



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Propriedades de escala no escoamento de fluido em
meio poroso modelado por empacotamento
Apoloniano**

Rafael Sousa de Oliveira

Salvador - 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Propriedades de escala no escoamento de fluido em
meio poroso modelado por empacotamento**

Apoloniano

Rafael Sousa de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal da Bahia para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador - 2009

O48 Oliveira, Rafael Sousa de

Propriedades de escala no escoamento de fluido em meio poroso modelado por empacotamento Apoloniano/Rafael Sousa de Oliveira. – 2009.

88 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física, 2009.

1. Mecânica dos fluidos. 2. Materiais porosos. I. Andrade, Roberto Fernandes Silva. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física. III. Título.

CDD - 532

CDU - 532

Dedico esta dissertação aos Meus Pais
e a minha noiva Anabel.

Agradecimentos

Agradeço a minha noiva Anabel pela compreensão, carinho e companherismo.

Aos meus pais e minhas irmãs que sempre me apoiaram nos momentos difíceis.

Ao professor Roberto Andrade pela proposta de trabalho e orientação.

A todos os companheiros(as) da pós-graduação pelas discussões sobre física, sobre a vida e também as conversas inúteis. Em especial, aos colegas João Cláudio, Leandro, Marcus e Thiago.

Aos demais professores e funcionários do Instituto pela convivência.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, fundamental para a realização deste trabalho.

(Este trabalho foi financiado pelo CNPq)

“Queira, basta ser sincero e desejar profundo.
Você será capaz de sacudir o mundo.
Vai, tente outra vez.
Tente, e não diga que a vitória está perdida
Se é de batalhas que se vive a vida, tente outra vez”.

(Tente outra vez - Raul Seixas)

Resumo

O estudo de escoamento de fluidos em meios porosos é de grande importância em muitas situações práticas que vão desde a recuperação de petróleo aos reatores químicos e tem sido objeto de estudo há um bom tempo em diversos campos da ciência e da engenharia. Em muitas situações práticas de análise de escoamentos em meios porosos é necessário um conhecimento de como a vazão varia em função da diferença de pressão. A determinação desta relação só é possível conhecendo-se alguma grandeza física que representa a resistência do meio poroso ao escoamento. Esta resistência pode ser expressa de diversas maneiras, como por exemplo, para escoamento de fluidos de fase única, pelo fator de atrito ou pela permeabilidade de Darcy. Simulações computacionais baseadas em modelos detalhados de geometria porosa e fluxo de fluido tem sido usadas para prever coeficientes de permeabilidade assim como avaliar correlações semiempíricas obtidas para materiais porosos reais. Neste trabalho, estudamos o fluxo de um fluido com um baixo número de Reynolds, onde o meio poroso é modelado por um empacotamento do tipo Apoloniano. Como os círculos tangentes máximos que otimizam a ocupação do espaço não permitem a passagem de fluido, reduzimos uniformemente os valores dos raios dos círculos a partir da configuração dos círculos tangentes. Inicialmente, obtivemos resultados para a dependência da permeabilidade em função da fração de vazios, verificando até que valor do número de Reynolds a relação linear estabelecida pela lei de Darcy entre a vazão e a diferença de pressão é obedecida. Em seguida, analisamos a variação da permeabilidade com a porosidade, verificando até que ponto este comportamento é descrito pelas relações de Kozeny-Carman.

Palavras Chaves: Fluidos. Meios porosos. DFC. Leis de escala.

Abstract

The flow through a porous medium is of importance in many practical situations ranging from oil recovery to chemical reactors and has been the object of study for a long time in various fields of science and engineering. In many practical situations the analysis of flow in porous media requires a knowledge of how the flow varies with the pressure gauge. The determination of this relationship is only possible if some physical quantity that represents the resistance of flow through porous media is known. This resistance can be expressed in various ways, *e.g.*, for single-phase fluid flow, the friction factor or the Darcy permeability. Computational simulations based on detailed models of pore geometry and fluid flow have been used to predict permeability coefficients as well as to validate semiempirical correlations obtained from real porous materials. In this work, we studied the flow of fluids with low Reynolds number, where the porous medium is modeled by an Apollonian packing. As the maximum tangents circles, which optimize the occupation of the space, do not allow for fluid flow, we uniformly reduce the values of the radius of the circles from the configuration of the tangents circles. The first purpose is to find the conditions under which Darcy's law is verified, for different values of the reduction factor. For each value of the void fraction, we measure the dependence of the permeability with respect to the applied pressure gauge, identifying the maximal value of the Reynolds number for which the linear relation established by the law of Darcy is obeyed. These results allow us to further analyze the variation of the permeability with the porosity, establishing the scaling limit of validity expressed by the Kozeny-Carman relations.

Keywords: Fluids. Porous media. CFD. Scale properties.

Lista de Figuras

2.1	Esquema do experimento de filtragem de Darcy.	17
2.2	Modelo de um canal sinuoso.	22
3.1	Configuração de Descartes.	27
3.2	Empacotamento Apoloniano com curvaturas iniciais (0,0,1,1).	29
3.3	Empacotamento Apoloniano com curvaturas iniciais (-1,2,2,3).	29
3.4	Volume de controle utilizado para ilustrar a discretização da equação de transporte de um escalar.	34
3.5	Meio poroso modelado por Adler(1985).	40
3.6	Meio poroso modelado por A. D. Araújo et al. (2006).	41
3.7	Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 1$ e $s = 0.9$	42
3.8	Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 2$ e $s = 0.9$	42
3.9	Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 3$ e $s = 0.9$	42
3.10	Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 4$ e $s = 0.9$	42
3.11	Vizualização do ângulo de distorção do domínio computacional para $g = 4$ e $s = 0.8$	44
3.12	Linhas verticais onde foram coletadas as pressões.	45
4.1	Contorno do módulo da velocidade para $g = 1$ e $s = 0.7$	47
4.2	Contorno do módulo da velocidade para $g = 2$ e $s = 0.7$	47
4.3	Contorno do módulo da velocidade para $g = 3$ e $s = 0.7$	47
4.4	Contorno do módulo da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.7$	47
4.5	Contorno do módulo da velocidade para a velocidade de entrada igual a 0.01 m/s.	47
4.6	Vetores da velocidade para $g = 1$ e $s = 0.5$	48
4.7	Vetores da velocidade para $g = 2$ e $s = 0.5$	48
4.8	Vetores da velocidade para $g = 3$ e $s = 0.5$	48
4.9	Vetores da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.5$	48
4.10	Vetores de velocidade coloridos pelo módulo da velocidade com $v = 0.01$ m/s na entrada.	48
4.11	Formação de vórtices para $v = 20.48$ m/s na entrada em $g = 4$ e $s = 0.8$	49

4.12	Contorno da pressão para $g = 1$ e $s = 0.7$	50
4.13	Contorno da pressão para $g = 2$ e $s = 0.7$	50
4.14	Contorno da pressão para $g = 3$ e $s = 0.7$	51
4.15	Contorno da pressão para $g = 4$ e $s = 0.7$	51
4.16	Contorno da pressão estática para a velocidade de entrada igual a 0.01 m/s.	51
4.17	Contorno da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.8$	52
4.18	Vetores da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.8$	52
4.19	Contorno da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.6$	52
4.20	Vetores da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.6$	52
4.21	Contorno da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.3$	53
4.22	Vetores da velocidade para $g = 4$ e $s = 0.3$	53
4.23	Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 1$	54
4.24	Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 2$	54
4.25	Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 3$	54
4.26	Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 4$	54
4.27	Função f em relação a velocidade de entrada para $g = 1$	56
4.28	Função f em relação a velocidade de entrada para $g = 2$	56
4.29	Função f em relação a velocidade de entrada para $g = 3$	56
4.30	Função f em relação a velocidade de entrada para $g = 4$	56
4.31	Número de Reynolds crítico Re_c em função do fator de redução s	58
4.32	Porosidade em função do fator de redução s	59
4.33	Permeabilidade em função da porosidade.	60
4.34	Permeabilidade em função do fator de porosidade da equação de Kozeny-Carman.	61
4.39	Ajustes dos dados para $g = 3$	63
4.42	Continuação dos ajustes dos dados para $g = 3$	64
4.47	Ajustes dos dados para $g = 4$	65
4.50	Continuação dos ajustes dos dados para $g = 4$	66
A.1	Resumo dos métodos de solução do método <i>pressure-based</i> [29].	75

Lista de Tabelas

4.1	Números de Reynolds críticos para $f = 0.05$	57
4.2	Números de Reynolds críticos encontrados com $f = 0.025$	57

Conteúdo

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	viii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Descrição do problema físico e objetivo	5
1.3 Organização da dissertação	6
2 Escoamento em meios porosos: Revisão	7
2.1 Fluido	7
2.1.1 Hipótese do Contínuo	8
2.1.2 Classificação de escoamentos	9
2.1.3 Equações que modelam o escoamento	10
2.2 Meios Porosos	12
2.3 Parâmetros macroscópicos da estrutura porosa	13
2.3.1 Porosidade	13
2.3.2 Área de superfície específica	14
2.3.3 Fator de formação de resistividade	15
2.3.4 Permeabilidade	16
2.3.5 Modelo de Raio Hidráulico	19
Modelo Kozeny-Carman	20
3 Formulação do Problema e Metodologia de Solução	25
3.1 Empacotamento Apoloniano e os Teoremas de Descartes	25
3.1.1 Teorema dos Círculos de Descartes	26
3.1.2 Teorema de Descartes Complexo	28
3.2 Dinâmica de Fluidos Computacional - DFC	30
3.2.1 Como trabalha um código DFC	31
3.2.2 Método dos volumes finitos	32
Esquema <i>upwind</i> de primeira ordem (<i>first-order upwind</i>)	35

	Esquema <i>upwind</i> de segunda ordem (<i>SOU - second-order upwind</i>)	35
	Linearização da equação discretizada	36
3.2.3	Discretização da quantidade de movimento e equação da continuidade no FLUENT	36
	Discretização da quantidade de movimento	37
	Discretização da equação da continuidade	38
	Acoplamento pressão-velocidade	38
3.2.4	Algoritmo SIMPLE	38
3.3	Um modelo para meios porosos	39
3.3.1	Modelo para meios porosos na literatura	39
3.3.2	O modelo deste trabalho	41
4	Resultados e Discussões	46
4.1	Análise qualitativa do escoamento	46
4.1.1	Influência da adição dos círculos nos campos de velocidade	46
4.1.2	Influência da adição dos círculos nos campos de pressão	50
4.1.3	Influência do fator de escala s no campo de velocidade	51
4.2	Análise quantitativa do escoamento	53
4.2.1	Resultados para Δp com função da velocidade de entrada	53
4.2.2	Dependência da permeabilidade com a porosidade	58
5	Conclusões	67
	Bibliografia	69
A	Método Pressure-Based Solver	73
A.0.3	Algoritmo <i>pressure-based</i> segregado	73
A.0.4	Algoritmo <i>pressure-based</i> acoplado	75

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Escoamentos em meios porosos ocorrem em um grande número de aplicações industriais e também no meio ambiente. Dentre as aplicações pode-se citar, a recuperação de gás e petróleo; migração de contaminantes e fertilizantes em solos; lixiviação de minerais; preparação de catalizadores e materiais cerâmicos; processos de separação com catalizadores, membranas, filtros; preparação de cimentos e concretos. Portanto, não há dúvida de que existe uma necessidade de melhorar a compreensão dos fenômenos envolvidos/produzidos no escoamento em meios porosos a fim de otimizar o projeto de processos atuais e propor novos processos.

A simulação de fenômenos de escoamentos em meios porosos é difícil devido a complexa natureza da geometria e topologia de seu espaço e da heterogeneidade na composição química de suas paredes internas. Para um fluido incompressível, o fluxo na escala de segmentos de poros obedece as equações da continuidade e de Navier-Stokes¹ [1],

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1.1}$$

¹Serão vistas com mais detalhes no capítulo 2.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.2)$$

onde ρ é a densidade do fluido, \vec{u} é a velocidade local do fluido em qualquer ponto do espaço poroso, P é a pressão e μ a viscosidade do fluido. Como condição de contorno na interface sólido-fluido adota-se o não deslizamento ($\vec{u} = 0$). A solução das equações (1.1) e (1.2) mediante métodos tradicionais de diferenças finitas e elementos finitos requer a discretização² do meio poroso sobre uma malha regular em duas ou três dimensões, conforme adequado. Para meios porosos complexos e de tamanho representativo, a exigência computacional (velocidade e memória) torna inviável o uso de técnicas tradicionais. Uma maneira para contornar este problema é discretizar o espaço poroso de uma maneira não muito fina reduzindo assim a necessidade de memória e velocidade de processamento, em contrapartida perde-se qualidade na representação do meio poroso. O problema é agravado por efeitos de multicomponentes, multifásico, presença de partículas sólidas e fenômenos de deformação, entre vários outros.

Um caminho alternativo é estudar o escoamento na escala macroscópica, ou seja, na escala de observação. Para isso usa-se extensivamente a lei de Darcy³. Esta lei foi derivada empiricamente em 1856 por Henry Darcy [2, 3], o qual verificou a partir de experimentos com um meio poroso homogêneo uma relação linear entre a taxa de fluxo e a força aplicada sobre o fluido para um escoamento estacionário lento, que pode ser escrita na sua forma diferencial como [4],

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho \vec{g}) \quad (1.3)$$

onde \vec{v} é a velocidade de filtro ou descarga específica, μ é a viscosidade do fluido, ∇P o gradiente de pressão aplicado sobre o fluido, $\rho \vec{g}$ a densidade de força gravitacional, e k a permeabilidade.

Para uma variedade de preocupações práticas é comum inserir a Equação (1.3) na equação de movimento de Navier-Stokes, Equação (1.2), obtendo dessa forma

²Maiores detalhes na seção 3.2.2.

³Maiores Detalhes na seção 2.3.4.

uma equação diferencial que descreve o escoamento no meio poroso fora da escala de segmentos de poros. Esta equação poderá ser resolvida sem grandes dificuldades, desde que a permeabilidade k seja conhecida, utilizando técnicas tradicionais como diferenças finitas e elementos finitos. Neste caso, o material poroso é discretizado em blocos, conhecidos como *blocos de simulação*, para os que requerem a permeabilidade. O resultado é um *simulador de fluxo* em meios porosos. Se o meio é homogêneo as permeabilidades dos blocos são iguais. Se o meio é heterogêneo, o caso mais comum, então as permeabilidades dos blocos são distintas; neste caso há a necessidade de se definir um *campo de permeabilidades* [5, 6].

A simulação de escoamentos em meios porosos na grande maioria das aplicações é feita utilizando simuladores macroscópicos que devem ser alimentados com as propriedades físicas do sistema. Neste sentido as equações que governam o escoamento estão muito bem definidas, assim como as formas de resolvê-las. A capacidade computacional necessária se encontra disponível. No entanto, apesar destas vantagens, devido a falta de dados experimentais por razões de custo e problemas de acessibilidade em alguns casos, a simulação tem apenas caráter de ajuste, com baixa capacidade preditiva. Isto não é uma surpresa, pois a verdadeira física do fenômeno não é considerada na equação macroscópica, ela está intrinsecamente descrita pela permeabilidade. Assim o problema continua mal formulado pela falta de caracterização apropriada do meio poroso, isto é, a falta de equações constitutivas das propriedades dos materiais.

A necessidade de atribuir caráter preditivo aos simuladores tem impulsionado uma crescente atividade de investigação com o objetivo de prever a permeabilidade de meios porosos. Como a variação da permeabilidade está relacionada a uma série de fatores, há um grande esforço por diversos pesquisadores ([7] a [16]) de diferentes áreas para estabelecer relações entre estes fatores e a permeabilidade.

Destes trabalhos um que merece grande destaque⁴ é a descoberta da existência

⁴A relação de saturação obtida pelo fator de formação de resistividade é um excelente parâmetro para detecção de zonas de hidrocarbonetos [17, p.204].

de uma relação tipo lei de potência entre a permeabilidade e o inverso do fator de formação (razão entre a resistividade de um meio poroso saturado com uma solução iônica e a resistividade elétrica da solução iônica [3, 4]) através de uma distância do meio poroso [15, 16]. Isto é,

$$k \propto \frac{l_c^2}{F} \quad (1.4)$$

onde l_c é a longitude característica e F é o fator de formação de resistividade⁵ do meio. O reconhecimento de que este comprimento característico é que fixa a escala da permeabilidade, deixa para trás décadas de tentativas de relacionar a permeabilidade com o fator de formação e com a porosidade⁶ (fração de vazios de uma amostra porosa, representada nesta dissertação por ϕ) exclusivamente. Diversos autores sugeriram definições para esta longitude característica, mas até o momento não está claro qual é a mais apropriada. Considerando que F se relaciona com ϕ por meio de uma relação de potência, lei de Archie [4], é razoável esperar também uma lei de potência para a relação de k com ϕ , uma simples extensão da Equação (1.4). Uma dúvida importante que prevalece é que se realmente pode-se dar caráter universal a estas leis de potência propostas para a permeabilidade.

Um problema adicional com a permeabilidade é a limitada compreensão de sua dependência com a longitude de escala do material poroso. A necessidade de resolver esta dificuldade é central, pois em muitos casos se deseja realizar predições em aplicações que envolvem escalas da ordem de quilômetros ou mais, enquanto que as medidas de laboratório são realizadas tipicamente na escala de centímetros. As idéias com maior potencial nesta área são as de escalonamento utilizando técnicas de renormalização.

Finalmente, a tomada de decisões sobre a melhor estratégia de perfurar um poço de gás ou de petróleo, ou a melhor estratégia para desenvolver uma técnica de descontaminação de solos dependem fortemente da qualidade desta predição. A alimentação

⁵Maiores informações na subseção 2.3.3.

⁶Maiores detalhes sobre o fator de formação na subseção 2.3.1.

de simuladores com informação definitiva, sem dúvida dará subsídio aos simuladores atuais terem um caráter preditivo.

Como já foi dito anteriormente, em virtude da grande complexidade dos meios porosos reais, é muito difícil descrevê-los geometricamente de forma precisa. Por isso algumas aproximações geométricas são então consideradas, de modo a tornar possível o estudo do meio, obtendo-se características muito próximas das reais. Neste sentido diversos estudos com simulações computacionais baseadas em modelos detalhados de geometria porosa e escoamento de fluido tem sido usadas para prever coeficientes de permeabilidade, assim como avaliar correlações semiempíricas obtidas para materiais porosos reais. Para meios porosos tipos granulares usualmente modela-se o meio como um conjunto de partículas ou grãos, de forma esférica ou não, dispostas regular ou aleatoriamente. Já os tipos fibrosos são modelados como um conjunto de inclusões muito longas, chamada de fibras, que podem ser naturais ou sintéticas, retas ou curvas, estando aleatoriamente dispostas ou em malhas regulares.

Neste trabalho optamos em modelar o meio poroso como um empacotamento Apoloniano, pois aliado a sua simplicidade teórica de construção está o seu grande potencial para representar um meio poroso formado pela mistura de partículas de vários tamanhos. Um outro ponto a seu favor é o fato de se ter controle do crescimento do meio, o que nem sempre é possível quando se modela um meio de forma aleatória.

1.2 Descrição do problema físico e objetivo

Nesta dissertação, pretende-se estudar o escoamento de um fluido newtoniano e incompressível no regime permanente e isotérmico em um meio poroso modelado por um empacotamento Apoloniano. Inicialmente, buscamos resultados para a dependência da permeabilidade k em função da porosidade ϕ , verificando até que valor do número de Reynolds a relação linear estabelecida pela lei de Darcy, Equação (1.3), entre a vazão e diferença de pressão é obedecida. Em seguida analisamos a variação

da permeabilidade com a porosidade, verificando até que ponto este comportamento é descrito pelas relações de Kozeny-Carman, Equação (2.22).

1.3 Organização da dissertação

O Capítulo 2 contém um resumo da teoria de escoamento em meios porosos. É fornecida uma descrição de meios porosos, bem como suas propriedades geométricas e sua medição. São apresentados os tipos de escoamentos e suas equações, assim como a Lei de Darcy e os conceitos de alguns parâmetros macroscópicos da estrutura porosa.

No Capítulo 3 é apresentado o problema a ser resolvido, através de sua descrição matemática, geométrica e física. São expostas também as ferramentas computacionais utilizadas nesta dissertação para solução do problema, desde a geração de domínios e malhas, até a discretização por volumes finitos e a solução iterativa das equações discretizadas.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos, de uma forma qualitativa e quantitativa, e uma discussão dos mesmos.

O Capítulo 5 é utilizado para as conclusões e sugestões baseadas nos resultados e na experiência adquirida ao longo do desenvolvimento desta dissertação.

Capítulo 2

Escoamento em meios porosos:

Revisão

Antes de iniciarmos o estudo de escoamentos em meios porosos, vamos fazer uma breve revisão dos conceitos dos dois materiais que estão envolvidos no processo: fluidos e meios porosos.

2.1 Fluido

Em geral a matéria pode ser classificada pela forma física de sua ocorrência na natureza, estas formas são conhecidas como fases ou estados. Neste sentido podemos dizer que a matéria se apresenta em três estados: sólido, fluido e em sistemas granulares. A principal distinção entre sólido e fluido é o comportamento que apresentam em face às forças externas. Enquanto os sólidos são capazes de suportar tensões¹ de cisalhamento, os fluidos são incapazes de resisti-las. Qualquer que seja a força tangencial aplicada ao fluido este irá mover-se e deformar-se continuamente ao longo da sua aplicação. Já os sistemas granulares são constituídos por um grande número de grãos [18] e não se comportam completamente nem como sólidos e nem como fluidos

¹Quociente entre o módulo de uma força e a área sobre qual ela age.

- eles se empacotam como sólidos, mas escoam como líquidos [19].

Os fluidos geralmente são divididos em duas classes, líquidos e gases. Um líquido é difícil de ser comprimido e sua forma muda de acordo com o recipiente que o contém. Por outro lado, um gás é fácil de ser comprimido, e expande-se completamente preenchendo o recipiente. Esta diferença de comportamento pode ser explicada analisando a estrutura molecular. Enquanto os líquidos são formados por um pacote de moléculas relativamente próximas com forte força de coesão, os gases são constituídos de moléculas amplamente espaçadas com forças de coesão desprezíveis.

Como foi dito acima, um fluido é qualquer substância que se deforma continuamente sob a ação de uma força tangencial. Quando a taxa de deformação é diretamente proporcional à tensão de cisalhamento diz-se que o fluido é do tipo *newtoniano*, caso contrário tem-se um fluido *não-newtoniano*. Essa denominação é uma homenagem a Isaac Newton, pois foi ele que supôs que a constante de proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento τ e a taxa de deformação $\frac{du}{dy}$ fosse uma propriedade do fluido, a qual denominou de *viscosidade*. Assim,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

onde a constante μ recebe o nome de coeficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta.

2.1.1 Hipótese do Contínuo

Na definição de fluido não foi mencionada a estrutura molecular dos fluidos, apesar de todos serem compostos de moléculas em constante movimento. Isto ocorreu porque nesta definição foi levada em consideração a hipótese do *continuum*, ou melhor, de que o fluido se comporta como uma substância infinitamente divisível, um contínuo.

A necessidade desta hipótese se deve ao fato de que na maioria das aplicações da engenharia há somente o interesse sobre os efeitos médios de um conjunto de moléculas, pois são estes efeitos que podem ser percebidos e medidos.

O contínuo é dito existir num dado volume de uma substância quando o volume

contém um número de moléculas suficiente para que os efeitos médios das moléculas nas propriedades, dentro do volume, sejam constantes ou variem continuamente com o tempo e a dimensão do volume.

A hipótese do *continuum* deixa de ser válida sempre que a distância média entre as colisões das moléculas -Teoria Cinética Molecular - (aproximadamente $1,6 \times 10^{-7}$ metros, para o ar nas CNTP) tornar-se da mesma ordem de grandeza que a menor dimensão relevante característica do problema.

Maiores informações sobre a hipótese do *continuum* podem ser encontradas nas referências [2, 3, 20].

2.1.2 Classificação de escoamentos

Baseados em diferentes critérios os escoamentos de fluidos podem ser classificados em vários tipos. Pode-se ter por exemplo, escoamentos *estacionários* ou *permanentes* que são aqueles cujas grandezas como velocidade e pressão não variam com o tempo. Caso contrário, eles são ditos *transientes* ou *não permanentes*.

Uma outra classificação foi proposta em 1883 por Reynolds [21]. Ele verificou experimentalmente a existência de dois tipos de escoamentos, o laminar e o turbulento. Escoamento laminar é idealizado como aquele no qual camadas muito finas, ou lâminas, de fluido parecem escorregar umas sobre as outras havendo somente troca de quantidade de movimento molecular. Já o escoamento turbulento é aquele no qual as partículas de fluido individuais apresentam um movimento desordenado, isto é, a velocidade apresenta componentes transversais ao movimento geral do conjunto ao fluido. Neste ponto deve-se salientar que “laminar” ou “turbulento” não são características do fluido, mas um *estado* em que ele se encontra devido às condições do escoamento.

A natureza de um escoamento, isto é, se laminar ou turbulento e sua posição relativa numa escala de turbulência é indicada pelo *número de Reynolds* (Re). O número de Reynolds, parâmetro adimensional, é a relação entre as forças inerciais

(F_i) (devido à velocidade) e as forças viscosas (F_μ), podendo ser escrita como:

$$Re = \frac{\sum F_i}{\sum F_\mu} = \frac{\rho LV}{\mu} \quad (2.2)$$

onde ρ é a densidade e μ a viscosidade do fluido. L e V são comprimentos e velocidades características do escoamento, e dependem do problema em estudo. Para dutos circulares de diâmetro D , temos:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (2.3)$$

A magnitude do número de Reynolds indica a importância para o escoamento das forças inerciais ($Re > 1$) e das forças viscosas ($Re < 1$). Quando $Re \gg 1$, as forças viscosas são importantes somente nas regiões adjacentes às superfícies sólidas, devido à presença da camada limite (fina região ao redor da superfície de corpos em movimento imersos em fluido na qual o gradiente de velocidade $\frac{\partial v}{\partial n}$ normal a superfície do corpo é significativo). Escoamentos abaixo de um valor crítico Re_c são laminares e acima desse valor os escoamentos tornam-se turbulentos. Para um escoamento permanente em um tubo circular, convencionou-se $Re_c = 2000$ [21] e para um canal bidimensional $Re_c = 5772$ [22].

Existem três variáveis muito utilizadas em relação ao escoamento de um fluido que por conveniência vamos definir agora. A primeira é a *vazão*, que representa o volume de fluido que atravessa uma seção reta por unidade de tempo. O segundo é a *vazão mássica*, ou *descarga*, que é a quantidade de massa de fluido que cruza uma seção reta por unidade de tempo. E por último, o *fluxo* que representa a quantidade de uma grandeza física que cruza uma dada área por unidade de tempo.

2.1.3 Equações que modelam o escoamento

O desenvolvimento de uma descrição analítica para o escoamento de um fluido é baseado nas leis físicas relacionadas com o escoamento, expressas em forma matemática adequada. De uma forma geral pode-se dizer que os escoamentos de fluidos

newtonianos incompressíveis e compressíveis, laminares ou turbulentos são descritos pelas equações de Navier-Stokes. Essas equações podem ser deduzidas da lei de conservação de massa (equação da continuidade), conservação de momento (segunda lei de Newton; a taxa de variação temporal de momento de fluido é igual à resultante das forças que atuam no fluido) e conservação de energia (primeira lei da termodinâmica; a taxa de variação temporal da energia é igual à soma do fluxo líquido, ou resultante, de calor para o fluido com o trabalho realizado sobre o fluido). Observe-se que nem todas estas leis são requeridas ao mesmo tempo para a solução do problema. Por exemplo no fluido em meio poroso com baixa taxa de dissipação supõe-se que a temperatura T é contante e não se leva em conta a equação que descreve o fluxo de calor (energia).

Soluções analíticas para problemas gerais são muito raras, pois na maioria das vezes a complexidade matemática dessas equações não permite uma análise deste tipo. Contudo, dependendo das propriedades do escoamento e do fluido, as equações podem ser simplificadas consideravelmente, possibilitando assim uma solução numérica. Por exemplo para o problema em estudo nesta dissertação, em que vamos considerar um fluido newtoniano incompressível escoando em um regime estacionário e isotérmico, as equações da continuidade e de Navier-Stokes se reduzem a:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.4}$$

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{u} \tag{2.5}$$

onde ρ é a densidade do fluido, \vec{u} é a velocidade local do fluido em qualquer ponto do espaço poroso, P é a pressão e μ a viscosidade do fluido.

2.2 Meios Porosos

Um meio poroso pode ser definido como um meio sólido ou uma matriz semi-sólida² que contenha espaços vazios, denominados de *poros* [4]. Estes poros podem ser distribuídos de diversas maneiras no meio, chamado então de *poroso*. Uma definição geométrica do que é um poro, entretanto, é muito mais difícil de se obter, pois espaços vazios extremamente pequenos em um sólido são chamados de *intersticidade molecular*, já os muito largos são chamados de *cavernas*. Sendo assim, então poros são espaços vazios intermediários entre cavernas e intersticidade molecular; a limitação do seu tamanho é portanto intuitiva e bastante indeterminada [2].

Os poros em um meio poroso podem estar ou não *interconectados*. No caso de poros interconectados, temos um material poroso permeável, ou seja, os fluidos são capazes de escoar por duas cavidades penetrando através de uma face de uma parede que separa essas duas cavidades e emergir do outro lado.

De acordo as descrições acima, são exemplos de meios porosos: leitos, rochas porosas como pedra calcária e pedra-pomes, agregados fibrosos como tecidos e filtros, e partículas catalíticas contendo micro-poros.

Como se pode ver, os meios porosos englobam uma grande variedade de materiais. Por isso, é desejável organizá-los em classes, de acordo com o tipo de poros que eles contêm, podendo um meio poroso pertencer a mais de uma classe ao mesmo tempo. Uma classificação foi desenvolvida por Manegold (1937, 1941) e citada em [2], dividindo os meios porosos em *vazios*, *capilarizados* e *espaços forçados*. Vazios são caracterizados pelo fato que suas paredes exercem um efeito insignificante sobre o fenômeno hidrodinâmico em seu interior. Meios capilarizados, são aqueles em que às paredes exercem alguma influência sobre o escoamento, mas os efeitos devido a estrutura molecular não são levados em consideração por serem desprezíveis. No caso de espaços forçados, a estrutura molecular do fluido influi significativamente no

²O termo matriz semi-sólida se refere a um sistema granular citado na seção 2.1.

escoamento. Seguindo este aspecto, neste trabalho o meio poroso será classificado como vazio.

Quanto à estabilidade, tomando como referência a matriz sólida, o meio poroso pode ser classificado em *consolidado* (quando existe uma rigidez que mantém a configuração dos poros, como por exemplo em ossos e pedra-pomes) e *não consolidado* (a rigidez é menor, por exemplo em esponjas e areia). Neste trabalho o meio poroso é considerado como consolidado.

Pode-se ainda classificar os meios porosos, levando em consideração a distribuição espacial dos poros, em *ordenados* ou em *desordenados*; e também em função de serem dispersos (como em meios granulares ou fibrosos) ou ligados. O significado destes termos é auto-evidente.

2.3 Parâmetros macroscópicos da estrutura porosa

Um meio poroso é caracterizado por uma variedade de propriedades geométricas, como a *porosidade* (ϕ), a *permeabilidade* (k), a *área de superfície específica* (S_v) e o *fator de formação de resistividade* (F). Para muitos casos estes parâmetros são completamente determinados pela estrutura porosa do meio e não dependem de qualquer outra propriedade [4].

2.3.1 Porosidade

A porosidade ϕ é a fração do volume total de uma amostra porosa que é ocupada por poros ou espaços vazios [4, p.76]. É expressa como uma fração de 1 ou na forma de porcentagem. Considerando-se uma amostra porosa com um volume total V_T e um volume de poro V_P , a porosidade ϕ será definida como:

$$\phi = \frac{V_P}{V_T} \quad (2.6)$$

Se o cálculo da porosidade for baseado sobre a interconectividade dos poros no lugar do total de poros, teremos a *porosidade efetiva*.

Pode-se ainda escrever a porosidade total em termos do volume de sólido da amostra porosa da seguinte forma,

$$\phi = \frac{V_T - V_s}{V_T} = 1 - \frac{V_s}{V_T} \quad (2.7)$$

onde V_s representa o volume de sólidos do meio.

A medida da porosidade é muito importante para a engenharia de petróleo, pois ela determina a capacidade de armazenamento de um reservatório de gás e petróleo.

Vários são os métodos utilizados para se determinar a porosidade de um material. Dentre estes pode-se citar a intrusão de mercúrio, expansão a gás, análise de imagens digitais, transmissão de raios gama e microtomografia de raios X. Maiores detalhes sobre estes e outros métodos podem ser encontrados nas referências [2, 3, 4].

2.3.2 Área de superfície específica

A superfície específica S_v de um material poroso é definida como a área total de superfície intersticial A_s dos poros pelo volume total V_T do meio poroso [3], ou seja,

$$S_v = \frac{A_s}{V_T} \quad (2.8)$$

Por exemplo, a superfície específica de um material poroso feito de partículas idênticas de raio R em um empacotamento cúbico é $S_v = 4\pi R^2/(2R)^3 = \pi/2R$. Carman (1938), obteve os valores para a superfície específica de areias no intervalo de $1.5 \times 10^2 - 2.2 \times 10^2 \text{ cm}^{-1}$ [3].

Algumas vezes o termo “específico” é utilizado para indicar “por unidade de volume de material sólido”. Então, denotando essa superfície específica por S_0 e utilizando a Equação 2.7, obtem-se:

$$S_v = \frac{A_s}{V_T} = \frac{A_s(1 - \phi)}{V_s} = (1 - \phi)S_0 \quad (2.9)$$

ou,

$$S_0 = \frac{A_s}{(1 - \phi)V_T}. \quad (2.10)$$

Para esferas de raio uniforme r , S_0 será igual a:

$$S_0 = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r}$$

A superfície específica tem um papel importante em uma variedade de aplicações em meios porosos. Ela é a medida da capacidade de adsorção de vários adsorventes industriais; desempenha um papel importante na determinação da efetividade de catalisadores, coluna de troca iônica e filtros; e também está relacionada com a condutividade de fluidos ou permeabilidade de meios porosos.

2.3.3 Fator de formação de resistividade

Como definido por Archie (1942) [3, 4, 17], o fator de formação de resistividade (ou simplesmente fator de formação) é a razão entre a resistividade (R_0) de um meio poroso saturado com uma solução iônica³ e a resistividade (R_w) elétrica da solução iônica:

$$F = \frac{R_0}{R_w} \quad (2.11)$$

É evidente que F apresentará valores maiores ou iguais a um, pois R_0 sempre será maior ou igual a R_w .

Através de estudos empíricos, Archie (1942) propôs que o fator de formação está inversamente relacionado com a porosidade ϕ da seguinte forma [3, 4, 17]:

$$F = \phi^{-m} \quad (2.12)$$

onde m é o *fator de cementação* que varia de acordo com o tipo de material da amostra porosa. Esta relação ficou conhecida como “Lei de Archie”.

³Uma solução de NaCl altamente concentrada, 10 g/litro, é usualmente utilizada [3, p.113].

Além da porosidade, detalhes geométricos e topológicos da microestrutura (como forma e distribuição dos poros, existência de constricção no sistema poroso) também afetam a condutividade elétrica efetiva do meio poroso. O principal efeito destes parâmetros é modificar o fator de formação F . Consequentemente, combinados podem produzir um incontável número de valores de F e m para uma dada porosidade. Existe na literatura uma variedade de valores propostos para o fator de cementação [23]. Usualmente, para rochas calcárias e formações compactadas m é aproximadamente 2 [17].

O fator de formação é muito importante para a engenharia de petróleo, pois a relação de saturação obtida por ele é um excelente parâmetro para detecção de zonas de hidrocarbonetos [17, p.204]. Neste sentido, muita atenção tem sido dedicada para derivar uma fórmula geral que relacione o fator de formação, a porosidade e o fator de cementação. Uma relação que merece destaque é a proposta por Rosales (1982) [17, 24]:

$$F = 1 + f_G(\phi^{-m} - 1) \quad (2.13)$$

onde f_G é definido como parâmetro geométrico interno da rocha porosa com $m \geq 1$. Se $f_G = 1$, a Equação 2.13 recai na Lei de Archie.

Rosales mostrou experimentalmente que, para arenitos, a Equação (2.13) pode ser escrita como [17]:

$$F = 1 + 1.03 \left(\frac{1}{\phi^{1.73}} - 1 \right) \quad (2.14)$$

2.3.4 Permeabilidade

A teoria do escoamento laminar e lento através de um meio poroso homogêneo é baseada num experimento clássico originalmente desenvolvido em 1856 por Henry Darcy [2, 3, 4]. Neste experimento, Darcy investigou o escoamento da água em um filtro de areia homogêneo na vertical. O seu aparelho experimental é mostrado

esquemáticamente na Figura 2.1. Do seu experimento, Darcy concluiu que a vazão Q , com unidades $[L^3T^{-1}]$, da água através do cilindro de areia era i) proporcional a seção transversal A do cilindro, que era constante, ii) proporcional a $(h_2 - h_1)$ e iii) inversamente proporcional ao comprimento L (os símbolos estão definidos na fig. 2.1). Combinando estas conclusões a famosa fórmula de Darcy (ou Lei de Darcy) é obtida [2, 3]:

$$Q = -\frac{KA(h_2 - h_1)}{L} \quad (2.15)$$

onde K , com unidades $[LT^{-1}]$, é uma constante que depende das propriedades do fluido e do meio poroso; h_1 e h_2 são as alturas da água em tubos piezométricos colocados nas faces de entrada (ponto 2) e saída (ponto 1) do filtro (medidas a partir de um mesmo nível de referência) e representam o potencial hidráulico nestes dois pontos. O sinal negativo na expressão indica que a pressão diminui na direção do fluxo.

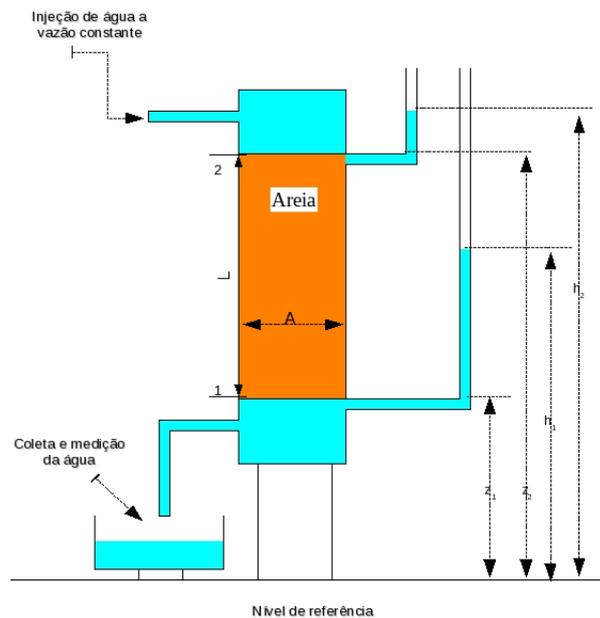


Figura 2.1: Esquema do experimento de filtragem de Darcy.

A Lei de Darcy pode ser reescrita em termos da pressão p e da densidade (ou massa específica) ρ do fluido. Do Teorema de Stevin (considerando a pressão de referência $p_0 = 0$) pode-se afirmar que no ponto superior do filtro (ponto 2 e altura z_2) a pressão é $p_2 = \rho g(h_2 - z_2)$ e no ponto inferior (ponto 1 e altura z_1) a pressão é $p_1 = \rho g(h_1 - z_1)$. Como $z_2 - z_1 = L$, aplicando estas relações na Equação (2.15) obtém-se:

$$Q = -\frac{KA}{\rho g L} (p_2 - p_1 + \rho g L)$$

onde g é o módulo da aceleração da gravidade. Introduzindo-se uma nova constante $K' = \frac{K}{\rho g}$, com unidades $[L^3 T M^{-1}]$, obtém-se:

$$Q = -K' A \left(\frac{p_2 - p_1 + \rho g L}{L} \right) \quad (2.16)$$

A Equação (2.16) é de utilidade restrita, pois como a constante K' depende das propriedades do meio e do fluido não é possível distinguir as influências do meio poroso com as do fluido. Na busca de uma relação que possa fazer essa distinção, Nutting (1930) [2, 3] propôs a seguinte relação:

$$K' = \frac{k}{\mu} \quad (2.17)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido e k , com unidades $[L^2]$, é a *permeabilidade específica* (ou *permeabilidade*) do meio poroso - que depende somente das propriedades da matriz porosa.

Definindo a *descarga específica* v (ou *velocidade média de filtro*) como a vazão por unidade de seção reta na direção normal ao escoamento ($v = Q/A$) [4, 3] e substituindo a Equação (2.17) na Equação (2.16) obtém-se:

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{(p_2 - p_1 + \rho g L)}{L} \quad (2.18)$$

Pode-se expressar esta equação na sua forma diferencial. Para isto, v será um vetor $\vec{v} = (\delta Q/\delta A)\vec{n}$ chamado agora de *velocidade de filtro local* e a diferença de pressão necessitará ser expressa pelo gradiente de pressão. Fazendo L tender para zero, obtém-se então a Equação (1.3) que é a Lei de Darcy na sua forma diferencial:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho\vec{g})$$

onde \vec{g} é o vetor aceleração da gravidade.

Nesta dissertação os efeitos gravitacionais não serão levados em consideração e será utilizada a seguinte equação para os cálculos de permeabilidade:

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (2.19)$$

onde $\Delta P = (p_2 - p_1)$.

Até aqui a lei de Darcy foi apresentada como uma relação empírica baseada no experimento de escoamento estacionário em uma coluna vertical de areia homogênea. Mas esta lei também pode ser derivada para escoamento saturado usando modelos teóricos como modelos de *tubos capilares*, de *fissuras*, de *raio hidráulico*, de *escoamento de resistência e estatísticos*. Provavelmente os modelos mais simples em que a lei de Darcy pode ser derivada são aqueles feitos de tubos capilares [3]. Maiores detalhes sobre estes modelos podem ser encontrados na referência [3, p.161].

2.3.5 Modelo de Raio Hidráulico

Em escoamentos através de tubos e canais abertos o conceito de *raio hidráulico* R_h , definido como a razão entre a área de seção reta e o perímetro molhado, é usado com frequência. Por exemplo, em um tubo circular de raio r , $R_h = r/2$. Outra definição para o R_h é defini-lo como a razão do volume de vazios do meio sobre a sua área de superfície interna (ou superfície molhada). Esta última definição combinada com a idealização do meio poroso como uma rede de canais interconectados, conduz

a seguinte relação entre o R_h e a superfície específica (S_v) definida na subseção 2.3.2: $R_h = \frac{\phi}{S_v}$. Deste modo, R_h representa um raio hidráulico equivalente (ou médio) de um canal de escoamento extremamente complicado [3].

Modelo Kozeny-Carman

Entre os diferentes modelos que tentam relacionar a permeabilidade com as propriedades geométricas e topológicas dos meios porosos o que desfruta uma maior popularidade é o modelo proposto por Kozeny (1927) e modificado por Carman (1937,1956) [3]. Este modelo foi deduzido a partir da solução analítica das equações de Navier-Stokes em uma representação simplificada do espaço poroso - como um agregado de tubos capilares de mesmo comprimento, com seção reta não são necessariamente circular. Como existe uma divergência ou convergência natural no escoamento em tubos, Kozeny (1927) não levou em consideração as componentes da velocidade normais com o eixo do tubo [3].

Após a solução das equações de Navier-Stokes simultaneamente para todos o canais que passavam por uma seção reta normal ao escoamento no meio poroso, Kozeny (1927) obteve as equações para o movimento e permeabilidade da seguinte forma [2, 3, p.125, p.166]:

$$v = - \left(\frac{c_0 \phi^3}{\mu S_v^2} \right) \nabla P; \quad k = \frac{c_0 \phi^3}{S_v^2} \quad (2.20)$$

onde c_0 é um coeficiente numérico chamado de *constante de Kozeny*; ela varia ligeiramente de acordo com a forma da geometria dos canais individuais no modelo ($c_0 = 0.5$ para um círculo, $c_0 = 0.562$ para um quadrado, $c_0 = 0.597$ para um triângulo equilátero e $c_0 = 0.667$ para uma tira [3]). A expressão para k em (2.20) é chamada de *equação de Kozeny*.

Se para (2.20) for levada em consideração a superfície específica por unidade de volume sólido S_0 (veja subseção 2.3.2), obtém-se:

$$k = \frac{c_0}{S_0^2} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}. \quad (2.21)$$

Carman (1937) usou esta forma da equação de Kozeny com $c_0 = \frac{1}{5}$:

$$k = \frac{1}{5S_0^2} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}. \quad (2.22)$$

Os valores de Carman para c_0 , que ele afirmou ter melhor concordância com experimentos, estão entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ [3]. A relação (2.22) é conhecida como *equação de Kozeny-Carman* [2, 3].

Das várias modificações da equação de Kozeny mencionadas na literatura uma que merece ser mencionada neste ponto é a introdução do *fator de tortuosidade* (ou apenas *tortuosidade*), pois devido sinuosidade dos poros o comprimento médio do caminho que a partícula de fluido percorrerá será maior que o comprimento L da amostra porosa. Alguns aspectos do efeito da sinuosidade do trajeto podem ser deduzidos considerando um modelo constituído por um único canal sinuoso, como mostrado na Figura 2.2. O comprimento L na direção i para o ponto onde a pressão piezométrica é p_1 até o ponto onde ela é p_2 é possível de ser medido. Entretanto, não é possível determinar diretamente a distância que as partículas de fluido precisam se mover para passar do ponto 1 ao ponto 2. Este comprimento do trajeto será designado por L_e e representará a distância efetiva do escoamento entre os pontos 1 e 2. Carman (1937) sugeriu duas importantes consequências para o fato de L_e/L ser maior que 1 [3, 25]:

- O valor médio de $-\frac{\partial P}{\partial L_e}$ agindo sobre o fluido será

$$\frac{p_1 - p_2}{L_e}$$

ou

$$\frac{L}{L_e} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right).$$

- A média da componente da velocidade na direção i , \bar{u}_e , será

$$\bar{u}_e = \frac{L}{L_e} \bar{u}_t,$$

onde \bar{u}_t é a média da velocidade tangencial no escoamento.

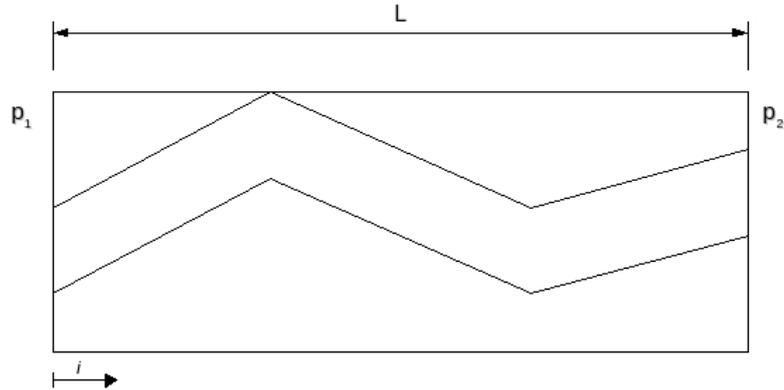


Figura 2.2: Modelo de um canal sinuoso.

Para tubos capilares tortuosos a equação de Hagen-Poiseuille pode ser generalizada como [10, 25]:

$$\bar{u} = \frac{R_h^2}{\alpha\mu} \frac{\Delta P}{L_e} \quad \text{ou} \quad \bar{u} = -\frac{R_h^2}{\alpha\mu} \frac{dP}{dx} \quad (2.23)$$

onde R_h é o raio hidráulico e α é um coeficiente numérico (*fator de forma*) utilizado para contabilizar a forma não-circular do tubo. Para escoamento em tubos capilares de forma circular $\alpha = 2$. Para escoamento entre duas placas paralelas, $\alpha = 3$.

Conhecendo somente R_h para o tubo e os valores de p_1 e p_2 pode-se, utilizando a Equação 2.23, obter a seguinte expressão de u_t para Figura 2.2:

$$\bar{u}_t = \frac{\overline{R_h^2}}{\alpha\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L_e} \right)$$

ou

$$\bar{u}_i = \frac{\overline{R_h^2}}{\alpha\mu} \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 \left(\frac{p_1 - p_2}{L_e} \right).$$

Na forma diferencial ela é escrita como

$$\bar{u}_i = -\frac{\bar{R}_h^2}{\alpha\mu T} \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (2.24)$$

onde $T = (L_e/L)^2$ é chamado de *tortuosidade*.

Utilizando a aproximação de Dupuit-Forchheimer [2, 3, 4], $v = \bar{u}_i\phi$, e a definição $\bar{R}_h = \frac{\phi}{S_v}$, obtém-se as seguintes formas modificadas de (2.20) e (2.22):

$$k = \frac{\phi^3}{\alpha T S_v^2} \quad \text{ou} \quad k = \frac{1}{\alpha T S_0^2} \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}. \quad (2.25)$$

De acordo com Carman, o melhor valor do fator combinado $k' = \alpha\tau$ que se ajusta aos dados experimentais para leitos de empacotamentos é igual a 5, onde k' é também frequentemente chamada de constante de Kozeny [4, 10]. Com $L_e/L = \sqrt{2}$, $T = (L_e/L)^2 = 2$, $\alpha = 2.5$, o que Carman (1956) mencionou ser plausível para seções de forma não-circular [3].

A equação de Kozeny-Carman pode ser preditiva em regime de alta porosidade em materiais compostos por partículas bem distribuídas, tais como areias naturais e rochas sedimentares. Sua aplicação pode estender-se inclusive a alguns casos em que as partículas se encontrem pobremente distribuídas, como no caso de sedimentos, desde que seja adotada uma definição adequada para o comprimento característico. No entanto, em casos que as partículas desviam fortemente da forma esférica, tamanho das partículas amplamente distribuído, e um meio consolidado, a equação de Kozeny-Carman frequentemente não é válida e, portanto, deve sempre ser utilizada com cautela.

Vários testes com a equação de Kozeny-Carman foram realizados por Wyllie e colaboradores (1952, 1955), e citados em [4], em que foram encontrados valores para k' muito maiores do que o 5.0 proposto por Carman (1937, 1938, 1956). O fator de forma α foi encontrado em torno de 2.0 e 3.0, como sugerido originalmente por Carman. A principal razão para a baixa capacidade de predição das equações tipo Kozeny-Carman, está na simplicidade do modelo adotado para as derivações das

relações entre a permeabilidade e a porosidade; o espaço poroso dos meios reais se apresenta como uma malha de condutores aleatoriamente interconectados e não como um conjunto de condutores paralelos. Outras possibilidades podem ser encontradas na referência [4].

Capítulo 3

Formulação do Problema e Metodologia de Solução

O problema proposto nesta dissertação consiste em obter leis de escala para um fluido escoando em um regime estacionário e isotérmico em um meio poroso modelado por um empacotamento Apoloniano.

Optamos em modelar o meio poroso como um empacotamento Apoloniano, pois aliado a sua simplicidade teórica de construção está o seu grande potencial para representar um meio poroso formado pela mistura de partículas de vários tamanhos. Um outro ponto a seu favor é o fato de se ter controle do crescimento do meio, o que nem sempre é possível quando se modela um meio poroso de forma aleatória.

3.1 Empacotamento Apoloniano e os Teoremas de Descartes

Empacotamento Apoloniano¹ foi um problema proposto pelo matemático Apolônio de Perga (262-190 a.C.) e sua solução consta no tratado *Tangências* [26]. O

¹Apollonian Packing, em inglês.

objetivo de Apolônio era: i) encontrar um círculo tangente a três outros círculos, podendo estes ser degenerados em retas (círculos de raio infinito) ou pontos (círculos de raio zero), ii) determinar o empacotamento ótimo, isto é, aquele com o menor número de círculos (em 2D) ou esferas (em 3D) para ocupar uma região finita ao espaço.

Desde o trabalho de Apolônio até os dias atuais, diversos matemáticos têm se empenhado na busca de soluções para o problema proposto. As abordagens dadas ao problema estão ligadas principalmente ao instrumental matemático disponível em cada época. Dentre os vários trabalhos, pode-se citar o realizado por Descartes (1643), nos seus dois teoremas (*Teorema dos Círculos de Descartes e Teorema de Descartes Complexo*)² em que ele encontra relações para o raio e o centro de cada círculo.

3.1.1 Teorema dos Círculos de Descartes

Uma *configuração de Descartes* é uma configuração de quatro círculos mutuamente tangentes, em pontos diferentes, no plano. As possíveis formas de arrumação dos círculos aparecem na Figura 3.1.

Dados três círculos mutuamente tangentes entre si, em três pontos distintos, com curvaturas³ b_1 , b_2 e b_3 , segundo o Teorema dos Círculos de Descartes existirá exatamente dois outros círculos que serão tangentes a cada um deles e as curvaturas destes dois novos círculos serão as raízes da seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^4 b_j^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^4 b_j \right)^2. \quad (3.1)$$

Expandindo a expressão (3.1) e por conveniência substituindo b_1, b_2, b_3 e b_4 por a, b, c e d , respectivamente, obtém-se:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a + b + c + d)^2$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + 2a(b + c + d) + (b + c + d)^2$$

²Em inglês, Descartes Circle Theorem e Complex Descartes Theorem [27].

³A curvatura b_j é definida como o inverso do raio r_j , ou seja, $b_j = \frac{1}{r_j}$.

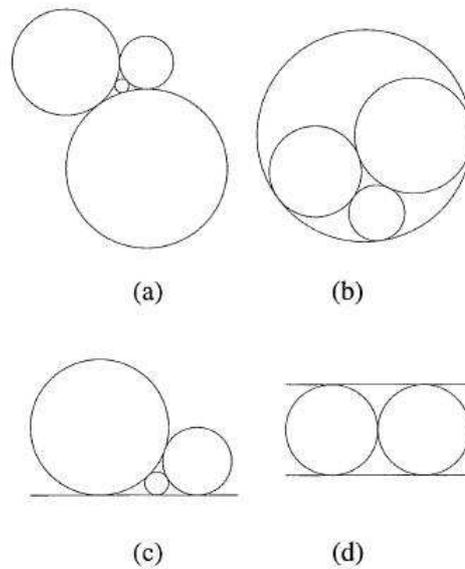


Figura 3.1: Configuração de Descartes. Figura retirada da referência [27].

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + 2a(b + c + d) + 2b(c + d) + (c + d)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(ab + ac) + 2ad + abc + 2bd + 2cd$$

$$d^2 - 2(a + b + c)d + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc) = 0.$$

Agora é só resolver a equação de segundo grau,

$$\Delta = 4(a + b + c)^2 - 4[a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)]$$

$$\Delta = 16(ab + ac + bc)$$

$$d = \frac{2(a + b + c) \pm 4\sqrt{ab + ac + bc}}{2}.$$

Como era esperado temos duas soluções, d_1 e d_2 :

$$d_1 = a + b + c + 2\sqrt{ab + ac + bc} \quad (3.2)$$

e

$$d_2 = a + b + c - 2\sqrt{ab + ac + bc} \quad (3.3)$$

$$d_1 + d_2 = 2(a + b + c). \quad (3.4)$$

A equação (3.1) se aplica a todos os tipos de configurações de Descartes (a)–(d) da Figura (3.1), desde que as curvaturas tenham sinais adequados, como segue. Um *círculo orientado* é um círculo com um sentido atribuído na direção do vetor normal, que pode apontar para dentro ou para fora. Se ele tem raio r então a orientação do raio será r para a normal apontando para dentro e $-r$ para a normal apontando para fora. Por convenção, para os círculos do interior a normal aponta para dentro, sendo assim o círculo externo terá normal apontando para fora, logo sua curvatura será negativa.

3.1.2 Teorema de Descartes Complexo

O Teorema de Descartes Complexo diz que qualquer configuração de Descartes de quatro círculos mutuamente tangentes com curvaturas b_j e centros $z_j = x_j + iy_j$ satisfazem a seguinte relação:

$$\sum_{j=1}^4 (b_j z_j)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^4 b_j z_j \right)^2. \quad (3.5)$$

Realizando um processo análogo ao feito com a Equação (3.1) para a expressão (3.5) obtém-se relações semelhantes a (3.2), (3.3) e (3.4) que conectam os centros dos dois novos círculos com os outros três tangentes:

$$d_1 z_1 = a z_1 + b z_2 + c z_3 + 2\sqrt{abz_1 z_2 + acz_1 z_3 + bcz_2 z_3} \quad (3.6)$$

$$d_2 z'_1 = a z_1 + b z_2 + c z_3 - 2\sqrt{abz_1 z_2 + acz_1 z_3 + bcz_2 z_3} \quad (3.7)$$

$$d_1 z_1 + d_2 z'_1 = 2(b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3). \quad (3.8)$$

Com o uso combinado das Equações (3.4) e (3.8), pode-se gerar empacotamentos Apolonianos como os mostrados nas Figuras (3.2) e (3.3).

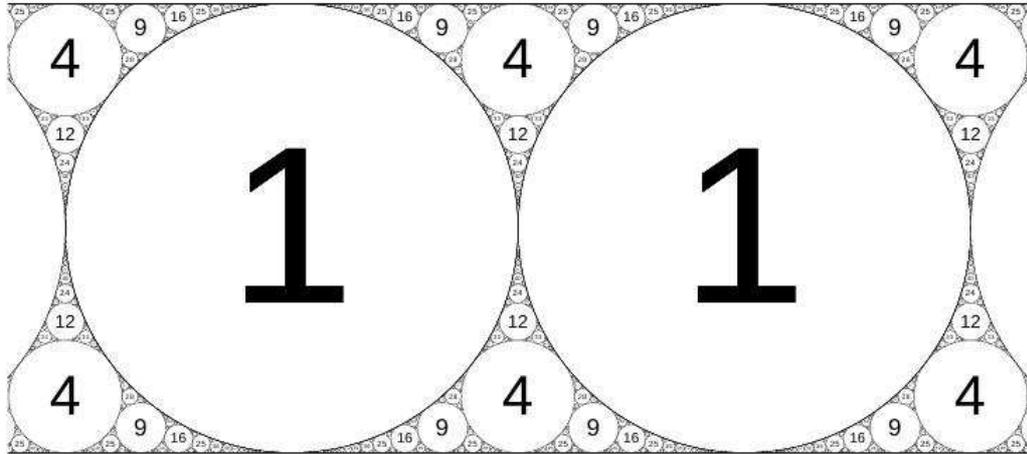


Figura 3.2: Empacotamento Apoloniano com curvaturas iniciais $(0,0,1,1)$. Figura retirada da referência [28].

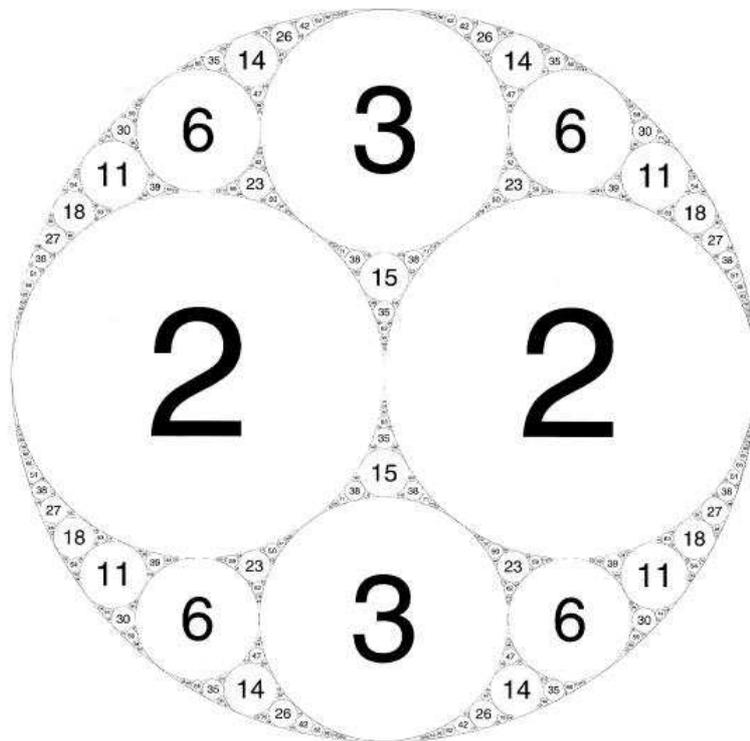


Figura 3.3: Empacotamento Apoloniano com curvaturas iniciais $(-1,2,2,3)$. Figura retirada da referência [27].

3.2 Dinâmica de Fluidos Computacional - DFC

A *dinâmica de fluidos computacional*⁴ pode ser definida como um conjunto de técnicas matemáticas e computacionais usadas para o estudo preditivo (qualitativo e quantitativo) de fenômenos que envolvem o escoamento de fluidos com ou sem trocas de calor e com ou sem troca de massa. Basicamente, o usuário está interessado em obter as distribuições de velocidades, pressões e temperaturas na região do escoamento. Esses dados podem ser utilizados por físicos, químicos, engenheiros ou arquitetos para prever o comportamento de um produto, processo ou material em determinadas condições assumidas ou aferidas ou até mesmo avaliar o conforto ambiental de instalações.

Um resultado de uma simulação numérica não deve ser assumido como uma verdade absoluta. Simuladores fluidodinâmicos, assim como qualquer outro simulador, processam cálculos baseados nos dados de entrada. Se o usuário entra com condições de contorno e modelos que não correspondem ao seu sistema, o simulador mostrará resultados quantitativos irreais. Por isso pode-se afirmar que o uso de métodos numéricos de forma alguma implica que a mecânica dos fluidos experimental e as análises teóricas estejam sendo postas de lado. É muito comum as três técnicas se complementarem durante um projeto que envolva escoamentos de fluidos e no estudo de modelos teóricos para algum fenômeno particular, como turbulência. Pode-se, por exemplo, utilizar os resultados do programa de simulação para orientar o projetista na escolha dos experimentos a serem realizados ou então resolver numericamente as equações de novos modelos teóricos e comparar os resultados com experimentos, corroborando ou não com estes novos modelos.

O principal objetivo das simulações com DFC é reduzir o número de experimentos e explorar fenômenos que não poderiam ser estudados em laboratório de forma prática. Dentre as vantagens do uso das técnicas de DFC, pode-se citar: grande redução de

⁴Em inglês, Computational Fluid Dynamic (CFD).

tempo e gastos com novos projetos; habilidade para estudar sistemas onde é difícil ou até mesmo impossível de se medir o valor de uma propriedade, como por exemplo, a pressão no núcleo da Terra; habilidade para estudar sistemas sob condições ambientais perigosas, como por exemplo, reatores nucleares.

Para tratar um problema de escoamento de fluidos computacionalmente, é necessário expressar de forma adequada as equações e a região (domínio) em que elas são válidas. Como não se pode obter soluções numéricas sobre uma região contínua, pois o método numérico permite a obtenção da solução em pontos específicos pré-definidos e o meio contínuo é formado por infinitos pontos, inicialmente o domínio é *discretizado*, isto é, dividido em *pontos* ou em *volumes de controle*. Somente nesses pontos (ou volumes) é que as soluções serão obtidas. Ao conjunto de pontos discretos dá-se o nome de *malha*. Quanto maior for o número de pontos discretos, isto é, quanto mais fina for a malha, mais fiel ao modelo será o resultado numérico obtido. Em contrapartida, o tempo de simulação também será aumentado podendo levar horas ou até mesmo dias para resolver um problema. Uma maneira de contornar o problema de refinamento é buscar uma solução numérica *independente da malha*, ou seja, uma solução que não se altere, dentro de algum critério de tolerância, quando a malha for refinada.

Para a resolução de um problema via simulação DFC, pode-se utilizar diversos métodos de discretização, como por exemplo: método das diferenças finitas (MDF), métodos de elementos finitos (MEF) e o método dos volumes finitos (MVF). Devido à sua grande popularidade em DFC e à sua utilização no FLUENT⁵, vamos falar mais detalhadamente apenas do MVF.

3.2.1 Como trabalha um código DFC

Para prover um fácil acesso para seus usuários, todos os pacotes comerciais de DFC incluem uma sofisticada interface com o mesmo para facilitar a inserção dos

⁵Pacote de DFC utilizado nesta dissertação; ver [29].

parâmetros dos problemas, assim como a extração de seus resultados. Sendo assim, os códigos contêm três elementos principais: o *pré-processador*, o “*solver*” e um *pós-processador*.

- **Pré-processador:** consiste em rotinas computacionais que permitem inserir os dados de entrada do problema no programa. O usuário é responsável pela definição da geometria da região de interesse (domínio computacional); divisão do domínio em vários subdomínios, ou, células; especificação das condições de contorno. Nesta dissertação o utilizamos o software GAMBIT⁶ como pré-processador.
- **Solver:** é a parte do código responsável pela aproximação das variáveis do fluxo por funções simples; pela discretização e substituição das aproximações nas equações diferenciais parciais que governam o problema e pela solução das equações algébricas não-lineares.
- **Pós-processador:** é a parte do código que possibilita ao usuário visualizar a malha computacional, gráficos vetoriais, resultados no domínio representados por linhas coloridas ou regiões pintadas, construir superfícies 2D ou 3D e visualizar o caminho livre de uma partícula através do domínio, entre outras opções.

3.2.2 Método dos volumes finitos

O software FLUENT usa a técnica baseada em um volume de controle para converter as equações governantes em equações algébricas que podem ser numericamente resolvidas. Esta técnica consiste na integração das equações governantes em uma região, ou volume de controle, do espaço, fornecendo equações discretas que conservam cada propriedade no volume de controle. Este método está intrinsicamente ligado ao conceito de fluxo entre regiões, ou volumes, adjacentes.

⁶Software que acompanha o pacote comercial FLUENT; ver [29, 30].

A quantidade líquida de uma grandeza por unidade de massa Φ , que atravessa as fronteiras do volume de controle V por unidade de tempo, é calculada pela integração, sobre essas fronteiras, da diferença entre os fluxos que entram e os que saem de V . Esses fluxos são basicamente, de dois tipos:

- Fluxos convectivos: devido à velocidade do fluido. Esse tipo de fluxo tem a forma geral $\rho\Phi\vec{u}$, em que ρ é um termo de densidade, \vec{u} o vetor velocidade do fluido e Φ a propriedade sendo transportada por unidade de massa.
- Fluxos difusivos: causados pela não-uniformidade da distribuição espacial de Φ . Esse tipo de fluxo tem a forma geral $\Gamma_\Phi\nabla\Phi$, onde Γ_Φ é o coeficiente de difusão, não necessariamente uniforme e Φ a propriedade por unidade de massa sendo difundida.

De uma forma generalizada podemos expressar todas as equações resolvidas através de uma simulação DFC da seguinte forma:

$$\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\Phi\vec{u}) = \nabla \cdot \Gamma_\Phi\nabla\Phi + S_\Phi \quad (3.9)$$

onde S_Φ é um termo-fonte de geração ou sorvedouro, de consumo. Desta forma, por exemplo, para recuperar as equações de conservação de massa e momento basta fazer $\Phi = 1$ e $\Gamma_\Phi = 0$ para a continuidade e $\Phi = \vec{u}$ e $\Gamma_\Phi = \mu$ para o momento. Maiores detalhes sobre essa equação podem ser encontrados na referência [1].

Para ilustrar a discretização das equações governantes, vamos considerar no regime estacionário a equação de conservação para o transporte de uma quantidade escalar Φ . Escrevendo essa equação na forma integral para um volume de controle V , teremos:

$$\oint \rho\Phi\vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint \Gamma_\Phi\nabla\Phi \cdot d\vec{A} + \int_V S_\Phi dV \quad (3.10)$$

onde \vec{u} é o vetor velocidade ($= u\hat{i} + v\hat{j}$ em 2D), \vec{A} o vetor área.

A Equação (3.10) é aplicada em cada volume de controle, ou célula, do domínio computacional. Na Figura 3.4 temos um exemplo de quatro células triangulares

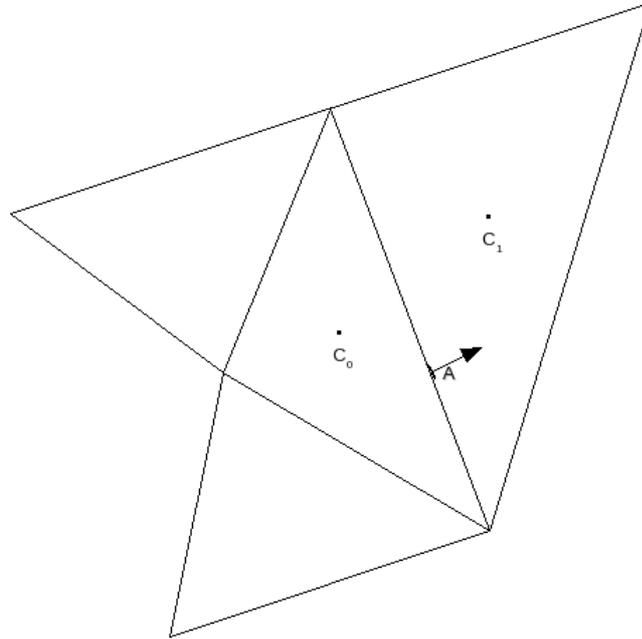


Figura 3.4: Volume de controle utilizado para ilustrar a discretização da equação de transporte de um escalar.

bidimensionais. A discretização da Equação (3.10) para cada célula fornece a seguinte equação:

$$\sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{u}_f \Phi_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\Phi \nabla \Phi_f \cdot \vec{u}_f + S_\Phi V \quad (3.11)$$

onde N_{faces} é o número de faces que contornam a célula, Φ_f é valor de Φ na face f , $\rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{A}_f$ o fluxo de massa através da face, A_f área da face f e $\nabla \Phi_f$ o gradiente de Φ na face f .

As equações resolvidas pelo software FLUENT assumem a forma geral da Equação (3.11). No modo padrão do software, o valor da propriedade Φ é armazenado no centro da célula (c_0 e c_1 na Figura 3.4). Entretanto, valores de Φ na face da célula, Φ_f , são necessários para os termos convectivos na Equação (3.11) e devem ser interpolados a partir dos valores armazenados no centro. Isto é conseguido usando um esquema chamado de *upwind*⁷.

⁷Expressão inglesa que significa à *montante* de um ponto no escoamento, ou seja, na direção de

No esquema *upwind* o valor de Φ_f é derivado a partir das propriedades existentes no centro da célula anterior. O programa permite escolher vários esquemas *upwind*, tais como: *first-order upwind*, *second-order upwind*, *power law*, e *QUICK*. Como os resultados deste trabalho foram obtidos utilizando o esquema *upwind* de segunda ordem, nos restringimos apenas à uma análise mais detalhada dos esquemas *first-order upwind* e *second-order upwind*. Maiores detalhes sobre estes e outros esquemas de discretização podem ser encontrados nas referências [21, 31].

Esquema *upwind* de primeira ordem (*first-order upwind*)

No esquema *upwind* de primeira ordem os valores das propriedades na face da célula (Φ_f) são determinados assumindo que os valores no centro da célula representam um valor médio entre as faces, e este é colocado na entrada da célula, representando a direção do escoamento. Assim o valor na face da célula Φ_f será idêntico ao valor Φ armazenado no centro da célula anterior na direção do escoamento.

Esquema *upwind* de segunda ordem (*SOU - second-order upwind*)

Neste esquema os valores Φ_f são determinados usando uma aproximação linear e multidimensional. Nesta aproximação, a alta precisão para Φ_f é obtida através da série de expansão de Taylor. O cálculo é feito da seguinte forma:

$$\Phi_f = \Phi + \nabla\Phi \cdot \vec{r} \quad (3.12)$$

onde Φ e $\nabla\Phi$ são o valor no centro da célula e seu gradiente na célula anterior, e \vec{r} é o vetor deslocamento do centro da célula anterior até o centro da face. Esta formulação requer o cálculo do $\nabla\Phi$ em cada célula. Este gradiente é calculado usando o teorema da divergência, escrito da seguinte forma:

$$\nabla\Phi = \frac{1}{V} \sum_f^{N_{faces}} \tilde{\Phi}_f \vec{A} \quad (3.13)$$

onde vem o escoamento [21].

onde $\tilde{\Phi}_f$ é a média aritmética de Φ no centro de duas células adjacentes à face, para o volume de controle da Figura 3.4, teremos:

$$\tilde{\Phi}_f = \frac{\Phi_{c_0} + \Phi_{c_1}}{2}. \quad (3.14)$$

O esquema *SOU* introduz menos difusão numérica que o esquema *upwind* de primeira ordem, mas pode apresentar erros dispersivos [21]. Como desejamos resultados mais precisos, optamos em utilizar neste trabalho o esquema *upwind* de segunda ordem.

Linearização da equação discretizada

A equação de transporte discretizada (3.11) contém a variável escalar desconhecida Φ no centro da célula, assim como, as variáveis desconhecidas ao redor das células vizinhas. Esta equação, em geral, será não-linear com respeito a estas variáveis. Uma linearização para (3.11) pode ser escrita como

$$a_P \Phi = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + b \quad (3.15)$$

onde o subscrito nb se refere às células vizinhas, e a_P e a_{nb} são coeficientes de linearização para Φ e Φ_{nb} .

O número de vizinhos para cada célula depende da topologia da malha, mas é normalmente igual ao número de faces que contornam a célula (as células de contorno são a exceção). Escrevendo a Equação (3.15) para todas as células do domínio em que desejamos determinar Φ , obtém-se um sistema de equações que pode ser resolvido por métodos diretos ou indiretos.

3.2.3 Discretização da quantidade de movimento e equação da continuidade no FLUENT

Nesta seção vamos fazer uma breve descrição das técnicas, escolhidas para esta dissertação no software FLUENT para discretizar as equações da quantidade de movi-

mento e da continuidade, assim como suas soluções através do chamado *pressure-based solver*⁸. Para facilitar a descrição, vamos considerar a forma integral das equações da continuidade e da quantidade de movimento para um escoamento em regime estacionário:

$$\oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.16)$$

$$\oint \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{A} = - \oint p \vec{I} \cdot d\vec{A} + \oint \vec{\tau} \cdot d\vec{A} + \int_V \vec{F} dV \quad (3.17)$$

onde I é a matriz identidade, $\vec{\tau}$ é o tensor de tensão, e \vec{F} é o vetor força.

Discretização da quantidade de movimento

O esquema de discretização descrito anteriormente para a equação de transporte de uma propriedade escalar é também utilizado para discretizar a equação de quantidade de movimento. Por exemplo, a discretização para a equação de quantidade de movimento em x pode ser obtida substituindo Φ por u :

$$a_P u = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \sum p_f \vec{A} \cdot \hat{i} + S \quad (3.18)$$

onde p_f é a pressão na face da célula e S é um termo fonte.

Se o campo de pressão e o fluxo de massa são conhecidos, a Equação (3.18) pode ser resolvida de maneira semelhante ao realizado na sub-seção 3.2.2 e o campo de velocidade é obtido. Entretanto, o campo de pressão e o fluxo de massa não são conhecidos e precisam ser obtidos durante a solução.

O software FLUENT armazena a pressão e a velocidade no centro da célula (c_0 e c_1 na Figura 3.4). Mas, a Equação (3.18) requer o valor da pressão entre as faces das células. Sendo assim, um método de interpolação faz-se necessário para calcular os valores de pressão na face da célula a partir dos valores de pressão armazenados no centro da célula. Como mencionando anteriormente, neste trabalho será utilizado o esquema de segunda ordem visto na sub-seção 3.2.2, pois os valores obtidos por esse método são muito mais precisos do que o método de primeira ordem.

⁸Ver apêndice A.

Discretização da equação da continuidade

Integrando a Equação (3.16) sobre o volume de controle da Figura 3.4 obtém-se a seguinte equação discretizada:

$$\sum_f^{N_{faces}} J_f A_f = 0 \quad (3.19)$$

onde J_f é o fluxo de massa, ρu_n , que atravessa a face f .

As equações de quantidade de movimento e continuidade são resolvidas sequencialmente. Neste procedimento, a equação da continuidade é usada como uma equação para a pressão. Na equação 3.19 a pressão não aparece explicitamente para o escoamento incompressíveis, pois a pressão p não é mais uma função da densidade, que é constante. Para introduzir a pressão na equação da continuidade vamos utilizar o algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*).

Acoplamento pressão-velocidade

O acoplamento pressão-velocidade é obtido usando a seguinte equação:

$$J_f = \hat{J}_f + d_f(p_{c_0} - p_{c_1}) \quad (3.20)$$

onde p_{c_0} e p_{c_1} são as pressões dentro das células em ambos os lados da face, e \hat{J}_f contém a influência da velocidade nestas células. O termo d_f é uma função de \bar{a}_p , a média os coeficientes a_p da equação de quantidade de movimento para as células em ambos os lados da face f .

3.2.4 Algoritmo SIMPLE

O algoritmo SIMPLE utiliza uma relação entre a velocidade e as correções de pressão para garantir a conservação da massa e obter o campo de pressão.

Se a equação de quantidade de movimento é resolvida com um valor inicial para o campo de pressão p^* , o fluxo resultante na face, J_f^* , calculado pela Equação (3.20)

$$J_f^* = \hat{J}_f^* + d_f(p_{c_0}^* - p_{c_1}^*), \quad (3.21)$$

não satisfaz a equação da continuidade. Consequentemente, uma correção J'_f é adicionada ao fluxo na face J_f^* , obtendo um fluxo na face corrigido, J_f

$$J_f = J_f^* + J'_f \quad (3.22)$$

satisfazendo assim a equação da continuidade. No algoritmo SIMPLE, J'_f é escrito como:

$$J'_f = d_f(p'_{c_0} - p'_{c_1}) \quad (3.23)$$

onde p' é a correção da pressão na célula.

O algoritmo SIMPLE substitui as equações de correção do fluxo (Equações 3.22 e 3.23) na equação da continuidade discretizada (Equação 3.19) obtendo assim uma equação discreta para a correção da pressão p' na célula:

$$a_p p' = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b \quad (3.24)$$

onde o termo fonte b é a taxa do fluxo líquido na célula dado por:

$$\sum_f^{N_{faces}} J_f^* A_f. \quad (3.25)$$

Quando a solução é obtida, a pressão na célula e o fluxo na face são corrigidos usando:

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (3.26)$$

$$J_f = J_f^* + d_f(p'_{c_0} - p'_{c_1}) \quad (3.27)$$

onde α_p é uma fator de sub-relaxação para pressão.

3.3 Um modelo para meios porosos

3.3.1 Modelo para meios porosos na literatura

Em virtude da grande complexidade dos meios porosos reais, é muito difícil descrevê-los geometricamente de forma precisa. Sendo assim, algumas aproximações

geométricas são consideradas de modo a tornar possível o estudo do meio, obtendo-se características muito próximas das reais. Uma aproximação usual é, modelar o meio poroso como um conjunto de partículas ou grãos, de forma esférica ou não, dispostas de forma regular ou randomicamente no meio. Dentre os diversos trabalhos na literatura podemos citar os realizados por [32, 33].

Em [32, 35], Adler (1985) buscou o termo de resistência equivalente e a permeabilidade de um meio poroso modelado como um empacotamento Apoloniano com pequeno espaçamento entre os discos (Figura 3.5) utilizando uma aproximação de lubrificação. No entanto, não há uma solução geral da equação de Navier-Stokes para testar a validade desta aproximação. É obtida leis de recorrência para grandezas locais, mas não é calculada a permeabilidade total.

TRANSPORT PROCESSES IN FRACTALS—I

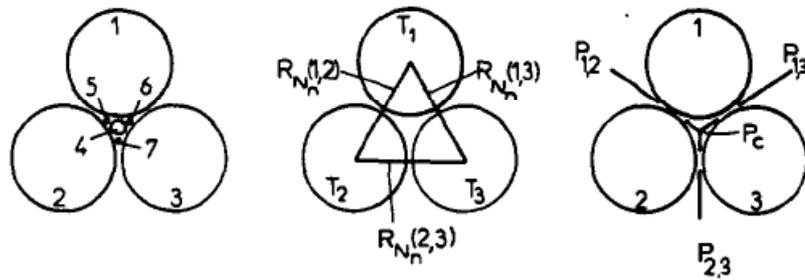


Figura 3.5: Meio poroso modelado por Adler(1985). Imagem retirada de [32].

Em [33], os autores estudaram distribuições de canais abertos, fluxos locais, e velocidades em um meio poroso bidimensional formado de círculos de mesmo tamanho alocados de maneira aleatória em um canal. A geometria do problema pode ser visualizada na Figura 3.6.

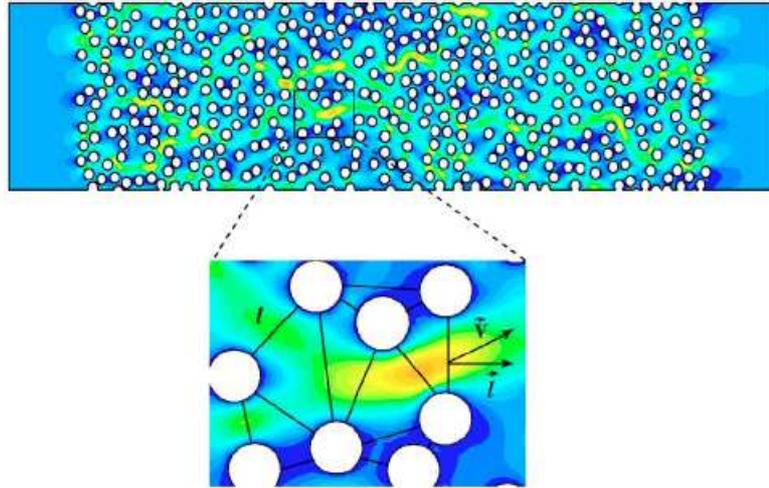


Figura 3.6: Meio poroso modelado por A. D. Araújo et al. (2006). Imagem retirada da referência [33].

3.3.2 O modelo deste trabalho

Neste trabalho, vamos investigar os efeitos do empacotamento Apoloniano como um meio poroso para o escoamento de um fluido newtoniano e incompressível no regime estacionário e isotérmico em um canal de altura h .

O desenho do empacotamento será realizado com o software GAMBIT. Inicialmente quatro círculos tangentes, de mesmo tamanho, de raios $\frac{h}{4}$ são desenhados de forma que os seus centros fiquem situados sobre os vértices de um quadrado de lado $\frac{h}{2}$ colocado no meio do canal. Denominamos esta geometria inicial como geração 1 ou $g = 1$. As próximas gerações g são obtidas pela inclusão de novos círculos tangentes nos espaços limitados pelos quatro círculos iniciais. No entanto, para realizar a análise do escoamento faz-se necessário considerar os círculos não tangentes⁹, sendo assim multiplicamos os raios dos círculos por um fator de redução $0 < s < 1$ e associamos a cada valor de s uma porosidade ϕ , que é característica da geração em estudo.

Inicialmente, buscamos resultados para a dependência da permeabilidade k em

⁹Obviamente que com os círculos tangentes não há possibilidade do fluido escoar.

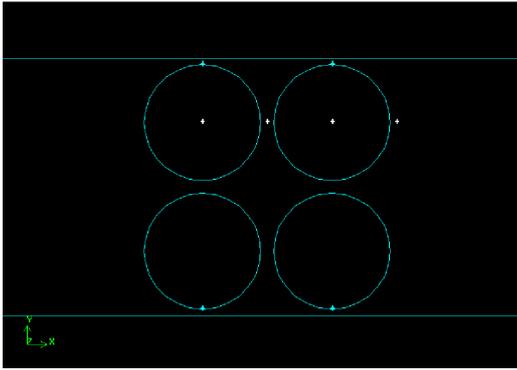


Figura 3.7: Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 1$ e $s = 0.9$

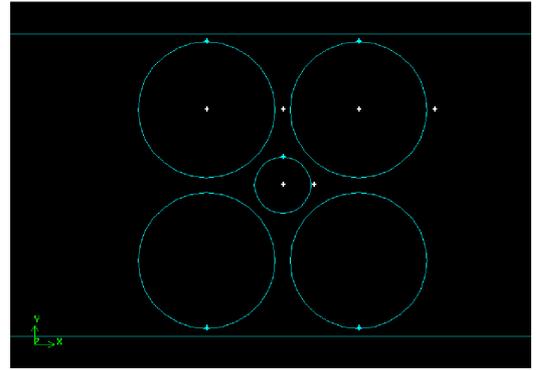


Figura 3.8: Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 2$ e $s = 0.9$

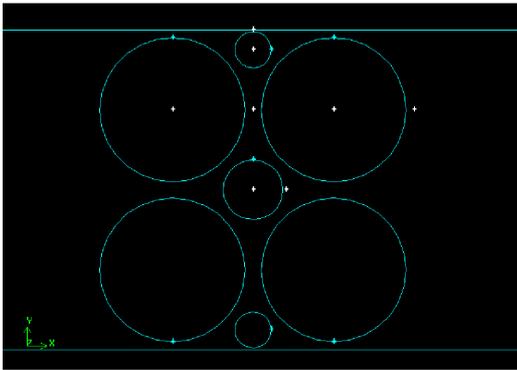


Figura 3.9: Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 3$ e $s = 0.9$

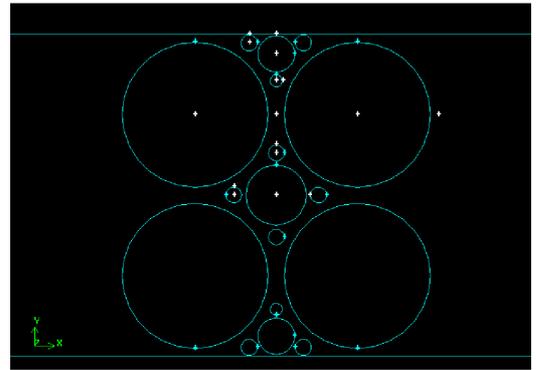


Figura 3.10: Imagem gerada no software GAMBIT para $g = 4$ e $s = 0.9$

função da porosidade ϕ , verificando até que valor do número de Reynolds a relação linear estabelecida pela lei de Darcy, Equação (2.19), entre a vazão e diferença de pressão é obedecida. Em seguida analisamos a variação da permeabilidade com a porosidade, verificando até que ponto este comportamento é descrito pelas relações de Kozeny-Carman, Equações (2.22 e 2.25).

O cálculo da porosidade é feito da seguinte forma:

$$\phi = 1 - \frac{A_c}{A_q} \quad (3.28)$$

onde A_c é a soma das áreas dos círculos e A_q corresponde a área do quadrado que contém o empacotamento.

A solução em DFC para o escoamento no empacotamento Apoloniano foi dividida em: *pré-processamento*, *solver* e *pós-processamento*. Para o *pré-processamento*, como já dito anteriormente, foi utilizado o software GAMBIT tanto para construir o domínio a ser estudado, como para a geração de uma malha computacional. No segundo passo, *solver*, o sistema de equações parciais dados pelas Equações (2.4) e (2.5), foi discretizado e o sistema algébrico resultante foi resolvido iterativamente empregando o software FLUENT 6.3.26. Este software dispõe de uma ferramenta capaz de adaptar a malha (aumentar ou diminuir a quantidade de células). Dentre vários modos de adaptar a malha foi utilizado o gradiente das grandezas, o qual permitiu que pudéssemos refinar a malha, através da variação dos gradientes envolvidos na solução do caso (velocidade e pressão). Neste trabalho o refinamento foi feito através do módulo da velocidade na função *Gradient Adaption* do programa. Este procedimento reduz fortemente a necessidade de se aumentar o número total de células e garante uma boa qualidade na solução (economizando tempo e esforço computacional), pois uma vez que os limites máximos de erro ocorrem em regiões de elevado gradiente a malha só será adaptada nestas regiões.

A construção da malha computacional utilizada depende da geração g e do fator de redução s escolhido. Mas em todas elas foi concentrada uma quantidade maior de células nas regiões entre os círculos (veja Figura 3.11), pois esta com certeza será a região com os maiores gradientes.

Um outro passo importante é verificar a qualidade da malha, pois propriedades como assimetria pode afetar fortemente a precisão e robustez de uma solução DFC [30]. O GAMBIT disponibiliza várias medidas de qualidade (algumas vezes chamadas de “métricas”) com a qual pode-se avaliar a qualidade da malha. Das medidas de distorção disponibilizadas no GAMBIT, para este estudo optou-se pelo ângulo de distorção (*EquiAngle Skew*). O ângulo de distorção é uma medida que é definida

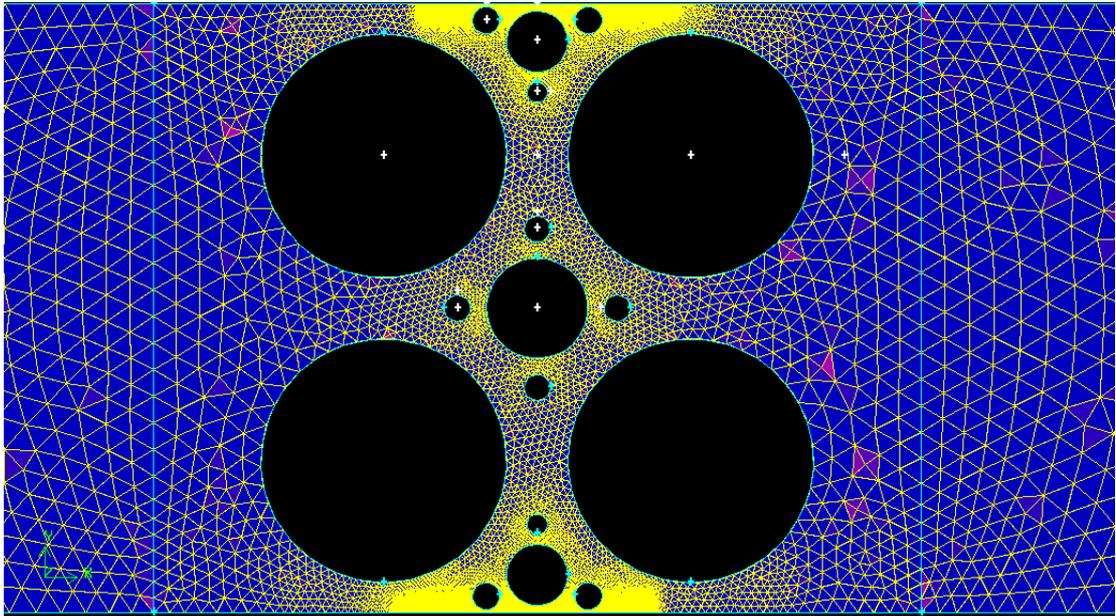


Figura 3.11: Visualização do ângulo de distorção do domínio computacional para $g = 4$ e $s = 0.8$. Na figura a coloração avermelhada indica os triângulos que tiveram ângulo de distorção próximo de 0.6.

como:

$$Q_{EAS} = \max \left(\frac{\theta_{max} - \theta_{eq}}{180 - \theta_{eq}}, \frac{\theta_{eq} - \theta_{min}}{\theta_{eq}} \right) \quad (3.29)$$

onde, θ_{max} e θ_{min} são o ângulo máximo e mínimo, em graus, entre as arestas do elemento, e θ_{eq} é o ângulo correspondente a um elemento equilátero de forma semelhante. Para elementos triangulares e tetraédricos $\theta_{eq} = 60^\circ$. De acordo com as informações da literatura pertinente [30], este ângulo de distorção não deve ser igual nem superior a 0.97 para que a qualidade da solução numérica não seja comprometida. Neste estudo obtivemos para todas as malhas um ângulo de distorção menor que 0.6.

Após feita a análise no GAMBIT, um outro teste foi realizado no FLUENT. Neste software fizemos adaptações na malha com base no módulo da velocidade e comparamos as simulações até obter resultados não dependentes da malha com uma diferença menor que um por cento entre duas simulações consecutivas.

Medimos a diferença de pressão entre duas linhas verticais localizadas nas distâncias h antes do empacotamento e $2h$ após o empacotamento, como pode ser vista na Figura 3.12.

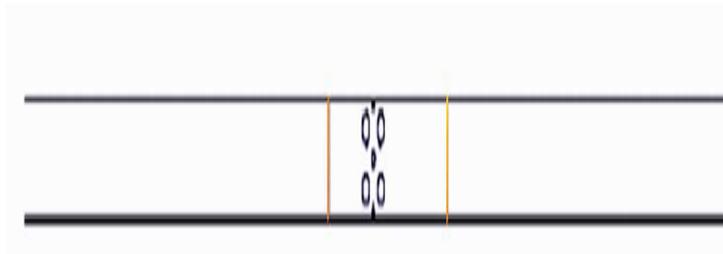
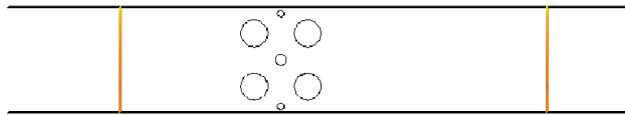


Figura 3.12: Linhas verticais onde foram coletadas as pressões.

Com a informação da diferença de pressão em mãos para a região escolhida, agora a substituímos na Equação 2.19 e encontramos a permeabilidade para cada valor de g e s .

Para verificar até que valor do número de Reynolds¹⁰ a relação linear estabelecida pela lei de Darcy entre a pressão e a velocidade é estabelecida fizemos simulações com diferentes valores de velocidade na entrada do canal para cada g e s .

¹⁰Vale salientar que o cálculo do número de Reynolds não foi realizado analisando as larguras dos poros e sim a largura do canal.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

A análise dos resultados será dividida em duas partes: análise qualitativa e análise quantitativa do escoamento. Na primeira vamos apresentar os resultados utilizando as ferramentas de pós-processamento do software FLUENT. Na segunda parte vamos discutir mais detalhadamente os resultados para o regime de validade da lei de Darcy para o caso em estudo, e o comportamento da permeabilidade com a porosidade, para estas análises utilizamos os dados fornecidos pela parte do pós-processamento do FLUENT e os tratamos utilizando o software Origin.

4.1 Análise qualitativa do escoamento

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados qualitativos para os campos de velocidade e pressão gerados pelo pós-processamento do software FLUENT.

4.1.1 Influência da adição dos círculos nos campos de velocidade

As Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 mostram o contorno do módulo da velocidade para o fluido com velocidade de 0.01 m/s na entrada do canal (nesta região o fluxo é laminar

e a lei de Darcy é válida) para as gerações 1, 2, 3 e 4 respectivamente. Nestas imagens vê-se claramente a influência da adição dos círculos nos campos de velocidade. Como já era esperado, as regiões com maiores espaçamentos entre os círculos tiveram os maiores valores para velocidade (regiões com a cor avermelhada).

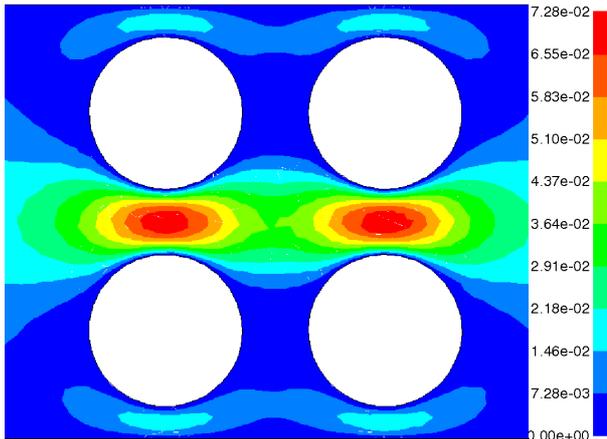


Figura 4.1: $g = 1$ e $s = 0.7$

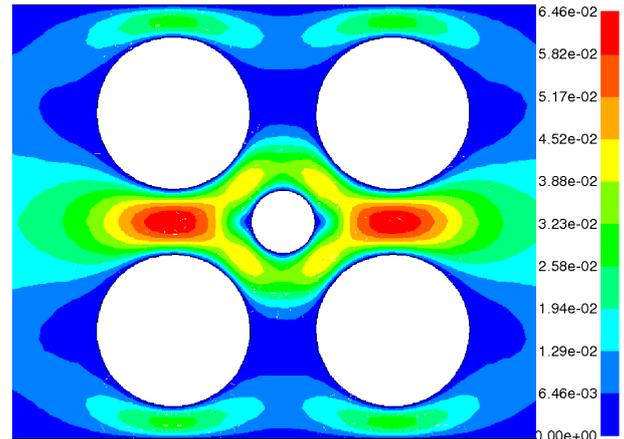


Figura 4.2: $g = 2$ e $s = 0.7$

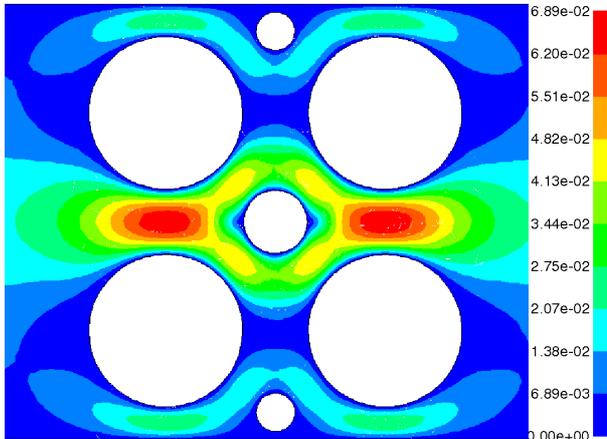


Figura 4.3: $g = 3$ e $s = 0.7$

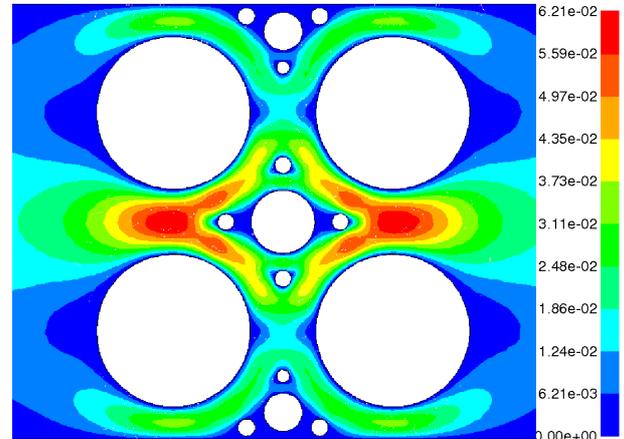


Figura 4.4: $g = 4$ e $s = 0.7$

Figura 4.5: Contorno do módulo da velocidade para a velocidade de entrada igual a 0.01 m/s .

Uma outra forma de observar essa influência é utilizarmos os vetores para repre-

sentar os campos de velocidade como pode ser visto nas Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9. Nesta forma de visualização obtém-se mais detalhes sobre os trajetos seguidos pelo fluido, podendo até em algumas situações visualizar a formação de vórtices como pode ser visto na Figura 4.11. Vale salientar que a formação de vórtices na Figura 4.11 ocorre em um regime em que a pressão já não varia linearmente com a velocidade.

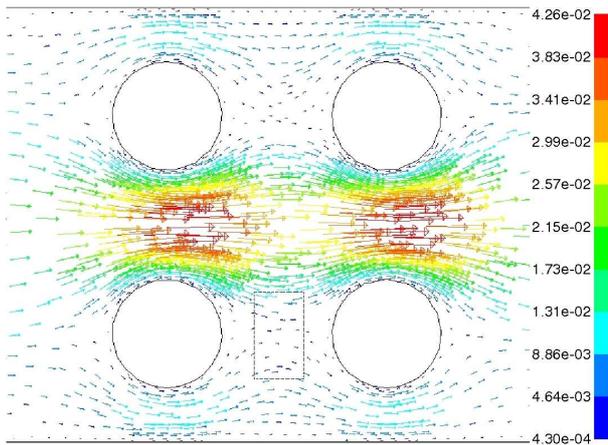


Figura 4.6: $g = 1$ e $s = 0.5$

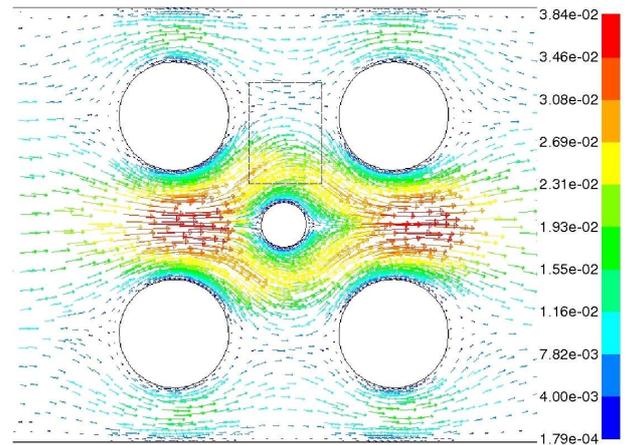


Figura 4.7: $g = 2$ e $s = 0.5$

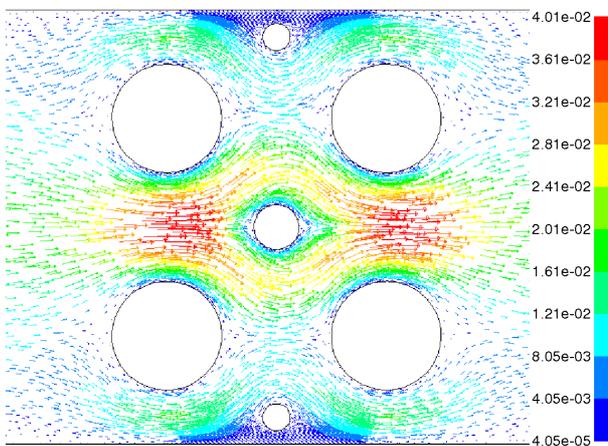


Figura 4.8: $g = 3$ e $s = 0.5$

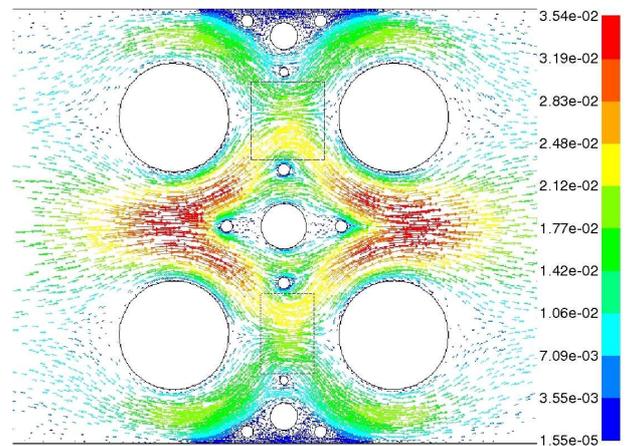


Figura 4.9: $g = 4$ e $s = 0.5$

Figura 4.10: Vetores de velocidade coloridos pelo módulo da velocidade com $v = 0.01m/s$ na entrada.

Comparando o quadrado tracejado da Figura 4.6 com o quadrado inferior da Figura 4.9, observa-se grandes alterações de velocidade e do fluxo em regiões do espaço devido ao acréscimo de novos círculos.

A comparação do quadrado da Figura 4.7 com o quadrado superior da Figura 4.9 mostra que o fluxo perto do círculo central passa a ser mais distante deste, ocupando regiões entre os quatro círculos iniciais.

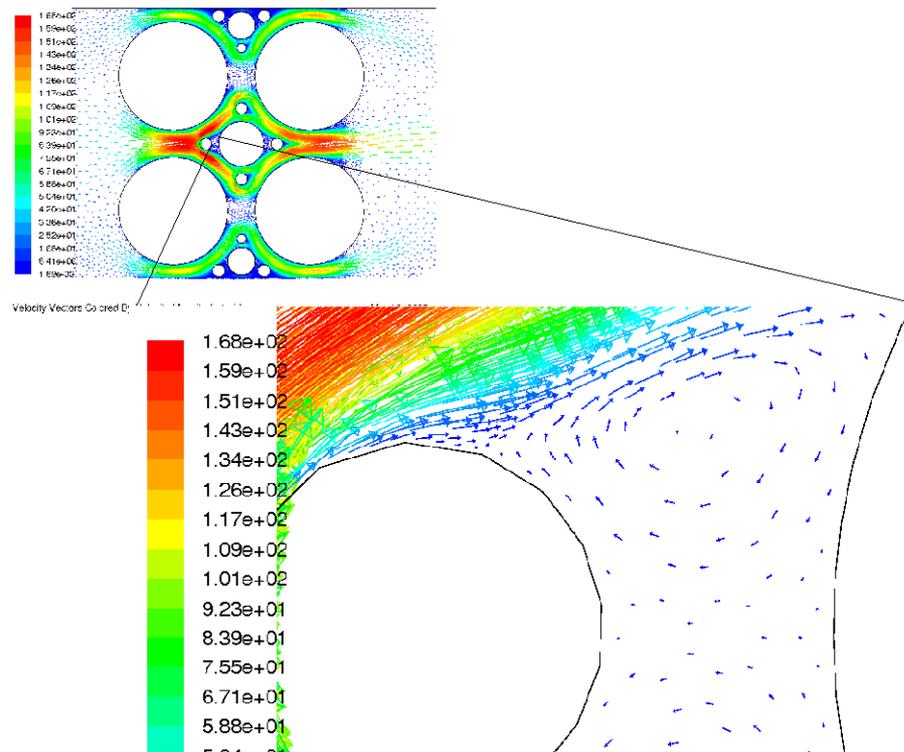


Figura 4.11: Formação de vórtices para $v = 20.48m/s$ na entrada em $g = 4$ e $s = 0.8$.

4.1.2 Influência da adição dos círculos nos campos de pressão

As Figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15 mostram os contornos dos campos de pressão com velocidade na entrada de $v = 0.01m/s$ para as gerações 1, 2, 3 e 4 respectivamente. Assim como ocorreu para os campos de velocidade, os campos de pressão também são influenciados pela adição de círculos.

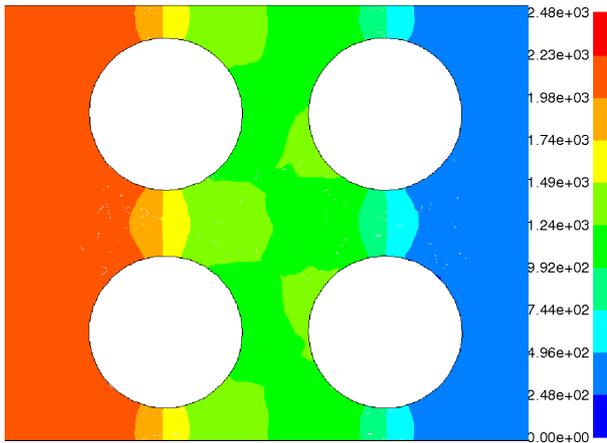


Figura 4.12: $g = 1$ e $s = 0.7$

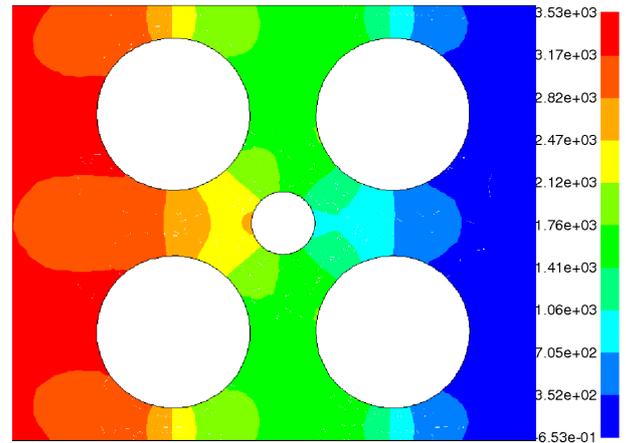


Figura 4.13: $g = 2$ e $s = 0.7$

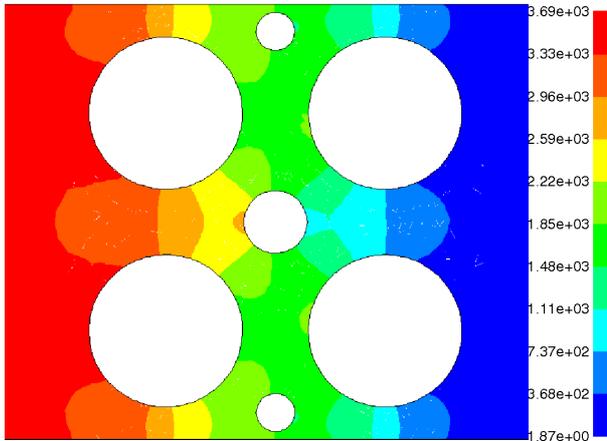
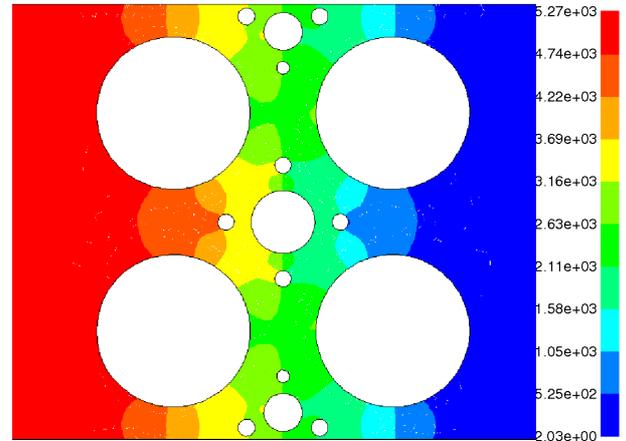
Figura 4.14: $g = 3$ e $s = 0.7$ Figura 4.15: $g = 4$ e $s = 0.7$

Figura 4.16: Contorno da pressão estática para a velocidade de entrada igual a 0.01 m/s.

4.1.3 Influência do fator de escala s no campo de velocidade

Vamos agora utilizar os contornos e vetores para mostrar a influência do fator de escala s nos campos de velocidade na geração 4 para $s = 0.8$, $s = 0.6$ e $s = 0.3$. Estes dados podem ser visualizados nas Figuras 4.17, 4.19, 4.21 para os contornos e nas Figuras 4.18, 4.20 e 4.22 para os vetores.

Na medida que s diminui, o espaçamento entre os círculos aumenta, propiciando assim para $s = 0.3$ velocidades maiores do que para $s = 0.8$ dentro do empacotamento. Como veremos nas próximas seções, este fato explica porquê a região de validade do regime linear entre a pressão e a velocidade é maior para os valores de s próximos de 0.9.

A comparação entre as figuras também mostra que a posição dos canais preferenciais de fluxo é mais afetada pelo acréscimo de novos círculos do que pela variação de s .

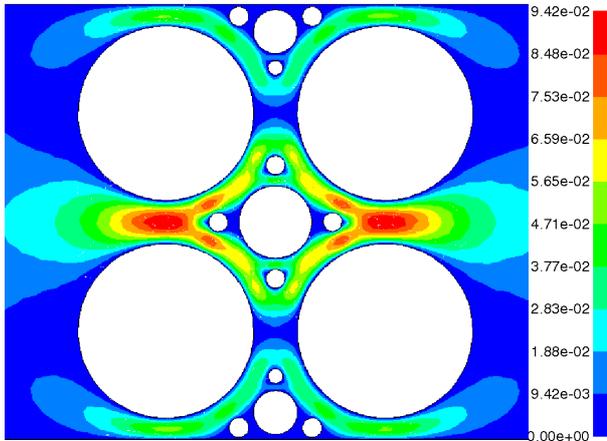


Figura 4.17: Contorno do módulo da velocidade para a velocidade de entrada igual a 0.01 m/s com $g = 4$ e $s = 0.8$.

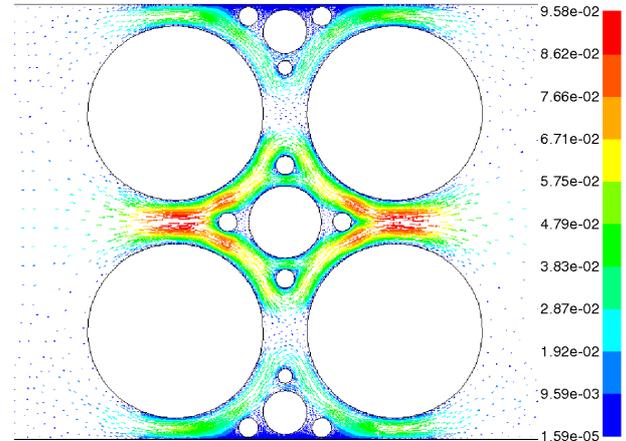


Figura 4.18: Vetores de velocidade coloridos pelo módulo da velocidade com $v = 0.01m/s$ na entrada para $g = 4$ e $s = 0.8$.

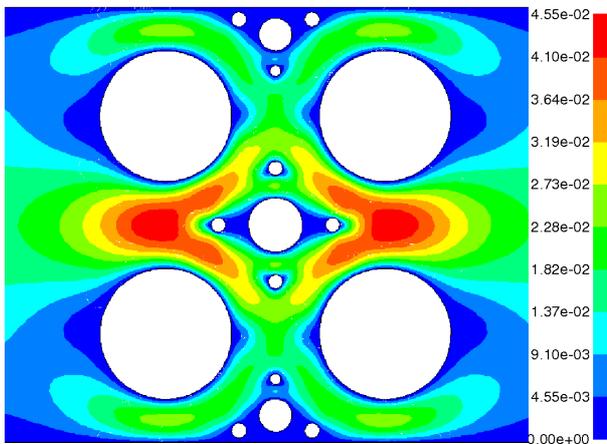


Figura 4.19: Contorno do módulo da velocidade para a velocidade de entrada igual a 0.01 m/s com $g = 4$ e $s = 0.6$.

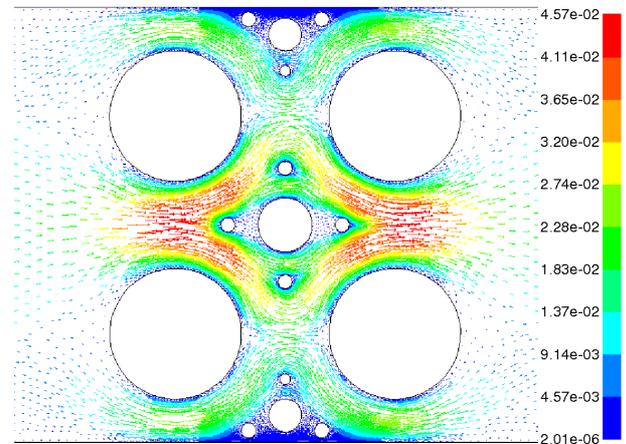


Figura 4.20: Vetores de velocidade coloridos pelo módulo da velocidade com $v = 0.01m/s$ na entrada para $g = 4$ e $s = 0.6$.

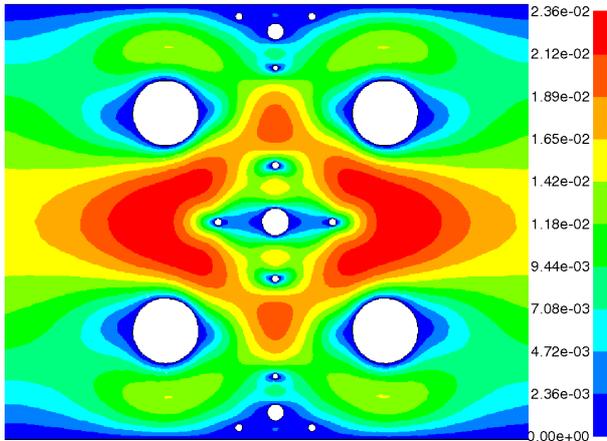


Figura 4.21: Contorno do módulo da velocidade para a velocidade de entrada igual a 0.01 m/s com $g = 4$ e $s = 0.3$.

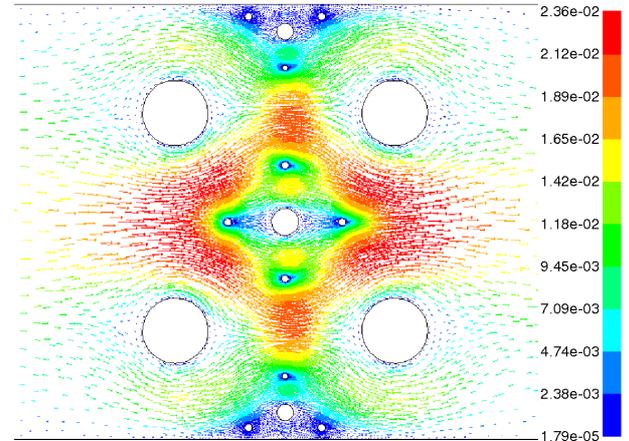


Figura 4.22: Vetores de velocidade coloridos pelo módulo da velocidade com $v = 0.01\text{m/s}$ na entrada para $g = 4$ e $s = 0.3$.

4.2 Análise quantitativa do escoamento

4.2.1 Resultados para Δp com função da velocidade de entrada

As figuras, na escala log-log, 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26 mostram o comportamento de $\Delta p/v$ em função da velocidade de entrada do fluido no canal. Observa-se uma divisão em duas regiões: i) uma com dependência linear entre Δp e v , na qual os pontos estão em uma linha horizontal, e que chamamos de região do regime Darcy, ii) uma outra entre Δp e v onde $\Delta p/v$ cresce com v , o que caracteriza uma dependência não linear.

Para fazer uma análise mais detalhada da transição entre estas duas regiões definimos uma função f ,

$$f = \frac{\Delta(\log(\Delta p/v))}{\Delta(\log v)} \quad (4.1)$$

que representa uma aproximação de $\frac{d(\log(\Delta p/v))}{d(\log v)}$.

Nas figuras 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30 temos os gráficos de f em função de v numa

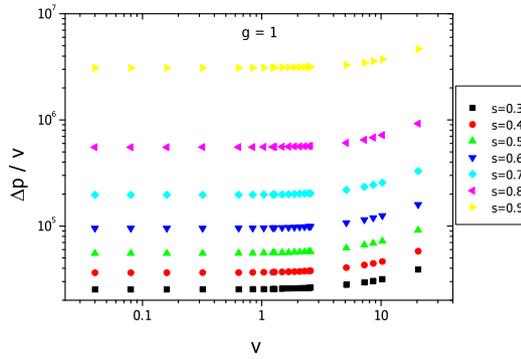


Figura 4.23: Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 1$ (na escala log-log).

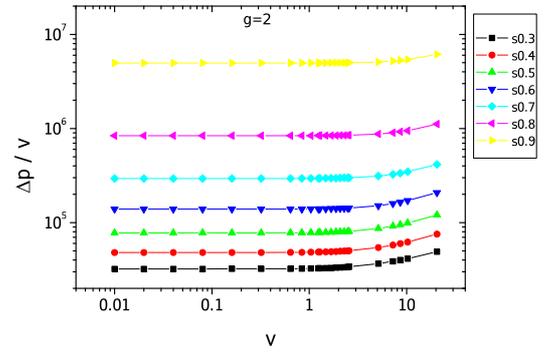


Figura 4.24: Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 2$ (na escala log-log).

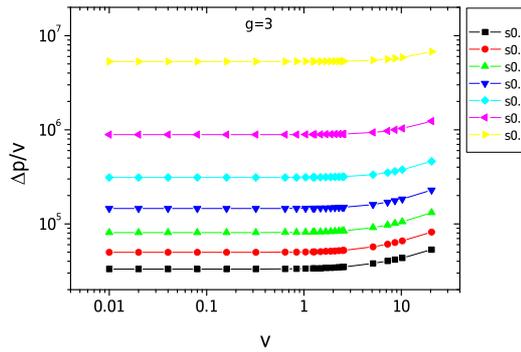


Figura 4.25: Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 3$ (na escala log-log).

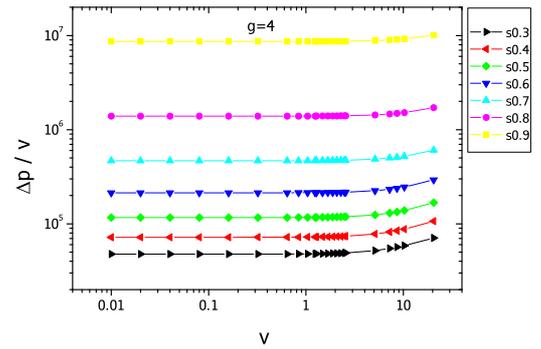


Figura 4.26: Diferença de pressão em função da velocidade de entrada para $g = 4$ (na escala log-log).

escala semi-log para diferentes valores de g e s . Neste caso o regime linear se caracteriza para $f = 0$, e há uma região não-linear que f cresce com v . Deste modo, f nos permite quantificar os limites para a validade do regime linear dentro de precisões pré-estabelecidas. Por exemplo, se informamos que $f < f_c < 1$, podemos afirmar que,

no intervalo de v onde isto é verificado, o regime linear é válido com precisão f_c . Em ambos os casos (conjunto de Figuras 4.27– 4.30) observa-se que na medida em que s diminui, ou as larguras dos poros aumentam, a região de validade do regime Darcy vai ficando mais curta. Este fato pode ser explicado da seguinte forma: quando s é pequeno os espaçamentos entre os círculos são grandes, isto gera números de Reynolds efetivos maiores entre os círculos do que para os casos em que os espaçamentos são pequenos; como a lei de Darcy só é válida para baixos números de Reynolds é de se esperar que para os casos em que valor de s está próximo de 1 o regime de linearidade da pressão em relação a velocidade seja maior do que para os casos em que s é pequeno.

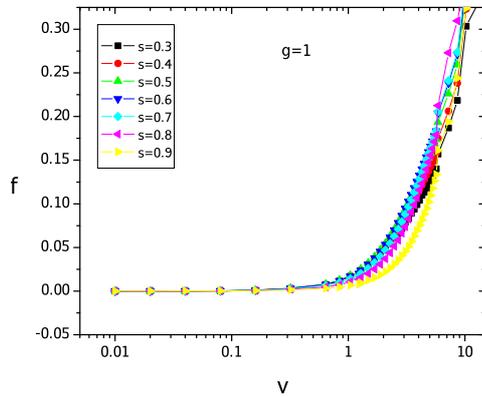


Figura 4.27: Função f , Equação (4.1), em relação a velocidade de entrada para $g = 1$ (escala semi-log).

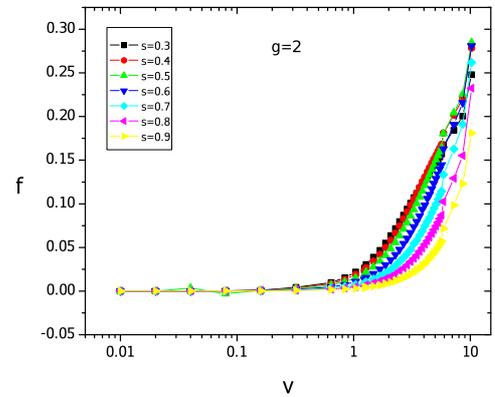


Figura 4.28: Função f , Equação (4.1), em relação a velocidade de entrada para $g = 2$ (escala semi-log).

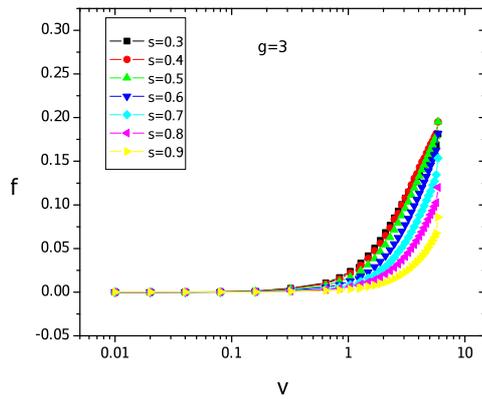


Figura 4.29: Função f , Equação (4.1), em relação a velocidade de entrada para $g = 3$ (escala semi-log).

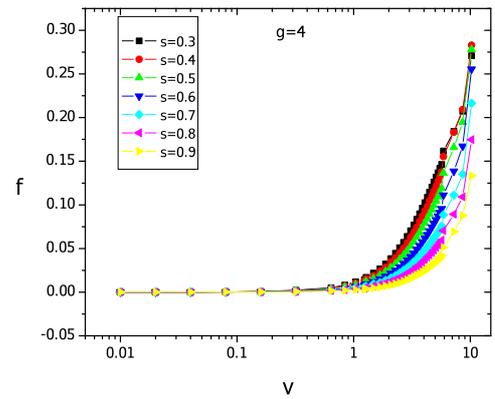


Figura 4.30: Função f , Equação (4.1), em relação a velocidade de entrada para $g = 4$ (escala semi-log).

Nas tabelas 4.1 e 4.2 temos os valores dos números de Re crítico, definido em termos da largura do canal, para $f_{max} = 0.05$ e $f_{max} = 0.025$ encontrados para cada geração. Estes dados também podem ser visualizados na Figura 4.31.

Re_c para $f_{max} = 0.05$				
s	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
0.30	12.05	9.35	9.42	13.87
0.40	11.27	10.55	9.67	13.98
0.50	10.98	11.52	10.47	14.17
0.60	11.20	13.92	12.66	14.55
0.70	12.12	14.15	13.96	16.89
0.80	13.93	15.56	14.22	21.25
0.90	14.16	22.17	19.20	30.53

Tabela 4.1: Números de Reynolds críticos para $f = 0.05$.

Re_c para $f_{max} = 0.025$				
s	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
0.30	7.47	5.81	5.81	9.39
0.40	7.39	7.16	5.81	10.68
0.50	7.21	8.20	7.15	11.63
0.60	7.46	9.26	8.21	12.75
0.70	8.20	11.52	10.44	13.87
0.80	9.31	13.73	12.69	14.16
0.90	12.77	14.29	14.18	16.83

Tabela 4.2: Números de Reynolds críticos encontrados com $f = 0.025$.

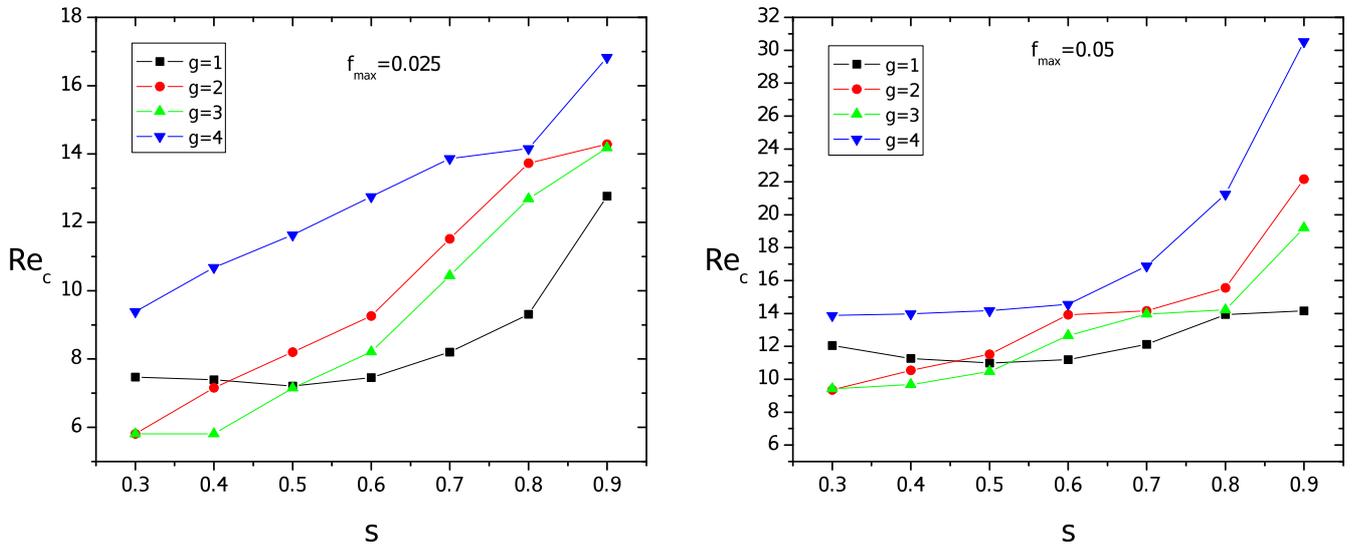


Figura 4.31: Número de Reynolds crítico Re_c em função do fator de redução s .

4.2.2 Dependência da permeabilidade com a porosidade

Na Figura 4.32 temos um gráfico do comportamento da porosidade ϕ com relação ao fator de redução de escala s . Na medida que s cresce, os círculos aumentam de tamanho e conseqüentemente começam a ocupar mais espaço, reduzindo assim a porosidade, ou fração de vazios da região em estudo. Observa-se também que a adição de círculos na região, ou mudança de uma geração para outra, altera a porosidade, isto já era esperado, pois quanto menor a quantidade de círculos maior será a fração de vazios na região.

Na Figura 4.33 temos os comportamentos das permeabilidades para cada geração em relação à porosidade ϕ associada a cada fator de redução s . Na primeira figura o gráfico foi gerado na escala decimal e na segunda na escala log-log. Nós dividimos a permeabilidade por um fator $k_0 = \frac{h^2}{12}$ que representa a permeabilidade do canal vazio, onde h é a largura do canal [33]. Como é previsto na literatura encontramos uma

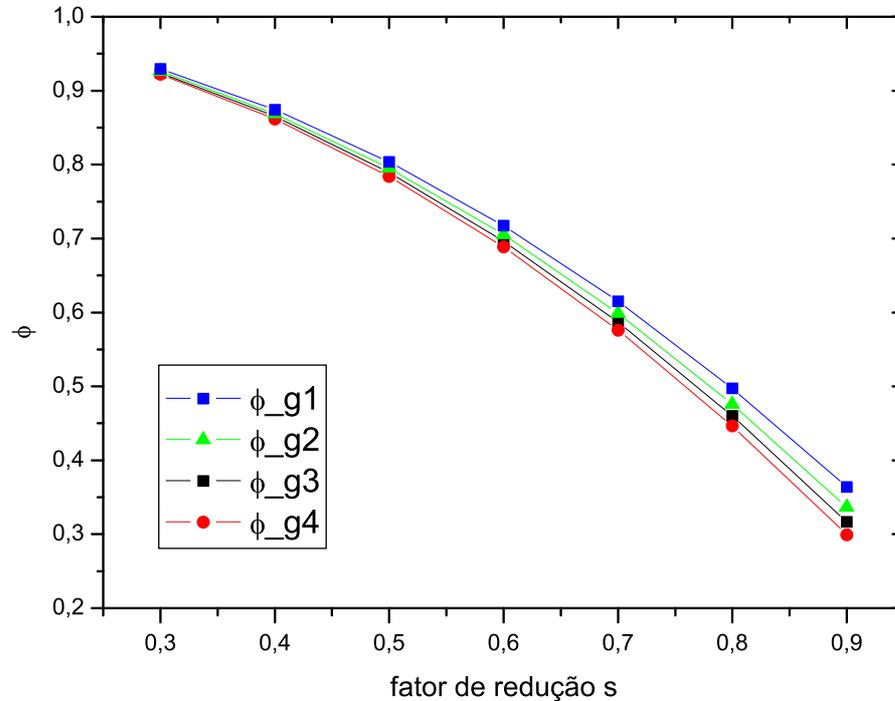


Figura 4.32: Porosidade em função do fator de redução para as gerações em estudo.

relação não linear entre a permeabilidade e a porosidade que é mais acentuada para pequenos valores de s .

Na Figura 4.34 temos dois gráficos na escala log-log para a permeabilidade em relação ao fator de porosidade da equação de Kozeny-Carman (Equação 2.25) [4, 3],

$$k = \frac{1}{\alpha T S_0^2} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}.$$

O primeiro gráfico foi gerado com os dados deste trabalho e o segundo gráfico foi retirado do trabalho [33]. Observa-se claramente que o comportamento da permeabilidade, para o caso em estudo, não é descrito por esta equação, diferentemente do que foi obtido em [33] onde os autores modelaram o meio poroso com círculos de mesmo tamanho alocados aleatoriamente na região em estudo (ver Figura 3.6).

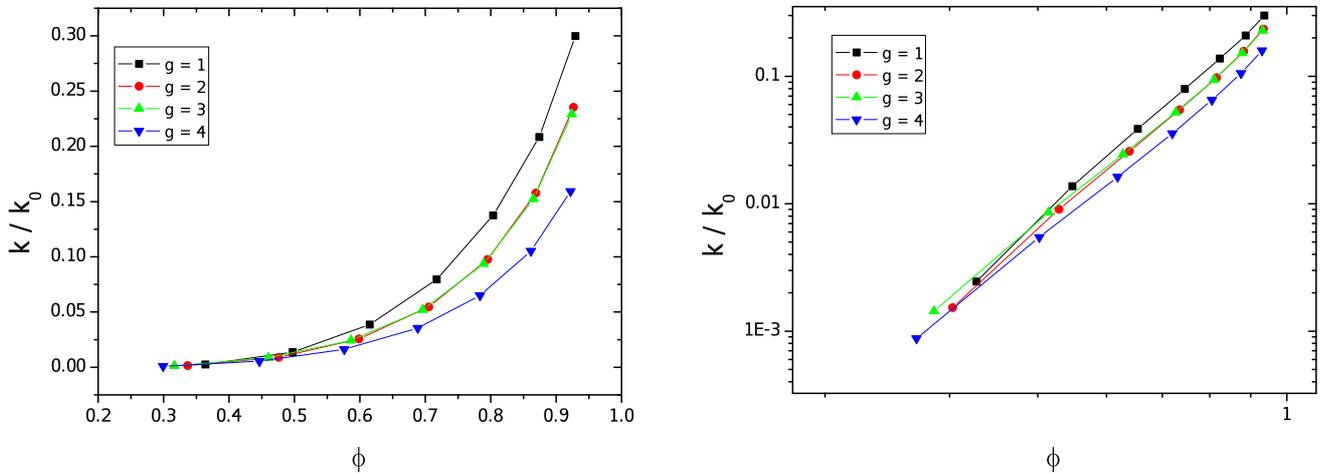


Figura 4.33: Permeabilidade em função da porosidade para todas as gerações em estudo.

Diante deste resultado partimos em busca de expressões que pudessem descrever o comportamento da permeabilidade. Para isso fizemos vários ajustes dos dados utilizando o software Origin, como pode ser visto nos gráficos das Figuras 4.35 a 4.41 para $g = 3$ e Figuras 4.43 a 4.49 para $g = 4$. A função escolhida para os ajustes foi,

$$f(x) = p_1 \frac{(x - P_2)^{P_3}}{(P_4 + P_2 - x)^{P_5}}. \quad (4.2)$$

Esta função reproduz a Equação (2.25) para $P_2 = 0$, $P_3 = 3$, $P_4 = 1$ e $P_5 = 2$. Os ajustes para essa situação podem ser visualizados nas Figuras 4.40 e 4.48. Como pode-se observar estes foram os piores ajustes.

Consideramos diversas situações onde os valores de alguns parâmetros foram fixados. O melhor ajuste é, como esperado, aquele em que todos os parâmetros podem ser variados simultaneamente, como pode ser visualizado nas Figuras 4.35 e 4.43. No entanto, apesar da qualidade do ajuste, os valores obtidos para os parâmetros P_i tornam difícil explicar o resultado em termos das relações derivadas dentro da hidrodinâmica. Por isso, preferimos considerar a situação na qual fixamos $P_2 = 0$, $P_3 = 3$,

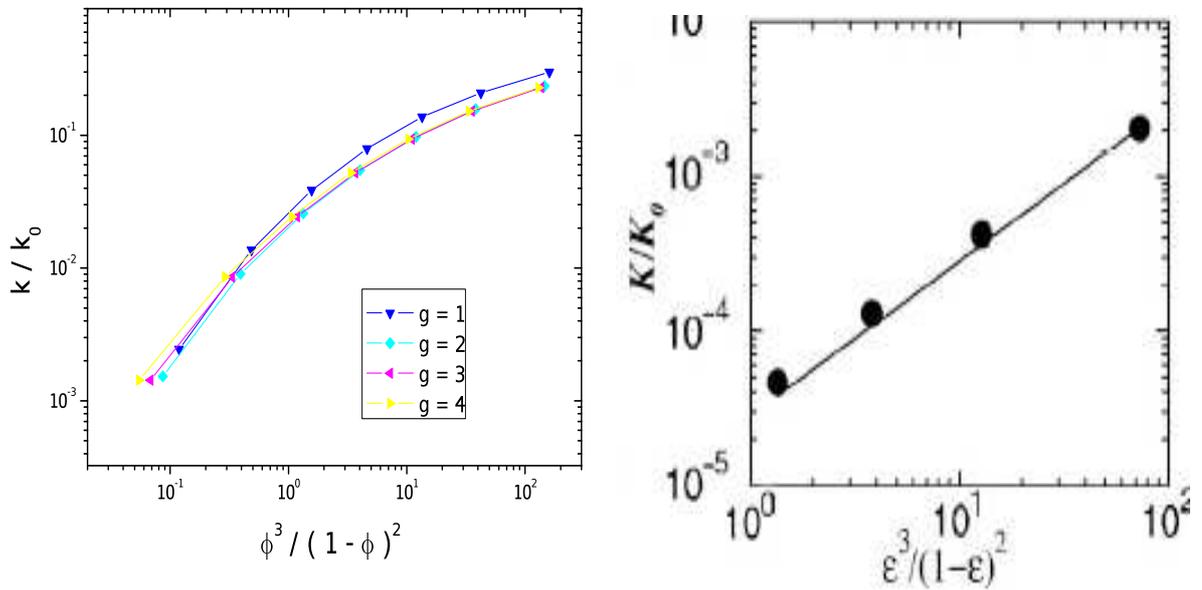


Figura 4.34: Permeabilidade em função do fator de porosidade da equação de Kozeny-Carman na escala log-log para: a) geometria em estudo neste trabalho; b) círculos de mesmo tamanho alocados aleatoriamente (ver seção 3.3).

$P_5 = 2$ e deixamos P_1 e P_4 variar, como pode ser visualizado nas Figuras 4.41 e 4.49. Os resultados do ajuste são de muito boa qualidade ($(\chi)^2 \approx 10^{-6}$) e indicam que $P_4 = 1.5$. Isto sugere a seguinte relação entre permeabilidade e a porosidade para o caso em estudo:

$$\frac{K}{K_0} \approx \frac{\phi^3}{(1,5 - \phi)^2} \quad (4.3)$$

Conforme mencionado anteriormente, a relação de Kozeny-Carman tem sua região de validade restrita a certas condições do fluxo. O fato de encontrarmos, consistentemente, o valor de $P_4 = 1.5$, sugere a validade da Equação (4.3). Não conseguimos até o momento encontrar uma explicação para o fator 1.5, mas encontramos na literatura uma proposta feita por [37]. Neste trabalho Mavko e Nur (1997) propõem a introdução da seguinte transformação $\phi \rightarrow \phi - \phi_c$ na equação de Kozeny-Carman, após feita esta substituição encontra-se:

$$K = \alpha \langle d \rangle^2 \frac{(\phi - \phi_c)^3}{(1 - \phi + \phi_c)^2} \quad (4.4)$$

onde $\langle d \rangle$ é o diâmetro médio das partículas, α um parâmetro que contém implicitamente a dependência da permeabilidade com a tortuosidade, a forma e conectividade dos poros e ϕ_c uma porosidade crítica. Segundo os autores, este valor de porosidade corresponde a um estado intermediário na transição de um regime de alto fluxo a um de menor permeabilidade. No entanto, notamos que a expressão (4.4) não pode ser reduzida à forma (4.3). Com efeito, se tomamos $\phi_c = 0.5$, então os denominadores das duas expressões se tornam idênticos, mas a diferença no numerador ϕ^3 e $(\phi - 0.5)^3$, indicam que as expressões são distintas.

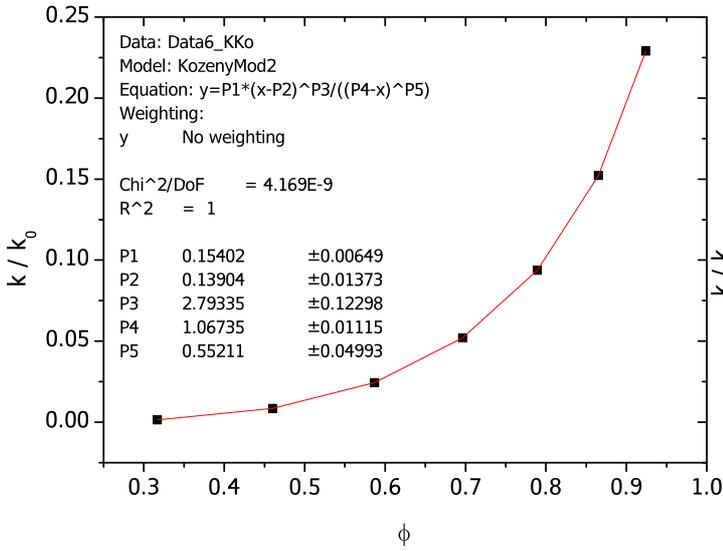


Figura 4.35

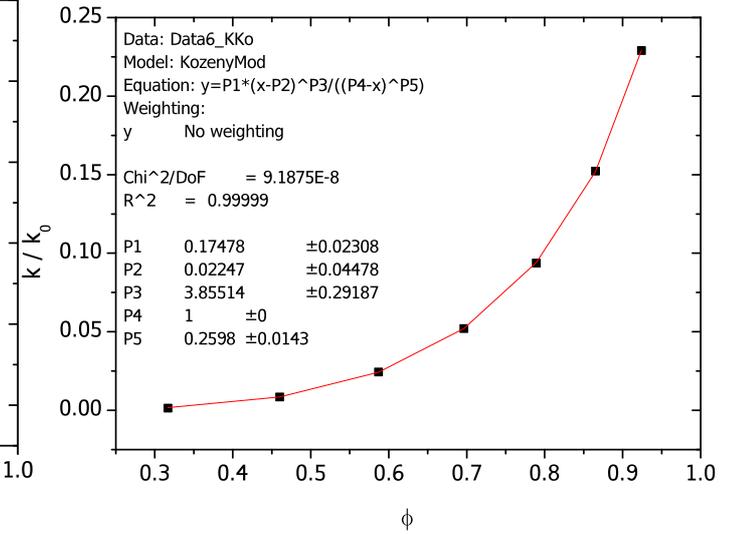


Figura 4.36

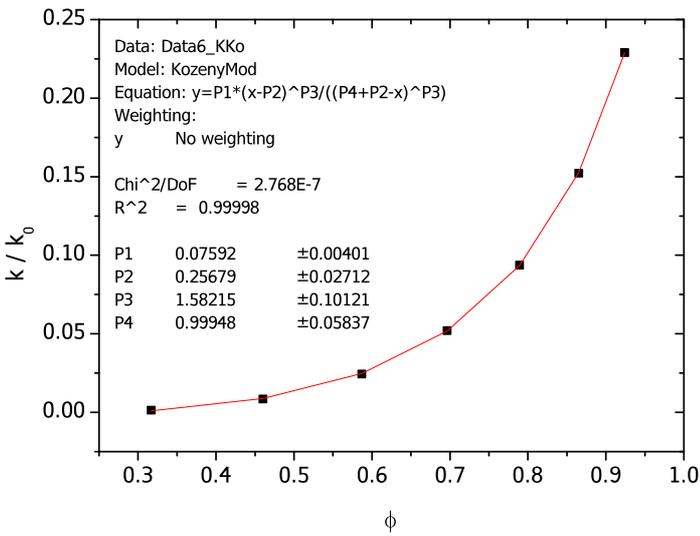


Figura 4.37

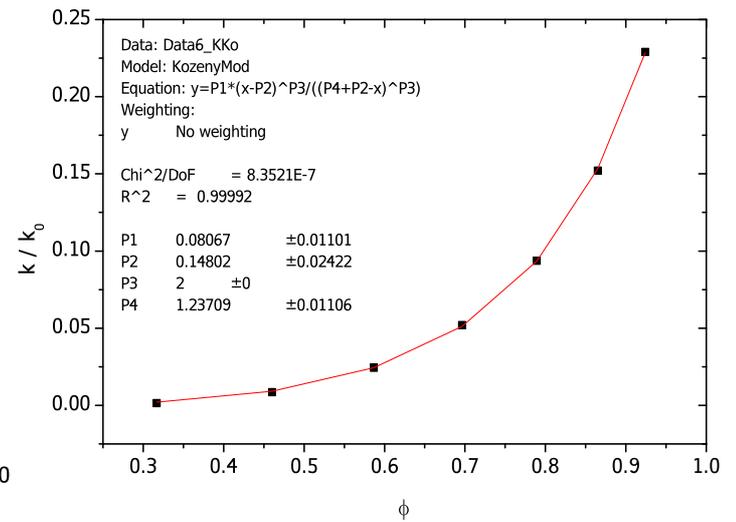


Figura 4.38

Figura 4.39: Ajustes dos dados para $g = 3$.

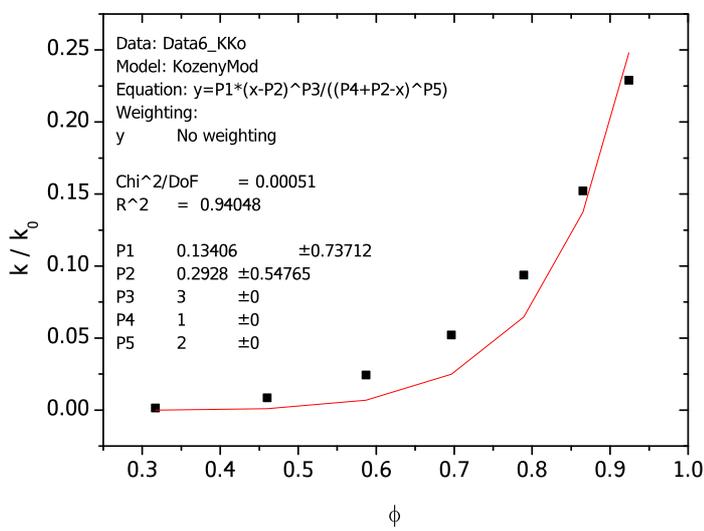


Figura 4.40

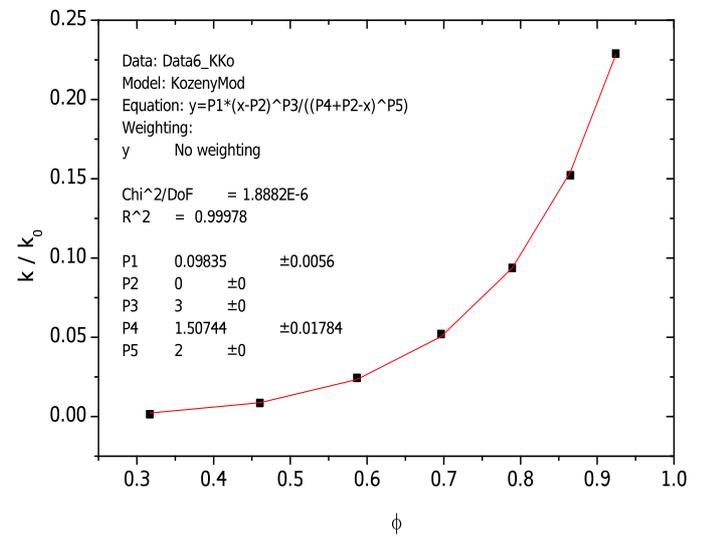


Figura 4.41

Figura 4.42: Continuação dos ajustes dos dados para $g = 3$.

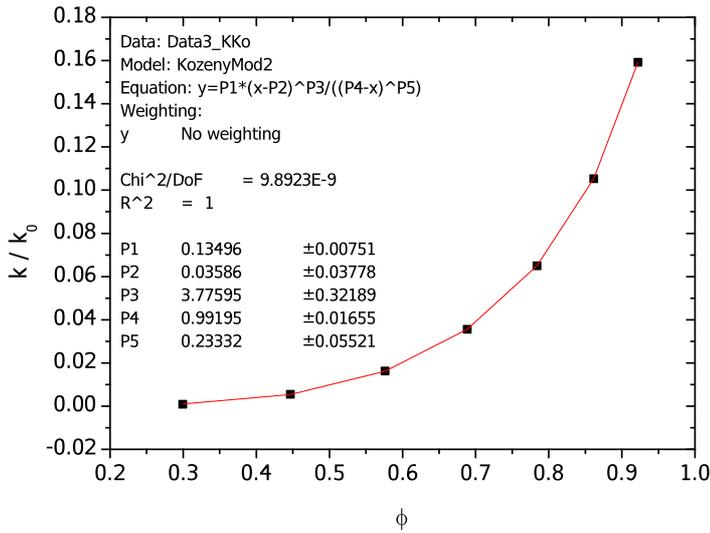


Figura 4.43

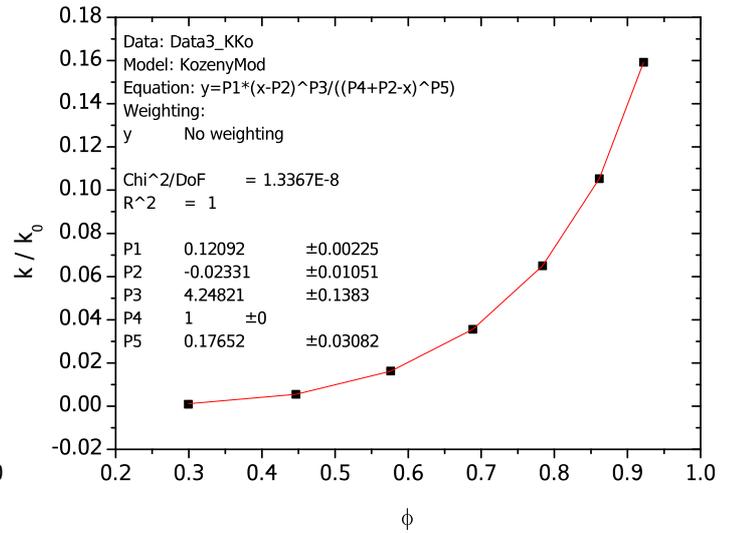


Figura 4.44

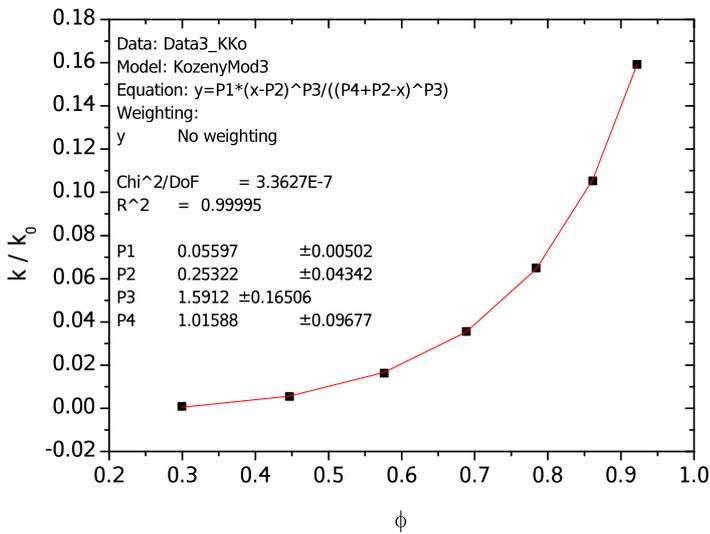


Figura 4.45

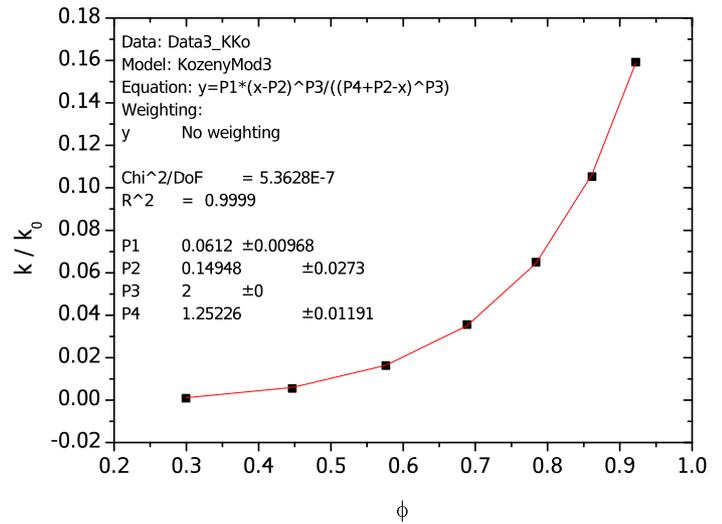


Figura 4.46

Figura 4.47: Ajustes dos dados para $g = 4$.

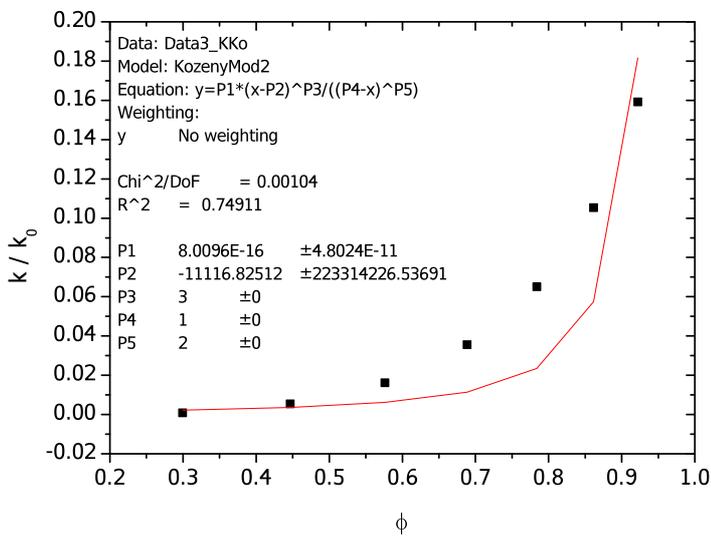


Figura 4.48

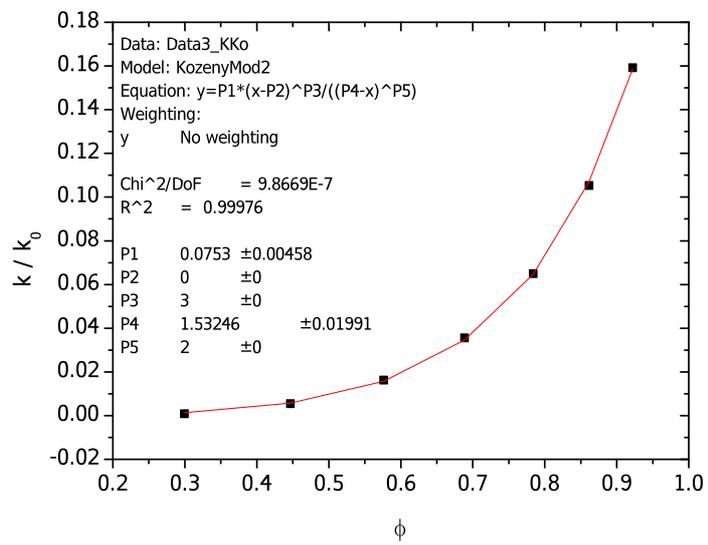


Figura 4.49

Figura 4.50: Continuação dos ajustes dos dados para $g = 4$.

Capítulo 5

Conclusões

De acordo com os resultados podemos concluir que a presença de obstáculos de diferentes tamanhos influencia nas propriedades do meio de modo diferente do que em comparação com o aumento da densidade de círculos do mesmo tamanho realizado em [33].

Com o auxílio de uma função f , Equação (4.2), foi possível quantificar os limites para a validade do regime linear dentro de precisões pré-estabelecidas. Uma vez obtido os valores críticos de velocidade, definimos então um número de Reynolds crítico R_c , como pode ser observado nas tabelas 4.2 e 4.1. Observou-se que na medida em que o fator de redução s diminui, ou as larguras dos poros aumentam, a região de validade do regime Darcy vai ficando mais curta. Este fato pode ser explicado da seguinte forma: quando s é pequeno os espaçamentos entre os círculos são grandes, isto gera números de Reynolds efetivos maiores entre os círculos do que para os casos em que os espaçamentos são pequenos; como a lei de Darcy só é válida para baixos números de Reynolds é de se esperar que para os casos em que valor de s está próximo de 1 o regime de linearidade da pressão em relação a velocidade seja maior do que para os casos em que s é pequeno.

Como previsto na literatura verificamos que a permeabilidade é influenciada pela forma, quando a adicionamos círculos, e tamanho dos poros, quando multiplicamos os

raios dos círculos por um fator s .

Verificamos também que as permeabilidades geradas para o caso em estudo não obedecem ao fator de porosidade da equação de Kozeny-Carman, Equação (2.25). Sendo assim, após alguns ajustes dos dados encontramos a relação (4.3) para a dependência da permeabilidade com a porosidade. Não conseguimos até o momento encontrar uma explicação para o fator 1.5, mas acreditamos que uma alternativa seja seguir a mesma linha de raciocínio do trabalho de Mavko e Nul (1997) [37], pois a relação que encontramos tem algumas semelhanças com a proposta.

Por fim, podemos afirmar que este modelo levanta uma série de questões relativas a não trivialidade da modelagem das propriedades de meios porosos. Como exemplo podemos citar o fato da dificuldade de simular os círculos com fator de redução próximo de 1, neste caso os canais são muito pequenos e as chances de erro numérico são grandes.

Bibliografia

- [1] BIRD, Robert B.; STEWART, Warren E.; LIGHTFOOT, Edwin N. *Fenômenos de transporte*. 2.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos – LTC, 2004.
- [2] SCHEIDEGGER, A. E. *The Physics of Flow through Porous Media*. 3.ed. Toronto: University of Toronto Pres, 1974.
- [3] BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York: Dover, 1988.
- [4] DULLIEN, F. A. L. *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure*. New York: Academic, 1979.
- [5] PEACEMAN, Donald W. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1977.
- [6] AZIZ, Khalid. *Petroleum reservoir simulation*. London: Applied Science Publishers LTD, 1979.
- [7] KOZENY, J. *Wusserkraft u. Wusserwirtschaft*, v. 22, 67–86, 1927.
- [8] CARMAN, P. C. *Trans. Inst. Chem. Eng.* London, v. 15, 150, 1937.
- [9] CARMAN, P. C. *J. Soc. Chem. Ind.* 57, 225, 1938.
- [10] CARMAN, P. C. Some Physical Aspects of Water Flow In Porous Media. *Discuss. Faraday Soc.*, v. 3, 72–77, 1948. DOI: 10.1039/DF9480300072.

- [11] JOHNSON, D.; KOPLIK, J.; DASHEN, R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 176, 379–402, 1987.
- [12] SCHWARTZ, L.; BANAVAR, J. Transport properties of disordered continuum systems. *Physical Review B*, v. 39, 11965–70, 1989.
- [13] BERG, R. R. Method of determining permeability from reservoir rock properties. *Gulf Coast Association of Geologic Society Transaction*, v. 20, 303–17, 1970.
- [14] BLOCH, S. Empirical prediction of porosity and permeability in sandstones. *AAPG Bulletin*, v. 75, 1145–60, 1991.
- [15] ARCHIE, G. E. The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. *Transactions of AIME*, v. 146, 54–62, 1942.
- [16] KATZ, A. J.; THOMPSON, A. H., Quantitative prediction of permeability in porous rock. *Phys. Rev. B*, v. 34, 8179–8181, 1986.
- [17] TIAB, D.; DONALDSON, E. C. *Petrophysics: theory and practice of measuring reservoir rock and fluid transport properties*. 2nd ed. Burlington, USA: Gulf Professional Publishing, 2004.
- [18] WU, Aixiang; SUN, Yezhi. *Granular Dynamic Theory and Its Applications*. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2008. New York: Springer, 2008.
- [19] MEHTA, Anita. *Granular Physics*. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [20] WHITE, Frank M. *Fluid Mechanics*. 4th ed. [S.]: McGraw-Hill, 1999.
- [21] Fortuna, A. O., *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. São Paulo: Edusp, 2000.

- [22] ANDRADE, R. F. *Investigations on the laminar-turbulent transition by means of linear and non-linear methods*. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat) der Fakultät für Physik der Universität Regensburg, Regensburg, 1981.
- [23] SETHI, D. K. Some Considerations about the Formation Resistivity Factor-Porosity Relations, *SPWLA - Twentieth Annual Logging Symposium*, jun. 1979.
- [24] ROSALES, C. P. On the relationship between formation resistivity factor and porosity. *Soc. Petrol. Eng. J.*, Aug. 1982.
- [25] COREY, Arthur T., *Mechanics of Immiscible Fluids in Porous Media*. U.S.A.: Water Resources Publications, 1994.
- [26] COXETER, H. S. M.; The problem of Apollonius. *Amer. Math. Monthly*, v. 75, 5–15, 1968.
- [27] LAGARIAS, J. C.; MALLOWS, C. L.; WILKS A. Beyond the Descartes circle theorem. *Amer. Math. Monthly*, v. 109,338-361, 2002.
- [28] GRAHAM R. L.; LAGARIAS, J. C.; MALLOWS, C. L.; WILKS, A.; YAN C. H. Apollonian Packings: number theory. *J. Number Theory*, v. 100, 1–45, preprint, 2003.
- [29] Manual do FLUENT (FLUENT Inc., Lebanon, New Hampshire, USA). É um pacote comercial para dinâmica de fluido computacional – DFC.
- [30] Manual do GAMBIT (FLUENT Inc., Lebanon, New Hampshire, USA). É um pacote comercial que acompanha o *software* FLUENT, projetado para analisar e construir modelos de malhas para DFC e outras aplicações científicas.
- [31] VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. England: Longman Scientific & Technical, 1995.

- [32] ADLER, Pierre M. Transport processes in fractals–I. Conductivity and permeability of a Leibniz packing in the lubrication limit. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 11, 91–108, 1985.
- [33] ARAÚJO, A. D.; BASTOS, W. B.; ANDRADE, J. S. Jr.; HERRMANN, H. J. *Phys. Rev. E*, v. 74, 010401(R), 2006.
- [34] ADLER, Pierre M. *Porous Media: geometry and transports*. U.S.A.: Butterworth-Heinemann series in chemical engineering, 1992. ISBN 0-7506-9236-7.
- [35] THOVERT, J. F.; ADLER, P. M. Transport processes in fractals, VIII. Permeability of Leibniz packings. *Experimental*, v. 10, 165–179, 1988.
- [36] THOVERT, J. F.; ADLER, P. M. Transport processes in fractals, V. Conductivity and permeability of random Leibniz packings. *Phys. Chem. Hydro.*, v. 8, 137–160, 1987.
- [37] MAVKO, G.; NUR, A. The effect of a percolation threshold in the Kozeny-Carman relation. *Geophys.*, 62(5), 1480–1482, 1997.

Apêndice A

Método Pressure-Based Solver

O método *pressure-based solver* emprega um algoritmo que pertence aos *métodos de projeção* [29]. No método de projeção, a restrição de conservação da massa (equação da continuidade) para os campos de velocidade é alcançada resolvendo uma equação para pressão (ou pressão corrigida). A equação para pressão é derivada das equações da continuidade e quantidade de movimento de tal forma que os campos de velocidade, corrigidos pela pressão, satisfaçam a continuidade. Uma vez que as equações governantes são não lineares e acopladas entre si, o processo de solução é iterativo de modo que o conjunto das equações governantes é resolvido repetidamente, até que a solução convirja.

Dois algoritmos *pressure-based solver* estão disponíveis no FLUENT: o *algoritmo segregado* e o *algoritmo acoplado*.

A.0.3 Algoritmo *pressure-based* segregado

No algoritmo segregado as equações governantes para as variáveis de solução (por exemplo, $u, v, w, p, T, \kappa, \epsilon$, etc.) são resolvidas uma após a outra. Cada equação governante, enquanto está sendo resolvida, é “desacoplada” ou “segregada” das outras equações, daí o nome. O algoritmo segregado é eficiente em termos de memória, uma

vez que as equações discretizadas só precisam ser guardadas uma de cada vez na memória. No entanto, a solução convergente é relativamente lenta.

Com o algoritmo segregado, cada iteração consiste em um passo na figura A.1 e na descrição abaixo [29]:

1. Atualização da propriedades do fluido (por exemplo, densidade, viscosidade, calor específico) incluindo viscosidade turbulenta (difusividade) baseada na solução solução atual.
2. Resolva as equações de quantidade de movimento, uma após a outra, usando os recentes valores atualizados de pressão e vazão mássica na face.
3. Resolva a equação de correção da pressão usando os recentes campos de velocidade e de vazão mássica obtidos.
4. Corrija a vazão mássica na face, a pressão, e os campos de velocidades usando a correção da pressão obtida no passo 3.
5. Resolva as equações para escalares adicionais, se houver, tais como quantidades turbulentas, energia, espécies, e intensidade de radiação usando os valores correntes das variáveis de solução.
6. Atualize os termos fonte decorrentes das interações entre diferentes fases.
7. Verifique a convergência (com base nos critérios escolhidos) das equações.

Os passos são repetidos até que os critérios de convergência sejam encontrados.

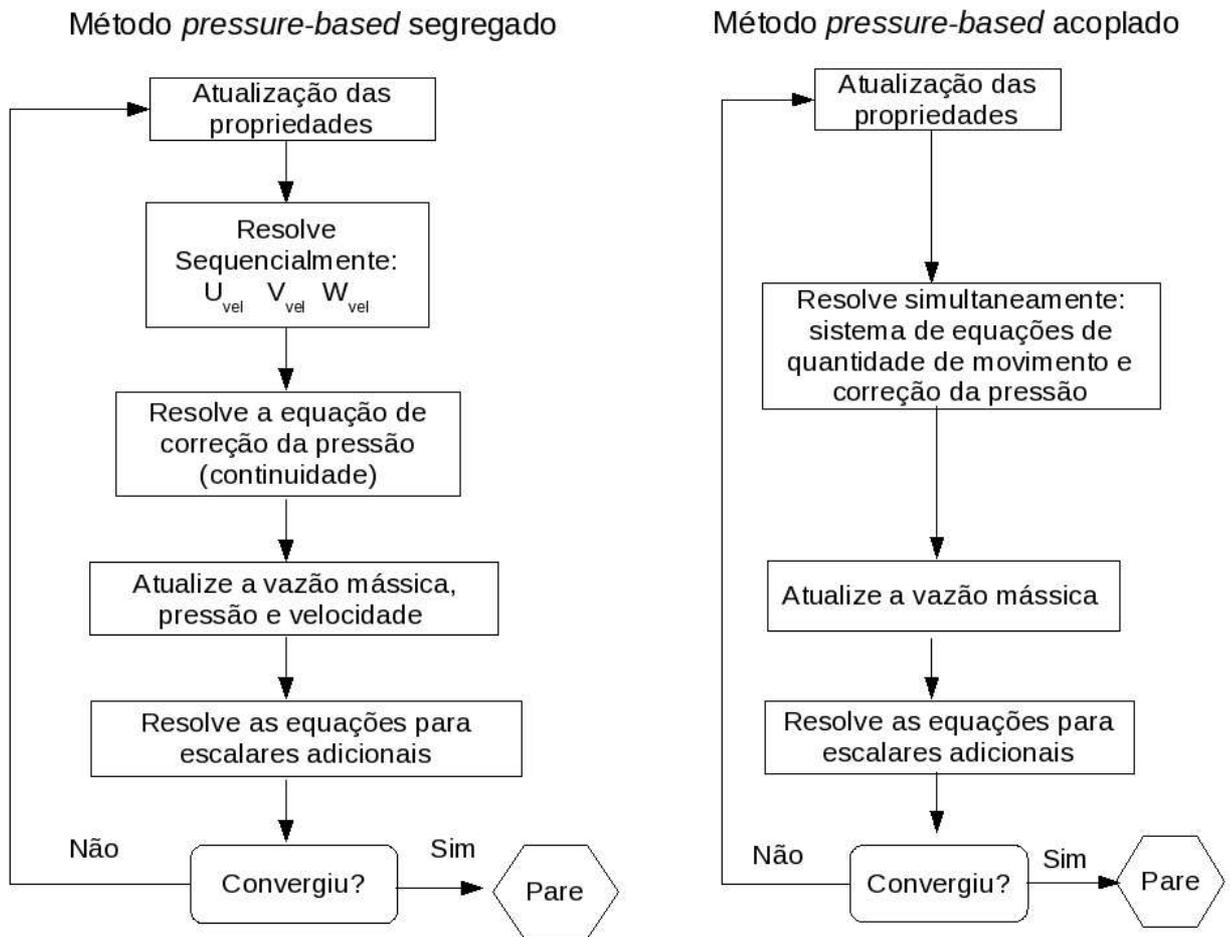


Figura A.1: Resumo dos métodos de solução do método *pressure-based* [29].

A.0.4 Algoritmo *pressure-based* acoplado

No algoritmo *pressure-based* acoplado, os passos 2 e 3 da solução segregada são substituídos por um único passo em que o sistema de equações acopladas é resolvido. As equações restantes são resolvidas de uma forma separada como no algoritmo segregado.

Uma vez que as equações de quantidade de movimento e a continuidade são resolvidas de maneira acoplada, a taxa de convergência da solução melhora significativamente quando comparadas com o algoritmo segregado. No entanto, a exigência de

memória aumenta de 1,5 a 2 vezes em relação a do algoritmo segregado, isto ocorre porque o sistema discreto de todas as equações da quantidade de movimento e da continuidade baseada na pressão devem ser armazenados quando os campos de velocidade e pressão são resolvidos (em vez de uma única equação, como é o caso do algoritmo segregado) [29].