



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Espectroscopia hadrônica via QCD no gauge de Coulomb

Aline Gramacho Favero

Orientador: Prof. Dr. Luciano Melo Abreu

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFBA (área de concentração: Teoria Quântica dos Campos) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Salvador, BA, abril de 2019

Sumário

Sumário	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
1 Introdução	1
2 Fundamentos	3
2.1 O Modelo Padrão da física de partículas	3
2.2 Quarks e hádrons	5
2.3 Teorias de gauge abelianas	9
2.4 Teorias de gauge não-abelianas	14
3 QCD no gauge de Coulomb	19
3.1 Hamiltoniano	19
3.1.1 Gauge de Weyl	22
3.1.2 Gauge de Coulomb	25
4 Modelo efetivo da QCD no gauge de Coulomb	37
4.1 Hamiltoniano efetivo	37
4.2 Técnicas de Muitos Corpos	41
4.3 Método TDA	45
4.4 Método RPA	50
4.5 Resultados numéricos e discussão	52
4.5.1 Equação de gap	52
4.5.2 Massas	56
Referências bibliográficas	60
A Notação	65
B Derivadas funcionais	67
C Método BCS	71
C.1 Matrizes de Gell-Mann	71
C.2 Equação de gap	73

Lista de Figuras

2.1	Partículas elementares do Modelo Padrão.	4
4.1	Massa dinâmica dos quarks.	53
4.2	Massa dinâmica dos quarks para valores de massa corrente estimados. . .	53
4.3	Massa dinâmica dos quarks <i>up/down</i> , para diferentes valores de C_h . . .	54
4.4	Massa constituinte dos quarks <i>up/down</i> , para diferentes valores de C_h . . .	55
4.5	Energias das quasipartículas, para diferentes sabores de quarks.	55

Lista de Tabelas

2.1	Resumo das propriedades dos quarks. As massas aproximadas são dadas em GeV.	6
2.2	Algumas propriedades dos mésons pseudoescalares.	7
2.3	Algumas propriedades dos mésons vetoriais.	8
4.1	Tipos de Mésons.	47
4.2	Massas dos quarks correntes e constituintes, em MeV. Os valores estimados foram extraídos da referência [1].	54
4.3	Resultados para $m_1 = m_2 = 1$ MeV.	56
4.4	Resultados para $m_1 = m_2 = 40$ MeV.	56
4.5	Resultados para $m_1 = m_2 = 810$ MeV.	57
4.6	Resultados para $m_1 = m_2 = 3810$ MeV.	57
4.7	Resultados para $m_1 = 1$ MeV e $m_2 = 40$ MeV.	57
4.8	Resultados para $m_1 = 1$ MeV e $m_2 = 810$ MeV.	57
4.9	Resultados para $m_1 = 1$ MeV e $m_2 = 3810$ MeV.	58
4.10	Resultados para $m_1 = 810$ MeV e $m_2 = 3810$ MeV.	58
4.11	Resultados para $m_1 = 40$ MeV, $m_2 = 810$ MeV.	58
4.12	Resultados para $m_1 = 40$ MeV, $m_2 = 3810$ MeV.	58
4.13	Comparação dos resultados obtidos com os resultados da referência [3].	59

Capítulo 1

Introdução

Havendo predito diversos fenômenos físicos, o Modelo Padrão da física de partículas é hoje uma teoria bem estabelecida, em concordância com grande parte dos resultados experimentais. Mas, apesar de ser a melhor descrição hoje disponível do mundo subatômico, trata-se de um modelo ainda em construção: o setor da interação forte, por exemplo, ainda encontra-se incompleto, e a busca por estados hadrônicos não convencionais é intensa. A existência e estrutura destas partículas não convencionais é uma das poucas questões ainda em aberto no Modelo Padrão. Estes estados, permitidos pela Cromodinâmica Quântica (do inglês, *Quantum Chromodynamics*, ou QCD), são aqueles que não se encaixam na classificação usual de mésons ($q\bar{q}$) e bárions (qqq), tais como as *glueballs*, estados híbridos, tetraquarks, pentaquarks e hádrons com números quânticos não convencionais.

Devido à complexidade da teoria das interações fortes, trabalhos teóricos que estudam hádrons exóticos envolvem diversos métodos. A liberdade assintótica permite que, em altas escalas de energia, a QCD seja tratada perturbativamente; em baixas energias, existem diferentes alternativas, tais como o modelo de Nambu-Jona-Lasinio, NRQCD, *Lattice QCD* e teorias efetivas. O modelo utilizado neste trabalho é baseado num hamiltoniano efetivo da QCD no gauge de Coulomb, e possui aplicações nos estudos de mésons [1–5], *glueballs* [6], estados exóticos [7] e no estudo da quebra da simetria quiral [8, 9].

Partindo do hamiltoniano exato da QCD no gauge de Coulomb, aproximamo-lo por um hamiltoniano efetivo, no qual substituímos o kernel da interação coulombiana por um potencial efetivo de confinamento similar a um potencial de Cornell; como o nosso foco é o estudo de mésons, negligenciamos o setor gluônico, e substituímos a interação quark-gluon por um potencial hiperfino transverso. A este hamiltoniano efetivo, aplicamos então técnicas de muitos corpos a fim de obter sua forma aproximadamente diagonalizada: ao estado de vácuo, aplicamos uma transformação de Bogoliubov-Valatin ou BCS (*Bardeen-Cooper-Schrieffer*), e aos estados excitados, os métodos TDA (*Tamm-Dancoff*) e RPA (*Random Phase Approximation*). Dos dois últimos métodos, apenas o RPA é capaz de descrever a quebra de simetria quiral. Este modelo tem como uma de suas vantagens a

quantidade mínima de parâmetros de entrada – as massas dos quarks correntes e duas constantes relacionadas aos potenciais –, além do fato de seus graus de liberdade fundamentais serem os graus de liberdade quarkônicos, quando a maior parte dos modelos efetivos trabalham sobre graus de liberdade hadrônicos.

Trabalhos anteriores já adotaram o potencial de Cornell modificado [1], bem como o potencial hiperfino [1, 7]. No presente trabalho, extendemos os estudos anteriores a mésons compostos por quarks de diferentes sabores, e computamos o espectro de mésons pseudoescalares, vetoriais e pseudovetoriais nos setores dos quarks leves, do estrangeônio, charmônio e botomônio.

A notação adotada ao longo deste trabalho está detalhada no apêndice A. O capítulo 2 é dedicado à construção da base teórica necessária para o desenvolvimento do modelo efetivo: apresentamos o Modelo Padrão da física de partículas, seguido do modelo dos quarks e sua classificação dos hádrons. Em seguida, descrevemos o arcabouço matemático por trás do Modelo Padrão, no qual o princípio de invariância de gauge adquire grande importância. Como sequência natural, exploramos este princípio mais a fundo, mostrando o processo de construção de teorias de gauge abelianas e não-abelianas, passando pela Eletrodinâmica Quântica (QED) e finalizando com uma descrição da QCD, o nosso campo de estudo. No modelo efetivo com o qual trabalhamos, quantidades análogas às que apareceram na QED foram utilizadas, e estas foram introduzidas neste capítulo.

O capítulo 3 é dedicado à obtenção do hamiltoniano exato da QCD no gauge de Coulomb. Partindo da lagrangiana da QCD obtida no capítulo 2, aplicamos a ela sucessivas transformações de gauge – primeiro, passamos ao gauge de Weyl, e em seguida, ao gauge de Coulomb –, obtendo por fim o hamiltoniano desejado. Partes intermediárias da conta estão contidas no apêndice B.

Por fim, no capítulo 4, partindo do hamiltoniano exato, construímos o modelo efetivo da QCD no gauge de Coulomb para o setor quarkônico. Na sequência, passamos à aplicação das técnicas de muitos corpos, a fim de obter formas aproximadamente diagonais do hamiltoniano. Antes de diagonalizá-lo, no entanto, aplicamos uma rotação BCS à base de nosso espaço de Fock, passando a uma base de quasipartículas de massas efetivas constituintes. A fim de determinar o estado fundamental nesta aproximação, resolvemos a equação de gap de massa, cálculos estes que estão detalhados no apêndice C. Para determinar os estados excitados, empregamos os métodos TDA e RPA. A obtenção da equação TDA está detalhada no apêndice D. Nestas seções finais, recuperamos a classificação dos mésons introduzida no capítulo 2, e obtivemos os kernéis para os casos pseudoescalar, vetorial e pseudovetorial, para quarks de sabores iguais e diferentes; o método RPA foi aplicado somente ao caso pseudoescalar. Com os kernéis em mãos, a última sessão foi dedicada a uma análise dos resultados numéricos, onde expomos as diferentes massas obtidas na resolução da equação de gap, bem como os espectros obtidos para os diferentes setores quarkônicos. Analisamos, por fim, a contribuição do potencial hiperfino, bem como a importância da simetria quiral.

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo, apresentaremos brevemente os fundamentos necessários para a construção do modelo efetivo da QCD no gauge de Coulomb. Faremos, na seção 2.1, um breve resumo do Modelo Padrão da física de partículas, com sua classificação das partículas elementares e uma breve descrição de suas interações fundamentais. Em seguida, vamos descrever seu arcabouço físico-matemático, e exploraremos mais a fundo o princípio de invariância de gauge. Na sequência, em 2.3 e 2.4, exploraremos o processo de construção de teorias de gauge, que aplicaremos aos casos abeliano e não-abeliano. Finalizaremos com uma breve descrição da QCD. Utilizaremos como fontes básicas nas seções 2.1 e 2.2 as referências [11, 12], e nas duas seções finais, [13–19].

2.1 O Modelo Padrão da física de partículas

O Modelo Padrão da física de partículas é a teoria que rege as interações entre os constituintes fundamentais da matéria: partículas de matéria (quarks e léptons) interagem entre si via interações fundamentais, por meio da troca de bósons. As interações fundamentais que formam o Modelo Padrão – eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca – são Teorias Quânticas dos Campos (TQC's), resultados do casamento entre a Mecânica Quântica e a Relatividade Especial. A quarta interação fundamental da natureza, a gravitacional, ainda não foi incorporada ao modelo. As partículas elementares – partículas sem estrutura interna – são divididas em três grupos: quarks, léptons e bósons.

Atualmente, são conhecidos seis tipos (sabores) de quarks, divididos em pares: *up* (u) e *down* (d), *charm* (c) e *strange* (s), *top* (t) e *bottom* (b), também conhecido como *beauty*. Os léptons, também separados em pares, compreendem o elétron (e^-) e o neutrino do elétron (ν_e), o múon (μ^-) e o neutrino do múon (ν_μ), o tau (τ^-) e o neutrino do tau (ν_τ) (aqui, o índice superior indica a carga elétrica). Tanto os quarks como os léptons são férmions (partículas de spin semi-inteiro, regidas pela estatística de Fermi-Dirac) de spin $1/2$, e todos têm suas respectivas anti-partículas (partículas de mesma massa e spin, mas

de carga oposta). Cada par de férmions forma uma geração: as partículas de primeira geração são leves e estáveis, enquanto que as partículas de segunda e terceira geração têm maiores massas e vida curta, decaindo rapidamente nas partículas de primeira geração. Por esta razão, a matéria estável do universo – a matéria bariônica – é constituída por férmions carregados da primeira geração. Os neutrinos, por não possuírem carga (elétrica ou de cor), raramente interagem com a matéria bariônica.

Os bósons, ao contrário dos férmions, são partículas de spin inteiro; obedecem a estatística de Bose-Einstein, e são os mediadores das interações fundamentais. Os bósons da interação eletromagnética são os fótons (γ), os mediadores da interação forte são os glúons (g), e os da interação fraca são os bósons Z e W^\pm . Os mediadores da gravitação, ainda hipotéticos, são os grávitons (G). Estes quatro grupos constituem os bósons de gauge (ou bósons de calibre), e são partículas de spin 1 (exceto o gráviton que teria spin 2). Além destes, existe ainda o bóson de Higgs (H^0), um bóson escalar de spin 0 responsável por atribuir massa às demais partículas do modelo.

Figura 2.1: Partículas elementares do Modelo Padrão.

massa→	$\approx 2.3 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.275 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.07 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 126 \text{ GeV}/c^2$
carga→	2/3	2/3	2/3	0	0
spin→	1/2	1/2	1/2	1	0
	u up	c charm	t top	g glúon	H bóson de Higgs
QUARKS	$\approx 4.8 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 95 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0	
	-1/3	-1/3	-1/3	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	d down	s strange	b bottom	γ fóton	
	$0.511 \text{ MeV}/c^2$	$105.7 \text{ MeV}/c^2$	$1.777 \text{ GeV}/c^2$	$91.2 \text{ GeV}/c^2$	
	-1	-1	-1	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	e elétron	μ múon	τ tau	Z bóson Z	
LÉPTONS	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 15.5 \text{ MeV}/c^2$	$80.4 \text{ GeV}/c^2$	
	0	0	0	± 1	
	1/2	1/2	1/2	1	
	ν_e neutrino do elétron	ν_μ neutrino do múon	ν_τ neutrino do tau	W bóson W	
					BÓSONS DE CALIBRE

Fonte: [20]

Cada uma das interações fundamentais tem uma escala de atuação. As forças gravitacional e eletromagnética são forças de longo alcance – de fato, infinito –, enquanto que as forças nuclear forte e fraca atuam na escala subatômica. Destas, a força nuclear forte é, como o nome indica, a mais forte, seguida pela força eletromagnética e nuclear fraca. A gravitação, insignificante em escalas atômicas e a mais fraca das forças fundamentais, torna-se a interação dominante em escalas astronômicas, uma vez que planetas, estre-

las etc. são essencialmente neutros; a força eletromagnética é responsável por estruturas menores, tais como os objetos presentes em nosso dia-a-dia.

Associada a cada uma das interações fundamentais existe um tipo de carga. A carga da interação forte é chamada carga de cor, e vem em três tipos: vermelho, verde e azul (do inglês, *red*, *green* e *blue*, ou RGB). Os quarks são os únicos férmions a carregarem carga de cor e, portanto, são os únicos a participarem das interações fortes. Tanto os quarks quanto o elétron, múon e o tau carregam carga elétrica, e interagem eletromagneticamente entre si; todos os férmions possuem isospin fraco – propriedade ligada à interação fraca–, e interagem via força nuclear fraca. Os neutrinos, especificamente, não carregam carga de cor ou elétrica, e interagem apenas via força nuclear fraca, sendo portanto de difícil detecção. Quarks se combinam para formar hádrons, partículas "sem cor". Hádrons formados por um par quark-antiquark ($q\bar{q}$) são chamados mésons, enquanto que os formados por três quarks (qqq) ou três antiquarks ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}$) são os bárions. Vamos analisar com mais detalhes os quarks e seus estados ligados, os hádrons, e o modelo que os descreve.

2.2 Quarks e hádrons

O modelo de quarks foi proposto independentemente por Gell-Mann e Zweig em 1964, na série de artigos [21], [22] e [23]. Este interpretava os hádrons como estados ligados de três partículas fundamentais de spin $1/2$, em conjunto com suas antipartículas; estas partículas receberam o nome de quarks, e atualmente são conhecidos seis tipos, os sabores. Os quarks, como mencionamos na seção anterior, são divididos em pares, com cada par constituindo uma geração; os pares são sempre formados por um quark de carga elétrica $+2/3$ (u , c e t) em conjunto com um quark de carga $-1/3$ (d , s e b). Os quarks têm paridade positiva definida e, em adição à carga elétrica, os quarks carregam carga de cor, massa e isospin fraco, e participam de todas as interações fundamentais¹.

Neste modelo, três tipos de hádrons são permitidos: os bárions, estados ligados de três quarks de valência² ($3q$), que são partículas de spin semi-inteiro ($1/2$ ou $3/2$) e, portanto, férmions; os antibárions, suas antipartículas ($3\bar{q}$); e os mésons, formados por um quark de valência e seu antiquark ($q\bar{q}$), bósons de spin inteiro (0 ou 1). Os quarks se combinam de tal forma que os hádrons são partículas sem cor e de carga elétrica inteira.

Os estados hadrônicos são caracterizados pelos números quânticos usuais J , P e C associados às simetrias do grupo de Poincaré, em que J denota o momento angular total, P a paridade e C a C-paridade. Em adição a estes, podemos definir, a partir do conteúdo quarkônico dos hádrons, um segundo conjunto de números quânticos, formados pela estranheza S , charme C , número de *bottom* \bar{B} , número de *top* T , isospin I_3 e número ba-

¹Quando comparadas à interação forte, as demais interações podem ser negligenciadas

²Os quarks a partir dos quais os números quânticos de um hádron são definidos; além destes, os hádrons podem conter quarks virtuais, que não contribuem com os números quânticos.

riônico B . Estes são denominados números quânticos internos, e são independentemente conservados em processos fortes e eletromagnéticos. Eles são definidos em termos do número de quarks $N(a)$ do tipo a e de antiquarks $N(\bar{a})$ como

$$S \equiv -[N(s) - N(\bar{s})], \quad (2.1)$$

$$C \equiv N(c) - N(\bar{c}), \quad (2.2)$$

$$\tilde{B} \equiv -[N(b) - N(\bar{b})], \quad (2.3)$$

$$T \equiv N(t) - N(\bar{t}). \quad (2.4)$$

Além destes, o número bariônico é dado por

$$B \equiv \frac{1}{3} [N(q) - N(\bar{q})], \quad (2.5)$$

onde $N(q)$ e $N(\bar{q})$ são os números totais de quarks e antiquarks, respectivamente. Para os quarks, $B = 1/3$, enquanto que $B = +1$ para bárions, e $B = 0$ para mésons. Por fim, o isospin³ é definido como

$$I_3 \equiv \frac{1}{2} (N_u - N_d), \quad (2.6)$$

com $N_u = N(u) - N(\bar{u})$ e $N_d = N(d) - N(\bar{d})$. Este número quântico está associado à simetria aproximada $SU(2)$ entre os quarks u e d , em que tomamos $m_u \approx m_d$. Os números quânticos internos dos quarks, bem como suas massas, são listados na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Resumo das propriedades dos quarks. As massas aproximadas são dadas em GeV.

Nome	Símbolo	Massa	I_3	B	S	C	\tilde{B}	T
Down	d	0.003	$-1/2$	$1/3$	0	0	0	0
Up	u	0.005	$+1/2$	$1/3$	0	0	0	0
Strange	s	0.1	0	$1/3$	-1	0	0	0
Charm	c	1.3	0	$1/3$	0	$+1$	0	0
Bottom	b	4.5	0	$1/3$	0	0	-1	0
Top	t	174	0	$1/3$	0	0	0	$+1$

Fonte: [12]

Mésons de momento angular orbital L e spin S ($S = 0$, para spins antiparalelos, e $S = 1$, para spins paralelos) têm momento angular total J dado por $|L - S| < J < |L + S|$, paridade $P = (-1)^{L+1}$ e C-paridade $C = (-1)^{L+S}$, formando estados que denotamos por J^{PC} . Nesta classificação, os estados mesônicos podem ser separados em pseudoescalares (0^{-+}) e vetores (1^{--}), ambos com $L = 0$, escalares (0^{++}), pseudovetoriais (1^{++} e 1^{+-})

³Na verdade, I_3 é a projeção na direção z do isospin total \mathbf{I} .

e tensoriais (2^{++}), para os quais $L = 1$. Além destes números quânticos, podemos ainda definir a G-paridade $G = (-1)^{L+S+I}$, generalização da C-paridade; a partir desta, podemos criar um rótulo adicional aos estados, I^G . Nas tabelas 2.2 e 2.3 listamos os principais mésons pseudoescalares e vetoriais, com seu conteúdo quarkiônico, sua massa de repouso e seus rótulos J^{PC} e I^G .

Tabela 2.2: Algumas propriedades dos mésons pseudoescalares.

Nome da partícula	Símbolo	Conteúdo quarkiônico	Massa de repouso (MeV)	I^G	J^{PC}
Píon	π^+	$u\bar{d}$	139.571	1^-	0^-
	π^-	$d\bar{u}$	139.571	1^-	0^-
	π^0	$u\bar{u}$ ou $d\bar{d}$	134.977	1^-	0^{+-}
Méson eta-c	η_c	$c\bar{c}$	2983.9	0^+	0^{+-}
Méson eta-b	η_b	$b\bar{b}$	9399.0	0^+	0^{+-}
Káon	K^+	$u\bar{s}$	493.677	$1/2$	0^-
	K^-	$s\bar{u}$	493.677	$1/2$	0^-
	K^0	$d\bar{s}$	497.611	$1/2$	0^-
Méson D	D^+	$c\bar{d}$	1869.65	$1/2$	0^-
	D^-	$d\bar{c}$	1869.65	$1/2$	0^-
	D^0	$c\bar{u}$	1864.83	$1/2$	0^-
Méson D estranho	D_s^+	$c\bar{s}$	1968.34	0	0^-
	D_s^-	$s\bar{c}$	1968.34	0	0^-
Méson B	B^+	$u\bar{b}$	5279.32	$1/2$	0^-
	B^-	$b\bar{u}$	5279.32	$1/2$	0^-
	B^0	$d\bar{b}$	5279.63	$1/2$	0^-
Méson B estranho	B_s^0	$s\bar{b}$	5366.89	0	0^-
Méson B charmoso	B_c^+	$c\bar{b}$	6274.9	0	0^-
	B_c^-	$b\bar{c}$	6274.9	0	0^-

Fonte: [24]

Se considerarmos apenas três sabores de quarks (como na época de surgimento do modelo), u , d e s , o grupo dos sabores passa a ser o $SU(3)$; os quarks se encontram na representação fundamental do $SU(3)$ de sabor, $\mathbf{3}$, e os antiquarks, na representação conjugada a esta, $\bar{\mathbf{3}}$. Os nove estados mesônicos formados a partir destes sabores compõem um noneto, que pode ser decomposto num estado singlete, $\mathbf{1}$, em conjunto com um octeto, $\mathbf{8}$, i.e. $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$. Esta classificação dos hádrons mais leves, proposta independentemente pelos físicos Gell-Mann e Ne'eman em 1961, nos artigos [27] e [28], ficou conhecida como *Eightfold Way*, e levou ao posterior surgimento do modelo de quarks. Podemos, ainda, incluir um quarto quark à classificação, c , extendendo o $SU(3)$ para $SU(4)$; desta forma, ficamos com 16 quarks, agrupados em $\mathbf{4} \otimes \bar{\mathbf{4}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{15}$.

O modelo de quarks, apesar de ainda ser uma forma válida de classificação dos há-

Tabela 2.3: Algumas propriedades dos mésons vetoriais.

Nome da partícula	Símbolo	Conteúdo quarkiônico	Massa de repouso (MeV)	I^G	J^{PC}
Méson rho carregado	ρ^+	$u\bar{d}$	775.26	1^+	1^{--}
	ρ^-	$d\bar{u}$	775.26	1^+	1^{--}
Méson rho neutro	ρ^0	$u\bar{u}$ ou $d\bar{d}$	775.49*	1^+	1^{--}
Méson ômega	ω	$u\bar{u}$ ou $d\bar{d}$	782.65	0^-	1^{--}
Méson phi	ϕ	$s\bar{s}$	1019.461	0^-	1^{--}
J/Psi	J/ψ	$c\bar{c}$	3096.900	0^-	1^{--}
Méson upsilon	Υ	$b\bar{b}$	9460.30	0^-	1^{--}
Káon	K^{*+}	$u\bar{s}$	891.76	$1/2$	1^-
	K^{*-}	$s\bar{u}$	891.76	$1/2$	1^-
	K^{*0}	$s\bar{u}$	895.55	$1/2$	1^-
Méson D	D^{*+}	$c\bar{d}$	2010.26	$1/2$	1^-
	D^{*-}	$d\bar{c}$	2010.26	$1/2$	1^-
	D^{*0}	$c\bar{u}$	2006.85	$1/2$	1^-
Méson D estranho	D_s^{*+}	$c\bar{s}$	2112.2	0	1^-
	D_s^{*-}	$s\bar{c}$	2112.2	0	1^-
Méson B	B^{*+}	$u\bar{b}$	5324.65	$1/2$	1^-
	B^{*-}	$b\bar{u}$	5324.65	$1/2$	1^-
	B^{*0}	$d\bar{b}$	5325.2 [†]	$1/2$	1^-
Méson B estranho	B_s^{*0}	$s\bar{b}$	5415.4	0	1^-
Méson B charmoso	B_c^{*+}	$c\bar{b}$	–	0	1^-
	B_c^{*-}	$b\bar{c}$	–	0	1^-

Fonte: [24], * [25], † [26]

drons, não fornece uma descrição completa de sua estrutura interna – formada, além dos quarks de valência, por quarks virtuais e glúons – ou da dinâmica dos quarks. Esta descrição completa é obtida através da TQC, a teoria que fornece o substrato físico-matemático ao Modelo Padrão. Indo mais além do modelo de quarks, a TQC permite a existência de estados hadrônicos diferentes dos mésons e bárions usuais: glueballs, formadas apenas por glúons de valência; estados híbridos, com quarks e glúons de valência; e os hádrons exóticos, com mais de três quarks de valência.

As três forças fundamentais que compõem o Modelo Padrão passam a ser descritas por TQC's: as interações eletromagnéticas são descritas pela Eletrodinâmica Quântica (do inglês *Quantum Electrodynamics*, ou QED), que em altas energias, aparece unificada à força fraca na Teoria Eletrofraca, ou modelo de Weinberg-Salam; as interações fortes, pela Cromodinâmica Quântica (QCD). Estas três teorias apresentam em comum um mesmo tipo de simetria local: a simetria de gauge. As simetrias em geral são de grande importância na física, e as simetrias locais são ainda mais importantes, por dependerem

do ponto do espaço-tempo no qual estão atuando. Simetrias deste tipo estão associadas à introdução de campos de gauge à teoria, cujos quanta são os bósons de gauge que mediam as interações entre as partículas de matéria. Desta forma, podemos dizer que o Modelo Padrão é uma teoria de gauge com grupo de simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$: $SU(3)_c$ associado à simetria de cor, $SU(2)_L$ à simetria de isospin fraco e $U(1)_Y$ de hipercarga. Após a quebra espontânea de simetria do setor eletrofraco, o grupo de simetria passa a ser o $SU(3) \times U(1)$, com o grupo $U(1)_{EM}$ associado ao eletromagnetismo.

As teorias de gauge (ou teorias de calibre) podem ser separadas em teorias abelianas e não-abelianas, a partir da comutatividade do grupo de simetria que as caracteriza; a QED é uma teoria abeliana, enquanto que a teoria eletrofraca e a QCD são teorias não-abelianas. Devido à sua importância, dedicaremos as próximas sessões ao estudo das teorias de gauge. Por razões didáticas, introduziremos primeiro as teorias de gauge abelianas e, em sequência, as teorias não-abelianas, o que nos permitirá escrever a lagrangiana da QCD. No próximo capítulo, construiremos o formalismo hamiltoniano da QCD no gauge de Coulomb, no qual surgirão quantidades análogas às da QED, tais como os campos "cromoeletrônico" e "cromomagnético"; com este objetivo em mente, exploraremos brevemente os principais aspectos da QED, de forma a tornar a transição ao gauge de Coulomb mais natural.

2.3 Teorias de gauge abelianas

Nosso objetivo nesta seção é construir uma teoria invariante sob transformações locais do grupo $U(1)$. Por tratar-se de um grupo comutativo, a teoria de gauge associada é dita abeliana. Para construir uma lagrangiana com tal simetria, partimos de uma lagrangiana com invariância global sob transformações do grupo $U(1)$, e "elevamos" esta simetria ao status de local por meio da introdução de um novo campo à teoria, o campo de gauge. Partiremos da lagrangiana⁴ de Dirac, dada por

$$\mathcal{L}_D = -\bar{\psi}^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi, \quad (2.7)$$

ou, introduzindo a notação de Feynman $\not{\partial} = -i\gamma_\mu \partial_\mu$, e definindo $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4$,

$$\mathcal{L}_D = -\bar{\psi} (i\not{\partial} + m) \psi,$$

que é a sua forma mais conhecida. O espinor de Dirac ψ é uma matriz coluna definida como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

⁴ \mathcal{L} é na verdade a densidade lagrangiana. No entanto, tornou-se padrão na teoria dos campos referir-se a \mathcal{L} simplesmente como lagrangiana, e esta convenção será usada ao longo desta dissertação.

com Ψ_R e Ψ_L os espinores de Weyl de mão direita e de mão esquerda, respectivamente. A equação de Euler-Lagrange derivada desta lagrangiana é a equação de Dirac, $(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi = 0$, que descreve a dinâmica de partículas massivas de spin 1/2.

Seja $U(x) = e^{-ie\theta(x)}$ um elemento do grupo $U(1)$, com θ uma função de x arbitrária restrita ao intervalo $0 \leq \theta(x) \leq 2\pi/|e|$, e e uma constante real. Apliquemos ao campo ψ uma transformação do tipo

$$\Psi(x) \longrightarrow U_q(x)\Psi(x), \quad (2.9)$$

onde $U_q(x) = e^{-iqe\theta(x)}$ é uma representação de $U(x)$ com parâmetro q . Se a função θ for constante, esta transformação definirá uma simetria global da lagrangiana de Dirac: o termo $e^{-iqe\theta}$ proveniente da transformação de ψ não será afetado pelo quadrigradiente, e se cancelará com o termo $e^{iqe\theta}$ do campo Ψ^\dagger . No caso em que θ depende de x , a ação de $\partial/\partial x_\mu$ sobre $U_q(x)$ irá gerar um termo sobressalente, i.e. $\mathcal{L}_D \longrightarrow \mathcal{L}_D - i\bar{\Psi}U_q^\dagger (\not{\partial}U_q) \Psi$. Para que esta lagrangiana seja invariante também sob transformações locais, devemos de alguma forma cancelar este termo.

Vamos definir uma nova derivada – a derivada covariante D_μ – acrescentando um termo à derivada usual tal que, sob transformações locais, este novo termo se transforme de forma a cancelar o termo indesejado. A derivada covariante é definida como

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + iqeA_\mu) \Psi, \quad (2.10)$$

onde A_μ é o campo de gauge. O campo A_μ se transforma no grupo $U(1)$ segundo

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{i}{e} (\partial_\mu U) U^\dagger = A_\mu + \partial_\mu \theta. \quad (2.11)$$

Enquanto que o campo ψ se transforma numa representação do grupo $U(1)$, o campo de gauge se transforma com $U = U(x)$, um elemento do próprio grupo. A derivada covariante, por meio do parâmetro q , também depende da representação à qual ψ está associado.

A derivada covariante é assim chamada porque, sob as transformações (2.9) e (2.11),

$$D_\mu \Psi \longrightarrow U_q(x)D_\mu \Psi, \quad (2.12)$$

i.e. ela se transforma da mesma forma que o campo ψ . Se substituirmos todas as derivadas ordinárias por covariantes na lagrangiana de Dirac, o resultado será uma lagrangiana invariante sob transformações locais do grupo $U(1)$, que é o que buscamos. A lagrangiana resultante é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\Psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m) \Psi \\ &= -\Psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi + iqe\Psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \Psi A_\mu. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dizemos que a simetria global $U(1)$ foi promovida a simetria local, e a teoria obtida é

chamada de teoria de gauge. Por se tratar de uma teoria com grupo de gauge abeliano, dizemos que a teoria é abeliana. O termo extra na lagrangiana, $iqe\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$, é responsável pelo acoplamento do campo de gauge ao campo fermiônico, e o parâmetro q é a constante de acoplamento da teoria. A este tipo de acoplamento dá-se o nome de acoplamento minimal.

Por fim, nos resta acrescentar à lagrangiana um termo cinético⁵ para o campo de gauge A_μ , a fim de conferir "dinâmica" ao campo. Este termo é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2, \quad (2.14)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico de *rank* 2. Este é definido em termos do campo de gauge A_μ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.15)$$

e é um invariante de gauge,

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \theta(x)) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \theta(x)) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

A lagrangiana (2.14), conseqüentemente, também será invariante, e podemos incorporá-la a (2.13). Com este novo termo, obtemos enfim a lagrangiana de uma teoria de gauge com grupo de simetria $U(1)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= -\bar{\psi}(i\not{D} + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \\ &= -\psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi + iqe\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esta é a lagrangiana da QED, que dita a interação entre os léptons carregados (elétron, múon e tau) – os quanta do campo fermiônico ψ – e os fótons – quanta do campo de gauge A_μ . O tensor $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético, e a constante e é a carga do elétron. Ao contrário do que acontece na eletrodinâmica clássica, na QED a variável dinâmica fundamental é o campo de gauge A_μ ; o tensor $F_{\mu\nu}$, bem como os campos elétrico e magnético, são quantidades derivadas.

Se \mathcal{L}_{QED} é invariante sob simetrias locais, ela também o é sob simetrias globais, e podemos calcular a corrente de Noether associada. Na forma infinitesimal, (2.26) se torna $\psi(x) \longrightarrow \psi(x) - iqe\theta\psi(x) = \psi(x) + \varepsilon\Phi_i$, e temos

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} \Phi_i - T_{\mu\nu} X_\nu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} i\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} i\psi^\dagger = i\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \psi, \quad (2.17)$$

⁵Termos cinéticos são aqueles que contêm dois campos. Termos deste tipo descrevem o comportamento livre (não-interagente) dos campos, e campos com derivadas temporais em seus termos cinéticos são ditos "propagantes". Termos de interação, por outro lado, são aqueles que contêm três ou mais campos [13].

onde $\psi_i = (\psi, \bar{\psi})$, $\Phi_i = (-i\psi, i\psi^\dagger)$ e $X_\nu = 0^6$. A corrente de Noether conservada J_μ é chamada de corrente vetorial $U(1)$, e o termo de acoplamento na lagrangiana pode ser reescrito como $iqe\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi A_\mu \longrightarrow qeJ_\mu A_\mu$. A carga conservada correspondente é dada por

$$Q = -i \int d^3x J_4 = \int d^3x \psi^\dagger \psi, \quad (2.18)$$

e corresponde à carga elétrica, em unidades de e .

A partir de \mathcal{L}_{QED} , podemos obter um conjunto de quatro equações de Euler-Lagrange para o campo fermiônico, as equações de campo

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -iqe\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\nu\psi, \quad (2.19)$$

que equivalem ao par de equações de Maxwell inhomogêneas em sua formulação covariante. Vamos reescrevê-las em sua forma mais usual, em termos dos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} . Da definição de $F_{\mu\nu}$ em (2.15), temos

$$F_{4i} = \partial_4 A_i - \partial_i A_4 = i(-\dot{A}_i - \nabla_i A_0), \quad (2.20)$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad (2.21)$$

onde podemos identificar, no lado direito, as expressões

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.22)$$

da eletrodinâmica clássica, com $A_\mu = (\mathbf{A}, iA_0)$ o quadripotencial, $A_0 = \phi$ o potencial escalar e A_i o potencial vetor. Assim, podemos estabelecer a correspondência

$$F_{4i} = iE_i, \quad F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k \quad (2.23)$$

entre os elementos de $F_{\mu\nu}$ e as componentes dos campos elétrico e magnético. Voltando à equação (2.19), temos agora

$$\begin{aligned} \partial_i F_{i4} &= -iqe\psi^\dagger\gamma_4\gamma_4\psi = -iqe\psi^\dagger\psi \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \end{aligned} \quad (2.24)$$

para $\nu = 4$, que é a lei de Gauss com densidade de carga $\rho = qe\psi^\dagger\psi$. Para $\nu = i$, temos

$$\begin{aligned} -iqe\psi^\dagger\gamma_4\gamma_i\psi &= \partial_\mu F_{\mu i} = \partial_j F_{ji} + \partial_4 F_{4i} = -\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k + \partial_0 E_i \\ &= -(\nabla \times \mathbf{B})_i + \partial_t E_i \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Esta é a lei de Ampère-Maxwell, e $j_i = iqe\psi^\dagger\gamma_4\gamma_i\psi$ é a densidade de corrente. As densidades ρ e j_i são componentes de um quadrivetor $j_\mu = (\mathbf{j}, i\rho) = iqe\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi$, a corrente de

⁶ X_ν está relacionado às variações do tipo $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon X_\mu$ nas coordenadas.

Dirac. Assim, $\partial_\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu$ equivale ao par de equações de Maxwell (2.24) e (2.25), com a densidade de quadricorrente j_μ como fonte dos campos fermiônicos.

O segundo par de equações pode ser obtido simplesmente observando que o tensor $F_{\mu\nu}$, por ser anti-simétrico, deve satisfazer a identidade de Jacobi

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0. \quad (2.26)$$

A partir desta relação, recuperamos as leis de Maxwell restantes,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (2.27)$$

a lei de Gauss do magnetismo e a lei de Faraday. Assim, em sua formulação covariante, as quatro leis de Maxwell se reduzem ao par (2.19) e (2.26).

Já construímos a lagrangiana da QED, e mostramos como obter as leis de Maxwell a partir desta. Para finalizar esta seção, vamos explorar uma última característica das teorias de gauge: a liberdade de gauge. Analisando mais uma vez a transformação (2.11), percebemos que diferentes campos A_μ , relacionados uns aos outros por transformações de gauge, são equivalentes – i.e. levam à mesma dinâmica. Como as variáveis dinâmicas não são bem fixadas, somos deixados com uma teoria com graus de liberdade redundantes. A fim de contornar este problema, impomos vínculos às variáveis dinâmicas, e os graus de liberdade são reduzidos; a este processo chamamos de fixação do gauge.

Em geral, buscamos escolher um gauge que simplifique os cálculos. Podemos, por exemplo, requerer que A_μ satisfaça

$$A_0 = 0, \quad (2.28)$$

e este gauge é conhecido como gauge temporal, ou gauge de Weyl. Alternativamente, podemos tomar

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.29)$$

que é o gauge de Coulomb, ou gauge transverso. Por fim, temos

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad (2.30)$$

que define o gauge de Lorentz; dos gauges apresentados acima, este é o único explicitamente covariante.

Ao quantizar a teoria, somos levados a tomar a seguinte escolha: fixar o gauge de forma a trabalhar apenas com os graus de liberdade físicos da teoria, mas perdendo a covariância explícita durante a quantização; ou manter os graus de liberdade expúrios, mantendo também a covariância durante toda a quantização. Sabemos, da teoria eletromagnética, que os fótons têm dois graus de liberdade – os seus dois estados de polarização –, enquanto que o potencial de gauge A_μ tem quatro graus de liberdade; portanto, dois des-

tes graus de liberdade devem ser não-físicos.

2.4 Teorias de gauge não-abelianas

Nesta seção, apresentaremos em linhas gerais as teorias de gauge não-abelianas, também conhecidas como teorias de Yang-Mills. Vamos generalizar o processo de construção da lagrangiana com simetria local $U(1)$ para o caso de grupos não-comutativos. Para tal, partiremos, como no caso da QED, de uma teoria com invariância global e, por meio do acoplamento a um campo de gauge, promoveremos esta simetria a local. Como nosso interesse é a QCD, vamos trabalhar com o grupo de simetria $SU(N)$, e nossos campos de matéria serão novamente férmions de Dirac; a generalização para a QCD seguirá de forma natural.

Começemos por relembrar certas propriedades dos grupos $SU(N)$ que nos serão úteis. O grupo $SU(N)$ é o grupo das matrizes unitárias e especiais (de determinante 1) $N \times N$. É um grupo de Lie⁷ com $N^2 - 1$ geradores T^a , $a = 1, \dots, N^2 - 1$. Estes geradores são Hermitianos e de traço nulo, e satisfazem uma álgebra não comutativa $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, a álgebra de Lie. As quantidades f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo, completamente anti-simétricas e reais.

Duas representações serão de relevância em nossa construção: a representação fundamental e a adjunta. Na representação fundamental, os elementos da representação são os próprios elementos do grupo; sua dimensão é N . No caso do $SU(3)$, os geradores na representação fundamental são $T^a = \lambda^a/2$, onde λ^a são as 8 matrizes de Gell-Mann 3×3 . Na representação adjunta, os elementos da representação são as constantes de estrutura do grupo, i.e. $(T_{\text{adj}}^a)^{bc} = -if^{abc}$. Os elementos de $SU(N)$ são representados por matrizes $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$: a representação e a álgebra têm mesma dimensão.

Nosso ponto de partida é a lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L}_D = -\psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi, \quad (2.31)$$

para um conjunto de campos fermiônicos $\psi^\alpha(x)$ pertencentes a uma certa representação R , com $\alpha = 1, \dots, N$, onde $N = \dim(R)$, e soma no índice α implícita. Podemos definir o vetor ψ

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

⁷Grupos de Lie são grupos cujos elementos dependem, de forma contínua e diferenciável, de um conjunto de parâmetros reais [15].

onde cada componente ψ^α é um espinor de Dirac, tal que

$$\mathcal{L}_D = -\psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi. \quad (2.33)$$

Vamos aplicar aos campos transformações do tipo

$$\psi^\alpha(x) \longrightarrow (U_R \psi)^\alpha = (U_R(x))^{\alpha\beta} \psi^\beta(x), \quad (2.34)$$

onde $U_R(x) = \exp[ig\theta^a(x)T_R^a]$ é um elemento do grupo $SU(N)$ na representação R – uma matriz $N \times N$ unitária de determinante 1, função de x . T_R^a são os geradores nesta representação e $\theta^a(x)$ são os parâmetros da transformação. O índice a dos geradores corre de 1 a $N^2 - 1$, a dimensão do $SU(N)$. g é a constante de acoplamento da teoria. É fácil verificar que, no caso em que θ^a é constante, a lagrangiana é invariante; dizemos, portanto, que esta lagrangiana exibe uma simetria global sob transformações do grupo $SU(N)$.

Agora, vamos introduzir um conjunto de $N^2 - 1$ campos de gauge A_μ^a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$), a partir dos quais podemos definir o campo matricial $N \times N$

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_R^a, \quad (2.35)$$

pertencente à mesma representação R dos campos ψ . Temos, portanto, um campo de gauge A_μ^a para cada gerador T_R^a do grupo. Vamos generalizar a transformação (2.11) do campo de gauge para o caso não-abeliano. Como as matrizes A_μ e U_R não comutam, o campo matricial A_μ passa a se transformar segundo

$$A_\mu \longrightarrow U_R A_\mu U_R^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U_R) U_R^\dagger, \quad (2.36)$$

com A_μ e U_R na mesma representação R . A partir do campo matricial, podemos definir a derivada covariante atuando sobre o campo ψ como

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igA_\mu) \psi = (\partial_\mu - igA_\mu^a T_R^a) \psi, \quad (2.37)$$

em notação matricial, onde T_R^a está na mesma representação de ψ . Explicitamente,

$$(D_\mu \psi)^\alpha = \left(\delta^{\alpha\beta} \partial_\mu - igA_\mu^a (T_R^a)^{\alpha\beta} \right) \psi^\beta. \quad (2.38)$$

Sob as transformações (2.34) e (2.36) combinadas,

$$(D_\mu \psi)^\alpha \longrightarrow (U_R)^{\alpha\beta} (D_\mu \psi)^\beta, \quad (2.39)$$

i.e. a derivada covariante D_μ se transforma da mesma forma que o campo sobre o qual ela atua, como no caso abeliano. Portanto, substituindo as derivadas usuais por derivadas covariantes na lagrangiana de Dirac, obtemos

$$\mathcal{L} = -\psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi$$

$$= -\Psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi^\alpha + ig A_\mu^a \Psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (T_R^a)^{\alpha\beta} \Psi^\beta, \quad (2.40)$$

que é uma lagrangiana com invariância de gauge não-abeliana local, e grupo de gauge $SU(N)$. Esta lagrangiana contém o termo cinético dos campos fermiônicos, o termo de massa, e o termo de interação com os campos de gauge. Vamos construir um termo cinético para os campos de gauge.

A forma generalizada do tensor $F_{\mu\nu}$ para o caso não-abeliano é

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu], \quad (2.41)$$

em termos dos campos matriciais A_μ definidos em (2.35). Podemos, de forma similar, escrever $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$, e a expressão (2.41) se torna

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c = -F_{\nu\mu}^a \quad (2.42)$$

em termos de suas componentes. Sob a transformação de gauge (2.36), $F_{\mu\nu}$ se transforma segundo

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow U_R(x) F_{\mu\nu}(x) U_R^\dagger(x). \quad (2.43)$$

Agora que sabemos como o tensor $F^{\mu\nu}$ se comporta sob transformações de gauge, podemos construir um termo cinético para o campo A_μ , que é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Este termo é invariante sob transformações de gauge, i.e.

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(U_R F_{\mu\nu} U_R^\dagger U_R F_{\mu\nu} U_R^\dagger \right) = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

onde usamos a propriedade cíclica do traço. Com o tensor $F_{\mu\nu}$ na representação fundamental, podemos reescrever $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ em termos de suas componentes $F_{\mu\nu}^a$ como

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (2.46)$$

onde usamos a relação⁸ $\text{Tr} (T_F^a T_F^b) = \delta^{ab}/2$.

A lagrangiana completa da teoria de Yang-Mills do $SU(N)$ com férmions de Dirac na representação R é

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\Psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m) \Psi - \frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

⁸ $\text{Tr} (T_F^a T_F^b) = C(R) \delta^{ab}$ para uma representação R , onde $C(R)$ é um fator de normalização dependente de R . Na representação fundamental, $C(R) = 1/2$.

$$= -\Psi^{\dagger\alpha}\gamma_4(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\Psi^\alpha + igA_\mu^a\Psi^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_\mu(T_R^a)^{\alpha\beta}\Psi^\beta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (2.47)$$

Por fim, notemos que o campo de gauge não-abeliano, ao contrário do campo dos fótons, auto-interage. Isto pode ser notado reescrevendo $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ em termos dos campos de gauge,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a &= \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c\right) \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{ade}A_\mu^d A_\nu^e\right) \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + 2gf^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A_\mu^b A_\nu^c + \\ &\quad g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Temos, portanto, o termo cinético usual, seguido de um termo proporcional a g , contendo um vértice de interação de três bósons de gauge, e um vértice de interação proporcional a g^2 , com quatro bósons. A auto-interação ocorre porque, no caso não-abeliano, os bósons de gauge carregam a carga do grupo de gauge – no caso da QCD, os glúons carregam carga de cor –, em contraste com a QED, onde os fótons não possuem carga elétrica.

A partir da lagrangiana de Yang-Mills (2.47), podemos construir a lagrangiana da QCD, que rege a dinâmica dos quarks e glúons. Trata-se de uma teoria de gauge não-abeliana com grupo de simetria $SU(3)_c$ de cor. Os campos de matéria ψ da teoria são os quarks, partículas fermiônicas de spin $1/2$ que se encontram na representação fundamental do $SU(3)$, de dimensão 3. Os bósons de gauge são chamados glúons, e estes estão na representação adjunta, de dimensão $3^2 - 1 = 8$. Existem, portanto, 8 glúons, um para cada gerador do $SU(3)$. Na representação fundamental, estes geradores são $T^l = \lambda^l/2$, onde λ^l são as matrizes de Gell-Mann 3×3 ; na representação adjunta, os geradores têm dimensão 8×8 . Além da carga de cor, os quarks possuem um grau de liberdade adicional, associado ao sabor – up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) e bottom (b).

A lagrangiana da QCD, a menos dos termos de renormalização e campos fantasmas, é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\Psi^{\dagger\alpha,A}\gamma_4(\gamma_\mu\partial_\mu + m_A)\Psi^{\alpha,A} + igA_\mu^a\Psi^{\dagger\alpha,A}\gamma_4\gamma_\mu(T_R^a)^{\alpha\beta}\Psi^{\beta,A} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (2.49)$$

com soma implícita nos índices de cor $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ e de sabor $A = u, d, c, s, t, b$; g é a constante de acoplamento da QCD. Para cada valor do índice A , i.e. para cada sabor de quark, temos uma lagrangiana de Yang-Mills do $SU(3)$ com uma massa m_A diferente.

Para finalizar nossa breve discussão a respeito da QCD, chamamos a atenção para duas importantes propriedades da teoria: o confinamento e a liberdade assintótica.

Tanto os quarks quanto os glúons são partículas que carregam cor, e como tal, não são observadas em seus estados livres, mas apenas "confinadas" na forma de hádrons; e, nestes, as partículas de cor se combinam de tal forma que o hádron resultante é sempre de cor neutra. Nas *glueballs*, os glúons também se combinam de forma a gerar uma partícula

neutra.

A liberdade assintótica, por sua vez, está relacionada ao comportamento da teoria em diferentes escalas de energia e, conseqüentemente, de comprimento: a interação entre os quarks é forte quando a distância entre eles é grande, ou equivalentemente, em baixas energias; à medida em que a distância diminui e a energia aumenta, a força entre os quarks diminui, e eles passam a se comportar como partículas livres – dizemos, então, que estes se tornam assintoticamente livres. A força forte, portanto, só é de fato forte em baixas energias; o contrário ocorre, por exemplo, na QED. Como a interação é fraca em altas energias, a correspondente constante de acoplamento é pequena, e a QCD pode ser tratada perturbativamente. Em baixas energias, quando o tratamento perturbativo se torna inadequado, as partículas se encontram confinadas, e os graus de liberdade da teoria passam a ser os graus de liberdade hadrônicos. No modelo que introduziremos nos capítulos seguintes, ao invés de trabalharmos diretamente com estes graus de liberdade, descreveremos os hádrons em termos dos graus de liberdade quarkônicos e teremos uma teoria baseada em primeiros princípios.

Capítulo 3

QCD no gauge de Coulomb

Como mencionado no capítulo 2, a quantização de teorias de gauge não é um processo trivial, em virtude dos graus de liberdade redundantes e da consequente liberdade de gauge. Para lidar com este problema, fixaremos o gauge, a fim de eliminar os graus de liberdade expúrios, e procederemos enfim à quantização canônica da teoria.

Iremos, neste capítulo, escrever o hamiltoniano da QCD no gauge de Coulomb, seguindo as referências [10] e [29]. Com a lagrangiana da QCD em mãos, começaremos escrevendo o hamiltoniano no gauge axial, o que resultará numa teoria "euclidianizada"; em seguida, imporemos o segundo vínculo, levando o hamiltoniano ao gauge de Coulomb.

3.1 Hamiltoniano

Nesta seção, iremos definir quantidades análogas às definidas na QED, no âmbito de teorias de gauge não-abelianas. Vamos partir da lagrangiana da QCD, definida em (2.49). Podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= -\bar{\psi}^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_\mu\partial_\mu\psi^\alpha + igA_\mu^l\bar{\psi}^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_\mu T_{\alpha\beta}^l\psi^\beta - m\bar{\psi}^{\dagger\alpha}\gamma_4\psi^\alpha - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^l F_{\mu\nu}^l \\ &= -\bar{\psi}^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_\mu D_\mu^{\alpha\beta}\psi^\beta - m\bar{\psi}^{\dagger\alpha}\gamma_4\psi^\alpha - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^l F_{\mu\nu}^l,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde o índice de sabor A dos campos ψ foi omitido, a fim de simplificar a notação – temos uma lagrangiana deste tipo para cada sabor de quark, cada uma com uma massa m_A . Os geradores nesta expressão são as matrizes de Gell-Mann usuais, $T^l = \lambda^l/2$, na representação fundamental do $SU_c(3)$. A derivada covariante, quando atuando em objetos na representação fundamental, é dada por

$$D_\mu^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}\partial_\mu - igA_\mu^l T_{\alpha\beta}^l = (\partial_\mu - igA_\mu)^{\alpha\beta}.\tag{3.2}$$

Para objetos na representação adjunta, temos

$$D_\mu^{lm} = \delta^{lm}\partial_\mu - gf^{lmn}A_\mu^n, \quad (3.3)$$

onde os geradores são as constantes de estrutura da álgebra, $(T^l)^{mn} = -if^{lmn}$.

Na QED, os elementos do tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ correspondiam às componentes dos campos elétrico e magnético; podemos, de forma análoga, estabelecer uma correspondência entre elementos do tensor do campo gluônico $F_{\mu\nu}^l$ e componentes de campos elétrico e magnético não-abelianos. Vamos, então, definir o campo "cromoelétrico" \mathbf{E}^l

$$\begin{aligned} E_i^l &= -iF_{4i}^l = -i\partial_4 A_i^l + i\partial_i A_4^l - igf^{lmn}A_4^m A_i^n \\ \mathbf{E}^l &= -\dot{\mathbf{A}}^l - \nabla A_0^l + gf^{lmn}A_0^m \mathbf{A}^n, \end{aligned} \quad (3.4)$$

e o campo "cromomagnético" \mathbf{B}^l

$$\begin{aligned} B_i^l &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}^l = \epsilon_{ijk}\left(\partial_j A_k^l + \frac{1}{2}gf^{lmn}A_j^m A_k^n\right) \\ \mathbf{B}^l &= \nabla \times \mathbf{A}^l + \frac{1}{2}gf^{lmn}\mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n, \end{aligned} \quad (3.5)$$

que passam a carregar contribuições não-abelianas $gf^{lmn}A_0^m \mathbf{A}^n$ e $(1/2)gf^{lmn}\mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n$.

Vamos obter as equações de Euler-Lagrange para o campo fermiônico e para o campo de gauge. Para os campos ψ^α , temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial \psi^{\dagger\alpha}} = -\gamma_4 \left(\gamma_\mu D_\mu^{\alpha\beta} \psi^\beta + m\psi^\alpha \right), \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial (\partial_\mu \psi^{\dagger\alpha})} = 0,$$

e as equações de movimento seguem de forma imediata,

$$\gamma_\mu D_\mu^{\alpha\beta} \psi^\beta + m\psi^\alpha = 0. \quad (3.6)$$

Para os campos de gauge, temos as contribuições dos termos de acoplamento e do termo F^2 , que levam a

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial A_\nu^l} = ig\psi^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_\nu T_{\alpha\beta}^l \psi^\beta - gf^{lmn}F_{\sigma\nu}^m A_\sigma^n, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu^l)} = -F_{\mu\nu}^l.$$

Portanto, em termos dos tensores $F_{\mu\nu}^l$, as equações de Euler-Lagrange são

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}^l - gf^{lmn}A_\mu^n F_{\mu\nu}^m = -ig\psi^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_\nu T_{\alpha\beta}^l \psi^\beta. \quad (3.7)$$

Podemos identificar, no lado esquerdo desta expressão, a derivada covariante de $F_{\mu\nu}^l$, como

definida em (3.3). Então, reescrevendo esta equação de forma mais sucinta, temos

$$D_{\mu}^{lm} F_{\mu\nu}^m = -gJ_{\nu}^l, \quad (3.8)$$

com a quadricorrente J_{ν}^l definida como

$$J_{\nu}^l \equiv i\psi^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_{\nu}T_{\alpha\beta}^l\psi^{\beta}. \quad (3.9)$$

A equação (3.13) tem forma similar à equação (2.19) da QED, a partir da qual derivamos as leis de Maxwell inomogêneas; repetindo o processo, vamos encontrar equações análogas, desta vez em termos dos campos \mathbf{E}^l e \mathbf{B}^l . Tomando $\nu = 4$ em (3.13), encontramos

$$\begin{aligned} D_i^{lm} F_{i4}^m &= -ig\psi^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_4T_{\alpha\beta}^l\psi^{\beta} \\ \mathbf{D}^{lm} \cdot \mathbf{E}^m &= g\psi^{\dagger\alpha}T_{\alpha\beta}^l\psi^{\beta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Definindo a densidade de carga de cor do quark $\rho_q^l = \psi^{\dagger\alpha}T_{\alpha\beta}^l\psi^{\beta} = \psi^{\dagger}T^l\psi$, a expressão se torna

$$\mathbf{D}^{lm} \cdot \mathbf{E}^m = g\rho_q^l, \quad (3.11)$$

ou, expandindo a derivada covariante,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}^l - gf^{lmn}\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{E}^m &= g\rho_q^l \\ \nabla \cdot \mathbf{E}^l &= g\rho^l, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $\rho^l = \rho_q^l + \rho_g^l$ é a densidade de carga total, com a contribuição não-abeliana

$$\rho_g^l \equiv f^{lmn}\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{E}^m. \quad (3.13)$$

A equação (3.11) é o equivalente da lei de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ para o campo cromoeletrico. Voltando a (3.13) e tomando $\nu = i$, obtemos

$$\begin{aligned} D_4^{lm} F_{4i}^m + D_j^{lm} F_{ji}^m &= -ig\psi^{\dagger\alpha}\gamma_4\gamma_iT_{\alpha\beta}^l\psi^{\beta} \\ \mathbf{D}^{lm} \times \mathbf{B}^m &= iD_4^{lm}\mathbf{E}^m + g\mathbf{J}^l, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde a corrente J_i^l é chamada de corrente de quarks, dada por

$$\mathbf{J}^l = \psi^{\dagger\alpha}\alpha T_{\alpha\beta}^l\psi^{\beta}, \quad (3.15)$$

com $\alpha_i = i\beta\gamma_i$. Portanto, podemos escrever a quadricorrente J_{μ}^l como $J_{\mu}^l = i\psi^{\dagger}\gamma_4\gamma_{\mu}T^l\psi$, com componentes $J_i^l = i\psi^{\dagger}\gamma_4\gamma_iT^l\psi$ e $J_4^l = i\rho_q^l$. Expandindo a derivada covariante, (3.14) pode ser reescrita como

$$\nabla \times \mathbf{B}^l + gf^{lmn}\mathbf{A}^m \times \mathbf{B}^n = \dot{\mathbf{E}}^l + gf^{lmn}\mathbf{E}^mA_0^n + g\mathbf{J}^l, \quad (3.16)$$

que é equivalente à lei de Ampère-Maxwell, $\nabla \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{J}$.

Por fim, necessitaremos dos momentos conjugados aos campos de gauge para escrever o hamiltoniano da QCD. Estes são dados por

$$\Pi_\mu^l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu^l} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 A_\mu^l)} = -i F_{\mu 4}^l, \quad (3.17)$$

cuja parte espacial é $\Pi_i^l = -E_i^l$. Os momentos conjugados aos campos fermiônicos são

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\alpha} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \psi^\alpha)} = i \psi^{\dagger \alpha}. \quad (3.18)$$

Com o ferramental matemático pronto, podemos enfim escrever o hamiltoniano da QCD no gauge de Weyl.

3.1.1 Gauge de Weyl

Lembremos que a densidade lagrangiana (3.1) é invariante sob as transformações de gauge do $SU(3)$, definidas por

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (3.19)$$

$$\psi \longrightarrow \psi' = U \psi, \quad (3.20)$$

com $U = U(x)$ uma matriz unitária qualquer, 3×3 e de determinante 1, na representação fundamental do $SU(3)$. Dada uma configuração qualquer $A_\mu = f_\mu(\mathbf{x}, t)$ do campo de gauge, podemos escolher para U^\dagger a função

$$U^\dagger(\mathbf{x}, t) = T \exp \left[-i \int_0^t g f_0(\mathbf{x}, t') \right], \quad (3.21)$$

onde T é o operador de ordenamento temporal, tal que a transformação (3.19) leve o campo de gauge da configuração original $f_\mu(x)$ para o gauge de Weyl $A_0(x) = 0$. Tomando a derivada temporal de U^\dagger , obtemos a relação

$$\frac{\partial U^\dagger}{\partial t} = -i g f_0 U^\dagger. \quad (3.22)$$

Provemos que a expressão (3.21) para U^\dagger leva $f_4 \longrightarrow A'_4 = 0$. Tomando $\mu = 4$ na expressão (3.19), e usando a relação acima, temos

$$A'_4 = U f_4 U^\dagger - \frac{i}{g} \frac{\partial U}{\partial x_4} U^\dagger = i U f_0 U^\dagger + \frac{1}{g} U \frac{\partial U^\dagger}{\partial t}$$

$$= iU f_0 U^\dagger - iU f_0 U^\dagger = 0,$$

onde usamos também a unitariedade da matriz U . Portanto, $A'_0 = 0$ em todo o espaço.

Neste gauge, o campo cromoelétrico definido em (3.4) passa a ser $\mathbf{E}^l = -\dot{\mathbf{A}}^l$, e o momento conjugado a \mathbf{A}^l , $\Pi^l = -\mathbf{E}^l = \dot{\mathbf{A}}^l$. Reescrevendo o termo cinético dos campos de gauge em termos dos campos \mathbf{E}^l e \mathbf{B}^l , encontramos

$$F_{\mu\nu}^l F_{\mu\nu}^l = 2 \left(B_i^l B_i^l - E_i^l E_i^l \right), \quad (3.23)$$

que, no gauge de Weyl, é $F_{\mu\nu}^l F_{\mu\nu}^l = 2 \left(B_i^l B_i^l - \Pi_i^l \Pi_i^l \right)$. Substituindo este termo na lagrangiana (3.1), temos

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu^{\alpha\beta} \psi^\beta - m \psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 \psi^\alpha + \frac{1}{2} \left(\Pi_i^l \Pi_i^l - B_i^l B_i^l \right), \quad (3.24)$$

a partir da qual podemos escrever o hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{QCD}} &= i\Pi^\alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \psi^\alpha + i\Pi_i^l \frac{\partial}{\partial x_4} A_i^l - \mathcal{L}_{\text{QCD}} \\ &= \psi^{\dagger\alpha} \gamma_4 (\gamma_i \nabla_i + m) \psi^\alpha - g I_i^l A_i^l + \frac{1}{2} \left(\Pi_i^l \Pi_i^l + B_i^l B_i^l \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Com o hamiltoniano da QCD no gauge de Weyl, podemos proceder à quantização canônica. Para os campos de gauge, impomos as relações de comutação canônicas

$$\left[A_i^l(\mathbf{x}, t), \Pi_j^m(\mathbf{y}, t) \right] = i\delta^{lm} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.26)$$

e para os campos de Dirac, as relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \Pi^\beta(\mathbf{y}, t) \right\} &= i\delta^{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \left\{ \psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y}, t) \right\} &= \delta^{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

As demais relações de comutação e anti-comutação valem zero. Podemos mostrar que, tanto o hamiltoniano \mathcal{H}_{QCD} quanto as relações (3.26) e (3.27) são invariantes sob transformações de gauge independentes do tempo, i.e. (3.19) e (3.20) para $\mu \rightarrow i$ e $U = U(\mathbf{x})$. Portanto, no gauge de Weyl, as transformações (3.19) e (3.20) nos levam a um espaço euclidianizado, no qual as componentes temporais podem ser desconsideradas. Nos resta saber como o momento conjugado Π_i^l se comporta sob as transformações de gauge. Definindo $\Pi_i = \Pi_i^l T_i^l$, temos

$$\Pi_i \longrightarrow U \Pi_i U^\dagger, \quad (3.28)$$

onde usamos a definição (3.17), e a lei de transformação de $F_{\mu\nu}$ (2.43). O hamiltoniano,

bem como as relações de comutação e anti-comutação impostas, são invariantes sob as transformações (3.19), (3.20) e (3.28).

Como as matrizes U não mais dependem do tempo, o grupo de invariância $\{U(\mathbf{x})\}$ é gerado pelos operadores \mathcal{G}^l , definidos por

$$\mathcal{G}^l \equiv J^l + \psi^\dagger T^l \psi, \quad (3.29)$$

que também dependem apenas de \mathbf{x} , com os J^l dados por

$$J^l \equiv \frac{1}{g} D_i^{lm} \Pi_i^m. \quad (3.30)$$

Os operadores \mathcal{G}^l comutam com o hamiltoniano $H = \int d^3x \mathcal{H}$ e, portanto, satisfazem a equação de movimento de Heisenberg

$$\dot{\mathcal{G}}^l(\mathbf{x}, t) = -i \left[H, \mathcal{G}^l(\mathbf{x}, t) \right] = 0. \quad (3.31)$$

Logo, são quantidades conservadas. Similarmente, podemos obter as demais equações de movimento tomando o comutador do hamiltoniano H com as demais variáveis dinâmicas da teoria. Comutando H com o campo ψ , recuperamos a equação (3.6) para ψ ; comutando H com A_i^l , encontramos $\Pi_i^l = \dot{A}_i^l$, e do comutador de H com Π_i^l , recuperamos a parte espacial de (3.7) (i.e. $\nu = 1, 2, 3$). Por fim, notemos que a quantidade $i\mathcal{G}^l/g$ vale

$$\frac{i}{g} \mathcal{G}^l = \frac{i}{g^2} D_i^{lm} \Pi_i^m + \frac{i}{g} \psi^\dagger T^l \psi = -\frac{i}{g^2} \left(D_i^{lm} E_i^m - g \psi^\dagger T^l \psi \right). \quad (3.32)$$

Voltando à expressão (3.10) para a lei de Gauss, podemos reescrevê-la sob a forma

$$D_i^{lm} E_i^m - g \psi^\dagger T_{\alpha\beta}^l \psi = 0,$$

e percebemos que o lado esquerdo desta expressão equivale ao termo entre parênteses em (3.32). Vamos, então, requerer que todos os vetores de estado $|\rangle$ no gauge de Weyl satisfaçam

$$\mathcal{G}^l |\rangle = 0, \quad (3.33)$$

i.e. que os vetores de estado satisfaçam a lei de Gauss

$$\left(D_i^{lm} E_i^m - g \psi^\dagger T^l \psi \right) |\rangle = 0. \quad (3.34)$$

Na representação de Schrödinger os operadores não evoluem, de forma que podemos eliminar a dependência temporal escrevendo $A_i = A_i(\mathbf{x})$ e $\Pi_i = \Pi_i(\mathbf{x})$. O vetor de estado na representação A_i^l é o funcional $\Psi(A_i)$,

$$\Psi(A_i) \equiv \langle A_i^l | \rangle. \quad (3.35)$$

Nesta representação, o operador momento conjugado é dado por

$$\Pi_i^l(\mathbf{x}) = -i \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})}. \quad (3.36)$$

Como usual, podemos escrever o hamiltoniano H como $H = \mathcal{K} + \mathcal{V}$, onde \mathcal{K} é o operador energia cinética, e \mathcal{V} , energia potencial. Nesta representação, \mathcal{K} e \mathcal{V} são dados por

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{2} \int \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} d^3x, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{V} = \int \left[\frac{1}{2} B_i^l B_i^l - g I_i^l A_i^l + \psi^\dagger \alpha \gamma_4 (\gamma_i \nabla_i + m) \psi \right] d^3x. \quad (3.38)$$

Na próxima seção, partiremos da QCD no gauge de Weyl $A_0 = 0$, numa configuração qualquer $A_i^l(x)$, e mostraremos como chegar ao gauge de Coulomb, que é um gauge não-covariante.

3.1.2 Gauge de Coulomb

O novo campo de gauge será denotado por $W_\mu = W_\mu^l T^l$, e suas componentes espaciais devem satisfazer a condição

$$\chi(W_i) = \nabla_i W_i = 0, \quad (3.39)$$

onde χ é um funcional homogêneo e linear de W_i , definido na representação fundamental. O vínculo (3.39) define o gauge de Coulomb. Assim como os campos de gauge, podemos escrever χ como uma combinação linear dos geradores do $SU(3)$, $\chi = \chi^l T^l$. Vamos considerar χ uma matriz Hermitiana e de traço nulo.

Em termos dos coeficientes χ^l , a condição (3.39) define um conjunto de 8 vínculos, que podem ser escritos como

$$\begin{aligned} 0 = \chi^l(W_i, \mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | W_j, m \rangle = \int d^3x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | \mathbf{x}', n \rangle \langle \mathbf{x}', n | W_j, m \rangle \\ &= \int d^3x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | \mathbf{x}', n \rangle W_j^n(\mathbf{x}', t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde o elemento de matriz de Γ_j é real, e $l, m, n = 1, \dots, 8$ são os índices do grupo de gauge.

Vamos assumir que, dada uma configuração inicial $A_i(\mathbf{x}, t)$ do campo no gauge $A_0 = 0$, sempre existirá uma matriz de transformação $u(\mathbf{x}, t)$ capaz de levar A_i ao gauge de

Coulomb. Portanto, podemos escrever

$$A_i = uW_iu^{-1} + \frac{i}{g}u(\nabla_iu^{-1}), \quad (3.41)$$

onde u é uma matriz 3×3 do $SU(3)$. Um elemento qualquer de um grupo $SU(N)$ é completamente especificado por um conjunto de $N^2 - 1$ variáveis angulares ϕ_a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$), conhecidas como parâmetros do grupo. No caso de transformações locais, estes parâmetros dependem de x , de forma que os elementos do grupo também dependem de x . Portanto, considerando a matriz u função dos parâmetros ϕ_a que são, por sua vez, funções de x , $\phi_a(\mathbf{x}, t)$, podemos escrever

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\phi_a(\mathbf{x}, t)), \quad (3.42)$$

e a transformação (3.41) pode ser vista como uma expressão do campo de gauge $A_i(\mathbf{x}, t)$ em termos de coordenadas curvilíneas $W_i(\mathbf{x}, t)$ e $\phi_a(\mathbf{x}, t)$. A expressão (3.37) sugere a escolha dos campos A_i^l como coordenadas Cartesianas. Num ponto fixo x , temos um conjunto de $3 \times 8 = 24$ campos $A_i^l(x)$ (i varia de 1 a 3, e l , de 1 a 8); por outro lado, o gauge de Coulomb impõe 8 vínculos do tipo $\nabla_i W_i^l = 0$, de forma que apenas $24 - 8 = 16$ dos campos $W_i^l(x)$ são independentes. Portanto, temos 24 coordenadas Cartesianas $A_i^l(\mathbf{x})$ relacionadas a um conjunto de 16 e 8 coordenadas curvilíneas W_i^l e ϕ_a .

Numa transformação de um conjunto de coordenadas Cartesianas q_1, q_2, \dots para um conjunto de coordenadas curvilíneas $Q_1(q_\alpha), Q_2(q_\alpha), \dots$, ou seja $q_\alpha \rightarrow Q_\beta = Q_\beta(q_\alpha)$, o termo cinético da lagrangiana pode ser escrito como¹

$$K \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \dot{Q}_{\alpha} M_{\alpha\beta} \dot{Q}_{\beta}, \quad (3.43)$$

onde M é uma matriz cujos elementos são dados por

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \frac{\partial q_{\gamma}}{\partial Q_{\alpha}} \frac{\partial q_{\gamma}}{\partial Q_{\beta}}. \quad (3.44)$$

No hamiltoniano quântico, o operador energia cinética \mathcal{K} na representação das coordenadas é

$$\mathcal{K} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial q_{\alpha}^2} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} |M|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial Q_{\alpha}} \left(M_{\alpha\beta}^{-1} |M|^{1/2} \frac{\partial}{\partial Q_{\beta}} \right), \quad (3.45)$$

¹Na transformação de coordenadas Cartesianas para polares, por exemplo, temos $K = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, com

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

com $|M| = \det M$, e M^{-1} a matriz inversa a M , de elementos

$$M_{\alpha\beta}^{-1} = \sum_{\gamma} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_{\gamma}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\gamma}}. \quad (3.46)$$

Portanto, o elemento $|M|^{-1/2}$ é dado por

$$|M|^{-1/2} = \det \left(\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \right). \quad (3.47)$$

Vamos aplicar a transformação de coordenadas cartesianas para curvilíneas ao nosso caso. Os momentos conjugados a ϕ_a são

$$p_a(\mathbf{x}) = -i \frac{\delta}{\delta \phi_a(\mathbf{x})}, \quad (3.48)$$

onde estamos trabalhando com a representação de Schrödinger, e portanto, os operadores são independentes de t . Os momentos conjugados aos $W_i^l(\mathbf{x})$, por sua vez, obedecem os vínculos (3.39), e devem ser definidos com mais cuidado. Vamos expandir $W_i^l(\mathbf{x})$ em termos de um conjunto completo de funções ortonormais reais $f_i^l(\mathbf{x})_N$,

$$W_i^l(\mathbf{x}) = \sum_N Q_N f_i^l(\mathbf{x})_N, \quad (3.49)$$

onde os Q_N são coordenadas generalizadas independentes, e cada uma das funções $f_i^l(\mathbf{x})_N$ obedecem o conjunto de vínculos

$$\int d^3 x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | \mathbf{x}', m \rangle f_j^m(\mathbf{x}')_N = 0, \quad \forall N, \mathbf{x} \in l. \quad (3.50)$$

Portanto, os momentos conjugados aos $W_i^l(\mathbf{x})$ são dados por

$$P_i^l(\mathbf{x}) = \sum_N f_i^l(\mathbf{x})_N \left(-i \frac{\partial}{\partial Q_N} \right), \quad (3.51)$$

e também obedecem os vínculos

$$\chi^l(P_i, \mathbf{x}) = \int d^3 x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | \mathbf{x}', m \rangle P_j^m(\mathbf{x}') = 0. \quad (3.52)$$

Podemos interpretar $\langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i^{\dagger} | \mathbf{x}', m \rangle$ como a matriz de transformação que mapeia um vetor $|\xi\rangle$, no espaço funcional $h \equiv \{|\mathbf{x}', m\rangle\}$, num vetor $|\bar{\xi}\rangle$, definido num espaço maior $\bar{h} \equiv \{|\mathbf{x}, l\rangle\}$, onde $|\bar{\xi}\rangle$ é dado por

$$\langle i, \mathbf{x}, l | \bar{\xi} \rangle \equiv \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i^{\dagger} | \xi \rangle. \quad (3.53)$$

Seja $|N\rangle$ um vetor no espaço \bar{h} , ortogonal a todos os $|\bar{\xi}\rangle$. Definindo $f_i^l(\mathbf{x})_N \equiv \langle i, \mathbf{x}, l | N \rangle$, então

$$\langle \bar{\xi} | N \rangle = \int d^3x \langle \bar{\xi} | i, \mathbf{x}, l \rangle \langle i, \mathbf{x}, l | N \rangle = \int d^3x \langle \bar{\xi} | \Gamma_i | \mathbf{x}, l \rangle f_i^l(\mathbf{x})_N = 0 \quad (3.54)$$

é válida para todos os vetores $|\bar{\xi}\rangle$ em h , e o vínculo (3.50) é satisfeito.

Aplicando a transformação de coordenadas ao operador definido em (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\frac{1}{2} \int \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} \frac{\delta}{\delta A_i^l(\mathbf{x})} d^3x \\ &= \frac{1}{2} |M|^{-1/2} \int \int d^3x d^3x' \left[p_a(\mathbf{x}) |M|^{1/2} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} p_b(\mathbf{x}') + p_a(\mathbf{x}) |M|^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ai}^l P_i^l(\mathbf{x}') + P_i^l(\mathbf{x}) |M|^{1/2} M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ia}^l p_a(\mathbf{x}') + P_i^l(\mathbf{x}) |M|^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{lm} P_j^m(\mathbf{x}') \right], \quad (3.55) \end{aligned}$$

onde M é a matriz de massa. Na expressão acima, a inversa da matriz M foi dividida em quatro blocos, dados por

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ab} = \int d^3x'' \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} \frac{\delta \phi_b(\mathbf{x}')}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')}, \quad (3.56)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ai}^l = \int d^3x'' \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} \frac{\delta W_i^l(\mathbf{x}')}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} = M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ia}^l, \quad (3.57)$$

$$M^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{ij}^{lm} = \int d^3x'' \frac{\delta W_i^l(\mathbf{x})}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')} \frac{\delta W_j^m(\mathbf{x}')}{\delta A_k^n(\mathbf{x}'')}, \quad (3.58)$$

onde as derivadas funcionais valem

$$\frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta A_i^n(\mathbf{x}')} = -g \lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^k \langle \mathbf{x}, k | (\Gamma_j \mathcal{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}'), \quad (3.59)$$

$$\frac{\delta W_i^m(\mathbf{x})}{\delta A_j^l(\mathbf{x}')} = U^{lm}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \langle \mathbf{x}, m | \mathcal{D}_i (\Gamma_f \mathcal{D}_f)^{-1} \Gamma_j | \mathbf{x}', p \rangle U^{lp}(\mathbf{x}'), \quad (3.60)$$

e estão calculadas no apêndice B. As quantidades λ_a^l e U^{ml} são definidas por

$$iu^{-1} \frac{\partial u}{\partial \phi_a} \equiv \lambda_a \equiv \lambda_a^l T^l, \quad (3.61)$$

$$u^{-1} T^m u \equiv U^{ml} T^l, \quad (3.62)$$

e a derivada covariante no gauge de Coulomb na representação adjunta é definida em termos do novo campo W_i , $\mathcal{D}_i^{lm} = \delta^{lm} \nabla_i - g f^{lmn} W_i^n$.

A partir das derivadas funcionais dos campos de gauge, podemos obter o determinante

$|M|^{-1/2}$, definido em (3.47). Partindo da equação (3.49), podemos escrever a variação do campo de gauge como

$$\delta W_i^l(\mathbf{x}) = \sum_N f_i^l(\mathbf{x})_N \delta Q_N, \quad (3.63)$$

e de forma análoga, podemos escrever uma variação em $A_i^l(\mathbf{x})$ como

$$\delta A_i^l(\mathbf{x}') = U^{lm} [\delta \bar{A}_i^m(\mathbf{x}')_I + \delta \bar{A}_i^m(\mathbf{x}')_{II}], \quad (3.64)$$

onde

$$\delta \bar{A}_i^m(\mathbf{x}')_I \equiv \sum_{\xi} \langle \mathbf{x}', l | \Gamma_i^\dagger (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-1/2} | \xi \rangle \delta q_{\xi}, \quad \delta \bar{A}_i^m(\mathbf{x}')_{II} = \sum_N f_i^l(\mathbf{x}')_N \delta q_N, \quad (3.65)$$

e os vetores $|\xi\rangle$ em h formam uma base ortonormal completa. Portanto, podemos escrever a matriz $\partial Q_\alpha / \partial q_\beta$ na forma de uma matriz bloco 2×2 , cujo determinante é dado por

$$|M|^{-1/2} = \det \begin{bmatrix} \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta \bar{A}_j^m(\mathbf{x}')_I} & \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta \bar{A}_j^m(\mathbf{x}')_{II}} \\ \frac{\delta W_i^l(\mathbf{x})}{\delta \bar{A}_j^m(\mathbf{x}')_I} & \frac{\delta W_i^l(\mathbf{x})}{\delta \bar{A}_j^m(\mathbf{x}')_{II}} \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Este determinante é invariante sob transformações ortogonais entre as coordenadas cartesianas q , de forma que podemos reescrevê-lo como

$$|M|^{-1/2} = \det \begin{bmatrix} \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta q_{\xi}} & \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta q_N} \\ \frac{\delta Q_M}{\delta q_{\xi}} & \frac{\delta Q_M}{\delta q_N} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

A partir das equações (3.59), (3.64) e (3.65), podemos obter o primeiro par de derivadas funcionais

$$\frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta q_{\xi}} = -g \lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^l \langle \mathbf{x}, l | (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} (\Gamma_i \Gamma_i^\dagger)^{1/2} | \xi \rangle, \quad (3.68)$$

$$\frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta q_N} = -g \int d^3 x' \lambda^{-1}(\mathbf{x})_a^l \langle \mathbf{x}, l | (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle f_i^m(\mathbf{x}')_N = 0, \quad (3.69)$$

onde utilizamos o fato de que os $f_i^m(\mathbf{x}')_N$ obedecem os vínculos (3.50). Para as duas derivadas funcionais restantes, temos

$$\frac{\delta Q_M}{\delta q_{\xi}} = - \int d^3 x f_i^l(\mathbf{x})_M \langle \mathbf{x}, l | \mathcal{D}_i (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{1/2} | \xi \rangle \equiv X_{M\xi}, \quad (3.70)$$

$$\frac{\delta Q_M}{\delta q_N} = 1, \quad (3.71)$$

onde utilizamos também a derivada (3.60). Portanto, chegamos à forma final de $|M|^{-1/2}$,

$$|M|^{-1/2} = \det \begin{bmatrix} -g\lambda^{-1} (\Gamma_i \mathcal{D}_i)^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{1/2} & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

com X a matriz retangular de elementos $X_{M\xi}$. O determinante da matriz inversa, $|M|^{1/2}$, vale

$$|M|^{1/2} = \det \left[-g^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-1/2} \Gamma_i \mathcal{D}_i \lambda \right] = \text{const } \mathcal{J} |\lambda|, \quad (3.73)$$

onde $|\lambda| = \prod_{\mathbf{x}} \det \lambda(\mathbf{x})$, e a constante é dada por $\text{const} = \det[-g^{-1} (\Gamma_j \Gamma_j^\dagger)^{-1/2}]$. O determinante de Faddeev-Popov \mathcal{J} é uma medida da curvatura da variedade de gauge, e é definido como

$$\mathcal{J} = \det |\Gamma_i \mathcal{D}_i|. \quad (3.74)$$

Substituindo as derivadas funcionais (3.60) e (3.59) na expressão (3.55) para \mathcal{K} , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} \int d^3 x P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{J} P_i^l(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} |\lambda|^{-1} \int \int d^3 x d^3 x' \left[-P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{D}_i + \right. \\ & \left. -g p_a(\mathbf{x}) (\lambda^{-1})_a^l \right] \mathcal{J} (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger (\mathcal{D}_{k'}^\dagger \Gamma_{k'}^\dagger)^{-1} |\lambda| \times \\ & \left[\mathcal{D}_{i'} P_{i'}^{l'}(\mathbf{x}') - g (\lambda^{-1})_{a'}^{l'} p_{a'}(\mathbf{x}') \right], \quad (3.75) \end{aligned}$$

onde, a fim de simplificar a notação, denotamos elementos de matriz $\langle \mathbf{x}, l | O | \mathbf{x}', l' \rangle$ entre dois momentos quaisquer por O . Nesta expressão, os $P_i^l(\mathbf{x})$ cumprem o papel de momentos transversos; a quantidade entre colchetes é a densidade de carga, e o elemento de matriz entre as densidades é a função de Green Coulombiana, $(\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger (\mathcal{D}_{k'}^\dagger \Gamma_{k'}^\dagger)^{-1}$. Além destas, restam as variáveis angulares $\phi_a(\mathbf{x})$, seus momentos conjugados $p_a(\mathbf{x})$ e a matriz $|\lambda|$, sem papel definido nesta expressão.

Para eliminar a dependência angular em (3.75), vamos construir os geradores do grupo em termos dos momentos conjugados p_a 's. Definindo a quantidade

$$i \frac{\partial u}{\partial \phi_a} u^{-1} \equiv \Lambda_a \equiv T^l \Lambda_a^l, \quad (3.76)$$

mostremos que seus componentes Λ_a^l estão relacionados aos λ_a^l , definidos na equação (3.61). Partindo de sua definição e multiplicando à direita pela matriz u e à esquerda por sua inversa, temos

$$i u^{-1} \frac{\partial u}{\partial \phi_a} = u^{-1} T^l \Lambda_a^l u$$

$$\begin{aligned} T^m \lambda_a^m &= U^{lm} T^m \Lambda_a^l \\ \lambda_a^m &= U^{lm} \Lambda_a^l, \end{aligned} \quad (3.77)$$

onde usamos as definições (3.61) e (3.62). Podemos, ainda, inverter esta expressão, obtendo

$$\Lambda_a^l = U^{lm} \lambda_a^m, \quad (3.78)$$

onde usamos a ortogonalidade da matriz U . Além disso, como $\det(U) = 1$, então $\det \lambda = \det \Lambda$. Vamos definir dois conjuntos de operadores $\{j^l(\mathbf{x})\}$ e $\{J^l(\mathbf{x})\}$, tais que

$$p_a \equiv \lambda_a^l j^l \equiv \Lambda_a^l J^l. \quad (3.79)$$

Isolando os operadores, temos

$$j^l = (\lambda^{-1})_a^l p_a, \quad J^l = (\Lambda^{-1})_a^l p_a. \quad (3.80)$$

Segue, de (3.78) e (3.77), que $U^{ln} = \Lambda_a^l (\lambda^{-1})_a^n = \lambda_a^m (\Lambda^{-1})_a^l$. Portanto,

$$j^l = (\lambda^{-1})_a^l \Lambda_a^k J^k = U^{kl} J^k, \quad J^l = (\Lambda^{-1})_a^l \lambda_a^m j^m = U^{lm} j^m. \quad (3.81)$$

Mostremos que o operador J^l , definido em (3.80), é o mesmo operador $J^l = (1/g) D_i^{lm} \Pi_i^m$ definido em (3.30), na sessão anterior. Escrevendo a transformação de gauge (3.41) em termos de suas componentes, temos

$$\begin{aligned} T^l A_i^l &= u W_i^m T^m u^{-1} - \frac{i}{g} (\nabla_i u) u^{-1} \\ T^l A_i^l &= (u T^m u^{-1}) W_i^m - \frac{1}{g} (\nabla_i \phi_a) \left(i \frac{\partial u}{\partial \phi_a} u^{-1} \right) \\ A_i^l &= U^{lm} W_i^m - \frac{1}{g} \Lambda_a^l \nabla_i \phi_a, \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde usamos as definições (3.62) e (3.76). Portanto,

$$D_i^{lm} U^{mn} = U^{lm} \mathcal{D}_i^{mn}, \quad (3.83)$$

onde D_i^{lm} é a derivada covariante definida em termos do campo A_i^a , dada por (3.3). Podemos escrever o operador $D_i^{lm} \Pi_i^m$ como uma combinação linear dos momentos $p_a(\mathbf{x})$ e $P_i^l(\mathbf{x})$, dada por

$$\begin{aligned} D_i^{lm}(\mathbf{x}) \Pi_i^m(\mathbf{x}) &= -i D_i^{lm}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_i^m(\mathbf{x})} \\ &= \int d^3 x' \left[D_i^{lm}(\mathbf{x}) \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x}')}{\delta A_i^m(\mathbf{x})} p_a(\mathbf{x}') + D_i^{lm}(\mathbf{x}) \frac{\delta W_j^n(\mathbf{x}')}{\delta A_i^m(\mathbf{x})} P_j^n(\mathbf{x}') \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Vamos substituir nesta expressão as derivadas funcionais (3.60) e (3.59). Para o primeiro termo, temos

$$\begin{aligned}
D_i^{lm}(\mathbf{x}) \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x}')}{\delta A_i^m(\mathbf{x})} &= g\lambda^{-1}(\mathbf{x}')^k \langle \mathbf{x}', k | (\Gamma_j \mathcal{D}_j)^{-1} \Gamma_i U^\dagger D_i | \mathbf{x}, l \rangle \\
&= g\lambda^{-1}(\mathbf{x}')^k \langle \mathbf{x}', k | (\Gamma_j \mathcal{D}_j)^{-1} \Gamma_i \mathcal{D}_i U^\dagger | \mathbf{x}, l \rangle \\
&= g\lambda^{-1}(\mathbf{x}')^m U^{lm}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{3.85}
\end{aligned}$$

onde usamos a transposta da expressão (3.83). A matriz $\langle \mathbf{x}, l | U | \mathbf{x}', m \rangle = U^{lm}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ é real, e $\langle \mathbf{x}, l | D_i | \mathbf{x}', m \rangle = D_i^{lm}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ é anti-simétrica – bem como \mathcal{D}_i . Repetindo o processo para o segundo termo, encontramos

$$\begin{aligned}
D_i^{lm}(\mathbf{x}) \frac{\delta W_j^n(\mathbf{x}')}{\delta A_i^m(\mathbf{x})} &= \langle \mathbf{x}', n | \left[\delta_{ij} - \mathcal{D}_j (\Gamma_f \mathcal{D}_f)^{-1} \Gamma_i \right] U^\dagger D_i | \mathbf{x}, l \rangle \\
&= -\langle \mathbf{x}', n | \left[\delta_{ij} - \mathcal{D}_j (\Gamma_f \mathcal{D}_f)^{-1} \Gamma_i \right] \mathcal{D}_i U^\dagger | \mathbf{x}, l \rangle \\
&= 0. \tag{3.86}
\end{aligned}$$

Substituindo estes termos na expressão original, chegamos à expressão

$$\begin{aligned}
D_i^{lm}(\mathbf{x}) \Pi_i^m(\mathbf{x}) &= \int d^3 x' g\lambda^{-1}(\mathbf{x}')^m U^{lm}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') p_a(\mathbf{x}') \\
&= g\lambda^{-1}(\mathbf{x})^m U^{lm}(\mathbf{x}) p_a(\mathbf{x}) \\
&= g\Lambda^{-1}(\mathbf{x})^l p_a(\mathbf{x}) = gJ^l(\mathbf{x}), \tag{3.87}
\end{aligned}$$

que estabelece a conexão entre as duas definições do operador.

Por fim, voltemos à condição (3.33), que define o subespaço físico do espaço de Hilbert no gauge de Weyl. Os campos de gauge longitudinais são eliminados requerendo que os vetores de estado que constituem o subespaço físico satisfaçam a lei de Gauss (3.34). Sob a transformação de gauge (3.41), o funcional definido em (3.35) passa a depender de W_i e ϕ_a , de forma que a condição (3.33) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^l \Psi[W_i, \phi_a] &= \left(J^l + \psi^\dagger T^l \psi \right) \Psi[W_i, \phi_a] = 0 \\
\left[-i \frac{\delta}{\delta \phi_a} + \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi \right] \Psi[W_i, \phi_a] &= 0 \\
\left[\frac{\delta}{\delta \phi_a} + i \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi \right] \Psi[W_i, \phi_a] &= 0. \tag{3.88}
\end{aligned}$$

Para resolver esta expressão, tomamos

$$\Psi[W_i, \phi_a] = \mathcal{U}(\phi_a) \tilde{\Psi}(W_i), \tag{3.89}$$

onde $\tilde{\Psi}(W_i)$ é um vetor de estado qualquer, que depende de W_i e dos graus de liberdade

fermiônicos do sistema, mas não dependente de ϕ_a . A dependência em ϕ_a está contida no elemento \mathcal{U} , que pode ser visto como a transformação unitária que atua nos graus de liberdade fermiônicos, e representa o elemento de grupo $u(\phi_a)$. Substituindo (3.89) na expressão (3.88), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi_a} (\mathcal{U}(\phi_a) \tilde{\Psi}(W_i)) &= -i\Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi \mathcal{U}(\phi_a) \tilde{\Psi}(W_i) \\ i \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta\phi_a} \mathcal{U}^{-1} &= \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi, \end{aligned} \quad (3.90)$$

onde $\psi^\dagger T^l \psi$ são os geradores² de $\mathcal{U}(\phi_a)$. Esta expressão é o análogo, no espaço de Hilbert, de (3.76). Portanto, o estado $\tilde{\Psi}$ definido em (3.89) satisfaz a expressão (3.88), que é equivalente à lei de Gauss (3.11).

Portanto, podemos eliminar a dependência angular em ϕ_a do hamiltoniano H redefinindo-o como

$$\tilde{H} = \mathcal{U}(\phi)^{-1} H \mathcal{U}(\phi), \quad (3.92)$$

onde $H = \mathcal{K} + \mathcal{V}$, e passamos a trabalhar no subespaço do espaço de Hilbert dos vetores de estado $\tilde{\Psi}(W_i)$. Vamos aplicar esta transformação aos termos de \mathcal{K} , definido em (3.75). O termo $(\lambda^{-1})_a^m p_a$ se torna

$$\begin{aligned} (\lambda^{-1})_a^m \mathcal{U}^{-1} p_a \mathcal{U} &= -(\lambda^{-1})_a^m \Lambda_a^l \mathcal{U}^{-1} \psi^\dagger T^l \psi \mathcal{U} \\ &= -(\lambda^{-1})_a^m U^{ln} \lambda_a^n \mathcal{U}^{-1} \psi^\dagger T^l \psi \mathcal{U} \\ &= -U^{lm} \mathcal{U}^{-1} \psi^\dagger T^l \psi \mathcal{U} \\ &= -U^{lm} U^{lk} \psi^\dagger T^k \psi = -\psi^\dagger T^m \psi, \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde usamos a equação (3.78), e a relação

$$\mathcal{U}^{-1} \psi^\dagger T^m \psi \mathcal{U} = U^{ml} \psi^\dagger T^l \psi, \quad (3.94)$$

o análogo de (3.62) no espaço de Hilbert. Substituindo em (3.75), encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}} &= \frac{1}{2} g^{-1} \int d^3x P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{J} P_i^l(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} g^{-1} |\lambda|^{-1} \int \int d^3x d^3x' \left[-P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{D}_i + \right. \\ &\quad \left. g \psi^\dagger T^l \psi \right] \mathcal{J} (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger \left(\mathcal{D}_{k'}^\dagger \Gamma_{k'}^\dagger \right)^{-1} |\lambda| \left[\mathcal{D}_{i'} P_{i'}^{l'}(\mathbf{x}') + g \psi^\dagger T^{l'} \psi \right]. \end{aligned} \quad (3.95)$$

²Podemos escrever $u(\phi_a) = \exp\{-i\phi_a T_a^a\}$ e $\mathcal{U}(\phi_a) = \exp\{-i\phi_a T_{\mathcal{U}}^a\}$, com os geradores $T_{\mathcal{U}}^a$ dados por

$$T_{\mathcal{U}}^a = i \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi_a} \right|_{\phi=0} = \Lambda_a^l \psi^\dagger T^l \psi \mathcal{U} \Big|_{\phi=0} = \psi^\dagger T^l \psi, \quad (3.91)$$

uma vez que $\mathcal{U}(\phi_a = 0) = 1$. Similarmente, $u(\phi_a = 0) = 1$, tal que $\Lambda_a^l(\phi_a = 0) = 1$.

Passemos à energia potencial, dada pela equação (3.38). Os dois últimos termos podem ser agrupados em

$$-gT_i^l A_i^l + \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_i \nabla_i + m) \psi = \psi^\dagger \left[\alpha_i \left(-i\nabla_i - gT^l A_i^l \right) + m\beta \right] \psi,$$

que, após a transformação, passam a

$$\mathcal{U}^{-1} \psi^\dagger \left[\alpha_i \left(-i\nabla_i - gT^l A_i^l \right) + m\beta \right] \psi \mathcal{U} = \psi^\dagger \left[\alpha_i \left(-i\nabla_i - gW_i^l T^l \right) + m\beta \right] \psi. \quad (3.96)$$

Portanto, o operador (3.38) torna-se

$$\tilde{\mathcal{H}} = \int \left\{ \frac{1}{2} B_i^l B_i^l + \psi^\dagger \left[\alpha_i \left(-i\nabla_i - gT^l W_i^l \right) + m\beta \right] \psi \right\} d^3x, \quad (3.97)$$

e podemos enfim escrever a forma final de hamiltoniano. Combinando as expressões (3.95) e (3.97), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{H}(P, W) = & \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} B_i^l B_i^l + \psi^\dagger \left[\alpha_i \left(-i\nabla_i - gT^l W_i^l \right) + m\beta \right] \psi \right\} + \\ & \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} \int \int d^3x d^3x' \left[-P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{D}_i + g\psi^\dagger T^l \psi \right] \mathcal{J} (\Gamma_k \mathcal{D}_k)^{-1} \Gamma_j \Gamma_j^\dagger \times \\ & \left(\mathcal{D}_k^\dagger \Gamma_k^\dagger \right)^{-1} \left[\mathcal{D}_i' P_i^l(\mathbf{x}') + g\psi^\dagger T^l \psi \right] + \frac{1}{2} \mathcal{J}^{-1} \int d^3x P_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{J} P_i^l(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde as variáveis angulares foram completamente eliminadas. No gauge de Coulomb, a matriz Γ_i é dada por

$$\langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle = \nabla_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta^{lm}, \quad (3.99)$$

e o operador $\Gamma_k \mathcal{D}_k$ se torna

$$\Gamma_k \mathcal{D}_k = \nabla_k \mathcal{D}_k = \nabla_k \left(\nabla_k \delta^{lm} - g f^{lmn} W_k^n \right). \quad (3.100)$$

Substituindo os momentos conjugados $P_i^l(\mathbf{x})$ pela notação mais familiar $\Pi_i^l(\mathbf{x})$, podemos reescrever o hamiltoniano como

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) (-i\alpha_i \nabla_i + \beta m) \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d^3x \left[\mathcal{J}^{-1} \Pi_i^l(\mathbf{x}) \mathcal{J} \Pi_i^l(\mathbf{x}) + B_i^l(\mathbf{x}) B_i^l(\mathbf{x}) \right] + \\ & - \frac{g^2}{2} \int \int d^3x d^3x' \rho^l(\mathbf{x}) \mathcal{J}^{-1} K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathcal{J} \rho^m(\mathbf{x}') - g \int d^3x J_i^l(\mathbf{x}) W_i^l(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.101)$$

onde usamos $\nabla_i \Pi_i^l = 0$. O elemento de matriz em (3.98) tornou-se o kernel $K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, dado por

$$K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}, l | \mathcal{M}^{-1} \nabla^2 \mathcal{M}^{-1} | \mathbf{x}', m \rangle, \quad (3.102)$$

onde a matriz \mathcal{M} é definida como $\mathcal{M} = \nabla \cdot \mathbf{D}$, com a derivada covariante $\mathbf{D} = \delta^{ab} \nabla - g f^{abc} \mathbf{A}^c$ na representação ajunta. O sinal negativo no primeiro termo surge ao invertermos a ordem dos operadores ∇_i e \mathcal{D}_i no kernel, devido à anti-simetria da matriz \mathcal{D} . No limite abeliano, $\mathbf{D} \rightarrow \nabla$, de forma que $K^{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rightarrow \langle \mathbf{x}, l | \nabla^{-2} | \mathbf{x}', m \rangle = -\delta^{lm} / 4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, e recuperamos o potencial Coulombiano da QED. Portanto, a eliminação dos graus de liberdade expúrios no gauge de Coulomb criou uma interação instantânea K^{lm} , análoga ao potencial Coulombiano na QED.

Com o hamiltoniano no gauge de Coulomb em mãos, temos uma teoria na qual todos os graus de liberdade são físicos, e podemos passar à construção do hamiltoniano efetivo. No próximo capítulo, desenvolveremos o modelo efetivo que utilizaremos para a descrição do espectro mesônico.

Capítulo 4

Modelo efetivo da QCD no gauge de Coulomb

Neste capítulo, iremos enfim construir o modelo efetivo da QCD no gauge de Coulomb, que será usado para obter espectros mesônicos. Partindo do hamiltoniano exato da QCD no gauge de Coulomb, como derivado na referência [10], construiremos um hamiltoniano efetivo na seção 4.1. Em seguida, empregaremos técnicas de muitos-corpos para tornar aproximadamente diagonal o hamiltoniano efetivo: em 4.2, utilizaremos o método BCS para o estado de vácuo, e em 4.3, o método TDA para os estados excitados. No caso dos mésons pseudoescalares leves, para os quais a simetria quirial torna-se relevante, empregaremos o método RPA, desenvolvido na seção 4.4. Estes três métodos são explicados com mais detalhes na referência [30].

4.1 Hamiltoniano efetivo

O hamiltoniano exato da QCD no gauge de Coulomb, definido na equação (3.101), pode ser escrito na forma

$$H_{\text{QCD}} = H_q + H_g + H_{qg} + H_C, \quad (4.1)$$

onde cada termo é definido como

$$H_q = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_q] \psi(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

$$H_g = \frac{1}{2} \int d^3x [g^{-1} \Pi^a(\mathbf{x}) \cdot g \Pi^a(\mathbf{x}) + \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^a(\mathbf{x})], \quad (4.3)$$

$$H_{qg} = -g \int d^3x \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}), \quad (4.4)$$

$$H_C = -\frac{g^2}{2} \int d^3x d^3y \rho^a(\mathbf{x}) g^{-1} K^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g \rho^b(\mathbf{y}), \quad (4.5)$$

com $a, b = 1, \dots, 8$ o índice do grupo de gauge (o índice de sabor A foi, novamente, omitido). Os graus de liberdade físicos da teoria são os campos de gauge transversos $\mathbf{A}^a(\mathbf{x})$, que satisfazem $\nabla \cdot \mathbf{A}^a = 0$, os seus momentos conjugados $\Pi^a(\mathbf{x})$ e os campos dos quarks $\psi(\mathbf{x})$. O primeiro termo, H_q , é o termo quarkiônico, com m_q a massa do quark corrente¹ (em inglês, *current quark mass*). O termo seguinte, o termo gluônico H_g , contém os campos magnéticos não-abelianos $\mathbf{B}^a(\mathbf{x})$, dados por

$$\mathbf{B}^a = \nabla \times \mathbf{A}^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c,$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do $SU_c(3)$. O determinante de Faddeev-Popov, $\mathcal{J} = \det(\mathcal{M})$, é o determinante da matriz $\mathcal{M} = \nabla \cdot \mathbf{D}$, definida em termos da derivada covariante $\mathbf{D} = \delta^{ab} \nabla - g f^{abc} \mathbf{A}^c$. O termo da interação quark-gluon, H_{qg} , é o termo de acoplamento entre os campos, onde g é a constante de acoplamento da QCD. As correntes de cor dos quarks J_i^a , definidas em (3.15), são

$$J_i^a = \psi^\dagger(\mathbf{x}) \alpha_i T^a \psi(\mathbf{x}),$$

onde $T^a = \lambda^a/2$ são as matrizes de cor do $SU_c(3)$, com λ^a as matrizes de Gell-Mann. O último termo, H_C , é a interação Coulombiana não-abeliana, com o kernell $K^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definido em (3.102), e a densidade de carga de cor total

$$\rho^a(\mathbf{x}) = \psi^\dagger(\mathbf{x}) T^a \psi(\mathbf{x}) + f^{abc} A_i^b(\mathbf{x}) \Pi_i^c(\mathbf{x}),$$

com $\rho_q^a(\mathbf{x}) = \psi^\dagger(\mathbf{x}) T^a \psi(\mathbf{x})$ a contribuição quarkiônica, e $\rho_g^a(\mathbf{x}) = f^{abc} A_i^b(\mathbf{x}) \Pi_i^c(\mathbf{x})$ a contribuição gluônica.

O foco deste trabalho será o setor quarkiônico, de forma que o termo H_g será omitido. O hamiltoniano efetivo com o qual trabalharemos, uma aproximação do hamiltoniano exato (4.1), é dado por [1]

$$H_{\text{eff}} = H_q + V_T + V_C, \quad (4.6)$$

com H_q definido em (4.2), e os demais termos dados por

$$V_T = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y J_i^a(\mathbf{x}) \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_j^a(\mathbf{y}), \quad (4.7)$$

$$V_C = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \rho_q^a(\mathbf{x}) \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rho_q^a(\mathbf{y}), \quad (4.8)$$

onde a densidade de carga no termo Coulombiano é dada apenas pela contribuição quarkiônica. Para construir este hamiltoniano, usamos a ordem mais baixa de expansão – o valor unitário – para o determinante de Faddeev-Popov \mathcal{J} . O kernel de Coulomb instantâneo, $K^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, foi substituído por um potencial de confinamento efetivo $\hat{V}(r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ entre

¹Massa dos quarks "nus". A massa do quark constituinte, por sua vez, é a massa da quasipartícula, que leva em conta a interação com o campo gluônico; é maior que a massa do quark corrente.

cargas de cor, enquanto que a interação quark-glúon H_{qg} foi substituída por um potencial hiperfino transverso efetivo, V_T .

O termo da interação Coulombiana instantânea, V_C , deve reproduzir o fenômeno do confinamento. Tomamos, para $\hat{V}(r)$, um potencial da forma $\hat{V}(r) = \hat{V}_L(r) + \hat{V}_C(r)$, onde $\hat{V}_L(r)$ é um potencial de confinamento linear, e $\hat{V}_C(r)$ é o potencial de interação Coulombiano, que representa o potencial atrativo entre cargas de cor a longas distâncias. O potencial $\hat{V}(r)$ é chamado de potencial de Cornell. Um modelo popular [3, 7] é dado por

$$\hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = -\frac{\alpha_s}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \sigma|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

ou, no espaço dos momentos,

$$V(|\mathbf{k}| = k) = -\frac{4\pi\alpha_s}{k^2} - \frac{8\pi\sigma}{k^4},$$

onde $\sigma = 0.135\text{GeV}^2$ é a tensão da corda, e $\alpha_s = g^2/4\pi = 0.4$ é o análogo, na QCD, à constante de estrutura fina. Denotaremos a transformada de Fourier de um potencial \hat{V} por V . Neste trabalho, utilizaremos o potencial de Cornell modificado [1]

$$V(k) = \begin{cases} C(k) \equiv -\frac{8.07}{k^2} \frac{\log^{-0.62}\left(\frac{k^2}{m_g^2} + 0.82\right)}{\log^{0.8}\left(\frac{k^2}{m_g^2} + 1.41\right)}, & \text{para } k > m_g, \\ L(k) \equiv -\frac{12.25 m_g^{1.93}}{k^{3.93}}, & \text{para } k < m_g, \end{cases} \quad (4.9)$$

no espaço dos momentos, com $L(k)$ próximo ao potencial de confinamento linear $V_L = -8\pi\sigma/k^4$, e com $C(k)$ substituindo o potencial Coulombiano. O parâmetro m_g é a massa efetiva do glúon, para o qual assumiremos o valor $m_g \approx 600 \text{ MeV}$.

No termo H_{qg} , a interação entre um par quark-antiquark mediada pela troca de um glúon foi aproximada por uma interação efetiva via um potencial transverso. A integração funcional dos graus de liberdade gluônicos gera uma interação hiperfina entre os quarks da forma $\mathbf{J}^a \cdot \mathbf{J}^a$, ou ainda, $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, na qual o kernel \hat{U}_{ij} tem a estrutura

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right)_{\mathbf{x}} \hat{U}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (4.10)$$

refletindo a condição de gauge transversa. Em razão das dificuldades de se calcular estas interações, diferentes modelos [1] foram testados para o potencial $\hat{U}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$. Neste trabalho, utilizaremos o potencial que gerou os melhores resultados, um potencial do tipo

Yukawa [1, 7]

$$U(k) = \begin{cases} C(k), & \text{para } k > m_g, \\ -\frac{C_h}{k^2 + m_g^2}, & \text{para } k < m_g, \end{cases} \quad (4.11)$$

também definido no espaço dos momentos. Este é um potencial de troca de glúons massivos, onde $C(k)$ é o mesmo potencial Coulombiano definido em (4.9), e C_h é uma constante determinada ao realizar a correspondência entre as regiões de baixos e altos momentos no ponto de transição m_g .

Os campos fermiônicos satisfazem as relações de anticomutação canônicas

$$\{\psi^\alpha(\mathbf{x}), \psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y})\} = \delta^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.12)$$

com os campos $\psi(\mathbf{x})$ independentes do tempo. As demais relações de anticomutação valem zero, $\{\psi^\alpha(\mathbf{x}), \psi^\beta(\mathbf{y})\} = \{\psi^{\dagger\alpha}(\mathbf{x}), \psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y})\} = 0$. A expansão em ondas planas do campo $\psi(\mathbf{x})$, em termos dos espinores $u_\lambda(\mathbf{k})$ e $v_\lambda(-\mathbf{k})$ de partículas e antipartículas, é dada por

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{c=1}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[u_\lambda(\mathbf{k}) b_{\lambda c}(\mathbf{k}) + v_\lambda(-\mathbf{k}) d_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}_c, \quad (4.13)$$

onde c é o índice de cor, $\lambda = \pm 1$ é a helicidade e $\hat{\mathbf{e}}_c$ são os vetores de cor unitários, na forma de matrizes coluna de três elementos. Os operadores $b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k})$ e $d_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k})$ são os operadores de criação de quarks e anti-quarks, respectivamente, enquanto que $b_{\lambda c}(\mathbf{k})$ e $d_{\lambda c}(\mathbf{k})$ são os operadores de aniquilação correspondentes. No espaço dos momentos, as relações de anticomutação se tornam

$$\{b_{\lambda c}(\mathbf{k}), b_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q})\} = \{d_{\lambda c}(\mathbf{k}), d_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{cc'}, \quad (4.14)$$

em termos dos operadores b, d . As demais relações de anticomutação são nulas. A partir destes operadores, vamos construir o espaço de Fock das partículas. Começemos definindo o estado de vácuo $|0\rangle$, que satisfaz

$$b_{\lambda c}(\mathbf{k}) |0\rangle = d_{\lambda c}(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad (4.15)$$

i.e. é aniquilado pelos operadores de destruição b, d . Os demais estados são facilmente obtidos por meio da atuação de operadores de criação b^\dagger, d^\dagger no vácuo $|0\rangle$: o estado de um quark de momento \mathbf{k} , cor c e helicidade λ , por exemplo, é representado por $b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$.

Com o modelo em mãos, vamos resolver o problema de autovetores e autovalores $H\psi = E\psi$. Na próxima sessão, determinaremos o estado fundamental de H_{eff} utilizando o método BCS.

4.2 Técnicas de Muitos Corpos

Nesta seção, utilizaremos o método Bogoliubov-Valatin, ou BCS (*Bardeen-Cooper-Schriffer*), para diagonalizar aproximadamente o hamiltoniano efetivo, a fim de determinar seu estado fundamental. Este se resume a aplicar uma rotação de um ângulo $\theta(k)$, o ângulo BCS, aos operadores e espinores do espaço de Fock dos quarks correntes, levando-os a uma nova base de quasipartículas na qual H_{eff} é diagonal.

O espaço de Fock das quasipartículas é construído a partir do vácuo BCS, $|\Omega\rangle$, que satisfaz

$$B_{\lambda c}|\Omega\rangle = D_{\lambda c}|\Omega\rangle = 0, \quad (4.16)$$

por meio da aplicação dos operadores de criação de quarks B^\dagger e antiquarks D^\dagger constituintes. O vácuo BCS, por sua vez, é construído a partir do vácuo das partículas "nuas", $|0\rangle$, como

$$|\Omega\rangle = \exp \left\{ - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \lambda \tan \left(\frac{\theta_k}{2} \right) b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) d_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} |0\rangle. \quad (4.17)$$

Podemos expandir o campo de quarks ψ em termos destes novos operadores,

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{c=1}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}_c, \quad (4.18)$$

onde \mathcal{U} e \mathcal{V} são os espinores "vestidos", que formam uma base completa e satisfazem as condições de normalização não-relativísticas

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (4.19)$$

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = 0, \quad (4.20)$$

que, por sua vez, garantem que os operadores de Fock $B_{\lambda c}$ e $D_{\lambda c}$ obedecem as mesmas relações de anticomutação (4.14),

$$\left\{ B_{\lambda c}(\mathbf{k}), B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ D_{\lambda c}(\mathbf{k}), D_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{q}) \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{cc'}. \quad (4.21)$$

A relação entre os operadores "vestidos" $B_{\lambda c}, D_{\lambda c}$ da nova base e os operadores "nus" $b_{\lambda c}, d_{\lambda c}$ é dada pela rotação

$$B_{\lambda c}(\mathbf{k}) = \cos \left(\frac{\theta_k}{2} \right) b_{\lambda c}(\mathbf{k}) - \lambda \sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) d_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}), \quad (4.22)$$

$$D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) = \cos \left(\frac{\theta_k}{2} \right) d_{\lambda c}(-\mathbf{k}) + \lambda \sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) b_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}), \quad (4.23)$$

e uma rotação similar é aplicada aos espinores u e v . Os espinores rotacionados são dados por

$$\mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \sin\phi(k)} \chi_\lambda \\ \sqrt{1 - \sin\phi(k)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\lambda \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \sin\phi(k)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\lambda \\ \sqrt{1 + \sin\phi(k)} \chi_\lambda \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

onde χ_λ são os espinores de Pauli de duas componentes, e $\phi_k = \phi(k)$ é o ângulo de *gap*, relacionado ao ângulo BCS por $\tan(\phi_k - \theta_k) = M_q(k)/k$. Aqui, $M_q(k)$ é uma massa dinâmica (em inglês, *running quark mass*) dependente da escala de energia: para grandes valores de k , quando a interação se torna fraca, $M_q(k) \rightarrow m_q$, que é a massa do quark corrente, ou "nu"; para pequenos valores de k , $M_q(0) = \mathcal{M}_q$, a massa da quasipartícula – também chamada massa do quark constituinte. Podemos escrever o seno e cosseno do ângulo de *gap* ϕ_k em termos da massa $M_q(k)$ como

$$\sin\phi(k) = \frac{M_q(k)}{E(k)} \equiv s_k, \quad \cos\phi(k) = \frac{|\mathbf{k}|}{E(k)} \equiv c_k, \quad (4.26)$$

onde $E(k) = \sqrt{M_q^2(k) + \mathbf{k}^2}$. Vamos, portanto, resolver a equação de *gap*, a fim de determinar o ângulo ϕ_k e, a partir deste, obter a massa constituinte dos quarks.

Existem diversas formas de obtenção da equação de *gap*, das quais a mais tradicional consiste em minimizar o valor esperado do hamiltoniano efetivo no vácuo BCS em relação ao ângulo de *gap*,

$$\frac{\delta \langle \Omega | H_{\text{eff}} | \Omega \rangle}{\delta \phi_k} = 0, \quad (4.27)$$

o que irá gerar a equação de *gap* em termos do parâmetro variacional ϕ_k . Neste trabalho, obtivemos inicialmente a equação de *gap* via este princípio variacional: escrevemos o hamiltoniano efetivo em termos dos operadores de criação e aniquilação de quasipartículas, substituindo a expansão (4.18) em (4.6); tomamos o seu valor esperado no vácuo BCS, e eliminamos os operadores de Fock da expressão utilizando as relações (4.21) e (4.16). A expressão resultante, em termos dos espinores \mathcal{U} e \mathcal{V} , pode ser reescrita em termos do ângulo de *gap* ϕ_k , substituindo os espinores por suas definições (4.24) e (4.25). Por fim, tomando a derivada funcional desta expressão em relação a ϕ_k e igualando-a a zero, encontramos enfim a equação de *gap*.

Alternativamente, seguiremos a forma desenvolvida na referência [2], através da qual a equação de *gap* surge de forma mais natural e com menos esforços. Novamente, vamos escrever o hamiltoniano em termos dos operadores da nova base, mas desta vez, ordenados normalmente. Aplicando o teorema de Wick, obtemos $H_{\text{eff}} = H_0 + : H_2 : + : H_4 :$, onde H_2 contém todos os termos com dois operadores de Fock, H_4 os termos com quatro

operadores, e H_0 contém os termos sem operadores. Encontramos, então,

$$H_0 = \int \frac{d^3x d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 3 \operatorname{Tr} [\Lambda_k^- (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m_q \boldsymbol{\beta})] - 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\operatorname{Tr} (\Lambda_k^- \Lambda_q^+) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \operatorname{Tr} (\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j)] \right\}, \quad (4.28)$$

$$: H_2 : = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k \left(B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right), \quad (4.29)$$

$$: H_4 : = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3p d^3q d^3k}{(2\pi)^9} \left\{ -V(|\mathbf{q}|) \sum_{i,j=1}^4 : \Theta_{c_1 c_2}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Theta_{c_3 c_4}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : + U(|\mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{q}) \sum_{l,m=1}^4 : \Xi_{c_1 c_2 i}^l(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^m(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \right\} \hat{\varepsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\varepsilon}_{c_2} \hat{\varepsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\varepsilon}_{c_4}, \quad (4.30)$$

onde $D_{ij}(\mathbf{p})$ é a soma de polarizações

$$D_{ij}(\mathbf{p}) = \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right), \quad (4.31)$$

e Λ_k^+ e Λ_k^- são os projetores de energia positiva e negativa, respectivamente, definidos como

$$\Lambda_k^+ \equiv \sum_{\lambda} \mathcal{U}_{\lambda}(\mathbf{k}) \mathcal{U}_{\lambda}^\dagger(\mathbf{k}), \quad \Lambda_k^- \equiv \sum_{\lambda} \mathcal{V}_{\lambda}(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_{\lambda}^\dagger(-\mathbf{k}). \quad (4.32)$$

O termo H_0 é constante, e representa a energia do vácuo; este contém uma integral no volume, d^3x , que o torna infinito. No termo quadrilinear H_4 , a fim de simplificar a notação, definimos os vértices

$$\Theta_{c'c}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_{\lambda}(\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (4.33)$$

$$\Theta_{c'c}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \mathcal{V}_{\lambda}(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}'), \quad (4.34)$$

$$\Theta_{c'c}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{V}_{\lambda}(-\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad (4.35)$$

$$\Theta_{c'c}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_{\lambda}(\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (4.36)$$

$$\Xi_{c'ci}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda}(\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (4.37)$$

$$\Xi_{c'ci}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda}(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}'), \quad (4.38)$$

$$\Xi_{c'ci}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda}(-\mathbf{p}) B_{\lambda'c'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad (4.39)$$

$$\Xi_{c'ci}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda}(\mathbf{p}) D_{\lambda'c'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}). \quad (4.40)$$

No termo H_2 , definimos a auto-energia da quasipartícula ϵ_k , que vale

$$\epsilon_k = m_q s_k + k c_k - \int \frac{d^3 q}{12\pi^3} [s_q s_k V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2s_q s_k U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + c_q c_k x V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2c_q c_k W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)], \quad (4.41)$$

onde $x = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$, e o potencial $W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)$ é definido como

$$W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) = \frac{(k^2 + q^2)x - kq(x^2 + 1)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|). \quad (4.42)$$

Introduzindo a notação

$$V_n(k, q) \equiv \int_{-1}^{+1} dx V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) x^n \quad (4.43)$$

para as integrais angulares (também válida para os potenciais U e W), esta lei de dispersão pode ser reescrita como

$$\epsilon_k = m_q s_k + k c_k - \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{6\pi^2} [s_q s_k (V_0 + 2U_0) + c_q c_k (V_1 + 2W_0)]. \quad (4.44)$$

Ao aplicar o ordenamento normal a H_{eff} , nos deparamos, na parte bilinear, com um termo que desestabiliza o vácuo, chamado termo de Bogoliubov anômalo. Requerendo que este termo seja nulo, chegamos, em fim, à equação de gap

$$\begin{aligned} k s_k - m_q c_k &= \int \frac{d^3 q}{12\pi^3} [(c_q s_k x - s_q c_k) V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) - 2s_q c_k U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2c_q s_k W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)] \\ &= \int_0^\infty \frac{q d^2 q}{6\pi^2} [c_q s_k (V_1 + 2W_0) - s_q c_k (V_0 + 2U_0)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Impor esta condição equivale a minimizar a energia do vácuo H_0 . As expressões obtidas para a energia ϵ_k e para a equação de gap estão em concordância com a referência [1]. Resolvendo a equação de gap, obtemos o ângulo de gap ϕ_k , o qual podemos substituir em (4.44) a fim de obter a auto-energia.

Passaremos agora à análise dos estados excitados. Na próxima sessão, desenvolveremos o método TDA, e na seguinte, discutiremos brevemente o RPA para os mésons pseudoescalares.

4.3 Método TDA

Começemos por definir o operador de criação de mésons,

$$Q_{nJP}^\dagger(\text{TDA}) \equiv \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Psi_{\gamma\delta}^{nJP}(\mathbf{k}) \zeta_{\gamma\delta}^\dagger, \quad (4.46)$$

onde $\zeta_{\gamma\delta}^\dagger = B_\gamma^\dagger(\mathbf{k}) D_\delta^\dagger(-\mathbf{k})$ é um operador de criação de um par quasipartícula-quasiantipartícula. Desta forma, um estado de um méson com momento angular total J , paridade P e número quântico radial n é representado por

$$|\Psi_{\text{TDA}}^{nJP}\rangle = Q_{nJP}^\dagger(\text{TDA})|\Omega\rangle, \quad (4.47)$$

contendo uma quasipartícula e uma quasiantipartícula excitados do vácuo BCS. Consideremos o elemento matricial

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{\text{eff}}, \zeta_{\alpha\beta}^\dagger] | \Omega \rangle = (E_{nJP} - E_0) \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | \zeta_{\alpha\beta}^\dagger | \Omega \rangle, \quad (4.48)$$

com o hamiltoniano efetivo dado por $H_{\text{eff}} = H_0 + : H_2 : + : H_4 :$, após ordenamento normal, e E_{nJP} e E_0 as energias associadas aos estados $|\Psi_{\text{TDA}}^{nJP}\rangle$ e $|\Omega\rangle$, respectivamente. O comutador de H_0 com $B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger$ vale zero, uma vez que H_0 é constante. Para os demais termos, temos

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = 2\varepsilon_k \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}(\mathbf{k}), \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle &= \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{q}) \left[h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + \right. \\ &\quad \left. - t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

a menos de uma constante de normalização multiplicativa. Os coeficientes $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$ e $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$, resultados de contrações dos espinores \mathcal{U} e \mathcal{V} , são dados por

$$\begin{aligned} h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) &= \frac{1}{4} \{ c_k c_q [\delta_{\delta\alpha} g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) + \delta_{\beta\gamma} g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}})] + (1 + s_k)(1 + s_q) \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\alpha} + \\ &\quad (1 - s_k)(1 - s_q) g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) \}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) &= -\frac{1}{4} \left[(1 + s_q)(1 - s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma + c_k c_q \times \right. \\ &\quad \left(\chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma + \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma \right) + \\ &\quad \left. (1 - s_q)(1 + s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma \right] + \frac{1}{4(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \times \\ &\quad \{ (1 + s_q)(1 - s_k) (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + c_k c_q [(g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) \times \\
& (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k + -g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) \times \\
& (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q)] + (1 - s_q)(1 + s_k) (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k + \\
& -g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) \}, \tag{4.52}
\end{aligned}$$

onde definimos $g_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) \equiv \chi_\alpha^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\beta$. Combinando as expressões (4.49) e (4.50), temos o lado esquerdo de (4.48). Da definição (B.1), o elemento de matriz no lado direito pode ser escrito como

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | \zeta_{\alpha\beta}^\dagger | \Omega \rangle = \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}, \tag{4.53}$$

e combinando estes resultados, obtemos o conjunto de equações de movimento

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{q}) \left[V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) - t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \right] = \\
= (E_{nJP} - E_0 - 2\varepsilon_k) \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Expandindo o vetor de estado $\Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{k})$ em ondas parciais, temos

$$\begin{aligned}
\Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{k}) = \sum_{LSm_L m_S} \langle L, m_L, S, m_S | J, m_J \rangle (-1)^{\frac{1}{2} + \gamma} \left\langle \frac{1}{2}, \delta, \frac{1}{2}, -\gamma \left| S, m_S \right. \right\rangle \times \\
Y_L^{m_L}(\hat{\mathbf{k}}) \Psi_{LS}^{nJP}(k), \tag{4.55}
\end{aligned}$$

onde $Y_L^{m_L}(\hat{\mathbf{k}})$ são os harmônicos esféricos, $\Psi_{LS}^{nJP}(w)$ é a função de onda radial, L é o momento angular orbital e S o spin, relacionados ao momento angular total por $J = L + S$. Substituindo esta expansão na equação TDA (4.54), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\Lambda\Sigma m_\Lambda m_\Sigma \\ m_J m_L m_S}} \langle J, m_J | L, m_L, S, m_S \rangle \langle \Lambda, m_\Lambda, \Sigma, m_\Sigma | J, m_J \rangle \int d\Omega_k d\Omega_q Y_L^{*m_L}(\hat{\mathbf{k}}) Y_\Lambda^{m_\Lambda}(\hat{\mathbf{q}}) \times \\
\frac{4}{3} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \Psi_{\Lambda\Sigma}^{nJP}(q) \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (-1)^{1+\gamma+\beta} \left[V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) - U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) \right] \times \\
\left\langle S, m_S \left| \frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2}, -\beta \right. \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, \delta, \frac{1}{2}, -\gamma \left| \Sigma, m_\Sigma \right. \right\rangle = (E_{nJP} - E_0 - 2\varepsilon_k) (2J + 1) \Psi_{LS}^{nJP}(k), \tag{4.56}
\end{aligned}$$

onde usamos relações de completeza, bem como a ortonormalidade dos harmônicos esféricos,

$$\int d\Omega_k Y_L^m(\hat{\mathbf{k}}) Y_L^{*m'}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{LL'} \delta_{mm'}. \tag{4.57}$$

Definindo o kernel

$$\begin{aligned}
K_{L\Lambda\Sigma}^{JP}(q, k) \equiv & \frac{2}{\pi(2J+1)} \sum_{\substack{m_\Lambda m_\Sigma m_J \\ m_L m_S}} \langle J, m_J | L, m_L, S, m_S \rangle \langle \Lambda, m_\Lambda, \Sigma, m_\Sigma | J, m_J \rangle \times \\
& \int d\Omega_k d\Omega_q Y_L^{*m_L}(\hat{\mathbf{k}}) Y_\Lambda^{m_\Lambda}(\hat{\mathbf{q}}) \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (-1)^{1+\gamma+\beta} \left[V(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) + \right. \\
& \left. -U(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) \right] \left\langle S, m_S \left| \frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2}, -\beta \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, \delta, \frac{1}{2}, -\gamma \left| \Sigma, m_\Sigma \right\rangle \right. \\
& \left. \right. \quad \quad \quad (4.58)
\end{aligned}$$

a equação de movimento (4.56) se torna

$$(M_{nJP} - 2\varepsilon_k) \Psi_{LS}^{nJP}(k) = \sum_{\Lambda\Sigma} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} K_{L\Lambda\Sigma}^{JP}(k, q) \Psi_{\Lambda\Sigma}^{nJP}(q), \quad (4.59)$$

com $M_{nJP} = E_{nJP} - E_0$ a massa de um méson no estado nJP . Vamos, então, obter o kernel (4.58) para diferentes estados mesônicos, caracterizados por seus números quânticos J , S e L .

Tabela 4.1: Tipos de Mésons.

Tipo	J	S	L	P	J^P
Pseudoescalar	0	0	0	-	0^-
Escalar	0	1	1	+	0^+
Vetorial	1	1	0, 2	-	1^-
Pseudovetorial	1	0, 1	1	+	1^+
Tensorial	2	1	1, 3	+	2^+

Os estados são rotulados por $I^G(J^{PC})$, onde o índice P indica a paridade do méson, definida como $P = (-1)^{L+1}$, e o índice C indica a conjugação de carga, também chamado de C-paridade, e é dado por $C = (-1)^{L+S}$. A G-paridade G é definida a partir do isospin I como $G = (-1)^{L+S+I}$. Os diferentes estados mesônicos são resumidos na tabela 4.1. Dentre os casos listados nesta tabela, obtivemos os kernéis para os mésons pseudo-escalares, vetoriais e pseudovetoriais (ou axiais). No caso dos mésons vetoriais, as ondas $L=0, S=1$ e $L=2, S=1$ são permitidas, e ambas levam ao mesmo estado 1^{--} ; neste trabalho iremos negligenciar o acoplamento $L=2, S=1$. Para os mésons pseudovetoriais, temos dois estados distintos: 1^{+-} , com $S=0, L=1$; e 1^{++} , com $S=L=1$. Os kernéis obtidos foram os seguintes:

- Mésons pseudoescalares (0^{-+}):

$$K_{PE}(q, k) = \delta_{\Lambda 0} \delta_{\Sigma 0} \left[2(1 + s_k s_q) V_0 + 4(1 - s_k s_q) U_0 + 2c_k c_q (V_1 - 2W_0) \right], \quad (4.60)$$

- Mésons vetoriais (1^{--}):

$$K_V(q, k) = \delta_{\Lambda 0} \delta_{\Sigma J} \left[(1 + s_k) (1 + s_q) V_0 + 2c_k c_q V_1 + (1 - s_k) (1 - s_q) \times \left(\frac{4V_2 - V_0}{3} \right) + \frac{4}{3} Z_0 [q^2 (1 + s_q) (1 - s_k) + k^2 (1 - s_q) (1 + s_k)] + \frac{4}{3} Z_0 c_k c_q k q + \frac{4}{3} c_k c_q U_1 - \frac{4}{3} (1 - s_q s_k) U_0 \right], \quad (4.61)$$

- Mésons pseudovetoriais (1^{+-}):

$$K_{pV}^{+-}(q, k) = \delta_{\Lambda 1} \delta_{\Sigma 0} 2 \left[(1 + s_k s_q) V_1 + 2 (1 - s_q s_k) U_1 + c_q c_k (V_2 - 2W_1) \right], \quad (4.62)$$

- Mésons pseudovetoriais (1^{++}):

$$K_{pV}^{++}(q, k) = \delta_{\Lambda 1} \delta_{\Sigma 1} \left\{ c_k c_q (V_0 + V_2 + U_0 + U_2 - 2W_1) + 2V_1 (1 + s_q s_k) + Z_1 [k^2 (1 + s_k) (1 - s_q) + q^2 (1 - s_k) (1 + s_q)] \right\}, \quad (4.63)$$

onde definimos o potencial

$$Z(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \equiv U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \frac{1 - x^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}. \quad (4.64)$$

Os kernéis listados acima foram obtidos para mésons compostos por quarks de massas iguais, e estão em concordância com as referências [1, 3] (neste último, apenas a contribuição Coulombiana). Vamos generalizar estes resultados para o caso em que os quarks possuem massas diferentes.

Os quarks agora têm sabores diferentes, e $B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k})$ e $D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k})$ passam a ser os operadores de criação de um quark do tipo 1 e de um anti-quark do tipo 2, respectivamente. Observando a expansão de Fourier do campo ψ em (4.18), vemos que os espinores $\mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k})$ e $\mathcal{V}'_\lambda(-\mathbf{k})$ estão associados aos operadores $B_{\lambda c}(\mathbf{k})$ e $D_{\lambda c}(-\mathbf{k})$, respectivamente – e portanto, às partículas do tipo 1 e 2. A dependência dos espinores na massa dos quarks está contida no seno e no cosseno do ângulo de gap, $s_k = M_q(k)/E(k)$ e $c_k = |\mathbf{k}|/E(k)$. Com sabores diferentes, passamos a ter um seno e um cosseno associados à partícula 1, s_{k_1} e c_{k_1} , e o mesmo para a partícula 2.

A redefinição dos espinores modifica o hamiltoniano efetivo, que é necessário na construção do comutador $[H_{\text{eff}}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger]$ para a equação TDA. Como o comutador com o termo constante H_0 vale zero, não precisamos recalculá-lo; já o termo bilinear do hamiltoniano passa a ser

$$H_2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \left(\varepsilon_{k_1} B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + \varepsilon_{k_2} D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right), \quad (4.65)$$

visto que as autoenergias das partículas 1 e 2 são agora diferentes, e conseqüentemente,

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = (\epsilon_{k_1} + \epsilon_{k_2}) \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}(\mathbf{k}). \quad (4.66)$$

Passemos ao comutador de H_4 . Os coeficientes $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$ e $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$, definidos em termos dos espinores \mathcal{U} e \mathcal{V} , ganham os índices 1 e 2, e passam a

$$h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) = \frac{1}{4} [a_5 g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) \delta_{\delta\alpha} + a_8 g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) + a_7 \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\alpha} + a_6 \delta_{\beta\gamma} g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}})], \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) = & -\frac{1}{4} \left[a_1 \left(\chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \right) \left(\chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma \right) + a_3 \left(\chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \right) \left(\chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma \right) + \right. \\ & + a_4 \left(\chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \right) \left(\chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma \right) + a_2 \left(\chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \right) \left(\chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma \right) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{4(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \left[a_1 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + \right. \\ & + a_3 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + \\ & + a_4 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + \\ & \left. + a_2 (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) \right], \quad (4.68) \end{aligned}$$

onde, a fim de simplificar as expressões, definimos os coeficientes

$$a_1 = \sqrt{1 + s_{k_1}} \sqrt{1 + s_{k_2}} \sqrt{1 - s_{q_1}} \sqrt{1 - s_{q_2}}, \quad (4.69)$$

$$a_2 = \sqrt{1 - s_{k_1}} \sqrt{1 - s_{k_2}} \sqrt{1 + s_{q_1}} \sqrt{1 + s_{q_2}}, \quad (4.70)$$

$$a_3 = \sqrt{1 + s_{k_1}} \sqrt{1 - s_{k_2}} \sqrt{1 - s_{q_1}} \sqrt{1 + s_{q_2}}, \quad (4.71)$$

$$a_4 = \sqrt{1 - s_{k_1}} \sqrt{1 + s_{k_2}} \sqrt{1 + s_{q_1}} \sqrt{1 - s_{q_2}}, \quad (4.72)$$

$$a_5 = \sqrt{1 + s_{k_1}} \sqrt{1 - s_{k_2}} \sqrt{1 + s_{q_1}} \sqrt{1 - s_{q_2}}, \quad (4.73)$$

$$a_6 = \sqrt{1 - s_{k_1}} \sqrt{1 + s_{k_2}} \sqrt{1 - s_{q_1}} \sqrt{1 + s_{q_2}}, \quad (4.74)$$

$$a_7 = \sqrt{1 + s_{k_1}} \sqrt{1 + s_{k_2}} \sqrt{1 + s_{q_1}} \sqrt{1 + s_{q_2}}, \quad (4.75)$$

$$a_8 = \sqrt{1 - s_{k_1}} \sqrt{1 - s_{k_2}} \sqrt{1 - s_{q_1}} \sqrt{1 - s_{q_2}}. \quad (4.76)$$

Toda a dependência na massa em $\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle$ está contida nos coeficientes $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$ e $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$, de forma que ao redefini-los, a equação (4.50) mantém sua forma. Reunindo estes resultados, a equação TDA generalizada passa a ser

$$(M_{nJP} - \epsilon_{k_1} - \epsilon_{k_2}) \Psi_{LS}^{nJP}(k) = \sum_{\Lambda\Sigma} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} K_{L\Lambda\Sigma}^{JP}(k, q) \Psi_{\Lambda\Sigma}^{nJP}(q), \quad (4.77)$$

agora com duas energias diferentes ϵ_{k_1} e ϵ_{k_2} , e com o kernel definido em termos dos novos $h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$ e $t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k)$. Vamos escrever o novo kernel para cada diferente estado mesônico.

- Mésons pseudoescalares (0^{-+}):

$$K_{PE}(q, k) = \delta_{\Lambda 0} \delta_{\Sigma 0} [V_1 (a_5 + a_6) + V_0 (a_7 + a_8) + 2U_0 (a_1 + a_2) - 2W_0 (a_3 + a_4)]. \quad (4.78)$$

- Mésons vetoriais (1^{--}):

$$K_V(q, k) = \delta_{\Lambda 0} \delta_{\Sigma J} \frac{1}{3} [3V_1 (a_5 + a_6) + a_8 (4V_2 - V_0) + 3a_7 V_0 - 2(a_1 + a_2) U_0 + 2(a_3 + a_4) U_1 + 2qk (a_3 + a_4) Z_0 + 4(a_1 k^2 + a_2 q^2) Z_0]. \quad (4.79)$$

- Mésons pseudovetoriais (1^{+-}):

$$K_{PV}^{+-}(q, k) = \delta_{\Lambda 1} \delta_{\Sigma 0} [(a_5 + a_6) V_2 + (a_7 + a_8) V_1 + 2(a_1 + a_2) U_1 - 2(a_3 + a_4) W_1]. \quad (4.80)$$

- Mésons pseudovetoriais (1^{++}):

$$K_{PV}^{++}(q, k) = \delta_{\Lambda 1} \delta_{\Sigma 1} \left[\frac{1}{2} (V_0 + V_2) (a_5 + a_6) + \frac{1}{2} (U_0 + U_2 - 2W_1) (a_3 + a_4) + V_1 (a_7 + a_8) + Z_1 (a_1 k^2 + a_2 q^2) + Z_0 \frac{1}{2} (k^2 - q^2) (a_4 - a_3) \right]. \quad (4.81)$$

No limite de massas iguais, os kernéis originais (4.60) a (4.63) são recuperados.

4.4 Método RPA

Introduzindo o operador $\zeta_{\gamma\delta} = B_\gamma(\mathbf{k}) D_\delta(-\mathbf{k})$ de aniquilação de um par $q\bar{q}$, podemos melhorar o método TDA considerando estados nJP formados pela criação e aniquilação de pares quasipartícula-quasiantipartícula, criados pelo operador

$$Q_{nJP}^\dagger(\text{RPA}) \equiv \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(X_{\gamma\delta}^{nJP} \zeta_{\gamma\delta}^\dagger - Y_{\gamma\delta}^{nJP} \zeta_{\gamma\delta} \right), \quad (4.82)$$

generalização do operador de criação de mésons Q_{nJP} (TDA). Nesta aproximação, definimos um novo vácuo $|\Omega_{\text{RPA}}\rangle$, uma vez que Q_{nJP} (RPA) não mais aniquila o vácuo BCS, i.e.

$$Q_{nJP}(\text{RPA}) |\Omega\rangle = - \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Y_{\gamma\delta}^{*nJP} \zeta_{\gamma\delta}^\dagger |\Omega\rangle \neq 0. \quad (4.83)$$

O vácuo RPA $|\Omega_{\text{RPA}}\rangle$ satisfaz $Q_{nJP}(\text{RPA})|\Omega_{\text{RPA}}\rangle = 0$, e a partir deste, definimos o estado mesônico

$$|\Psi_{\text{RPA}}^{nJP}\rangle = Q_{nJP}^\dagger(\text{RPA})|\Omega_{\text{RPA}}\rangle, \quad (4.84)$$

análogo a (4.47). Para obter as equações de movimento na aproximação RPA, consideramos os elementos matriciais

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{\text{eff}}, \zeta_{\gamma\delta}^\dagger] | \Omega_{\text{RPA}} \rangle = (E_{nJP} - E_0) X_{\gamma\delta}^{nJP}, \quad (4.85)$$

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{\text{eff}}, \zeta_{\gamma\delta}] | \Omega_{\text{RPA}} \rangle = (E_{nJP} - E_0) Y_{\gamma\delta}^{nJP}, \quad (4.86)$$

e no cálculo dos comutadores, adotamos a aproximação "quasi-bóson", que consiste em tratar o par de operadores fermiônicos $\zeta_{\gamma\delta}$ como um operador bosônico. Obtemos, para os mésons pseudoescalares 0^{-+} , o par de equações acopladas

$$(M_n - 2\varepsilon_k) X^n(k) = \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} [X^n(q) K(k, q) + Y^n(q) K'(k, q)], \quad (4.87)$$

$$(M_n + 2\varepsilon_k) Y^n(k) = - \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} [Y^n(q) K(k, q) + X^n(q) K'(k, q)], \quad (4.88)$$

com os kernéis

$$K(k, q) = 2 [(1 + s_q s_k) V_0 + 2(1 - s_k s_q) U_0 + c_q c_k (V_1 - 2W_0)], \quad (4.89)$$

$$K'(k, q) = 2 [(1 - s_q s_k) V_0 + 2(1 + s_k s_q) U_0 - c_q c_k (V_1 - 2W_0)], \quad (4.90)$$

onde $K(k, q)$ coincide com o kernel TDA (4.60).

Como na seção anterior, iremos agora generalizar as equações acima para mésons pseudoescalares compostos por quarks de diferentes sabores. Obtemos, para as equações de movimento,

$$(M_n - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_2}) X^n(k) = \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} [X^n(q) K(k, q) + Y^n(q) K'(k, q)], \quad (4.91)$$

$$(M_n + \varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}) Y^n(k) = - \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{12\pi^2} [Y^n(q) K(k, q) + X^n(q) K'(k, q)], \quad (4.92)$$

com ε_{k_1} e ε_{k_2} a energia das quasipartículas 1 e 2, respectivamente, e os kernéis

$$K(k, q) = V_1 (a_5 + a_6) + V_0 (a_7 + a_8) + 2U_0 (a_1 + a_2) - 2W_0 (a_3 + a_4), \quad (4.93)$$

$$K'(k, q) = -V_1 (a_3 + a_4) + V_0 (a_1 + a_2) + 2U_0 (a_7 + a_8) + 2W_0 (a_5 + a_6), \quad (4.94)$$

em termos dos coeficientes (4.69) a (4.76).

Por fim, a corrente quiral pode ser facilmente obtida por meio da aplicação do teorema de Noether, e é dada por $I_\mu^l(\mathbf{x}) = i\psi^\dagger(\mathbf{x})\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5T^l\psi(\mathbf{x})$. A partir desta, podemos obter a carga conservada correspondente,

$$Q_5^l = -i \int d^3x I_4^l(\mathbf{x}) = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x})\gamma_5T^l\psi(\mathbf{x}), \quad (4.95)$$

chamada carga quiral, onde $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Como esta carga Q_5^l comuta com o operador de criação de mésons Q_{nJP} (RPA), dizemos que a simetria quiral é preservada nos estados RPA. O mesmo não ocorre nos estados TDA, uma vez que Q_5^l e Q_{nJP} (TDA) não comutam.

Na próxima sessão, passaremos enfim à análise dos resultados numéricos.

4.5 Resultados numéricos e discussão

4.5.1 Equação de gap

Resolvendo numericamente a equação de gap (4.45), obtemos o ângulo de gap ϕ_k , e a partir das relações (4.26), a massa dinâmica dos quarks e suas energias. Os únicos parâmetros livres de entrada são a massa efetiva do glúon $m_g = 600$ MeV, as massas dos quarks correntes e o parâmetro C_h relacionado à intensidade do potencial transversal $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. No gráfico 4.1 podemos observar o comportamento da massa dinâmica dos quarks, $M(p)$, em termos do momento p , ambos em GeV – cada linha representando um diferente sabor de quark. Para $p = 0$, podemos extrair do gráfico as massas constituintes para cada sabor quarkônico, \mathcal{M} , enquanto que no limite $p \rightarrow \infty$, recuperamos a massa corrente m . Quando passamos a sabores mais pesados, a diferença entre as massas corrente e constituinte diminui, e a massa dinâmica pouco varia. Ambas as massas estão listadas na tabela 4.2, para $C_h = 700$ MeV, em conjunto com os valores estimados por outras teorias. Os valores obtidos são superiores aos obtidos na referência [1], mas ainda são menores que os valores previstos (com exceção dos quarks leves).

Na figura 4.2, temos as massas dinâmicas em função do momento para as massas correntes tomadas dentro dos intervalos estimados na tabela 4.2. Tomamos, para as massas correntes, o valor médio dentro de cada intervalo; as massas constituintes obtidas, para os sabores mais leves, continuaram abaixo dos valores estimados, enquanto que, para o quark c , obtivemos $\mathcal{M}_c = 1627$ MeV, e para o quark b , obtivemos um valor dentro do intervalo.

Na figura 4.3, podemos observar a relação entre a massa dinâmica e o parâmetro C_h , para os quarks up e $down$ ($m = 1$ MeV). A massa dinâmica cresce junto com a intensidade do potencial transversal, e por consequência, também a massa constituinte. Da figura, podemos extrair os valores das massas constituintes para os diferentes parâmetros,

Figura 4.1: Massa dinâmica dos quarks.

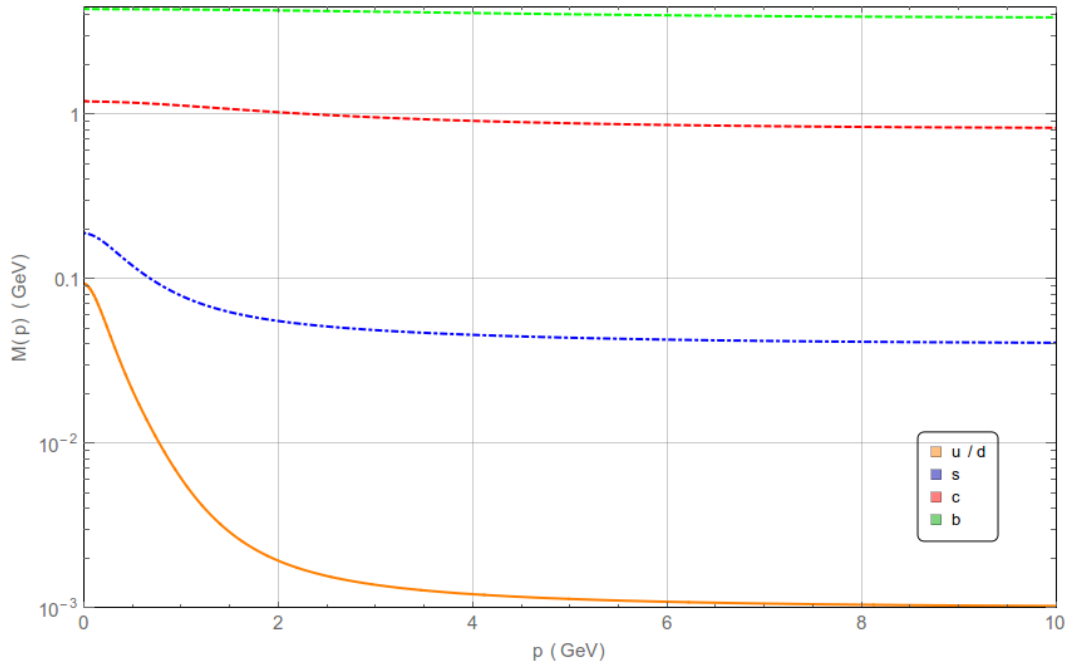
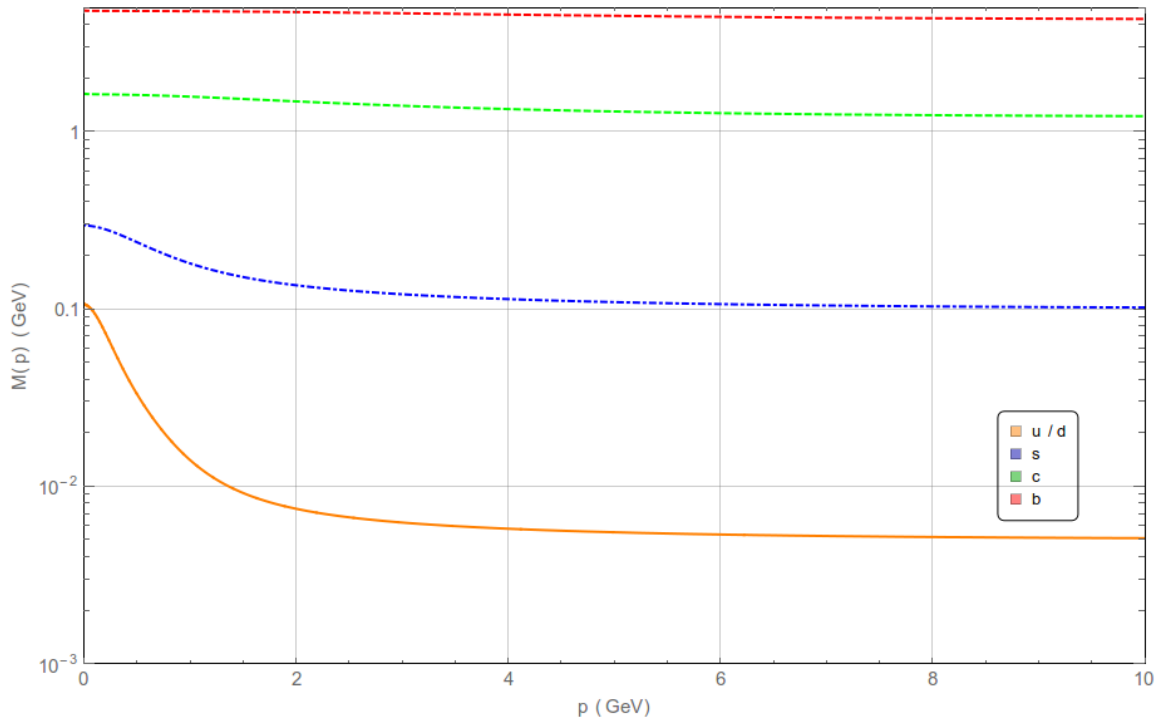
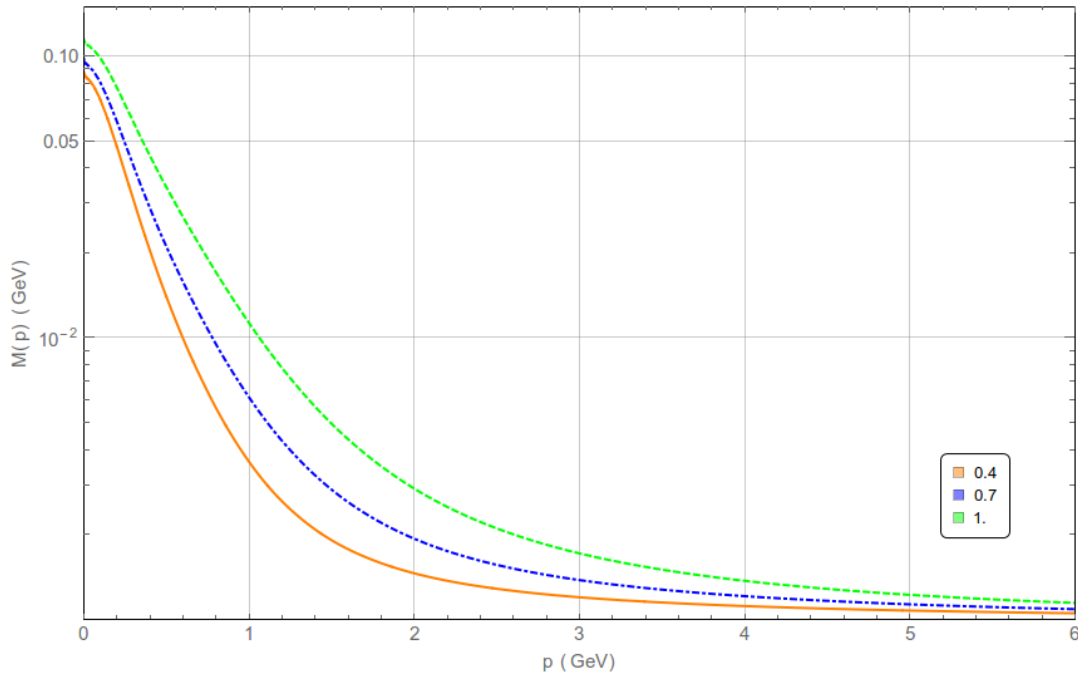


Figura 4.2: Massa dinâmica dos quarks para valores de massa corrente estimados.



$\mathcal{M}_{0.4} = 87$ MeV, $\mathcal{M}_{0.7} = 97$ MeV, e $\mathcal{M}_{1.0} = 114$ MeV. Extraindo os valores das massas constituintes dos quarks $up/down$ para o parâmetro C_h variando de 0.4 a 1.0 GeV, em

Figura 4.3: Massa dinâmica dos quarks $up/down$, para diferentes valores de C_h .

passos de 0.1 GeV, construímos o gráfico 4.4. Podemos perceber que a massa constituinte cresce quadraticamente com a intensidade do potencial hiperfino.

Tabela 4.2: Massas dos quarks correntes e constituintes, em MeV. Os valores estimados foram extraídos da referência [1].

	CGQCD	Estimado
$m_u = m_d$	1	1.5 – 8.5
m_s	40	92 – 104
m_c	810	1000 – 1400
m_b	3810	4000 – 4500
$\mathcal{M}_u = \mathcal{M}_d$	92	200 – 300
\mathcal{M}_s	189	486
\mathcal{M}_c	1195	1500
\mathcal{M}_b	4344	4600 – 5100

Utilizando as relações (4.26), podemos obter a energia das quasipartículas a partir de suas massas dinâmicas. Na figura 4.5, temos o comportamento da energia em função do momento, para diferentes sabores de quarks. A energia, ao contrário do que acontece com a massa dinâmica, cresce com o momento, de forma que a soma dos quadrados da energia e da massa geram o quadrado do próprio momento.

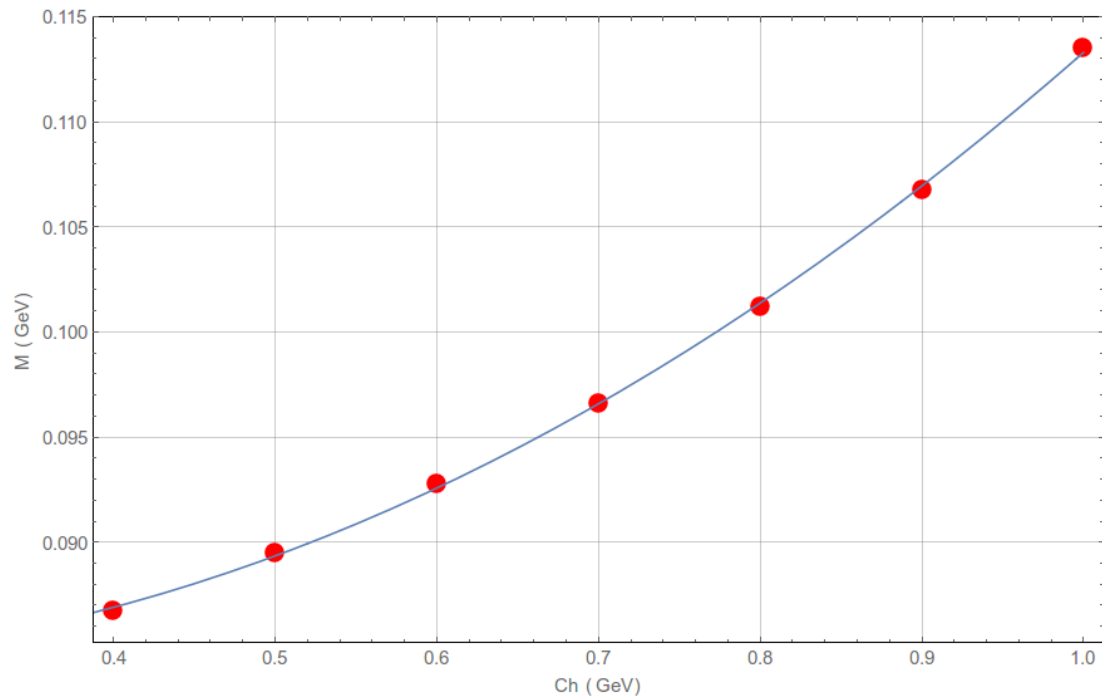
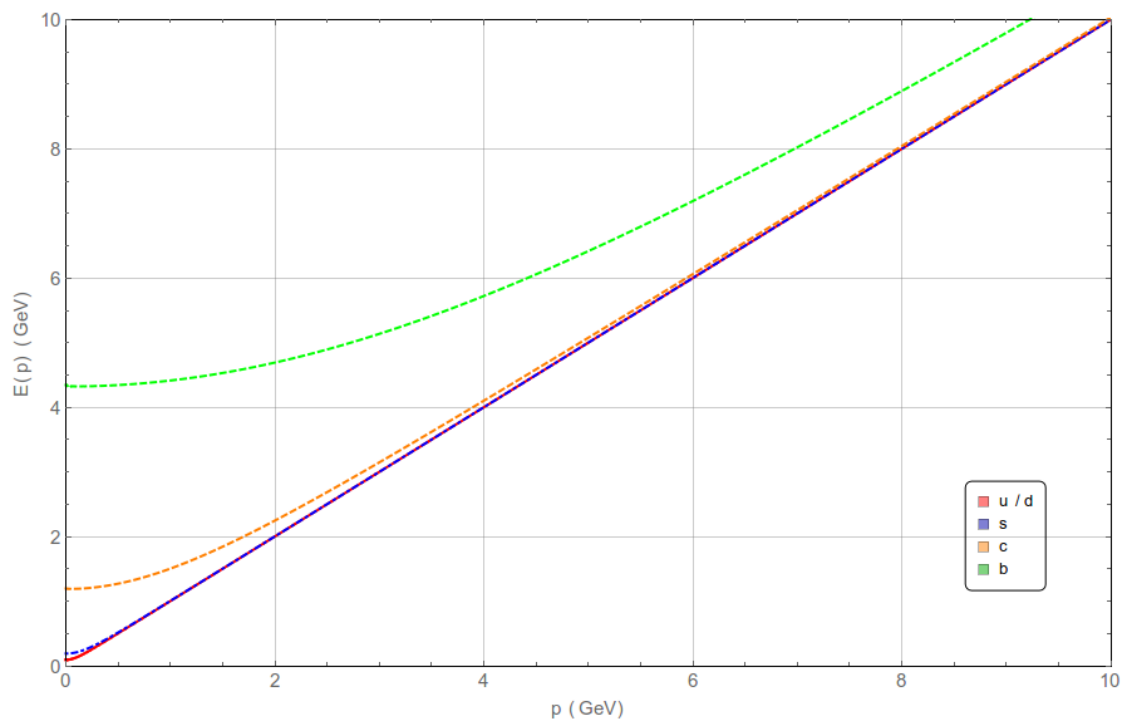
Figura 4.4: Massa constituinte dos quarks $up/down$, para diferentes valores de C_h .

Figura 4.5: Energias das quasipartículas, para diferentes sabores de quarks.



4.5.2 Massas

Após obter os kernéis para os diferentes tipos de mésons, passamos enfim à resolução numérica da equação TDA (4.77), a fim de obter as massas mesônicas M_{nJP} . Para as massas dos quarks correntes, utilizamos os valores da tabela 4.1, em conjunto com o parâmetro $C_h = 700$ MeV. As tabelas 4.3 a 4.12 sumarizam os resultados para os quatro kernéis obtidos. Nestas, temos os valores dos estados fundamentais, bem como as duas primeiras excitações para cada estado mesônico, e para as diferentes combinações de sabores de quarks. A diferença entre as massas obtidas por meio dos métodos TDA e RPA, nos estados pseudoescalares, foi relevante apenas entre os mésons mais leves – o pión, o káon e o méson $s\bar{s}$ – e para o nível fundamental – chegando a produzir diferenças de 380 MeV –, para os quais o método RPA gerou melhores resultados. Observando estes resultados, vemos que, a fim de reproduzir massas próximas aos valores experimentais, foi necessário reduzir as massas dos quarks correntes em relação ao trabalho anterior [1], nos levando às escolhas listadas em 4.2.

Tabela 4.3: Resultados para $m_1 = m_2 = 1$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0_{TDA}^{-+}	532	1347	2008
0_{RPA}^{-+}	151	1301	1988
1^{--}	757	1523	2121
1^{+-}	1252	1868	2400
1^{++}	1037	1742	2311

Tabela 4.4: Resultados para $m_1 = m_2 = 40$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0_{TDA}^{-+}	777	1575	2194
0_{RPA}^{-+}	676	1553	2181
1^{--}	918	1682	2269
1^{+-}	1390	2012	2534
1^{++}	1250	1933	2479

Na tabela 4.13, temos uma comparação entre os resultados que obtivemos utilizando o método da QCD no gauge de Coulomb (CGQCD), e os resultados obtidos na referência [3], na qual o potencial de Cornell sem modificações foi utilizado, e a interação quark-glúon (que incorporamos por meio do potencial hiperfino) foi desconsiderada. Podemos observar que, para os mésons mais leves, obtivemos energias menores tanto para o nível fundamental quanto para a primeira excitação, nos casos pseudoescalar e vetorial. Para os mésons mais pesados, a energia sofreu um aumento. No caso dos mésons pseudovetoriais,

Tabela 4.5: Resultados para $m_1 = m_2 = 810$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0^{-+}	2990	3537	3968
1^{--}	3028	3561	3986
1^{+-}	3337	3795	4183
1^{++}	3326	3787	4176

Tabela 4.6: Resultados para $m_1 = m_2 = 3810$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0^{-+}	9295	9675	9964
1^{--}	9304	9681	9968
1^{+-}	9536	9844	10103
1^{++}	9538	9846	10104

as energias aumentaram com a introdução do potencial hiperfino – com exceção dos mésons leves, no caso 1^{++} , que sofreram variações mínimas, se mantendo praticamente constantes.

Tabela 4.7: Resultados para $m_1 = 1$ MeV e $m_2 = 40$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0_{RPA}^{-+}	551	1449	2094
1^{--}	856	1609	2199
1^{+-}	1333	1950	2474
1^{++}	1154	1844	2399

Tabela 4.8: Resultados para $m_1 = 1$ MeV e $m_2 = 810$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0^{-+}	2011	2599	3095
1^{--}	2063	2640	3127
1^{+-}	2451	2952	3384
1^{++}	2327	2869	3322

Tabela 4.9: Resultados para $m_1 = 1$ MeV e $m_2 = 3810$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0^{-+}	5309	5828	6255
1^{--}	5642	6175	6576
1^{+-}	5694	6133	6503
1^{++}	5574	6053	6444

Tabela 4.10: Resultados para $m_1 = 810$ MeV e $m_2 = 3810$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0^{-+}	6194	6663	7027
1^{--}	6209	6673	7035
1^{+-}	6490	6879	7206
1^{++}	6482	6873	7202

Tabela 4.11: Resultados para $m_1 = 40$ MeV, $m_2 = 810$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0^{-+}	2024	2645	3146
1^{--}	2075	2684	3177
1^{+-}	2468	2980	3417
1^{++}	2384	2928	3380

Tabela 4.12: Resultados para $m_1 = 40$ MeV, $m_2 = 3810$ MeV.

Estado	E_1	E_2	E_3
0^{-+}	5316	5864	6296
1^{--}	5331	5877	6307
1^{+-}	5707	6153	6527
1^{++}	5623	6101	6491

Tabela 4.13: Comparação dos resultados obtidos com os resultados da referência [3].

m_1	m_2	0^{-+}				1^{--}			
		E_1		E_2		E_1		E_2	
		NPA	Calc	NPA	Calc	NPA	Calc	NPA	Calc
0	0	586	519.558	1473	1333.083	798	754.844	1602	1510.113
5	5	612	566.674	1494	1379.410	800	774.942	1615	1537.558
5	10	624	587.028	1503	1398.340	803	786.319	1619	1549.538
5	150	877	976.345	1679	1703.090	957	1100.688	1743	1788.727
150	150	1002	1114.913	1808	1858.486	1044	1318.102	1849	2001.982
m_1	m_2	1^{+-}				1^{++}			
		E_1		E_2		E_1		E_2	
		NPA	Calc	NPA	Calc	NPA	Calc	NPA	Calc
0	0	1076	1245.843	1818	1858.964	1076	1027.406	1818	1730.430
5	5	1093	1265.690	1835	1883.106	1093	1065.383	1835	1767.337
5	10	1100	1275.434	1843	1893.996	1100	1082.006	1843	1782.493
5	150	1273	1536.107	1988	2126.032	1273	1393.585	1988	2037.424
150	150	1416	1720.791	2116	2309.093	1416	1647.425	2116	2264.793

Referências Bibliográficas

- [1] F. J. Llanes-Estrada, S. R. Cotanch, A. P. Szczepaniak, and E. S. Swanson, “Hyperfine meson splittings: Chiral symmetry versus transverse gluon exchange,” *Phys. Rev.*, vol. C70, p. 035202, 2004.
- [2] P. J. d. A. Bicudo and J. E. F. T. Ribeiro, “Current Quark Model in a p Wave Triplet Condensed Vacuum. 1. The Dynamical Breaking of Chiral Symmetry,” *Phys. Rev.*, vol. D42, pp. 1611–1624, 1990.
- [3] F. J. Llanes-Estrada and S. R. Cotanch, “Relativistic many body Hamiltonian approach to mesons,” *Nucl. Phys.*, vol. A697, pp. 303–337, 2002.
- [4] F. J. Llanes-Estrada and S. R. Cotanch, “Meson structure in a relativistic many body approach,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 1102–1105, 2000.
- [5] N. Ligterink and E. S. Swanson, “A Coulomb gauge model of mesons,” *Phys. Rev.*, vol. C69, p. 025204, 2004.
- [6] A. Szczepaniak, E. S. Swanson, C.-R. Ji, and S. R. Cotanch, “Glueball spectroscopy in a relativistic many body approach to hadron structure,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 2011–2014, 1996.
- [7] S. R. Cotanch and F. J. Llanes-Estrada, “Coulomb Gauge Model for Exotic Hadrons,” *Fizika*, vol. B20, pp. 1–16, 2011.
- [8] A. Le Yaouanc, L. Oliver, S. Ono, O. Pene, and J. C. Raynal, “A Quark Model of Light Mesons with Dynamically Broken Chiral Symmetry,” *Phys. Rev.*, vol. D31, pp. 137–159, 1985.
- [9] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pene, and J. C. Raynal, “Spontaneous Breaking of Chiral Symmetry for Confining Potentials,” *Phys. Rev.*, vol. D29, pp. 1233–1257, 1984.
- [10] N. H. Christ and T. D. Lee, “Operator Ordering and Feynman Rules in Gauge Theories,” *Phys. Rev.*, vol. D22, p. 939, 1980. [*Phys. Scripta*23,970(1981)].
- [11] B. Martin and G. Shaw, *Particle Physics*. Manchester Physics Series, Wiley, 2017.
- [12] M. Thomson, *Modern Particle Physics*. Modern Particle Physics, Cambridge University Press, 2013.

- [13] M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model, Cambridge University Press, 2014.
- [14] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*. Frontiers in Physics, Avalon Publishing, 1995.
- [15] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. EBSCO ebook academic collection, Oxford University Press, 2005.
- [16] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, 2008.
- [17] L. Ryder, *Quantum Field Theory*. Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1996.
- [18] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum field theory*. A Wiley-Interscience publication, J. Wiley, 1993.
- [19] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*. Frontiers in physics : a lecture note and print series, Avalon Publishing, 1997.
- [20] User:MissMJ, “Standard model of elementary particles.svg.” <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=49632920>, 2016. [Online; accessed 13-April-2019].
- [21] M. Gell-Mann, “A Schematic Model of Baryons and Mesons,” *Phys. Lett.*, vol. 8, pp. 214–215, 1964.
- [22] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1,” 1964.
- [23] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2,” in *DEVELOPMENTS IN THE QUARK THEORY OF HADRONS. VOL. 1. 1964 - 1978* (D. Lichtenberg and S. P. Rosen, eds.), pp. 22–101, 1964.
- [24] M. Tanabashi *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Phys. Rev.*, vol. D98, no. 3, p. 030001, 2018.
- [25] C. AMSLER *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Phys. Lett.*, vol. B667, pp. 1–1340, 2008.
- [26] K. A. Olive *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Chin. Phys.*, vol. C38, p. 090001, 2014.
- [27] M. Gell-Mann, “The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry,”
- [28] Y. Ne’eman, “Derivation of strong interactions from a gauge invariance,” *Nucl. Phys.*, vol. 26, pp. 222–229, 1961. [,34(1961)].
- [29] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, vol. 1. Harwood Academic Publishers, 1981.

- [30] A. Fetter and J. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Dover Books on Physics, Dover Publications, 2012.

Apêndice A

Notação

Adotaremos a mesma notação empregada na referência [29]. Ao longo do texto, vamos utilizar o sistema de unidades naturais, com

$$c = \hbar = 1.$$

Não faremos distinção entre notações covariantes e contravariantes, i.e. entre índices superiores e inferiores. Os índices gregos correrão de 1 a 4, e os latinos, de 1 a 3, com índices repetidos indicando soma. Denotaremos os quadrivetores por $V_\mu = (V_1, V_2, V_3, V_4) = (\mathbf{V}, iV_0)$, com $V_4 = iV_0$. Em particular, para o quadrivetor posição convencionaremos $x_\mu = (\mathbf{x}, it)$, com parte espacial x_i , para $i = 1, 2, 3$, e componente temporal $x_4 = it$. Para os quadrigredientes, utilizaremos a notação

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right) = \left(\nabla, -i \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

e, dada uma quantidade qualquer B , denotaremos a sua derivada temporal por $\dot{B} = \partial B / \partial t$.

Vamos trabalhar com as matrizes de Dirac euclidianas $\gamma_\mu = (\gamma_i, \gamma_4)$ na representação relativística, onde

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aqui, 1 é a matriz identidade 2×2 , e σ_i são as matrizes de Pauli usuais, dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que são hermitianas e satisfazem a identidade $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$. As matrizes γ_μ , também hermitianas, satisfazem $[\gamma_i, \gamma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$, e $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$. Definindo as matrizes

α_i e β ,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

podemos escrever as matrizes de Dirac como $\gamma_i = -i\beta\alpha_i$ e $\gamma_4 = \beta$. Estas matrizes são hermitianas e obedecem as relações de comutação e anticomutação

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 2\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0.$$

Os espinores de Pauli de duas componentes, χ_λ , valem

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Apêndice B

Derivadas funcionais

Vamos determinar as derivadas funcionais (3.59) e (3.60) em termos da condição de gauge $\chi(W_i, \mathbf{x})$. Invertendo (3.41), obtemos a seguinte expressão para W_i ,

$$W_i = u^{-1}A_i u + \frac{i}{g}u^{-1}(\nabla_i u), \quad (\text{B.1})$$

que, para pequenas variações em W_i , ϕ_a e A_i , se torna

$$\delta W_i = (\delta u^{-1})A_i u + u^{-1}(\delta A_i)u + u^{-1}A_i(\delta u) + \frac{i}{g}(\delta u^{-1})(\nabla_i u) + \frac{i}{g}u^{-1}\delta(\nabla_i u). \quad (\text{B.2})$$

Expandindo suas componentes, esta equação pode ser reescrita como

$$\delta W_i^l = U^{ml}\delta A_i^m + \frac{1}{g}\mathcal{D}_i^{lm}(\lambda_a^m \delta\phi_a), \quad (\text{B.3})$$

onde usamos a relação

$$\begin{aligned} \frac{i}{g}(\delta u^{-1})(\nabla_i u) - \frac{i}{g}(\nabla_i u^{-1})(\delta u) &= \frac{i}{g} \left[\frac{\delta u^{-1}}{\delta\phi_a} \frac{\delta u}{\delta\phi_a} (\delta\phi_a) (\nabla_i \phi_a) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta u^{-1}}{\delta\phi_a} \frac{\delta u}{\delta\phi_a} (\nabla_i \phi_a) (\delta\phi_a) \right] = 0. \end{aligned}$$

As quantidades λ_a^l e U^{ml} estão definidas em (3.61) e (3.62), e a derivada covariante no gauge de Coulomb na representação adjunta é $\mathcal{D}_i^{lm} = \delta^{lm}\nabla_i - g f^{lmn}W_i^n$. Além disso, como os geradores T^l são Hermitianos, e as matrizes u são unitárias, segue que a matriz $U = (U^{ml})$ é real e ortogonal e, portanto unitária.

Podemos estabelecer uma relação entre as variações δA_i e $\delta\phi_a$, requerendo que os vínculos (3.40) também sejam satisfeitos para variações infinitesimais $W_i + \delta W_i$,

$$0 = \chi^l(W_i + \delta W_i, \mathbf{x}) = \int d^3x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_j | \mathbf{x}', m \rangle [W_j^m(\mathbf{x}', t) + \delta W_j^m(\mathbf{x}', t)]$$

$$= \int d^3 x' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle \left[U^{nm}(\mathbf{x}') \delta A_i^n(\mathbf{x}') + \frac{1}{g} \mathcal{D}_i^{mn}(\lambda_a^n(\mathbf{x}') \delta \phi_a(\mathbf{x}')) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Vamos resolver esta equação para $\phi_a(\mathbf{x})$. Temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle \mathcal{D}_i^{mn}(\mathbf{x}') [\lambda_a^n(\mathbf{x}') \delta \phi_a(\mathbf{x}')] &= -g \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}') \delta A_i^n(\mathbf{x}') \\ \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}'', b \rangle \delta^3(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \mathcal{D}_i^{bn}(\mathbf{x}') [\lambda_a^n(\mathbf{x}') \delta \phi_a(\mathbf{x}')] &= -g \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}') \delta A_i^n(\mathbf{x}') \\ \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}'', b \rangle \langle \mathbf{x}'', b | \mathcal{D}_i | \mathbf{x}', n \rangle [\lambda_a^n(\mathbf{x}') \delta \phi_a(\mathbf{x}')] &= -g \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}') \delta A_i^n(\mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde o elemento da matriz anti-simétrica \mathcal{D}_i é definido como

$$\langle \mathbf{x}, l | \mathcal{D}_i | \mathbf{x}', m \rangle = \mathcal{D}_i^{lm}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{B.6})$$

A partir de \mathcal{D}_i , podemos definir a matriz $\Gamma_i \mathcal{D}_i$, cujos elementos são dados por

$$\langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i \mathcal{D}_i | \mathbf{x}', l' \rangle \equiv \int d^3 x'' \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}'', m \rangle \langle \mathbf{x}'', m | \mathcal{D}_i | \mathbf{x}', l' \rangle. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo esta matriz na expressão (B.5), encontramos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i \mathcal{D}_i | \mathbf{x}', n \rangle [\lambda_a^n(\mathbf{x}') \delta \phi_a(\mathbf{x}')] &= -g \langle \mathbf{x}, l | \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}') \delta A_i^n(\mathbf{x}') \\ \lambda_a^k(\mathbf{x}) \delta \phi_a(\mathbf{x}) &= -g \langle \mathbf{x}, k | (\Gamma_j \mathcal{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}') \delta A_i^n(\mathbf{x}') \\ \lambda^{-1}(\mathbf{x})^l \lambda_a^k(\mathbf{x}) \delta \phi_a(\mathbf{x}) &= -g \lambda^{-1}(\mathbf{x})^l \langle \mathbf{x}, k | (\Gamma_j \mathcal{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}') \delta A_i^n(\mathbf{x}') \\ \frac{\delta \phi_a(\mathbf{x})}{\delta A_i^n(\mathbf{x}')} &= -g \lambda^{-1}(\mathbf{x})^k \langle \mathbf{x}, k | (\Gamma_j \mathcal{D}_j)^{-1} \Gamma_i | \mathbf{x}', m \rangle U^{nm}(\mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde $(\Gamma_i \mathcal{D}_i)^{-1}$ é a inversa da matrix $\Gamma_i \mathcal{D}_i$ e $\lambda^{-1}(\mathbf{x})$ é a inversa de $\lambda(\mathbf{x})$, que satisfaz $(\lambda^{-1})^m \lambda_a^n = \delta^{mn}$.

Para obter a relação entre $\delta W_i^a(\mathbf{x})$ e $\delta A_i^a(\mathbf{x})$, tomamos a derivada funcional da equação (B.3) em relação a $A_i^a(\mathbf{x})$, e na expressão resultante substituímos (3.59), encontrando

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_i^m(\mathbf{x})}{\delta A_j^l(\mathbf{x}')} &= U^{km}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \delta^{kl} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \mathcal{D}_i^{mk}(\mathbf{x}) \left[\lambda_a^k(\mathbf{x}) \lambda^{-1}(\mathbf{x})^n \langle \mathbf{x}, n | (\Gamma_f \mathcal{D}_f)^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \Gamma_j | \mathbf{x}', p \rangle U^{lp}(\mathbf{x}') \right] \\ &= U^{lm}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \int d^3 x'' \mathcal{D}_i^{mk}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \langle \mathbf{x}'', k | (\Gamma_f \mathcal{D}_f)^{-1} \times \\ &\quad \Gamma_j | \mathbf{x}', p \rangle U^{lp}(\mathbf{x}') \\ &= U^{lm}(\mathbf{x}) \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \langle \mathbf{x}, m | \mathcal{D}_i (\Gamma_f \mathcal{D}_f)^{-1} \Gamma_j | \mathbf{x}', p \rangle U^{lp}(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Esta quantidade também satisfaz um vínculo do tipo (3.40), uma vez que

$$\int d^3x \langle \mathbf{x}'', l'' | \Gamma_i | \mathbf{x}, m \rangle \frac{\delta W_i^m(\mathbf{x})}{\delta A_j^l(\mathbf{x}')} = \langle \mathbf{x}'', l'' | \Gamma_j | \mathbf{x}', m \rangle U^{lm}(\mathbf{x}') +$$

$$- \langle \mathbf{x}'', l'' | \Gamma_j | \mathbf{x}', m \rangle U^{lm}(\mathbf{x}') = 0. \quad (\text{B.10})$$

Apêndice C

Método BCS

C.1 Matrizes de Gell-Mann

Os geradores do $SU(3)$ na representação fundamental são dados por $T^a = \lambda^a/2$, com $a = 1, \dots, 8$, onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

matrizes 3×3 , Hermitianas e de traço nulo. O conjunto $\{\mathbb{1}, \lambda_a\}$, onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 3×3 , forma uma base completa para as matrizes complexas 3×3 . Portanto, dada uma matriz arbitrária M com esta dimensão, podemos expandi-la nesta base, obtendo

$$M = m_0 \mathbb{1} + \sum_{a=1}^8 m_a \lambda^a, \quad (\text{C.1})$$

onde m_0, m_a são os coeficientes da expansão. Tomando o traço desta expressão, encontramos

$$\text{Tr}(M) = 3m_0 + \sum_{a=1}^8 m_a \text{Tr}(\lambda^a)$$

$$\therefore m_0 = \frac{1}{3}\text{Tr}(M), \quad (\text{C.2})$$

uma vez que as matrizes de Gell-Mann possuem traço nulo. Para obter os coeficientes m_a , multiplicamos a expressão (C.1) por λ^b , e em seguida tomamos o seu traço. Temos, então,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M\lambda^b) &= \sum_{a=1}^8 m_a \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2 \sum_{a=1}^8 m_a \delta^{ab} \\ \therefore m_a &= \frac{1}{2}\text{Tr}(M\lambda^a), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde usamos a relação $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}$. Com todos os coeficientes da expansão em mãos, podemos voltar à expressão (C.1), que se torna

$$M = \frac{1}{3}\text{Tr}(M)\mathbb{1} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^8 \text{Tr}(M\lambda^a)\lambda^a, \quad (\text{C.4})$$

ou, explicitando suas componentes,

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^8 M_{kl}(\lambda^a)_{lk}(\lambda^a)_{ij} \\ \delta_{ik}\delta_{jl}M_{kl} &= \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}M_{kl} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^8 M_{kl}(\lambda^a)_{lk}(\lambda^a)_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Como M é uma matriz arbitrária, ficamos com a expressão

$$\begin{aligned} \delta_{ik}\delta_{jl} &= \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^8 (\lambda^a)_{lk}(\lambda^a)_{ij} \\ \sum_{a=1}^8 (T^a)_{lk}(T^a)_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

escrita em termos dos geradores T^a . Com esta identidade em mãos, podemos calcular os traços de combinações dos geradores, que aparecem em expressões na sessão (?). Para o termo $\sum_{c,a} \epsilon_c^\dagger T^a T^a \epsilon_c$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^3 \sum_{a=1}^8 (\epsilon_c^\dagger)_i (T^a)_{ij} (T^a)_{jk} (\epsilon_c)_k &= \sum_{c=1}^3 (\epsilon_c^\dagger)_i \frac{1}{2} \left(\delta_{jj}\delta_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{jk} \right) (\epsilon_c)_k \\ &= \frac{3}{2} \left(\delta_{jj} - \frac{1}{3} \right) = 4. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

C.2 Equação de gap

O hamiltoniano efetivo (4.6) pode ser escrito sucintamente como

$$H_{\text{eff}} = T \left(\Psi^\dagger K \Psi - \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi \right), \quad (\text{C.8})$$

onde $K = -i\alpha \cdot \nabla + m_q \beta$, $\Gamma = T^a$ e $\Gamma_i = \alpha_i T^a$. Os potenciais $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ foram denotados por U_{ij} e V , respectivamente, e T é o operador de ordenamento temporal. Aplicando a este hamiltoniano o teorema de Wick, vamos reescrevê-lo na forma $H_{\text{eff}} = H_0 + :H_2: + :H_4:$, onde H_2 contém todos os termos com dois operadores de Fock, H_4 os termos com quatro operadores, e H_0 contém os termos sem operadores.

As possíveis contrações de Wick dos campos ψ são

$$\overline{\Psi_\alpha(\mathbf{x}) \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})} = \sum_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Lambda_{k\alpha\beta}^+ e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \hat{\mathbf{e}}_c \hat{\mathbf{e}}_c^\dagger, \quad (\text{C.9})$$

$$\overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Psi_\beta(\mathbf{y})} = \sum_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Lambda_{k\alpha\beta}^- e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \hat{\mathbf{e}}_c^\dagger \hat{\mathbf{e}}_c, \quad (\text{C.10})$$

$$\overline{\Psi_\alpha(\mathbf{x}) \Psi_\beta(\mathbf{y})} = \overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})} = 0, \quad (\text{C.11})$$

onde $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$ são os índices dos espinores de Dirac, e os projetores de energia positiva Λ_k^+ e de energia negativa Λ_k^- são dados por

$$\Lambda_k^+ \equiv \sum_\lambda \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} (1 + s_k \beta + c_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}),$$

$$\Lambda_k^- \equiv \sum_\lambda \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) = \frac{1}{2} (1 - s_k \beta - c_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}).$$

Os espinores \mathcal{U} e \mathcal{V} foram escritos na forma

$$\mathcal{U}_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+s_k)}} \begin{pmatrix} (1+s_k) \chi_\lambda \\ c_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(1+s_k)}} (1 + s_k \beta + c_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{U}_{0\lambda}, \quad (\text{C.12})$$

$$\mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+s_k)}} \begin{pmatrix} -c_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\lambda \\ (1+s_k) \chi_\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(1+s_k)}} (1 - s_k \beta - c_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{V}_{0\lambda}, \quad (\text{C.13})$$

onde introduzimos os espinores auxiliares

$$\mathcal{U}_{0\lambda} = \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_{0\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

Desta forma, aplicando o teorema de Wick ao hamiltoniano (C.8) e considerando todas as

possíveis contrações, chegamos a

$$H_0 = \overline{\Psi^\dagger K \Psi} - \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} + \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi}, \quad (\text{C.15})$$

$$H_2 = \overline{\Psi^\dagger K \Psi} - \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} - \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} + \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi} + \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi}, \quad (\text{C.16})$$

$$H_4 = -\frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} + \frac{1}{2} \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi}. \quad (\text{C.17})$$

Calculemos H_0 , utilizando as contrações (C.9) a (C.11). O primeiro termo da expressão, $\overline{\Psi^\dagger K \Psi}$, vale

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) K \Psi_\beta(\mathbf{x})} &= 3 \int d^3x \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Lambda_{k\beta\alpha}^- (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m_q \beta)_{\alpha\beta} \\ &= 3 \int d^3x \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\Lambda_k^- (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m_q \beta)], \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

enquanto que o termo seguinte, contendo Γ , vale

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Gamma \Psi_\beta(\mathbf{x}) V \Psi_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) \Gamma \Psi_\delta(\mathbf{y})} &= 4 \int d^3x d^3y \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\Lambda_k^- \Lambda_q^+) \times \\ &\quad \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

onde o fator numérico 4, bem como todos os que se seguem, vem das combinações das matrizes de cores. A fim de simplificar esta expressão, façamos a mudança de variáveis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}$, com $\mathbf{X} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{Y} \equiv (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. O elemento de integração se transforma segundo $d^3x d^3y = J d^3X d^3Y$, onde J é o Jacobiano, dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{Y}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{Y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (\text{C.20})$$

Aplicando estas transformações, temos

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Gamma \Psi_\beta(\mathbf{x}) V \Psi_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) \Gamma \Psi_\delta(\mathbf{y})} &= 4 \int d^3X d^3Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\Lambda_k^- \Lambda_q^+) \hat{V}(|\mathbf{X}|) \times \\ &\quad e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{X}} \\ &= 4 \int d^3Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\Lambda_k^- \Lambda_q^+) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|), \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

onde usamos a transformada de Fourier do potencial V ,

$$V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) = \int d^3X e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{X}} \hat{V}(|\mathbf{X}|). \quad (\text{C.22})$$

Para o último termo, temos

$$\overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Gamma_i \Psi_\beta(\mathbf{x}) U_{ij} \Psi_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) \Gamma_j \Psi_\delta(\mathbf{y})} = 4 \int d^3x d^3y \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Tr}(\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j) \times \\ \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (\text{C.23})$$

Substituindo o potencial \hat{U}_{ij} pela expansão

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2} \right) \hat{U}_{ij}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} U(|\mathbf{p}|) D_{ij}(\mathbf{p}) \quad (\text{C.24})$$

no espaço dos momentos, temos

$$\overline{\Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}) \Gamma_i \Psi_\beta(\mathbf{x}) U_{ij} \Psi_\gamma^\dagger(\mathbf{y}) \Gamma_j \Psi_\delta(\mathbf{y})} = 4 \int \frac{d^3x d^3k d^3q}{(2\pi)^6} U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \times \\ \text{Tr}(\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j), \quad (\text{C.25})$$

e a expressão final para a energia do vácuo H_0 é

$$H_0 = \int \frac{d^3x d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 3 \text{Tr}[\Lambda_k^- (\alpha \cdot \mathbf{k} + m_q \beta)] - 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\text{Tr}(\Lambda_k^- \Lambda_q^+) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + \right. \\ \left. - U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \text{Tr}(\Lambda_k^- \alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j)] \right\}.$$

Passemos ao cálculo de H_2 . Para obter o termo sem contrações, substituímos diretamente a expansão de ψ na expressão $\psi^\dagger K \psi$, obtendo

$$\psi^\dagger K \psi = \sum_{\lambda \lambda' c} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right] (\alpha \cdot \mathbf{k} + m_q \beta) \times \\ \left[\mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right]. \quad (\text{C.26})$$

Os dois termos seguintes, contendo Γ , valem

$$\overline{\Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi} + \Psi^\dagger \Gamma \Psi V \Psi^\dagger \Gamma \Psi = \frac{4}{3} \sum_{\lambda \lambda' c} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right]_\alpha \times \\ (s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}})_{\beta \gamma} \left[\mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right]_\delta V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|), \quad (\text{C.27})$$

onde $\Lambda_q^+ - \Lambda_q^- = s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}$. Por fim, os dois termos contendo Γ_i valem

$$\begin{aligned} \overline{\Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi} + \Psi^\dagger \Gamma_i \overline{\Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi} = \frac{4}{3} \sum_{\lambda \lambda' c} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ \left[\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right]_\gamma \right. \\ \left. (\alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i)_{\gamma\beta} \times \left[\mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right]_\beta \right\} \times \\ U_{ij}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|), \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

onde utilizamos mais uma vez a expansão (C.24). Combinando todos os termos, encontramos

$$\begin{aligned} H_2 = \sum_{\lambda \lambda' c} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right] H_k \times \\ \left[\mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

onde o termo H_k vale

$$\begin{aligned} H_k = \alpha \cdot \mathbf{k} + m_q \beta + \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[(\alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i) U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) D_{ij}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + \right. \\ \left. - (s_q \beta + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{q}}) V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Voltemos nossa atenção à contribuição transversa. Utilizando as relações de comutação e anticomutação para as matrizes α , encontramos

$$\begin{aligned} (\alpha_i \Lambda_q^+ \alpha_j - \alpha_j \Lambda_q^- \alpha_i) U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) D_{ij}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) = \left[-2s_q \beta - c_q (\alpha_i \hat{q}_j + \alpha_j \hat{q}_i) \frac{(q_i - k_i)(q_j - k_j)}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} \right] \times \\ U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) \\ = -2 [s_q \beta U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + c_q \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}} W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)], \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

onde utilizamos a relação

$$(\hat{q}_i \hat{k}_j + \hat{q}_j \hat{k}_i) \frac{(k_i - q_i)(k_j - q_j)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} = 2 \frac{(k^2 + q^2)x - kq(x^2 + 1)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}, \quad (\text{C.32})$$

com $x = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$, e definimos o potencial $W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)$ como

$$W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) = \frac{(k^2 + q^2)x - kq(x^2 + 1)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|).$$

Assim, voltando à expressão (C.30) para H_k , vemos que este pode ser escrito na forma

$H_k = A_k \beta + B_k \alpha \cdot \hat{\mathbf{k}}$, com

$$A_k = m_q - \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} s_q [V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)], \quad (\text{C.33})$$

$$B_k = k - \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} c_q [xV(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)]. \quad (\text{C.34})$$

Com o termo H_2 em mãos, nos resta aplicar a este o ordenamento normal, que leva a

$$\begin{aligned} :H_2: = \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} & \left[\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) + \mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) + \right. \\ & \left. + \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) - \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Nos resta calcular as combinações de espinores que aparecem nesta equação. A partir das expressões (C.13) para os espinores, em conjunto com as condições de normalização (4.19) e (4.20), obtemos as seguintes relações:

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \beta \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} s_k, \quad \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \beta \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = -\delta_{\lambda\lambda'} s_k, \quad (\text{C.36})$$

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} c_k \hat{k}_i, \quad \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} c_k \hat{k}_i, \quad (\text{C.37})$$

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \beta \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = -c_k M_{\lambda\lambda'}, \quad \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \beta \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = -c_k M_{\lambda\lambda'}^\dagger, \quad (\text{C.38})$$

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_i \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = s_k M_{\lambda\lambda'} \hat{k}_i, \quad \mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_i \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = s_k M_{\lambda\lambda'}^\dagger \hat{k}_i. \quad (\text{C.39})$$

Aqui, definimos a matriz $M_{\lambda\lambda'} \equiv \chi_\lambda^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}}_i \sigma_2 \chi_{\lambda'}$. Portanto, obtemos

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = (A_k s_k + B_k c_k) \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\text{C.40})$$

$$\mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = -(A_k s_k + B_k c_k) \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\text{C.41})$$

e para os termos cruzados,

$$\mathcal{U}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) H_k \mathcal{V}_{\lambda'}(-\mathbf{k}) = (-A_k c_k + B_k s_k) M_{\lambda\lambda'}, \quad (\text{C.42})$$

$$\mathcal{V}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}) H_k \mathcal{U}_{\lambda'}(\mathbf{k}) = (-A_k c_k + B_k s_k) M_{\lambda\lambda'}^\dagger. \quad (\text{C.43})$$

Substituindo-os em $:H_2:$, temos

$$\begin{aligned} :H_2: = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k & \left(B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right) + \\ & + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda\lambda'} (-A_k c_k + B_k s_k) \left(M_{\lambda\lambda'} B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) D_{\lambda' c}^\dagger(-\mathbf{k}) + M_{\lambda\lambda'}^\dagger D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) B_{\lambda' c}(\mathbf{k}) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

onde $\varepsilon_k = A_k s_k + B_k c_k$ é a auto-energia da quasipartícula. Substituindo as expressões para A_k e B_k , obtemos a lei de dispersão

$$\begin{aligned}\varepsilon_k &= m_q s_k + k c_k - \int \frac{d^3 q}{12\pi^3} [s_q s_k V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2s_q s_k U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + c_q c_k x V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + \\ &\quad 2c_q c_k W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)] \\ &= m_q s_k + k c_k - \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{6\pi^2} [s_q s_k (V_0 + 2U_0) + c_q c_k (V_1 + 2W_0)],\end{aligned}$$

onde denotamos as integrais angulares por

$$V_n(k, q) \equiv \int_{-1}^{+1} dx V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) x^n,$$

e o mesmo para os potenciais U e W . O segundo termo em $:H_2:$ é o termo de Bogoliubov anômalo. Como este termo desestabiliza o vácuo, impomos a condição $-A_k c_k + B_k s_k = 0$, que por sua vez implica em

$$\begin{aligned}0 &= -m_q c_k + k s_k + \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} [s_q c_k V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2s_q c_k U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) - c_q s_k x V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + \\ &\quad -2c_q s_k W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)] \\ \therefore k s_k - m_q c_k &= \int \frac{d^3 q}{12\pi^3} [(c_q s_k x - s_q c_k) V(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) - 2s_q c_k U(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) + 2c_q s_k W(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|)],\end{aligned}$$

que é a equação de *gap* de massa, e $:H_2:$ passa a ser

$$:H_2 := \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \varepsilon_k \left(B_{\lambda c}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) + D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right).$$

Usando a notação (4.43), a equação de *gap* assume a forma

$$k s_k - m_q c_k = \int_0^\infty \frac{q d^2 q}{6\pi^2} [c_q s_k (V_1 + 2W_0) - s_q c_k (V_0 + 2U_0)].$$

Nos resta obter o último termo do hamiltoniano, H_4 . Podemos separá-lo em $H_4 = H_{4c} + H_{4T}$, onde H_{4c} é a contribuição Coulombiana, dada por

$$H_{4c} = -\frac{1}{2} \psi^\dagger \Gamma \psi V \psi^\dagger \Gamma \psi = -\frac{1}{2} \int d^3 x d^3 y \psi^\dagger(\mathbf{x}) T^a \psi(\mathbf{x}) \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \psi^\dagger(\mathbf{y}) T^a \psi(\mathbf{y}), \quad (\text{C.45})$$

e H_{4T} a contribuição transversa,

$$H_{4T} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Gamma_i \Psi U_{ij} \Psi^\dagger \Gamma_j \Psi = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \alpha_i T^a \Psi(\mathbf{x}) \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \alpha_j T^a \Psi(\mathbf{y}). \quad (\text{C.46})$$

Substituindo a expansão de Ψ , temos

$$H_{4C} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int d^3x d^3y \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_4}{(2\pi)^3} \left[\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \left[\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \times \left[\mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \left[\mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_4) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_4) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_4) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_4) \right] e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}, \quad (\text{C.47})$$

$$H_{4T} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int d^3x d^3y \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_4}{(2\pi)^3} \left[\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \alpha_i \left[\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] \times \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[\mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \times \alpha_j \left[\mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_4) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_4) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_4) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_4) \right] e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} \times \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}. \quad (\text{C.48})$$

Como a dependência de Ψ em x está contida na exponencial $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$, podemos isolar nas expressões acima a parte que depende de x, y , e resolver suas integrais separadamente. Aplicando novamente a mudança de variáveis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y}$, obtemos

$$\int d^3x d^3y \hat{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} = V(|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|) (2\pi)^3 \times \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \quad (\text{C.49})$$

para H_{4C} , e para H_{4T} , obtemos

$$\int d^3x d^3y \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{y}} = (2\pi)^3 U(|\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3|) D_{ij}(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \times \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3), \quad (\text{C.50})$$

onde usamos a expansão (C.24). Desta forma, conseguimos eliminar uma das integrais

nos momentos, e resta, para o termo Coulombiano,

$$\begin{aligned}
H_{4C} = & -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{(2\pi)^9} \left[\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \times \\
& \left[\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] V(|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|) \times \\
& \left[\mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \left[\mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2) + \right. \\
& \left. \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2) \right] \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}. \quad (C.51)
\end{aligned}$$

Façamos uma mudança de variáveis. Definindo $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{q}$, e fazendo as substituições $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{p}$ e $\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}$, temos

$$\begin{aligned}
H_{4C} = & -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3 p d^3 q d^3 k}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) \left[\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) \right] \times \\
& \left[\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) \right] \times \\
& \left[\mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) \right] \times \\
& \left[\mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right] \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}, \quad (C.52)
\end{aligned}$$

que após ordenamento normal se torna

$$\begin{aligned}
:H_{4C}: = & -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3 p d^3 q d^3 k}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) : \left[\Theta_{c_1 c_2}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \Theta_{c_1 c_2}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \right. \\
& \Theta_{c_1 c_2}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \Theta_{c_1 c_2}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \left. \right] \left[\Theta_{c_3 c_4}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Theta_{c_3 c_4}^3(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \right. \\
& \left. \Theta_{c_3 c_4}^4(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Theta_{c_3 c_4}^2(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \right] : \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}, \quad (C.53)
\end{aligned}$$

onde definimos os vértices

$$\Theta_{c'c}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (C.54)$$

$$\Theta_{c'c}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda' c'}(-\mathbf{p}'), \quad (C.55)$$

$$\Theta_{c'c}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{p}) B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad (C.56)$$

$$\Theta_{c'c}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda' c'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}). \quad (C.57)$$

Em forma compacta, temos

$$:H_{4C}: = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3 p d^3 q d^3 k}{(2\pi)^9} V(|\mathbf{q}|) \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \times$$

$$\sum_{i,j=1}^4 : \Theta_{c_1 c_2}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Theta_{c_3 c_4}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \quad (\text{C.58})$$

Vamos repetir o processo para o termo transverso. Substituindo (C.50) em H_{4T} e integrando em \mathbf{k}_4 , obtemos

$$\begin{aligned} H_{4T} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{(2\pi)^9} \left[\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{k}_1) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{k}_1) \right] \alpha_i \times \\ & \left[\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{k}_2) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{k}_2) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{k}_2) \right] \left[\mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}_3) + \right. \\ & \left. \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}_3) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}_3) \right] \alpha_j \left[\mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \right. \\ & \left. \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \right] \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} \times \\ & \times U(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) D_{ij}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Reescrevendo esta expressão em termos de $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}$, temos

$$\begin{aligned} H_{4T} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3 p d^3 q d^3 k}{(2\pi)^9} \left[\mathcal{U}_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{p}) B_{\lambda_1 c_1}^\dagger(\mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_1}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda_1 c_1}(-\mathbf{p}) \right] \alpha_i \times \\ & \left[\mathcal{U}_{\lambda_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) B_{\lambda_2 c_2}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathcal{V}_{\lambda_2}(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) D_{\lambda_2 c_2}^\dagger(-\mathbf{q} - \mathbf{p}) \right] \times \\ & \left[\mathcal{U}_{\lambda_3}^\dagger(\mathbf{k}) B_{\lambda_3 c_3}^\dagger(\mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\lambda_3}^\dagger(-\mathbf{k}) D_{\lambda_3 c_3}(-\mathbf{k}) \right] \alpha_j \times \\ & \left[\mathcal{U}_{\lambda_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) B_{\lambda_4 c_4}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \mathcal{V}_{\lambda_4}(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) D_{\lambda_4 c_4}^\dagger(-\mathbf{k} + \mathbf{q}) \right] \times \\ & \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4} U(|\mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

que, após aplicarmos o ordenamento normal, se torna

$$\begin{aligned} : H_{4T} : = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4}} \int \frac{d^3 p d^3 q d^3 k}{(2\pi)^9} U(|\mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{q}) \sum_{l,m=1}^4 : \Xi_{c_1 c_2 i}^l(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^m(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) : \times \\ & \times \hat{\epsilon}_{c_1}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_2} \hat{\epsilon}_{c_3}^\dagger T^a \hat{\epsilon}_{c_4}. \quad (\text{C.59}) \end{aligned}$$

Aqui, definimos os vértices como

$$\Xi_{c' c i}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}), \quad (\text{C.60})$$

$$\Xi_{c' c i}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -\mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}) D_{\lambda' c'}(-\mathbf{p}'), \quad (\text{C.61})$$

$$\Xi_{c' c i}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{U}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{V}_\lambda(-\mathbf{p}) B_{\lambda' c'}^\dagger(\mathbf{p}') D_{\lambda c}^\dagger(-\mathbf{p}), \quad (\text{C.62})$$

$$\Xi_{c' c i}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \mathcal{V}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}') \alpha_i \mathcal{U}_\lambda(\mathbf{p}) D_{\lambda' c'}(-\mathbf{p}') B_{\lambda c}(\mathbf{p}). \quad (\text{C.63})$$

Apêndice D

Equação TDA

A equação TDA é dada por

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{\text{eff}}, B_{\alpha}^{\dagger} D_{\beta}^{\dagger}] | \Omega \rangle = (E_{nJP} - E_0) \Psi_{\alpha\beta}^{nJP},$$

onde $\Psi_{\alpha\beta}^{nJP}(\mathbf{r})$ é Hermitiano, e $H_{\text{eff}} = H_0 + :H_2: + :H_4:$. O comutador de H_0 com $B_{\alpha}^{\dagger} D_{\beta}^{\dagger}$ vale zero, uma vez que H_0 é constante. Passemos ao cálculo do comutador com o termo H_2 ,

$$[H_2, B_{\alpha}^{\dagger} D_{\beta}^{\dagger}] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda c} \epsilon_k \left([B_{\lambda c}^{\dagger}(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}), B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r})] + [D_{\lambda c}^{\dagger}(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r})] \right) \quad (\text{D.1})$$

A partir das relações de anticomutação (4.21), obtemos os comutadores

$$[B_{\lambda c}^{\dagger}(\mathbf{k}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}), B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r})] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k}) \delta_{\alpha\lambda} \delta_{ac} B_{\lambda c}^{\dagger}(\mathbf{k}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r}) + 2B_{\lambda c}^{\dagger}(\mathbf{k}) B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r}), \quad (\text{D.2})$$

$$[D_{\lambda c}^{\dagger}(-\mathbf{k}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r})] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k}) \delta_{\beta\lambda} \delta_{ac} D_{\lambda c}^{\dagger}(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) + 2D_{\lambda c}^{\dagger}(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}), \quad (\text{D.3})$$

que podem ser substituídos em $[H_2, B_{\alpha}^{\dagger} D_{\beta}^{\dagger}]$, levando a

$$[H_2, B_{\alpha}^{\dagger} D_{\beta}^{\dagger}] = 2\epsilon_r B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r}) + 2 \int d^3k \sum_{\lambda c} \epsilon_k \left(B_{\lambda c}^{\dagger}(\mathbf{k}) B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) B_{\lambda c}(\mathbf{k}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r}) + D_{\lambda c}^{\dagger}(-\mathbf{k}) B_{\alpha a}^{\dagger}(\mathbf{r}) D_{\beta a}^{\dagger}(-\mathbf{r}) D_{\lambda c}(-\mathbf{k}) \right). \quad (\text{D.4})$$

Substituindo este comutador na equação (4.48), os termos contendo quatro operadores vão a zero, uma vez que os operadores $B_{\lambda c}(\mathbf{k})$ e $D_{\lambda c}(-\mathbf{k})$ aniquilam o vácuo BCS, e nos resta apenas o primeiro termo. Usando as definições (4.46) e (4.47), encontramos enfim

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = 2\varepsilon_k \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}(\mathbf{k}),$$

a menos de uma constante de normalização multiplicativa, que será omitida daqui em diante.

Calculemos o comutador de H_4 com $B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger$. Consideremos, inicialmente, a contribuição Coulombiana H_{4c} , que contém a combinação de operadores

$$\sum_{i,j=1}^4 : \Theta_{c_1 c_2}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Theta_{c_3 c_4}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) :,$$

com os vértices Θ definidos em (C.54) a (C.57). Tomando $\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{4c}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle$, os termos que sobreviverão no produto de vértices acima serão apenas quatro,

$$\begin{aligned} : \Theta_{c_1 c_2}^1 \Theta_{c_3 c_4}^2 + \Theta_{c_1 c_2}^3 \Theta_{c_3 c_4}^4 + \Theta_{c_1 c_2}^2 \Theta_{c_3 c_4}^1 + \Theta_{c_1 c_2}^4 \Theta_{c_3 c_4}^3 : &= -\mathcal{U}_1^\dagger \mathcal{U}_2 \mathcal{V}_3^\dagger \mathcal{V}_4 B_1^\dagger B_2 D_4^\dagger D_3 + \mathcal{U}_1^\dagger \mathcal{V}_2 \mathcal{V}_3^\dagger \mathcal{U}_4 B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4 + \\ &+ \mathcal{V}_1^\dagger \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_3^\dagger \mathcal{V}_4 B_3^\dagger D_4^\dagger D_1 B_2 - \mathcal{V}_1^\dagger \mathcal{V}_2 \mathcal{U}_3^\dagger \mathcal{U}_4 D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

onde usamos uma notação simplificada, com os índices numéricos substituindo a helicidade, a cor e o momento da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_1, c_1, \mathbf{p}) \longrightarrow 1, \\ (\lambda_2, c_2, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \longrightarrow 2, \\ (\lambda_3, c_3, \mathbf{k}) \longrightarrow 3, \\ (\lambda_4, c_4, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \longrightarrow 4. \end{array} \right.$$

Para estas combinações de operadores, obtemos as integrais

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger B_2 D_4^\dagger D_3, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{w}) \{D_3, D_\beta^\dagger\} \{B_\delta, B_1^\dagger\} \{D_\gamma, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\}, \quad (\text{D.6})$$

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{w}) \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\delta, B_1^\dagger\} \{D_\gamma, D_2^\dagger\} \{D_3, D_\beta^\dagger\}, \quad (\text{D.7})$$

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_3^\dagger D_4^\dagger D_1 B_2, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{w}) \{D_1, D_\beta^\dagger\} \{B_\delta, B_3^\dagger\} \{D_\gamma, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\}, \quad (\text{D.8})$$

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{mJP}(\mathbf{w}) \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\delta, B_3^\dagger\} \{D_\gamma, D_2^\dagger\} \{D_1, D_\beta^\dagger\}. \quad (\text{D.9})$$

onde usamos

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | = \sum_{\gamma\delta g} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{mJP}(\mathbf{w}) B_\delta D_\gamma \quad (\text{D.10})$$

com a notação $(\gamma, g, \mathbf{k}) \longrightarrow \gamma e (\delta, g, \mathbf{k}) \longrightarrow \delta$, onde g é o índice de cor. Substituindo estas quatro expressões em $\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4c}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle$, encontramos, após algumas manipulações matemáticas,

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4c}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{mJP}(\mathbf{q}) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \mathcal{U}_\delta^\dagger(\mathbf{q}) \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{k}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_\gamma(-\mathbf{q}), \quad (\text{D.11})$$

onde usamos o fato de que as matrizes de Gell-Mann possuem traço nulo, e o fator numérico vem, mais uma vez, das combinações das matrizes de cor. Calculando o produto de espinores em (D.11), encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{k}) \mathcal{V}_\gamma(-\mathbf{q}) \mathcal{U}_\delta^\dagger(\mathbf{q}) \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4} \{ c_k c_q [\delta_{\delta\alpha} g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) + \delta_{\beta\gamma} g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}})] + (1 + s_k)(1 + s_q) \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\alpha} + \\ &\quad + (1 - s_k)(1 - s_q) g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) \} \equiv h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k), \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

onde definimos a quantidade $g_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{r}}) \equiv \chi_\alpha^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \chi_\beta$, e a expressão se reduz a

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4c}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{mJP}(\mathbf{q}) V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k). \quad (\text{D.13})$$

Na contribuição transversa H_{4T} , os operadores estão contidos na soma

$$\sum_{l,m=1}^4 : \Xi_{c_1 c_2 i}^l(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^m(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) :,$$

com os vértices Ξ definidos em (C.60) a (C.63). Como no caso anterior, após tomarmos $\langle \Psi_{\text{TDA}}^{mJP} | [H_{4T}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle$, apenas quatro termos sobrevivem,

$$\begin{aligned} &: \Xi_{c_1 c_2 i}^1(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^2(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Xi_{c_1 c_2 i}^2(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Xi_{c_1 c_2 i}^3(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^4(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ &+ \Xi_{c_1 c_2 i}^4(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Xi_{c_3 c_4 j}^3(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) := -\mathcal{U}_1^\dagger \alpha_i \mathcal{U}_2 \mathcal{V}_3^\dagger \alpha_j \mathcal{V}_4 B_1^\dagger B_2 D_4^\dagger D_3 + \mathcal{U}_1^\dagger \alpha_i \mathcal{V}_2 \mathcal{V}_3^\dagger \alpha_j \mathcal{U}_4 B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4 + \\ &+ \mathcal{V}_1^\dagger \alpha_i \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_3^\dagger \alpha_j \mathcal{V}_4 B_3^\dagger D_4^\dagger D_1 B_2 - \mathcal{V}_1^\dagger \alpha_i \mathcal{V}_2 \mathcal{U}_3^\dagger \alpha_j \mathcal{U}_4 D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Para estes termos, obtemos

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger B_2^\dagger D_4^\dagger D_3, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\delta\gamma g} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{w}) \{D_3, D_\beta^\dagger\} \{B_\delta, B_1^\dagger\} \{D_\gamma, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\}, \quad (\text{D.15})$$

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_1^\dagger D_2^\dagger D_3 B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\delta\gamma g} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{w}) \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\delta, B_1^\dagger\} \{D_\gamma, D_2^\dagger\} \{D_3, D_\beta^\dagger\}, \quad (\text{D.16})$$

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [B_3^\dagger D_4^\dagger B_2 D_1, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\delta\gamma g} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{w}) \{D_1, D_\beta^\dagger\} \{B_\delta, B_3^\dagger\} \{D_\gamma, D_4^\dagger\} \{B_2, B_\alpha^\dagger\}, \quad (\text{D.17})$$

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [D_2^\dagger D_1 B_3^\dagger B_4, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle = \sum_{\delta\gamma g} \int \frac{d^3 w}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{w}) \{B_4, B_\alpha^\dagger\} \{B_\delta, B_3^\dagger\} \{D_\gamma, D_2^\dagger\} \{D_1, D_\beta^\dagger\}, \quad (\text{D.18})$$

que levam a

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{4T}, B_\alpha^\dagger D_\beta^\dagger] | \Omega \rangle &= -\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{q}) U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) D_{ij}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \times \\ &\times \mathcal{U}_\delta^\dagger(\mathbf{q}) \alpha_i \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{k}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_\gamma(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Nos resta, portanto, calcular o produto de espinores $\mathcal{U}_\delta^\dagger(\mathbf{q}) \alpha_i \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{k}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_\gamma(-\mathbf{q})$, que vale

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\delta^\dagger(\mathbf{q}) \alpha_i \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{k}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_\gamma(-\mathbf{q}) &= -\frac{1}{4} \left[(1+s_q)(1-s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_j \chi_\gamma + \right. \\ &+ c_k c_q \left(\chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma + \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_j \chi_\gamma \right) + \\ &\left. + (1-s_q)(1+s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_j \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Multiplicando este produto de espinores pela soma de polarizações, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\delta^\dagger(\mathbf{q}) \alpha_i \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{k}) \mathcal{V}_\beta^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha_j \mathcal{V}_\gamma(-\mathbf{q}) \left(\delta_{ij} - \frac{(k_i - q_i)(k_j - q_j)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \right) &= -\frac{1}{4} \left[(1+s_q)(1-s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \right. \\ &+ c_k c_q \left(\chi_\delta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma + \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{k}} \sigma_i \chi_\gamma \right) + \\ &+ (1-s_q)(1+s_k) \chi_\delta^\dagger \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \sigma_i \chi_\alpha \chi_\beta^\dagger \sigma_i \sigma \cdot \hat{\mathbf{q}} \chi_\gamma \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{4(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \left\{ (1+s_q)(1-s_k) (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_k c_q \left[(g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) + \right. \\
& + (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) q) \left. + \right. \\
& \left. + (1 - s_q) (1 + s_k) (g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}}) k - g_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) (g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) k - g_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) q) \right] \equiv t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k),
\end{aligned} \tag{D.21}$$

e portanto, substituindo na expressão inicial, temos

$$\langle \Psi_{\text{TDA}}^{nJP} | [H_{4T}, B_{\alpha}^{\dagger} D_{\beta}^{\dagger}] | \Omega \rangle = -\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{q}) t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|). \tag{D.22}$$

Combinando todos os termos de H_{eff} , obtemos enfim a equação TDA,

$$\frac{4}{3} \sum_{\gamma\delta} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Psi_{\delta\gamma}^{nJP}(\mathbf{q}) \left[V(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) h_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) - t_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q, k) U(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \right] = (E_{nJP} - E_0 - 2\varepsilon_k) \Psi_{\alpha\beta}^{nJP}.$$