas neste trabalho como redes totalmente iguais (**RTI**) e portanto sua distância inicial será de zero, isto por a igualdade em sua topologia e numeração de nós (ver Capítulo 4). A segunda classe de redes, são as redes geradas pelo mesmo processo estatístico,

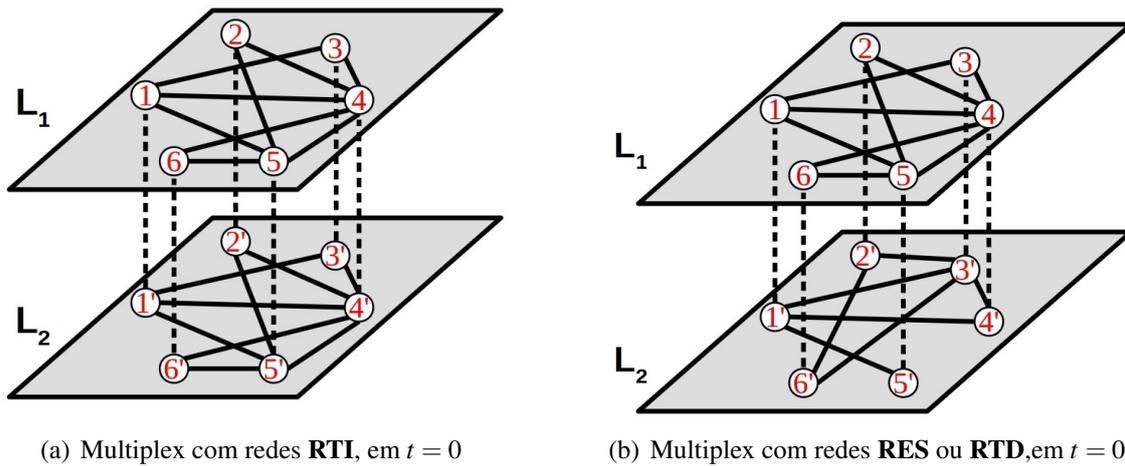
<sup>5</sup>Isto é devido ao fato que em um começo, ou seja antes da aplicação do método de Monte Carlo, as duas redes possuem igual numeração de nós.

mas cada uma corresponde a uma realização independente. Por isso, são topologicamente diferentes, o que se reflete em uma distância topológica inicial diferente de zero, e portanto suas matrizes de adjacência e vizinhança são diferentes. Estas redes serão chamadas neste trabalho como redes estatisticamente semelhantes (**RES**). Na ultima classe estão as redes as quais são geradas de forma estatisticamente diferentes, sendo também topologicamente diferentes entre si, e chamadas neste trabalho como redes totalmente desiguais (**RTD**).

Ao longo de todo o trabalho, utilizamos o procedimento de aproximação ou afastamento topológico entre redes, Baseado no método de Monte Carlo [6], mas com um fim inverso ao normal que pode ser constatado fazendo a comparação das Equações 4.12 e 4.13.

$$P_{m \rightarrow n} = \begin{cases} e^{-\beta(\delta_1(\alpha, \beta) - \delta_2(\alpha, \beta))} & \delta_1(\alpha, \beta) - \delta_2(\alpha, \beta) \leq 0, \\ 1 & \delta_1(\alpha, \beta) - \delta_2(\alpha, \beta) > 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Como consequência se consegue obter duas camadas distintas do Multiplex (ver Figura 4.8) para observar as mudanças em sua dinâmica espectral.



**Figura 4.7** Tipos de Multiplex

Portanto, a construção dos Multiplex de duas camadas neste trabalho vai a ser feitas de duas formas diferentes, que dependerão das diferentes combinações feitas com as três classes de redes já apresentadas (**RTI**, **RPI**, **RTD**).

1. Multiplexs compostos pelas redes **RTI** (ver Figura 4.7 (a)). Repare que, as duas camadas apresentam redes que possuem conexões idênticas com o resto dos vértices da mesma rede. Além disso, também existem conexões entre as duas camadas para vértices que sejam homólogos em sua numeração. Ou seja, o vértice  $i$  da rede da acima só pode ter conexão com o vértice  $i'$  da rede de embaixo.
2. Multiplex compostos pelas redes da segunda e terceira classe, **RPI** e **RTD** (ver Figura 4.7 (b)). Repare como as duas camadas possuem conexões diferentes, entre vértices da

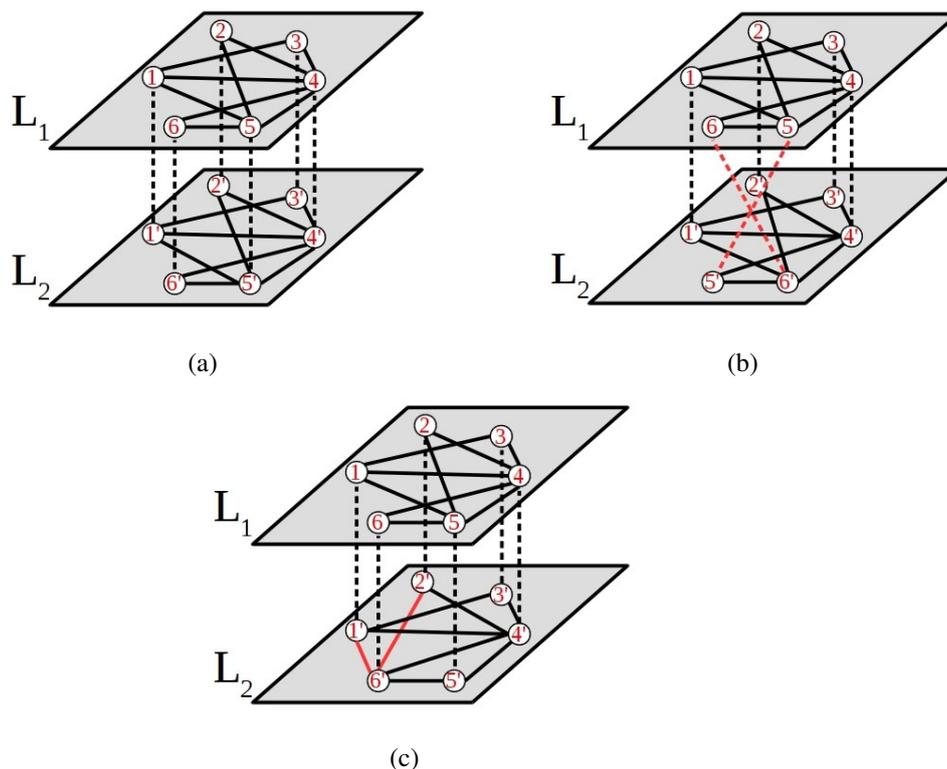
mesma camada e as conexões entre vértices homólogos entre camadas continua sendo iguais, como se espera da estrutura de um Multiplex (ver Capítulo 3 Secção 3.3).

#### 4.6.2 Afastamento Topológico por Renumeração de Nós

Para conseguir obter uma melhor ideia das consequências da renumeração de nós em um Multiplex, observamos a Figura 4.8, onde pode-se ver, um Multiplex formado por duas redes  $L_1$  e  $L_2$  da classe **RTI**. Repare que na Figura 4.8 se apresenta a renumeração dos nós  $5'$  e  $6'$  da rede  $L_2$ , e portanto sua nova distância entre redes será maior que zero ( $\delta(L_1, L_2) > 0$ ). Isto é uma consequência direta da mudança na topológica da rede  $L_2$  por causa da renumeração feita e espera-se que esta mudança contribua para aumentar a difusão no Multiplex. Todo isto nós leva, a definir agora o afastamento topológico entre duas redes quaisquer, como a distância final (depois a troca) menos a distância inicial (sem trocas). Mas a pergunta fica em saber como chegar a saber em quantos passos do método de Monte Carlo, consegue-se um afastamento topológico máximo e qual é a influência que este afastamento tem nos processos de difusão. A resposta à primeira pergunta, está em fazer um gráfico onde o afastamento entre as duas redes este como uma função dos passos de Monte Carlo e observar quando o afastamento consiga convergir a um valor constante, onde nenhuma renumeração de nós feita após consiga afastar mais as duas redes. Ou seja, suponha que se tem a distância máxima no  $i$ -ésimo passo ( $\delta^i(L_1, L_2) = \delta^{max}(L_1, L_2)$ ), então não existe nenhuma outra renumeração de nós que consiga aumentar ainda mais a distância entre as duas redes, invés disto todas serão menores ( $\delta^{max}(L_1, L_2) > \delta^{i+m}(L_1, L_2), \forall m = 1, 2, 3 \dots N!$ ).

Apos feita a renumeração de nós, que proporciona o afastamento topológico entre duas redes, se inicia o estudo da difusão no Multiplex. Repare que as redes que formam parte do Multiplex na Figura 4.8 sempre vão a ter o mesmo número de nós e arestas sem importar o afastamento topológico feito. Com este abordagem se mostrara que, quando temos duas redes reais interagindo entre elas tipo Multiplex (ver Capítulo 3), é possível reconfigurar a numeração dos nós de uma destas redes, para conseguir obter um melhor e mais eficiente processo de difusão. Neste aspecto é importante ressaltar que o processo de aumento de  $\delta(L_1, L_2)$  ocorre, na pratica, por uma mudança nas conexões na camada inferior ( $L_2$ ), conforme ao indicado na Figura 4.8c em cor vermelho. Com efeito, se tomamos o exemplo da rede de aeroportos (nós) e rotas (arestas) de duas companhias de aviação que podem definir um Multiplex de duas camadas como é mostrado de forma ilustrativa na Figura 4.8a, o efeito mostrado na Figura 4.8c é uma mudança das rotas (arestas) da companhia representada pela camada inferior ( $L_2$ ). Mas o importante é encontrar uma forma ou método não estocástico onde se saiba que com a mudança de alguns poucos nós se consiga rapidamente um grande afastamento entre redes e uma correspondente mudança de sua difusão e tempos de relaxamento. Novamente usando o modelo de rotas aéreas, mostramos que é possível se obter um aumento significativo da difusão com a mudança de algumas poucas rotas.

Outra coisa a ressaltar é o fato da mudança e consequências da manipulação da semente, que ajuda na geração dos números aleatórios no método de Monte Carlo (ver Figura 4.5). A semente com a qual o algoritmo inicia, foi mudada de um caráter aleatório a um caráter fixo, e



**Figura 4.8** Multiplex de duas camadas, onde foi trocado por renumeração de nós os nós 5' e 6'. Na Figura (b), foi permutada a numeração dos nós 5' e 6', que agora não se encontram mais imediatamente embaixo dos nós 5 e 6. No entanto, as conexões entre o nó 5 e o novo nó 5', bem como entre o nó 6 e o novo nó 6' devem ser mantidas. Para que os novos nós 5' e 6' fiquem imediatamente abaixo dos nós 5 e 6, a posição entre eles foi também trocada na Figura c, mas neste caso todas as conexões em  $L_2$  entre os nós 5' e 6' foram trocadas entre si.

o usuário pode escolher a vontade seu valor inicial. Isto pela ideia de ter um melhor e maior gerenciamento dos resultados obtidos pelo método de Monte Carlo. Assim também, será mais fácil a identificação dos nós que, sendo renumerados, fazem que o tempo de difusão aconteça de forma mais eficiente para uma certa exigência<sup>6</sup>. Em conclusão o afastamento topológico conseguido pela renumeração de nós, pode chegar a ser uma ferramenta útil no controle da difusão, além de suas aplicações não requerem agregar nós ou arestas novas em uma das redes.

<sup>6</sup>Esta exigência pode ser um maior tempo de relaxamento ou menor, por exemplo no caso de duas redes reais onde uma doença se transmite, ou no caso do tráfego aéreo entre aeroportos.

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os processos de difusão das redes Multiplex de duas camadas apresentada no Capítulo 3, junto ao conceito de distância [2] entre redes apresentado no Capítulo 4, formam a base da análise neste capítulo da dissertação. Portanto, como primeira medida da análise de difusão em Multiplex de duas camadas, serão abordadas diferentes tipos de configurações de Multiplex, para sua posterior análise e dependeram de dois fatores de classificação apresentados nos Capítulos 2 e 4.

Basicamente as redes conexas que formam os Multiplex deste estudo podem ser, aleatórias, de pequeno mundo ou livre de escala (ver Capítulo 2) e ao mesmo tempo possuir outra classificação mais, apresentadas no final do Capítulo 4, baseadas em características topológicas e estatísticas (**RTI**, **RES** e **RTD**). Porém pode-se ter redes aleatórias, de pequeno mundo ou livres de escala que sejam **RTI**, **RES** e **RTD**. Isto permite, a obtenção de diversas combinações para Multiplex de duas camadas e posteriormente analisar o comportamento do espectro de difusão, querendo assim encontrar novas propriedades de difusão específicas para redes Multiplex ou o melhoramento dos problemas difusivos válidos no mundo real.

### 5.1 MULTIPLEXS FORMADOS POR REDES RTI

#### 5.1.1 Redes Aleatórias

Começamos o estudo, com um Multiplex de duas camadas, formado por duas redes **RTI** aleatórias ( $\dot{G}_{n,p}^{ER}$ )<sup>1</sup> para 100, 250, 500, 750, 1000 nós. Em seguida, para cada Multiplex, é adotado o processo de afastamento topológico pela renumeração de vértices, mediante o método de

---

<sup>1</sup>O ponto acima da letra G, significa que são redes totalmente idênticas **RTI**, além de aleatórias.

Monte Carlo (ver Capítulo 4). Isto leva a uma forma estrutural do Multiplex qualitativamente semelhante àquela apresentada na Figura 4.8 no Capítulo 4, onde foi feita a renumeração de nós para os nós  $5'$  e  $6'$ , correspondentes com a rede  $L_2$  que está embaixo. Este processo foi repetido diversas vezes para as redes do Multiplex, observando as mudanças que aconteceram na dinâmica de difusão. Mostramos em seguida os resultados obtidos para os Multiplexs formados por diversas redes **ER**.

- **Redes Aleatórias  $p=0.1$ :** Na Figura 5.1 traçamos a dependência dos autovalores  $\lambda_2^{SL}$  do Multiplex de duas camadas <sup>2</sup> formado pelas duas redes  $\dot{G}_{500,0.1}^{ER}$  com relação ao coeficiente de difusão inter-camadas  $D_x$ . Além de  $\lambda_2^{SL}$ , o segundo menor autovalor da matriz supra-laplaciana, e responsável por controlar o processo de difusão inter-redes, por sua relação inversa com o tempo de relaxamento (ver Capítulo 3 Secção 3.3.3), traçamos também, os autovalores  $\lambda_2(L_1)$  para a camada 1,  $\lambda_2(L_2)$  para a camada 2, e o autovalor  $\lambda_2(\bar{L})$ , da matriz  $\bar{L}$  que corresponde a uma representação matricial de uma rede formada pela superposição de duas redes  $\bar{L} = (L_1 + L_2)/2$ , e a grandeza  $\lambda_D = 2D_x$

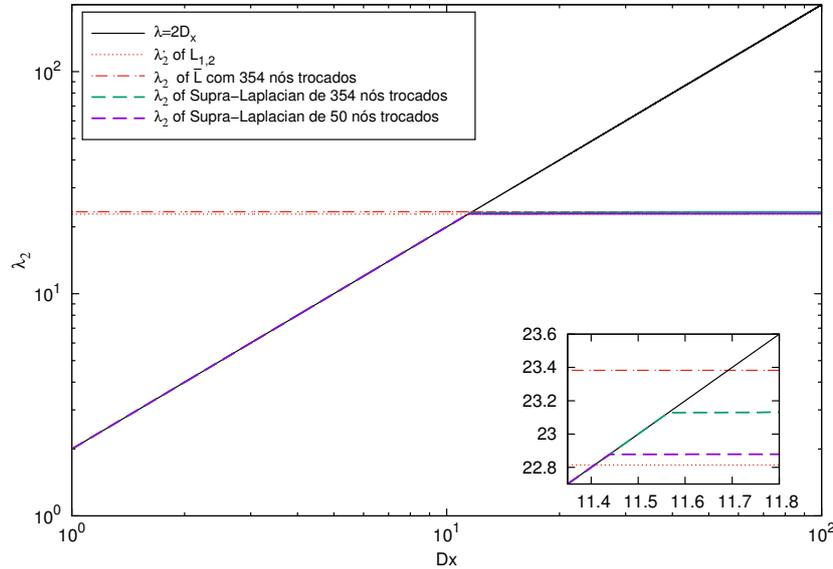
Os autovalores  $\lambda_2(L_1)$ ,  $\lambda_2(L_2)$  e  $\lambda_2(\bar{L})$  não dependem de  $D_x$ , e aparecem como linhas horizontais. Como no caso das **RTI** as duas camadas são exatamente iguais, mesmo após do processo de renumeração, é evidente que  $\lambda_2(L_1) = \lambda_2(L_2) = \lambda_2'(L_{1,2})$ . Já para a matriz  $\bar{L}$ , que é idêntica a  $L_1$  e  $L_2$  apenas antes do começo do processo de renumeração, isto não se verifica. Após a troca de apenas um par de nós da rede 2, temos que  $L_2 \neq \bar{L} \neq L_1$ , de tal forma que,  $\lambda_2(\bar{L}) \neq \lambda_2(L_1) = \lambda_2(L_2) = \lambda_2'(L_{1,2})$ . Isto fica evidenciado pelas linhas horizontais mostradas na Figura 5.1. A distância entre  $L_1$  e  $L_2$  depende do número de trocas efetivadas e de quais nós foram permutados no processo de renumeração da rede 2.

Por outro lado, em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2^{SL}$ , correspondente a 50 e 354 vértices renumerados ou trocados, como parte da rotina de Monte Carlo para afastar uma rede da outra (ver Capítulo 4). É importante ressaltar que, ao longo desta discussão, nos referimos a quantidade de vértices renumerados utilizando sempre uma semente fixa para o gerador de números aleatórios no método de Monte Carlo (ver Figura 4.5). Caso usemos outra semente, os dados qualitativos são mantidos, embora sejam quantitativamente diversos.

Nota-se que qualquer mudança em  $\lambda_2^{LS}$  para um determinado valor de difusão inter-redes  $D_x$  significará um menor ou maior tempo no processo de difusão do Multiplex. É por isso que o valor  $\lambda_2^{SL}$  é de fundamental importância para este estudo. Outro aspecto importante a se notar é que os valores de  $\lambda_2(L_1)$  e  $\lambda_2(L_2)$  para as redes tem o mesmo valor 22,814 na Figura 5.1, comprovando de fato que as redes que formam o Multiplex são **RTI**. Não obstante, com o afastamento topológico feito pela renumeração de vértices, espera-se encontrar novas propriedades no processo de difusão do Multiplex de duas ca-

<sup>2</sup>Chamaremos em adiante de  $\lambda_n^{SL}$  aos autovalores do supra-laplaciano do Multiplex de duas camadas neste trabalho.

mas. Para este caso em questão, fizeram-se diversos afastamentos <sup>3</sup>.



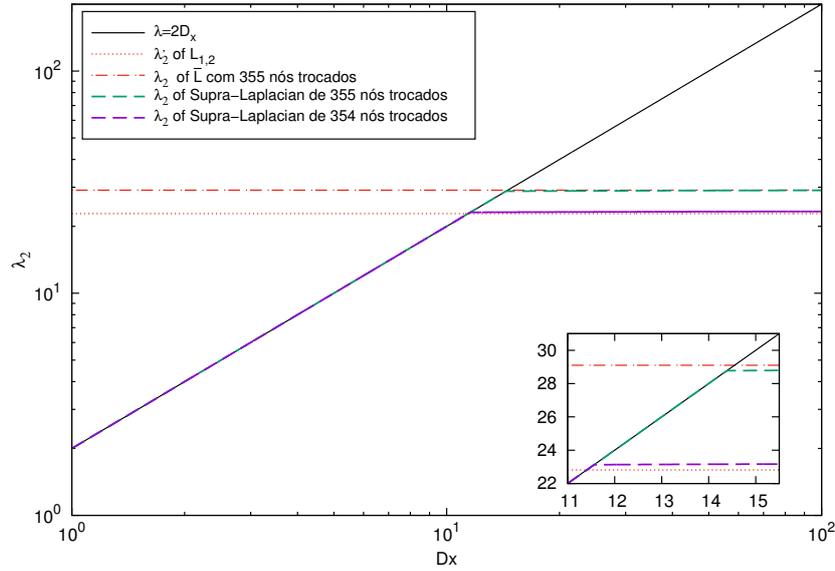
**Figura 5.1** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.1}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 354 e 50 nós renumerados pelo método de Monte Carlo. Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumenta.

Como os valores das diferentes grandezas na Figura 5.1 são muito próximos, torna-se difícil discernir os diferentes valores dos autovalores  $\lambda_2$ . É por isso que no lado direito inferior dela Figura 5.1, está uma parte com um zoom, permitindo identificar as diferentes grandezas para um melhor análises. Note-se que para o segundo menor autovalor  $\lambda_2(\bar{L})$  da matriz  $(\bar{L})$ , após 354 nós renumerado, temos um valor de 23,383 e como é de esperar os valores  $\lambda_2^{SL}$  estão entre  $\lambda_2'(L_{1,2})$  e  $\lambda_2(\bar{L})$  [63].

Repare que na Figura 5.1 mostra-se, a comparação entre 50 e 354 passos, mas o espectro não apresenta uma mudança significativa em sua dinâmica. No entanto, quando chegamos ao passo 355 a dinâmica espectral mostra uma mudança perceptível e significativa, o que é visível na Figura 5.2. Em primeiro lugar se percebe que  $\lambda_2(\bar{L})$  para 355 nós mudados se afastou bastante do valor  $\lambda(L_{1,2})$ . Em seguida, notamos também uma mudança no comportamento do autovalor  $\lambda_2^{SL}$  com relação à  $D_x$ . Em cor roxo está o  $\lambda_2^{SL}$  para 354 passos, e em cor verde o  $\lambda_2^{SL}$  para 355 passos de afastamento entre as duas redes pelo método de Monte Carlo.

Nota-se o prolongamento na Figura 5.2 de sua parte linear, referente aos valores de  $2D_x$  (repare que na Figura 5.2 a mudança em cor verde vai convergir muito mais rápido). Ou

<sup>3</sup>Os afastamentos feitos estão determinados por o números de passos no método de Monte Carlo.



**Figura 5.2** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.1}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 355 y 354 nós reenumerados pelo método de Monte Carlo. Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumenta.

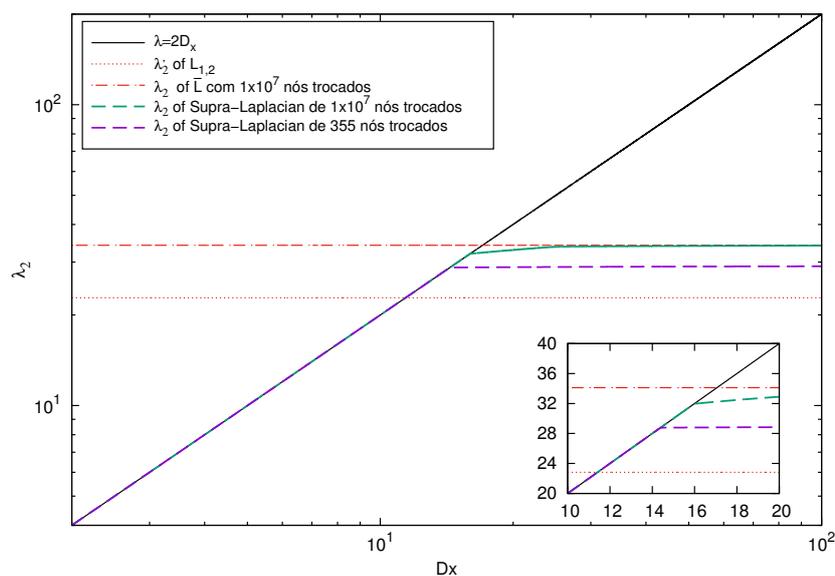
seja, para valores maiores de difusão inter-redes o tempo de relaxação vai ser menor pela relação inversa que existe ( $\tau \sim 1/\lambda_2$ ). Isto significa que antes da mudança pela remuneração, para passos menores a 355, o tempo de relaxamento do Multiplex no intervalo de  $10 < D_x < 16$  é mais devagar, devido a que neste intervalo o espectro já acabou sua parte linear.

Comprova-se com uma inspeção dos valores de difusão inter-redes nas Figuras 5.1 e 5.2, que existe um vértice especial que faz acontecer uma mudança brusca. Além disso, a Figura 5.3 mostra que foi possível obter afastamentos maiores entre  $\lambda'_2(L_{1,2})$  e  $\lambda_2(\bar{L})$ , e que  $\lambda_2^{SL}$  ainda pode continuar prolongando sua parte linear, com a diferença que foi preciso  $1 \times 10^7$  passos para conseguir este pequeno salto no espectro (ver Tabela 5.1). Mas como saber se  $1 \times 10^7$  passos é o afastamento topológico máximo feito pelo método de Monte Carlo? Ou pelo contrario se continuaremos fazendo um maior número de passos nas duas redes haverá ou não ainda afastamento entre elas? As respostas a isto são apresentadas pelo método de Monte Carlo e portanto é possível ter um gráfico de passos versus o afastamento topológico, onde se mostra, o momento no qual acontece o máximo afastamento topológico (ver Figura 5.4).

Na Figura 5.4, mostra-se como a medida que os passos são feitos pelo método de Monte Carlo, o afastamento vai aumentando ate convergir, o que indica o máximo de passos no método para conseguir o afastamento máximo. Num começo as duas redes tem afastamento igual a zero indicando de novo o fato que são **RTI**. Repare que a curva começa à

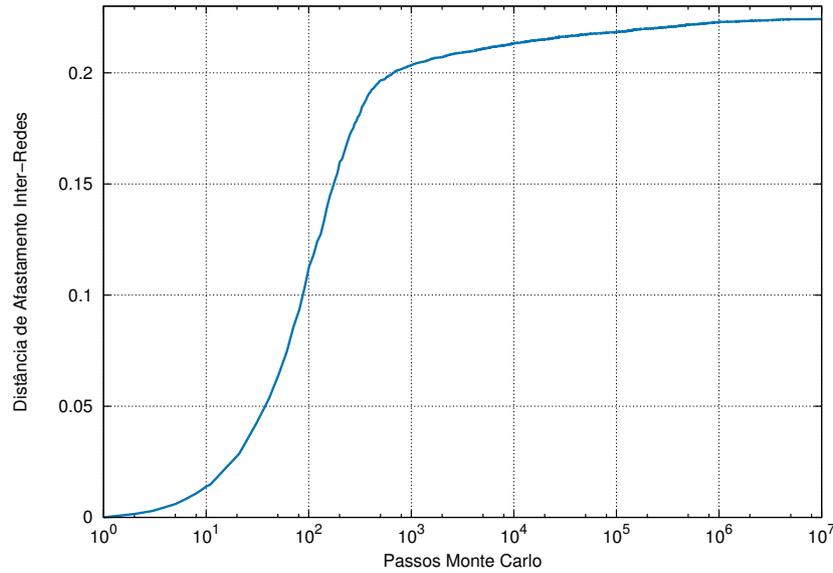
convergir quando os passos são maiores que  $1 \times 10^7$  e por isto é que foi tomado como caso extremo ou de máximo afastamento entre redes.

Concluimos então, que existe um grupo de vértices especiais que fazem acontecer um grande afastamento juntamente com o prolongamento da parte linear no espectro do Multiplex entre  $\lambda_2(L_{1,2})$  e  $\lambda_2(\bar{L})$ , e para vértices fora deste grupo é claro que existe uma maior rigidez às mudanças no espectro. Estes dois grupos de vértices podem com certeza ter aplicação na construção topológica como os modelos para: "Internet AS graph" ou alguns modelos epidêmicos [23].



**Figura 5.3** Comparação dos espectros de 355 (em cor roxo) nós renumerados e o caso de máximo afastamento topológico inter-redes (em cor verde) de  $1 \times 10^7$  nós renumerados em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$ .

Para ter maior certeza desta propriedade, foi feito o mesmo tratamento, para outros tipos de Multiplexs compostos com redes **RTI**, com diversos números de vértices e probabilidades, tendo sido obtido sempre o mesmo comportamento. Isto vai ser desenvolvido em seguida, onde também mostraremos uma forma para a procura dos diferentes vértices que permitem a manipulação da difusão no Multiplex.



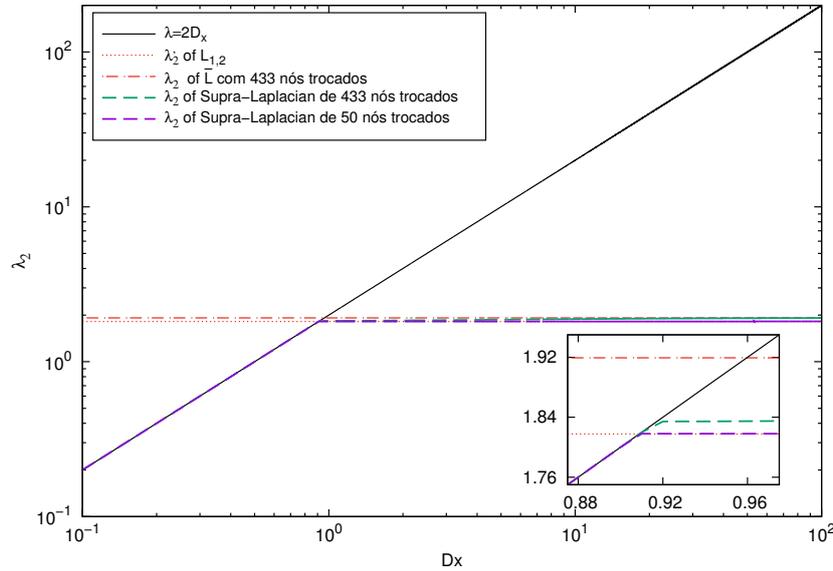
**Figura 5.4** Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo.

- **Redes Aleatórias  $p=0.01$ :** Da mesma forma como foi tratado no caso anterior, agora apresentamos um Multiplex composto pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$ . Portanto, tentamos verificar se as propriedades já apresentadas também se manifestam em outros Multiplexs com diversas configurações. Começamos como no caso anterior, com uma comparação entre os diversos afastamento feitos pelo método do Monte Carlo, tentando conferir assim, como se comporta a dinâmica espectral e o afastamento entre redes feito. Nas figuras em seguida serão utilizados os mesmos esquemas para apresentar os resultados feitos na seção anterior, também trabalhando com uma semente fixa para a geração de números aleatórios.

Na figura 5.5 pode-se ver que entre 50 e 433 passos de afastamento feito, o espectro não sofre mudanças significativas (como no caso anterior  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$  na Figura 5.1), mostrando também assim certa rigidez ante a renumeração de certo conjunto de vértices em especial. Mas quando acontece a renumeração de certos vértices apresenta-se da mesma forma que no caso anterior (ver Figura 5.2) uma mudança significativa do espectro e de novo Como no caso anterior, parece existir um certo conjunto de vértices que ocasionam uma mudança significativamente notável no espectro (ver Figura 5.6). Neste caso pode-se ver de novo,  $\lambda_2(\bar{L})$  sofre um aumento significativo, que é acompanhado pelo aumento da parte linear do espectro, só com a troca de um vértice em especial quando passa do passo 433 ao 434. Confirmando assim as suspeitas sobre a existência de um conjunto de vértices que ocasionam a prolongação ou não da parte linear na difusão e tempos menores de relaxamento do Multiplex.

É importante notar que, o importante não é o número do passos no método de Monte Carlo. O verdadeiramente importante é identificar quais vértices são trocados ocasio-

nando as mudanças no espectro, porque este conjunto de poucos vértices podem controlar a difusão e também o tempo de relaxamento. É por isto a importância que tem este conjunto de vértices com esta propriedade e sua procura torna-se uma parte importante deste trabalho.



**Figura 5.5** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 433 y 50 nós renumerados pelo método de Monte Carlo.

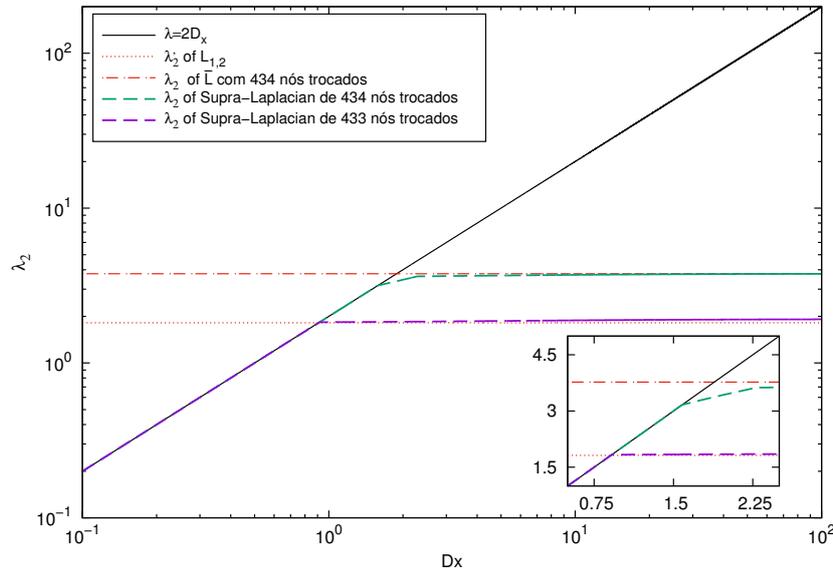
Para o caso extremo de máximo afastamento a escolha foi feita da mesma forma como no caso anterior <sup>4</sup> (ver Figura 5.7). Repare que além do afastamento inter-redes feito, a parte linear do espectro continua sem mostrar uma mudança perceptível ainda depois de ter um máximo afastamento entre redes (ver Figura 5.8).

O fato que as redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$ , precisem um menor número de passos para o afastamento topológico máximo, pode ser devido à natureza da rede já que por causa de sua probabilidade ela apresenta um menor número de conexões e porem o afastamento topológico precisa de um menor número de passos na renumeração de nós, ou seja, o afastamento topológico máximo para a rede  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$  em comparação com a rede  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$  é maior e o número de passos no Monte Carlo para isto é menor.

Para maior comprovação dos resultados obtidos até agora, apresentamos na Tabela 5.1 uma compilação de diversas provas de afastamento feitas para diferentes configurações de Multiplexs, procurando encontrar os mesmos resultados já obtidos e reafirmando a existência de um conjunto de vértices que permitem manipular o processo de difusão, e mostrar que os Multiplex formados pelas redes aleatórias **RTI**, não apresentam uma

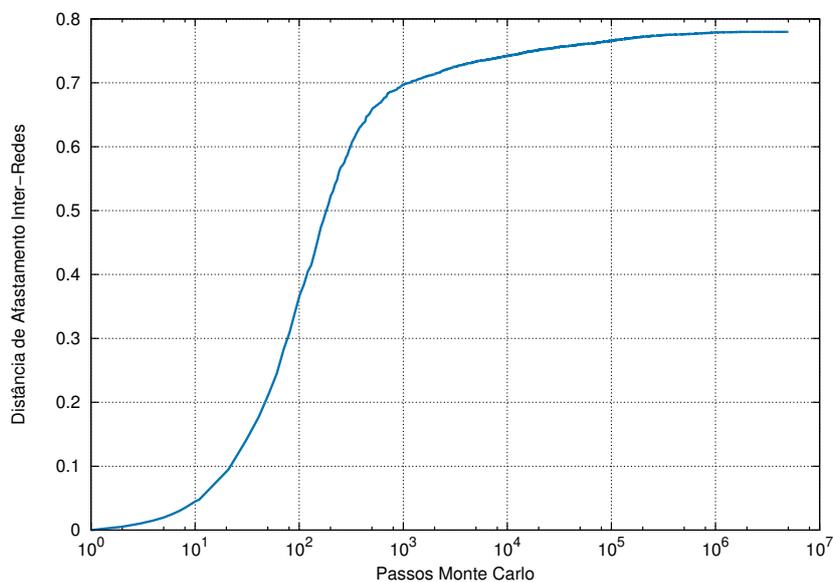
<sup>4</sup>Repare que neste caso o máximo afastamento preciso de um menor número de passos  $5 \times 10^6$

dependência respeito a seu tamanho em este tipo de processos de análises difusivos. Na Tabela 5.1 foram escolhidas para formar os Multiplex, redes de 100, 250, 750 e 1000 nós com probabilidades de 0.5 e 0.05. Na Tabela 5.1 mostra-se três colunas, na primeira o tipo de configuração do Multiplex, na segunda o número de passos pelo Monte Carlo na numeração de nós e na terceira se mostra a diferença porcentual dos resultados obtidos mediante uma comparação das diferenças percentuais entre os valores  $\lambda_2(\bar{L})$ , já que quando conseguimos um aumento no segundo menor autovalor da matriz  $\bar{L}$  obtemos como consequência um salto da parte linear no espectro do Multiplex. Repare que as porcentagens maiores estão ressaltados com cor verde e são aqueles que tem maior impacto no espectro e representam um salto no espectro da mesma forma como já foi mostrado nos gráficos anteriores. Assegurando assim a existência de um grupo de vértices especiais que ocasionam uma mudança significativa no espectro e outro grupo com mudanças menores ou nenhuma. Permitindo pensar em conseguir selecionar e agrupar estes vértices para uma melhor manipulação do processo de difusão.

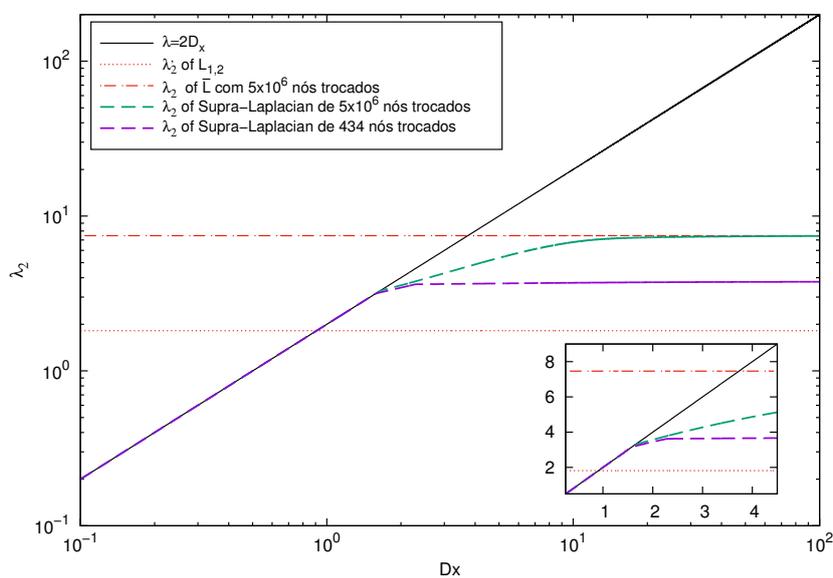


**Figura 5.6** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde e roxo estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 434 y 433 nós renumerados pelo método de Monte Carlo.

Com todos os resultados apresentados e as análises feitas até agora, é claro que se fosse possível identificar os vértices que tem a propriedade de acrescentar ou diminuir o autovalor  $\lambda_2(\bar{L})$  com só a troca de um par de vértices, teríamos uma forma fácil de controlar a vontade o tempo de relaxação na difusão do Multiplex de duas camadas **RTI**. Por isso na seguinte secção, vai-se mostrar os passos feitos para a obtenção dos pares de vértices que ajudam a controlar os processos difusivos, sem a necessidade do métodos estocásticos como Monte Carlo, o que faz que seja mas rápido o processo de reconfiguração de uma rede e assim controlar a difusão.



**Figura 5.7** Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.01}^{ER}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo.



**Figura 5.8** Comparação dos espectros de 434 (em cor roxo) nós renumerados e o caso de máximo afastamento topológico inter-redes (em cor verde) de  $5 \times 10^6$  nós renumerados em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.01}^{ER}$ .

Tipos de Redes	Número de passos	Diferença percentual
$\dot{G}_{100,0.5}^{ER}$	2 – 10	0.3
	10 – 20	8.15
	20 – 50	5
	50 – $1 \times 10^4$	3.4
	$1 \times 10^4$ – $1 \times 10^7$	0.52
$\dot{G}_{100,0.05}^{ER}$	50 – 200	10.5
	200 – 400	38.7
	400 – $1 \times 10^7$	0.3
$\dot{G}_{250,0.5}^{ER}$	10 – 100	0.7
	100 – 200	10.6
	200 – $1 \times 10^4$	4.6
$\dot{G}_{250,0.05}^{ER}$	10 – 50	0.1
	50 – 200	14.2
	200 – 400	15.9
	400 – 500	6
	500 – $1 \times 10^4$	5.3
	$1 \times 10^4$ – $1 \times 10^6$	0.2
$\dot{G}_{500,0.1}^{ER}$	50 – 354	1,13
	354 – 355	19,16
	355 – $1 \times 10^6$	10,5
$\dot{G}_{500,0.01}^{ER}$	50 – 433	1,1
	433 – 434	42,41
	434 – $1 \times 10^6$	3,7
$\dot{G}_{750,0.5}^{ER}$	50 – 1000	0,83
	1000 – 2000	3.1
	2000 – $1 \times 10^6$	0,4
$\dot{G}_{750,0.05}^{ER}$	50 – 500	5,53
	500 – 1000	13,1
	1000 – 10000	10.1
	10000 – $1 \times 10^6$	2,5

**Tabela 5.1** Comparação entre o número de passos do método de Monte Carlo e a diferença percentual dos saltos apresentados em diferentes configurações de Multiplex **RTI**. Em cor amarelo se resalta os maiores valores percentuais para cada Multiplex **RTI**.

### pares de nós que controlam a difusão em Multiplex $\dot{G}_{n,\rho}^{ER}$

Como foi apresentado nas Figuras 5.2 e 5.6, o espectro do Multiplex apresenta mudanças significativas quando são renumerados alguns pares de nós. Portanto, nesta secção se apresentara os passos feitos para a identificação e verificação dos nós que possuem a propriedade de mudar o espectro. Por sua importância e suas propriedades estes nós serão chamados como nós principais de difusão (**NPD**). A obtenção de um conjunto de **NPD** que apresentem a propriedades de controlar a difusão com só sua renumeração, é de vital importância em sistemas Multiplex onde não é factível outro tipo de medidas tais como a criação de novos nós e arestas nas redes que formam o Multiplex ou até a a mudança dos coeficientes de difusão intra-redes ou inter-redes. Portanto, se por exemplo existira um Multiplex formado por duas empresas de aeroportos, como se falou na introdução, é melhor para o problema de transporte ou difusão uma solução a curto prazo focada nas facilidades das empresas, onde a reorganização dos voos (arestas) <sup>5</sup> é mais fácil que a criação de novos aeroportos e mais destinos, porque para isto precisara de mais infraestrutura e porém não ficaria como solução no curto prazo.

Para procurar o conjunto de pares de **NPD** que mudam o espectro, foi preciso fazer uma lista de nós trocados a cada passo do método de Monte Carlo. Mas nesta lista acontecia um problema, e era que a mudança do espectro acontecia sempre em diferentes números de passos do método de Monte Carlo, mostrando o que parecer uma certa aleatoriedade e dificultando assim a identificação dos **NPD**. Todo isto acontece, pela natureza aleatória do método de Monte Carlo [6], nascida da aleatoriedade da semente criadora de números aleatórios. Então para soluçar este problema sem afetar de maneira direta o objetivo principal do método, que consiste em afastar as redes pela renumeração de nós, foi preciso controlar o valor da semente que gerar os números aleatórios do processo e assim a geração do números aleatórios foi controlada também. Isto trouxe como consequência que, em certas oportunidades o método precise de mais tempo computacional para afastar duas redes e conseguir trocar os **NPD** que mudam o espectro do Multiplex, ou seja, o gasto computacional pode aumentar em alguns casos pela perda de aleatoriedade do método de Monte Carlo, mas em outros casos pode ser até mais rápido. Como consequência desta perda de aleatoriedade e mais tempo computacional o método troca sempre em forma sequencial os mesmo pares de nós, portanto a mudança do espectro começo a acontecer sempre no mesmo passo do método, como é evidenciado nas Figuras 5.2 e 5.6.

Com a nova configuração fixa da semente geradora de números aleatórios, conseguiu-se identificar que a grande variação no espectro estava sempre associado à troca de um par de vértices, ou mesmo de um vértice específico com alguns outros dentro do conjunto limitado. Este fato leva à própria conceituação de **NPD**. O passo seguinte foi verificar se estes pares de nós (que se acham são **NPD**), podem ser parte de alguma propriedade das redes complexas apresentadas no Capítulo 2. Benefícios trazidos pelo fato que os pares de **NPD** sejam parte de algum tipo de propriedade são vários, por exemplo a facilidade na hora da identificação quando temos redes que são muito grandes, onde o método de Monte Carlo pode acarrear muito tempo computacional.

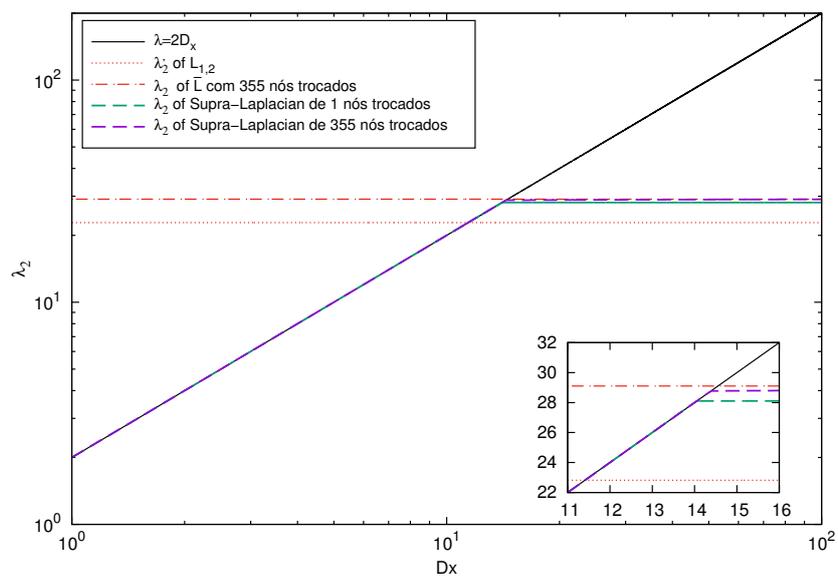
<sup>5</sup>Note-se que nos referimos a reorganização de arestas quando se faz a renumeração de nós como na Figura 4.8 onde aparente mente se observa isto quando são renumerados os nós, mas na realidade as redes ainda tem topologias iguais.

cional para a manipulação da difusão. Ou seja, o gasto computacional poderia ser menor e a manipulação da difusão por causa de uma rápida identificação dos **NPD**. Por outro lado, a descoberta destes **NPD** em redes Multiplex, pode abrir de fato a adoção deste tipo de modelo Multiplex na hora da criação de certos tipos de redes como por exemplo redes de transporte que precisam muitas vezes de tempos menores.

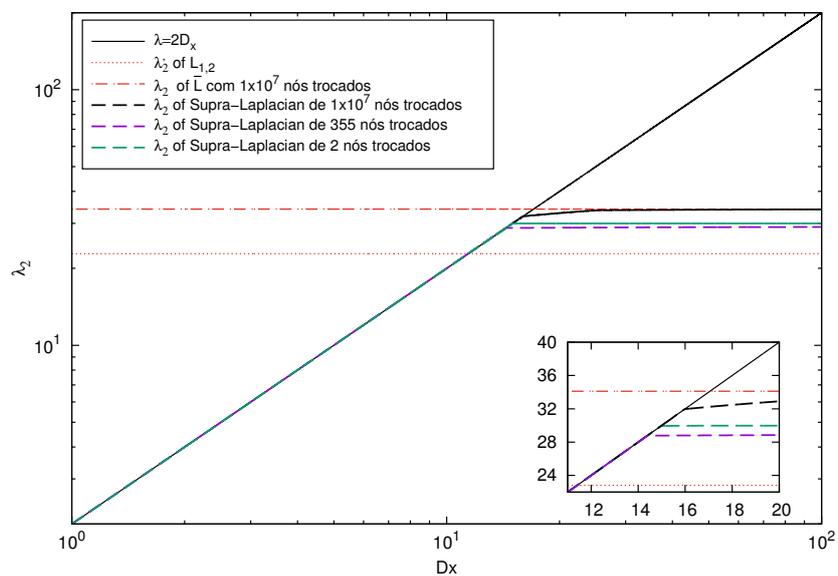
Na procura de uma propriedade que encaixe melhor com os **NPD**, se descobriu que, estes pares de nós coincidiam com os nós que possuiriam a maior distância global da rede  $d_{i,j}$ . Já com o conhecimento desta informação sobre **NPD**, se procedeu com a verificação, ou seja quando for realizada uma renumeração de nós (onde os nós envolvidos sejam exclusivamente **NPD**), deve-se então perceber uma mudança no espectro de difusão do Multiplex do mesmo jeito como nas Figuras 5.2 e 5.6, sem precisar utilizar um gasto computacional maior como é feito pelo método de Monte Carlo.

Com a lista de nós com maior distância global da rede em ordem decrescente e feita por meio do calculo das distâncias entre nós ( $d_{i,j}$ ), se procuro obter resultados trocando os vértices com maior distância global da rede com os de menor. Os resultados obtidos foram satisfatórios e apresentados seguidamente nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12. Repare que as Figuras 5.9 e 5.10, correspondem ao Multiplex formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.1}^{ER}$ , e as Figuras 5.11 e 5.12 ao Multiplex formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.01}^{ER}$ . O formato utilizado nas figuras é neste caso focado com a comparação, é por isso que em cor verde se apresenta a renumeração feita tão só trocando o nó com maior distância global da rede (**NPD**), e em cor roxo estão a renumeração de nós feita pelo método de Monte Carlo (ver Figuras 5.2 e 5.6). Por outro lado em cor preto, também se apresenta a comparação quando se efetua a renumeração de dois **NPD** e o máximo afastamento possível apresentado nas Figuras 5.3 e 5.8. Note-se que a proximidade dos resultados é apreciável, mostrando de forma fácil e rápida como pode-se diminuir o tempo de relaxamento do Multiplex.

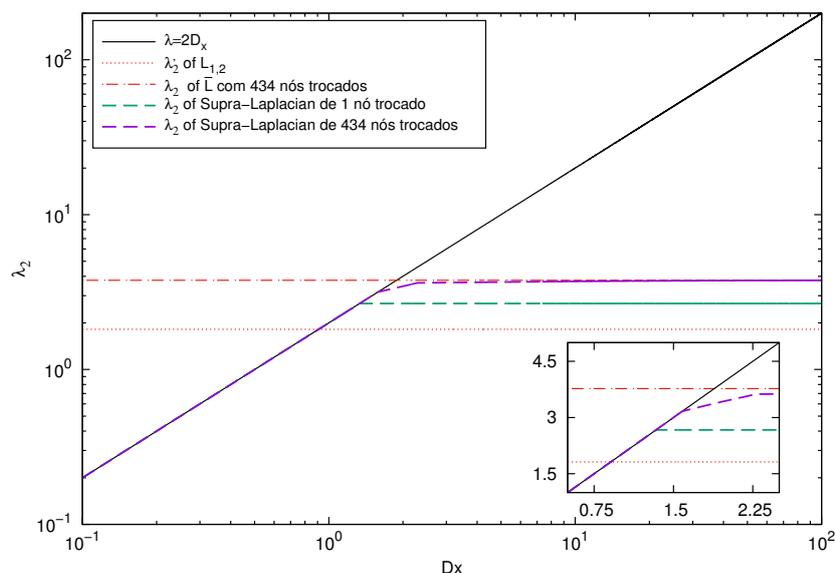
Nas Figuras 5.9 e 5.10 correspondentes ao Multiplex formado pelas redes  $\dot{G}_{500,0.1}^{ER}$  é evidente a proximidade dos autovalores de cor verde e roxo (sendo tão só uma pequena diferença percentual de 1,75%). Demonstra-se assim de maneira contundente, o resultado surpreendente da manipulação do espectro de difusão mediante a renumeração de um só vértice (**NPD**). A pequena diferença existente entre os autovalores presentes nas Figuras 5.9 e 5.10 é dada por consequência dos pequenos aportes dos outros nós da rede que não são **NPD**. Por outra parte respeito à Figura 5.10, temos o segundo autovalor de dois **NPD** renumerados (em cor verde) com os autovalores correspondentes a 355 e  $1 \times 10^7$  nós renumerados (em cores roxo e preto) pelo método de Monte Carlo. Repare que nesta vez o segundo autovalor dos **NPD** sobrepassa ao 355 nós renumerados (com uma diferença percentual de 4,4%) e além disto, fica muito perto do caso de  $1 \times 10^7$  renumerados (a diferença percentual é de 6.4%). Isto reafirma o fato da manipulação da difusão mediante a renumeração de um o mais **NPD**.



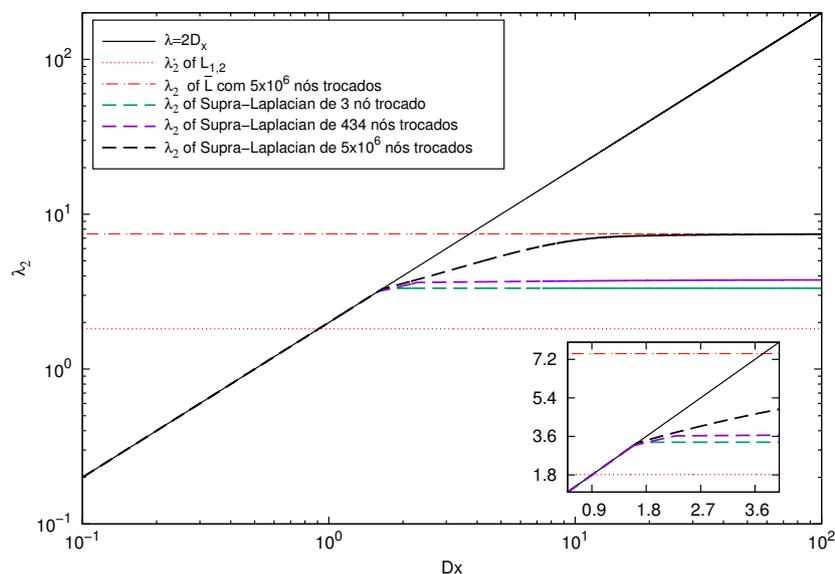
**Figura 5.9** Comparação dos espectros de 355 (em cor roxo) nós renumerados e a troca do vértice com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$ .



**Figura 5.10** Comparação dos espectros de 355 (em cor roxo) nós renumerados,  $1 \times 10^7$  (em cor preto) nós renumerados e a troca de dois dos vértices com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.1}^{ER}$ .



**Figura 5.11** Comparação dos espectros de 434 (em cor roxo) nós reenumerados e a troca do vértice com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$



**Figura 5.12** Comparação dos espectros de 434 (em cor roxo) nós reenumerados,  $5 \times 10^6$  (em cor preto) nós reenumerados e a troca de três dos vértices com maior afastamento na rede (em cor verde) em função do coeficiente de difusão  $D_x$ , para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$ .

Para o Multiplex  $\hat{G}_{500,0.01}^{ER}$ , apresentamos as Figuras 5.11 e 5.12, onde foi feito o mesmo tratamento e comparações já mencionadas. Repare que na Figura 5.11 acontece de novo o mesmo

fato, com tão só a troca de um vértice o espectro fica quase igual (com uma diferença percentual de 15.8%) que no caso de 434 nós renumerados pelo Monte Carlo. Além disso, apresenta-se uma notória diferença na convergência dos dois autovalores, possivelmente pela causa da renumeração dos outros nós da rede. Por outra parte na Figura 5.12 foi feita a renumeração de três **NPD** conseguindo ultrapassar o autovalor (em 2.5%) correspondente a 434 nós renumerados com Monte Carlo e para a comparação com o caso extremo nesta vez a diferença percentual foi de 1.22%, mostrando assim o que espera-se que aconteça quando renumeramos **NPD**.

### 5.1.2 Redes Livres de escala

Continuando com a análises de Multiplexs compostos por redes **RTI**, agora apresentamos o estudo da renumeração de nós para as redes livres de escala já mostradas, com suas principais características (ver Capítulo 2). A criação das redes livres de escala não apresenta um crescimento puramente aleatório (ver Capítulo 2), mais um crescimento aleatório seletivo obedecendo certa probabilidade influenciada pelo grau de cada nó (ver Equação 2.19) e obedecendo uma lei de potencias (ver Secção 2.3.3). Deste modo as redes livres de escala tem uma estrutura dominada principalmente por um número relativamente pequeno de nós designados como polos ou hubs <sup>6</sup>. Além disso, apresentam uma alta resistência a estrutural quando são tirados nós da rede (de forma aleatória) permitindo continuar os processos ou propriedades que apresentam. Por tal motivo, como um primeiro pensamento que pode existir uma resistência dos processos difusivos ante a renumeração de nós.

A pretensão nesta secção é, observar o comportamento espectral ante a renumeração de nós pelo método de Monte Carlo de um Multiplex, formado por duas redes livres de escala (**RTI**) de 100, 367, 1000 nós. Os resultados em seguida serão apresentados da mesma forma como no caso anterior das redes aleatórias e ao final será dada uma pequena conclusão dos resultados obtidos sobre a difusão e como afeta isto os tempos de relaxação do Multiplex. Cabe ressaltar que, as redes livres de escala são de muita importância já que são as mais utilizadas para simulações de redes reais pelas propriedades que possuem e portanto a manipulação da difusão pode gerar posteriores análises e aplicações em redes reais que possuam uma configuração tipo Multiplex. Em adiante se falara de Multiplex compostos por redes livres de escala a ao menos que se diga o contrario e serão denotados as redes que o compõem o Multiplex como  $\dot{G}_N^{L,E}$ .

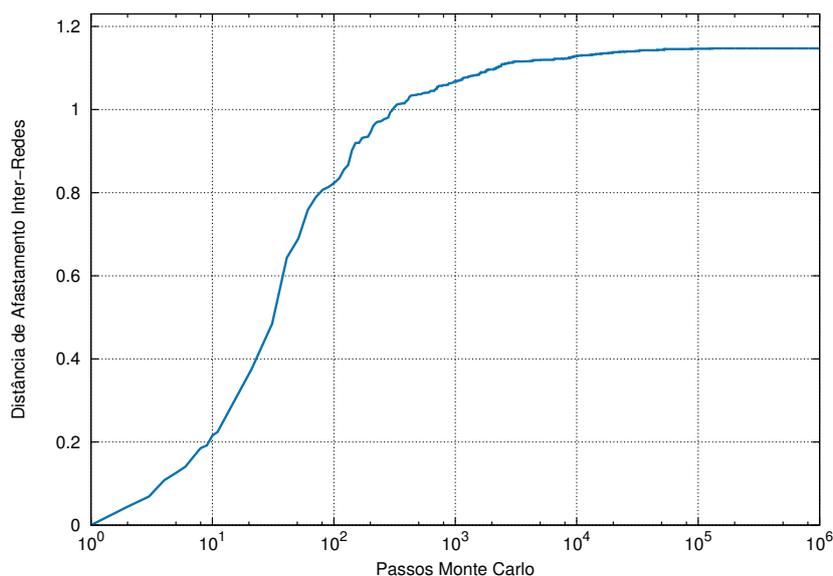
---

<sup>6</sup>Alguns poucos nós com uma conectividade muito alta.

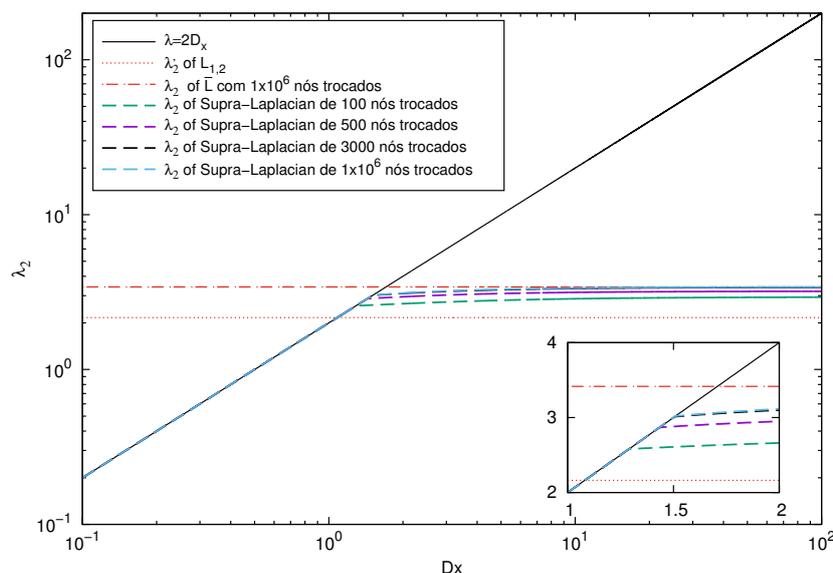
### Redes de 100 Nós

Damos começo às análises de Multiplex formados pelas redes  $\dot{G}_{100}^{L.E.}$ . Se ressalta que por causa do tamanho da rede o gasto computacional é menor, mas isto não garante que o afastamento máximo seja feito em um menor número de passos de Monte Carlo. Observamos que o afastamento máximo em função do número de passos de Monte Carlo depende também do número de nós da rede.

A Figura 5.13 mostra o comportamento do afastamento dependendo do número de passos de Monte Carlo como já é conhecido. Note-se que a curva do gráfico converge mais rapidamente, já para passos maiores a 1000 o afastamento máximo esta quase conseguido. Por outra parte os valores que alcança o afastamento são superiores aos conseguidos para Multiplex formados por redes aleatórias, mas cabe ressaltar que este fato não garante possíveis resultados difusivos maiores, já que não podemos esquecer a natureza estrutural das redes que formam o Multiplex. Portanto neste caso a escolha da distância máxima será ao redor de  $1 \times 10^6$  passos de Montecarlo.



**Figura 5.13** Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{100}^{L.E.}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo.



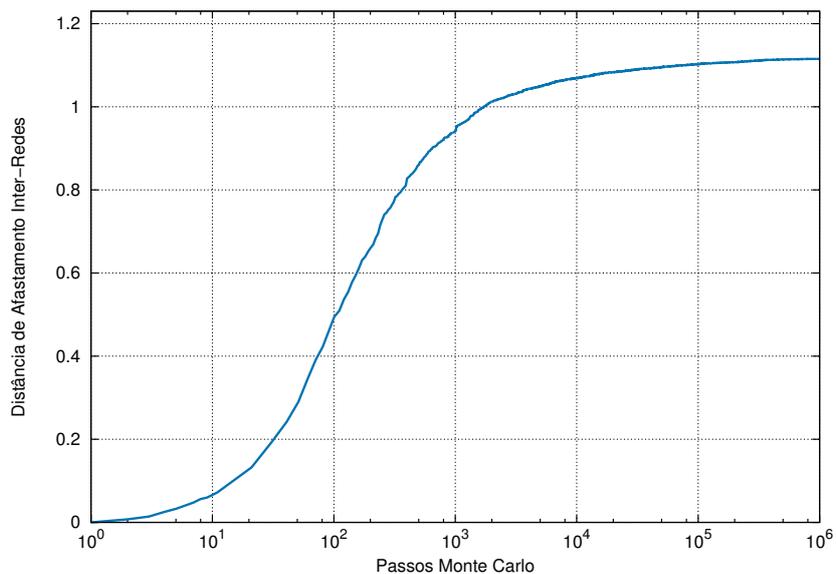
**Figura 5.14** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{100}^{L,E}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Em cor verde, roxo, preto e azul estão os autovalores  $\lambda_2$  correspondentes a 100, 500, 3000 e  $1 \times 10^6$  nós renumerados pelo método de Monte Carlo.

Na Figura 5.14 se apresenta o espectro de difusão para diferentes passos de Monte Carlo. O espectro de difusão mostra um comportamento progressivo a medida que o afastamento entre as duas redes é maior. Repare que o espectro não apresenta notável aumento dos valores de difusão, ainda quando possui valores de afastamento superiores aos apresentados até o momento. Isto mostra que para este tipo de redes livres de escala se apresenta uma resistência difusiva ante a renumeração de nós. Outro fato a ressaltar é o comportamento das curvas após 500 nós trocados, já que a diferença entre valores superiores de 500 fica ainda menor, este fato concorda com a forma da Figura 5.13, onde para 500 passos o valor do afastamento é 1,036 e para  $1 \times 10^6$  é de 1,147.

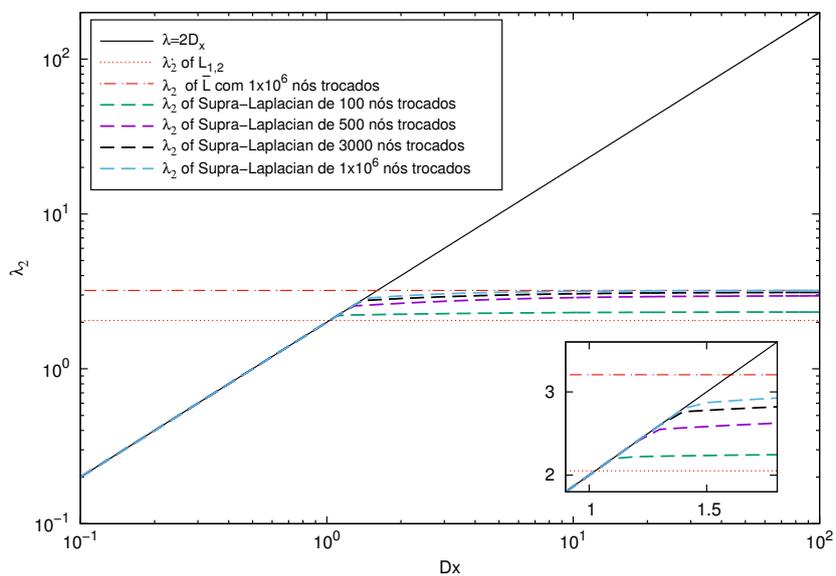
### Redes de 367 Nós

Para Multiplex Formado por redes de 367 **RTI** apresentamos da mesma forma que no caso anterior as Figuras 5.15 e 5.16, correspondentes ao afastamento e o espectro para diferentes passos de afastamento entre rede.

Na Figura 5.15 repare que o afastamento conseguido é um pouco menor do caso de redes de 100. Além que, a taxa de crescimento também é menor. Neste caso embora as redes possuam um maior número de nós o afastamento máximo é conseguido para  $1 \times 10^6$  passos e como no caso anterior a rede depois dos 1000 passos fica perto do valor máximo.



**Figura 5.15** Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{367}^{L,E}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo.

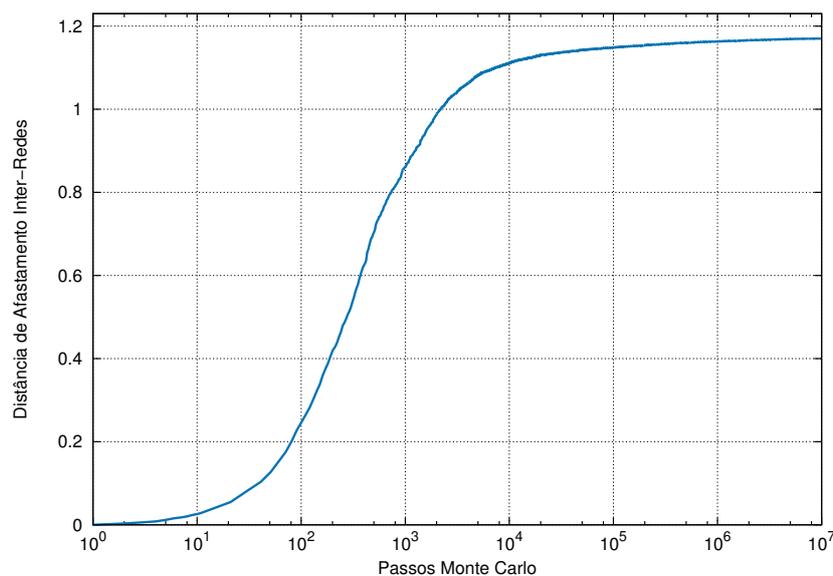


**Figura 5.16** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\dot{G}_{367}^{L,E}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumenta.

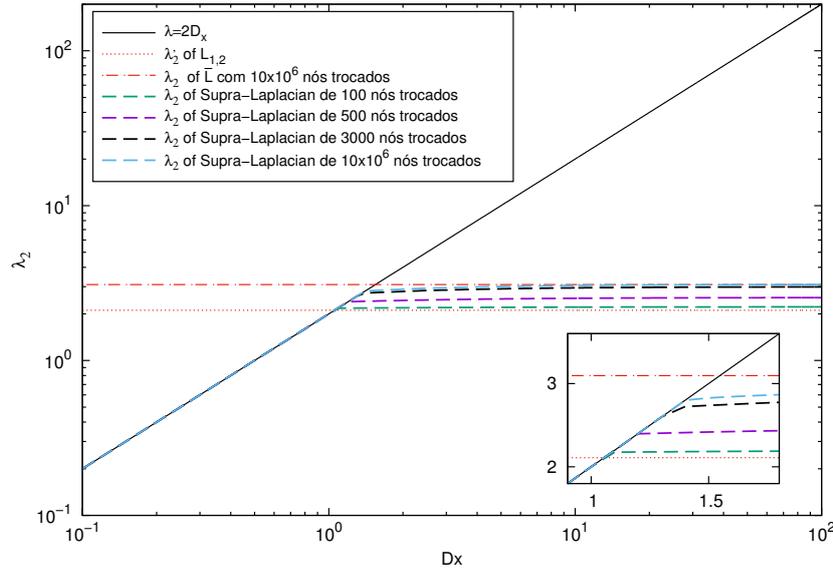
Por outra parte a Figura 5.16 apesar de parecer apresentar semelhança com a Figura 5.14 e um comportamento progressivo respeito ao afastamento, mostra também algumas pequenas diferenças presentes nas separações entre as curvas de 1000 e  $1 \times 10^6$ . Por outra parte se observa a presença de uma resistência do espectro ante o afastamento.

### Redes de 1000 Nós

Como parte final do estudo do espectro em Multiplex formados por redes **RTI** livre de escala, apresentamos o caso de redes com 1000 nós. Começamos com a Figura onde mostramos o afastamento em função do número de passos de Monte Carlo. Repare que pelo tamanho das redes foi preciso de muito mais passos para chegar ao valor de distância máxima, além de um maior tempo computacional na procura dos autovalores. Repare que com a observação das Figuras 5.13, 5.15 e 5.17, pode-se afirmar que os valores das distâncias máximas dependem da configuração estrutural que possuem, embora sejam de diferentes tamanhos.



**Figura 5.17** Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes  $\hat{G}_{1000}^{L.E.}$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo.



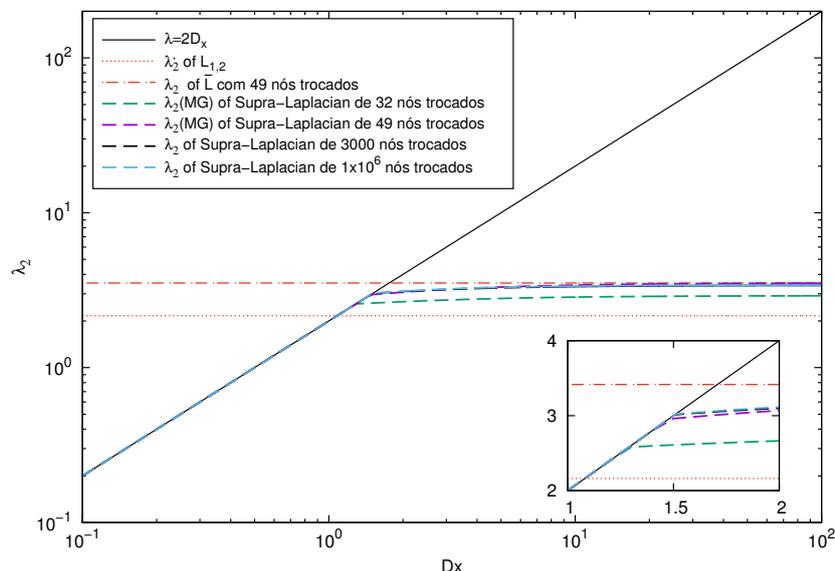
**Figura 5.18** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes  $G_{1000}^{L,E}$  obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Nota-se evolução do espectro conforme o número de renumerações de nós aumentando mostrando que este comportamento é independente do tamanho que as redes possuem.

Por outra parte a Figura 5.18, apresenta de fato o mesmo comportamento progressivo visto já nas Figuras 5.14, 5.16. Devido a este comportamento no afastamento apresentado em todos os casos e da importância que joga o papel estrutural das redes, se pode concluir que os Multiplex formados por redes livres de escala **RTI** possuem uma certa resistência às mudanças no processo difusivos ante a renumeração de nós para afastar uma rede de outra. Tudo isto, traz como consequência, pequenas modificações nos tempos de relaxamento do Multiplex e porém o margem de manipulação da difusão é curto. Outro aspecto a ressaltar também é a comparação dos comportamentos entre as os Multiplex formados por redes aleatórias e os formados por redes livres de escala. Por exemplo os afastamentos apresentados nas redes aleatórias dependem em grande medida do fator probabilístico que possuem, ocasionando um comportamento inverso entre afastamento e probabilidade, mas nas redes de livres de escala os afastamentos se mantêm sim importar o tamanho das redes.

### Manipulação Espectral Mediante os Nós de Maior Grau

Nesta secção é apresentado o método do grau, que em adiante será citado como **MG**. Este método nasce da observação das propriedades estruturais presentes nas redes livres de escala (ver Capítulo 2) e principalmente a presença dos hubs ou polos, que possuem valores de grau altos. A ideia principal do método consiste na troca ou renumeração dos nós que possuem maior grau com os nós de menor grau de uma das redes do Multiplex. Como consequência disto o número máximo de trocas possíveis é limitado e corresponde à metade dos nós da rede a renumerar. Mas cabe ressaltar que a medida que as trocas são feitas a diferença de grau entre

os nós é menor, e portanto nas últimas trocas do **MG** a diferença de grau pode ser de um ou zero. Isto significa que em alguns casos a ultima troca não é importante no afastamento da rede livre de escala.

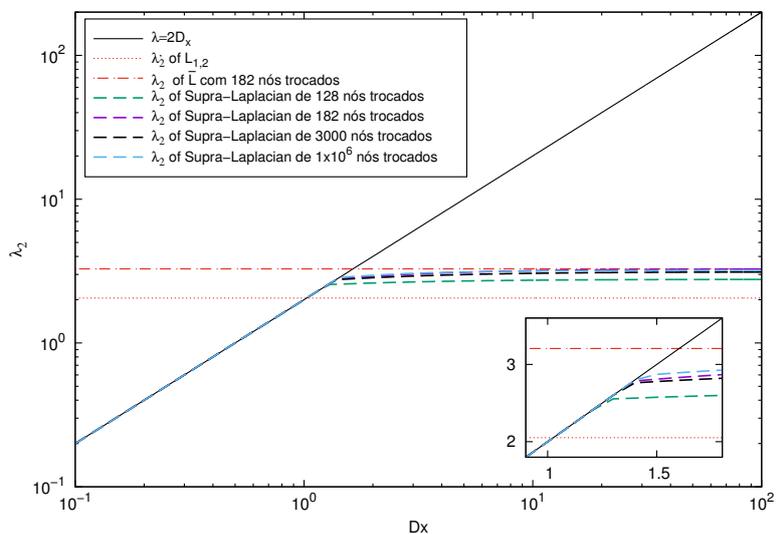


**Figura 5.19** Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala **RTI** de 100 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 49 nós e o método de Monte Carlo de  $1 \times 10^6$ .

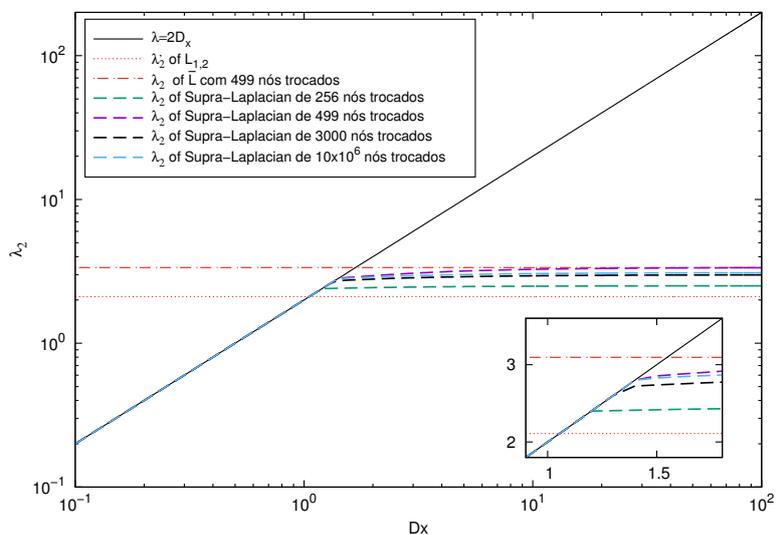
Além da renumeração de nós mediante o método de Monte Carlo, se mostra nas Figuras 5.19, 5.20 e 5.21 os espectros dos Multiplex formados pelas redes livre de escala **RTI** de 100, 367, e 1000 nós. Repare que nos gráficos estão também, os dois valores mais altos conseguidos afastando as duas redes mediante o método de Monte Carlo. Além disso, também são apresentados os valores espectrais dos autovalores  $\lambda_2(\mathbf{MG})$  que correspondem com o **MG**. Note-se que em os três gráficos o método de **MG** consegue obter melhores estados de difusão que o método de Monte Carlo. Isto é muito importante, já que se consegue maiores estados de difusão para o Multiplex, com um número muito menor de nós renumerados. Isto mostra também que existe uma relação entre a renumeração seletiva e organizada dos nós com níveis de grau e o aumento da dinâmica da difusão do Multiplex **RTI** formado pelas redes livre de escala.

Por outra parte os resultados obtidos, mediante o uso do **MG**, apresentam uma particular importância, já que as redes livre de escala são as que melhor representam às redes reais em sua forma estrutural, Por isso uma grande parte dos problemas aplicáveis a redes reais, utilizam as redes complexas livre de escala. Por exemplo, si temos um Multiplex formado por duas redes reais, com uma forma estrutural semelhante com as redes livre de escala. A implementação e aplicação do método de renumeração de nós pelo Monte Carlo é excessivamente difícil de realizar, já que as redes reais podem possuir um grande número de nós e portanto será necessário um número de passos de Monte Carlo muito grande para poder conseguir observar um aumento significativo nos estados de difusão, mas se é utilizado o **MG** o número de passos

diminui consideravelmente conseguindo um aumento na difusão semelhante.



**Figura 5.20** Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (MG) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala RTI de 367 nós. Repare que o MG utiliza a troca de 182 nós e o método de Monte Carlo de  $1 \times 10^6$ .



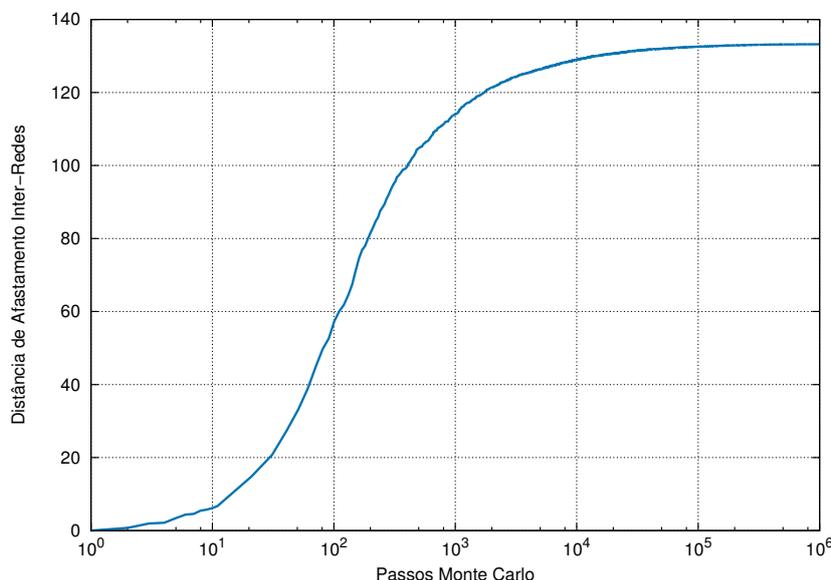
**Figura 5.21** Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (MG) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala RTI de 1000 nós. Repare que o MG utiliza a troca de 499 nós e o método de Monte Carlo de  $10 \times 10^6$ .

### 5.1.3 Redes Small World

Para concluir a parte da análises dos Multiplex formados pelas redes **RTI**, apresentamos o Multiplex formado pelas redes Small World. Foram trabalhadas redes com diferentes probabilidades, mas serão apresentados os casos para os quais as probabilidades são de 0.05, 0.1 e 0.5. A escolha destas probabilidades para as redes Small World é baseada na ideia de mostrar que o comportamento espectral é independente do uso de uma probabilidade menor ou maior e assim obter um análises mais geral. Por outra parte cabe ressaltar que em todas as diferentes probabilidades utilizadas, a difusão apresento tempos de relaxamentos ( $\tau \sim 1/\lambda_2$ ) bastante altos em comparação com os outros casos já a apresentados até agora. Mostrando assim a grande importância que representa as configurações estruturais em processos de difusão de Multiplex de duas camadas.

#### Small World $p=0.05$

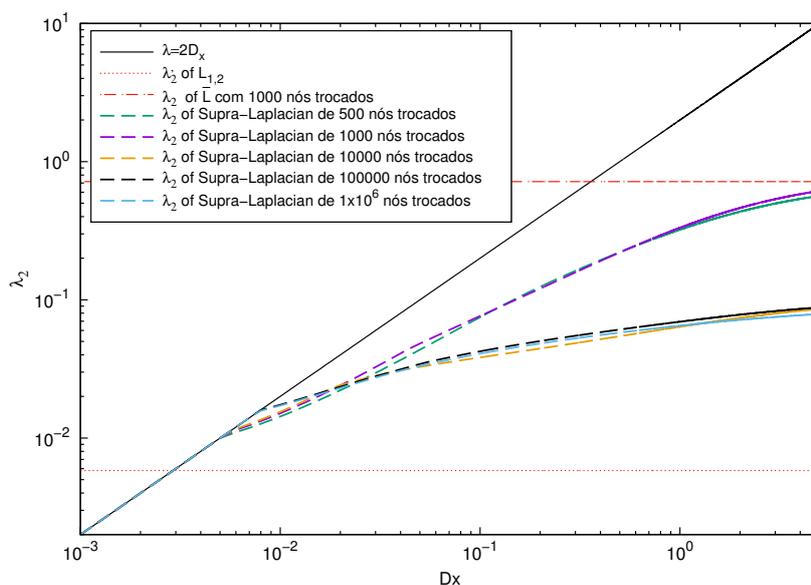
Na Figura 5.22, se apresenta o gráfico do afastamento entre as duas redes, onde se observa que o afastamento conseguido supera por muito os outros casos já discutidos. Isto se deve ao fato que, para este valor de  $p$ , muito poucas conexões de curto alcance foram permutadas criando ligações de longo alcance. Mas ressaltamos que este fato não traz necessariamente mudanças significativas no espectro, pelo contrario é só um indicador do afastamento, que duas redes **RTI** podem conseguir. Isto deve-se em uma grande medida às configurações estruturais de cada tipo de rede.



**Figura 5.22** Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $p = 0.05$  de 500 nós, em função do número de passos do método de Monte Carlo.

Na Figura 5.23 apresentamos o espectro do Multiplex para diferentes afastamentos consegui-

dos. Repare que neste caso o comportamento do espectro fica muito diferente do observado até agora, a começar pelos valores de  $\lambda_2$  que são bastante inferiores aos obtidos nos casos já discutidos. Ressalta-se ainda que, o espectro nesta vez apresenta um aumento progressivo da difusão até os 1000 passos o equivalente a um 91% do afastamento total mostrado na Figura 5.22. Mas para passos maiores de 1000, os valores de difusão de  $\lambda_2$  tem um comportamento contrario do afastamento e mostram valores menores que nos casos de 500 e 1000 passos. Todo isto acontece ainda sem haver-se conseguido o máximo afastamento como se observa comparando as Figuras 5.22 e 5.23. Portanto o aumento no espectro de difusão não está ligado em sua totalidade com o aumento do afastamento entre as redes.

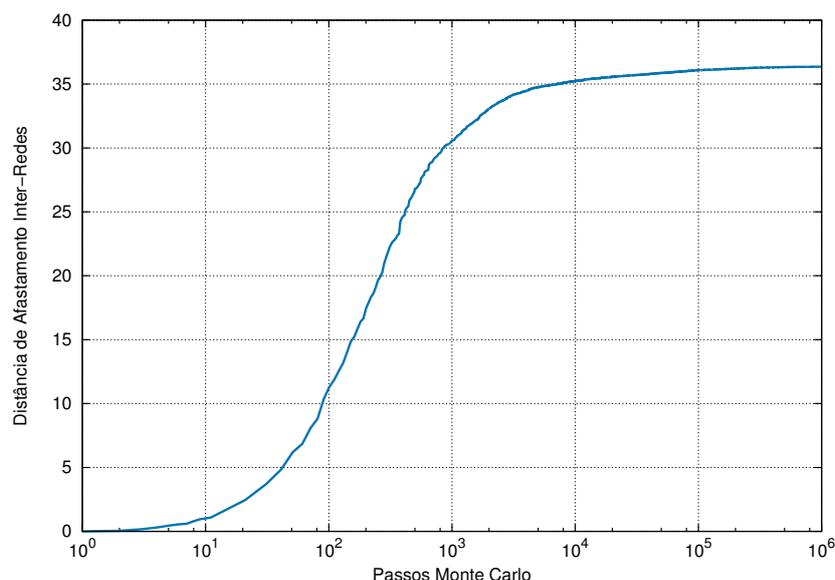


**Figura 5.23** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$ , obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ . Note-se que para afastamentos maiores a 1000 renumerações o espectro muda seu comportamento, mostrando valores de  $\lambda_2$  menores.

### Small World $p=0.1$

Nesta seção apresentamos na Figura 5.24 o afastamento para Multiplex formados pelas redes Small World com  $p = 0.1$ . Como no caso anterior os valores de afastamento conseguidos são superiores aos apresentados até agora, mas se fazemos a comparação com os apresentados na Figura 5.22, pode-se ver que existe uma grande diferença. Este fato está relacionado às poucas arestas que foram permutadas para as redes Small World  $p = 0.05$ , embora este número já seja maior que no caso anterior.

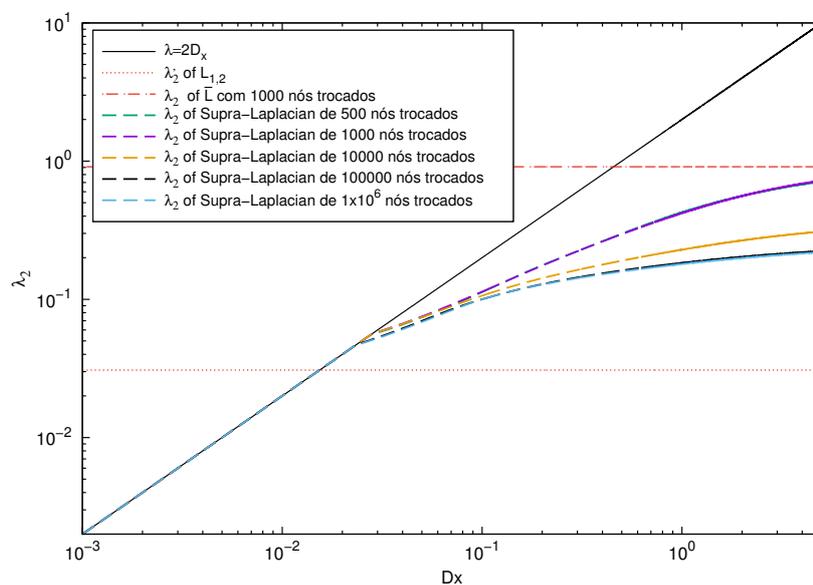
Por outro lado o espectro de difusão apresenta de novo um comportamento semelhante com o apresentado na Figura 5.23, mas neste caso a diferença tão notória que existia entre os afastamentos superiores a 1000 passos é menor. Este comportamento deve-se ao fato que em redes Small World quando o parâmetro  $p$  fica mais próximo a 1, as propriedades estruturais começam



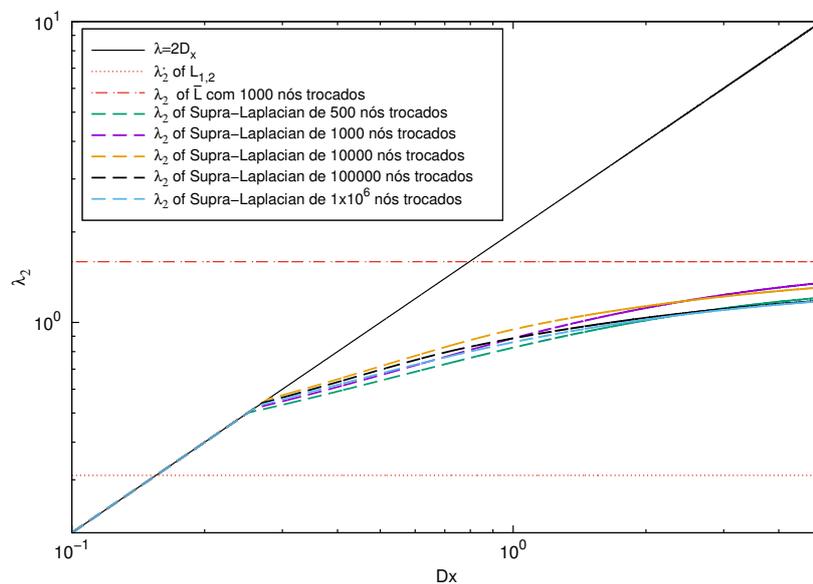
**Figura 5.24** Distância de afastamento inter-redes conseguida para o Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $p = 0.1$ , em função do número de passos do método de Monte Carlo.

a mudar (ver Figura 2.5). Porém é de esperar que entre mais próximos a 1 o comportamento seja diferente até mudar ao apresentado em Multiplex formados com redes aleatórias **RTI**. Por exemplo na Figura 5.26 Se observa o espectro para um caso onde  $p = 0.5$ . Note que se observa ainda mais a mudança no comportamento, este fato seguirá possivelmente até obter uma transição do comportamento de redes Small World ao apresentado com as redes aleatórias **RTI**.

Em conclusão para Multiplex formados por redes de duas camadas **RTI** (aleatórias, livres de escala ou de pequeno mundo), se apresentam diversos comportamentos difusivos respeito à renumeração de nós. Mas em sua grande maioria apresenta um aumento na difusão quando o afastamento entre redes pela renumeração de nós é feito. Em alguns casos como em redes aleatórias foi possível conseguir uma manipulação do espectro mediante a troca de certos nós, que possuíam a propriedade de ser os mais afastados da rede e foram chamados de nós principais da difusão **NPD**. Outro fato foi no caso das redes livre de escala, onde a difusão apresenta um comportamento progressivo ligado com o aumento da distância entre redes. Mas para o caso das redes de mundo pequeno é possível conseguir um uma máxima difusão quando se consegue um 90% do afastamento total entre as redes, este comportamento fica menor quando  $p \rightarrow 1$ . Em todos os casos se mostra que o processo de renumeração conseguiu mudar as dinâmicas espectrais. Para as seguintes secções tentaremos verificar se os resultados conseguidos se mantêm para redes **RES** ou apresentam novos comportamentos difusivos.



**Figura 5.25** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$ , obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ .



**Figura 5.26** Espectro do Multiplex **RTI** formado pelas redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.5$ , obtido após afastamento topológico inter-redes em função do coeficiente de difusão  $D_x$ .

## 5.2 MULTIPLEX FORMADOS POR REDES RES

Nesta secção serão apresentados os resultados para Multiplex de duas camadas formados pelas redes **RES**, cuja forma representativa foi mostrada na Figura 4.7 no Capítulo 4. Este tipo de redes podem possuir uma distância inicial topológica inter-redes diferente de zero, em contraste com as **RTI** que possuem uma distância topologia inicial igual a zero, Como consequência disto, os autovalores  $\lambda_2(L_1)$  e  $\lambda_2(L_2)$  não serão mais iguais, como no caso das redes **RTI**. Este fato abre a possibilidade a outra nova formas de aplicação do método de renumeração. Esta nova forma é a aproximação das redes mediante o método de Monte Carlo em sua forma tradicional. por isso será apresentado agora os gráficos do espectro que representam o afastamento e a aproximação entre redes. Com isto espera-se poder mostrar que mediante a renumeração de nós pode-se ter um certo grau de controle sobre os tempos de relaxamento do Multiplex. Estas novas formas de aplicação abrem a possibilidade de poder chegar a conseguir efeitos como a super difusão (ver Capítulo 4), além de uma melhor manipulação do espectro que é um dos objetivos desta dissertação.

### 5.2.1 Redes Aleatórias

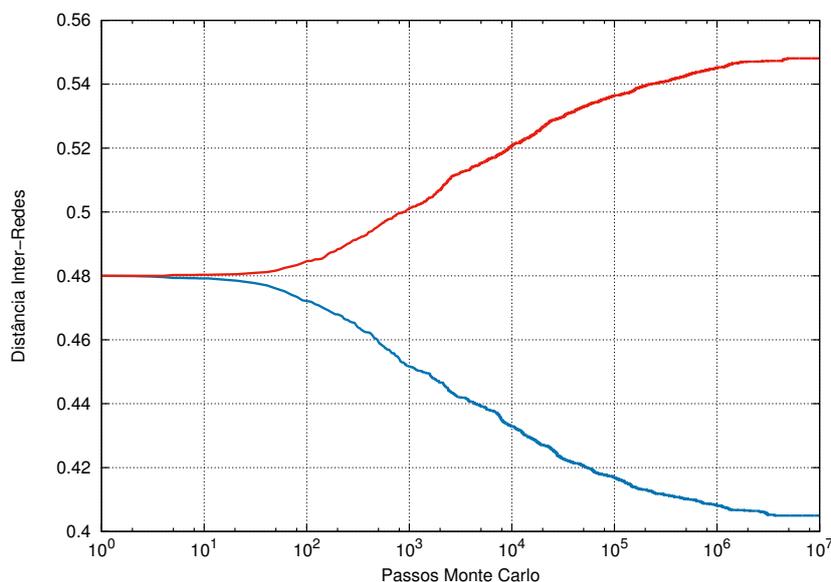
Se inicia o trabalho com diversas probabilidades de redes aleatórias e serão apresentados dois dos casos que se consideram representativos, permitindo obter conclusões sobre este tipo de dinâmicas difusivas. Os casos apresentados são, primeiramente um com baixa probabilidade  $\rho = 0.05$  e seguidamente outro com alta probabilidade  $\rho = 0.5$ . Isto determinará se pode existir algum tipo de dependência no espectro com respeito ao parâmetro de probabilidade  $\rho$  e também ajudará com uma melhor comparação das distâncias inter-redes conseguidas. Em conclusão, para duas redes com diferenças topológicas pode-se aplicar a renumeração de nós para aproximar as duas redes ou caso contrario afastá-las. Estes dois fatores aportam novas ferramentas para possíveis aplicações em redes reais com uma estrutura parecida às trabalhadas.

#### Redes Aleatórias com $\rho = 0.5$

Na Figura 5.27 pode-se ver o gráfico das distâncias para um Multiplex formado por duas redes aleatórias  $\dot{G}_{500,0.5}^{ER}$ . Repare que no começo as duas redes começam o processo de afastamento (em cor vermelho) ou de aproximação (em cor azul) com uma distância inicial definida em 0.48. Outro fato importante é o número de passos necessários para conseguir afastar ou aproximar as duas redes, já que só até os 100 passos se começa a perceber uma pequena diferença entre os dois procedimentos. Também se mostra como o máximo afastamento ( $\delta^{max}(L_1, L_2)$ ) ou aproximação ( $\delta^{min}(L_1, L_2)$ ) ocorre em um grande número de passos ( $10 \times 10^6$ ).

Na Figura 5.28 se mostra o espectro para o caso de aproximação das duas redes. Note-se como no começo quando a renumeração é igual a zero (linha em cor verde) existe um valor definido que corresponde com o ponto de partida na Figura 5.27. Além disso, o gráfico mostra como a aproximação máxima de difusão das redes é conseguida para 6000 passos, correspondente à 57,1% da aproximação total mostrada na Figura 5.27. Por outra parte a linha roxa representa os

1000 passos. Aqui, ao invés de ser ter uma diminuição do espectro, nota-se o efeito contrario. De forma semelhante acontece para a distância mínima, pelo qual pode-se observar que não existe uma relação direta entre a aproximação das redes e a diminuição da dinâmica espectral. Por isto o processo de aproximação inter-redes parece reagir de forma diferente ao esperado.

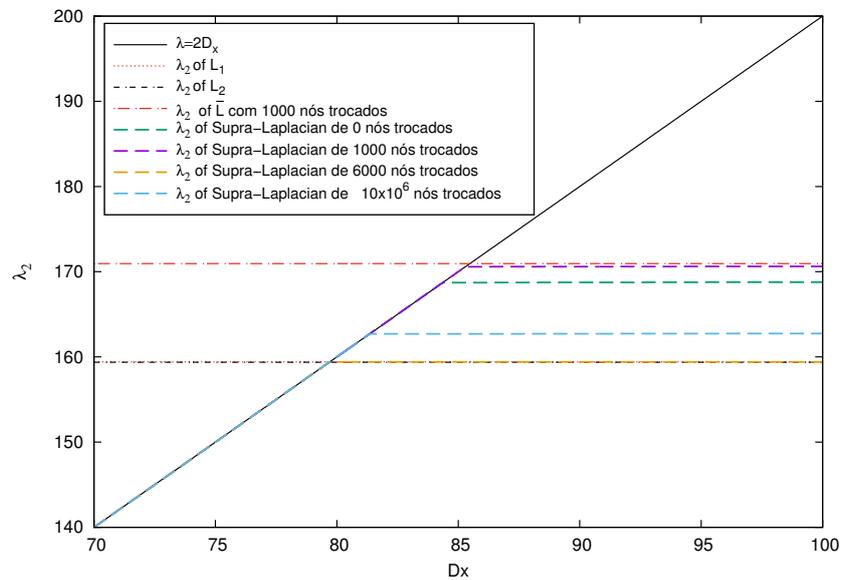


**Figura 5.27** Distância inter-redes entre redes  $\dot{G}_{500,0.5}^{ER}$  que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo.

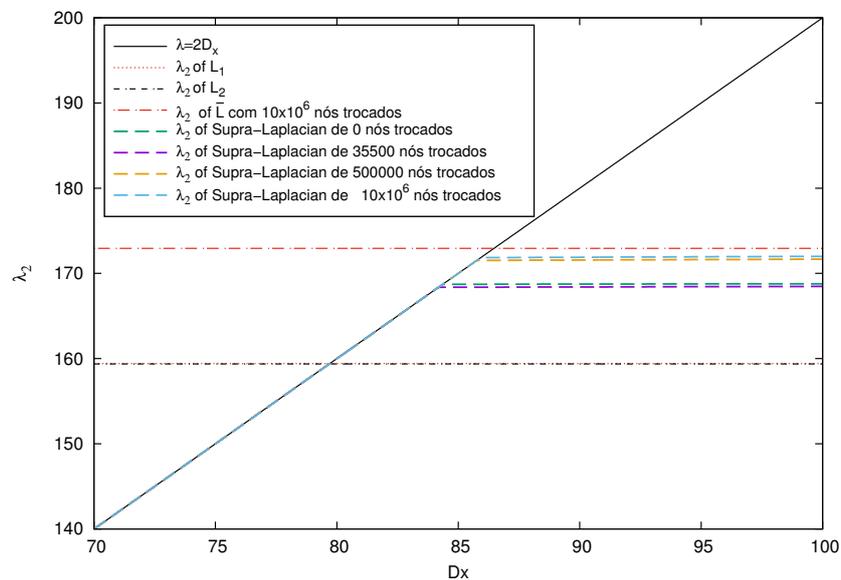
Cabe ressaltar que da mesma forma como no caso das redes **RTI** se procurou conseguir trocar os nós tanto de maior afastamento como de menor afastamento de ambas redes, para saber se o espectro respondia de igual forma como no caso das redes aleatórias **RTI**, mas os resultados obtidos não fazem mudança alguma no espectro do Multiplex. Por isso, para o caso de redes aleatórias **RES** não é possível a manipulação do espectro mediante o uso dos **NPD**.

É importante dizer que o processo tanto de aproximação como de afastamento por renumeração de nós consegue a mudança do espectro, mas é conveniente lembrar, que a quantidade de passos depende do valor da semente geradora de números aleatórios. Dependendo do valor da semente, pode acontecer que em alguns casos o 90% do afastamento seja conseguido com um número menor de passos de Monte Carlo.

Para o caso quando as duas redes são afastadas temos a Figura 5.29. Repare que neste caso os valores dos números de passos são maiores, mas como já se falou isto é por causa da escolha da semente geradora de números aleatórios e não representa um significado importante. Note que, ao contrario do caso da aproximação, neste caso se obtemos um comportamento progressivo com respeito ao afastamento conseguido, mostrando assim uma clara diferença com as redes **RTI**. Além disso, ressaltamos o fato que os valores de difusão para o Multiplex formado pelas redes aleatórias **RES** são os que apresentam os valores mais altos, portanto são os que conseguem ter os menores tempos de relaxamento.



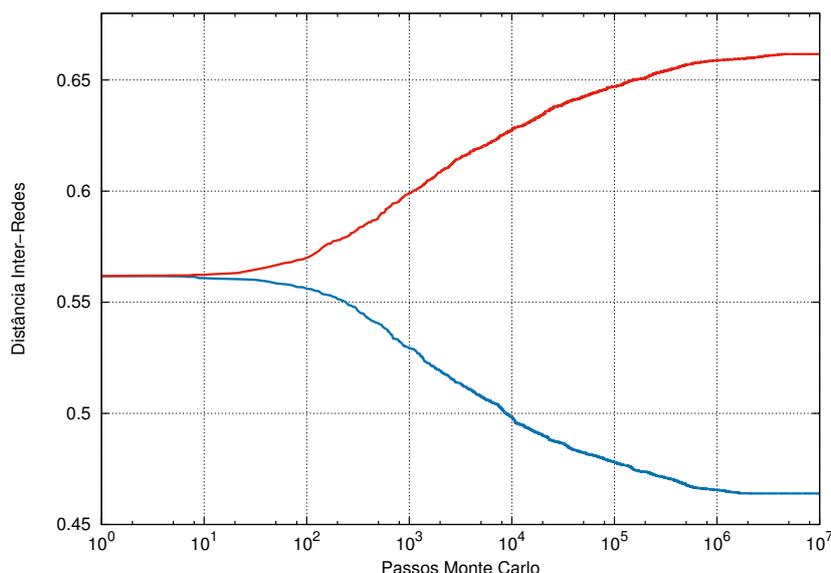
**Figura 5.28** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes  $\dot{G}_{500,0.5}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.29** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes  $\dot{G}_{500,0.5}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

### Redes Aleatórias com $\rho = 0.05$

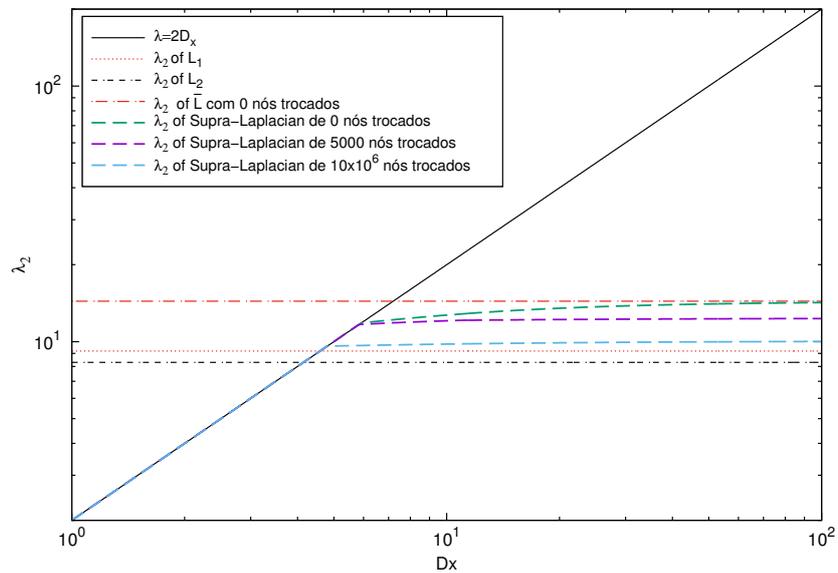
Agora apresentamos um Multiplex formado por  $\dot{G}_{500,0.05}^{ER}$  para encerrar esta secção e mostrar que o comportamento do espectro pode ou não ter algum tipo de relação com a probabilidade. Começamos mostrando a Figura 5.30, que representa o afastamento como já se sabe, mas a principal diferença com a Figura 5.29 são os maiores valores de afastamento conseguidos por causa da diferença nas probabilidades.



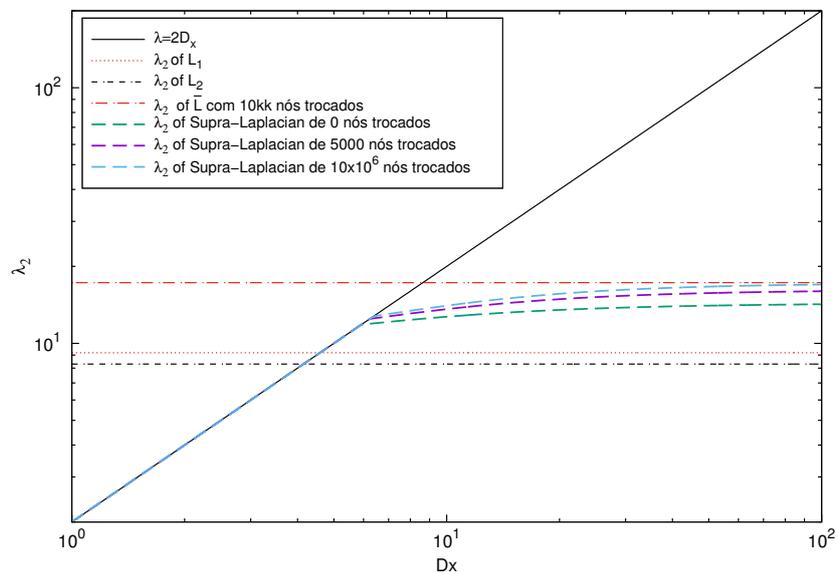
**Figura 5.30** Distância inter-redes entre redes  $\dot{G}_{500,0.05}^{ER}$  que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelha e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo.

Na Figura 5.31 se apresenta o espectro ao se aproximar as duas redes do Multiplex e na Figura 5.32 o espectro ao se afastar as duas redes. Notamos em primeiro lugar dois fatos em comparação com a Figura 5.29 e 5.28. O primeiro é o valor que possuem os autovalores, por exemplo nas Figuras 5.29 e 5.28 os valores dos autovalores podem oscilar entre 159 e 173 e os valores do coeficiente de difusão inter redes entre 80 e 86. Mas no espectro das Figuras 5.31 e 5.32 os valores dos autovalores são muito menores. Isto significa que existe tempos de relaxamento menores para redes que possuem uma maior probabilidade, provavelmente pela diferença no número de arestas por causa da diferença de probabilidades. Além disso, os espectros das Figuras 5.31 e 5.32, se apresentam um comportamento ante a renumeração de nós crescente ou decrescente dependendo do caso, mostrando assim uma clara diferença com o caso anterior.

Ao contrario do Multiplex formado por redes aleatórias **RTI** e apresentado na secção 5.1.1 não foi possível encontrar um conjunto de nos **NPD** que possam dar uma mudança no espectro de difusão com só uma ou duas renumerações de nós específicas. Mas apesar disto o processo estocástico de afastamento ou aproximação mostra que continua sendo efetivo para aumentar ou diminuir os tempos de relaxamento do Multiplex.



**Figura 5.31** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes  $G_{500,0.05}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



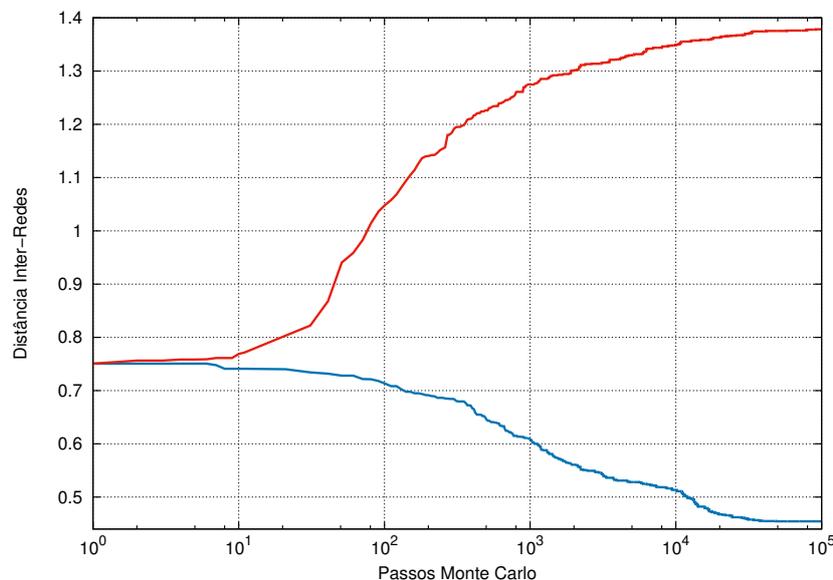
**Figura 5.32** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes  $G_{500,0.05}^{ER}$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

## 5.2.2 Redes Libre de Escala

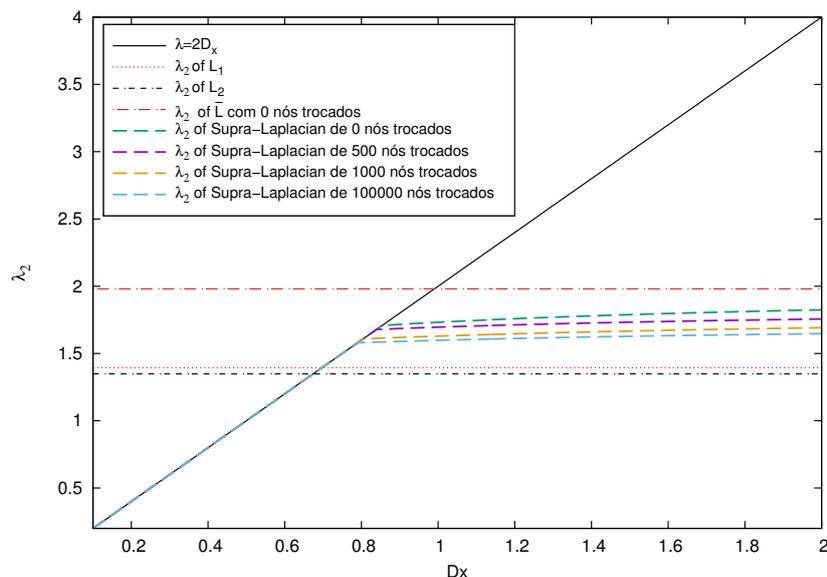
Apresentaremos agora o Multiplex formado pelas redes livres de escala **RES**. Como no caso das redes **RTI** serão apresentados três tipos de Multiplex que dependeram do número de nós das redes que o formam. Isto ajuda a facilitar a comparação, além de mostrar que o método de afastamento pela renumeração de nós não apresenta uma dependência com o tamanho das redes que formem o Multiplex. Outro fato apresentado nesta secção é a semelhança dos gráficos de distância inter-redes, já que para as redes de 100, 367 e 1000 nós, os intervalos são quase os mesmos, mostrando claramente que a distância conseguida não é dependente do tamanho das redes que formam o Multiplex.

### Redes de 100 nós

Iniciamos como nas redes **RTI**, apresentando o gráfico das distâncias (ver Figura 5.33), onde observa-se, o afastamento (linha em cor vermelho) e aproximação (linha em cor azul) de duas redes **RES** livres de escala de 100 nós. Note que neste caso o gráfico apresenta diferenças entre as distâncias de afastamento e aproximação conseguidas. Por exemplo, observe que a linha que representa o afastamento consegue uma maior distância final e aumenta muito mais rapidamente em comparação com a linha da aproximação entre redes. Isto significa que, em principio, as duas redes não eram tão diferentes e por isso a distância de aproximação é menor. Por outra parte parece que para o método foi mais eficiente em conseguir afastar as duas redes. Também note que de igual forma ao caso anterior das redes **RTI**, o Multiplex formado pelas redes livre de escala, apresenta maiores distâncias inter-redes com respeito ao Multiplex formado pelas redes aleatórias.



**Figura 5.33** Distância inter-redes entre redes livre de escala de 100 nós que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo.

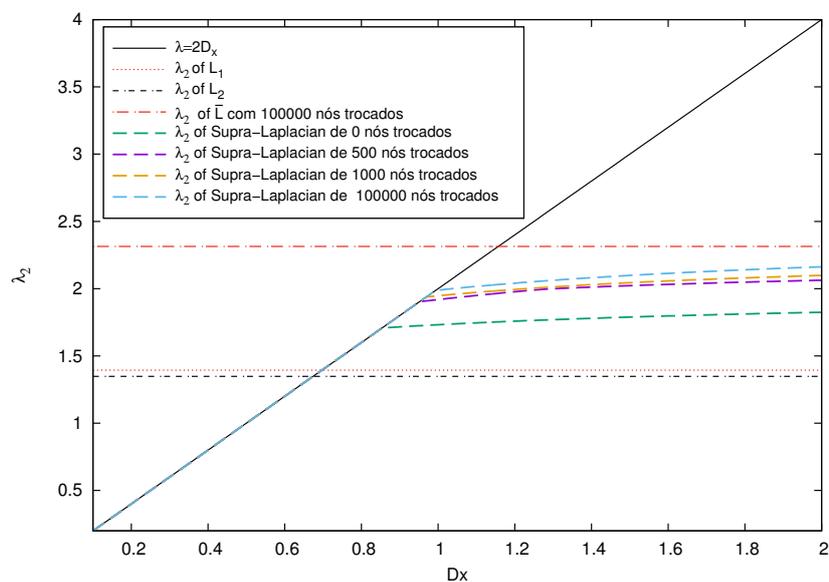


**Figura 5.34** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes livre de escala de 100 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

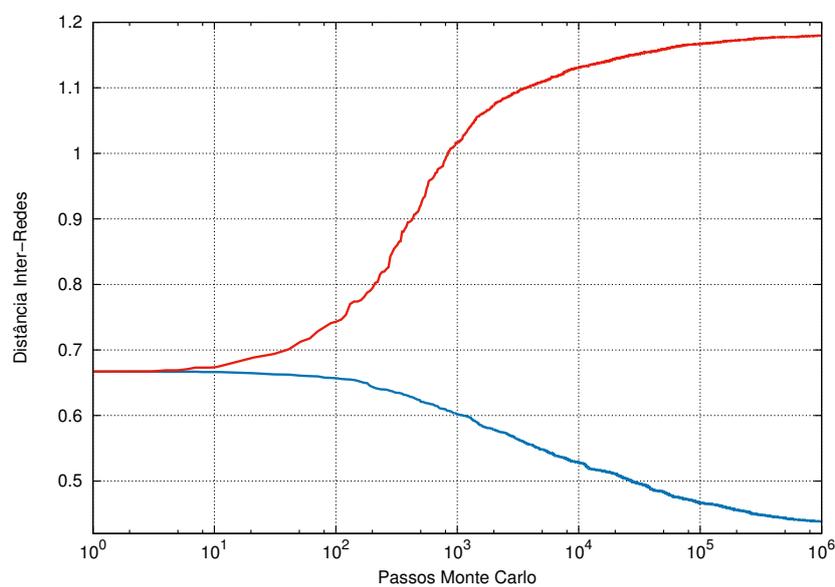
Nas Figuras 5.34 e 5.35 se apresenta o espectro para a aproximação e afastamento entre as duas redes. Para os dois casos se apresenta um comportamento onde dependendo do número de passos, o espectro diminui ou aumenta. Isto mostra que para este tipo de redes existe uma relação direta entre as distâncias de afastamento ou aproximação conseguidas e as mudanças no espectro. Para o afastamento na Figura 5.35, e comparado com as redes **RTI**, nota-se uma grande semelhança no comportamento progressivo que as duas possuem. Isto mostra que, independentemente da rede livre de escala de 100 nós que forma o Multiplex, a difusão pode ser alterada mediante a renumeração de nós. Ou seja, não existe uma grande diferença entre os espectros para estes dois Multiplex formados com redes **RTI** e **RES** de 100 nós. Isto acontece de igual forma para o gráfico representativo da distância inter-redes (ver Figura 5.35).

### Redes de 367 nós

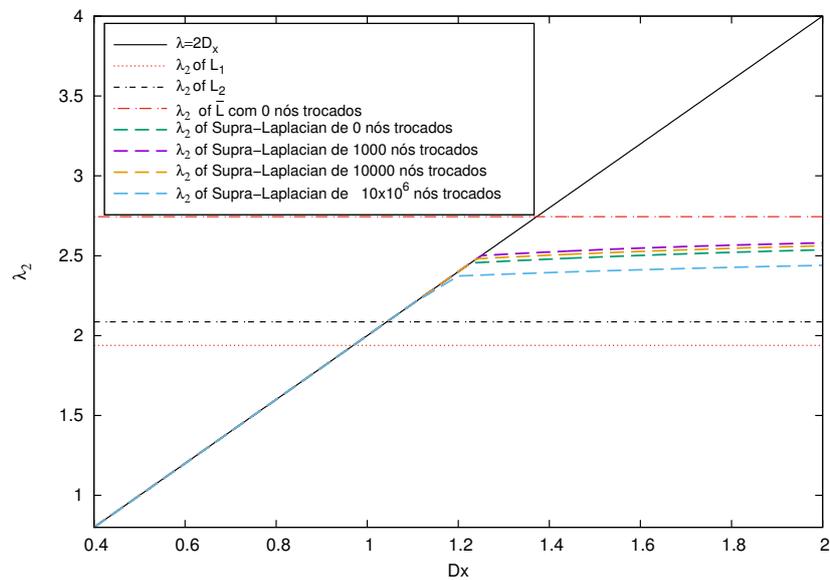
Na Figura 5.36 mostra-se o gráfico da distância entre duas redes de 367 nós. Note-se que o gráfico apresenta uma semelhança com a Figura 5.33 para a rede de 100 nós. Além disso, se comparamos a Figura 5.36, com a Figura 5.15 que correspondente às redes **RTI** de 367 nós, notamos que os valores de afastamento são também quase iguais. Isto indica que para duas redes livres de escala qualquer é normal esperar os mesmos valores no afastamento e de aproximação das redes, este fato será confirmado com as redes de 1000 mostradas em seguida.



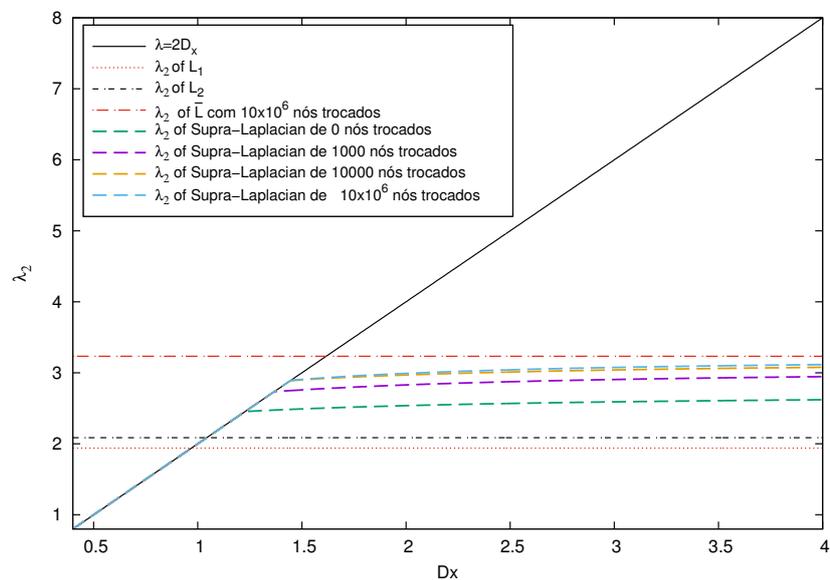
**Figura 5.35** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes livre de escala de 100 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.36** Distância inter-redes entre redes livre de escala de 367 nós que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo.



**Figura 5.37** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes livre de escala de 367 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.38** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes livre de escala de 367 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

Nas Figuras 5.37 e 5.38 se mostram os espectros do Multiplex formado pelas redes de 367 nós para os respectivos casos de aproximação e afastamento das redes que o formam. Note-se que no caso da aproximação a relação entre o número de passos e menores valores de difusão não é observada. Pelo contrário só o caso de distância mínima (linha em cor azul) consegue fazer que a difusão seja menor que no caso inicial de zero trocas (linha em cor verde). Isto pode ser pela proximidade que as duas redes apresentam no início (ver Figura 5.36) e portanto estas redes são as mais próximas se as comparamos com as Figuras 5.33 e 5.39 que correspondem às redes de 100 e 1000 nós. Esta menor distância entre as duas redes ocasiona que o espectro já esteja em um valor quase mínimo de difusão, e que o método de renumeração neste caso só tem uma opção possível que é o caso de mínima distância. Repare que foi possível conseguir um valor de  $\lambda_2$  menor, correspondendo ao caso de mínima distância entre as redes (linha de cor azul), portanto apesar de tudo o método de renumeração de nós consegue encontrar pelo menos uma renumeração onde o espectro do Multiplex alcança valores menores de difusão.

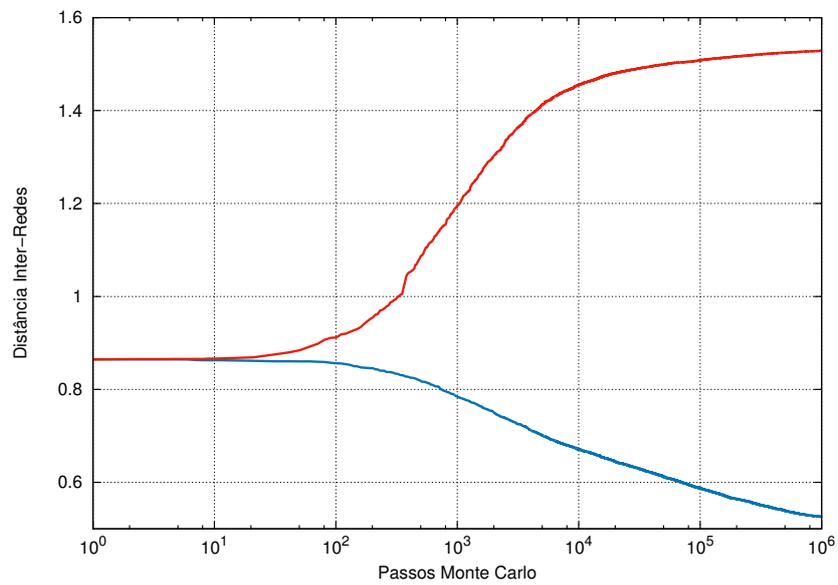
Para o caso do espectro de afastamento entre duas redes (ver Figura 5.38), repare que existe também um comportamento progressivo entre os passos do método e maiores valores de difusão. Este comportamento foi apresentado nas redes **RTI** e também nas redes de 100 nós da seção anterior.

### **Redes de 1000 nós**

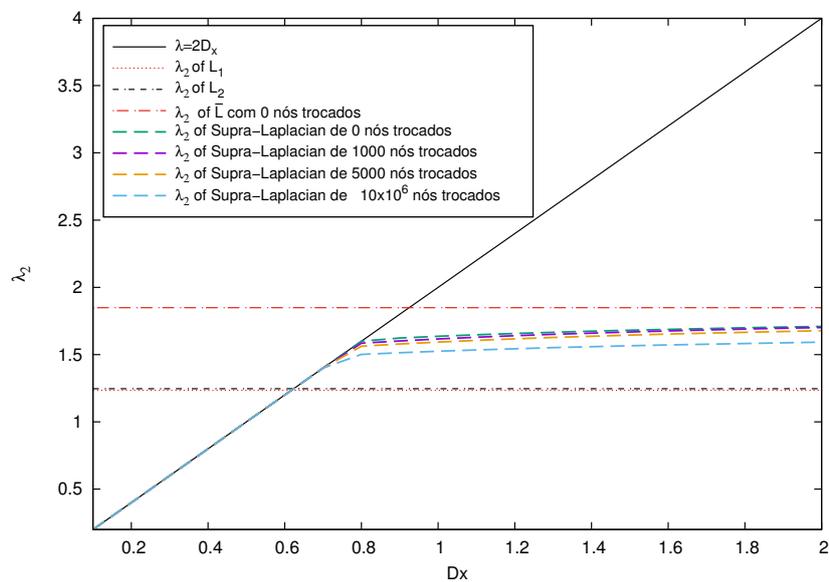
Para os Multiplex formado pelas redes livre de escala **RES** de 1000 nós, são apresentados nas Figuras 5.39, 5.40 e 5.41, os resultados obtidos da distância inter-redes e os espectros dos resultados de afastar e aproximar as duas redes que o formam o Multiplex. Disto pode-se observar que os resultados apresentam uma grande semelhança com os já apresentados nas seções anteriores de redes livre de escala de 100 e 367 nós e para o caso de afastamento com as redes livre de escala **RTI**. Com estes resultados se mostra que não existe uma dependência espectral do Multiplex formados pelas redes livre de escala **RTI** ou **RES** com respeito ao tamanho da rede e, paralelamente, existe uma dependência espectral com o método de renumeração quando se deseja um aumento ou diminuição da difusão.

Em relação aos gráficos de distância inter-redes, pode-se ver que não mostram uma ligação entre os tamanhos das redes e as distâncias conseguidas afastando ou aproximando as redes, pelo contrário as distâncias inter-redes ficam mais ou menos em um mesmo intervalo de valores em todos os casos mostrados.

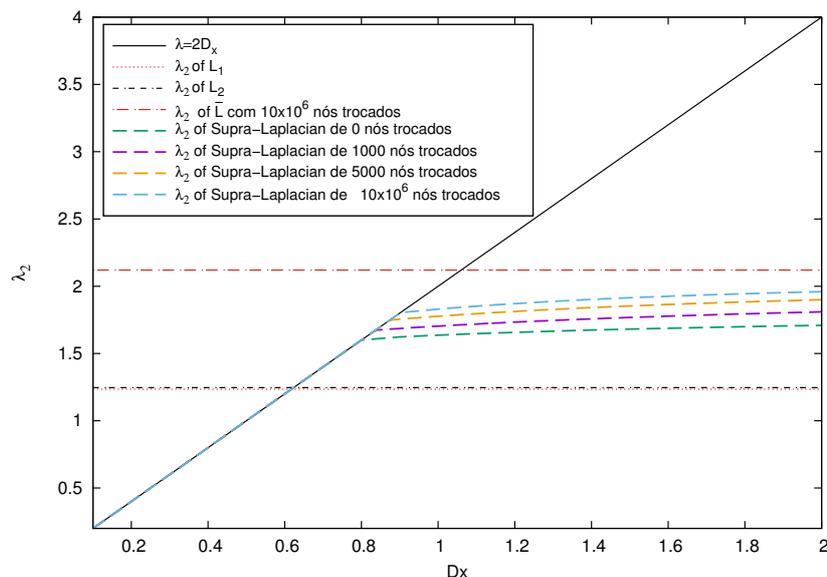
Por outro lado para os gráficos do espectro mostrados nas Figuras 5.40 e 5.41 obedecem o mesmo comportamento progressivo de igual forma como foi visto nas redes de 100 e 367 nós. Mostrando assim que entre o processo de renumeração de nós e as mudanças no espectro existe uma relação direta e que a manipulação da dinâmica espectral para Multiplex formados com redes livre de escala é possível. Este resultado tem muita importância já que a maior parte das redes reais são catalogadas como redes livre de escala. Portanto estes resultados podem ser aplicados a modelos que cumpram com a forma estrutural tipo Multiplex da qual foram apresentados vários exemplos no Capítulo 4.



**Figura 5.39** Distância inter-redes entre redes livre de escala de 1000 nós que formam o Multiplex **RES**, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo.



**Figura 5.40** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas redes livre de escala de 1000 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.41** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas redes livre de escala de 1000 nós, apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

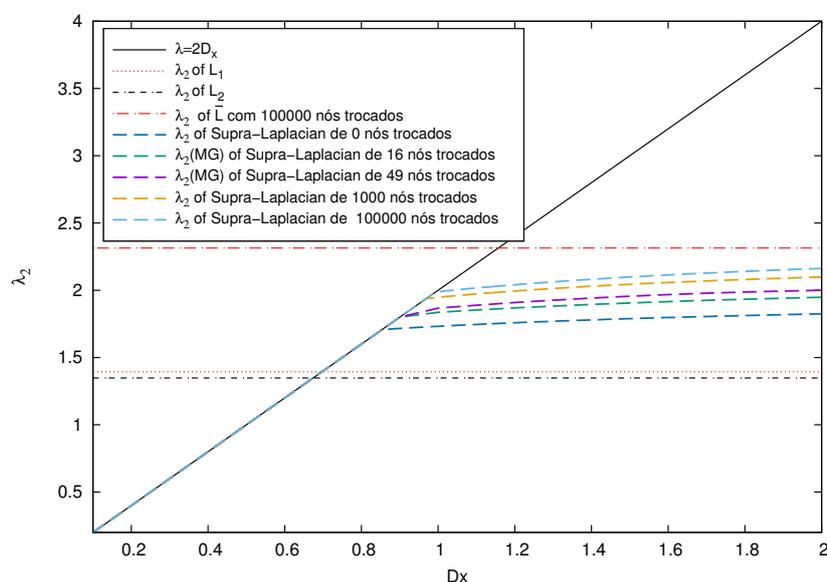
### Manipulação Espectral Mediante os Nós de Maior Grau

Como no caso dos Multiplexs **RTI** onde o método de grau (**MG**) mostrou ser melhor no aumento da difusão do Multiplex, nesta seção se utilizara o **MG** para tentar afastar o espectro dos Multiplexs **RES** formados pelas redes livre de escala de 100, 367 e 1000 nós. Tudo isto para conseguir obter uma comparação com o método de Monte Carlo, e assim determinar qual é mais aplicável em problemas reais que possuam uma estrutura semelhante aos Multiplex. por outra parte se ressalta o fato que o **MG** é também uma ferramenta para aumentar os valores da difusão com um menor número de passos possíveis em comparação com o método de Monte Carlo.

Nas Figuras 5.42, 5.43 e 5.44 se apresenta os espectros dos Multiplex **RES** formados pelas redes livre de escala de 100, 367 e 1000 nós. Repare que em todos os gráficos se apresentam o segundo autovalor  $\lambda_2(\text{MG})$  correspondente com as trocas feitas pelo **MG**. Também de forma geral em todos os gráficos se apresenta o caso de zero trocas junto a mais dois casos concernentes às maiores renumerações de nós feitas mediante o método de Monte Carlo. Isto ajuda na observação e comparação das diferenças entre os dois tipos de métodos utilizados. Por outra parte, lembre-se que no **MG** existe um numero máximo possível de trocas.

Por outra parte, se observamos as Figuras 5.42, 5.43 e 5.44 de forma individual, nota-se que a diferença espectral com os dois casos do método de Monte Carlo, não é muito grande. Para mostrar este fato com maior precisão, se encontro a diferença porcentual entre os espectros do **MG** e o caso extremo do método de Monte Carlo, para cada um dos gráficos apresentados. Isto

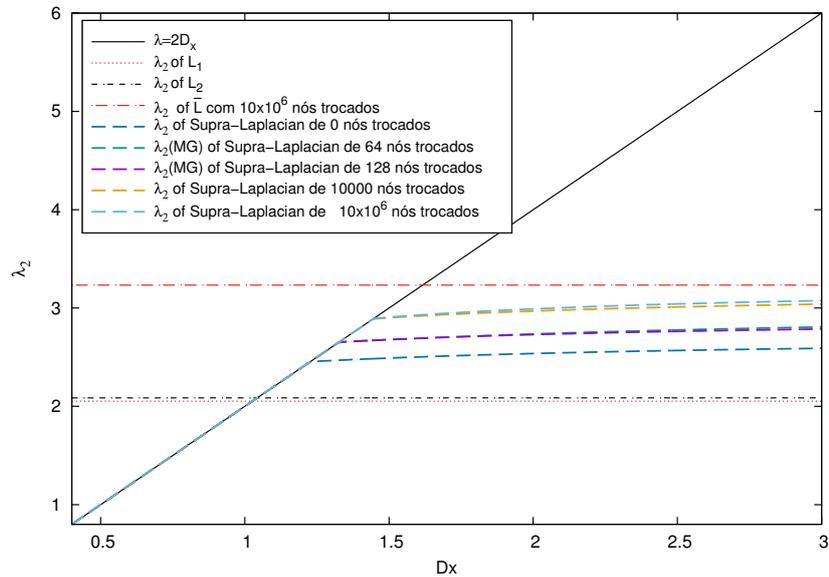
foi listado na Tabla 5.2, onde temos quatro colunas que, primeiramente identificam o Multiplex a tratar em relação com o número de nós das redes livre de escala que os formam. Seguidamente são apresentados os valores dos passos de Monte Carlo e o número de trocas com o **MG**, que mostram uma clara diferença em seus valores. Por último é a apresentada a diferença percentual entre os afastamentos conseguidos pelos dois métodos. Repare que se consegue obter uma grande parte do aumento espectral sem a necessidade de trocar um grande número de nós. Isto mostra a existência de uma maior efetividade no aumento espectral com a troca de um menor número de nós com o **MG**. Por outra parte, apesar da efetividade do **MG**, não se conseguiu obter os valores de máximo afastamento conseguidos pelo Monte Carlo, mas se ressaltar que na pratica com redes reais com un número muito maior de nós é ainda melhor a implementação do **MG** que a renumeração de nós, por causa do tempo computacional que isto consome.



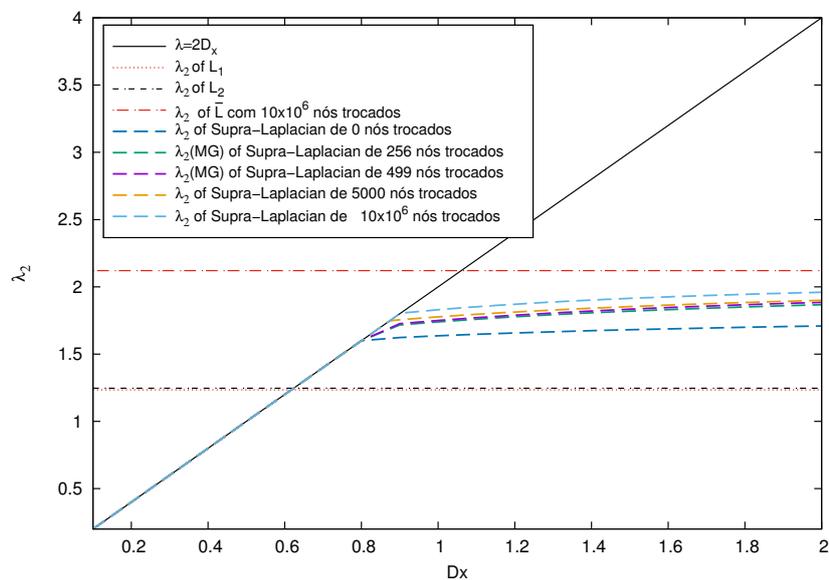
**Figura 5.42** Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (**MG**) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala de 100 nós. Repare que o **MG** utiliza a troca de 49 nós e o método de renumeração de  $1 \times 10^4$  para ter uma pequena diferença percentual de 8.4%.

Rede Livre de Escala	Número de Passos Monte Carlo	Número de Trocas <b>MG</b>	D. Porcentual
1000	$10 \times 10^6$	499	3.7
367	$10 \times 10^6$	128	9.1
100	$1 \times 10^4$	49	8.4

**Tabela 5.2** Diferença percentual entre o método de renumeração de nós e o método de grau (**MG**). Note-se que se consegue obter uma pequena diferença percentual com o **MG** com um número muito menor de renumeração de nós, mas se resalta que apesar de alcançar estes valores de afastamento não se consegue igualar o valor conseguido pela renumeração de nós.



**Figura 5.43** Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (MG) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala de 367 nós. Repare que o MG utiliza a troca de 128 nós e o método de renumeração de  $1 \times 10^4$  para ter uma pequena diferença porcentual de 9.1%.



**Figura 5.44** Comparação dos espectros de renumeração de nós e o método de grau (MG) para o Multiplex formado pelas redes livre de escala de 1000 nós. Repare que o MG utiliza a troca de 499 nós e o método de renumeração de  $1 \times 10^4$  para ter uma pequena diferença porcentual de 3.7%.

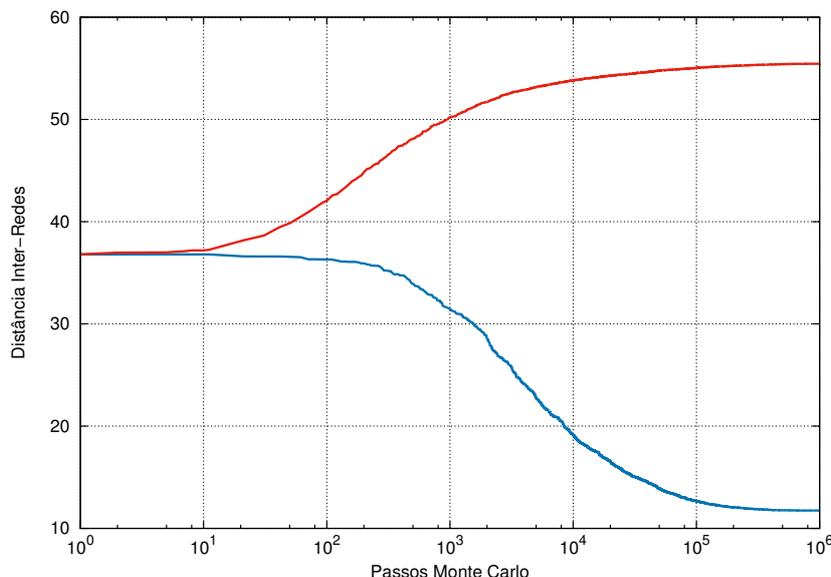
### 5.2.3 Redes Small World

Para finalizar esta discussão sobre os Multiplex formados pelas redes **RES**, apresentamos as redes Small World que serão mostradas com diferentes valores do parâmetro  $\rho$ , de igual forma como no caso dos Multiplex formados pelas redes Small World **RTI**. Isto com o objetivo de esclarecer se existe algum tipo de dependência no espectro conforme os valores do parâmetro  $\rho$  mudam e se a aplicação da renumeração de nós é possível sem importar o tipo de valor  $\rho$ . Além disso, a análise dos resultados ajuda na obtenção de conclusões comparativas entre os dois tipos de redes Small World trabalhadas (**RTI**, **RES**) para formar o Multiplex de duas camadas. De esta forma é possível uma comparação dos resultados com os Multiplex formados pelas redes Small World **RTI**. Considerando que esta comparação, só é possível quando as redes são afastadas, mas, sim, o comportamento do espectro nestes casos é igual, então pode-se generalizar ainda mais a aplicação do método de renumeração de nós na manipulação da dinâmica da difusão em redes Small World que formem um Multiplex.

#### Small World $\rho=0.05$

Na Figura 5.45 se mostra o gráfico das distâncias entre redes conseguidas afastando ou aproximando as duas redes. Repare que, a exceção das redes aleatórias, os gráficos das distâncias inter-redes das redes livres de escala e de pequeno mundo, mostram uma resistência ante a aproximação das redes, para ver este fato observe as Figuras 5.33, 5.36, 5.39 e 5.45, todas mostram que o processo de aproximação das redes (linha em cor azul) apresenta uma notória diferença com o processo de afastamento para a mesma semente geradora de números aleatórios. Esta diferença está no fato da distância conseguida em relação ao número de passos feito pelo método de Monte Carlo. Ou seja, foi muito mais fácil para o método conseguir afastar as redes **RES** de pequeno mundo e livre de escala em comparação com as redes aleatórias **RES**. Por outra parte, note que as distâncias conseguidas na Figura 5.45 são as maiores das redes **RES**, mas são menores em comparação com as conseguidas nas redes de Small World **RTI** (ver Figura 5.22).

A Figura 5.46 mostra o comportamento do espectro quando as duas redes são aproximadas. Note-se que além de ter uma forma mais complexa o gráfico, se apresenta um comportamento um pouco diferente ao mostrado até agora. Por exemplo, se observamos o autovalor correspondente a 10000 passos (linha em cor amarelo) e o examinamos em duas partes (uma parte linear,  $\lambda_2 = 2D_x$ , e outra não linear,  $\lambda_2 \neq 2D_x$ ), se observa em um princípio (parte linear) como a linha amarela que corresponde a este autovalor é menor que o autovalor em cor verde correspondente a zero passos ou trocas. Isto está de acordo com o que se espera que aconteça quando se utiliza o método de renumeração de nós. Mas depois em sua parte não linear ( $\lambda_2 \neq 2D_x$ ) os valores do autovalor com 10000 passos se comportam de maneira ascendente até ficar com um valor mais alto que os outros autovalores correspondentes. Este comportamento da linha em cor amarelo ressalta o fato de poder conseguir todos os diferentes estados de difusão, com só a mudança da grandeza  $D_x$ . Além disso, para 10000, 100000 e  $1 \times 10^6$  passos mostra-se o fenômeno da super-difusão (ver Capítulo 4) em uma parte dos valores do parâmetro de difusão inter-redes  $D_x$ . Para os autovalores dos outros passos se apresenta comportamentos semelhan-

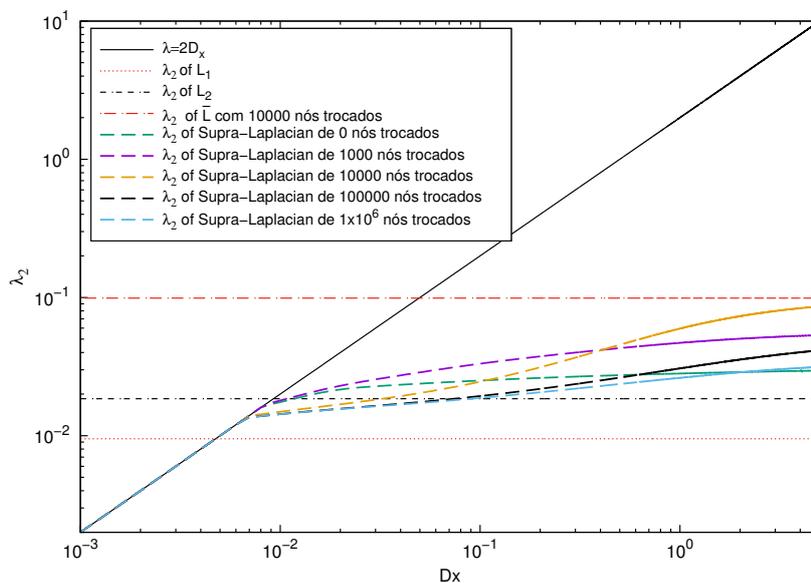


**Figura 5.45** Distância inter-redes entre redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$  que formam o Multiplex **RES** de duas camadas, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo

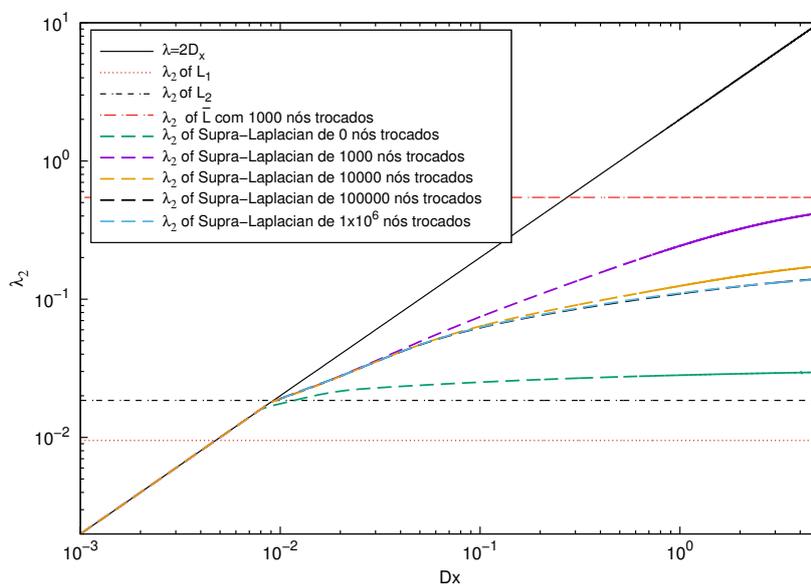
tes, mas não conseguem obter todos os estados de difusão como no caso dos 10000 passos. Por outra parte ressaltamos que apesar disto o caso de mínima distância inter-redes (linha em cor azul) consegue obter os estados de menor difusão, entre todos.

O espectro correspondente ao afastamento entre as duas redes é apresentado na Figura 5.47. Repare que o comportamento é semelhante ao apresentado nas redes Small World **RTI**, já que os máximos valores de difusão são apresentados para os 1000 passos, o equivalente a tão só 20.3% do afastamento total que a distância entre redes pode conseguir (ver Figura 5.45). Outro aspecto a ressaltar é a presença de um espaço entre as as linhas de afastamentos maiores a 100000 passos e 1000 passos. Este comportamento foi presente também em redes Small World **RTI** e foi desaparecendo a medida que o parâmetro ficava mais perto de um.

Portanto em relação ao afastamento se pode concluir que para obter os máximos valores de difusão (menores tempos de relaxamento do Multiplex) não é necessário alcançar o máximo afastamento possível entre as duas redes com o método de renumeração de nós. Nos casos a seguir se observará se estes resultados mudam da mesma forma como no caso das redes **RTI**.



**Figura 5.46** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



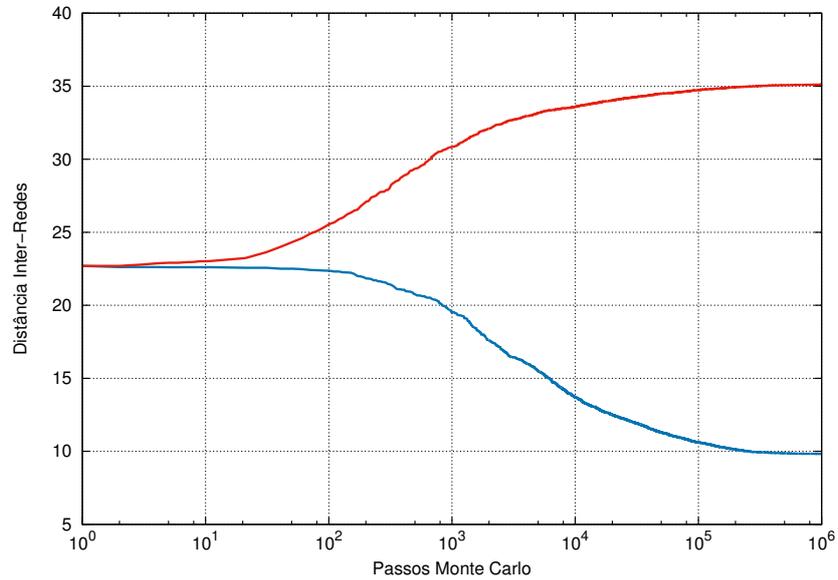
**Figura 5.47** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

### Small World $\rho=0.1$

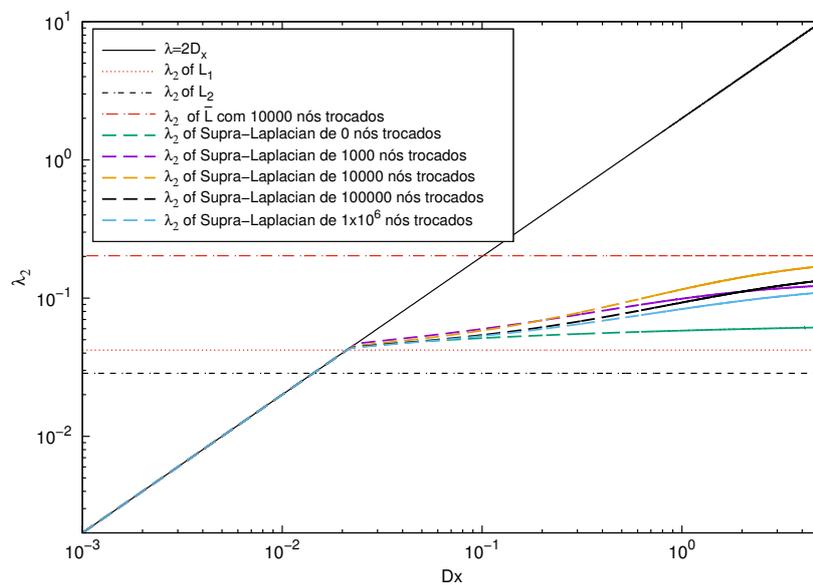
Na Figura 5.48 é apresentado o gráfico da distância inter-redes. Repare que a forma do gráfico inter-redes é semelhante com apresentada no caso de  $\rho = 0.05$  e portanto existe a presença de uma resistência ante a aproximação das redes. Este comportamento foi observado nos casos anteriores das redes **RES** (excluindo às redes aleatórias). Por exemplo, si consideramos o ponto correspondente aos 1000 passos na Figura 5.48, observamos que a aproximação da rede (linha em cor azul) leva só 19.2% do total que pode-se alcançar e por outra parte o afastamento (linha em cor vermelho) para esse mesmo valor leva já um 67.6% do total. Outra coisa a ressaltar é que o valor da magnitude total da distância conseguida aproximando as duas redes equivale à 52.17% do valor total da distância conseguida entre afastar e aproximar as redes. O que significa que tanto o afastamento como a aproximação das duas redes conseguem uma magnitude de distância parecida. Esta quase simetria nas distâncias conseguidas pode-se observar também na Figura 5.45, onde o afastamento representa 41.4% frente a 58.6% da aproximação. Caso contrario nas redes livre de escala onde a aproximação consegue obter um maior porcentagem que o afastamento.

Por outra parte na Figura 5.49 se mostra o espectro para a aproximação das duas redes. Repare que este é o primeiro caso onde não foi possível conseguir menores valores de difusão em comparação com o caso inicial de zero troca de nós (linha em cor verde). Se observamos este comportamento da mesma forma como no caso anterior, ou seja em suas duas partes, uma linear e outra não linear, pode-se ver que na parte linear todos os valores do espectro conseguidos se comportam com valores de difusão iguais, mas a diferença se apresenta na parte não linear, quando todos os valores de difusão passam a distanciar-se entre si. Este comportamento foi pesquisado em redes de diferentes probabilidades (ver Figuras 5.50, 5.51 e 5.52), mas não se apresentou mais, pelo que se conclui que, não existe relação alguma com o parâmetro  $\rho$ . Note-se que também nos casos apresentados nas Figuras 5.50, 5.51 e 5.52 se consegue sempre com o caso de mínima distância, os menores valores de difusão, mostrando que, desta forma as redes Small World apresentam uma maior dificuldade na manipulação da difusão quando são aproximadas, mas na maior parte dos casos se consegue menores valores de difusão com o fato da existência da distância mínima inter-redes.

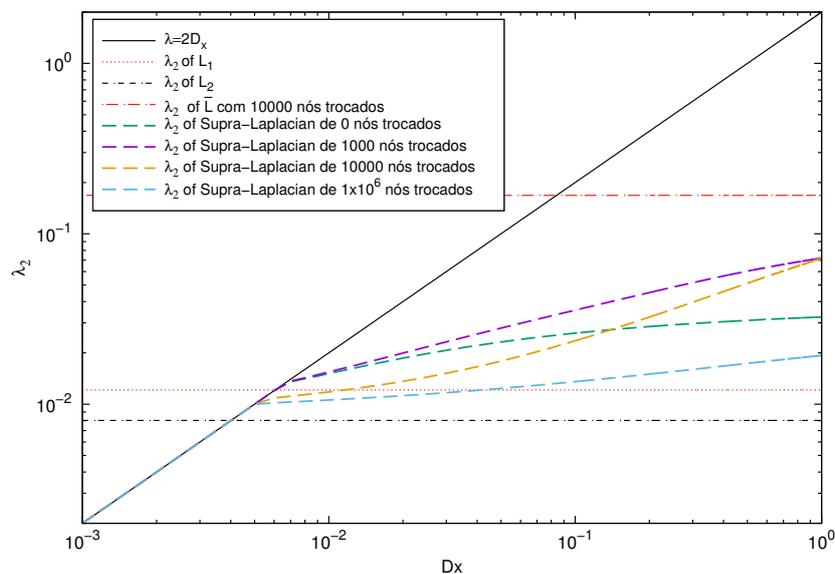
Para o caso de afastamento entre as duas redes apresentamos a Figura 5.53, onde pode-se ver que apresenta-se o mesmo comportamento que as redes Small World **RTI** e **RES**. Repare que quando é feita a renumeração de 1000 nós, o equivalente à 67,6% do afastamento total, se consegue os maiores valores de difusão inter-redes. Por outra parte pode-se ver que existe como na Figura 5.47, correspondente ao caso de  $\rho = 0.05$ , uma distância entre os casos de máximos valores de difusão (linhas para os casos de 100000 e  $1 \times 10^6$  passos) e os outros valores de afastamento (linha em cor roxo de 1000 passos de afastamento) que mostraram uma menor difusão. Para entender melhor isto compare as Figuras 5.47, 5.53, 5.54, 5.55 e 5.56 que mostram a presença do mesmo comportamento descrito nos espectros de afastamento quando o parâmetro  $\rho$  tem um comportamento progressivo.



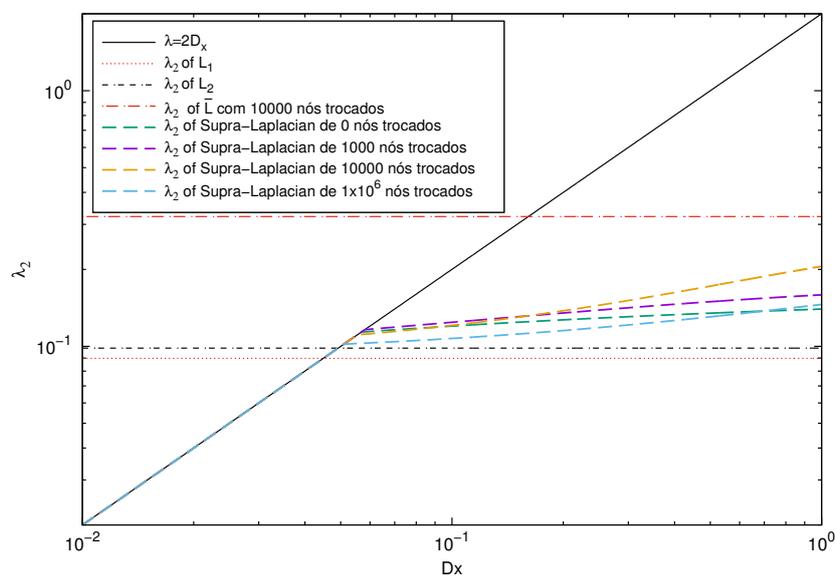
**Figura 5.48** Distância inter-redes entre redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$  que formam o Multiplex **RES** de duas camadas, afastamento em cor vermelho e aproximação em cor azul, em função do número de passos do método de Monte Carlo.



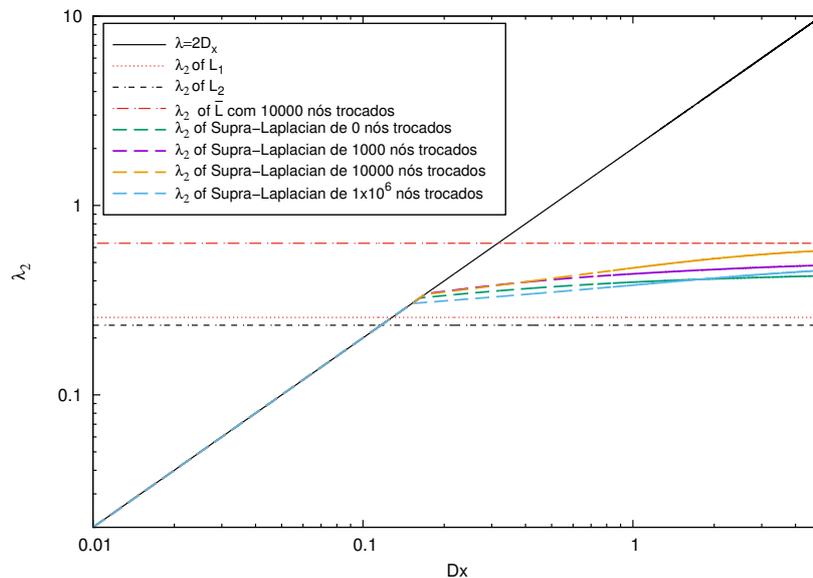
**Figura 5.49** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



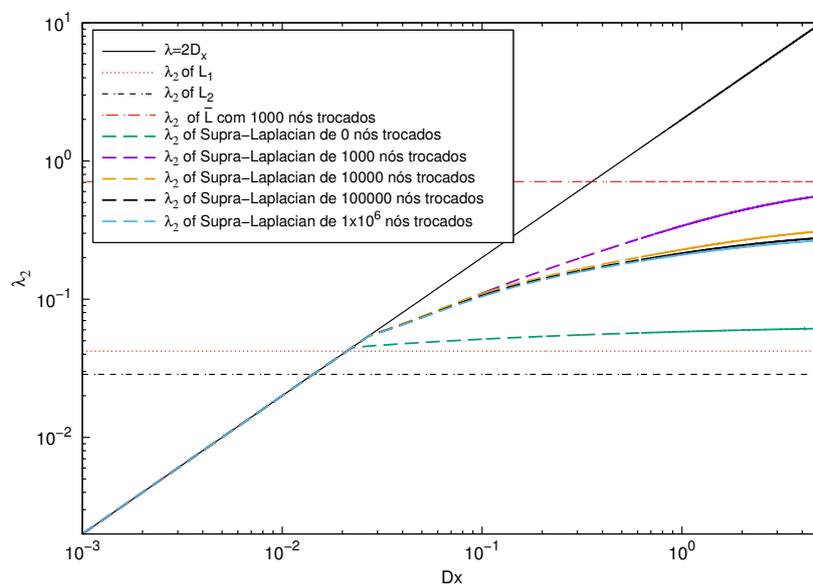
**Figura 5.50** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.07$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



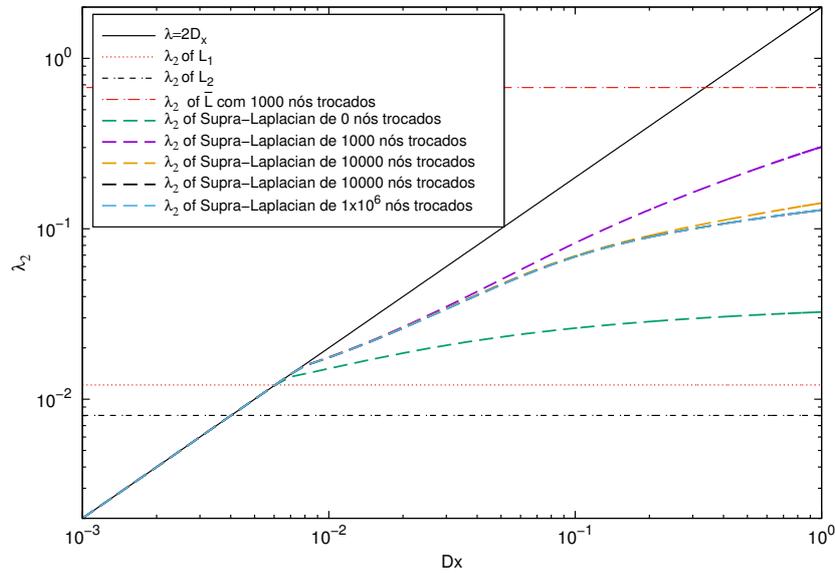
**Figura 5.51** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.2$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



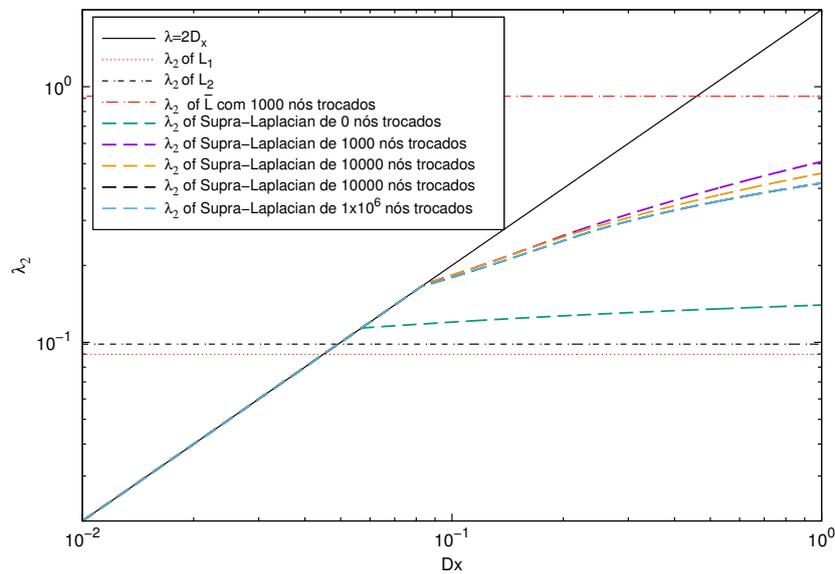
**Figura 5.52** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para a aproximação de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



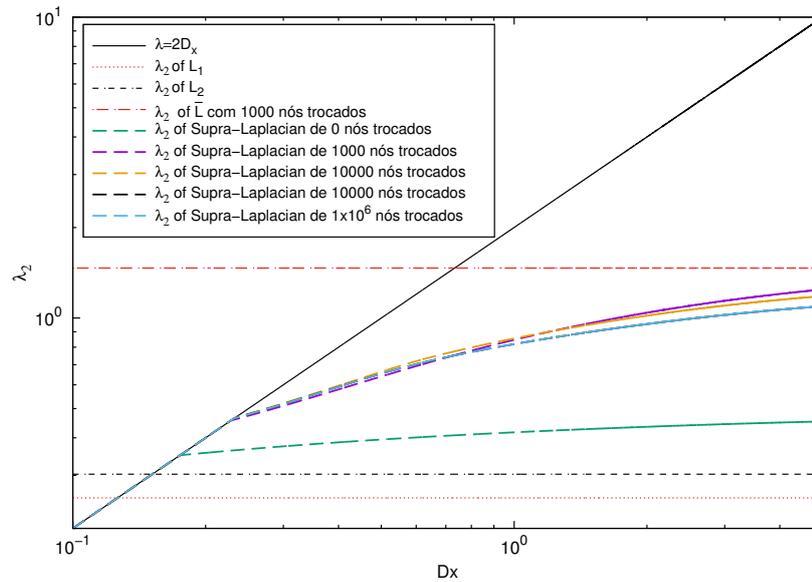
**Figura 5.53** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.1$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.54** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.07$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.55** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.2$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.56** Espectro do Multiplex de duas camadas **RES** para o afastamento de duas de pequeno mundo com probabilidade  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

Com tudo isto pode-se dizer que o Multiplex formado pelas redes **RES** Small World tem uma relação direta entre o afastamento e o aumento da difusão no espectro, mas para o processo de aproximação de redes o espectro não apresenta este tipo de relação e em alguns casos não se alcança a obter menores valores de difusão para a aproximação das redes que formam o Multiplex. Portanto as redes Small world apresentam uma resistência ante a manipulação do espectro, deixando tão só uma manipulação parcial dos processos difusivos.

### 5.3 DIFUSÃO EM MULTIPLEX RTD

Nesta última seção, vai-se abordar os Multiplex formados pelas redes **RTD** (ver Figura 4.7) que, de forma diferente dos outros tipos de Multiplex (**RTI**, **RES**), são formados pelas combinações dos modelos de redes que foram apresentadas no Capítulo 2 Seção 2.3. As diversas características e propriedades dos diferentes modelos de redes, possibilitam um melhor complemento para o estudo e entendimento da dinâmica espectral em Multiplex de duas camadas.

De forma semelhante aos Multiplex **RES** da seção anterior, as redes que formam o Multiplex **RTD** possuirão autovalores com diferentes valores iniciais. Ou seja, os segundos autovalores das camadas não serão iguais ( $\lambda_2(L_1) \neq \lambda_2(L_2)$ ), como se apresentou no caso dos Multiplex **RTI**. Portanto existe a grande possibilidade de obter nos estudos da dinâmica espectral o fenômeno de super-difusão (ver Capítulo 4), ou inclusive conseguir aumentar ou diminuir de forma total ou parcial a super-difusão por meio da renumeração de nós, afastando ou aproximando as duas redes do Multiplex.

Para estes tipos de Multiplex **RTI**, foram escolhidas três tipos casos, onde se apresentam as combinações possíveis. Por outra parte, todas as redes trabalhadas nesta seção terão um tamanho padrão 500 e as probabilidades de redes aleatórias ou de pequeno mundo serão diferenciadas como  $\rho_a$  e  $\rho_s$  ao menos que se diga o contrário.

#### 5.3.1 Redes Aleatórias e Small World

Nesta seção serão trabalhados três diferentes configurações de Multiplex, formados pelas redes aleatória e de pequeno mundo, compartilhando a mesma probabilidade. ou seja,  $\rho_a = \rho_s = \rho$ . Na primeira configuração se apresenta quando o valor probabilístico é  $\rho = 0.1$ . Ressaltamos que a rede aleatória utilizada nesta parte do estudo é a mesma que se utilizou no caso dos Multiplex **RTI** formados pelas redes aleatórias. Isto com o fim de evidenciar as possíveis diferenças que se apresentem entre os dois tipos de Multiplex, quando os dois tipos de Multiplex (**RES** e **RTI**) compartilham uma das rede que o formam, além de se observar se o comportamento espectral pode obedecer o uso dos **NPD**. No segundo e terceiro caso, temos um Multiplex formado por uma rede Small World e aleatórias onde o parâmetro de probabilidade é  $\rho = 0.5$  e  $\rho = 0.05$ . Isto ajudará a observar se os comportamentos espectrais são dependentes dos valores probabilísticos de  $\rho$  ou pelo contrário se não se mantêm os comportamentos, mostrando a dependência com o parâmetro  $\rho$ .

Por outra parte devido à diferença presente nas redes se escolheu em todos os casos que a rede a ser renumerada será a rede aleatória. Isto por causa de duas razões, a primeira é a presença dos **NPD** nos Multiplex **RTI** quando as redes aleatórias foram renumeradas e a segunda são os valores pequenos de difusão apresentados nas configurações dos Multiplex formados pelas redes Small World. E por isso que se escolheu como rede padrão a Small World e a rede renumerada portanto foi rede aleatória.

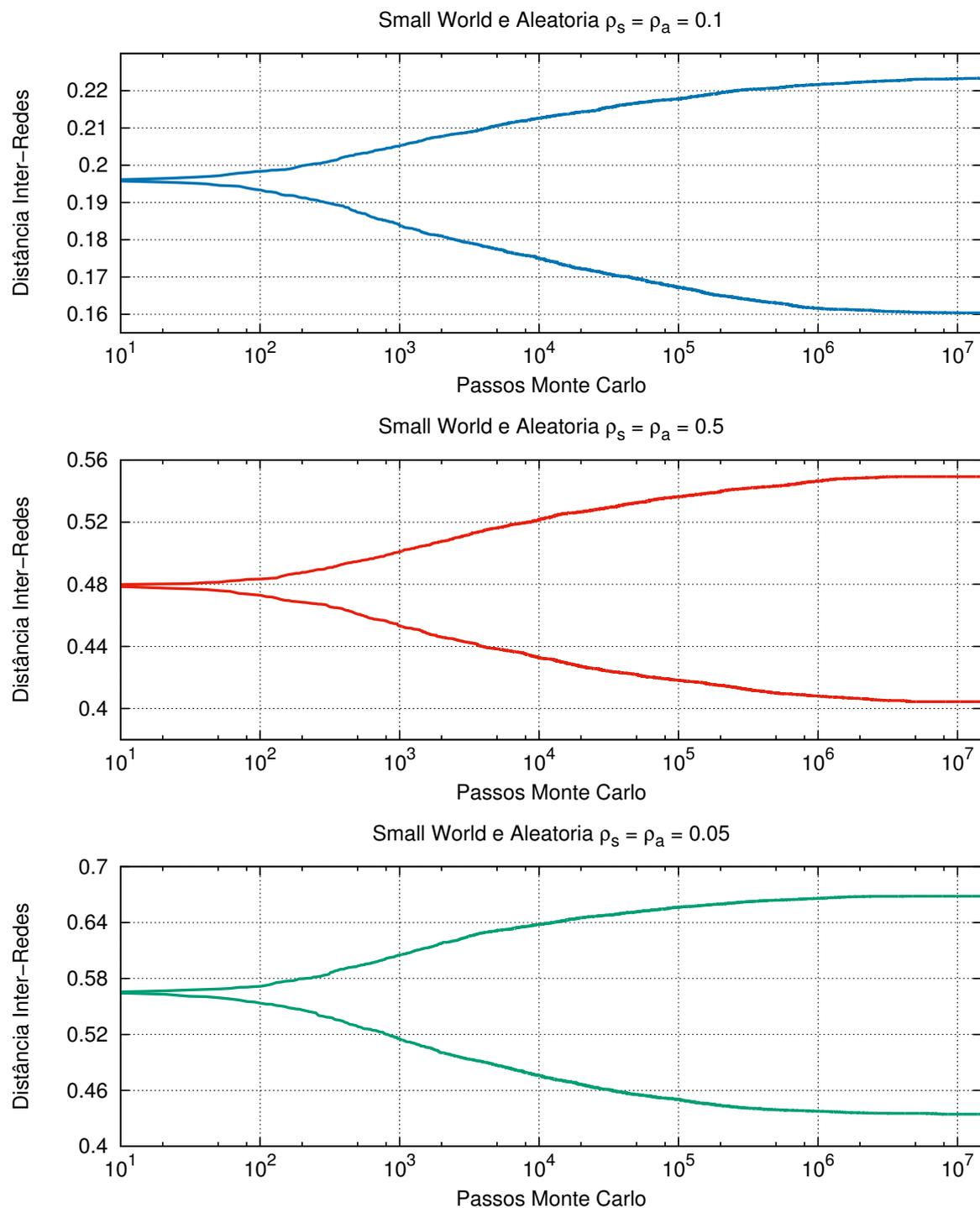
Na Figura 5.57 se apresentam os gráficos das distâncias inter-redes, para os três tipos de Multiplex. Repare que os três gráficos que formam a Figura 5.57 apresentam em diferente cor a distância inter-redes de afastamento e aproximação de cada um dos casos de Multiplex, que são diferenciados pela probabilidade  $\rho$ . Note-se que no primeiro gráfico em cor azul apresentamos a distância inter-redes, para o caso quando  $\rho = 0.1$ . Neste caso, a distância topologia de afastamento conseguida, em comparação das redes aleatórias **RTI** (ver Figura 5.4), é muito semelhante, mas acontece o contrario para o caso das distâncias de de afastamento e aproximação das redes Small World **RES** (ver Figura 5.48). Agora, para os Multiplex onde  $\rho = 0.5$  e  $\rho = 0.05$  na Figura 5.57, os valores conseguidos das distâncias inter-redes são parecidos aos casos apresentados nas redes aleatórias **RES** (ver Figuras 5.27 e 5.30).

Ao comparar todos os gráficos, notamos que apesar das diferenças que se percebem nas diferentes grandezas como a clusterização e a distância media entre as redes aleatórias e de pequeno mundo, os valores das distâncias inter-redes de aproximação e afastamento são pequenos. Isto mostra a existência de pequenas diferenças estruturais ou topológicas. Ou seja, não se apresentam valores muito grandes nas distâncias inter-redes e portanto uma rede aleatória pode ser muito semelhante a uma rede de mundo pequeno (ver Figura 2.6).

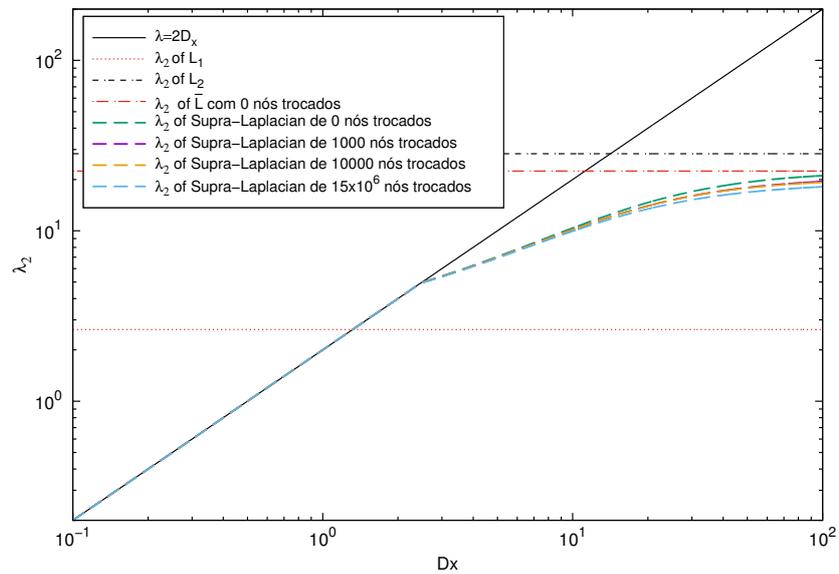
Repare também que, os gráficos iniciam a partir dos 10 passo de Monte Carlo porque a partir deste instante se começam a apresentar maiores distâncias de afastamento ou aproximação inter-redes. Este fato, mais as pequenas distâncias inter-redes e a simetria presente nos gráficos mostram de novo a existência de pequenas diferenças topológicas entre os dois modelos de redes.

Nas Figuras 5.58, 5.59 e 5.60 se apresentam os espectros de aproximação das redes dos três tipos de Multiplex. Note-se que em todos os gráficos se mostra um claro comportamento progressivo dos autovalores, a medida que as duas redes são renumeradas no processo de aproximação. Por outra parte observa-se como os valores dos estados de difusão são maiores à medida que o parâmetro de probabilidade é maior, portanto os maiores valores dos estados de difusão são apresentados na Figura 5.59 que corresponde a  $\rho = 0.5$ . Por outra parte, se ressalta que em todos os Multiplex apresentados se conseguiu obter menores valores de difusão mediante a aproximação das redes, mas cabe dizer que os valores apresentados não representam mudanças muito significativas no espectro. Isto mostra como este tipo de configurações de Multiplex apresentam uma certa resistência do espectro de difusão ante o processo de renumeração de nós.

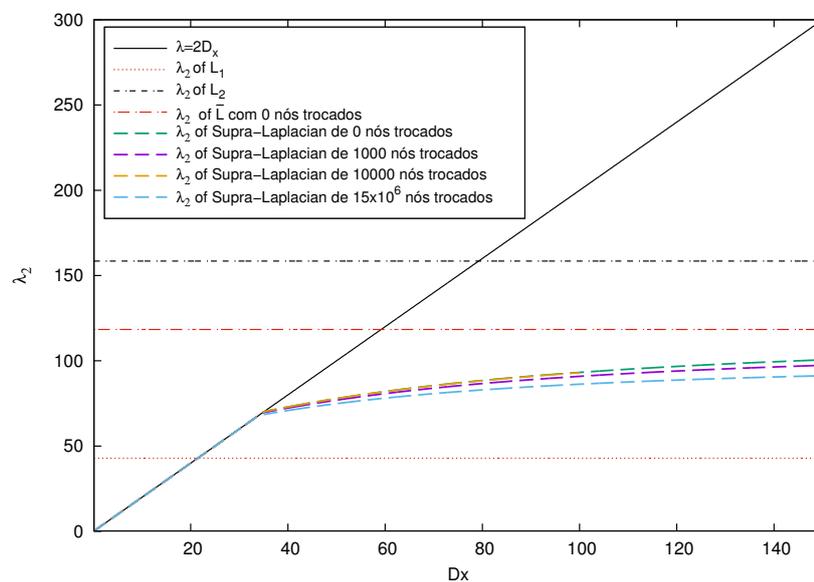
Por outra parte note-se que nas Figura 5.58 e 5.59 se apresenta o fenômeno da super-difusão em todo o espectro, mas no caso da Figura 5.60 o fenômeno da super-difusão se apresenta de uma forma diferente ante o processo de renumeração de nós. Ou seja, no inicio (caso de zero trocas) a super difusão esta presente de forma parcial do espectro, mas quando se utiliza o processo de aproximação das duas redes e como consequência mudanças no espectro, a super-difusão deixa de ser parcial para ser total a partir dos 1000 nós trocados até o caso de distância mínima. Esta transição, onde no início uma das redes do multiplex tem uma maior difusão que o Multiplex, para certos valores do coeficiente de difusão  $D_x$ , é mudada a uma onde, sem importar o valor do coeficiente  $D_x$ , a super difusão sempre acontece.



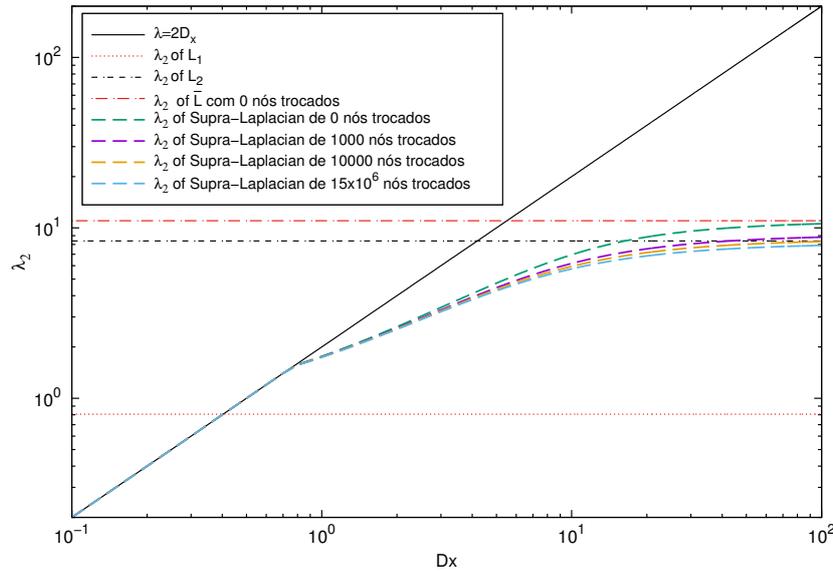
**Figura 5.57** Três diferentes gráficos de distância inter-redes, entre redes de pequeno mundo com probabilidade  $\rho_s$  e redes aleatórias com probabilidade  $\rho_a$  que formam o Multiplex **RTD**, em função dos passos do método de Monte Carlo.



**Figura 5.58** Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para a aproximação das redes de pequeno mundo e aleatória com probabilidade  $\rho = 0.1$ . Apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



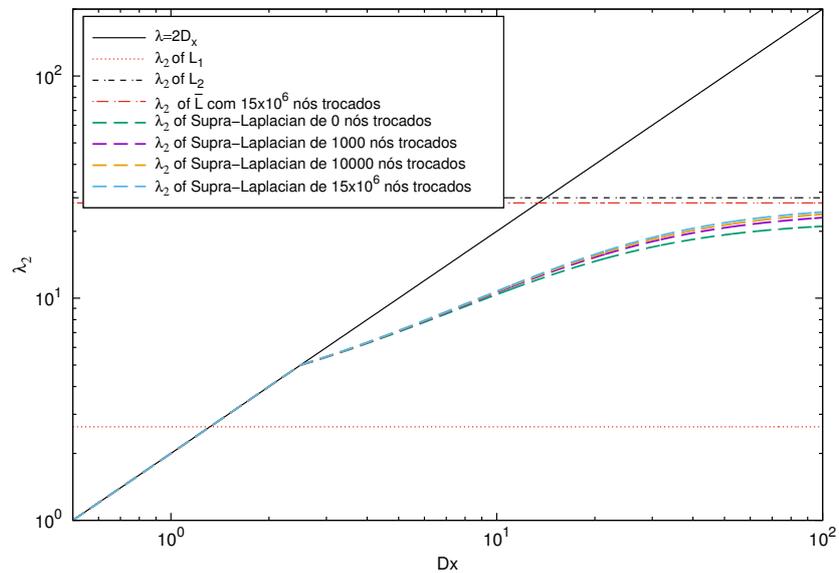
**Figura 5.59** Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para a aproximação das redes de pequeno mundo e aleatória com probabilidade  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



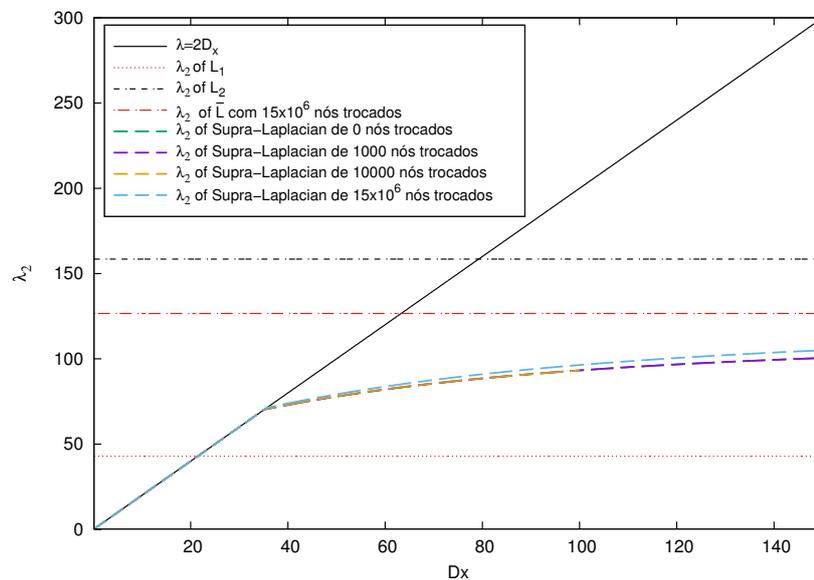
**Figura 5.60** Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para a aproximação das redes de pequeno mundo e aleatória com probabilidade  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento espectral do segundo autovalor  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós..

Por último apresentamos as Figuras 5.61, 5.62 e 5.63, que correspondem aos espectros do Multiplex, quando as duas redes apresentam diferentes afastamentos. Note-se que da observação dos espectros de afastamento e aproximação o comportamento ante a renumeração de nós apresenta uma mudança só para valores grandes do coeficiente de difusão inter-redes ( $D_x$ ), que corresponde à parte não linear do espectro. Isto mostra a grande resistência espectral dos Multiplexs ante o processo de renumeração de nós. Ou seja, todos os espectros tanto de aproximação como de afastamento não apresentaram mudanças espectrais na parte linear, mas a medida que o coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$  é maior, uma mudança pouco significativa começa a ser percebida. Portanto para conseguir mudanças espectrais dos estados de difusão em este tipo de Multiplex, se precisa de dois fatos. O primeiro é a utilização do método de renumeração para afastar ou aproximar as duas redes do multiplex e o segundo fato está ligado aos valores altos do coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ .

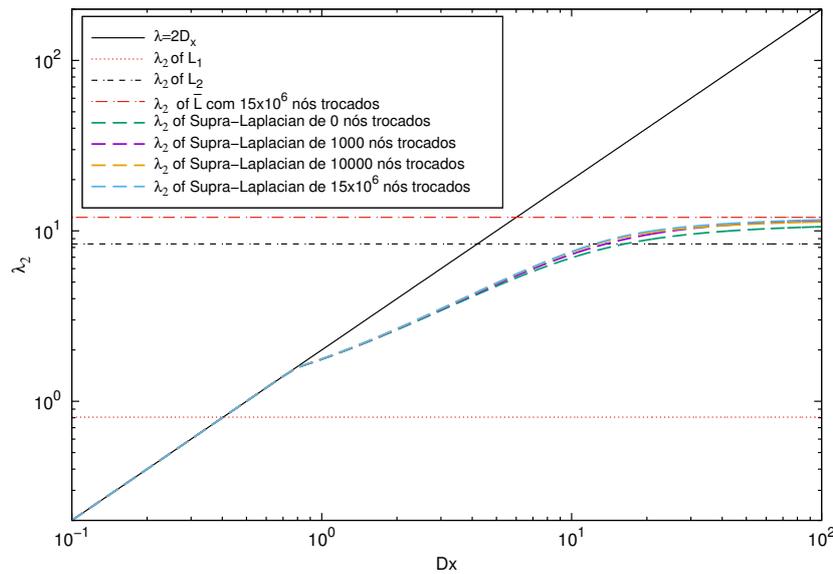
Outro fato a ressaltar também, é de novo a presença do fenômeno de super-difusão nos mesmos casos apresentados nos espectros de aproximação das redes (ver Figuras 5.58 e 5.59). Este fenômeno acontece de forma parcial (ver Figura 5.63) ou de forma total. Mas, a diferença do caso da aproximação o afastamento não chega a mudar de forma significativa a super-difusão.



**Figura 5.61** Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para o afastamento de duas redes Small World de 500 nós com  $\rho = 0.1$ , apresentando o comportamento de  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.



**Figura 5.62** Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para o afastamento de duas redes Small World de 500 nós com  $\rho = 0.5$ , apresentando o comportamento de  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

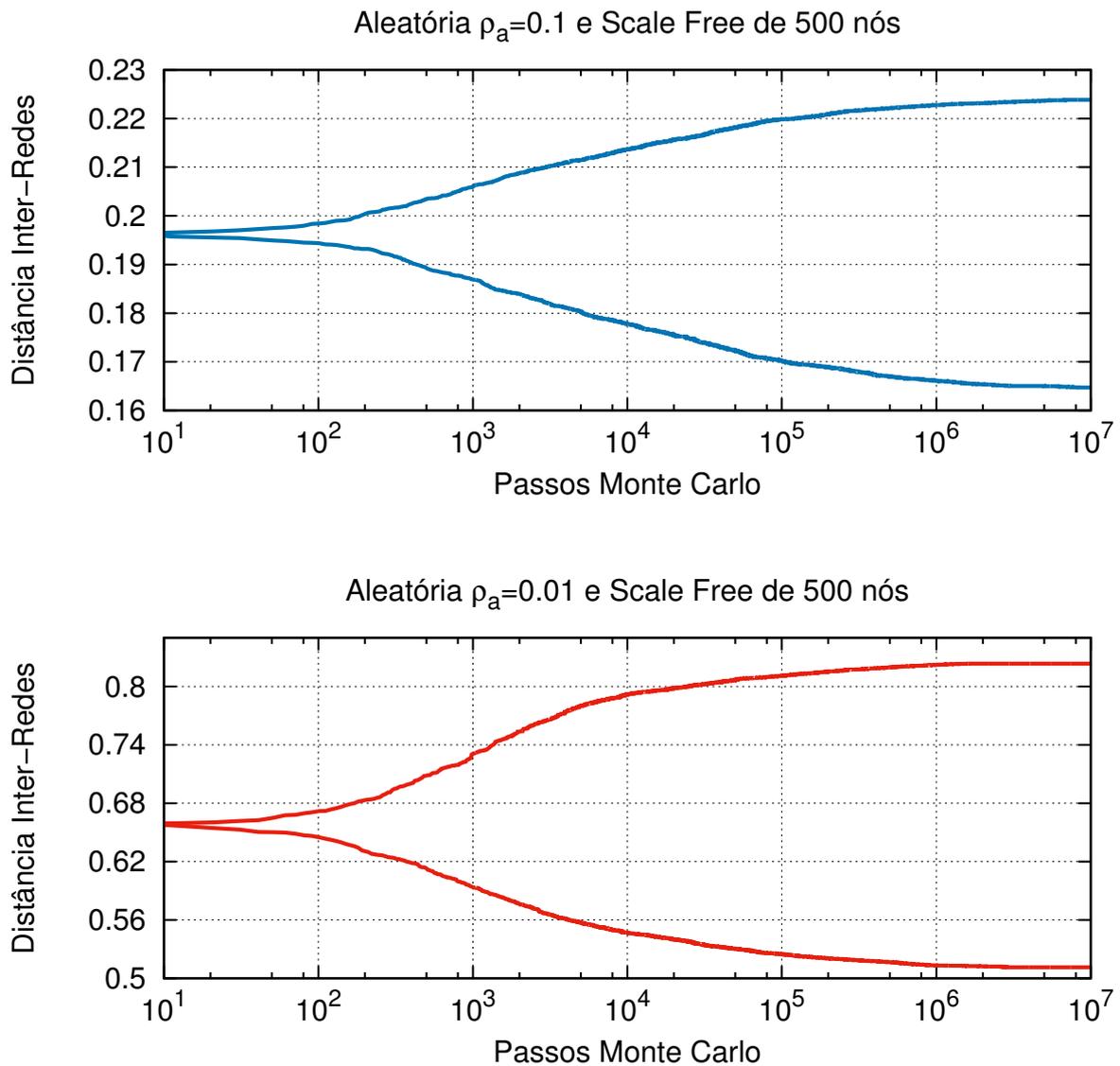


**Figura 5.63** Espectro do Multiplex de duas camadas **RTD** para o afastamento de duas redes Small World de 500 nós com  $\rho = 0.05$ , apresentando o comportamento de  $\lambda_2$  em relação ao coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ , para diferentes distâncias feitas pela renumeração de nós.

### 5.3.2 Redes Aleatórias e Livre de escala

Nesta parte apresentamos duas configurações de Multiplexs que são formadas por uma rede aleatória de probabilidade  $\rho_a$ , junto com a rede livre de escala. Da mesma forma como no caso anterior, a configuração escolhida para os Multiplexs é uma rede livre de escala (como uma rede fixa) junto à permutação com dois tipos de redes aleatórias com valores de probabilidade  $\rho = 0.1$  e  $0.01$ . Além disso a rede a ser renumerada em todos os casos será a rede aleatória, devido às suas capacidades de mudança espectral ante a renumeração de nós respeito da rede livre de escala, que em todos os casos apresentou uma resistência ante a renumeração de nós. Por outra parte a escolha dos valores de  $\rho_a$  na rede aleatória pretende analisar além das mudanças ante a renumeração de nós, os efeitos que pode alcançar diferentes redes aleatórias ante a mesma rede livre de escala.

Na Figura 5.64 apresentam-se os gráficos das distâncias topológicas inter-redes dos dois tipos de configurações de Multiplexs, formados pelas combinações de uma rede aleatória (com valores de probabilidade  $\rho_a = 0.1$  ou  $\rho_a = 0.01$ ) e uma rede livre de escala. Repare que as distâncias topológicas inter-redes para os dois tipos de Multiplexs são semelhantes às apresentadas nas redes aleatórias dos Multiplexs **RTI** e **RES**, e além disso, a forma dos gráficos apresentam uma clara distinção com as redes livre de escala **RES**. Mas como foi mostrado no caso anterior, esta semelhança nas distâncias inter-redes não significa comportamentos espectrais de difusão iguais entre os Multiplexs. Ou seja, os intervalos das distâncias conseguidos nos Multiplexs não garantam a existência de comportamentos espectrais similares entre diferentes Multiplexs.



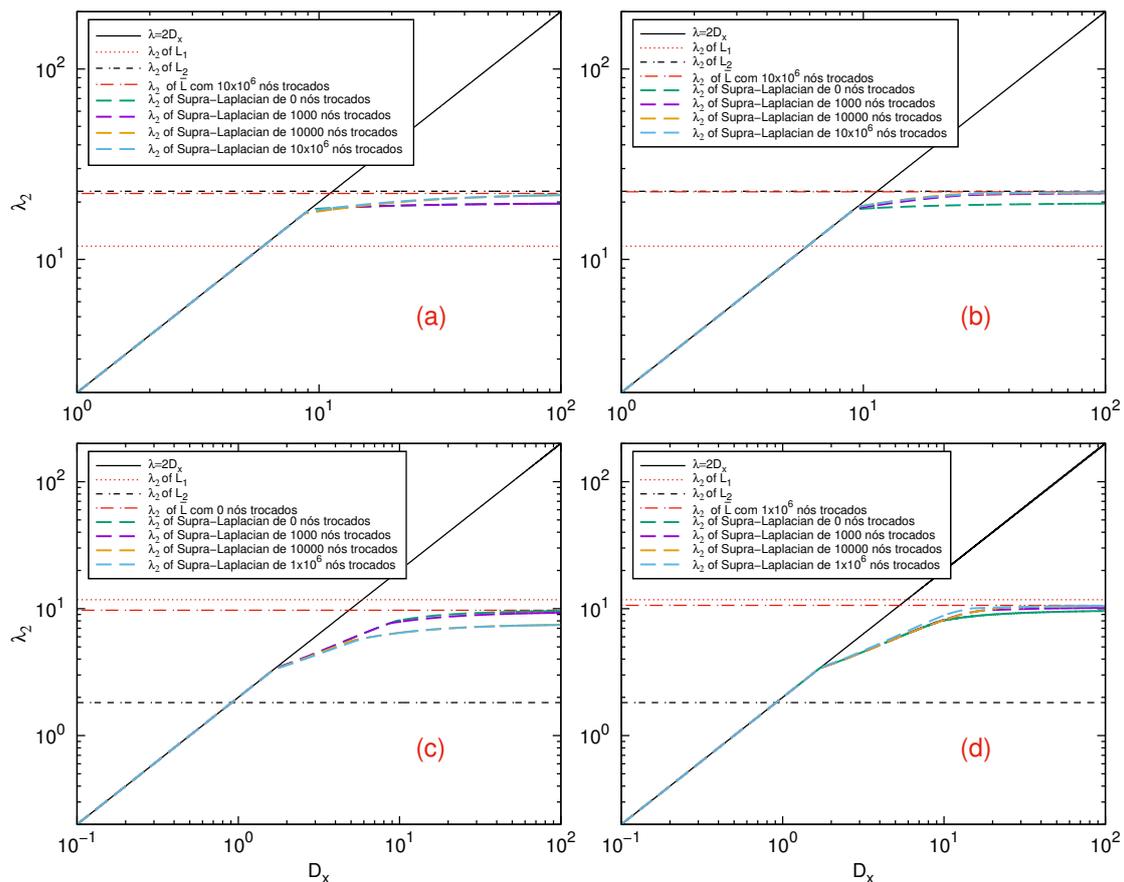
**Figura 5.64** Dois diferentes gráficos de distância inter-redes, entre a rede aleatória com probabilidade  $\rho_a$  e rede livre de escala de 500 nós que formam o Multiplex **RTD**, em função dos passos do método de Monte Carlo.

Por outra parte se observamos os dois gráficos da Figura 5.64, pode-se ver que apresentam diferenças nas distâncias inter-redes. Isto sugere que a rede aleatória  $\rho = 0.1$  é mais semelhante topologicamente da rede livre de escala que a rede aleatória  $\rho = 0.01$ . Isto é baseado na observação dos gráficos e das magnitudes das distâncias inter-redes. Por exemplo, no gráfico correspondente com a rede aleatória  $\rho_a = 0.01$  se observa que o método de renumeração de nós consegue maiores valores de distância inter-redes com um número menor de passos de Monte Carlo em comparação com o outro caso da rede aleatória  $\rho = 0.1$ . Isto mostra que a menos probabilidade as distâncias inter-redes de uma rede aleatória<sup>7</sup> com uma rede livre de escala são maiores.

Na Figura 5.65 são apresentados os gráficos dos espectros de aproximação e afastamento para os dois tipos de Multiplexs, que serão diferenciados pelo valor de probabilidade da rede aleatória  $\rho_a$ . Note-se que os gráficos de aproximação (a) e afastamento (b) correspondem ao Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_a = 0.1$  e os gráficos dos espectros de aproximação (c) e afastamento (d) ao Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_a = 0.01$ . Repare também que em todos os gráficos dos espectros o segundo autovalor  $\lambda_2(L_1)$  corresponde com a rede livre de escala, já que como se falou está rede foi a mesma para os dois Multiplexs e portanto é normal observar o autovalor  $\lambda_2(L_1)$  com igual valor em todos os gráficos da Figura 5.65. Por outra parte, em todos os gráficos dos espectros se apresenta o fenômeno da super-difusão, mas para cada Multiplex a rede que causa a super-difusão não é a mesma. Por exemplo no caso do Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_a = 0.1$  (gráficos (a) e (b)) a super-difusão é causada pelo segundo autovalor da rede aleatória ( $\lambda_2(L_2)$ ) e no caso do Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_{0.01}$  (gráficos (c) e (d)) a super-difusão é causada pelo segundo autovalor da rede livre de escala ( $\lambda_2(L_2)$ ). Isto mais a mudança no espectro pela renumeração de nós mostra dois fatos importantes na análises: o primeiro é que, em todos os casos, o fenômeno da super-difusão está presente ainda depois dos processos de afastamento ou aproximação das redes. Ou seja, o afastamento ou aproximação das redes mediante Monte Carlo não desaparece a o fenômeno da super-difusão nem totalmente ou parcialmente. O segundo fato é que na Figura 5.65, se apresentam melhores tempos de difusão, em comparação com qualquer Multiplex **RTI** e **RES** formado pelas redes livres de escala.

Por outra parte, e de forma geral, em todos os gráficos dos espectros apresentados na Figura 5.65 o método de renumeração de nós, não consegue mudança alguma na parte linear ( $\lambda_2 = 2D_x$ ) dos espectros de afastamento e aproximação dos Multiplexs. Entretanto para a parte não linear dos espectros ( $\lambda_2 \neq 2D_x$ ), a renumeração de nós consegue mudar o comportamento difusivo, mas cabe ressaltar o fato que a mudança acontece em uma forma não muito significativa e de igual forma como nos outros casos dos Multiplex **RTD** já apresentados. Isto mostra que, apesar de obter melhores valores de difusão em comparação com os outros Multiplex formados pelas redes livre de escala, ainda existe a resistência do espectro ante a renumeração de nós, presente de igual forma nos Multiplex **RTI** e **RES** formados pelas redes livre de escala. Por outra parte isto também mostra a não existência de **NPD** neste tipo de Multiplex pela presença das redes aleatórias.

<sup>7</sup>Lembrando-se que entre menor seja a probabilidade a rede aleatória é mais parecida a uma rede regular conexa em forma de anelo.

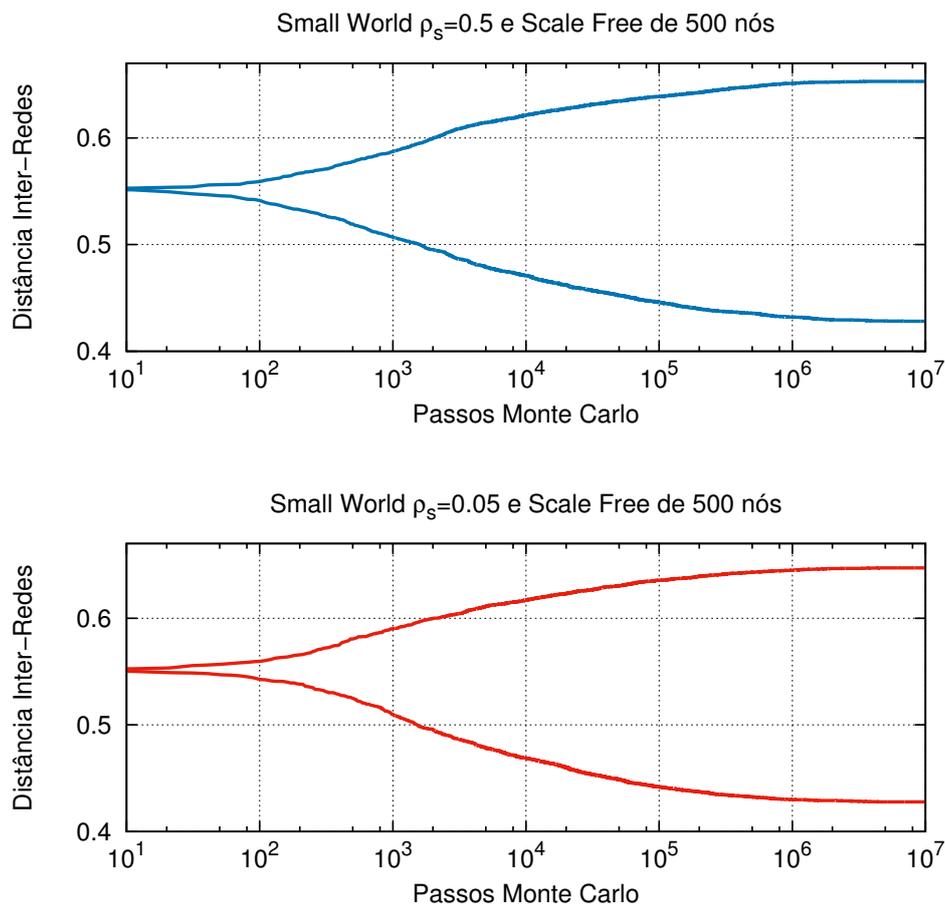


**Figura 5.65** Espectros de afastamento e aproximação pela renumeração de nós do Multiplex **RTD** formado pela rede aleatória com probabilidade  $\rho_a$  junto à rede livre de escala de 500 nós. (a) e (b) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_a = 0.1$ . (c) e (d) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede aleatória  $\rho_a = 0.01$ . Note-se que a renumeração muda o comportamento espectral, tanto na aproximação como no afastamento, para valores altos do coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ .

### 5.3.3 Small World e Scale Free

Como parte final da análises desta dissertação, apresentamos o Multiplex formado pela combinação da rede de pequeno mundo, dependente do parâmetro  $\rho_s$  e a rede livre de escala. Identificaremos os Multiplexs neste caso pelo valor de probabilidade da rede Small World  $\rho_s$ . De igual forma como no caso da seção anterior, serão trabalhados dois tipos de Multiplex formados pelas redes de pequeno mundo de diferentes probabilidades  $\rho_s$  e a mesma rede livre de escala, mas nesta secção a rede a ser renumerada será a rede livre de escala, já que apresentou maiores valores de difusão no espectro em comparação da rede de pequeno mundo.

Por outra parte, se espera que este tipo de configuração melhore o espectro do Multiplex e mostre as relações presentes quando existem diferentes tipos de redes de pequeno mundo. Isto terminara de mostrar se existe ou não algum tipo de dependência do parâmetro de probabilidade em Multiplex **RTD**.



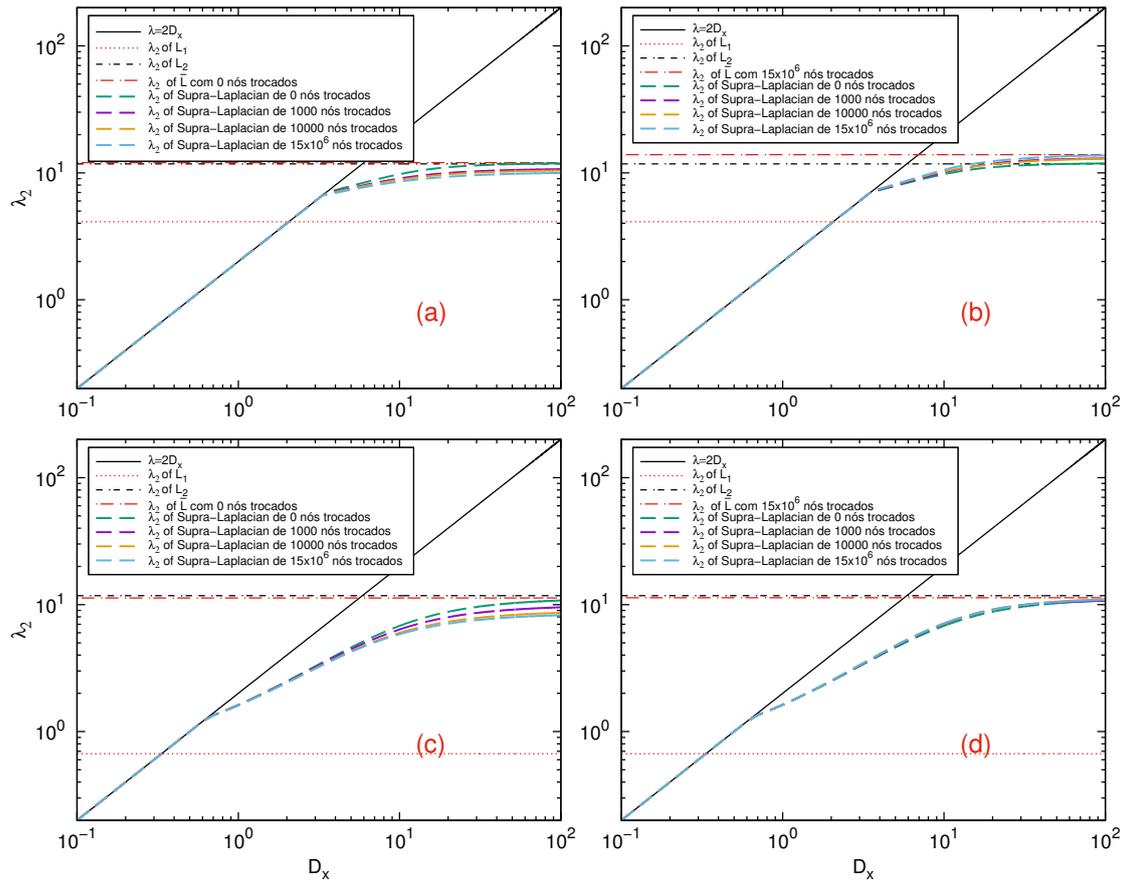
**Figura 5.66** Dois diferentes gráficos de distância inter-redes, entre a rede de pequeno mundo com probabilidade  $\rho_s$  e rede livre de escala de 500 nós que formam o Multiplex **RTD**, em função dos passos do método de Monte Carlo.

Na Figura 5.66 observamos as distâncias topológicas inter redes para os dois tipos de configurações dos Multiplex. Repare que de forma similar à de outros Multiplex, **RTD** o comportamento das distâncias inter-redes de afastamento e aproximação não apresentam muitas diferenças nem dificuldades ante o método de renumeração de nós. Além disso, note-se que os gráficos das distâncias apresentam valores semelhantes tanto de aproximação como de afastamento com algumas pequenas diferenças no comportamento. Este comportamento e valores semelhantes não acontece nos Multiplex **RES** tanto com opera redes livre de escala como para as redes de pequeno mundo. Por outro lado isto também sugere que, sem importar o valor da probabilidade as redes de pequeno mundo apresentam a mesma proximidade com a redes livre de escala.

Na Figura 5.67 apresentamos os gráficos dos espectros de afastamento e aproximação dos Multiplex. Note-se que os gráficos de aproximação (a) e afastamento (b) correspondem ao Multiplex formado pela rede Small World  $\rho_s = 0.5$  e portanto os gráficos de aproximação (c) e afastamento (d) ao Multiplex formado pela rede Small World  $\rho_s = 0.05$ . Repare que neste caso o segundo autovalor  $\lambda_2(L_2)$  possui o mesmo valor em todos os gráficos da Figura 5.67 e por conseguinte é o autovalor da rede livre de escala que foi utilizada para os dois Multiplex. Por outra parte, repare este comportamento não é igual para o segundo autovalor  $\lambda_2(L_1)$  correspondente com a rede de mundo pequeno com valores do parâmetro de probabilidade  $\rho = 0.5$  e  $\rho = 0.05$ . Note que, de forma similar aos outros Multiplex **RTD** apresentados nas secções anteriores, todos os espectros da Figura 5.67 não se apresentam mudanças significativas na parte linear ( $\lambda_2 = 2D_x$ ) e de igual forma só está presente uma pequena mudança na parte não linear do espectro ( $\lambda_2 \neq 2D_x$ ). Isto mostra que os Multiplex formados pelas diferentes configurações de redes apresentam uma maior oposição espectral ante a renumeração de nós. Mas além disso para valores altos do coeficiente de difusão  $D_x$  se consegue a modificação espectral.

Por outra parte, em relação ao fenômeno da super-difusão, observa-se que se apresentou nos gráficos (a), (c), (d) de forma total e a renumeração de nós não conseguiu mudar este comportamento. Mas no gráfico de afastamento (b) correspondente ao Multiplex formado pela rede Small World  $\rho_s = 0.5$ , se conseguiu mudar a super-difusão de uma forma total sobre todo o espectro a uma forma parcial, quando  $D_x > 20$  e é aplicado o método de renumeração de nós, para afastar as duas redes. Repare que este comportamento de super-difusão é causado em todos os gráficos da Figura 5.67 pela rede  $L_2$ . Ou seja a rede livre de escala apresentou melhores valores de difusão que o Multiplex.

Com todos os resultados apresentados para os Multiplex **RTD**, se pode concluir que, com relação às distâncias inter-redes os Multiplex não apresentam uma ligação das distâncias com as dinâmicas espectrais, e os espectros de difusão apresentam a maior resistência de todos os Multiplex. Além disso, se conseguiu mudar a os estados de difusão para as diferentes configurações apresentadas mediante a renumeração de nós para valores altos do parâmetro de difusão inter-redes  $D_x$ .



**Figura 5.67** Espectros de afastamento e aproximação pela renumeração de nós do Multiplex **RTD** formado pela rede de pequeno mundo com probabilidade  $\rho_s$  junto à rede livre de escala de 500 nós. (a) e (b) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede de pequeno mundo  $\rho_s = 0.5$ . (c) e (d) correspondem com a aproximação e afastamento do Multiplex formado pela rede de pequeno mundo  $\rho_s = 0.05$ . Note-se a existência da super difusão em todos os casos e a similaridade no comportamento espectral com os outros casos dos Multiplex **RTD**, tanto na aproximação como no afastamento, para valores altos do coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ .

---

---

## CAPÍTULO 6

---

### CONCLUSÕES

Ao longo desta dissertação se mostrou as mudanças espectrais existentes no modelo Multiplex de duas camadas quando, mediante o método de renumeração de nós, afastamos ou aproximamos as redes compõem o Multiplex. A utilização destas ferramentas ocasionou certas mudanças nos espectros dos três tipos de configurações de Multiplexs estudadas (**RTI**, **RES** e **RTD**) onde se mostrou que a manipulação do espectro era possível. Contudo, notam-se algumas diferenças que dependem das configurações estruturais presentes nos Multiplex. Por isso, começamos falando alguns aspectos em geral sobre diferenças em geral entre os três tipos de modelos estudados.

- Os Multiplex formados pelas redes aleatórias, foram os que apresentaram os menores valores de distância inter-redes. No caso dos Multiplexs **RTI** menores valores de afastamento mostram o difícil que é conseguir fazer que duas redes totalmente iguais possam ser diferentes por médio da renumeração de nós. Mas apesar dos valores das distâncias no caso dos Multiplexs **RTI** os espectros apresentaram a existência de um conjunto de nós com propriedades espectrais de aumentar os valores dos estados de difusão, estes nós foram chamados como nós principais de difusão (**NPD**). Para os outros tipos de Multiplex (**RES** e **RTD**) não se evidenciou a existência de nós especiais com propriedades espectrais.
- para os Multiplex **RTI** e **RES** formados pelas redes livre de escala, sempre se apresentaram distâncias inter-redes iguais independentemente do tamanho das redes. Isto mostrou que o tamanho da rede livre de escala não é um fator de grande importância para incrementar ou diminuir os valores de distância inter-redes e portanto não existe uma ligação direta entre o tamanho da rede e os valores da distância topológica inter-redes. Por outra parte os espectros dos Multiplex formados pelas redes livre de escala apresentaram sempre uma grande resistência a mudar os estados de difusão ante o afastamento ou apro-

ximação das redes que compõem o Multiplex, apesar disto, para os Multiplex **RTI** e **RES** se conseguiu mudar o espectro mediante a criação do método de grau (**MG**), mostrando uma maior eficiência na manipulação do espectro de difusão em comparação com caso do método de Monte Carlo.

- Para as redes small world **RTI**, se apresentou maiores valores de distância de afastamento, os dados disto sugerem que entre menor o valor do parâmetro probabilístico  $\rho$  maiores serão as distâncias inter-redes. Mas os valores espectrais de difusão de todos os Multiplex (**RES** e **RTD**) formados pelas redes Small World apresentaram os menores valores de difusão de todos os Multiplexs.
- Por outra parte os Multiplex **RES** e **RTD** formados com redes aleatórias apresentaram os maiores valores espectrais de difusão de todos os Multiplex. Isto é muito importante nas aplicações de redes reais porque se encontra uma configuração para a qual se tem valores de difusão altos e mediante a renumeração de nós se consegue aumentar mais um pouco mais.

Além dos aspectos apresentados, ressaltamos que apesar de todas as diferentes configurações de Multiplexs usadas no Capítulo 5, o método de renumeração de nós mediante Monte Carlo sempre mostrou obter mudanças nas dinâmicas espectrais dos espectros de difusão. Isto mostra que sempre é possível a manipulação dos espectros que é um dos aspectos importantes dos objetivos deste trabalho, além de ser de grande importância nas aplicações com redes reais. Por outra parte um dos aspectos interessantes apresentados foi os espectros dos Multiplexs **RTD**, já que as mudanças espectrais tão só se mostraram para certos valores do coeficiente de difusão inter-redes  $D_x$ . Além disso, nos Multiplex **RTD** foi o único caso onde se apresentou a super difusão e mediante o afastamento ou a aproximação das redes foi possível mudar este comportamento. Por outra parte se mostrou que não existe relação alguma entre as redes que possuam distâncias inter-redes semelhantes e os espectros dos Multiplex.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOCCALETTI, S.; BIANCONI, G.; CRIADO, R.; DEL GENIO, C. I.; GÓMEZ-GARDEÑES, J.; ROMANCE, M.; SENDIÑA-NADAL, I.; WANG, Z.; ZANIN, M. The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*, v. 544, n. 1, p. 1–122, 2014.
- [2] ANDRADE, R. F.; MIRANDA, J. G.; PINHO, S. T.; LOBÃO, T. P. Measuring distances between complex networks. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 372, n. 32, p. 5265–5269, 2008.
- [3] METROPOLIS, N.; ULAM, S. The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949.
- [4] LANDAU, D. P.; BINDER, K. *A guide to monte carlo simulations in statistical physics*. Cambridge university press, 2014.
- [5] LANDAU, D. P. Finite-size behavior of the ising square lattice. *Phys. Rev. B*, v. 13, p. 2997–3011, Apr 1976.
- [6] ANAGNOSTOPOULOS, K. N. *Computational physics, vol i: A practical introduction to computational physics and scientific computing*. Konstantinos Anagnostopoulos, 2014. v. 1.
- [7] SALINAS, S. R. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [8] PERSEGUERS, S.; LEWENSTEIN, M.; ACÍN, A.; CIRAC, J. I. Quantum random networks. *Nature Physics*, v. 6, n. 7, p. 539–543, 2010.
- [9] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of small-world networks. *nature*, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998.
- [10] PEMMARAJU, S.; SKIENA, S. S. *Computational discrete mathematics: Combinatorics and graph theory with mathematica®*. Cambridge university press, 2003.

- [11] NEWMAN, M.; BARABASI, A.-L.; WATTS, D. J. *The structure and dynamics of networks*. Princeton University Press, 2006.
- [12] BOLLOBÁS, B. *Modern graph theory*. Springer Science & Business Media, 1998. v. 184.
- [13] WASSERMAN, S.; FAUST, K. *Social network analysis: Methods and applications*. Cambridge university press, 1994. v. 8.
- [14] SCOTT, J.; CARRINGTON, P. J. *The sage handbook of social network analysis*. SAGE publications, 2011.
- [15] DE SOLLA PRICE, D. J. Networks of scientific papers. *Science*, Washington, v. 149, n. 3683, p. 510–515, 1965.
- [16] JONATHAN, L.; GROSS, J. Handbook of graph theory (discrete mathematics and its applications). *CRC, Boca Raton*, 2003.
- [17] DUNBAR, R. I.; SHULTZ, S. Evolution in the social brain. *science*, v. 317, n. 5843, p. 1344–1347, 2007.
- [18] ERDÖS, P.; RÉNYI, A. {On the evolution of random graphs}. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, v. 5, p. 17–61, 1960.
- [19] BOLLOBAS, B. Random graphs, academic press, london, 1985.
- [20] NEWMAN, M. *Networks: an introduction*. Oxford University Press, 2010.
- [21] BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, v. 424, n. 4, p. 175–308, 2006.
- [22] TADIĆ, B.; RODGERS, G. Packet transport on scale-free networks. *Advances in Complex Systems*, v. 5, n. 04, p. 445–456, 2002.
- [23] GANESH, A.; MASSOULIE, L.; TOWSLEY, D. The effect of network topology on the spread of epidemics. In: . c2005. v. 2. p. 1455–1466 vol. 2.
- [24] NEWMAN, M. E. The structure and function of complex networks. *SIAM review*, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003.
- [25] DOROGOVTSEV, S. N.; MENDES, J. F. *Evolution of networks: From biological nets to the internet and www*. Oxford University Press, 2013.
- [26] MARCHIORI, M.; LATORA, V. Harmony in the small-world. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 285, n. 3, p. 539–546, 2000.
- [27] LATORA, V.; MARCHIORI, M. Efficient behavior of small-world networks. *Physical review letters*, v. 87, n. 19, p. 198701, 2001.
- [28] LATORA, V.; MARCHIORI, M. Economic small-world behavior in weighted networks. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, v. 32, n. 2, p. 249–263, 2003.

- [29] GÓMEZ-GARDEÑES, J.; LATORA, V. Entropy rate of diffusion processes on complex networks. *Phys. Rev. E*, v. 78, p. 065102, Dec 2008.
- [30] PARK, J.; NEWMAN, M. E. Statistical mechanics of networks. *Physical Review E*, v. 70, n. 6, p. 066117, 2004.
- [31] WEST, D. B. Introduction to graph theory prentice-hall. *Englewood Cliffs, NJ*, 1996.
- [32] FISHER, M. E.; BARBER, M. N. Scaling theory for finite-size effects in the critical region. *Phys. Rev. Lett.*, v. 28, p. 1516–1519, Jun 1972.
- [33] FERDINAND, A. E.; FISHER, M. E. Bounded and inhomogeneous ising models. i. specific-heat anomaly of a finite lattice. *Phys. Rev.*, v. 185, p. 832–846, Sep 1969.
- [34] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On random graphs. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, v. 6, p. 290–297, 1959.
- [35] BOLLOBÁS, B. Degree sequences of random graphs. *Discrete Mathematics*, v. 33, n. 1, p. 1–19, 1981.
- [36] NEWMAN, M. E. Models of the small world. *Journal of Statistical Physics*, New York, v. 101, n. 3-4, p. 819–841, 2000.
- [37] BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *science*, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999.
- [38] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, v. 74, n. 1, p. 47, 2002.
- [39] YULE, G. U. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of dr. j. c. willis, f.r.s. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Containing Papers of a Biological Character*, v. 213, p. 21–87, 1925.
- [40] SIMON, H. A. On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, v. 42, n. 3/4, p. 425–440, 1955.
- [41] BIANCONI, G.; BARABÁSI, A.-L. Competition and multiscaling in evolving networks. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 54, n. 4, p. 436, 2001.
- [42] BROUWER, A. E.; HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. New York, NY: Springer New York, 2012. Cap. Distance-Regular Graphs, p. 177–185.
- [43] CHUNG, F. R. *Spectral graph theory*. American Mathematical Soc., 1997. v. 92.
- [44] BIGGS, N. *Algebraic graph theory*. Cambridge university press, 1993.
- [45] BESSA, A. D.; ROCHA-NETO, I. C.; PINHO, S. T. R. D.; ANDRADE, R. F. S.; PETIT LOBAO, T. C. Graph cospectrality using neighborhood matrices. *the electronic journal of combinatorics*, v. 19, n. 3, p. P23, 2012.
- [46] FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak mathematical journal*, v. 23, n. 2, p. 298–305, 1973.

- [47] DOYLE, P. G.; SNELL, J. L. Random walks and electric networks, carus mathematical monographs 22, mathematical association of america, washington, dc, 1984. *MR 89a*, v. 94023, 1984.
- [48] BERLINGERIO, M.; COSCIA, M.; GIANNOTTI, F.; MONREALE, A.; PEDRESCHI, D. Foundations of multidimensional network analysis. In: . c2011. p. 485–489.
- [49] DE DOMENICO, M.; SOLÉ-RIBALTA, A.; COZZO, E.; KIVELÄ, M.; MORENO, Y.; PORTER, M. A.; GÓMEZ, S.; ARENAS, A. Mathematical formulation of multilayer networks. *Phys. Rev. X*, v. 3, p. 041022, Dec 2013.
- [50] KIVELÄ, M.; ARENAS, A.; BARTHELEMY, M.; GLEESON, J. P.; MORENO, Y.; PORTER, M. A. Multilayer networks. *Journal of Complex Networks*, v. 2, n. 3, p. 203–271, 2014.
- [51] BATTISTON, F.; NICOSIA, V.; LATORA, V. Structural measures for multiplex networks. *Phys. Rev. E*, v. 89, p. 032804, Mar 2014.
- [52] DONGES, J. F.; SCHULTZ, H. C. H.; MARWAN, N.; ZOU, Y.; KURTHS, J. Investigating the topology of interacting networks. *The European Physical Journal B*, Les Ulis, v. 84, n. 4, p. 635–651, 2011.
- [53] BULDYREV, S. V.; PARSHANI, R.; PAUL, G.; STANLEY, H. E.; HAVLIN, S. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, London, v. 464, n. 7291, p. 1025–1028, 2010.
- [54] GAO, J.; BULDYREV, S. V.; STANLEY, H. E.; HAVLIN, S. Networks formed from interdependent networks. *Nature physics*, v. 8, n. 1, p. 40–48, 2012.
- [55] CRIADO, R.; FLORES, J.; GARCÍA DEL AMO, A.; GÓMEZ-GARDEÑES, J.; ROMANCE, M. A mathematical model for networks with structures in the mesoscale. *International Journal of Computer Mathematics*, v. 89, n. 3, p. 291–309, 2012.
- [56] SOLÁ, L.; ROMANCE, M.; CRIADO, R.; FLORES, J.; GARCÍA DEL AMO, A.; BOCCALETTI, S. Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks. *Chaos*, v. 23, n. 3, 2013.
- [57] DONGES, J. F.; SCHULTZ, H. C.; MARWAN, N.; ZOU, Y.; KURTHS, J. Investigating the topology of interacting networks. *The European Physical Journal B*, Les Ulis, v. 84, n. 4, p. 635–651, 2011.
- [58] HAVLIN, S.; ARAUJO, N.; BULDYREV, S. V.; DIAS, C.; PARSHANI, R.; PAUL, G.; STANLEY, H. E. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *arXiv preprint arXiv:1012.0206*, 2010.
- [59] PARSHANI, R.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S. Interdependent networks: Reducing the coupling strength leads to a change from a first to second order percolation transition. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 048701, Jul 2010.

- [60] HOLME, P.; SARAMÄKI, J. Temporal networks. *Physics Reports*, v. 519, n. 3, p. 97 – 125, 2012. Temporal Networks.
- [61] DA FONTOURA COSTA, L.; SPORNS, O.; ANTIQUEIRA, L.; NUNES, M. D. G. V.; OLIVEIRA JR, O. N. Correlations between structure and random walk dynamics in directed complex networks. *Applied physics letters*, v. 91, n. 5, p. 054107, 2007.
- [62] NOH, J. D.; RIEGER, H. Random walks on complex networks. *Physical review letters*, v. 92, n. 11, p. 118701, 2004.
- [63] GOMEZ, S.; DIAZ-GUILERA, A.; GOMEZ-GARDEÑES, J.; PEREZ-VICENTE, C. J.; MORENO, Y.; ARENAS, A. Diffusion dynamics on multiplex networks. *Physical review letters*, v. 110, n. 2, p. 028701, 2013.
- [64] MARGAN, D.; MEŠTROVIĆ, A.; MARTINČIĆ-IPŠIĆ, S. Multilayer network of language: a unified framework for structural analysis of linguistic subsystems. *arXiv preprint arXiv:1507.08539*, 2015.
- [65] LI, Q.-L.; WONG, S.; MIN, J.; TIAN, S.; WANG, B.-H. A cellular automata traffic flow model considering the heterogeneity of acceleration and delay probability. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 456, p. 128–134, 2016.
- [66] SOLÉ-RIBALTA, A.; DE DOMENICO, M.; KOUVARIS, N. E.; DÍAZ-GUILERA, A.; GÓMEZ, S.; ARENAS, A. Spectral properties of the laplacian of multiplex networks. *Phys. Rev. E*, v. 88, p. 032807, Sep 2013.
- [67] ANDRADE, R. F.; MIRANDA, J. G.; LOBÃO, T. P. Neighborhood properties of complex networks. *Physical Review E*, v. 73, n. 4, p. 046101, 2006.
- [68] WHITESITT, J. E. *Boolean algebra and its applications*. Courier Corporation, 1995.
- [69] METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M.; TELLER, A.; TELLER, E. Calculation of equations of state by fast computing machines. *J. chem. Phys.*, v. 134, p. 1087–1091, 1953.
- [70] GÓMEZ, S.; DÍAZ-GUILERA, A.; GÓMEZ-GARDEÑES, J.; PÉREZ-VICENTE, C. J.; MORENO, Y.; ARENAS, A. Diffusion dynamics on multiplex networks. *Phys. Rev. Lett.*, v. 110, p. 028701, Jan 2013.
- [71] BACKSTROM, L.; KLEINBERG, J. Romantic partnerships and the dispersion of social ties: a network analysis of relationship status on facebook. In: . c2014. p. 831–841.