



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**O Campo de Duffin-Kemmer-Petiau Galileano:
Quantização Canônica e Estrutura Algébrica**

Flávio Jamil Souza Ferreira

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**O Campo de Duffin-Kemmer-Petiau Galileano:
Quantização Canônica e Estrutura Algébrica**

Flávio Jamil Souza Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Esdras Santana dos Santos

Co-Orientador: Prof. Dr. Luciano Melo Abreu

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal da Bahia para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador - 2009

Resumo

We studied the algebraic structure of the Galilean Duffin-Kemmer-Petiau matrices and performed the reduction of its algebra to obtain a sum of irreducible subalgebras associated to spin-0 and spin-1 particles. In this approach the projection operators, which provides the scalar and vector sectors of the theory, arise as independent elements from the basis algebra. We applied these operators to show the equivalence between conserved currents in the second order and DKP formalism. As a second step we quantized the Galilean Duffin-Kemmer-Petiau scalar field using the quantization method of fields with constraint, the Dirac method. Finally, we present an approach for the generating functional for Green's functions.

Prof. Dr. Esdras Santana dos Santos
Dissertation Committee Chair

Resumo

Estudamos a estrutura algébrica das matrizes Duffin-Kemmer-Petiau Galileana e reduzimos sua álgebra para uma soma direta de subálgebras irredutíveis para partículas de spin-0 e spin-1. Nesta abordagem os operadores de projeção, responsáveis pela seleção dos setores escalar e vetorial da teoria, ocorrem como elementos independentes da base de cada subálgebra. Aplicamos esses operadores para demonstrar a equivalência entre as correntes conservadas nos formalismos de segunda ordem e o DKP. Em um segundo momento o campo Duffin-Kemmer-Petiau Galileano, para partículas de spin - 0, foi quantizado de acordo com o método de quantização canônica de sistemas vinculados, método de Dirac. Finalmente, apresentamos uma abordagem para o funcional gerador das funções de Green.

Agradecimentos

Primeiramente agradecer à Deus pelo dom da vida. A minha família, em especial Ivana e Morgana mulheres especiais.

De forma especial gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Esdras Santana dos Santos, pela orientação e liberdade científica que proporcionou para expor minhas idéias, e ao Prof. Dr. Luciano Melo de Abreu pelas discussões acerca do trabalho.

Ao Instituto de Física da UFBA pela calorosa acolhida, professores, alunos e funcionários, meus sinceros agradecimentos.

Pela ajuda financeira: CAPES e CNPQ.

"A Vulgar Mechanick can practice what he has been taught or seen done, but if he is in an error he knows not how to find it out and correct it, and if you put him out of his road, he is at a stand; Whereas he that is able to reason nimbly and judiciously about figure, force and motion, is never at rest till he gets over every rub."

Isaac Newton to Nathaniel Haws 25 May 1694

"A ti *Sage of Diviners*"

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Covariância Galileana e o Campo DKP	6
2.1	Formulação Galilei Covariante	6
2.1.1	O Eletromagnetismo Galileano	10
2.1.2	O Campo de Pauli-Dirac	12
2.1.3	O Campo de Proca Galileano	14
2.2	O Campo DKP Covariante de Galilei	14
3	Álgebras e Subálgebras.	20
3.1	Preliminares Algébricas.	20
3.2	Subálgebra Spin-0: P -álgebra.	23
3.2.1	Aplicações Físicas.	26
3.3	Subálgebra Spin-1: R -álgebra.	31
3.3.1	Aplicações Físicas.	34
4	O Método de Quantização Canônica de Sistemas Vinculados.	36
4.1	A Formulação Hamiltoniana para Sistemas Singulares.	37
4.2	Descrição de Vínculos de Primeira e Segunda Classe.	40
4.3	Quantização Canônica e a Mecânica Quântica Consistente.	45
5	Quantização Canônica do Campo DKP Covariante de Galilei.	52
5.1	Formulação Hamiltoniana.	52
5.2	Quantização.	60
5.3	Funcional Gerador para as Funções de Green	62
6	Conclusão	67
	Bibliografia	98

Capítulo 1

Introdução

Uma equação de onda que descreve o comportamento de um campo Ψ associado a uma partícula livre relativística de massa m é dada por

$$(\square - m^2)\Psi(x) = 0, \quad (1.1)$$

onde $\square = \nabla^2 - \partial_t^2$, com $c = 1$ e $\hbar = 1$. Esta expressão de segunda ordem nas derivadas, conhecida como equação de onda de Klein-Gordon-Fock [1], foi inicialmente usada por Schrödinger para investigar o espectro do átomo de hidrogênio obtendo resultados corretos para este espectro na ordem α^2 da constante de estrutura fina, porém uma grande discrepância para os efeitos de ordem α^4 que foi atribuída ao fato de não ter sido incluído na equação o spin do elétron. Neste contexto e buscando contruir uma descrição onde houvesse a possibilidade de incluir outros graus de liberdade da partícula, como spin do elétron, Dirac [2] propôs a equação de onda invariante pelas transformações de Lorentz e linear nas derivadas, dada por

$$(\alpha^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

onde o campo $\Psi(x)$ tem 4 componentes e os fatores α^μ são tomados como matrizes 4×4 que obedecem a álgebra

$$\alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo quadridimensional de Minkowski. A expressão (1.2), cujas soluções também devem satisfazer (1.1), passou a ser conhecida como a equação de Dirac para partículas relativísticas de massa m e spin $1/2$. Deu-se aqui o início do estudo das equações linearizadas de onda.

Com o sucesso da equação de Dirac dada por (1.2), surge o interesse em propor também, para outras classes de partículas, equações de onda linearizadas nas derivadas que pudessem ser usadas como alternativa à equação de onda de Klein-Gordon-Fock. Utilizando a notação spinorial, Fierz e Pauli [3] formularam equações lineares para partículas relativísticas de spin arbitrário (inteiro e semi-inteiro) tomando como princípio guia a hipótese de que cada componente do campo deveria satisfazer à uma equação de segunda ordem. Nesta formulação, as componentes do campo não são todas independentes pois obedecem a relações subsidiárias. Ainda na mesma direção, Belinfante [4] define as componentes spinoriais do campo de spin $3/2$ e calcula seu momento magnético intrínseco. Esta equação foi reescrita por Gupta [5] na forma (1.2) explicitando uma representação matricial 16×16 . Entretanto o uso de condições subsidiárias mostrou-se particularmente uma dificuldade desta formulação quando interações são introduzidas.

Uma outra investigação foi feita por de Broglie [6] que buscou combinar dois léptons para obter um fóton massivo. As equações de onda obtidas foram dadas em termos de matrizes 16×16 resultantes do produto de duas diferentes representações das matrizes presentes na equação de Dirac. Entretanto, Petiau [7] efetuou algumas modificações na álgebra, obtendo matrizes também 16×16 que satisfazem a álgebra

$$\alpha^\mu \alpha^\nu \alpha^\lambda + \alpha^\lambda \alpha^\nu \alpha^\mu = \alpha^\mu g^{\nu\lambda} + \alpha^\lambda g^{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

cujas três representações irredutíveis são de dimensões 1, 5 e 10 [8]. Inspirados nas equações de A. Proca [9] para campos vetoriais massivos e pela possibilidade de expressá-las numa equação linearizada, Duffin [10] e Kemmer [11] propuseram uma equação de onda da forma (1.2) onde as matrizes α^μ são 16×16 e satisfazem a ál-

gebra (1.4). As representações irredutíveis destas matrizes são de dimensões 5 e 10 associadas aos campos escalar e vetorial respectivamente, além de uma trivial unidimensional sem significado físico. Esta equação passou a ser conhecida como a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP).

Investigando equações de onda, lineares nas derivadas, que pudessem ser usadas para descrever partículas de spin arbitrário, inteiro ou semi-inteiro, Bhabha [12] propôs equações de onda do tipo (1.2), livre de interações, da qual todas as propriedades das partículas devem ser obtidas sem o uso de condições subsidiárias. Neste contexto cada componente da função de onda não deve satisfazer necessariamente a uma equação de segunda ordem porém a uma equação construída a partir de um produto de equações de segunda ordem. Esta circunstância pode ser entendida interpretando-se os estados da partícula com spin maior que 1 como estados cujas massas de repouso são múltiplos do valor mais baixo da massa de repouso. Esta formulação apresenta resultados similares aos da teoria DKP para partículas de spin menor ou igual a 1. Outras contribuições ao estudo da teoria de equações lineares podem ser encontradas na revisão histórica feita por Krajcik e Nieto [13].

Investigando a equivalência entre as teorias DKP e de segunda ordem, alguns resultados mais recentes foram adicionados como a prova de equivalência entre os elementos físicos da matriz S para o campo de partículas escalares interagindo com os campos externos eletromagnético, Yang-Mill e gravitacional [14]. A teoria DKP também mostrou-se equivalente à de segunda ordem quando na presença do acoplamento mínimo eletromagnético onde também foram analisados os termos anômalos que surgem na Hamiltoniana da equação de onda acoplada [15]. A teoria DKP relativística também têm sido aplicada com sucesso em mecânica quântica no estudo de osciladores de bósons escalares e vetoriais [16], de osciladores em espaços não comutativos [17], por Gribov na QCD (em largas e custas distâncias) [18], no estudo de Hamiltonianas covariantes [19], à condensação de Bose-Einstein [20], ao estudo do campo eletromagnético a temperatura finita [21], espaço-tempo com torsão [22], etc.

No ano de 1989 Takahashi e outros [23] empreenderam o desenvolvimento de uma estrutura tensorial associada às simetrias Galileanas, com o qual foi possível formular uma teoria de campo não-relativística covariante, tendo como grupo cinemático o grupo de Galilei estendido, formado pelas transformações num espaço-tempo 5-dimensional com métrica e produto escalar definidos e onde a equação de Schrödinger é escrita na sua forma covariante. Este formalismo, onde a equação de Schrödinger assume uma forma similar à de Klein-Gordon-Fock, tornou possível o surgimento da versão não relativística da equação DKP [24, 25]. Assim, fazendo uso das representações irredutíveis da álgebra de Lie do grupo de Sitter em $4 + 1$ dimensões, foram obtidas as representações explícitas para as matrizes DKP e aplicadas a sistemas de osciladores de férmions, bósons escalares e vetoriais. As correspondentes equações de Bhabha foram construídas descrevendo partículas não-relativísticas de spin 0, 1 e $1/2$. Em [26] o operador de Liouville e a equação de Liouville-Von-Neumann foram construídos para a partícula livre e em interação com um campo externo.

Do ponto de vista matemático a álgebra das matrizes DKP é redutível, isso significa dizer que é possível separar a álgebra numa soma direta de subespaços invariantes para spin-0 e spin-1. Para realizar essa divisão é conveniente introduzir operadores de projeção, os quais serão responsáveis pela seleção do espaço de spin no qual queiramos trabalhar [27, 28]. Neste sentido, buscando selecionar o setor escalar e vetorial da teoria foi construída em [29] uma formulação do campo DKP covariante de Galilei via operadores de projeção. Em particular, foi discutida a presença de um termo anômalo quando a interação eletromagnética é introduzida.

A despeito da formulação e das aplicações acima descritos diversos problemas ainda permanecem em aberto. Um deles é a investigação da condensação de Bose-Einstein via formulação DKP. Por outro lado, não foi construída ainda a formulação e aplicação da teoria DKP para o eletromagnetismo Galileano. A formulação DKP a temperatura finita se apresenta como uma possível linha de investigação. O estudo das subálgebras irredutíveis DKP e suas conexões com o spin de cada setor do campo se

faz necessário e será investigado ao longo deste trabalho. A formulação Hamiltoniana desta teoria, levando em conta a sua estrutura de vínculos e a posterior quantização ainda não foram contemplados neste formalismo e também se constituem num dos objetivos deste trabalho.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No próximo capítulo apresentaremos a estrutura tensorial da covariância Galileana, assim como a formulação do campo DKP covariante de Galilei. A redução da álgebra DKP a duas subálgebras irredutíveis (P - álgebra e R - álgebra) atuando em seu respectivo espaço de spin será construída no terceiro capítulo. No capítulo 4 apresentamos o método de quantização canônica de sistemas vinculados e a formulação da integral de trajetória para vínculos de segunda-classe. De posse das ferramentas necessárias, realizamos no capítulo cinco a quantização canônica do campo DKP Galileano e a formulação do funcional gerador para as funções de Green. Conclusões e perspectivas são apresentadas no capítulo seis.

Capítulo 2

Covariância Galileana e o Campo

DKP

Neste capítulo apresentamos algumas motivações para a construção do espaço-tempo 5-dimensional associado à formulação Galilei covariante da física não relativística [30, 31, 32]. Neste contexto, via extensão central do grupo de Galilei revisita-se a análise tensorial bem como as equações covariantes de movimento para os campos fundamentais Galileanos [33]. Em seguida, uma teoria de campos via equações de primeira ordem do tipo Duffin-Kemmer-Petiau (DKP), covariante de Galilei, é discutida explicitando sua Lagrangiana, equações de movimento bem como as soluções associadas. Finalmente, apresentamos uma breve discussão sobre o surgimento de um termo anômalo devido à interação do campo DKP com o campo eletromagnético Galileano.

2.1 Formulação Galilei Covariante

O grupo cinemático associado às simetrias presentes em sistemas não relativísticos, chamado de grupo de Galilei, é definido pelo conjunto de transformações espaço-

temporais entre referenciais

$$x^i = R_j^i x^j + v^i t + a^i, \quad t' = t + b, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.1)$$

onde R representa a matriz de rotação no espaço Euclidiano tridimensional, \mathbf{v} a velocidade relativa entre os referenciais inerciais envolvidos, a^i e b sendo os parâmetros associados às translações espaciais e temporais respectivamente. A estrutura das transformações acima apresenta algumas características que as tornam mais intrincadas em relação ao seu análogo relativístico. A primeira delas é que (2.1) deixa invariantes a distância e o produto escalar usuais Euclidianos que não apresentam dependência temporal. Por outro lado, quando aplicamos (2.1) à Lagrangiana $L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$ de uma partícula livre não-relativística obtemos

$$L \rightarrow L' = L + \frac{df}{dt}, \quad (2.2)$$

onde f é uma função dada por

$$f = m(R_j^i x^j)v^i + \frac{1}{2}m(v^i)^2 t + \text{const.} \quad (2.3)$$

Como pode ser percebido, a Lagrangiana L não é completamente invariante mediante as transformações não-homogêneas de Galilei (2.1). Por outro lado, quando no contexto quântico não relativístico, a função de onda $\Psi(\mathbf{x}, t)$ de Schrödinger não se transforma como um escalar verdadeiro mediante (2.1), isto é $\Psi'(\mathbf{x}', t') = e^{if}\Psi(\mathbf{x}, t)$ [34, 35, 36]. Finalmente, mostrou-se em [37, 38] que não existe uma métrica quadridimensional invariante sobre as transformações de Galilei (2.1).

Com o objetivo de solucionar as questões acima colocadas introduz-se nas transformações (2.1) um grau de liberdade extra s que se transforma por:

$$s' = s + (R_j^i x^j)v^i + \frac{1}{2}(v^i)^2 t + \text{const.} \quad (2.4)$$

Assim, o formalismo covariante de Galilei tem início com um espaço estendido $\mathcal{G}_{4,1}$, o qual realmente é um espaço de Minkowski em $4 + 1$ dimensões. Numa linguagem de

teoria de grupos, simplesmente exploramos o fato que o grupo de Galilei (centralmente estendido) em um espaço-tempo de dimensão $3 + 1$ é um subgrupo do grupo de Poincaré em $4 + 1$ dimensões [39]. Neste sentido, a partir de (2.1) e (2.4) define-se o vetor x^μ neste espaço-tempo 5-dimensional Galileano da forma

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = (x, y, z, t, s) \quad (2.5)$$

que se transforma por:

$$x^i = R_j^i x^j + v^i x^4 + a^i, \quad x^4 = x^4 + a^4, \quad x^5 = x^5 - v^i R_j^i x^j + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 x^4 + a^5 \quad (2.6)$$

Estas transformações, sem as translações, podem ser expressas na forma tensorial como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.7)$$

onde,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 & -v^1 & 0 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 & -v^2 & 0 \\ R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 & -v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_i R^i{}_1 & -v_i R^i{}_2 & -v_i R^i{}_3 & \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Esta transformação deixa invariante o seguinte produto escalar

$$x^\mu y_\mu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - x^4 y^5 - x^5 y^4, \quad \mu = 1, \dots, 5 \quad (2.9)$$

e como consequência a distância $(x - y)_\mu (x - y)^\mu = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$. Assim, podemos definir a *métrica Galileana* como sendo:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Uma representação apropriada para o penta-momento no espaço $\mathcal{G}_{4,1}$ pode ser dada por:

$$p_\mu = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (p_1, p_2, p_3, -E, -m). \quad (2.11)$$

Ou seja, as variáveis canônicas conjugadas proporcionam uma interpretação física transparente da dimensão extra do momento, isto é $p_5 = -m$. Desta forma podemos definir os colchetes de Poisson no espaço-tempo não-relativístico como sendo

$$\{x_\mu, p_\nu\} = g_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico dado por (2.10), a demonstração da expressão (2.12) pode ser encontrada em [40]. A expressão (2.12) demonstra que a coordenada s é conjugada a massa m da mesma maneira que t é conjugado a energia E e o momento p^i à coordenada x_j .

As transformações (2.6) quando aplicadas às derivadas ∂_μ nos dão

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \partial_\nu \quad (2.13)$$

explicitamente

$$\begin{aligned} \partial'_i &= \partial_i + v_i \partial_5 \\ \partial'_4 &= \partial_4 + v^i \partial_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \partial_5 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\partial'_5 = \partial_5. \quad (2.15)$$

Destas transformações obtemos naturalmente os invariantes $\partial_\mu \partial^\mu$ e ∂_5 . Destes invariantes podemos escrever as equações de auto-valor:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi = k^2 \Psi, \quad (2.16)$$

$$\partial_5 \Psi = -im \Psi, \quad (2.17)$$

onde k e m são constantes associadas à massa da partícula. Ou seja, a dependência da função $\Psi(x)$ com relação a x^5 pode ser dada por

$$\Psi(x) = e^{-imx^5} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.18)$$

A coordenada extra pode ser relacionada com a quase invariância da Lagrangiana para uma partícula livre sob transformações de Galilei, ou a fase da função de onda

que irá garantir a invariância Galileana da equação de Schrödinger [23, 26]. Por outro lado, se usamos a realização para o penta-momento p_μ

$$p_\mu \longrightarrow -i\partial_\mu = (-i\nabla, -i\partial_4, -i\partial_5) \quad (2.19)$$

podemos obter a seguinte relação de dispersão válida no cenário não-relativístico da covariância Galileana

$$p_\mu p^\mu = -k^2 \quad \rightarrow \quad E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k^2}{2m}. \quad (2.20)$$

A constante $\frac{k^2}{2m}$ adicionada ao termo cinético usual não representa qualquer modificação na medida da energia do sistema tendo em vista que a grandeza medida no laboratório é a diferença de energia.

Com a construção do espaço-tempo Galileano mostrado acima, pode-se construir formulação Lagrangiana Galilei covariante e assim a partir das Lagrangianas associadas a cada campo obter, usando o princípio variacional, as equações de movimento para os campos fundamentais não relativísticos conhecidos, a saber: o campo escalar complexo de Schrödinger; o campo de Pauli-Dirac para partículas de spin 1/2, o limite do campo de Proca e os limites elétrico e magnético do campo de Maxwell. Neste sentido, fazendo uso de (2.18) e substituindo a equação (2.17) em (2.16) pode-se escrever

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{k^2}{2m}\right)\Psi(x). \quad (2.21)$$

que é obtida a partir da Lagrangiana livre

$$L_{Escalar} = -\frac{1}{2m} (\partial_\mu \Psi^* \partial^\mu \Psi - k^2 |\Psi|^2). \quad (2.22)$$

A equação (2.21), a menos do fator constante $\frac{k^2}{2m}$, representa a equação de Schrödinger para um campo escalar complexo livre Ψ .

2.1.1 O Eletromagnetismo Galileano

Um estudo detalhado dos limites do campo de Maxwell foi apresentado por Lévy-Leblond e Le Bellac em [32] onde se mostra que a invariância Galileana não é obtida

apenas pelo limite não relativístico usual para baixas velocidades. Em [34] fica evidente que este simples limite, apresenta um problema quando analisado do ponto de vista da teoria de grupos, pois os campos elétrico e magnético não apresentam uma transformação que satisfaz a lei de composição de grupos, ou seja, duas transformações sucessivas destes campos não conduz a uma transformações do mesmo tipo. Assim, buscando explicar este problema, Lévy-Leblond e Le Bellac propuseram dois limites para o campo eletromagnético usual: o limite elétrico e o limite magnético. O limite elétrico corresponde às situações onde o módulo do campo elétrico é muito maior que o módulo do magnético multiplicado pela velocidade da luz. As equações de movimentam que são obtidas são dadas por

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{E}_e &= \rho_e, \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E}_e, \\
\nabla \times \mathbf{E}_e &= 0,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

onde as constantes fundamentais foram tomadas iguais a unidade e \mathbf{B} e \mathbf{E}_e são os campos magnético e elétrico deste limite. O limite magnético é obtido na situação inversa, onde o módulo do magnético multiplicado pela velocidade da luz é muito maior que o módulo do campo elétrico. As equações obtidas são

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{E}_m &= \rho_m, \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J}, \\
\nabla \times \mathbf{E}_m &= -\partial_t \mathbf{B},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde \mathbf{E}_m é o campo elétrico deste limite. Neste contexto, utilizando a construção 5-dimensional mostrada anteriormente, propõe-se em [33] a densidade Lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu, \tag{2.25}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, sendo que A_μ e J_μ representam respectivamente o potencial a corrente penta-dimensionais definidos como:

$$A_\mu = (\mathbf{A}, -\phi_m, -\phi_e), \quad (2.26)$$

$$J_\mu = (\mathbf{J}, -\rho_m, -\rho_e) \quad (2.27)$$

sendo \mathbf{A} e \mathbf{J} os trivetores potencial e densidade de corrente, ϕ_m , ϕ_e e ρ_m , ρ_e os potenciais escalares e densidade de cargas nos respectivos limites magnético e elétrico. Sendo que, esses potenciais escalares não podem coexistir simultaneamente em situações físicas reais no formalismo covariante de Galilei. Por exemplo, se quisermos analisar este modelo no limite magnético, então devemos considerar ϕ_e como um campo auxiliar escolhido como sendo igual a zero nas equações de movimento. As equações de movimento obtidas a partir da Lagrangiana acima são do tipo

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -J^\nu \quad \rightarrow \quad \nabla^2 A^\nu = -J^\nu, \quad (2.28)$$

onde têm-se usado a condição $m = 0$.

2.1.2 O Campo de Pauli-Dirac

Partículas não relativísticas de spin 1/2 são descritas pela equação de Pauli-Dirac Galilei covariante [31], expressa como:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + k) \Psi(x) = 0 \quad (2.29)$$

e obtida, a partir da densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + k \bar{\Psi} \Psi \quad (2.30)$$

onde $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta$, $\eta = \frac{i}{\sqrt{2}} (\gamma^4 + \gamma^5)$, e $\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix}$ com as funções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ possuindo a forma dada por (2.18). As matrizes γ^μ são 4 - dimensional e obedecem a seguinte álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

tendo uma representação particular dada por:

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Multiplicando a equação (2.29) a esquerda pelo operador $(\gamma^\nu \partial_\nu - k)$ e usando a álgebra acima, obtemos:

$$(\partial_\mu \partial^\mu - k^2) \Psi = 0.$$

Esta expressão evidencia que cada componente do campo de Pauli-Dirac livre, obedece a equação de onda não relativística de Schrödinger. Utilizando outra representação, Lévy-Leblond [30] mostrou que quando um campo de gauge é introduzido nessas equações, podemos obter a equação de Pauli-Dirac de uma partícula não-relativística sob a ação de um campo eletromagnético, demonstrando que a razão giromagnética, $g = 2$ para partículas de spin $1/2$, pode ser também interpretada como uma consequência da relatividade Galileana e não exclusivamente da relatividade especial. Tal resultado também pode ser reproduzido com a formulação mostrada acima [31]. O spin do campo de Pauli-Dirac pode ser evidenciado também fazendo uso do terceiro invariante da teoria, aquele associado ao tensor de Pauli-Lubanski Galilei covariante dado por:

$$W_{5\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{5\mu\rho\alpha\beta} p^\rho M^{\alpha\beta}, \quad (2.33)$$

onde $M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu}$ and $\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. O invariante citado é obtido pelo produto

$$W_{5\mu} W^{5\mu} = W_{5i} W^{5i} = m^2 \frac{3}{4} = m^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right). \quad (2.34)$$

Esta contração mostra-nos que a equação de Pauli-Dirac, Galilei covariante, descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$. Aplicações deste campo têm sido feitas a exemplo do acoplamento não minimal associado ao oscilador de férmions [16].

2.1.3 O Campo de Proca Galileano

O limite não relativístico do campo campo vetorial massivo, o campo de Proca, pode ser obtido de forma análoga ao eletromagnetismo Galileano descrito acima via a Lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{k^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad (2.35)$$

onde naturalmente obtém-se a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$. Desta Lagrangiana obtemos as equações de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + k^2 A^\nu = 0, \quad \rightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + k^2) A^\nu = 0, \quad (2.36)$$

que é a equação de Schrödinger para o campo A^μ . Este campo também admite os dois limites, elétrico e magnético citados anteriormente.

A formulação Lagrangiana deste campo, com suas grandezas conservadas e uma proposta de construção de uma eletrodinâmica quântica não relativística podem ser encontradas em [34].

2.2 O Campo DKP Covariante de Galilei

A densidade Lagrangiana que descreve o campo DKP Galileano [29, 33] pode ser expressa como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\beta^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\Psi})\beta^\mu\Psi + k\bar{\Psi}\Psi \quad (2.37)$$

cujas equações de movimento associadas são dadas por

$$(\beta^\mu\partial_\mu + k)\Psi = 0, \quad (\partial_\mu\bar{\Psi})\beta^\mu - \bar{\Psi}k = 0 \quad (2.38)$$

sendo $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\eta$ e $\eta = (\beta^4 + \beta^5)^2 + \mathbf{1}$. As cinco matrizes β satisfazem a seguinte relação algébrica fundamental:

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho + \beta^\rho\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\rho + g^{\rho\nu}\beta^\mu \quad (2.39)$$

Conforme as transformações Galileanas (2.7) os campos Ψ , $\bar{\Psi}$ e as matrizes β_μ devem se transformar de acordo com

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu & (2.40) \\ \Psi'(x') &= U(\Lambda)\Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x') &= \bar{\Psi}(x)U^{-1}(\Lambda) \\ U^{-1}(\Lambda)\beta_\mu U(\Lambda) &= \Lambda_\mu{}^\nu \beta_\nu, \end{aligned}$$

onde para o caso de transformações infinitesimais $\Lambda_\mu{}^\nu = g^{\mu\nu} + w^{\mu\nu}$ e $U = 1 + \frac{1}{2}w_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ com $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$ e $S^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu]$. As equações DKP acima descrevem campos não relativísticos escalares ou vetoriais. Neste contexto, a equação DKP apresenta a mesma forma para descrever dois campos distintos representados pelo campo genérico Ψ . Portanto, a estes dois campos deve-se associar os setores escalar e vetorial de Ψ que serão descritos por diferentes representações para as matrizes β^μ . Neste sentido conclui-se que as representações (ou suas dimensões) obtidas para as matrizes β^μ dependem do spin do campo em estudo. Assim, torna-se necessária a construção de operadores de projeção apropriados que realizem a seleção do setor do campo Ψ que se deseja estudar [29]. Uma representação explícita 15×15 para o setor vetorial da teoria DKP não relativística é mostrada no Apêndice A, e a representação para o

setor escalar é dada pelas matrizes 6×6 abaixo:

$$\bullet \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\bullet \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\bullet \beta_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

A penta-corrente conservada possui a forma:

$$j^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi \quad (2.44)$$

e sua equação da continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_k (\bar{\Psi} \beta^k \Psi) + \partial_4 (\bar{\Psi} \beta^4 \Psi) + \partial_5 (\bar{\Psi} \beta^5 \Psi) = 0, \quad (2.45)$$

onde $j^k \equiv (\bar{\Psi} \beta^k \Psi)$, $\rho \equiv (\bar{\Psi} \beta^4 \Psi)$ e $j^5 \equiv (\bar{\Psi} \beta^5 \Psi)$.

Vamos considerar agora, soluções para o setor escalar da equação DKP para uma

partícula livre. Reescrevendo a primeira das equações (2.38) com o penta-momento:

$$(\beta^\mu p_\mu + k)\Psi(x) = 0 \quad (2.46)$$

sendo $p_\mu = -i\partial_\mu$ definido como (2.11) e o fator $-i$ tem sido absorvido em k , portanto obtemos

$$(\beta^i p_i - \beta^4 E - m\beta^5 + k)\Psi(x) = 0 \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

para estados estacionários: $E\Psi(x) = i\partial_4\Psi(x)$. Usando a representação explícita das matrizes β e a seguinte forma para $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \\ \psi_5(x) \\ \psi_6(x) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

temos que

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & -m \\ p_x & p_y & p_z & m & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \\ \psi_5(x) \\ \psi_6(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E\psi_6(x) \\ 0 \\ -E\psi_5(x) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Resolvendo (2.50) para $\psi_6(x)$, e absorvendo a constante k na energia através da redefinição:

$$E \longrightarrow E + \frac{k^2}{2m} \quad (2.51)$$

obtemos a equação de Schrödinger para o campo escalar $\psi_6(x)$

$$E\psi_6(x) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\psi_6(x) \quad (2.52)$$

sendo

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \\ E \\ m \\ k \end{bmatrix} \frac{\psi_6(x)}{k} \quad (2.53)$$

a solução não normalizada para a equação DKP de uma partícula livre covariante de Galilei. No Capítulo 4 as soluções (2.53) serão importantes para a formulação da teoria do operador de campo covariante de Galilei.

Seja o campo DKP interagindo com um campo eletromagnético definido no formalismo covariante de Galilei. O acoplamento minimal do campo DKP com o campo eletromagnético Galileano, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, gera o seguinte termo de interação a ser somado na densidade Lagrangiana DKP (2.37)

$$\mathcal{L}_I = eA_\mu \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi. \quad (2.54)$$

Note que esta é a forma adequada do campo DKP, no sentido de que fornece transformações de gauge locais de forma consistente:

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = e^{ie\Lambda(x)} \Psi. \quad (2.55)$$

Então, assim como no caso relativístico [15], sob esta transformação local de gauge a densidade Lagrangiana DKP se torna um invariante de gauge. Levando em conta o termo de interação dado pela equação (2.54), na densidade Lagrangiana (2.37) as equações de movimento possuem a forma:

$$(\beta^\mu D_\mu + k)\Psi = 0, \quad (D_\mu \bar{\Psi})\beta^\mu - \bar{\Psi}k = 0. \quad (2.56)$$

Vamos discutir agora um suposto termo anômalo sem significado físico, o qual surge na teoria quando partimos da equação DKP minimamente acoplada. Ao contrairmos à esquerda a expressão (2.56) com o operador $D_\alpha \beta^\alpha \beta^\nu$, obtemos

$$(\beta^\alpha \beta^\nu \beta^\mu D_\alpha D_\mu - k \beta^\alpha \beta^\nu D_\alpha) \Psi = 0 \quad (2.57)$$

usando as propriedades das matrizes β^μ na equação acima, é possível obter, após alguns desenvolvimentos algébricos, a expressão

$$D^\nu = \beta^\alpha \beta^\nu D_\alpha \Psi + \frac{e}{2k} F_{\alpha\mu} (\beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha + \beta^\mu g^{\nu\alpha}) \Psi \quad (2.58)$$

onde $F_{\mu\nu} = \frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu]$ representa o campo de força eletromagnético Galileano. Então, contraindo a equação (2.58) à esquerda com o operador D_ν , obtemos uma equação de segunda ordem

$$D_\nu D^\nu \Psi + k^2 \Psi - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \Psi - \frac{e}{2k} (\beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha + \beta^\mu g^{\nu\alpha}) D_\nu (F_{\alpha\mu} \Psi) = 0 \quad (2.59)$$

onde

$$S^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu] \quad (2.60)$$

Portanto, assim como no caso relativístico [15], no formalismo covariante de Galilei temos um termo anômalo proporcional a $e/2k$. Podemos provar que este termo anômalo não possui significado físico, através do fato que o mesmo desaparece após a análise das componentes físicas do campo na equação DKP.

Capítulo 3

Álgebras e Subálgebras.

Neste capítulo iremos desenvolver uma estrutura algébrica onde os operadores de projeção ocorrem como elementos independentes da base, atuando em cada setor do campo DKP. A teoria aqui desenvolvida seguirá de perto a construção relativística apresentada por Fischbach, Nieto e Scott em [27]. Este capítulo segue a seguinte estrutura: na primeira seção será desenvolvida uma série de propriedades algébricas para as matrizes β^μ , assim como a enumeração de todos os elementos da álgebra numa forma de tabela. Na segunda e terceira seções será realizada a redução da álgebra para uma soma direta de subálgebras irredutíveis, as P-álgebra e R-álgebra. Nestas mesmas seções serão consideradas aplicações físicas associadas à equivalência entre as correntes conservadas, via formulação em segunda ordem para os campos escalar e Proca covariantes de Galilei e a corrente DKP.

3.1 Preliminares Algébricas.

As matrizes β^μ que aparecem na equação DKP Galileana (2.38) satisfazem a álgebra DKP (2.39)

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\lambda} + \beta^\lambda g^{\nu\mu} \quad (3.1)$$

com $\lambda = 1, \dots, 5$ e $g^{\nu\lambda}$ é a métrica Galileana. A álgebra gerada através das cinco matrizes β^μ possui três representações irredutíveis, uma das quais é trivial de dimensão 1. Das outras duas representações fisicamente interessantes, a primeira consiste de matrizes seis por seis e a segunda de matrizes quinze por quinze [25], o primeiro caso descreve partículas de spin-0 e a segunda partículas de spin-1. Como é sabido da álgebra linear, a dimensão de um espaço vetorial corresponde ao número de elementos linearmente independentes que gera o espaço. No caso de um espaço vetorial, onde os elementos do espaço são matrizes, a dimensão corresponde á multiplicação do número de linhas pelo número de colunas das matrizes que geram o espaço. Portanto, para escrevermos os 262 elementos independente da álgebra DKP, 1 para o caso trivial, 36 para o setor de spin-0 e 225 para o setor de spin-1, é conveniente introduzir elementos auxiliares [27]. O primeiro desses elementos é

$$\begin{aligned}\eta^i &= 2(\beta^i)^2 - \mathbf{1}, & \eta^4 &= (\beta^4 - \beta^5)^2 - \mathbf{1} & i = 1, 2, 3 \\ \eta^5 &= (\beta^4 + \beta^5)^2 + \mathbf{1}, & \eta^6 &= \eta^1 \eta^2 \eta^3 \eta^4 \eta^5.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Uma representação explícita das matrizes η^μ e dos elementos auxiliares pode ser encontrada no Apêndice B. As matrizes (3.2) possuem as seguintes propriedades

$$\beta^i \eta^i = \eta^i \beta^i \quad (3.3)$$

$$\beta^4 \eta^4 = -\eta^4 \beta^5 \quad (3.4)$$

$$\beta^5 \eta^5 = \eta^5 \beta^4 \quad (3.5)$$

$$\beta^4 \eta^5 = \eta^5 \beta^5 \quad (3.6)$$

$$\beta^5 \eta^4 = -\eta^4 \beta^4 \quad (3.7)$$

$$(\eta^2)^\lambda = \mathbf{1} \quad (3.8)$$

$$\eta^\lambda \eta^\mu = \eta^\mu \eta^\lambda \quad (3.9)$$

$$\eta^6 \eta^\lambda = \eta^\lambda \eta^6. \quad (3.10)$$

Tais expressões podem ser verificadas através da multiplicação diretas das matrizes nos Apêndices A e B. O outro elemento auxiliar é definido como

$$(\xi^\mu)^+ = (\beta^\mu)^2, \quad (\xi^\mu)^- = \mathbf{1} - (\beta^\mu)^2 \quad (3.11)$$

o qual possui as seguintes propriedades

$$(\xi^\lambda)^- + (\xi^\lambda)^+ = \mathbf{1} \quad (3.12)$$

$$\eta^6 (\xi^\lambda)^\pm = (\xi^\lambda)^\pm \eta^6 \quad (3.13)$$

$$(\xi^\lambda)^+ (\xi^\lambda)^- = (\xi^\lambda)^- (\xi^\lambda)^+ \quad (3.14)$$

$$(\xi^\lambda)^+ (\xi^\nu)^+ = (\xi^\nu)^+ (\xi^\lambda)^+ \quad (3.15)$$

$$(\xi^\lambda)^- (\xi^\nu)^- = (\xi^\nu)^- (\xi^\lambda)^- \quad (3.16)$$

Os 262 elementos independentes da álgebra são listados na tabela abaixo:

Elementos:	(a)	(b)	(c)	Número de Elementos
	I	I	I	1
	β^μ	β^μ	β^μ	5
	$\beta^\mu \beta^\nu$	$\beta^\mu \beta^\nu$	$\beta^\mu \beta^\nu$	25
	$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma$	$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma$	$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma$	25
	$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	25
	$(\beta^\mu)^2$	η^μ	Γ^μ	5
	$(\beta^\mu)^2 (\beta^\nu)^2$	$\eta^\mu \eta^\nu$	$\Gamma^\mu \Gamma^\nu$	15
	$(\beta^\mu)^2 (\beta^\nu)^2 (\beta^\sigma)^2$	$\eta^\mu \eta^\nu \eta^\sigma$	$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma$	5
	$(\beta^\mu)^2 (\beta^\nu)^2 (\beta^\sigma)^2 (\beta^\rho)^2$	$\eta^\mu \eta^\nu \eta^\sigma \eta^\rho$	$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma \Gamma^\rho$	1
	$(\beta^\mu)^2 \beta^\nu$	$\eta^\mu \beta^\nu$	$\Gamma^\mu \beta^\nu$	25
	$(\beta^\mu)^2 \beta^\nu \beta^\sigma$	$\eta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma$	$\Gamma^\mu \beta^\nu \beta^\sigma$	50
	$(\beta^\mu)^2 \beta^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	$\eta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	$\Gamma^\mu \beta^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	25
	$(\beta^\mu)^2 (\beta^\nu)^2 \beta^\sigma$	$\eta^\mu \eta^\nu \beta^\sigma$	$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \beta^\sigma$	25
	$(\beta^\mu)^2 (\beta^\nu)^2 \beta^\sigma \beta^\rho$	$\eta^\mu \eta^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \beta^\sigma \beta^\rho$	25
	$(\beta^\mu)^2 (\beta^\nu)^2 (\beta^\sigma)^2 \beta^\rho$	$\eta^\mu \eta^\nu \eta^\sigma \beta^\rho$	$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma \beta^\rho$	5

onde Γ^μ pode ser: $(\xi^\mu)^-$ ou $(\xi^\mu)^+$ [27]. Os elementos listados na tabela acima, foram obtidos realizando diversas operações de multiplicação entre as matrizes β^μ . Tal cálculo é longo e tedioso e não será apresentado aqui.

3.2 Subálgebra Spin-0: P -álgebra.

A formulação de projetor do campo DKP Galileano para partículas de spin-0 será apresentada nesta seção. Este operador pode ser construído usando a representação explícita das matrizes β^μ , assim como na formulação da teoria da relatividade do campo DKP. Para o setor escalar, spin-0, o operador de projeção pode ser escrito como [29]:

$$P = -\frac{1}{2}(\beta^4 + \beta^5)^2(\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2, \quad (3.17)$$

onde $P^2 = P$. Com este operador, podemos construir os operadores

$$P^\mu = P\beta^\mu, \quad P^\mu\beta^\nu = Pg^{\mu\nu} \quad (3.18)$$

Seja agora o operador ${}^\nu P$ definido como

$${}^\nu P = (P^\nu)^\dagger = (P\beta^\nu)^\dagger = \beta^\nu P \quad (3.19)$$

e

$$\beta^\mu({}^\nu P) = g^{\mu\nu} P \quad (3.20)$$

Os 36 elementos da subálgebra spin - 0, chamada P - álgebra, são simbolizados como:

$$\{P, P^\mu, {}^\mu P, ({}^\mu P)(P^\nu)\} = \{P, P^\mu, {}^\mu P, {}^\mu P^\nu\} \quad (3.21)$$

os quais são respectivamente , um escalar, um vetor e um tensor de segunda-ordem. Os operadores da P -álgebra possuem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
PP^\mu &= P^\mu \\
{}^\nu PP &= {}^\nu P \\
P({}^\mu P) &= (P^\mu)P = 0 \\
P({}^\mu P^\nu) &= ({}^\mu P^\nu)P = 0 \\
(P^\mu)(P^\nu) &= ({}^\nu P)({}^\mu P) = 0 \\
(P^\mu)({}^\nu P) &= Pg^{\mu\nu} \\
(P^\mu)({}^\nu P^\lambda) &= P^\lambda g^{\mu\nu} \\
({}^\nu P^\lambda)({}^\mu P) &= {}^\nu Pg^{\lambda\mu} \\
{}^\nu P({}^\mu P^\lambda) &= ({}^\mu P^\lambda)P^\nu = 0 \\
({}^\mu P^\nu)({}^\sigma P^\lambda) &= {}^\mu P^\lambda g^{\nu\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

A demonstração das expressões acima pode ser encontrada no Apêndice D. Com o objetivo de tornar a notação da álgebra mais compacta, podemos estender a ordem do índice de cinco para seis dimensões. Desta forma, podemos definir os elementos da álgebra como sendo

$${}^6P^6 \equiv P, \quad {}^6P^\mu \equiv P^\mu, \quad {}^\mu P^6 \equiv {}^\mu P \tag{3.23}$$

de modo que, a P - álgebra consiste dos elementos

$$\{({}^aP^b) | a, b = 1, \dots, 6\} = \{P, P^\mu, {}^\mu P, {}^\mu P^\nu\} \tag{3.24}$$

A regra de multiplicação será então:

$$({}^aP^b)^{cd} = g^{ac}g^{bd} \tag{3.25}$$

onde

$$g^{bc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta métrica claramente gera o grupo $SO(5,1)$ [24]. O conjunto (3.24) possui 36 elementos linearmente independentes e formam uma base para a subálgebra spin-0. A representação explícita da P -álgebra pode ser encontrada no Apêndice C. Uma notação compacta para a representação matricial dos operadores (3.24) é dada por

$$({}^i P^\mu) = a(i, \mu), \quad ({}^4 P^\mu) = -a(5, \mu), \quad ({}^5 P^\mu) = -a(4, \mu) \quad (3.26)$$

onde $\{a(i, \mu), a(5, \mu), a(4, \mu) \mid i = 1, \dots, 3 \text{ e } \mu = 1, \dots, 5\}$ representa os elementos de uma matriz seis por seis na P -álgebra, cujos únicos elementos não nulos estão na linha correspondente ao primeiro índice e na coluna correspondendo ao segundo índice.

Neste momento iremos definir o elemento unitário da P -álgebra como sendo:

$$e = P + g_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu) \quad (3.27)$$

se usarmos a representação explícita do conjunto de operadores (3.24) disposta no Apêndice C, podemos perceber que o operador unitário (3.27) possui a forma

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

logo, percebemos claramente o porque da definição de (3.27) como elemento unitário da P -álgebra. Podemos expressar as matrizes β^λ sob a forma [27]

$$\beta^\lambda = P^\lambda + {}^\lambda P \quad (3.29)$$

Para a subálgebra spin-0 o conjunto $\{{}_a P_b | a, b = 1, \dots, 6\}$ definido por (3.24) e a expressão (3.29) substituem a relação fundamental (3.1) que definem as matrizes β^μ e sua álgebra. Fazendo uso das propriedades definidas em (3.22) para a P -álgebra, podemos realizar uma redução de um produto de matrizes β^μ para uma combinação linear dos operadores da P -álgebra [12]. A partir das relações (3.29) podemos considerar o seguinte produto de matrizes β^μ

$$(\beta^\lambda)^{2n} = \prod_{i=1}^{2n} \beta^{\lambda_i} \quad (3.30)$$

usando as propriedades (3.22) da P -álgebra temos que

$$\begin{aligned} (\beta^\lambda)^{2n} &= (P^{\lambda_1})({}^{\lambda_2}P)(P^{\lambda_3}) \dots ({}^{\lambda_{2n}}P) + ({}^{\lambda_1}P)(P^{\lambda_2})({}^{\lambda_3}P) \dots (P^{\lambda_{2n}}) \quad (3.31) \\ (\beta^\lambda)^{2n+1} &= (\beta^\lambda)^{2n}(P^{\lambda_{2n+1}}) + (\beta^\lambda)^{2n}({}^{\lambda_{2n+1}}P) \end{aligned}$$

Assim, uma série de expressões envolvendo um produto de matrizes β^μ pode ser expressa apenas em termos dos operadores ${}^\nu P$ e P^μ e suas respectivas propriedades.

3.2.1 Aplicações Físicas.

A densidade Lagrangiana para o campo DKP livre possui a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \beta^\mu (\partial_\mu \Psi) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \beta^\mu \Psi + k \bar{\Psi} \Psi \quad (3.32)$$

juntamente com as suas equações de movimento

$$\beta^\mu \partial_\mu \Psi + k \Psi = 0, \quad (\partial_\mu \bar{\Psi}) \beta^\mu - k \bar{\Psi} = 0 \quad (3.33)$$

onde $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta_5$. As consequências da ação dos operadores P e P^μ sobre o campo DKP são como segue:

$$\bullet \quad PU(\Lambda)\Psi = P\Psi \quad (3.34)$$

$$\bullet \quad P^\mu U(\Lambda)\Psi = P^\mu\Psi + \omega^\mu{}_\nu P^\nu\Psi \quad (3.35)$$

Sendo

$$U = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = [\beta_\mu, \beta_\nu] \quad (3.36)$$

onde $S_{\mu\nu}$ é o gerador das transformações infinitesimais e $\omega^{\mu\nu}$ seus parâmetros. Logo, podemos observar que $P\Psi$ se transforma como um escalar e $P^\mu U\Psi$ como um vetor.

Na P -álgebra a matriz $U(\Lambda)$ deve satisfazer as seguintes relações

$$U^{-1}(\Lambda)(P^\mu)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu(P^\nu) \quad (3.37)$$

$$U^{-1}(\Lambda)({}^\mu P)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu({}^\nu P)$$

entre os elementos da P -álgebra. Para uma transformação infinitesimal do tipo $\Lambda_\mu{}^\nu = g_\mu{}^\nu + \omega_\mu{}^\nu$ as propriedades (3.37) são satisfeitas por

$$U(\Lambda) = \mathbf{1} + \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu), \quad U^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1} - \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu) \quad (3.38)$$

a demonstração das expressões (3.37) é uma mera aplicação das propriedades dos operadores da P -álgebra e pode ser encontrada no Apêndice E. De fato, as expressões (3.38), podem ser consideradas transformações unitárias: $U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda) = 1$ e $U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda) = 1$. A demonstração é mostrada abaixo

$$\bullet \quad U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda) = [\mathbf{1} + \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu)] [\mathbf{1} - \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu)] \quad (3.39)$$

$$= \mathbf{1} + \omega_{\mu\nu} [({}^\mu P^\nu) - ({}^\mu P^\nu)]$$

$$= 1$$

$$\bullet \quad U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda) = [\mathbf{1} - \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu)] [\mathbf{1} + \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu)]$$

$$= \mathbf{1} + \omega_{\mu\nu} [({}^\mu P^\nu) - ({}^\mu P^\nu)]$$

$$= 1,$$

onde se desprezou termos da ordem de ω^2 . Em particular

$$\begin{aligned}\Psi'(x') &= [\mathbf{1} + \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu)] \Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x') &= \bar{\Psi}(x) [\mathbf{1} - \omega_{\mu\nu}({}^\mu P^\nu)]\end{aligned}\quad (3.40)$$

Aplicando os operadores $\{P, P^\nu, {}^\nu P\}$ da P -álgebra para a equação DKP (3.33) temos, para os campos Ψ e $\bar{\Psi}$, as equações

$$\begin{aligned}\partial_\mu(P^\mu)\Psi &= -kP\Psi, & \partial^\nu P\Psi &= -k(P^\nu)\Psi \\ \partial_\mu\bar{\Psi}({}^\mu P) &= k\bar{\Psi}P, & \partial^\nu\bar{\Psi}P &= k\bar{\Psi}({}^\nu P).\end{aligned}\quad (3.41)$$

As equações (3.41) quando combinadas resultam

$$\partial^\mu\partial_\mu P\Psi - k^2 P\Psi = 0, \quad \partial^\mu\partial_\mu\bar{\Psi}P - k^2\bar{\Psi}P = 0 \quad (3.42)$$

que representam, na P -álgebra, equações de Schrödinger expressas no formalismo covariante de Galilei. Estas equações demonstram que todos os elementos da matriz coluna $P\Psi$ e da matriz linha $\bar{\Psi}P$ são campos escalares, isto é, descrevem partículas de spin - 0. Se usarmos a representação explícita (2.49) para Ψ , juntamente com a representação explícita dos operadores P e P^μ mostradas no Apêndice C, podemos obter as expressões:

$$P\Psi = \begin{bmatrix} O_{5\times 1} \\ \psi_6 \end{bmatrix}, \quad P^\mu\Psi = \begin{bmatrix} O_{5\times 1} \\ \psi^\mu \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Usando as expressões (3.41) juntamente com a expressão acima podemos obter a seguinte relação

$$\psi^\mu = -\frac{1}{k}\partial^\mu\psi_6 \quad (3.44)$$

fazendo

$$\psi_6 = \sqrt{k}\phi \quad (3.45)$$

onde ϕ é um campo escalar, obtemos

$$\psi^\mu = -\frac{1}{\sqrt{k}}\partial^\mu\phi \quad (3.46)$$

tal que, no formalismo covariante de Galilei, a expressão do campo Ψ possui a forma, sendo $k \neq 0$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{k}}\partial^\mu\phi \\ \sqrt{k}\phi \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

e, conseqüentemente

$$P\Psi = \begin{bmatrix} O_{5\times 1} \\ \sqrt{k}\phi \end{bmatrix}, \quad P^\mu\Psi = -\frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} O_{5\times 1} \\ \partial^\mu\phi \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Multiplicando a equação DKP (3.33) pelo operador $\partial_\alpha\beta^\alpha\beta^\nu$ à esquerda podemos obter algumas relações de vínculo impostas ao campo DKP

$$\partial^\nu\Psi = \partial_\alpha\beta^\alpha\beta^\nu\Psi, \quad \partial^\nu\bar{\Psi} = (\partial_\alpha\bar{\Psi})\beta^\nu\beta^\alpha \quad (3.49)$$

Usando, respectivamente, a expressão (3.29) para as matrizes β e o elemento unitário (3.27) da P -álgebra, podemos expressar as equações de vínculo (3.49) em duas formas diferentes. A primeira forma é

$$\partial^\nu\Psi = \partial^\nu P\Psi + \partial_\alpha(\alpha P^\nu)\Psi, \quad \partial^\nu\bar{\Psi} = \partial^\nu\bar{\Psi}P + \partial_\alpha\bar{\Psi}(\nu P^\alpha) \quad (3.50)$$

a segunda forma

$$\partial_\alpha(\alpha P^\nu)\Psi = \partial^\nu g_{\mu\nu}(\mu P^\nu)\Psi, \quad \partial_\alpha\bar{\Psi}(\nu P^\alpha) = \partial^\nu\bar{\Psi}g_{\nu\mu}(\nu P^\mu) \quad (3.51)$$

Os elementos da P -álgebra (3.24) são um conjunto completo de operadores de projeção, abaixamento e levantamento. Os elementos da base

$$\{({}^a P^b) | a, b = 1, \dots, 6\}$$

quando operando sobre um campo Ψ' projeta para Ψ a a -ésima componente

$$\Psi' = ({}^a P^b)\Psi, \quad \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}({}^a P^b). \quad (3.52)$$

Para $a < b$ os elementos ${}_a P_b$ projetam para Ψ e $\bar{\Psi}$ a b -ésima componente e o aumenta para a a -ésima posição. Da mesma forma os elementos ${}_a P_b$ com $a > b$ são operadores

de abaixamento. Para ter uma observação clara desta propriedade dos elementos da P -álgebra, seria interessante consultar as representações explícitas destes operadores no Apêndice C e realizar a mutiplicação direta das matrizes com a expressão (2.49) para Ψ . Segue abaixo um exemplo desta propriedade

$$\Psi'(x') = ({}^1P^2)\Psi(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \\ \psi_5(x) \\ \psi_6(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_2(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

A equação de Schrödinger para os campos escalares ψ e ψ^* pode ser expressa como

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi - k^2 \psi = 0, \quad \partial^{*\mu} \partial_\mu^* \psi^* - k^2 \psi^* = 0. \quad (3.54)$$

A corrente será dada por

$$j_\mu^{KG} = - [\psi^* \partial_\mu \psi - (\partial_\mu^* \psi^*) \psi]. \quad (3.55)$$

Por outro lado, a corrente na teoria DKP possui a forma

$$j_{DKP}^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi. \quad (3.56)$$

Usando a expressão (3.29) para as matrizes β_λ na P -álgebra e a expressão (3.41) temos

$$\begin{aligned} j_{DKP}^\mu &= \bar{\Psi} (P^\mu + {}^\mu P) \Psi \\ &= \frac{1}{k} (\partial_\mu^* \bar{\Psi} P) \Psi - \frac{1}{k} \bar{\Psi} \partial_\mu P \Psi \\ &= -\frac{1}{k} [(\bar{\Psi} P) \partial_\mu (P \Psi) - (\partial_\mu^* \bar{\Psi} P) (P \Psi)]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Logo, desde que $\bar{\Psi} P$ e $P \Psi$ são soluções da equação (3.42), as duas correntes (3.55) e (3.57) são idênticas. Estes resultados reafirmam a equivalência entre da teoria DKP Galileana e a de segunda ordem. O que de fato deveria ser o esperado, pois ambas as teorias reproduzem a equação de Schrödinger da mecânica quântica não - relativística.

3.3 Subálgebra Spin-1: R -álgebra.

Vamos agora construir os operadores que selecionam o setor vetorial da teoria DKP covariante de Galilei, isto é, operadores que selecionam o setor de spin-1 do campo Ψ . Para isto definimos

$$R^\mu = (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2 [\beta^\mu(\beta^4 + \beta^5) - g^{\mu 4} - g^{\mu 5}] \quad (3.58)$$

e obtemos os operadores dados por [29]

$$R^{\mu\nu} = R^\mu \beta^\nu, \quad R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu}, \quad R^{\mu\nu} \beta^\alpha = g^{\nu\alpha} R^\mu - g^{\mu\alpha} R^\nu. \quad (3.59)$$

A partir da expressão (3.58) e definindo o operador ${}^\nu R$ como

$${}^\nu R = (R^\nu)^\dagger, \quad \beta^\lambda ({}^\nu R) = {}^{\lambda\nu} R \quad (3.60)$$

podemos deduzir as seguintes propriedades

$$(R^\mu)(R^\nu) = (g^{\mu 4} + g^{\mu 5})R^\nu \quad (3.61)$$

$$(R^\mu)({}^\nu R) = g^{\mu\nu}(R^4 + R^5) \quad (3.62)$$

$$(R^\mu)(R^{\nu\lambda}) = (g^{\mu 4} + g^{\mu 5})R^{\nu\lambda} \quad (3.63)$$

$$(R^{\mu\lambda})(R^\nu) = (R^{\mu\lambda})(R^{\nu\sigma}) = 0 \quad (3.64)$$

$$(R^{\mu\nu})({}^\lambda R) = (R^\mu)({}^{\nu\lambda} R) = 0 \quad (3.65)$$

$$(R^{\mu\nu})({}^{\rho\sigma} R) = (g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma} - g^{\sigma\nu} g^{\mu\rho})(R^4 + R^5). \quad (3.66)$$

Os 225 elementos linearmente independente para a subálgebra de spin-1, R - álgebra, são dadas por:

$$\{{}^\mu R^\nu, {}^\mu R^{\nu\lambda}, {}^{\nu\lambda} R^\mu, {}^{\nu\lambda} R^{\mu\sigma}\} \quad (3.67)$$

os quais são, respectivamente, tensores: de segunda, terceira e quarta ordem. Segue abaixo a forma como esses tensores devem ser construídos

$${}^{\mu}R^{\nu} = ({}^{\mu}R)(R^{\nu}) \quad (3.68)$$

$${}^{\mu}R^{\nu\lambda} = ({}^{\mu}R^{\nu})\beta^{\lambda} = ({}^{\mu}R)(R^{\nu\lambda}) \quad (3.69)$$

$${}^{\nu\lambda}R^{\mu} = \beta^{\nu}({}^{\lambda}R^{\mu}) = ({}^{\nu\lambda}R)(R^{\mu}) \quad (3.70)$$

$${}^{\nu\lambda}R^{\mu\sigma} = \beta^{\nu}({}^{\lambda}R^{\mu})\beta^{\sigma} = ({}^{\nu\lambda}R)(R^{\mu\sigma}) \quad (3.71)$$

As propriedades da R -álgebra são listadas abaixo

$$\begin{aligned} ({}^{\mu}R^{\nu})({}^{\sigma}R^{\rho}) &= -2g^{\nu\sigma}({}^{\mu}R^{\rho}) \\ ({}^{\mu}R^{\nu})({}^{\sigma}R^{\rho\tau}) &= -2g^{\nu\sigma}({}^{\mu}R^{\rho\tau}) \\ ({}^{\lambda}R^{\sigma})({}^{\rho\nu}R^{\sigma}) &= ({}^{\sigma}R^{\rho\lambda})({}^{\mu}R^{\nu}) = 0 \\ ({}^{\mu}R^{\nu})({}^{\rho\lambda}R^{\sigma\tau}) &= ({}^{\rho\lambda}R^{\sigma\tau})({}^{\mu}R^{\nu}) = 0 \\ ({}^{\mu\lambda}R^{\gamma})({}^{\sigma}R^{\rho}) &= -2g^{\gamma\sigma}({}^{\mu\lambda}R^{\rho}) \\ ({}^{\nu\lambda}R^{\mu})({}^{\tau}R^{\rho\sigma}) &= -2g^{\mu\tau}({}^{\nu\lambda}R^{\rho\sigma}) \\ ({}^{\mu}R^{\nu\lambda})({}^{\tau}R^{\rho\sigma}) &= ({}^{\nu\lambda}R^{\mu})({}^{\rho\sigma}R^{\tau}) = 0 \\ ({}^{\rho\sigma}R^{\tau\kappa})({}^{\mu}R^{\nu\lambda}) &= ({}^{\nu\lambda}R^{\mu})({}^{\rho\sigma}R^{\tau\kappa}) = 0 \\ ({}^{\mu\nu}R^{\rho\sigma})({}^{\lambda\tau}R^{\alpha\kappa}) &= -2(g^{\lambda\sigma}g^{\rho\tau} - g^{\sigma\tau}g^{\lambda\rho})({}^{\mu\nu}R^{\alpha\kappa}) \\ {}^{\mu}R^{\nu\lambda} &= -{}^{\mu}R^{\lambda\nu} \\ {}^{\nu\lambda}R^{\mu} &= -{}^{\lambda\nu}R^{\mu} \\ {}^{\nu\lambda}R^{\mu\sigma} &= -{}^{\lambda\nu}R^{\mu\sigma} = {}^{\lambda\nu}R^{\sigma\mu}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

e

$$({}^{\mu}R^{\nu\lambda})\beta^{\sigma} = {}^{\mu}R^{\nu}g^{\lambda\sigma} - {}^{\mu}R^{\lambda}g^{\nu\sigma}, \quad \beta^{\sigma}({}^{\nu\lambda}R^{\mu}) = {}^{\lambda}R^{\mu}g^{\sigma\nu} - {}^{\nu}R^{\mu}g^{\sigma\lambda}. \quad (3.73)$$

Todas as propriedades listadas acima, foram obtidas mediante cálculo direto das matrizes (Apêndice A) que representam os operadores da R -álgebra. Mais uma vez,

com o objetivo de tornar a notação da álgebra mais compacta, podemos estender a ordem do índice de cinco para seis dimensões. Desta forma, podemos definir, os elementos da R - álgebra

$${}^6\mu R^{\nu 6} \equiv {}^\mu R^\nu, \quad {}^6\mu R^{\nu\lambda} \equiv {}^\mu R^{\nu\lambda}, \quad {}^{\nu\lambda} R^{\mu 6} \equiv {}^{\nu\lambda} R^\mu. \quad (3.74)$$

E, na forma compacta

$$\{{}^{ab}R^{cd} \mid a, b, c, d = 1, \dots, 6\} = \{{}^\mu R^\nu, {}^\mu R^{\nu\lambda}, {}^{\nu\lambda} R^\mu, {}^{\nu\lambda} R^{\mu\sigma}\}. \quad (3.75)$$

As regras de multiplicação para os elementos da R -álgebra sintetizadas da forma

$$({}^{ab}R^{cd})({}^{ef}R^{gh}) = -2{}^{ab}R^{gh}[g^{cf}g^{da} - g^{ca}g^{df}], \quad (3.76)$$

cujo elemento unitário é expresso por

$$\tilde{e} = g_{\mu\sigma} {}^\mu R^\sigma + \frac{1}{2}g_{\mu\gamma}g_{\sigma\nu}({}^{\mu\sigma}R^{\gamma\nu}). \quad (3.77)$$

assim como no caso da P -álgebra, se usarmos a representação explícita dos operadores da R - álgebra, iremos perceber que o elemento unitário (3.77) é uma matriz unitária quinze por quinze. Multiplicando as expressões (3.77) à direita por β_λ , obtemos uma representação das matrizes β^μ na R -álgebra

$$\beta^\lambda = g_{\mu\sigma} {}^\mu R^{\sigma\lambda} + g_{\mu\sigma} {}^{\lambda\mu} R^\sigma \quad (3.78)$$

Usando as propriedades (3.72) da R -álgebra temos que o produto de matrizes β pode ser reduzido, usando os elementos independentes da base, sob a forma [27]

$$\begin{aligned} (\beta^\lambda)^{2n} &= ({}^\mu R^{\mu\lambda_1})({}^{\lambda_2\mu} R^\mu) \dots ({}^{\lambda_{2n}\mu} R^\mu) + ({}^{\lambda_1\mu} R^\mu)({}^{\mu} R^{\mu\lambda_2})({}^\mu R^{\mu\lambda_{2n}}) \\ (\beta^\lambda)^{2n+1} &= (\beta^\lambda)^{2n}({}^\mu R^{\lambda_{2n+1}\mu}) + (\beta^\lambda)^{2n}({}^{\lambda_{2n+1}\mu} R^\mu) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Logo, uma série de expressões envolvendo um produto de matrizes β pode ser expressa apenas em termos dos operadores R - álgebra e suas respectivas propriedades.

3.3.1 Aplicações Físicas.

A equação DKP para spin-1 é dada através da equação (3.33)

$$\beta^\mu \partial_\mu \Psi + k\Psi = 0, \quad (\partial_\mu \bar{\Psi})\beta^\mu - k\bar{\Psi} = 0 \quad (3.80)$$

onde as matrizes β possuem uma representação quinze-dimensional ver Apêndice A.

As equações de vínculo definidas em (3.49) na R -álgebra são dadas por

$$\partial^\nu \Psi = \partial^\nu g_{\mu\sigma}({}^\mu R^\sigma)\Psi - \partial^\sigma g^{\mu\nu}({}^\nu R^\sigma) + \partial^\sigma g_{\alpha\sigma}g_{\mu\sigma}({}^{\alpha\mu} R^{\sigma\nu})\Psi \quad (3.81)$$

$$\partial^\nu \bar{\Psi} = (\partial^\nu \bar{\Psi})g_{\mu\sigma}({}^\mu R^\sigma) - (\partial^\mu \bar{\Psi})g_{\nu\sigma}({}^\mu R^\sigma) + (\partial^\sigma \bar{\Psi})g_{\nu\sigma}g_{\mu\sigma}({}^{\nu\mu} R^{\sigma\alpha}) \quad (3.82)$$

e

$$\frac{1}{2}\partial^\nu g_{\mu\gamma}g_{\sigma\nu}({}^{\mu\sigma} R^{\gamma\nu})\Psi = \partial^\sigma g_{\alpha\sigma}g_{\mu\sigma}({}^{\alpha\mu} R^{\sigma\nu})\Psi - \partial^\sigma g_{\mu\nu}({}^\mu R^\sigma)\Psi \quad (3.83)$$

$$\frac{1}{2}(\partial^\nu \bar{\Psi})g_{\mu\gamma}g_{\sigma\nu}({}^{\mu\sigma} R^{\gamma\nu}) = (\partial^\sigma \bar{\Psi})g_{\nu\sigma}g_{\mu\sigma}({}^{\nu\mu} R^{\sigma\alpha}) - (\partial^\mu \bar{\Psi})g_{\nu\sigma}({}^\mu R^\sigma) \quad (3.84)$$

A aplicação dos operadores $\{R^\mu, R^{\mu\nu}, {}^\mu R, {}^{\mu\nu} R\}$ na equação DKP (3.80) proporciona

$$\partial_\mu(R^{\nu\mu})\Psi = -k(R^\nu)\Psi, \quad \partial^\lambda(R^\nu)\Psi - \partial^\nu(R^\lambda)\Psi = -k(R^{\nu\lambda})\Psi \quad (3.85)$$

$$\partial_\mu \bar{\Psi}({}^{\mu\nu} R) = k\bar{\Psi}({}^\nu R), \quad \partial^\lambda \bar{\Psi}({}^\nu R) - \partial^\nu \bar{\Psi}({}^\lambda R) = k\bar{\Psi}({}^{\lambda\nu} R)$$

As equações (3.85) quando combinadas se tornam

$$\partial_\lambda [\partial^\lambda(R^\nu)\Psi - \partial^\nu(R^\lambda)\Psi] = k^2(R^\nu)\Psi \rightarrow \partial_\lambda U^{\lambda\nu} = k^2(R^\nu)\Psi \quad (3.86)$$

$$\partial_\lambda [\partial^\lambda \bar{\Psi}({}^\nu R) - \partial^\nu \bar{\Psi}({}^\lambda R)] = k^2 \bar{\Psi}({}^\nu R) \rightarrow \partial_\lambda \tilde{U}^{\lambda\nu} = k^2 \bar{\Psi}({}^\nu R)$$

ou

$$\partial_\lambda \partial^\lambda(R^\nu)\Psi - k^2(R^\nu)\Psi = 0, \quad \partial_\lambda(R^\lambda)\Psi = 0 \quad (3.87)$$

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \bar{\Psi}({}^\nu R) - k^2 \bar{\Psi}({}^\nu R) = 0, \quad \partial_\lambda \bar{\Psi}({}^\lambda R) = 0$$

As expressões para $U^{\lambda\nu}$ e $\tilde{U}^{\lambda\nu}$ representam o tensor de força dos campos vetoriais massivos $R_\nu\Psi$ e ${}^\nu R\bar{\Psi}$, os quais obedecem a equação de Proca covariante de Galilei.

A corrente conservada associada ao campo de Proca Galileano é

$$j_P^\mu = - \left[({}^\nu R)U^{\mu\nu} - \tilde{U}^{\mu\nu}({}^\nu R) \right] \quad (3.88)$$

a correspondente corrente DKP

$$j_{DKP}^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi \quad (3.89)$$

usando as expressões (3.78) para as matrizes β na R -álgebra temos que

$$\begin{aligned} j_{DKP}^\mu &= \bar{\Psi} [g_{\nu\sigma}{}^\nu R^{\sigma\mu} + g_{\nu\sigma}{}^{\mu\nu} R^\sigma] \Psi \\ &= \bar{\Psi} g_{\nu\sigma} (\nu R) (R^{\sigma\mu}) \Psi + \bar{\Psi} g_{\nu\sigma} (\mu\nu R) (R^\sigma) \Psi \end{aligned} \quad (3.90)$$

identificando

$$(R^{\mu\nu}) \Psi = -\frac{1}{k} U^{\mu\nu}, \quad (\bar{\Psi})^{\mu\nu} R = \frac{1}{k}{}^{\mu\nu} \tilde{U} \quad (3.91)$$

obtemos

$$j_{DKP}^\mu = - \left[(\nu R) U^{\mu\nu} - \tilde{U}^{\mu\nu} (R^\nu) \right] \quad (3.92)$$

Portanto, as correntes conservadas DKP e Proca são de fato idênticas no formalismo covariante de Galilei.

Capítulo 4

O Método de Quantização Canônica de Sistemas Vinculados.

Como mostrado no Capítulo anterior, as componentes do campo DKP não são independentes, isto é, apresentam vínculos entre si. Neste cenário, usaremos neste Capítulo o método da quantização canônica de campos vinculados para quantizarmos o campo DKP covariante de Galilei. O uso deste método também é justificado pelo fato de o mesmo apresentar ferramentas apropriadas para se selecionar o setor físico da teoria. A teoria apresentada aqui segue de perto o tratamento exposto em [41, 42]. Em um primeiro instante será apresentada a formulação Lagrangiana e Hamiltoniana para sistemas singulares. Na segunda seção uma descrição clara e sucinta sobre a classificação de vínculos de primeira e segunda-classe e a definição dos colchetes de Dirac serão apresentadas. Uma vez construído o setor físico da teoria em um nível clássico, a terceira seção descreverá como realizar a quantização canônica de forma consistente e a dedução da integral de trajetória para uma teoria com vínculos de segunda-classe.

4.1 A Formulação Hamiltoniana para Sistemas Singulares.

A Hamiltonização de sistemas singulares foi primeiramente proposto por Dirac [41] e amplamente discutido durante os últimos anos [42]. O tratamento de tais sistemas, assim como também de sistemas não-singulares, possui como ponto de partida a descrição do sistema mecânico a partir da formulação Lagrangiana. O ponto crucial no nosso trabalho será a divisão da teoria em teorias Lagrangianas singulares e não-singulares e seu posterior tratamento. Isto torna-se importante devido ao processo de hamiltonização que deverá ser considerado para a construção do método de quantização que melhor se aplique a nossa situação. A descrição clássica de uma partícula seguindo a formulação Lagrangiana tem como origem a ação clássica expressa como

$$S = \int L(q, \dot{q}) dt \quad (4.1)$$

onde (q, \dot{q}) são denominadas, respectivamente, coordenadas e velocidades generalizadas. Aplicando o princípio variacional, as equações de Lagrange surgem sob a forma

$$\frac{\delta S}{\delta q^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) = 0, \quad a = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

onde n é o número de coordenadas generalizadas. Resolvendo a equação (4.2) obtemos as acelerações generalizadas [42]

$$\ddot{q}^b = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^c} \dot{q}^c \right]. \quad (4.3)$$

Através da expressão acima podemos ver que existirá uma solução única para as equações de Lagrange, expressas sob a forma de um conjunto de coordenadas e velocidades generalizadas, se a matriz

$$M_{ab} = \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right\| \quad (4.4)$$

possuir determinante não-nulo. Esta matriz é denominada Hessiana. O fato de uma teoria ser singular (não-singular) reside no fato de que o determinante da matriz Hessiana seja nulo (não-nulo).

A passagem do formalismo Lagrangiano para o Hamiltoniano é feita a partir da introdução dos momentos generalizados p_a conjugados às coordenadas generalizadas q^a

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}. \quad (4.5)$$

A partir desta expressão para o momento canônico, as velocidades podem ser expressas em função de q e p , isto é,

$$\dot{q}^a = v^a(q, p). \quad (4.6)$$

Tais velocidades só são expressíveis em termos das coordenadas e dos momentos generalizados se o determinante da matriz Hessiana for não nulo. Portanto, a nulidade da matriz Hessiana estabelece duas condições importantes: caracteriza o sistema em singular e impossibilita o tratamento da teoria em termos da formulação Hamiltoniana usual. Uma maneira de resolvermos essa impossibilidade será estabelecer um sistema de $3n$ equações para $3n$ funções desconhecidas do tempo q, p e v

$$\dot{q}^a = v^a, \quad \dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial q^a}, \quad p_a = \frac{\partial L}{\partial v^a} \quad (4.7)$$

Assim, podemos introduzir a função H^*

$$H^* = p_a v^a - L^v \quad (4.8)$$

das variáveis (q, p, v) , a qual depende apenas das coordenadas e momentos que podem ser expressos como equações de movimento de Hamilton não nulas. A partir da função (4.8) podemos obter as seguintes identidades

$$\frac{\partial H^*}{\partial q^a} \equiv -\frac{\partial L^v}{\partial q^a}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial v^a} \equiv p_a - \frac{\partial L^v}{\partial v^a}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial p_a} \equiv v^a \quad (4.9)$$

através dessas identidades podemos escrever as equações (4.7) como

$$\dot{q}^a = \{q^a, H^*\}, \quad \dot{p}_a = \{p_a, H^*\}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial v^a} = 0. \quad (4.10)$$

Ao sistema de equações (4.7) denominamos de sistema Hamiltoniano estendido. Em teorias singulares para o qual a matriz Hessiana é singular, seu posto será considerado

como constante, ou seja

$$\text{posto} \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right\| = R, \quad n - R = m_1 > 0 \quad (4.11)$$

onde n possui o mesmo significado definido anteriormente e m_1 é o número de vínculos primários. Desta forma, podemos dividir o grupo de variáveis (q, v, p) em dois grupos

$$X^i = q^i, \quad \Pi_i = p_i, \quad V^i = v^i, \quad i = 1 \dots, R \quad (4.12)$$

$$x^\alpha = q^{R+\alpha}, \quad \pi_\alpha = p_{R+\alpha}, \quad \lambda^\alpha = v^{R+\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, m_1 \quad (4.13)$$

onde o primeiro grupo de equações (4.12) são denominadas expressíveis e o segundo grupo de não-expressíveis. As velocidades $V = V(q, \pi, \lambda)$ são funções de (q, p) e das velocidades não-expressíveis λ . Substituindo as velocidades V nas equações remanescentes, temos

$$\pi = \frac{\partial L^v}{\partial \lambda}, \quad \left(\frac{\partial H^*}{\partial \lambda} = 0 \right) \quad (4.14)$$

e introduzindo as funções

$$\Phi_\alpha^{(1)} = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda^\alpha}, \quad f_\alpha(q, \Pi) = \frac{\partial L^v}{\partial \lambda^\alpha} \quad (4.15)$$

chegamos nas relações

$$\Phi_\alpha^{(1)} = \pi_\alpha - f_\alpha(q, \Pi) = 0 \quad (4.16)$$

chamadas de vínculos primários. Desta forma, de acordo com as definições acima, podemos construir a seguinte Hamiltoniana

$$H^{(1)} = H + \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)} \quad (4.17)$$

onde a função H coincide com Hamiltoniana definida em (4.8). Assim as equações de movimento de Hamilton adquirem a forma

$$\dot{q} = \{q, H^{(1)}\}, \quad \dot{p} = \{p, H^{(1)}\}, \quad \Phi^{(1)} = 0. \quad (4.18)$$

Nesse estágio o sistema (4.18) e, portanto, o sistema Hamiltoniano de equações estendidas (4.7) tomam a forma

$$\dot{\eta} = \{\eta, H^{(1)}\}, \quad \Phi^{(1)} = 0, \quad H^{(1)} = H(\eta) + \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)}(\eta) \quad (4.19)$$

sendo $\eta = (q, p)$ um par de variáveis canonicamente conjugadas. Devemos chamar (4.19) como sistema Hamiltoniano de equações com vínculos primários.

4.2 Descrição de Vínculos de Primeira e Segunda Classe.

A presença de vínculos primários entre as equações de movimento no formalismo Hamiltoniano estabelece que a teoria é singular. A igualdade (4.16) implica que os vínculos devem ser conservados no tempo, desta forma novos vínculos podem surgir. Portanto, a condição de conservação dos vínculos primários no tempo, será obtida calculando a derivada dos vínculos em relação ao tempo, assim

$$\dot{\Phi}_\alpha^{(1)} = \{\Phi_\alpha^{(1)}, H^{(1)}\} = \{\Phi_\alpha^{(1)}, H\} + \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)} \right\} \lambda^\beta = 0 \quad (4.20)$$

a qual pode ser reescrita como equações algébricas para encontrar λ como função de (q, p) , ou seja

$$\lambda^\beta = - \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)} \right\}^{-1} \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, H \right\} \quad (4.21)$$

Consideremos vínculos primários tal que o determinante composto dos colchetes de Poisson de todos os vínculos primários seja não-nulo;

$$\det \left\| \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)} \right\} \right\|_{\Phi^{(1)}=0} \neq 0 \quad (4.22)$$

Então, todos os λ podem ser encontrados de uma maneira explícita a partir de (4.20). Neste caso (4.20) será transformado em um sistema de equações consistindo de equações ordinárias de Hamilton com a Hamiltoniana $H^{(1)}$ dada por

$$H^{(1)} = H - \Phi_\alpha^{(1)} \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)} \right\}_{\alpha\beta}^{-1} \left\{ \Phi_\beta^{(1)}, H \right\} \quad (4.23)$$

sendo

$$\lambda^\alpha = - \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)} \right\}_{\alpha\beta}^{-1} \left\{ \Phi_\beta^{(1)}, H \right\} \quad (4.24)$$

Se a condição (4.20) não for satisfeita, conclui-se que a matriz $\{\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\}$ é singular e possui posto $r < m_1$, o que implica na existência de $m_1 - r$ λ_α 's não determinados. Neste contexto, novos vínculos podem surgir, os quais serão denominados vínculos de segundo estágio. Devemos nos referir a todos os vínculos determinados desta maneira, e que diferem dos primários, como secundários, isto é, vínculos secundários são vínculos de segundo, terceiro,..., estágio. O procedimento de conservação dos vínculos encerra em um k -ésimo estágio, pois o número de graus de liberdade é finito. Assim, podemos classificar os vínculos da seguinte forma

$$\Phi^{(i,\dots,j)} = (\Phi^{(i)}, \dots, \Phi^{(j)}), \quad 1 \leq i < j \leq k \quad (4.25)$$

$$\Phi^{(\dots,j)} = \Phi^{(i,\dots)} = \Phi^{(i,\dots,k)}, \quad \Phi = \Phi^{(1,\dots)} \quad (4.26)$$

sendo Φ todos os vínculos da teoria. Além disso chamamos a superfície descrita pelas equações

$$\Phi^{(i,\dots,j)} = 0 \quad (4.27)$$

como sendo a superfície de vínculo. Um vínculo é chamado de primeira classe se o seu colchete de Poisson com qualquer outro vínculo for nulo. Caso contrário o vínculo é denominado de segunda classe. A presença de vínculos de primeira classe na teoria significa dizer que, existem funções arbitrárias do tempo entre as equações de movimento, e nem todas as funções λ podem ser determinadas. Consideremos uma teoria com vínculos de segunda classe, neste caso a matriz composta do colchetes de Poisson de todos os vínculos possui determinante não-nulo, ou seja,

$$\det ||\{\Phi, \Phi\}||_{\Phi=0} \neq 0 \quad (4.28)$$

assim, a partir da condição de conservação dos vínculos no tempo (4.20), todas as funções λ podem ser excluídas do sistema de equações Hamiltonianas (4.19). De fato, vamos considerar a condição de conservação de todos os vínculos da teoria (4.27) no tempo

$$\dot{\Phi}_l^{(1)} = \{\Phi_l, H^{(1)}\} = \{\Phi_l, H\} + \{\Phi_l, \Phi_\alpha^{(1)}\} \lambda^\alpha + \{\Phi\} = 0 \quad (4.29)$$

os dois primeiros termos são familiares, vide expressão (4.20), a única expressão desconhecida vem a ser o termo $\{\Phi\}$, o qual significa combinações lineares de vínculos. Substituindo todas as funções λ nas equações de movimento (4.19) iremos obter um sistema equivalente de equações de movimento, isto é

$$\dot{\eta} = \left\{ \eta, H_k^{(1,2)} \right\}, \quad \Phi = 0, \quad (4.30)$$

sendo

$$H_k^{(1,2)} = H - \Phi_l \{ \Phi, \Phi \}_{l'}^{-1} \{ \Phi_{l'}, H \} \quad (4.31)$$

As equações de movimento (4.30) podem ser escritas como sendo

$$\dot{\eta} = \{ \eta, H \}_{D(\Phi)}, \quad \Phi = 0 \quad (4.32)$$

onde $\{ \eta, H \}_{D(\Phi)}$ é o chamado colchete de Dirac entre η e H . A definição geral dos colchetes de Dirac de duas funções F e G é dada por

$$\{ F, G \}_{D(\Phi)} = \{ F, G \} - \{ F, \Phi_l \} \{ \Phi_l, \Phi_{l'} \}^{-1} \{ \Phi_{l'}, G \} \quad (4.33)$$

O colchetes de Dirac é uma generalização dos colchetes de Poisson, sendo mais conveniente para uma teoria com vínculos de segunda classe, pois seleciona as variáveis que realmente possuem dinâmica, eliminando algumas outras do formalismo. Segue abaixo algumas propriedades dos colchetes de Dirac

- $\{ F, G \}_{D(\Phi)} = - \{ G, F \}_{D(\Phi)} \quad (4.34)$
- $\{ F, G + \lambda K \}_{D(\Phi)} = \{ F, G \}_{D(\Phi)} + \lambda \{ F, K \}_{D(\Phi)}, \quad \lambda = \text{constante}$
- $\left\{ F, \{ G, K \}_{D(\Phi)} \right\}_{D(\Phi)} + \left\{ G, \{ K, F \}_{D(\Phi)} \right\}_{D(\Phi)} + \left\{ K, \{ F, G \}_{D(\Phi)} \right\}_{D(\Phi)} = 0,$

onde a primeira propriedade decorre da antissimetria do parêntese de Poisson e a última é a identidade de Jacobi da mecânica clássica, expressa agora em termos dos colchetes de Dirac.

A implementação de vínculos de forma consistente na mecânica quântica exige um certo cuidado, pois as variáveis canônicas se tornam operadores atuando em um

espaço de Hilbert, e estes operadores possuem relações de comutação não triviais uns com os outros. Para realizar a quantização canônica numa teoria com vínculos de segunda-classe, devemos escolher novas variáveis canônicas. Suponha que existam variáveis canônicas (ω, Ω) , tal que um conjunto canônico de vínculos Ω seja equivalente ao conjunto vínculos Φ , e além disso, ω e Ω sejam conjuntos separados de pares de variáveis canônicas. Nestas novas variáveis a superfície de vínculo é descrita através da equação $\Omega = 0$. As variáveis ω podem, portanto, ser assumidas como sendo as coordenadas canônicas sobre a superfície de vínculo, fisicamente essas são as coordenadas que realmente possuem dinâmica na teoria, no sentido de que elas podem ser descritas por equações de movimento de Hamilton. Nestas novas variáveis as equações de movimento se tornam

$$\dot{\omega} = \{\omega, H_{ph}\}_{D(\Omega)} \quad (4.35)$$

a Hamiltoniana H_{ph} recebe o nome de Hamiltoniana física, isto se deve ao fato de que apenas variáveis consideradas físicas, ou seja variáveis que podem ser expressa mediante equações de Hamilton, pertecem a função H_{ph} . Nestas novas variáveis os colchetes de Dirac se tornam iguais aos colchetes de Poisson sob a nova superfície de vínculo $\Omega = 0$.

Para concluir essa seção, vamos considerar a teoria do campo de Dirac (livre) que descreve partículas e antipartículas com spin 1/2. A densidade Lagrangiana possui a forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (4.36)$$

sendo ψ um spinor de Dirac, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ o seu conjugado e γ_μ são um conjunto de matrizes de Dirac satisfazendo a relação fundamental

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

O formalismo Hamiltoniano se inicia com o cálculo dos momentos a partir da densi-

dade Lagrangiana (4.36)

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0, \quad p_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \quad (4.37)$$

os vínculos primários são dados por

$$\Phi_1^{(1)} = p_{\bar{\psi}}, \quad \Phi_2^{(1)} = p_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0 \quad (4.38)$$

As densidades Hamiltonianas \mathcal{H} e $\mathcal{H}^{(1)}$ são dadas por

$$\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\gamma^k\partial_k + m)\psi, \quad \mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H} + \lambda^1 p_{\bar{\psi}} + \lambda^2 (p_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0) \quad (4.39)$$

Claramente temos uma teoria com vínculos de segunda classe, assim, todas as funções λ podem ser encontradas através da condição de conservação dos vínculos no tempo (4.20). Podemos encontrar o novo conjunto de variáveis canonicamente conjugadas (ω, Ω) como sendo dado por

$$\omega^1 = \psi - ip_{\bar{\psi}}\gamma^0, \quad \omega_2 = p_\psi \quad (4.40)$$

$$\Omega^1 = \bar{\psi} + ip_\psi\gamma^0, \quad \Omega_2 = p_{\bar{\psi}} \quad (4.41)$$

Expressando a Hamiltoniana H em termos das variáveis (ω, Ω) e colocando Ω igual a zero, podemos obter a Hamiltoniana física

$$\mathcal{H}_{ph} = -i\omega_2\gamma^0(-i\gamma^k\partial_k + m)\omega^1 \quad (4.42)$$

Podemos assumir que p_ψ e ψ como sendo um par de variáveis canônicas, pois o colchetes de Poisson entre essa variáveis é igual ao encontrado na literatura [42], portanto

$$\mathcal{H}_{ph} = -ip_\psi\gamma^0(-i\gamma^k\partial_k + m)\psi = \bar{\psi}(-i\gamma^k\partial_k + m)\psi \quad (4.43)$$

a qual concorda com o resultado encontrado na literatura para a equação de Dirac.

4.3 Quantização Canônica e a Mecânica Quântica Consistente.

Tradicionalmente quantizar uma teoria significa obter uma teoria quântica, por meio de uma teoria clássica expressa na forma Hamiltoniana, substituindo as variáveis canônicas clássicas por operadores, atuando em um espaço de Hilbert abstrato. Portanto, iremos descrever de forma breve, o processo de quantização canônica para sistemas vinculados e a dedução do funcional gerador para uma teoria com vínculos de segunda-classe, seguiremos de perto a abordagem exposta em [44].

No formalismo Hamiltoniano as coordenadas generalizadas q_j e seu momento canonicamente conjugado p_j , são os observáveis mecânicos fundamentais de uma partícula ou sistema. Na mecânica quântica essas variáveis canônicas se tornam operadores, denotados por Q_j e P_k e são assumidos obedecer a seguinte relação de comutação

$$[Q_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk} \quad (4.44)$$

Os operadores Q e P são assumidos ter um conjunto completo de autoestados $|q\rangle$ e $|p\rangle$ tal que, com $i, j = 1, \dots, n$

$$Q_j|q\rangle = q_j|q\rangle, \quad P_j|p\rangle = p_j|p\rangle \quad (4.45)$$

O produto interno dos estados $|q\rangle$ e $|p\rangle$ são assumidos obedecer

$$\langle q|q'\rangle = \delta^n(q - q'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta^n(p - p') \quad (4.46)$$

tal que esses estados sejam ortonormais no sentido contínuo. Definindo

$$\int d^n p |p\rangle\langle p| = 1, \quad \int d^n q |q\rangle\langle q| = 1 \quad (4.47)$$

A similaridade formal da expressão (4.44) com o colchetes de Poisson de dois observáveis $A(p, q)$ e $B(p, q)$ devem ser substituídos pelos comutadores da mecânica quântica da seguinte maneira

$$\{A(p, q), B(p, q)\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A(P, Q), B(P, Q)] \quad (4.48)$$

Como estamos tratando de uma teoria vinculada os colchetes de Poisson devem ser substituídos pelos colchetes de Dirac, portanto para uma teoria com vínculos a regra de quantização (4.48) toma a forma

$$\{A(p, q), B(p, q)\}_{D(\Phi)} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A(P, Q), B(P, Q)] \quad (4.49)$$

O operador momento expresso na representação de coordenadas possui a forma:

$$\langle q|P_j|q'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \delta^n(q - q') \quad (4.50)$$

por sua vez, temos o seguinte produto interno

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot q\right) \quad (4.51)$$

logo,

$$\langle q|q'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^n p \langle q|p\rangle \langle p|q'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ip \cdot (q - q')/\hbar} = \delta^n(q - q') \quad (4.52)$$

Na descrição de Heisenberg da mecânica quântica os observáveis são dependentes do tempo e podem ser expressos como:

$$O_H(t) = e^{iHt/\hbar} O_S e^{-iHt/\hbar} \quad (4.53)$$

satisfazendo a seguinte equação:

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_H(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O_H + [O_H, H] \quad (4.54)$$

Na formulação da integral de trajetória da Mecânica Quântica o objeto de maior interesse é a amplitude de transição. Se o sistema estiver, na descrição de Schrödinger, em um estado $|\phi, t_a\rangle$ em um instante t_a , então a amplitude de transição para o estado $|\psi, t_b\rangle$ em um instante t_b é definido com

$$Z(\psi, \phi) = \langle \psi, t_b | \phi, t_a \rangle$$

A amplitude de transição então fornece a probabilidade do sistema transitar entre os respectivos estados $|\phi, t_a\rangle$ e $|\psi, t_b\rangle$. Antes da dedução convém fazer algumas observações. Primeiro, será assumido que o limite de integração usado nas deduções será

de $\pm\infty$. Segundo, será assumido que o Hamiltoniano não possui dependência temporal explícita. Terceiro, o sistema a ser considerado será de apenas uma partícula movendo-se em um potencial unidimensional. O primeiro passo na derivação da integral de trajetória será construir autoestados instantâneos, $|q, t\rangle$ e $|p, t\rangle$, da descrição de Heisenberg com operadores $Q(t)$ e $P(t)$. Estes são definidos por

$$|q, t\rangle = e^{iHt/\hbar}|q\rangle, \quad |p, t\rangle = e^{iHt/\hbar}|p\rangle$$

Estes estados não são estados na descrição de Schrödinger. Contudo, estes estados são completos, desde que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q, t\rangle \langle q, t| = e^{iHt/\hbar} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| \right) e^{-iHt/\hbar} = 1$$

Os estados $|q, t\rangle$ são autoestados do operador $Q(t)$ na descrição de Heisenberg, no sentido que

$$Q(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle, \quad P(t)|p, t\rangle = p|p, t\rangle$$

Estes estados também possuem a importante propriedade que, para $|\psi, t\rangle$ um estado na descrição de Schrödinger, temos que

$$\langle q, -t|\psi, t\rangle = \langle q|\psi\rangle = \psi(q) \quad \langle p, -t|\psi, t\rangle = \langle p|\psi\rangle = \bar{\psi}(p)$$

de forma que podem ser usados para derivar a forma da integral de trajetória para o elemento de transição entre estados na descrição de Schrödinger. O objeto de interesse, Z , será definido como um produto interno dos autoestados em tempos diferentes, ou seja

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b) = \langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle$$

onde será assumido que $t_b > t_a$. Conhecer a forma para Z nos permite realizar o cálculo de uma forma mais geral, desde que o elemento de transição entre estados na descrição de Schrödinger é dado por

$$\begin{aligned} \langle \psi, -t_b|\phi, -t_a\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_a dq_b \langle \psi, -t_b|q_b, t_b\rangle \langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle \langle q_a, t_a|\phi, -t_a\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_a dq_b \phi^*(q_b) \psi(q_b) Z(q_a, t_a, q_b, t_b) \end{aligned} \quad (4.55)$$

sendo que, foi inserido duas relações de completeza na expressão acima. Uma vez que o estado inicial e o estado final do sistema sejam especificados por funções normalizadas $\phi(q)$ e $\psi(q)$, o sistema se propaga no tempo de ψ para ϕ através da função Z . Por esta razão o elemento de transição pode ser denominado como o propagador, desde que, ele contém todas as informações com respeito ao desenvolvimento temporal do sistema.

O intervalo de tempo $t_b - t_a$ será primeiro particionado em N passos infinitesimais de duração $\epsilon = (t_b - t_a)/N$, onde o limite $N \rightarrow \infty$ está subentendido em tudo o que segue. Em seguida, $N - 1$ conjuntos completos de autoestados $|q\rangle$ intermediários serão inseridos no elemento de transição sequencialmente em cada um dos respectivos tempos $t_n = t_a + n\epsilon$. Isto fornece

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-1} \langle q_b, t_b | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1} | \dots | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle \quad (4.56)$$

tal que o elemento de transição tenha sido reduzido ao produto de N elementos de transição, os quais são infinitesimais no sentido de que sua diferença temporal se aproxime a zero. Cada um dos elementos de transição pode agora ser analisado. Desde que, a diferença temporal entre dois estados é ϵ , então o j -ésimo elemento possui a forma

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-i\epsilon H(P, Q)/\hbar} | q_j \rangle$$

Para avançarmos será necessário usar uma convenção adicional. Para calcular o elemento de matriz do Hamiltoniano na exponencial, a mesma deve ser expandida em uma série de potências. Após a expansão todos os operadores P serão movidos para a esquerda e todos os operadores Q serão movidos a direita, de forma que obtemos um ordenamento de coordenadas. Estes resultados mostram que o elemento de transição

infinitesimal se torna, para $\epsilon \approx 0$

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-i\epsilon H(P, Q)/\hbar} | q_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | e^{-i\epsilon H(P, Q)/\hbar} | q_j \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j e^{-i\epsilon H(p_j, q_j)/\hbar} \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle \end{aligned} \quad (4.57)$$

Este elemento infinitesimal pode ser simplificado da seguinte forma

$$\langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar}$$

usando o fato que q_j é a coordenada associada com o estado em um tempo t_j podemos fazer a identificação formal

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (q_{j+1} - q_j) = \frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j$$

Usando essa indentificação, os elementos de matriz infinitesimais podem ser expressos na forma

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \epsilon (p_j \dot{q}_j - H(p_j, q_j)) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \epsilon L(p_j, q_j) \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde

$$\mathcal{L}(p_j, q_j) = p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(p_j, q_j)$$

é a densidade lagrangiana na formulação Hamiltoniana da mecânica clássica. O elemento de transição Z pode finalmente ser escrito como o produto de N elementos infinitesimais

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} dq_1 \cdots dq_{N-1} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon L(p_j, q_j) \right]$$

onde a identificação $q_0 = q_a$ e $q_N = q_b$ está implícitas na expressão acima. O argumento da exponencial possui a forma de uma soma de Riemann, permitindo-nos a identificação

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon L(p_j, q_j) = \int_{t_a}^{t_b} dt L(p(t), q(t), t_a, t_b)$$

Portanto, a ação clássica tem aparecido no elemento de transição quântico. A medida da integral de trajetória aparecendo na expressão acima será escrita formalmente como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} dq_1 \dots dq_{N-1} \equiv \mathcal{D}p\mathcal{D}q$$

A forma final do elemento de transição será dado por

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int_{q_b}^{q_a} \mathcal{D}p\mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(p, q) \right]$$

Esta expressão é a forma fundamental para a versão do propagador na integral de trajetória. Algumas aplicações da integral de trajetória encontradas na literatura não possuem Dp aparecendo na medida. Isto não é necessariamente incorreto desde que é possível integrar todos os p_j para uma grande classe de Lagrangianas.

A partir desse momento iremos descrever como introduzir, de forma consistente, os vínculos na medida da integral de trajetória. A discussão apresentada aqui será restrita à vínculos da forma $f(Q)$. A técnica geral para implementar os vínculos na integral de trajetória, é construir operadores de projeção sobre o subespaço físico dos estados q , ou seja

$$P^q = N_q \int d^n q \delta(q_n - r(q_1, \dots, q_{n-1})) |q\rangle \langle q|, \quad P^p = N_p \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \delta(p_n) |p\rangle \langle p| \quad (4.59)$$

onde N_q e N_p são constantes de normalização. Estes operadores de projeção são construídos a partir dos autoestados dos operadores Q_j , os quais na forma não vinculada podem ser escritos como $|q_1, \dots, q_n\rangle \equiv |q\rangle$. Em termos dos autovalores a equação de vínculo pode ser escrita como

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (4.60)$$

e será assumido possuir a seguinte raiz

$$q_n = r(q_1, \dots, q_{n-1}) \equiv r(q_\perp) \quad (4.61)$$

onde, por simplicidade notacional, podemos assumir que os q_n podem ser encontrados, e q_\perp denota a solução no subespaço dos q_i que sejam ortogonais à variável vinculada

q_n . Usando os operadores de projeção (4.59) e repetindo os passos para a dedução de Z , temos que;

$$Z(q_a, t_a, q_b, t_b) = \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int_{q_b}^{q_a} \mathcal{D}^v p \mathcal{D}^v q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(p, q) \right]$$

sendo

$$\mathcal{D}^v p \mathcal{D}^v q = \prod_n \delta(p_n) \delta(q_n - r(q_1, \dots, q_{n-1})) dp_n dq^n \prod_i \frac{dp_i^* dq_i^*}{(2\pi\hbar)^{n-i}} \quad (4.62)$$

ou ainda

$$\mathcal{D}^v p \mathcal{D}^v q = \prod_n \delta(p_n) \delta(\Phi^{(2)}) \det \{ \Phi_k, \Phi_{k'} \} \prod_i \frac{dp_i dq_i}{(2\pi\hbar)^{n-i}} \quad (4.63)$$

onde p_a representa todos os momentos da teoria, $\Phi^{(2)}$ são vínculos secundários e $\det \{ \Phi_k, \Phi_{k'} \}$ representa o determinante da matriz dos colchetes de Poisson de todos os vínculos da teoria. Uma outra dedução da integral de trajetória numa teoria com vínculos de segunda classe pode ser encontrada em [45, 46].

Capítulo 5

Quantização Canônica do Campo DKP Covariante de Galilei.

No presente capítulo, seguindo de perto a construção apresentada em [41, 42, 43], realizamos a quantização canônica do setor escalar do campo DKP covariante de Galilei. Na primeira seção construímos a formulação Hamiltoniana da teoria para sistemas singulares, obtendo a equação de campo de Schrödinger escrita no formalismo covariante de Galilei. A quantização será reservada para a segunda seção. Na terceira seção será obtido o funcional gerador para as funções de Green, mediante a introdução do sistema vinculado na integral de trajetória.

5.1 Formulação Hamiltoniana.

Seja a densidade Lagrangiana que descreve o campo DKP livre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \beta^\mu (\partial_\mu \Psi) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \beta^\mu \Psi + k \bar{\Psi} \Psi \quad (5.1)$$

As matrizes β^μ satisfazem a relação algébrica fundamental (3.1). Usando a representação do setor escalar apresentada no capítulo 2, podemos expressar os campos $\bar{\Psi}$ e

Ψ por

$$\bar{\Psi} = [\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad -\psi_5^* \quad -\psi_4^* \quad -\psi_6^*], \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Neste contexto, podemos também expressar a densidade Lagrangiana (5.1) na forma de componente (ver Apêndice F):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\psi^{*\mu} \partial_\mu \psi_6 - \psi_6^* \partial_\mu \psi^\mu - (\partial_\mu \psi^{*\mu}) \psi_6 + (\partial_\mu \psi_6^*) \psi^\mu] + k(\psi^{*\mu} \psi_\mu - \psi_6^* \psi_6) \quad (5.3)$$

Introduzindo os momentos canônicos

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^i} = 0, & p_4 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^4} = -\frac{1}{2} \psi_6^*, & p_5 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^5} = 0, & p_6 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_6} = \frac{1}{2} \psi^{*4} \\ p_i^* &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{*i}} = 0, & p_4^* &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{*4}} = -\frac{1}{2} \psi_6, & p_5^* &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{*5}} = 0, & p_6^* &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_6^*} = \frac{1}{2} \psi^4 \end{aligned} \quad (5.4)$$

a partir deste momento, durante todo o texto, os índices latinos percorrem os números 1, 2, 3. Portanto, podemos construir a densidade Hamiltoniana inicial \mathcal{H}

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\mu \dot{\psi}^\mu + p_\mu^* \dot{\psi}^{*\mu} + p_6 \dot{\psi}_6 + p_6^* \dot{\psi}_6^* - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} [-\psi^{*i} \partial_i \psi_6 - \psi^{*5} \partial_5 \psi_6 + \psi_6^* \partial_i \psi^i + \psi_6^* \partial_5 \psi^5 - (\partial_i \psi^{*i}) \psi_6 - (\partial_5 \psi^{*5}) \psi_6 + \\ &+ (\partial_i \psi_6^*) \psi^i + (\partial_5 \psi_6^*) \psi^5] - k(\psi^{*\mu} \psi_\mu - \psi_6^* \psi_6) \end{aligned} \quad (5.5)$$

A partir das Eqs. (5.4) podemos perceber que existem vínculos primários

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)} &= p_6 - \frac{1}{2} \psi^{*4}, & \Phi_2^{(1)} &= p_4 + \frac{1}{2} \psi_6^*, & \Phi_3^{(1)} &= p_6^* - \frac{1}{2} \psi^4, & \Phi_4^{(1)} &= p_4^* + \frac{1}{2} \psi_6 \\ \Phi_{5i}^{(1)} &= p_i^*, & \Phi_{6i}^{(1)} &= p_i, & \Phi_7^{(1)} &= p_5^*, & \Phi_8^{(1)} &= p_5 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Os vínculos primários

$$\left\{ \Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, \Phi_3^{(1)}, \Phi_4^{(1)}, \Phi_{5i}^{(1)}, \Phi_{6i}^{(1)}, \Phi_7^{(1)}, \Phi_8^{(1)} \right\}$$

podem ser recombinaados, de tal forma que temos o seguinte quadro

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)} &= p_6 - \frac{1}{2}\psi^{*4}, & \Phi_2^{(1)} &= p_4 + \frac{1}{2}\psi_6^*, & \Phi_3^{(1)} &= p_6^* - \frac{1}{2}\psi^4, & \Phi_4^{(1)} &= p_4^* + \frac{1}{2}\psi_6 \\ \Phi_5^{(1)} &= p_i^* + p_5^*, & \Phi_6^{(1)} &= p_i + p_5\end{aligned}\quad (5.7)$$

sendo $m_1 = 1, \dots, 6$ o número de vínculos primários e $i = 1 \dots 3$. Assim podemos dividir o conjunto de vínculos (5.7) em

$$\left\{ \Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, \Phi_3^{(1)}, \Phi_4^{(1)} \right\} \quad - \quad \text{vínculos de segunda classe} \quad (5.8)$$

e

$$\left\{ \Phi_5^{(1)}, \Phi_6^{(1)} \right\} \quad - \quad \text{vínculos de primeira classe.} \quad (5.9)$$

A matriz dos colchetes de Poisson para os vínculos primários (5.7) possui a forma

$$\left\| \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)} \right\} \right\| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

portanto

$$\det \left\| \left\{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)} \right\} \right\| = 0, \quad \text{posto} = 4 = \rho_1$$

a matriz (5.10) é singular, então temos que $m_1 - \rho_1 = 6 - 4 = 2$ funções λ permanecem indeterminadas. Podemos construir a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}^{(1)}$ de acordo com o procedimento padrão [22]

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)} &= \mathcal{H} + \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\psi^{*i} \partial_i \psi_6 - \psi^{*5} \partial_5 \psi_6 + \psi_6^* \partial_i \psi^i + \psi_6^* \partial_5 \psi^5 - (\partial_i \psi^{*i}) \psi_6 - (\partial_5 \psi^{*5}) \psi_6 + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_i \psi_6^*) \psi^i + (\partial_5 \psi_6^*) \psi^5 \right] - k(\psi^{*\mu} \psi_\mu - \psi_6^* \psi_6) + \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)}\end{aligned}\quad (5.11)$$

A densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}^{(1)}$ difere da densidade Hamiltoniana \mathcal{H} por uma dependência explícita das funções λ indeterminadas. Os vínculos primários devem ser conservados no tempo, ou seja

$$\dot{\Phi}_\alpha^{(1)} = \{\Phi_\alpha^{(1)}, \mathcal{H}^{(1)}\} = \{\Phi_\alpha^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\} \lambda^\beta = 0$$

o que pode ser observado como uma equação algébrica para encontrar as funções λ indeterminadas, para o conjunto (5.6), obtemos

$$\bullet \dot{\Phi}_1^{(1)} = \{\Phi_1^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_1^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\} \lambda^\beta = \{\Phi_1^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_1^{(1)}, \Phi_4^{(1)}\} \lambda^4 \quad (5.12)$$

$$= \lambda^4 - \partial_i \psi^{*i} - \partial_5 \psi^{*5} - k\psi_6^*$$

$$\bullet \dot{\Phi}_2^{(1)} = \{\Phi_2^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_2^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\} \lambda^\beta = \{\Phi_2^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_2^{(1)}, \Phi_3^{(1)}\} \lambda^3 \quad (5.13)$$

$$= \lambda^3 + k\psi_4^*$$

$$\bullet \dot{\Phi}_3^{(1)} = \{\Phi_3^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_3^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\} \lambda^\beta = \{\Phi_3^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_3^{(1)}, \Phi_2^{(1)}\} \lambda^2 \quad (5.14)$$

$$= -\lambda^2 - \partial_i \psi^i - \partial_5 \psi^5 - k\psi_6$$

$$\bullet \dot{\Phi}_4^{(1)} = \{\Phi_4^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_4^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\} \lambda^\beta = \{\Phi_4^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_4^{(1)}, \Phi_1^{(1)}\} \lambda^1 \quad (5.15)$$

$$= \lambda^1 + k\psi_4$$

$$\bullet \dot{\Phi}_5^{(1)} = \{\Phi_5^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_5^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\} \lambda^\beta = \{\Phi_5^{(1)}, \mathcal{H}\} \quad (5.16)$$

$$= \partial_i \psi_6 + k\psi_i + \partial_5 \psi_6 + k\psi_5$$

$$\bullet \dot{\Phi}_6^{(1)} = \{\Phi_6^{(1)}, \mathcal{H}\} + \{\Phi_6^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\} \lambda^\beta = \{\Phi_6^{(1)}, \mathcal{H}\} \quad (5.17)$$

$$= \partial_i \psi_6^* + k\psi_i^* + \partial_5 \psi_6^* + k\psi_5^*$$

sendo

$$\lambda^4 = -\partial_i \psi^{*i} - \partial_5 \psi^{*5} - k\psi_6^*, \quad \lambda^3 = -k\psi_4^* \quad (5.18)$$

$$\lambda^2 = -\partial_i \psi^i - \partial_5 \psi^5 - k\psi_6, \quad \lambda^1 = -k\psi_4$$

as expressões (5.18) surgem como uma consequência da condição de conservação dos vínculos primários de segunda-classe (5.8). A condição de conservação aplicada ao

conjunto de vínculos primários de primeira-classe (5.9) proporciona os vínculos secundários

$$\Phi_1^{(2)} = \partial_i \psi_6 + k \psi_i + \partial_5 \psi_6 + k \psi_5, \quad \Phi_2^{(2)} = \partial_i \psi_6^* + k \psi_i^* + \partial_5 \psi_6^* + k \psi_5^* \quad (5.19)$$

Logo, temos que

$$\Phi_\gamma^{(2)} = \left\{ \Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(2)} \right\}$$

é um conjunto de vínculos secundários, onde $\gamma = 1, 2$. Os vínculos (5.6) e (5.19) são um conjunto de vínculos de segunda-classe. Realizando um reordenamento de todos os vínculos encontrados até agora, no sentido de que a matriz correspondente ao colchetes de Poisson de todos os vínculos possua uma estrutura simples, temos que;

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= p_6 - \frac{1}{2} \psi^{*4}, & \tilde{\Phi}_2 &= p_4 + \frac{1}{2} \psi_6^*, & \tilde{\Phi}_3 &= p_i + p_5, & \tilde{\Phi}_4 &= p_i^* + p_5^* \\ \tilde{\Phi}_5 &= \partial_i \psi_6^* + k \psi_i^* + \partial_5 \psi_6^* + k \psi_5^*, & \tilde{\Phi}_6 &= \partial_i \psi_6 + k \psi_i + \partial_5 \psi_6 + k \psi_5, \\ \tilde{\Phi}_7 &= p_6^* - \frac{1}{2} \psi^4, & \tilde{\Phi}_8 &= p_4^* + \frac{1}{2} \psi_6 \end{aligned}$$

Portanto, temos o seguinte conjunto total de vínculos de segunda classe

$$\tilde{\Phi} = \left\{ \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4, \tilde{\Phi}_5, \tilde{\Phi}_6, \tilde{\Phi}_7, \tilde{\Phi}_8 \right\} \quad (5.20)$$

A matriz composta do colchetes de Poisson dos vínculos (5.20) possui a forma

$$\bullet \quad \left\| \left\{ \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_{k'} \right\} \right\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_i - \partial_5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & \partial_i + \partial_5 & -k \\ \partial_i + \partial_5 & -k & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\partial_i - \partial_5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e sua inversa

$$\bullet \quad \left\| \left\{ \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_{k'} \right\} \right\|^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_i + \partial_5}{k} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 1 & -\frac{\partial_i + \partial_5}{k} \\ -1 & -\frac{\partial_i + \partial_5}{k} & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial_i + \partial_5}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

com

$$\tilde{\Phi}_k = \{ \Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\gamma^{(2)} \}, \quad \text{posto} \left\| \left\{ \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_{k'} \right\} \right\| = 8 \quad (5.22)$$

Em um conjunto de vínculos de segunda-classe, o número total de vínculos deve necessariamente ser par. Isto segue a partir do fato que uma matriz antissimétrica singular possui sempre posto par [42]. Aplicando a condição de conservação para todos os vínculos no tempo

$$\dot{\tilde{\Phi}}_k = \left\{ \tilde{\Phi}_k, \mathcal{H}^{(1)} \right\} = \left\{ \tilde{\Phi}_k, \mathcal{H} \right\} + \left\{ \tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_{k'} \right\} \lambda^{k'} = 0$$

obtemos

$$\lambda^1 = -\left\{\tilde{\Phi}_4, \tilde{\Phi}_1\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_4, \mathcal{H}\right\}-\left\{\tilde{\Phi}_8, \tilde{\Phi}_1\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_8, \mathcal{H}\right\} \quad (5.23)$$

$$= -\partial_i \psi_6 - k \psi_i - \partial_5 \psi_6 - k \psi_5 - k \psi_4$$

$$\lambda^2 = -\left\{\tilde{\Phi}_4, \tilde{\Phi}_2\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_4, \mathcal{H}\right\}-\left\{\tilde{\Phi}_7, \tilde{\Phi}_2\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_7, \mathcal{H}\right\} \quad (5.24)$$

$$= -\frac{\partial_i + \partial_5}{k}[\partial_i \psi_6 + k \psi_i] - \frac{\partial_i + \partial_5}{k}[\partial_5 \psi_6 + k \psi_5] - [-\partial_i \psi^i - \partial_5 \psi^5 - k \psi_6]$$

$$\lambda^3 = -\left\{\tilde{\Phi}_6, \tilde{\Phi}_3\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_6, \mathcal{H}\right\}-\left\{\tilde{\Phi}_7, \tilde{\Phi}_3\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_7, \mathcal{H}\right\}+ \quad (5.25)$$

$$-\left\{\tilde{\Phi}_8, \tilde{\Phi}_3\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_8, \mathcal{H}\right\}$$

$$= -\partial_i \psi^i - \partial_5 \psi^5 - k \psi_6 + (\partial_i + \partial_5) \psi_4$$

$$\lambda^4 = \left\{\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_4\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_1, \mathcal{H}\right\}-\left\{\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_4\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_2, \mathcal{H}\right\}-\left\{\tilde{\Phi}_5, \tilde{\Phi}_4\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_5, \mathcal{H}\right\} \quad (5.26)$$

$$= \partial_i \psi^{*i} + \partial_5 \psi^{*5} + k \psi_6^* + (\partial_i + \partial_5) \psi_4^*$$

$$\lambda^5 = -\left\{\tilde{\Phi}_4, \tilde{\Phi}_5\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_4, \mathcal{H}\right\} \quad (5.27)$$

$$= \frac{1}{k}[-\partial_i \psi_6 - k \psi_i - \partial_5 \psi_6 - k \psi_5]$$

$$\lambda^6 = -\left\{\tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_6\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_3, \mathcal{H}\right\} \quad (5.28)$$

$$= \frac{1}{k}[\partial_i \psi_6^* + k \psi_i^* + \partial_5 \psi_6^* + k \psi_5^*]$$

$$\lambda^7 = -\left\{\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_7\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_2, \mathcal{H}\right\}-\left\{\tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_7\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_3, \mathcal{H}\right\} \quad (5.29)$$

$$= -\partial_i \psi_6^* - k \psi_i^* - \partial_5 \psi_6^* - k \psi_5^* - k \psi_4$$

$$\lambda^8 = -\left\{\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_8\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_1, \mathcal{H}\right\}-\left\{\tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_8\right\}^{-1}\left\{\tilde{\Phi}_3, \mathcal{H}\right\} \quad (5.30)$$

$$= -\frac{\partial_i + \partial_5}{k}[\partial_i \psi_6^* + k \psi_i^*] - \frac{\partial_i + \partial_5}{k}[\partial_5 \psi_6^* + k \psi_5^*] - [-\partial_i \psi^{*i} - \partial_5 \psi^{*5} - k \psi_6^*]$$

Portanto, em uma teoria com vínculos de segunda-classe, todas as funções λ em (5.23) são proporcionais ao conjunto de vínculos (5.19) mais as funções λ já encontradas em (5.18) [22]. Substituindo as funções λ determinada diretamente em (5.11) obtemos

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} = \mathcal{H} + \tilde{\Phi}_k \lambda^k$$

a qual representa a Hamiltoniana com todas as funções (5.23), os vínculos (5.6) e (5.19) presente. As equações de movimento para ψ_6 são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_6 &= \left\{ \psi_6, \tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \right\} = -\partial_i \psi_6 - k\psi_i - \partial_5 \psi_6 - k\psi_5 - k\psi_4 \\ \dot{\psi}_6^* &= \left\{ \psi_6^*, \tilde{\mathcal{H}}^{(1)} \right\} = -\partial_i \psi_6^* - k\psi_i^* - \partial_5 \psi_6^* - k\psi_5^* - k\psi_4\end{aligned}\quad (5.31)$$

logo, temos que

$$\partial_\mu \psi_6 + k\psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \psi_6^* + k\psi_\mu^* = 0 \quad (5.32)$$

de forma análoga para ψ^4 ;

$$\dot{\psi}^4 = \left\{ \psi^4, \tilde{\mathcal{H}}^1 \right\} = -\partial_i \psi^i - \partial_5 \psi^5 - k\psi_6 \quad (5.33)$$

então,

$$\partial^\mu \psi_\mu + k\psi_6 = 0 \quad (5.34)$$

e para ψ^{*4} ;

$$\dot{\psi}^{*4} = \left\{ \psi^{*4}, \tilde{\mathcal{H}}^1 \right\} = -k\psi_6^* - \partial_i \psi^{*i} - \partial_5 \psi^{*5} \quad (5.35)$$

da mesma forma,

$$\partial^\mu \psi_\mu^* + k\psi_6^* = 0 \quad (5.36)$$

A partir das Eqs. (5.32), (5.34) e (5.36) obtemos uma equação do tipo Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi_6 - k^2 \psi_6 = 0, \quad \partial^\mu \partial_\mu \psi_6^* - k^2 \psi_6^* = 0 \quad (5.37)$$

a qual representa a equação de Schrödinger para os campos escalares ψ_6 e ψ_6^* , escritas no formalismo covariante de Galilei em um nível clássico.

5.2 Quantização.

Segundo a discussão da seção 4.2 devemos encontrar um novo conjunto de variáveis canônicas ω e um conjunto de vínculos Ω semelhante a $\tilde{\Phi}$, uma escolha seria

$$\begin{aligned}
\omega^{(1)} &= \psi_6, & \omega^{(2)} &= p_6, & \omega_4^{(1)} &= \psi_4, & \omega_4^{(2)} &= p_4 & (5.38) \\
\Omega_1 &= p_6 - \frac{1}{2}\psi^{*4}, & \Omega_2 &= p_4^* + \frac{1}{2}\psi_6, & \Omega_3 &= \partial_i\psi_6 + k\psi_i + \partial_5\psi_6 + k\psi_5 \\
\Omega_4 &= p_i + p_5, & \Omega_5 &= \partial_i\psi_6^* + k\psi_i^* + \partial_5\psi_6^* + k\psi_5^*, & \Omega_6 &= p_i^* + p_5^* \\
\Omega_7 &= p_4 + \frac{1}{2}\psi_6^*, & \Omega_8 &= p_6^* - \frac{1}{2}\psi^4
\end{aligned}$$

Nas novas variáveis a superfície de vínculos seria descrita através das equações $\Omega_k = 0$. As variáveis ω podem, portanto, serem assumidas como sendo as novas coordenadas canônicas sobre a superfície de vínculo, as relações de comutação a tempos iguais em termos dos colchetes de Dirac são listadas abaixo.

Colchetes de Dirac da variável canônica ψ^i , $i = 1, 2, 3$ com todas as outras variáveis

$$\bullet \{ \psi^i, \psi^j \}_{D(\tilde{\Phi})} = \{ \psi^i, \psi^j \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_3 \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_3, \psi^j \} = 0 \quad (5.39)$$

$$\bullet \{ \psi^i, \psi^4 \}_{D(\tilde{\Phi})} = \{ \psi^i, \psi^4 \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_2 \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_2, \psi^4 \} = 0 \quad (5.40)$$

$$\bullet \{ \psi^i, \psi^5 \}_{D(\tilde{\Phi})} = \{ \psi^i, \psi^5 \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_3 \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_3, \psi^5 \} = 0 \quad (5.41)$$

$$\bullet \{ \psi^i, \psi_6 \}_{D(\tilde{\Phi})} = \{ \psi^i, \psi_6 \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_1 \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_1, \psi_6 \} = 0 \quad (5.42)$$

com todos os momentos

$$\begin{aligned}
\bullet \{ \psi^i, p_j \}_{D(\tilde{\Phi})} &= \{ \psi^i, p_j \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_6 \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_6, p_j \} & (5.43) \\
&= \{ \psi^i, p_j \} + 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\bullet \{ \psi^i, p_4 \}_{D(\tilde{\Phi})} = \{ \psi^i, p_4 \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_{l'} \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_{l'}, p_4 \} = 0 \quad (5.44)$$

$$\bullet \{ \psi^i, p_5 \}_{D(\tilde{\Phi})} = \{ \psi^i, p_5 \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_{l'} \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_{l'}, p_5 \} = 0 \quad (5.45)$$

$$\bullet \{ \psi^i, p_6 \}_{D(\tilde{\Phi})} = \{ \psi^i, p_6 \} - \{ \psi^i, \tilde{\Phi}_3 \} \{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_6 \}^{-1} \{ \tilde{\Phi}_6, p_6 \} = 0 \quad (5.46)$$

colchetes de Dirac de ψ^4 com todas as variáveis

$$\bullet \{\psi^4, \psi^4\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^4, \psi^4\} - \{\psi^4, \tilde{\Phi}_2\} \left\{ \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_3, \psi^4 \right\} = 0 \quad (5.47)$$

$$\bullet \{\psi^4, \psi^5\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^4, \psi^5\} - \{\psi^4, \tilde{\Phi}_2\} \left\{ \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, \psi^5 \right\} = 0 \quad (5.48)$$

$$\bullet \{\psi^4, \psi_6\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^4, \psi_6\} - \{\psi^4, \tilde{\Phi}_2\} \left\{ \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_1 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \psi_6 \right\} = 0 \quad (5.49)$$

com todos os momentos

$$\bullet \{\psi^4, p_j\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^4, p_j\} - \{\psi^4, \tilde{\Phi}_2\} \left\{ \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_j \right\} = 0 \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \bullet \{\psi^4, p_4\}_{D(\tilde{\Phi})} &= \{\psi^4, p_4\} - \{\psi^4, \tilde{\Phi}_2\} \left\{ \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_4 \right\} \\ &= \{\psi^4, p_4\} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\bullet \{\psi^4, p_5\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^4, p_5\} - \{\psi^4, \tilde{\Phi}_2\} \left\{ \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_l \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_l, p_5 \right\} = 0 \quad (5.52)$$

$$\bullet \{\psi^4, p_6\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^4, p_6\} - \{\psi^4, \tilde{\Phi}_2\} \left\{ \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_6 \right\} = 0 \quad (5.53)$$

colchetes de Dirac de ψ^5 com todas as variáveis

$$\bullet \{\psi^5, \psi^5\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^5, \psi^5\} - \{\psi^5, \tilde{\Phi}_3\} \left\{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_3 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_3, \psi^5 \right\} = 0 \quad (5.54)$$

$$\bullet \{\psi^5, \psi_6\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^5, \psi_6\} - \{\psi^5, \tilde{\Phi}_3\} \left\{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_1 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \psi_6 \right\} = 0 \quad (5.55)$$

com todos os momentos

$$\bullet \{\psi^5, p_j\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^5, p_j\} - \{\psi^5, \tilde{\Phi}_3\} \left\{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_j \right\} = 0 \quad (5.56)$$

$$\bullet \{\psi^5, p_4\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^5, p_4\} - \{\psi^5, \tilde{\Phi}_3\} \left\{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_4 \right\} = 0 \quad (5.57)$$

$$\bullet \{\psi^5, p_5\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^5, p_5\} - \{\psi^5, \tilde{\Phi}_6\} \left\{ \tilde{\Phi}_6, \tilde{\Phi}_l \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_l, p_5 \right\} = 0 \quad (5.58)$$

$$\bullet \{\psi^5, p_6\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi^5, p_6\} - \{\psi^5, \tilde{\Phi}_3\} \left\{ \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_6 \right\} = 0 \quad (5.59)$$

colchetes de Dirac de ψ_6 com todas as variáveis

$$\bullet \{\psi_6, \psi_6\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi_6, \psi_6\} - \{\psi_6, \tilde{\Phi}_1\} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_1 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \psi_6 \right\} = 0 \quad (5.60)$$

com todos os momentos

$$\bullet \{\psi_6, p_j\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi_6, p_j\} - \{\psi_6, \Phi_1\} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_j \right\} = 0 \quad (5.61)$$

$$\bullet \{\psi_6, p_4\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi_6, p_4\} - \left\{ \psi_6, \tilde{\Phi}_1 \right\} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_4 \right\} = 0 \quad (5.62)$$

$$\bullet \{\psi_6, p_5\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi_6, p_5\} - \left\{ \psi_6, \tilde{\Phi}_1 \right\} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_l \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_l, p_5 \right\} = 0 \quad (5.63)$$

$$\bullet \{\psi_6, p_6\}_{D(\tilde{\Phi})} = \{\psi_6, p_6\} - \left\{ \psi_6, \tilde{\Phi}_1 \right\} \left\{ \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_6 \right\}^{-1} \left\{ \tilde{\Phi}_6, p_6 \right\} = \{\psi_6, p_6\} \quad (5.64)$$

através das expressões acima podemos perceber que os únicos colchetes de Dirac não nulos são dados por:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\psi}_6(\mathbf{x}, x^5), \hat{p}_6(\mathbf{x}', x'^5) \right] &= i \left\{ \psi_6(\mathbf{x}, x^5), p_6(\mathbf{x}', x'^5) \right\}_{D(\Omega)} = i e^{im(x^5 - x'^5)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \left[\hat{\psi}_4(\mathbf{x}, x^5), \hat{p}_5(\mathbf{x}', x'^5) \right] &= i \left\{ \psi_4(\mathbf{x}, x^5), p_5(\mathbf{x}', x'^5) \right\}_{D(\Omega)} = i e^{im(x^5 - x'^5)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \hat{\Omega}_k &= 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Isto confirma que as únicas variáveis que podem ser consideradas físicas na teoria são o conjunto ω em (5.38).

5.3 Funcional Gerador para as Funções de Green

Como um primeiro passo para a dedução de uma expressão explícita para a função de Green covariante de Galilei do campo DKP, devemos escrever as soluções físicas na forma de operador de campo para uma partícula livre. Tais soluções são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left\{ \hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) u^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) u^{(+)}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right\} \quad (5.66) \\ \hat{\bar{\Psi}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left\{ \hat{a}^{(+)}(\mathbf{p}) \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + \hat{b}^{(-)}(\mathbf{p}) \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right\} \end{aligned}$$

sendo que os operadores

$$\hat{a}^{(+)}(\mathbf{p}) = [\hat{a}^{(-)}(\mathbf{p})]^\dagger, \quad \hat{b}^{(-)}(\mathbf{p}) = [\hat{b}^{(+)}(\mathbf{p})]^\dagger \quad (5.67)$$

satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}), \hat{a}^{(+)}(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad [\hat{b}^{(-)}(\mathbf{p}), \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (5.68)$$

A equação DKP para uma partícula livre foi dada na expressão (2.46)

$$(\beta^\mu p_\mu + k)u^{(\pm)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (5.69)$$

suas soluções foram calculadas no Capítulo 1, expressão (2.53)

$$u^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{2}}{2k} \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \\ E \\ m \\ k \end{bmatrix}, \quad u^{(-)}(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{2}}{2k} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ -E \\ -m \\ k \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

sendo que aqui, as apresentamos normalizadas. No Apêndice G demonstramos as seguintes relações de ortonormalidade

$$(u^{(+)}(\mathbf{p}), u^{(+)}(\mathbf{p})) = \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p})u^{(+)}(\mathbf{p}) = 1 \quad (5.71)$$

$$(u^{(-)}(\mathbf{p}), u^{(-)}(\mathbf{p})) = \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p})u^{(-)}(\mathbf{p}) = -1$$

$$(u^{(-)}(\mathbf{p}), u^{(+)}(\mathbf{p})) = (u^{(+)}(\mathbf{p}), u^{(-)}(\mathbf{p})) = 0.$$

As equações (5.70) enfatizam que a teoria do campo covariante de Galilei é compatível com a idéia de partículas com energia E e massa $+m$, e uma antipartícula, por assim dizer, com energia $-E$ e massa $-m$ [4]. Portanto, podemos denotar $u^{(+)}(\mathbf{p})$ o operador associado a partícula e $u^{(-)}(\mathbf{p})$ o operador associado a antipartícula. Usando as relações de ortonormalidade (5.71) podemos inverter as expressões (5.66), ver Apêndice G, e obter

$$\begin{aligned} \hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{ip \cdot x} \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x) \\ \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-ip \cdot x} \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Os operadores de projeção para partículas e antipartículas covariantes de Galilei podem ser definidos sob a forma

$$\Lambda_+ = u^{(+)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}), \quad \Lambda_- = u^{(-)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}). \quad (5.73)$$

Projetando os operadores (5.73) sobre os spinores (5.70) e usando as relações de ortonormalidade (5.71) temos que

$$\begin{aligned} \Lambda_+ u^{(+)}(\mathbf{p}) &= u^{(+)}(\mathbf{p}), & \Lambda_+ u^{(-)}(\mathbf{p}) &= 0 \\ \Lambda_- u^{(-)}(\mathbf{p}) &= -u^{(-)}(\mathbf{p}), & \Lambda_- u^{(+)}(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Com o objetivo futuro de calcular processos de espalhamento, convém especificarmos o propagador do campo DKP covariante de Galilei, isto é, sua função de Green. O propagador não relativístico deve satisfazer a seguinte equação

$$(\beta_\mu \partial^\mu + k)G_{DKP}(x' - x) = \delta^5(x' - x) \quad (5.75)$$

onde a função delta de Dirac $\delta^5(x' - x)$ pode ser definida como [47]

$$\delta^5(x' - x) = \frac{1}{l} e^{-im(x'^5 - x^5)} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(x'^4 - x^4) \quad (5.76)$$

bem como sua representação integral

$$\delta^5(x' - x) = \frac{1}{(2\pi)^5 l} \int d^5 p e^{-ip \cdot (x' - x)} [2\pi \delta(p^4 - m)]. \quad (5.77)$$

Inserindo a transformada de Fourier de $G_{DKP}(x' - x)$ em (5.75) temos que

$$\int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} (\beta_\mu \partial^\mu + k) e^{ip \cdot (x' - x)} G_{DKP}(p) = \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} e^{ip \cdot (x' - x)} = \delta^5(x' - x). \quad (5.78)$$

Portanto, um bom candidato para a função de Green seria

$$G_{DKP}(p) = \frac{1}{i\beta_\mu p^\mu + k} \quad (5.79)$$

Desta forma, segue das relações acima

$$G_{DKP}(x' - x) = \frac{1}{(2\pi)^5 l} \int d^5 p e^{-ip \cdot (x' - x)} G_{DKP}(p) [2\pi \delta(p^4 - m)]. \quad (5.80)$$

Um resultado que concorda com o encontrado na literatura [27].

Neste ponto iremos deduzir o funcional gerador das funções de Green para o campo DKP covariante de Galilei, porém, convém antes realizar uma discussão a respeito da superfície de vínculo da teoria. Esta discussão irá ser importante para a definição da medida de integração na integral de trajetória. A abordagem que seguimos é devida à [42, 43, 44, 45, 46]. A densidade Lagrangiana é independente do subconjunto de velocidades $\{\dot{\psi}_i, \dot{\psi}_i^*, \dot{\psi}_5, \dot{\psi}_5^*\}$. Logo, segue imediatamente que

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^i} = 0, & p_i^* &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*i}} = 0 \\ p_5 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^5} = 0, & p_5^* &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{*5}} = 0. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Conforme (5.4), o sistema de equações que determina as velocidades

$$\{\dot{\psi}_i, \dot{\psi}_i^*, \dot{\psi}_5, \dot{\psi}_5^*\}$$

em termos dos $\{p_i, p_i^*, p_5, p_5^*\}$ é indeterminada. Tal caso leva imediatamente a presença de vínculos secundários na teoria dados pela expressão (5.19). Certamente para acomodar esses vínculos na medida da integral de trajetória é necessário resolver as equações clássicas de vínculos, desde que isto determine o subespaço físico da medida da integral de trajetória. Os vínculos secundários (5.19) são funções solúveis dos $\{\psi_i, \psi_i^*, \psi_5, \psi_5^*\}$ no sentido que cada um possui uma única raiz para os $\{\psi_i, \psi_i^*, \psi_5, \psi_5^*\}$ sendo canonicamente conjugado aos momentos $\{p_i, p_i^*, p_5, p_5^*\}$. Seguindo a trajetória usual (ver Capítulo 4, seção 4.3) da integral de trajetória em teoria quântica de campo, podemos definir a medida de integração como sendo dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}p_b \mathcal{D}\psi_b &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\varpi} \delta(p_{\varpi}) \delta(p_{\varpi}^*) \delta(\Phi_{\varpi}^{(2)}) \delta(\Phi_{\varpi}^{*(2)}) \det\{p_{\varpi}, \Phi_{\varpi}^{(2)}\} \det\{p_{\varpi}^*, \Phi_{\varpi}^{*(2)}\} \\ &\quad \prod_i^{N-1} \prod_j^{N-1} \frac{d^a p_i d^a \psi_j}{(2\pi)^{n-\varpi}} \frac{d^a p_i^* d^a \psi_j^*}{(2\pi)^{n-\varpi}} \end{aligned} \quad (5.82)$$

sendo $a = 1, \dots, 6$ e $\varpi = 1, 2, 3, 5$. Então a expressão (5.82) pode ser reescrita sob a

forma

$$\begin{aligned} \mathcal{D}p_b \mathcal{D}\psi_b &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\varpi} \delta(p_{\varpi}) \delta(p_{\varpi}^*) \delta(\partial_{\varpi} \psi_6 + k\psi_{\varpi}) \delta(\partial_{\varpi}^* \psi_6^* + k\psi_{\varpi}^*) \\ &\quad \prod_i^{N-1} \prod_j^{N-1} \left[\frac{d^{\varpi} p_i d^{\varpi} \psi_j}{(2\pi)^{n-\varpi}} \frac{d^{\varpi} p_i^* d^{\varpi} \psi_j^*}{(2\pi)^{n-\varpi}} \right] \left[\frac{d^4 p_i d^4 \psi_j}{(2\pi)^n} \frac{d^4 p_i^* d^4 \psi_j^*}{(2\pi)^n} \right] \left[\frac{d^6 p_i d^6 \psi_j}{(2\pi)^n} \frac{d^6 p_i^* d^6 \psi_j^*}{(2\pi)^n} \right] \end{aligned}$$

O funcional gerador como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*, \mathcal{J}_{\mu}, \mathcal{J}_{\mu}^*) &= \mathcal{Z}_0^{-1} \prod_a \prod_{\varpi} \int \mathcal{D}p_a \mathcal{D}\psi_a \delta(p_a) \delta(\partial_{\varpi} \psi_6 + k\psi_{\varpi}) \delta(\partial_{\varpi}^* \psi_6^* + k\psi_{\varpi}^*) \\ &\quad \det \{ \Omega_k, \Omega_{k'} \}^{1/2} \exp \left\{ i \int d^5 x \left(p_{\mu} \dot{\psi}^{\mu} + p_{\mu}^* \dot{\psi}^{*\mu} + p_6 \dot{\psi}_6 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p_6^* \dot{\psi}_6^* - \tilde{\mathcal{H}}^1 + \psi_a \mathcal{J}^a \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.83)$$

com $p_a = (p_{\mu}, p_6, p_{\mu}^*, p_6^*)$ e $\psi_a = (\psi_{\mu}, \psi_6, \psi_{\mu}^*, \psi_6^*)$ e $\det \{ \Omega_k, \Omega_{k'} \}^{1/2} = 1$. Integrando sobre todos os momentos, com $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}(0, 0, 0, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*, \mathcal{J}_{\mu}, \mathcal{J}_{\mu}^*) &= \mathcal{Z}_0^{-1} \prod_a \prod_{\varpi} \int \mathcal{D}\psi_a \delta(\partial_{\varpi} \psi_6 + k\psi_{\varpi}) \delta(\partial_{\varpi}^* \psi_6^* + k\psi_{\varpi}^*) \\ &\quad \exp \left\{ i \int d^5 x \left[\psi^{*\mu} \partial_{\mu} \psi_6 - \psi_6^* \partial_{\mu} \psi^{\mu} + k(\psi^{*\mu} \psi_{\mu} - \psi_6^* \psi_6) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \psi \mathcal{J} + \psi^* \mathcal{J}^* + \psi^{\mu} \mathcal{J}_{\mu} + \psi^{*\mu} \mathcal{J}_{\mu}^* \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Pode-se demonstrar que integrando sobre ψ_a na Eq. (5.84) e usando as funções δ , pode-se obter

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^*, \mathcal{J}_{\mu}, \mathcal{J}_{\mu}^*) &= \exp \left\{ i \int d^5 x d^5 x' \left[k \mathcal{J}^*(x) G(x, x') \mathcal{J}(x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{J}^*(x) G(x, x') \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu}(x') - \mathcal{J}(x) (\partial_{\mu}^* \mathcal{J}^{*\mu}(x')) G(x, x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{k} \mathcal{J}^{\mu}(x) \partial_{\mu} G(x, x') \partial^{\nu} \mathcal{J}_{\nu}(x') - \frac{1}{k} \mathcal{J}_4(x) \delta^5(x' - x) \mathcal{J}_4(x') \right] \right\} \end{aligned}$$

sendo

$$G(x, x') = (\partial_{\mu} \partial^{\mu} - k^2)^{-1} \delta^5(x' - x) \quad (5.85)$$

a função de Green de uma campo escalar ψ_6 .

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação estudamos a teoria do campo DKP covariante de Galilei. Para isto iniciamos apresentando a formulação Galilei covariante 5-dimensional proposta por Takahashi e conhecida como covariância Galileana, seus campos fundamentais como o campo escalar, o de Pauli-Dirac, o eletromagnético Galileano e o campo de Proca não relativístico assim como suas Lagrangianas associadas. Seguindo a formulação via equações linearizadas de onda apresentamos também os elementos básicos da teoria de Duffin-Kemmer-Petiau Galilei covariante.

Buscando entender a estrutura algébrica das matrizes que compõem a álgebra DKP, listamos os elementos da sua álgebra através da introdução de elementos auxiliares construídos a partir das matrizes DKP. Em seguida desenvolvemos uma série de propriedades algébricas para as matrizes β^μ , assim como a enumeração de todos os elementos da álgebra numa forma de tabela. Para esta lista foram obtidas 262 elementos independentes da álgebra, o que está de acordo com o esperado uma vez que este número é igual a soma dos quadrados dos números 1, 6 e 15 que significam as dimensões das representações irredutíveis das matrizes DKP: matrizes 6×6 associadas ao campo DKP escalar, matrizes 15×15 associadas ao campo DKP vetorial e a representação trivial de dimensão 1 sem significado físico. Somado a isto, realizamos também a divisão da álgebra DKP em P - álgebra (spin - 0) e R - álgebra (spin

- 1), associadas à relação dos setores escalar e vetorial da teoria respectivamente. Como aplicações físicas destes resultados mostramos a equivalência entre as correntes conservadas via formulação em segunda ordem para os campos escalar e Proca covariantes de Galilei e as correntes DKP associadas aos setores de spin zero e 1 da teoria.

Considerando a estrutura de vínculos da teoria DKP, usamos a formulação Hamiltoniana para sistemas singulares, conhecida na literatura, efetuamos a quantização canônica da teoria do campo DKP covariante de Galilei, para partículas de spin-0. O método de Dirac de quantização foi utilizado como ferramenta para tal. Com isto percebemos que, das seis componentes do campo DKP, temos apenas duas componentes que podem ser consideradas físicas. No curso da quantização obtemos uma equação de Schrödinger expressa no formalismo covariante de Galilei. Com o objetivo futuro de calcular processos de espalhamento, definimos a função de Green para o campo DKP, sendo que uma discussão acerca da superfície de vínculo foi de importância vital para a introdução do sistema vinculado na medida de integração da integral de trajetória.

Com os resultados obtidos algumas perspectivas futuras deste trabalho podem ser apontadas: sua aplicação à condensação de Bose-Einstein, a quantização do setor vetorial do campo DKP Galileano bem como a investigação de processos de espalhamento não relativísticos.

Apêndice A

Representação das matrizes β para spin-0:

$$\begin{aligned}
 \bullet \beta_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \bullet \beta_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \bullet \beta_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Apêndice B

Representação matricial dos elementos auxiliares η_μ :

$$\bullet \quad \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \eta_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \eta_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \eta_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \eta_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Representação matricial dos elementos auxiliares ξ_μ^+ e ξ_μ^- :

$$\begin{aligned}
 \bullet \xi_1^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \xi_2^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \bullet \xi_3^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \xi_4^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \bullet \xi_5^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \xi_1^- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \bullet \xi_2^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \xi_3^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \xi_4^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_5^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apêndice D

Demonstração das propriedades (3.22) para P - álgebra:

$$PP_\mu = PP\beta_\mu = P^2\beta_\mu = P\beta_\mu = P_\mu$$

$$({}_\nu P)P = (\beta_\nu P)P = \beta_\nu P^2 = \beta_\nu P = {}_\nu P$$

$$(P_\mu)({}_\nu P) = P_\mu\beta_\nu P = Pg_{\mu\nu}P = P^2g_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} (P_\mu)({}_\nu P_\lambda) &= P_\mu({}_\nu P)(P_\lambda) = P_\mu\beta_\nu P(P_\lambda) = Pg_{\mu\nu}P(P_\lambda) = P^2g_{\mu\nu}P_\lambda \\ &= Pg_{\mu\nu}P_\lambda = g_{\mu\nu}PP_\lambda = g_{\mu\nu}P_\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}_\nu P_\lambda)({}_\mu P) &= ({}_\nu P)(P_\lambda)({}_\mu P) = ({}_\nu P)P\beta_\lambda({}_\mu P) = ({}_\nu P)Pg_{\lambda\mu}P \\ &= ({}_\nu P)P^2g_{\lambda\mu} = ({}_\nu P)Pg_{\lambda\mu} = {}_\nu Pg_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}_\mu P_\nu)({}_\sigma P_\lambda) &= ({}_\mu P)(P_\nu)({}_\sigma P)(P_\lambda) = ({}_\mu P)(P\beta_\nu)({}_\sigma P)(P_\lambda) \\ &= ({}_\mu P)P^2g_{\nu\sigma}(P_\lambda) = ({}_\mu P)Pg_{\nu\sigma}(P_\lambda) = ({}_\mu P)(P_\lambda)g_{\nu\sigma} = ({}_\mu P_\lambda)g_{\nu\sigma} \end{aligned}$$

Apêndice E

$$\begin{aligned}
\bullet U^{-1}(\Lambda)(P_\sigma)U(\Lambda) &= [\mathbf{1} - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)](P_\sigma)[\mathbf{1} + \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)] \\
&= (P_\sigma)[\mathbf{1} + \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)] - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)(P_\sigma)[\mathbf{1} + \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)] \\
&= (P_\sigma) + \omega^{\mu\nu}(P_\sigma)(\mu P_\nu) - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)(P_\sigma) - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)(P_\sigma)\omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu) \\
&= (P_\sigma) + \omega^{\mu\nu}[(P_\sigma)(\mu P_\nu) - (\mu P_\nu)(P_\sigma)] \\
&= (P_\sigma) + \omega^{\mu\nu}g_{\sigma\mu}(P_\nu) \\
&= (\delta_\sigma^\nu + \omega_\sigma^\nu)P_\nu
\end{aligned}$$

Renomeando os índices mudos temos que:

$$U^{-1}(\Lambda)(P_\mu)U(\Lambda) = \Lambda_\mu^\nu(P_\nu)$$

De forma semelhante

$$\begin{aligned}
\bullet U^{-1}(\Lambda)(\sigma P)U(\Lambda) &= [\mathbf{1} - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)](\sigma P)[\mathbf{1} + \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)] \\
&= (\sigma P)[\mathbf{1} + \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)] - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)(\sigma P)[\mathbf{1} + \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)] \\
&= (\sigma P) + \omega^{\mu\nu}(\sigma P)(\mu P_\nu) - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)(\sigma P) - \omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu)(\sigma P)\omega^{\mu\nu}(\mu P_\nu) \\
&= (\sigma P) + \omega^{\mu\nu}[(\sigma P)(\mu P_\nu) - (\mu P_\nu)(\sigma P)] \\
&= (\sigma P) - \omega^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}(\mu P) \\
&= (\delta_\sigma^\mu - \omega_\sigma^\mu)_\mu P
\end{aligned}$$

Renomeando os índices mudos temos que:

$$U^{-1}(\Lambda)(\mu P)U(\Lambda) = \Lambda_\mu^\nu(\nu P)$$

Apêndice F

Dedução da densidade Lagrangiana na forma de componente:

$$\bullet \quad \bar{\Psi}\beta^1\partial_1\Psi = [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1\psi_1 \\ \partial_1\psi_2 \\ \partial_1\psi_3 \\ \partial_1\psi_4 \\ \partial_1\psi_5 \\ \partial_1\psi_6 \end{bmatrix}$$

$$= [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} \partial_1\psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_1\psi_1 \end{bmatrix} = -\psi_1^*\partial_1\psi_6 + \psi_6^*\partial_1\psi_1$$

$$\bullet \quad \bar{\Psi}\beta^2\partial_2\Psi = [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_2\psi_1 \\ \partial_2\psi_2 \\ \partial_2\psi_3 \\ \partial_2\psi_4 \\ \partial_2\psi_5 \\ \partial_2\psi_6 \end{bmatrix}$$

$$= [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_2\psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_2\psi_2 \end{bmatrix} = -\psi_2^*\partial_2\psi_6 + \psi_6^*\partial_2\psi_2$$

$$\bullet \quad \bar{\Psi}\beta^3\partial_3\Psi = [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_3\psi_1 \\ \partial_3\psi_2 \\ \partial_3\psi_3 \\ \partial_3\psi_4 \\ \partial_3\psi_5 \\ \partial_3\psi_6 \end{bmatrix}$$

$$= [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_3\psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_3\psi_3 \end{bmatrix} = -\psi_3^*\partial_3\psi_6 + \psi_6^*\partial_3\psi_3$$

$$\bullet \quad \bar{\Psi}\beta^4\partial_4\Psi = [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_4\psi_1 \\ \partial_4\psi_2 \\ \partial_4\psi_3 \\ \partial_4\psi_4 \\ \partial_4\psi_5 \\ \partial_4\psi_6 \end{bmatrix}$$

$$= [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_4\psi_6 \\ 0 \\ -\partial_4\psi_5 \end{bmatrix} = \psi_5^*\partial_4\psi_6 - \psi_6^*\partial_4\psi_5$$

$$\bullet \quad \bar{\Psi}\beta^5\partial_5\Psi = [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_5\psi_1 \\ \partial_5\psi_2 \\ \partial_5\psi_3 \\ \partial_5\psi_4 \\ \partial_5\psi_5 \\ \partial_5\psi_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\psi_1^* & -\psi_2^* & -\psi_3^* & \psi_5^* & \psi_4^* & \psi_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_5 \psi_6 \\ -\partial_5 \psi_4 \end{bmatrix} = \psi_4^* \partial_5 \psi_6 - \psi_6^* \partial_5 \psi_4$$

$$\bullet \partial_1 \bar{\Psi} \beta^1 \Psi = \begin{bmatrix} -\partial_1 \psi_1^* & -\partial_1 \psi_2^* & -\partial_1 \psi_3^* & \partial_1 \psi_5^* & \partial_1 \psi_4^* & \partial_1 \psi_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\partial_1 \psi_1^* & -\partial_1 \psi_2^* & -\partial_1 \psi_3^* & \partial_1 \psi_5^* & \partial_1 \psi_4^* & \partial_1 \psi_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = -(\partial_1 \psi_1^*) \psi_6 + (\partial_1 \psi_6^*) \psi_1$$

$$\bullet \partial_2 \bar{\Psi} \beta^2 \Psi = \begin{bmatrix} -\partial_2 \psi_1^* & -\partial_2 \psi_2^* & -\partial_2 \psi_3^* & \partial_2 \psi_5^* & \partial_2 \psi_4^* & \partial_2 \psi_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\partial_2 \psi_1^* & -\partial_2 \psi_2^* & -\partial_2 \psi_3^* & \partial_2 \psi_5^* & \partial_2 \psi_4^* & \partial_2 \psi_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = -(\partial_2 \psi_2^*) \psi_6 + (\partial_2 \psi_6^*) \psi_2$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \partial_3 \bar{\Psi} \beta^3 \Psi = [-\partial_3 \psi_1^* \quad -\partial_3 \psi_2^* \quad -\partial_3 \psi_3^* \quad \partial_3 \psi_5^* \quad \partial_3 \psi_4^* \quad \partial_3 \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} \\
& = [-\partial_3 \psi_1^* \quad -\partial_3 \psi_2^* \quad -\partial_3 \psi_3^* \quad \partial_3 \psi_5^* \quad \partial_3 \psi_4^* \quad \partial_3 \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = -(\partial_3 \psi_3^*) \psi_6 + (\partial_3 \psi_6^*) \psi_3 \\
& \bullet \partial_4 \bar{\Psi} \beta^4 \Psi = [-\partial_4 \psi_1^* \quad -\partial_4 \psi_2^* \quad -\partial_4 \psi_3^* \quad \partial_4 \psi_5^* \quad \partial_4 \psi_4^* \quad \partial_4 \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} \\
& = [-\partial_4 \psi_1^* \quad -\partial_4 \psi_2^* \quad -\partial_4 \psi_3^* \quad \partial_4 \psi_5^* \quad \partial_4 \psi_4^* \quad \partial_4 \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_6 \\ 0 \\ -\psi_5 \end{bmatrix} = (\partial_4 \psi_5^*) \psi_6 - (\partial_4 \psi_6^*) \psi_5 \\
& \bullet \partial_5 \bar{\Psi} \beta^5 \Psi = [-\partial_5 \psi_1^* \quad -\partial_5 \psi_2^* \quad -\partial_5 \psi_3^* \quad \partial_5 \psi_5^* \quad \partial_5 \psi_4^* \quad \partial_5 \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -\partial_5\psi_1^* & -\partial_5\psi_2^* & -\partial_5\psi_3^* & \partial_5\psi_5^* & \partial_5\psi_4^* & \partial_5\psi_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_6 \\ -\psi_4 \end{bmatrix} = (\partial_5\psi_4^*)\psi_6 - (\partial_5\psi_6^*)\psi_4$$

$$\bullet \bar{\Psi}\Psi = \begin{bmatrix} -\psi_1^* & -\psi_2^* & -\psi_3^* & \psi_5^* & \psi_4^* & \psi_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = -\psi_1^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_2 - \psi_3^*\psi_3 + \psi_5^*\psi_4 +$$

$$+ \psi_4^*\psi_5 + \psi_6^*\psi_6 = \psi^{*\mu}\psi_\mu - \psi_6^*\psi_6$$

Portanto, a densidade Lagrangiana possui a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\psi^{*1}\partial_1\psi_6 + \psi^{*2}\partial_2\psi_6 + \psi^{*3}\partial_3\psi_6 + \psi^{*4}\partial_4\psi_6 + \psi^{*5}\partial_5\psi_6] - \frac{1}{2} [\psi_6^*(\partial_1\psi^1 + \partial_2\psi^2 + \partial_3\psi^3 + \partial_4\psi^4 + \partial_5\psi^5)] - \frac{1}{2} [(\partial_1\psi^{*1} + \partial_2\psi^{*2} + \partial_3\psi^{*3} + \partial_4\psi^{*4} + \partial_5\psi^{*5})\psi_6] + \frac{1}{2} [(\partial_1\psi_6^*)\psi^1 + (\partial_2\psi_6^*)\psi^2 + (\partial_3\psi_6^*)\psi^3 + (\partial_4\psi_6^*)\psi^4 + (\partial_5\psi_6^*)\psi^5] + k(\psi^{*\mu}\psi_\mu - \psi_6^*\psi_6)$$

na forma covariante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\psi^{*\mu}\partial_\mu\psi_6 - \psi_6^*\partial_\mu\psi^\mu - (\partial_\mu\psi^{*\mu})\psi_6 + (\partial_\mu\psi_6^*)\psi^\mu] + k(\psi^{*\mu}\psi_\mu - \psi_6^*\psi_6)$$

Apresentamos uma aproximação matricial para a teoria. A densidade Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\beta^\mu(\partial_\mu\Psi) - \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\Psi})\beta^\mu\Psi + k\bar{\Psi}\Psi$$

Os momentos são dados por:

$$\begin{aligned} \bullet \bar{P} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = -\frac{1}{2}\beta^4\Psi \\ \bullet P &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = -\frac{1}{2}\bar{\Psi}\beta^4 \end{aligned}$$

A densidade Hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \bar{P}\dot{\bar{\Psi}} + P\dot{\Psi} - \mathcal{L} \\ &= \bar{P}\dot{\bar{\Psi}} + P\dot{\Psi} - \left\{ \frac{1}{2}\bar{\Psi}\beta^\mu(\partial_\mu\Psi) - \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\Psi})\beta^\mu\Psi + k\bar{\Psi}\Psi \right\} \\ &= \frac{1}{2}[-\bar{\Psi}\beta^i(\partial_i\Psi) - \bar{\Psi}\beta^5(\partial_5\Psi) + (\partial_i\bar{\Psi})\beta^i\Psi + (\partial_5\bar{\Psi})\beta^5\Psi] - k\bar{\Psi}\Psi \end{aligned}$$

vínculos primários

$$\Phi^{(1)} = P - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\beta^4, \quad \Phi^{*(1)} = \bar{P} + \frac{1}{2}\beta^4\Psi \quad (6.1)$$

vínculos secundários

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} &= M(\beta^i\partial_i + \beta^5\partial_5 + k)\Psi \\ \Phi^{*(2)} &= \bar{\Psi}(\beta^i\partial_i^{\leftarrow} + \beta^5\partial_5^{\leftarrow} - k)N \end{aligned}$$

sendo $M = \mathbf{1} + \beta^4\beta^5$ e $N = \mathbf{1} + \beta^5\beta^4$. A dedução explícita da expressão para os vínculos secundários segue abaixo. As matrizes M e N são dadas por

$$\bullet M = \mathbf{1} + \beta^4\beta^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\bullet N &= \mathbf{1} + \beta^5 \beta^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\bullet M\beta^1\partial_1\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bullet M\beta^2\partial_2\Psi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_2 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bullet M\beta^3\partial_3\Psi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_3 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bullet M\beta^5\partial_5\Psi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_5 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bullet M\Psi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)} &= M(\beta^i \partial_i + \beta^5 \partial_5 + k)\Psi \\
&= \begin{bmatrix} \partial_1 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_2 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_3 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_5 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \partial_1 \psi_6 \\ \partial_2 \psi_6 \\ \partial_3 \psi_6 \\ \partial_5 \psi_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \partial_1 \bar{\Psi} \beta^1 N &= \partial_1 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \partial_1 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [-\partial_1 \psi_1^* \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \partial_2 \bar{\Psi} \beta^2 N &= \partial_2 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \partial_2 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad -\partial_2 \psi_2^* \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
\bullet \partial_3 \bar{\Psi} \beta^3 N &= \partial_3 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \partial_3 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 0 \quad -\partial_3 \psi_3^* \quad 0 \quad 0 \quad 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \partial_5 \bar{\Psi} \beta^5 N &= \partial_3 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \partial_5 [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \partial_5 \psi_6^* \quad 0] \\
\bullet \bar{\Psi} N &= [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad \psi_5^* \quad \psi_4^* \quad \psi_6^*] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad 0 \quad \psi_4^* \quad 0]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Phi^{*(2)} &= \bar{\Psi}(\beta^i \partial_i^{\leftarrow} + \beta^5 \partial_5^{\leftarrow} - k)N \\
&= [-\partial_1 \psi_1^* \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] + [0 \quad -\partial_2 \psi_2^* \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] + [0 \quad 0 \quad -\partial_3 \psi_3^* \quad 0 \quad 0 \quad 0] + \\
&+ [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \partial_5 \psi_6^* \quad 0] - k[-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad 0 \quad \psi_4^* \quad 0] \\
&= [-\partial_1 \psi_1^* \quad -\partial_2 \psi_2^* \quad -\partial_3 \psi_3^* \quad 0 \quad \partial_5 \psi_6^* \quad 0] - k[-\psi_1^* \quad -\psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad 0 \quad \psi_4^* \quad 0]
\end{aligned}$$

Apêndice G

Neste Apêndice iremos demonstrar as relações (5.71) e (5.66) expostas no capítulo 5. Para a relação (5.71) iremos usar frequentemente a relação de dispersão (2.20), portanto

$$\begin{aligned}
 \bullet (u^{(+)}(\mathbf{p}), u^{(+)}(\mathbf{p})) &= \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p})u^{(+)}(\mathbf{p}) = [u^{(+)}(\mathbf{p})]^\dagger \eta^5 u^{(+)}(\mathbf{p}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & -p_3 & -m & -E & k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \\ E \\ m \\ k \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2k^2} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2mE + k^2] \\
 &= \frac{1}{2k^2} [p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu + k^2] = \frac{1}{2k^2} [p_\mu p^\mu + k^2] \\
 &= \frac{1}{2k^2} [2k^2] = 1 \\
 \bullet (u^{(-)}(p), u^{(-)}(p)) &= \bar{u}^{(-)}(p)u^{(-)}(p) = [u^{(-)}(\mathbf{p})]^\dagger \eta^5 u^{(-)}(\mathbf{p}) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & m & E & k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ -E \\ -m \\ k \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2k^2} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2mE + k^2] \\
 &= -\frac{1}{2k^2} [p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu + k^2] = -\frac{1}{2k^2} [p_\mu p^\mu + k^2] \\
 &= -\frac{1}{2k^2} [2k^2] = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (u^{(-)}(p), u^{(+)}(p)) &= \bar{u}^{(-)}(p)u^{(+)}(p) = [u^{(-)}(\mathbf{p})]^\dagger \eta^5 u^{(+)}(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & m & E & k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \\ E \\ m \\ k \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2k^2} [-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + 2mE + k^2] \\
&= \frac{1}{2k^2} [-p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu + k^2] = \frac{1}{2k^2} [-p_\mu p^\mu + k^2] = 0 \\
\bullet (u^{(+)}(p), u^{(-)}(p)) &= \bar{u}^{(+)}(p)u^{(-)}(p) = [u^{(+)}(\mathbf{p})]^\dagger \eta^5 u^{(-)}(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & -p_3 & -m & -E & k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2k}} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ -E \\ -m \\ k \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2k^2} [-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + 2mE + k^2] \\
&= \frac{1}{2k^2} [-p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu + k^2] = \frac{1}{2k^2} [-p_\mu p^\mu + k^2] = 0
\end{aligned}$$

Segue abaixo a demonstração da expressão (5.66). Seja

$$\begin{aligned}
\int d^3x' e^{ip \cdot x'} \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x) &= \int d^3x' e^{ip \cdot x'} \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}) \left\{ \int d^3p [\hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) u^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \right. \\
&\quad \left. + \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) u^{(+)}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right\}
\end{aligned}$$

devido as relações de ortonormalidade (5.71), a expressão acima se reduz a

$$\begin{aligned}
\int d^3x' e^{ip \cdot x'} \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x) &= \int d^3x' e^{ip \cdot x'} \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}) \left\{ \int d^3p \hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) u^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right\} \\
&= \int d^3x' \int d^3p e^{ip_i \cdot (x'_i - x_i)} \hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) \\
&= (2\pi)^3 \int d^3x' \delta(x'_i - x_i) \hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) \\
&= (2\pi)^3 \hat{a}^{(-)}(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{ip \cdot x} \bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x)$$

de forma similar para $\hat{b}^{(+)}(\mathbf{p})$

$$\begin{aligned}
\int d^3x' e^{-ip \cdot x'} \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x) &= \int d^3x' e^{-ip \cdot x'} \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}) \left\{ \int d^3p [\hat{a}^{(-)}(\mathbf{p}) u^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \right. \\
&\quad \left. + \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) u^{(+)}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}] \right\}
\end{aligned}$$

devido as relações de ortonormalidade (5.71), a expressão acima se reduz a

$$\begin{aligned}
\int d^3x' e^{-ip \cdot x'} \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x) &= \int d^3x' e^{-ip \cdot x'} \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}) \left\{ \int d^3p \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) u^{(+)}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right\} \\
&= \int d^3x' \int d^3p e^{ip_i \cdot (x_i - x'_i)} \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) \\
&= (2\pi)^3 \int d^3x' \delta(x_i - x'_i) \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) \\
&= (2\pi)^3 \hat{b}^{(+)}(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{b}^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-ip \cdot x} \bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}) \hat{\Psi}(x)$$

Bibliografia

- [1] O. Klein, *Zeit. Physik* 37 (1926) 895; V. Fock, *Zeit. Physik* 38 (1926) 242 e *ibid* 39 (1926) 226; W. Gordon, *Zeit. Physik* 40 (1926) 117.
- [2] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* 117 (1928) 610.
- [3] M. Fierz and W. Pauli, *Proc. Roy. Soc.* 211 (1939) A 173.
- [4] F. J. Belinfante, *Phys. Rev.* 92 (1953) 997.
- [5] S. Gupta, *Phys. Rev.* 95 (1954) 1334.
- [6] L. de Broglie, *Compt. Rend.* 199 (1934) 445.
- [7] G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect.* 816, No 2 (1936).
- [8] J. Géhéniau, *Acad. R. Soc. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect.* 818, No 1 (1938).
- [9] A. Proca, *Jour. of Phys. et rad.* 7 (1936) 347.
- [10] R. J. Duffin, *Phys. Rev.* 54 (1938) 1114.
- [11] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. A* 173 (1939) 91.
- [12] H. J. Bhabha, *Rev. Mod. Phys.* 17 (1945) 200.
- [13] R. A. Krajcik e M. M. Nieto. *Am. J. Phys.* 45 (1977) 818.

- [14] V. Ya. Fainberg e B. M. Pimentel, *Braz. J. Phys.* 30 (2000) 275; *Phys. Lett. A* 271 (2000) 16.
- [15] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira e J. S. Valverde, *Phys. Lett. A* 268 (2000) 165.
- [16] Y. Nedjadi e R. C. Barrett, *J. Phys. A: Math. Gen.* 27 (1994) 4301.
- [17] M. Falekl, M. Merad, *Commun. Theor. Phys. (Beijing-China)* 50 (2008) 587.
- [18] V. Gribov, *Eur. Phys. J. C.* 10 (1999) 71.
- [19] I. V Kanatchikov, [hep-th/9911175](#).
- [20] R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel e J. S. Valverde, *Phys. Lett. A* 316 (2003) 33.
- [21] R. Casana, B. M. Pimentel e J. S. Valverde *J. Phys. A:* 370 (2006) 441.
- [22] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel e R. G. Teixeira, *Gen. Rel. Grav.* 34 (2002) 491.
- [23] M. Omote, S. Kamefuchi, Y. Takahashi, Y. Ohnuki, *Forts. Phys.* 87 (1989) 933.
- [24] M. Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana e E. S. Santos, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 (2000) L273.
- [25] M. Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos, *J. Phys. A: Math. Gen.* 34 (2001) 8901.
- [26] M. C. B. Fernandes, J. D. M. Vianna e A. E. Santana, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 (2003) 3841.
- [27] E. Fischbach, M. M. Nieto e C. K. Scott, *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1760.
- [28] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira e J. S. Valverde, *Phys. Lett. A* 268 (2000) 165.

- [29] E. S. Santos e L. M. Abreu, *J. Phys. A: Math. Theor.* 41 (2008) 075407.
- [30] J. M. Lévy-Leblond, *J. Math. Phys.*, 4 (1963) 776.
- [31] M. Omote, S. Kamefuchi, Y. Takahashi e Y. Ohnuki, *Forts. Phys.* 87 (1989) 933.
- [32] M. Le Bellac e J. M. Lévy-Leblond, *N. Cimento B* 14 (1973) 217.
- [33] E. S. Santos, M. Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37 (2004) 9771.
- [34] P. J. Pompeia, *Aspectos Clássicos de Teorias de Segunda Ordem*, Tese de Doutorado, IFT/UNESP, São Paulo SP, 2009.
- [35] E. P. Wigner, *Ann. Math.*, 40 (1939) 149.
- [36] V. Bargmann, *Ann. Math.*, 59 (1954) 1.
- [37] E. Inonu e E. P. Wigner, *N. Cimento*, 9 (1952) 705.
- [38] A. S. Wightman, *Rev. of Mod. Phys.*, 34 (1962) 845.
- [39] G. Marmo, G. Morandi, A. Simoni e E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* 37 (1988) 2196.
- [40] M. Montigny, F. C. Khanna, E. S. Santos e J. D. M. Vianna, *Ann. of Phys.* 277 (1999) 144.
- [41] P.A.M Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York 1964).
- [42] D. M. Gitman e I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Springer, Berlin, 1990).
- [43] B. M. Pimentel e V. Ya Fainberg, *Theor. Math. Phys.* 124 (2000) 1234.

- [44] M. S. Swanson, *Path Integrals and Quantum Process* (Academic Press, INC 1992).
- [45] L .D. Fadeev, *Theor. Math. Phys.* 1 (1969) 3.
- [46] P. Senjanovic, *Ann. Phys.* 100 (1976) 227.
- [47] L. M. Abreu, M. de Montigny, F. C. Khanna e A. E. Santana, *Ann. Physics* 308 (2003) 244.