



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Dinâmica de Campos Térmicos e Estados de Superposição
do Campo Eletromagnético Quantizado.**

Genilson Ribeiro de Melo

2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Dinâmica de Campos Térmicos e Estados de Superposição
do Campo Eletromagnético Quantizado.**

Genilson Ribeiro de Melo

Orientador: Professor Ademir Eugênio de Santana e Jorge Mário Carvalho de
Malbouisson

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal da Bahia para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador - 2004

**Dinâmica de Campos Térmicos e Estados de Superposição do Campo
Eletromagnético Quantizado.**

Copyright 2004

by

Genilson Ribeiro de Melo

Abstract

In this work, we have used the thermofield dynamics (TFD) formalism to introduce and to analyze statistical properties of the thermal counterpart of even coherent states, odd coherent states, Yurke-Stoler states, generalized overlapping of number states and generalized geometric states. Moreover, we show as the formal prescription of TFD can be used for building new number states of the electromagnetic field . In this perspective a generalized chaotic number state is considered and studied.

Resumo

Neste trabalho, usamos o formalismo da dinâmica de campos térmicos (DCT) para introduzir e analisar as propriedades estatísticas da contrapartida térmica dos estados coerentes pares, estados coerentes ímpares, estados de Yurke- Stoler, superposição de estados número e estados geométricos generalizados. Além disso, mostramos como a prescrição formal da DCT pode ser utilizada para a construção de novos estados número do campo eletromagnético. Nesta perspectiva um estado número caótico generalizado é proposto e estudado.

Agradecimentos

Primordialmente

Aos meus pais.

Especialmente

Aos professores Ademir Santana e Jorge Mário Carvalho de Malbouisson pela dedicação e discussões.

A professora Hebe Queiroz pela dedicação e discussões.

Ao professor José David Manguiera Vianna pelas discussões e referências.

Ao professor Aécio Ferreira de Lima pelas referências.

A Shirley pela paciência e amor.

Especialmente a Eraldina da Conceição, Valtério Pereira de Carvalho, Maria Júlia Souza de Jesus e Orlando de Souza Lima pelo acompanhamento dia a dia.

Aos amigos Barata, Bocão, Daniel Abreu, Egnaldo, Elias, Érico, Hélio, Joelmo, Marco Antônio, Paulo Neves, sem eles esta caminhada não seria possível. E aos demais colegas do mestrado!

(Este trabalho foi financiado pela CAPES)

“Viajo porque preciso,
Volto porque te amo.”

Autor desconhecido

Oswaldo Melo, Raimundo Mário,
Catarino, Benedito, in memoriam.

Conteúdo

| | |
|---|------------|
| Lista de Figuras | vii |
| Introdução | 1 |
| 1 Dinâmica de Campos Térmicos | 7 |
| 1.1 Introdução ao Formalismo | 7 |
| 1.2 Oscilador Bosônico em DCT | 10 |
| 1.3 Oscilador Fermiônico em DCT | 20 |
| 1.4 Relação de $ 0(\beta)\rangle$ e a Matriz de Densidade | 29 |
| 2 Estados Coerentes | 30 |
| 2.1 Quantização do Campo Eletromagnético | 30 |
| 2.2 Estados Coerentes - Definição | 34 |
| 2.3 Operador Deslocamento | 37 |
| 2.4 Propriedades dos Estados $ \alpha\rangle$ | 42 |
| 2.4.1 Ortogonalidade | 42 |
| 2.4.2 Relação de Completeza | 42 |
| 2.4.3 Relação de Incerteza | 44 |
| 2.4.4 Expansão de Estados Arbitrários | 46 |
| 2.4.5 Expansão de Operadores | 49 |
| 2.5 Operador Densidade | 50 |
| 2.6 Representação de Coordenadas | 53 |
| 2.7 Evolução Temporal | 58 |
| 2.8 Estados Comprimidos | 61 |
| 2.9 Superposição de Estados Coerentes | 63 |
| 2.10 Função Q | 68 |
| 2.11 Função Característica | 68 |
| 2.12 Função de Wigner | 69 |
| 2.13 Fator de Mandel | 70 |

| | |
|--|------------|
| 3 Estados Coerentes em DCT | 71 |
| 3.1 Estados Coerentes Térmicos | 71 |
| 3.1.1 Função Característica | 73 |
| 3.2 Estados Comprimidos Térmicos | 79 |
| 3.2.1 Função Característica | 81 |
| 3.3 Fator de Mandel para os Estados Coerentes Térmicos | 86 |
| 4 Estados de Superposição em DCT | 88 |
| 4.1 Superposição de Estados Número em DCT | 89 |
| 4.2 Superposição de Estados Coerentes em DCT | 94 |
| 4.2.1 Estados Coerentes Pares Térmicos | 94 |
| 4.2.2 Estados Coerentes Ímpares Térmicos | 101 |
| 4.2.3 Estados de Yurke-Stoler Térmicos | 105 |
| 4.3 Estado Geométrico Generalizado | 108 |
| 4.4 Estado Geométrico Generalizado em DCT | 112 |
| 5 Estado Número Caótico Generalizado | 118 |
| 5.1 Estado Número Caótico | 118 |
| 5.2 Estado Número Caótico Generalizado | 121 |
| 5.3 Estatística do Estado Número Caótico Generalizado | 124 |
| 6 Conclusões e Perspectivas | 126 |
| Bibliografia | 128 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Fator de Mandel para estado coerente par. | 65 |
| 2.2 | Fator de Mandel para estado coerente ímpar | 67 |
| 3.1 | Fator de Mandel para estado coerente térmico para $\alpha = 1$ (linha preta), $\alpha = 2$ (linha verde), $\alpha = 5$ (linha vermelha). | 87 |
| 4.1 | Fator de Mandel para o estado $ \Psi_1; \beta\rangle$ | 92 |
| 4.2 | Fator de Mandel para o estado de superposição térmico $ \Psi_N; \beta\rangle$ para $N = 2$ (linha preta), $N = 3$ (linha vermelha), $N = 4$ (linha verde), $N = 5$ (linha azul). | 94 |
| 4.3 | Fator de Mandel para estado coerente par térmico $\alpha = 1$ | 101 |
| 4.4 | Fator de Mandel para estado coerente ímpar térmico $\alpha = 1$ (linha preta) e $\alpha = 2$ (linha vermelha). | 105 |
| 4.5 | Fator de Mandel para estado de Yurke-Stoler térmico para $\alpha = 1$ | 108 |
| 4.6 | Fator de Mandel para o estado geométrico generalizado para $M = 1$ | 111 |
| 4.7 | Fator de Mandel para o estado geométrico generalizado para $M = 2$ | 112 |
| 4.8 | Fator de Mandel para estado geométrico generalizado térmico, $M = 1$ e $Y = 0.25$ (linha preta), $Y = 0.5$ (linha azul), $Y = 0.75$ (linha vermelha). . . | 115 |
| 4.9 | Fator de Mandel para estado geométrico generalizado térmico, $M = 2$ e $Y = 0.25$ (linha preta), $Y = 0.5$ (linha vermelha), $Y = 0.75$ (linha azul). . . | 117 |
| 5.1 | Fator de Mandel para estado número caótico $N = 0$ (linha preta), $N = 1$ (linha vermelha), $N = 5$ (linha verde), $N = 15$ (linha azul). | 121 |
| 5.2 | Fator de Mandel para estado número caótico generalizado $N = 0$ (linha preta), $N = 1$ (linha vermelha), $N = 5$ (linha verde), $N = 10$ (linha azul). . | 125 |

Introdução

No contexto da teoria quântica de campos, o efeito de temperatura foi acomodado de modo satisfatório pela primeira vez em 1955 por Matsubara [1], introduzindo o que passou a ser chamado de formalismo do tempo imaginário [2, 3, 4]. O método pode ser compreendido a partir da seguinte observação. Na descrição de Heisenberg a média térmica no ensemble canônico ¹ de um operador $A_H(t)$ é dada por

$$\langle A_H(t) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} A_H(t) e^{-\beta H}. \quad (0.1)$$

Usando $A_H(t) = e^{-itH} A_H(0) e^{itH}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr} e^{-itH} A_H(0) e^{itH} e^{-\beta H} \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} e^{-i(t+i\beta/2)H} A_H(0) e^{i(t+i\beta/2)H}, \end{aligned}$$

ou seja, a média térmica de um operador é equivalente ao traço do operador em $T = 0$ com o tempo (real) sendo substituído por um *tempo imaginário* (terminologia pela qual o método se popularizou). Assim é possível edificar a teoria quântica de campos a temperatura finita, seguindo de perto os procedimentos da teoria a temperatura zero, em particular antevendo as auspiciosas técnicas perturbativas, tanto para contextos relativísticos como não relativísticos.

¹O argumento a seguir se generaliza para o grande canônico.

A necessidade de uma teoria geral para o problema de sistemas termodinâmicos fora do equilíbrio² foi um dos motivos que suscitou o desenvolvimento de teorias a tempo real, dando origem ao formalismo de Schwinger e Keldish [4, 7] e a *dinâmica de campos térmicos* (DCT)³ [8, 9, 10], ambos equivalentes entre si [11]. A DCT, contudo, se diferencia dos outros métodos por tê-los como caso particular e por descrever a física estatística (para campos e partículas) a partir de espaços Hilbertianos. Ou seja, em DCT a média canônica de um operador, como dada na equação (0.1), é reescrita como uma forma bilinear

$$\langle A_H(t) \rangle = \langle 0(\beta) | A_H(t) | 0(\beta) \rangle,$$

onde o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ é um vetor normalizado num espaço de Hilbert duplicado com as chamadas regras de conjugação dual (ou til). Com esta regra, para cada operador A existe um operador \tilde{A} , e o estado de vácuo do sistema é dado por um vetor $|0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$, a partir do qual o estado térmico é construído por uma transformação de Bogoliubov, $U(\beta)$, tal que [10]

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle.$$

Como veremos⁴, o estado $|0(\beta)\rangle$ é também um estado de vácuo para as quase-partículas geradas por $U(\beta)$, com a álgebra dos operadores termalizados sendo mantida invariante, como consequência da natureza canônica das transformações de Bogoliubov. Neste sentido, o efeito de temperatura em DCT surge como um condensado [10].

Um dos mais interessantes aspectos da DCT é a possibilidade de se estudar o efeito térmico a partir de uma teoria de representação de elementos algébricos. Esta novidade,

²Este problema, não trivial, ainda está em aberto. Ver as Refs.[5, 6]

³Do inglês, *thermofield dynamics*.

⁴Ver o Capítulo 1 dessa dissertação

que em muitas vezes se constitui numa vantagem, tem sido explorada na literatura em diversas situações, em particular na conexão de DCT com C^* -álgebras [12, 13], assim como com a noção de grupos quânticos e álgebra de Hopf, tal que o efeito de temperatura pode ser interpretado como deformações algébricas [14, 15]. Neste mesmo contexto, a teoria cinética tem sido formulada pela primeira vez como uma teoria de representações de grupos de simetrias de Lie [16, 17, 18, 19]. Os resultados incluem: uma prova do teorema de Goldstone (termalizado); técnicas perturbativas e diagramas de Feynman para campos de calibre a temperatura finita; relações de Ward-Takahashi térmicas [8, 10]. Num sentido geral, a DCT tem sido utilizada em supersimetria e sistemas biológicos [10]; d-branas [20, 21]; modelos cosmológicos; sistemas magnéticos [9, 22]; supercondutividade [9]; sistemas confinados, incluindo o efeito Casimir com desdobramentos em filmes supercondutores [23, 24, 25, 26]; e problemas de espalhamento [27]. Embora em estágio preliminar, uma das aplicações mais interessantes da DCT tem sido em óptica quântica no estudo de estados coerentes térmicos [10, 28, 29, 30].

O reconhecimento da importância dos estados coerentes se deu a partir de 1963 com os trabalhos de Glauber [31, 32, 33], onde, como apelo prático incontestável, o laser é descrito através de uma teoria puramente quântica via a noção de coerência da radiação eletromagnética⁵. Um estado coerente é definido a partir dos operadores de criação e destruição que descrevem os modos do campos eletromagnético. Considerando um modo apenas, um estado coerente $|\alpha\rangle$ pode ser definido como um autoestado do operador de destruição

⁵Ver também as Refs. [34, 35, 36]

(a), ou seja, $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Podemos então mostrar⁶ que $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ com

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}.$$

De um ponto de vista formal, este resultado é similar ao esquema da DCT, onde no caso de um modo a transformação de Bogoliubov é dada por $U(\beta) = e^{-\beta(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)}$.

Esta similaridade teórica é o que torna particularmente atraente o uso da DCT no estudo da coerência sob o efeito de banhos térmicos. Este interesse tem apresentado desdobramentos consagrados na literatura com os trabalhos de Barnett e Knight [37], que mostram a praticidade da DCT quando aplicada em óptica quântica. Outros resultados com o uso da DCT foram deduzidos por Mann e Revzen [38] que perscrutaram a noção de estados coerentes térmicos e, em particular, determinaram a função característica e analisaram o conceito de incerteza térmica; por Kireev, Mann, Revzen e Umezawa [39] que introduziram estados comprimidos térmicos e determinaram a função característica para estes estados; por Chaturvedi, Sandhya, Srinivasan e Simon [40] que introduziram estados coerentes fermiônicos térmicos, estados comprimidos fermiônicos térmicos e determinaram funções de correlação para estes estados. Ainda na mesma perspectiva, a DCT tem sido utilizada no estudo das desigualdade de Bell e de estados emaranhados, conceitos fundadores da chamada computação quântica [41, 42, 43, 44, 45]. Estes resultados apontam para a possibilidade de uso do formalismo da DCT em associação com outros estados de interesse tanto prático como teórico, como estados de superposição do campo eletromagnético.

Desde o trabalho de Glauber, diversos estados do campo eletromagnético quantizado têm sido propostos e a natureza de suas propriedades não-clássicas tem sido extensi-

⁶Ver o Capítulo 2 deste trabalho.

vamente estudada com forte apelo experimental, principalmente nas últimas duas décadas. Como exemplo temos os estados número caótico [47], superposição de estados número [48]; superposição de estados coerentes [49, 50]; estado intermediário número comprimido [51]; e a superposição generalizada de estados comprimidos [52]. Como um dos propósitos do presente trabalho, faremos um estudo detalhado da termalização desses estados usando a DCT. Isto inclui a definição de cada estado termalizado, cálculo da distribuição e análise da estatística com a avaliação da transição caoticidade não-caoticidade através do fator de Mandel [46]. Em mais detalhe, usaremos o formalismo da dinâmica de campos térmicos para introduzir a contrapartida térmica de estados coerentes pares; estados coerentes ímpares; estados de Yurke-Stoler [38, 49, 50] e estados geométricos generalizados [53]. Como um outro objetivo, mostraremos que o esquema da DCT, utilizado de um ponto de vista formal, pode ser útil na construção de outras classes de estados número do campo eletromagnético [54, 55]. Nossa análise será centralizada numa generalização do chamado estado número caótico [47].

Este texto está organizado da seguinte forma. No capítulo 1 será apresentada uma revisão da dinâmica de campos térmicos, onde exibiremos elementos essenciais para os desenvolvimentos subsequentes. No capítulo 2 será feita a quantização do campo eletromagnético e uma revisão de óptica quântica através da introdução da noção de estados coerentes, estados comprimidos, e conceitos como o fator de Mandel. No capítulo 3 revisamos a DCT aplicada a estados coerentes e estados comprimidos. Alguns resultados da análise estatística desses estados, ainda não discutidos na literatura via a DCT, são também analisados. Os capítulos seguintes são o cerne de nosso trabalho. No capítulo 4 estudaremos

os conceitos de superposição de estados e estados de interpolação através da prescrição da DCT. No capítulo 5 usaremos os aspectos formais da DCT para introduzir e estudar as propriedades estatísticas do estado número caótico generalizado. O capítulo 6 é dedicado às conclusões finais e perspectivas.

Capítulo 1

Dinâmica de Campos Térmicos

Neste capítulo é feita uma introdução à dinâmica de campos térmicos (DCT) baseada nas referências [8] e [19]. Procuramos fazer uma apresentação detalhada, e a organização da apresentação será da seguinte forma: na seção 1.1 discutiremos o formalismo geral da dinâmica de campos térmicos; na seção 1.2 aplicaremos o formalismo ao oscilador bosônico; na seção 1.3 aplicaremos o formalismo ao oscilador fermiônico; na seção 1.4 estudaremos a relação entre o vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ e a matriz densidade.

1.1 Introdução ao Formalismo

Em mecânica estatística do equilíbrio, a média no ensemble canônico de um observável A é definida como

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left[A e^{-\beta H} \right], \quad (1.1)$$

onde Tr indica a operação traço, H é o operador Hamiltoniano do sistema e $Z(\beta)$ a função partição dada por

$$Z(\beta) = Tr \left[e^{-\beta H} \right], \quad (1.2)$$

com $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura. Vamos assumir, por simplicidade, que os autovalores do Hamiltoniano são discretos,

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (1.3)$$

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn}.$$

Segue então que

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \langle n | A | n \rangle e^{-\beta E_n}. \quad (1.4)$$

A proposta precípua da dinâmica de campos térmicos é que a média estatística de um observável A seja substituída pelo valor esperado de A num estado dependente da temperatura, isto é,

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \langle n | A | n \rangle e^{-\beta E_n}, \quad (1.5)$$

onde $|0(\beta)\rangle$ é o estado (térmico) num novo espaço de Hilbert a ser construído.

O estado $|0(\beta)\rangle$ deve ser construído de forma a satisfazer a relação (1.5), então, supondo que pertença ao espaço de Hilbert usual, pode-se expandi-lo em termos dos autoestados de energia $|n\rangle$,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle, \quad (1.6)$$

o que resulta em

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{nm}. \quad (1.7)$$

Porém esta relação (1.7) não pode ser satisfeita, pois os coeficientes $f_n(\beta)$ são números. Contudo a igualdade (1.7) assemelha-se a uma relação de ortogonalidade entre vetores, indicando que o estado $|0(\beta)\rangle$ é um vetor num espaço formado por $|n\rangle$ e $f_n(\beta)$, o que sugere a duplicação do espaço de Hilbert original. Esta duplicação é implementada introduzindo um sistema fictício idêntico ao sistema original, chamado sistema til, através do produto direto entre o sistema original e o sistema til, de tal maneira que a média estatística original seja satisfeita.

O sistema til é caracterizado através das regras de conjugação til (ou dual)

$$\begin{aligned}
 (AB)^\sim &= \tilde{A}\tilde{B}, \\
 (A + \alpha B)^\sim &= \tilde{A} + \alpha^*\tilde{B}, \\
 (A^\dagger)^\sim &= (\tilde{A})^\dagger, \\
 (\tilde{A})^\sim &= A, \\
 [A, \tilde{B}] &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

De acordo com as regras de conjugação til, o sistema til fica descrito pelo Hamiltoniano \tilde{H} e seus autoestados $|\tilde{n}\rangle$, isto é,

$$\tilde{H}|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle, \tag{1.9}$$

$$\langle\tilde{m}|\tilde{n}\rangle = \delta_{mn}, \tag{1.10}$$

onde os autovalores E_n são, por definição, iguais aos da relação (1.3).

O estado $|0(\beta)\rangle$ é agora dado por

$$|0(\beta)\rangle = \sum_m f_m(\beta)|m, \tilde{m}\rangle, \tag{1.11}$$

onde

$$|m, \tilde{m}\rangle = |m\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle. \quad (1.12)$$

De acordo com a relação (1.5) tem-se

$$f_n^*(\beta) f_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n}, \quad (1.13)$$

que admite como solução

$$f_n(\beta) = \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} e^{-\beta E_n/2}. \quad (1.14)$$

Portanto o estado $|0(\beta)\rangle$ fica dado por

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle. \quad (1.15)$$

Na seqüência vamos construir $|0(\beta)\rangle$ para situações particulares.

1.2 Oscilador Bosônico em DCT

Consideremos como sistema um bóson com Hamiltoniano

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (\hbar = 1) \quad (1.16)$$

onde a^\dagger e a são, respectivamente, os operadores de criação e destruição, os quais satisfazem a álgebra

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (1.17)$$

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (1.18)$$

Os autoestados e autovalores de H são

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle, \quad (1.19)$$

onde

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.20)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.21)$$

$$a|0\rangle = 0, \quad (1.22)$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (1.23)$$

e $|0\rangle$ é o estado de vácuo. Os estados $|n\rangle$ são ortonormais, isto é,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}. \quad (1.24)$$

O operador número \hat{n} é definido como

$$\hat{n} = a^\dagger a,$$

e satisfaz a equação de autovalor

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Os autovalores de \hat{n} são números inteiros $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e determinam os níveis energéticos do oscilador ($n\omega$). No caso do campo eletromagnético os operadores a^\dagger e a descrevem fótons e $|n\rangle$ especifica um estado com n fótons.

De acordo com o discutido na seção anterior, introduz-se o sistema til caracterizado pelo Hamiltoniano

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}. \quad (1.25)$$

Os operadores criação e destruição til satisfazem a álgebra,

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad (1.26)$$

$$[\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (1.27)$$

Além disso,

$$[a, \tilde{a}] = 0, \quad (1.28)$$

$$[a, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (1.29)$$

De acordo com a relação (1.15), o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ fica dado por

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_n e^{-n\beta w/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_n e^{-n\beta w/2} \frac{1}{(n!)^{1/2}} \frac{1}{(\tilde{n}!)^{1/2}} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde $|0, \tilde{0}\rangle$ é o estado de vácuo do espaço duplicado. O estado térmico $|0(\beta)\rangle$ é normalizado por construção, isto é,

$$\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = 1, \quad (1.31)$$

segue então que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} \langle m, \tilde{m} | e^{-\beta w(n+m)/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta w(n+m)/2} \delta_{nm} \delta_{mn} \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta w n} = 1. \end{aligned}$$

Usando a expansão da série geométrica

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

resulta a igualdade

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta w}}. \quad (1.32)$$

Dessa forma

$$|0(\beta)\rangle = (1 - e^{-\beta w})^{1/2} \sum_n \frac{e^{-n\beta w/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.33)$$

Diversos cálculos serão simplificados se a equação (1.33) puder ser escrita na forma

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.34)$$

onde $U(\beta)$ é uma transformação unitária. Para isso, define-se as funções hiperbólicas,

$$\cosh \theta(\beta) = u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}, \quad (1.35)$$

$$\sinh \theta(\beta) = v(\beta) = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}, \quad (1.36)$$

e

$$\tanh \theta(\beta) = e^{-\beta\omega/2}. \quad (1.37)$$

Observe que $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$. Usando a expansão exponencial, pode-se reescrever a equação (1.33) como

$$|0(\beta)\rangle = u^{-1}(\beta) \exp\left(\frac{v(\beta)}{u(\beta)} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.38)$$

Conforme as relações (1.35) e (1.37), a igualdade (1.38) pode ainda ser escrita como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1} \theta(\beta) e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{\ln(\cosh^{-1} \theta)} e^{-\ln \cosh \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln(\cosh \theta)} e^{-\ln \cosh \theta \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} e^{-\ln \cosh \theta a^\dagger a} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a + 1)} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta (\tilde{a} \tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{\tanh(-\tilde{a} a)} |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.39)$$

onde usamos a relação de comutação

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1,$$

e

$$|0, \tilde{0}\rangle = e^0 |0, \tilde{0}\rangle = e^{f(\theta) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle,$$

sendo $f(\theta)$ uma função arbitrária de θ .

Com a identidade

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tan \alpha B} e^{\ln \cosh \alpha C} e^{\tanh \alpha A}, \quad (1.40)$$

e identificando

$$\begin{aligned} A &= -\tilde{a}a, \\ B &= a^\dagger \tilde{a}^\dagger, \\ C &= [A, B] = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a, \\ \alpha &= \theta = \theta(\beta), \end{aligned}$$

a equação (1.39) pode ser escrita como

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.41)$$

onde

$$G(\beta) = -i\theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \quad (1.42)$$

A transformação $U(\beta) = e^{-iG(\beta)}$ é chamada transformação de Bogoliubov e transforma o vácuo duplicado não térmico no estado térmico $|0(\beta)\rangle$, no sentido da equação (1.34).

Dado um operador F , define-se o correspondente operador termalizado, $F(\beta)$, através da transformação de similaridade [23]

$$F(\beta) = e^{-iG(\beta)} F e^{iG(\beta)}. \quad (1.43)$$

Segue então para os operadores de criação e aniquilação térmicos as relações

$$\begin{aligned}
a(\beta) &= e^{-iG(\beta)} a e^{iG(\beta)}, \\
\tilde{a}(\beta) &= e^{-iG(\beta)} \tilde{a} e^{iG(\beta)}, \\
\tilde{a}^\dagger(\beta) &= e^{-iG(\beta)} \tilde{a}^\dagger e^{iG(\beta)}, \\
a^\dagger(\beta) &= e^{-iG(\beta)} a^\dagger e^{iG(\beta)}.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Estes operadores satisfazem a mesma álgebra dada pelas equações (1.26) – (1.29). As relações inversas para $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$ são dadas por

$$a = e^{iG(\beta)} a(\beta) e^{-iG(\beta)}, \tag{1.45}$$

$$\tilde{a} = e^{iG(\beta)} \tilde{a}(\beta) e^{-iG(\beta)}. \tag{1.46}$$

Usando a identidade

$$e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!} [B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots, \tag{1.47}$$

e fazendo a identificação $A = a$ e $B = G$ encontra-se os comutadores

$$\begin{aligned}
[G, a] &= (-i\theta(\beta)) \left[(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), a \right] = (-i\theta(\beta)) \left\{ [\tilde{a}a, a] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, a] \right\} \\
&= -(-i\theta(\beta)) [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, a] = -(-i\theta(\beta)) [a^\dagger, a] \tilde{a}^\dagger = -i\theta(\beta) \tilde{a}^\dagger,
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}
[G, [G, a]] &= -i\theta(\beta) [G, \tilde{a}^\dagger] = (-i\theta(\beta))^2 [(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), \tilde{a}^\dagger] \\
&= (-i\theta(\beta))^2 \left\{ [\tilde{a}a, \tilde{a}^\dagger] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] \right\} = (-i\theta(\beta))^2 [\tilde{a}a, \tilde{a}^\dagger] \\
&= (-i\theta(\beta))^2 [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] a = (-i\theta(\beta))^2 a,
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$[G, [G, [G, a]]] = (-i\theta(\beta))^2 [G, a] = (-i\theta(\beta))^3 \tilde{a}^\dagger, \tag{1.50}$$

$$[G, [G, [G, [G, a]]]] = (-i\theta(\beta))^3 [G, \tilde{a}^\dagger] = (-i\theta(\beta))^4 a, \quad (1.51)$$

$$[G, [G, [G, [G, [G, a]]]]] = (-i\theta(\beta))^4 [G, a] = (-i\theta(\beta))^5 \tilde{a}^\dagger,$$

e assim por diante, e ainda

$$\begin{aligned} [G, \tilde{a}] &= (-i\theta(\beta)) \left[(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), \tilde{a} \right] = (-i\theta(\beta)) \left\{ [\tilde{a}a, \tilde{a}] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, \tilde{a}] \right\} \\ &= -(-i\theta(\beta)) [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, \tilde{a}] = -(-i\theta(\beta)) a^\dagger [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}] = -i\theta(\beta) a^\dagger, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} [G, [G, \tilde{a}]] &= -i\theta(\beta) [G, a^\dagger] = (-i\theta(\beta))^2 [(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), a^\dagger] \\ &= (-i\theta(\beta))^2 \left\{ [\tilde{a}a, a^\dagger] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, a^\dagger] \right\} = (-i\theta(\beta))^2 [\tilde{a}a, a^\dagger] \\ &= (-i\theta(\beta))^2 \tilde{a} [a, a^\dagger] = (-i\theta(\beta))^2 \tilde{a}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$[G, [G, [G, \tilde{a}]]] = (-i\theta(\beta))^2 [G, \tilde{a}] = (-i\theta(\beta))^3 a^\dagger, \quad (1.54)$$

$$[G, [G, [G, [G, \tilde{a}]]]] = (-i\theta(\beta))^3 [G, a^\dagger] = (-i\theta(\beta))^4 \tilde{a}, \quad (1.55)$$

$$[G, [G, [G, [G, [G, \tilde{a}]]]]] = (-i\theta(\beta))^4 [G, \tilde{a}] = (-i\theta(\beta))^5 a^\dagger, \quad (1.56)$$

e assim em diante. Então, de acordo com as relações acima, a equação (1.45) assume a forma

$$\begin{aligned} a(\beta) &= a - \frac{1}{1!}\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger + \frac{1}{2!}\theta^2(\beta)a - \frac{1}{3!}\theta^3(\beta)\tilde{a}^\dagger \\ &\quad + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta)a - \frac{1}{5!}\theta^5(\beta)\tilde{a}^\dagger + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!}\theta^2(\beta) + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta) + \dots\right)a \\ &\quad - \left(\theta(\beta) + \frac{1}{3!}\theta^3(\beta) + \frac{1}{5!}\theta^5(\beta) + \dots\right)\tilde{a}^\dagger \\ &= \cosh \theta(\beta)a - \sinh \theta(\beta)\tilde{a}^\dagger, \end{aligned} \quad (1.57)$$

e a relação (1.46) fica dada por,

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\beta) &= \tilde{a} - \frac{1}{1!}\theta(\beta)a^\dagger + \frac{1}{2!}\theta^2(\beta)\tilde{a} - \frac{1}{3!}\theta^3(\beta)a^\dagger \\
&\quad + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta)\tilde{a} - \frac{1}{5!}\theta^5(\beta)a^\dagger + \dots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2!}\theta^2(\beta) + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta) + \dots\right)\tilde{a} \\
&\quad - \left(\theta(\beta) + \frac{1}{3!}\theta^3(\beta) + \frac{1}{5!}\theta^5(\beta) + \dots\right)a^\dagger \\
&= \cosh \theta(\beta)\tilde{a} - \sinh \theta(\beta)a^\dagger.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Isto é, em resumo

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \tag{1.59}$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger. \tag{1.60}$$

De forma similar

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \tag{1.61}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a. \tag{1.62}$$

As relações (1.60) a (1.62) podem ser encontradas a partir da relação (1.59) fazendo uso das regras de conjugação til, relações (1.8), e da conjugação adjunta usual. Para encontrar os operadores não térmicos deve-se proceder de maneira inversa. Por exemplo, para encontrar o operador não térmico a , multiplica-se ambos os lados da equação (1.59) por $u(\beta)$ e a equação (1.61) por $v(\beta)$ resultando em

$$u(\beta)a(\beta) = u^2(\beta)a - u(\beta)v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \tag{1.63}$$

$$v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) = v(\beta)u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v^2(\beta)a. \tag{1.64}$$

Somando as equações acima obtém-se

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (1.65)$$

e fazendo uso das regras de conjugação til e da conjugação adjunta, as relações abaixo são encontradas

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (1.66)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (1.67)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \quad (1.68)$$

Desta forma podemos escrever, respectivamente, o operador número e o operador número quadrado em termos dos operadores de criação e aniquilação térmicos como

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \left[u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] \left[u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\ &= u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta) \left[a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \tilde{a}(\beta)a(\beta) \right] + v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \end{aligned} \quad (1.69)$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{n}^2 &= \left[u^2(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) + u(\beta) v(\beta) \left[a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) + \tilde{a}(\beta) a(\beta) \right] + v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\
&\quad \times \left[u^2(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) + u(\beta) v(\beta) \left[a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) + \tilde{a}(\beta) a(\beta) \right] + v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\
&= u^4(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) + u^3(\beta) v(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u^3(\beta) v a^\dagger(\beta) a(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) + u^2(\beta) v^2(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u^3(\beta) v(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) + u^2(\beta) v^2(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u^2(\beta) v^2(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) + u(\beta) v^3(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u(\beta) v^3(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) + u^2(\beta) v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u^2(\beta) v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) + u(\beta) v^3(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u^2(\beta) v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) a^\dagger(\beta) a(\beta) + u(\beta) v^3(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \\
&\quad + u^3(\beta) v(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta) a(\beta) + v^4(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta), \tag{1.70}
\end{aligned}$$

onde foram usadas as relações (1.65) – (1.68).

A atuação de $a(\beta)$ no estado térmico $|0(\beta)\rangle$, de acordo com as equações (1.34) – (1.44), resulta em

$$\begin{aligned}
a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta) a U(\beta)^\dagger U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\
&= U(\beta) a |0, \tilde{0}\rangle = 0, \tag{1.71}
\end{aligned}$$

de forma similar

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \tag{1.72}$$

Assim, o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ pode ser chamado de vácuo térmico.

O valor médio do operador \hat{n} pode agora ser calculado imediatamente a partir da

equação (1.69),

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{n} \rangle &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\
 &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\
 &= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1},
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

que é a conhecida distribuição de Bose-Einstein, onde usamos a definição (1.36).

1.3 Oscilador Fermiônico em DCT

Consideremos um sistema de um férmion definido pelo Hamiltoniano

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (\hbar = 1) \tag{1.74}$$

com a^\dagger e a satisfazendo a álgebra

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \tag{1.75}$$

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0, \tag{1.76}$$

onde $\{A, B\} = AB + BA$ é o anti-comutador. Define-se o operador número como

$$\hat{n} = a^\dagger a, \tag{1.77}$$

com a respectiva equação de autovalor

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Das relações (1.75), (1.76) e da condição de ortonormalidade do vetor $|n\rangle$ segue que $n = 0, 1$, isto é,

$$a|0\rangle = 0,$$

$$a|1\rangle = |0\rangle,$$

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle,$$

$$a^\dagger|1\rangle = |0\rangle.$$

O espaço de Hilbert do sistema é constituído por dois vetores: $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Os autoestados e autovalores de H são

$$H|0\rangle = 0, \tag{1.78}$$

$$H|1\rangle = w|1\rangle. \tag{1.79}$$

Análogo ao caso bosônico, o sistema til é introduzido pelo Hamiltoniano

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \tag{1.80}$$

com os operadores \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} satisfazendo as relações de anticomutação

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1, \tag{1.81}$$

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}\} = 0, \tag{1.82}$$

e

$$\{a, \tilde{a}\} = \{a, \tilde{a}^\dagger\} = 0. \tag{1.83}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \\
&= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} (|0, \tilde{0}\rangle + e^{-\beta\varepsilon_n/2} |1, \tilde{1}\rangle) \\
&= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} (1 + e^{-\beta w/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle.
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Da condição de normalização do estado $|0(\beta)\rangle$ resulta que

$$Z(\beta) = 1 + e^{-\beta w}.$$

Então

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{(1 + e^{-\beta w})^{1/2}} (1 + e^{-\beta w/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \tag{1.85}$$

O estado $|0(\beta)\rangle$ pode ser obtido do vácuo duplicado através de uma transformação unitária $U(\beta)$, isto é,

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\
&= e^{-iG(\beta)} |0, \tilde{0}\rangle,
\end{aligned} \tag{1.86}$$

com

$$G(\beta) = -i\theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \tag{1.87}$$

De fato, usando a expansão da função exponencial, a relação (1.86) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [-iG(\beta)]^m |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[-\theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) \right]^m |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \left\{ 1 - \frac{1}{1!} \theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) + \frac{1}{2!} \theta(\beta)^2 (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^2 \right. \\
&\quad - \frac{1}{3!} \theta(\beta)^3 (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^3 + \frac{1}{4!} \theta(\beta)^4 (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^4 \\
&\quad \left. - \frac{1}{5!} \theta(\beta)^5 (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^5 + \frac{1}{6} \theta(\beta)^6 (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^6 - \dots \right\} |0, \tilde{0}\rangle.
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Usando as relações de comutação (1.75), (1.76) e (1.81) – (1.83) e

$$\left(\tilde{a}^\dagger\right)^m |0, \tilde{0}\rangle = \left(a^\dagger\right)^m |0, \tilde{0}\rangle = 0, \text{ para } m > 1, \quad (1.89)$$

os termos da relação (1.88) resultarão em

$$\left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) |0, \tilde{0}\rangle = -\tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.90)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right)^2 |0, \tilde{0}\rangle &= \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) |0, \tilde{0}\rangle \\ &= -\left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) \tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\ &= -\tilde{a}a\tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\ &= -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger a a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\ &= -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\ &= -|0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right)^3 |0, \tilde{0}\rangle &= \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right)^2 |0, \tilde{0}\rangle \\ &= -\left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right)^4 |0, \tilde{0}\rangle &= \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right)^3 |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \left(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\right) \tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \tilde{a}a\tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\ &= -|0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^5 |0, \tilde{0}\rangle &= (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^4 |0, \tilde{0}\rangle \\
&= (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle \\
&= -\tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle,
\end{aligned} \tag{1.94}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^6 |0, \tilde{0}\rangle &= (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^5 |0, \tilde{0}\rangle \\
&= -(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) \tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\
&= -|0, \tilde{0}\rangle,
\end{aligned}$$

e assim por diante. Isto resulta nas relações seguintes

$$(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^{2m} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^m |0, \tilde{0}\rangle, \tag{1.95}$$

$$(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)^{2m+1} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^{m+1} \tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle. \tag{1.96}$$

Portanto, o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ fica dado por

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \left\{ 1 + \frac{1}{1!}\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger a^\dagger - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3\tilde{a}^\dagger a^\dagger + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5\tilde{a}^\dagger a^\dagger - \frac{1}{6}\theta(\beta)^6 + \dots \right\} |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \left\{ \left[1 - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 - \frac{1}{6}\theta(\beta)^6 + \dots \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{1!}\theta(\beta) - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 - \dots \right] \tilde{a}^\dagger a^\dagger \right\} |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \left\{ \cos \theta(\beta) + \sin \theta(\beta) \tilde{a}^\dagger a^\dagger \right\} |0, \tilde{0}\rangle.
\end{aligned} \tag{1.97}$$

Definindo-se

$$\cos \theta(\beta) = u(\beta) = (1 + e^{-\beta\omega})^{-1/2}, \tag{1.98}$$

$$\sin \theta(\beta) = v(\beta) = (1 + e^{\beta\omega})^{-1/2}, \tag{1.99}$$

a relação (1.97), resulta na expressão (1.85).

Para os operadores térmicos $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$ têm-se

$$a(\beta) = e^{-iG(\beta)} a e^{iG(\beta)}, \quad (1.100)$$

$$\tilde{a}(\beta) = e^{-iG(\beta)} \tilde{a} e^{iG(\beta)}. \quad (1.101)$$

Usando a identidade

$$e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots, \quad (1.102)$$

e fazendo a identificação $A = a$ e $B = G$, encontra-se os comutadores

$$\begin{aligned} [G, a] &= (-i\theta(\beta)) \left[(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), a \right] = (-i\theta(\beta)) \left\{ [\tilde{a}a, a] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, a] \right\} \\ &= -(-i\theta(\beta)) [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, a] = -(-i\theta(\beta)) (\tilde{a}^\dagger a^\dagger a - a \tilde{a}^\dagger a^\dagger) \\ &= (-i\theta(\beta)) (a^\dagger a \tilde{a}^\dagger + a a^\dagger \tilde{a}^\dagger) = (-i\theta(\beta)) \tilde{a}^\dagger, \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned} [G, [G, a]] &= -i\theta(\beta)[G, \tilde{a}^\dagger] = (-i\theta(\beta))^2 [(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), \tilde{a}^\dagger] \\ &= (-i\theta(\beta))^2 \left\{ [\tilde{a}a, \tilde{a}^\dagger] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] \right\} = (-i\theta(\beta))^2 [\tilde{a}a, \tilde{a}^\dagger] \\ &= (-i\theta(\beta))^2 (\tilde{a}a\tilde{a}^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}a) = (-i\theta(\beta))^2 (-\tilde{a}\tilde{a}^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}a) \\ &= -(-i\theta(\beta))^2 a, \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$[G, [G, [G, a]]] = -(-i\theta(\beta))^2 [G, a] = -(-i\theta(\beta))^3 \tilde{a}^\dagger, \quad (1.105)$$

$$[G, [G, [G, [G, a]]]] = -(-i\theta(\beta))^3 [G, \tilde{a}^\dagger] = (-i\theta(\beta))^4 a, \quad (1.106)$$

$$[G, [G, [G, [G, [G, a]]]]] = (-i\theta(\beta))^4 [G, a] = (-i\theta(\beta))^5 \tilde{a}^\dagger, \quad (1.107)$$

e assim por diante; e

$$\begin{aligned}
[G, \tilde{a}] &= (-i\theta(\beta)) \left[(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), \tilde{a} \right] = (-i\theta(\beta)) \left\{ [\tilde{a}a, \tilde{a}] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, \tilde{a}] \right\} \\
&= -(-i\theta(\beta)) [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, \tilde{a}] = -(-i\theta(\beta)) (\tilde{a}^\dagger a^\dagger \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{a}^\dagger a^\dagger) \\
&= -(-i\theta(\beta)) (a^\dagger \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger \tilde{a} \tilde{a}^\dagger) = -(-i\theta(\beta)) a^\dagger,
\end{aligned} \tag{1.108}$$

$$\begin{aligned}
[G, [G, \tilde{a}]] &= -i\theta(\beta) [G, a^\dagger] = -(-i\theta(\beta))^2 [(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger), a^\dagger] \\
&= -(-i\theta(\beta))^2 \left\{ [\tilde{a}a, a^\dagger] - [\tilde{a}^\dagger a^\dagger, a^\dagger] \right\} = -(-i\theta(\beta))^2 [\tilde{a}a, a^\dagger] \\
&= -(-i\theta(\beta))^2 (\tilde{a}aa^\dagger - a^\dagger \tilde{a}a) = -(-i\theta(\beta))^2 (\tilde{a}aa^\dagger + \tilde{a}a^\dagger a) \\
&= -(-i\theta(\beta))^2 \tilde{a},
\end{aligned} \tag{1.109}$$

$$[G, [G, [G, \tilde{a}]]] = -(-i\theta(\beta))^2 [G, \tilde{a}] = (-i\theta(\beta))^3 a^\dagger, \tag{1.110}$$

$$[G, [G, [G, [G, \tilde{a}]]]] = (-i\theta(\beta))^3 [G, a^\dagger] = (-i\theta(\beta))^4 \tilde{a}, \tag{1.111}$$

$$[G, [G, [G, [G, [G, \tilde{a}]]]]] = (-i\theta(\beta))^4 [G, \tilde{a}] = -(-i\theta(\beta))^5 a^\dagger, \tag{1.112}$$

e assim por diante.

Então, de acordo com as relações acima, a equação (1.100) assume a forma

$$\begin{aligned}
a(\beta) &= a - \frac{1}{1!}\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger - \frac{1}{2!}\theta^2(\beta)a + \frac{1}{3!}\theta^3(\beta)\tilde{a}^\dagger \\
&\quad + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta)a - \frac{1}{5!}\theta^5(\beta)\tilde{a}^\dagger + \dots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2(\beta) + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta) - \dots\right)a \\
&\quad - \left(\theta(\beta) - \frac{1}{3!}\theta^3(\beta) + \frac{1}{5!}\theta^5(\beta) - \dots\right)\tilde{a}^\dagger \\
&= \cos\theta(\beta)a - \text{sen}\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger,
\end{aligned} \tag{1.113}$$

e a relação (1.101) fica dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\beta) &= \tilde{a} + \frac{1}{1!}\theta(\beta)a^\dagger - \frac{1}{2!}\theta^2(\beta)\tilde{a} - \frac{1}{3!}\theta^3(\beta)a^\dagger \\
&\quad + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta)\tilde{a} + \frac{1}{5!}\theta^5(\beta)a^\dagger + \dots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2(\beta) + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta) + \dots\right)\tilde{a} \\
&\quad + \left(\theta(\beta) - \frac{1}{3!}\theta^3(\beta) + \frac{1}{5!}\theta^5(\beta) - \dots\right)a^\dagger \\
&= \cos\theta(\beta)\tilde{a} + \sin\theta(\beta)a^\dagger,
\end{aligned} \tag{1.114}$$

isto é,

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \tag{1.115}$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger, \tag{1.116}$$

onde foram usadas as relações

$$\{a, a^\dagger\} = \{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1, \tag{1.117}$$

$$\{a, a\} = \{\tilde{a}, \tilde{a}\} = \{a, \tilde{a}^\dagger\} = 0, \tag{1.118}$$

e a restrição dada pela equação (1.89).

De forma similar

$$\begin{aligned}
a^\dagger(\beta) &= u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \\
\tilde{a}^\dagger(\beta) &= u(\beta)\tilde{a}^\dagger + v(\beta)a.
\end{aligned} \tag{1.119}$$

As transformações inversas são dadas por

$$a = u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (1.120)$$

$$a^\dagger = u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta) \quad (1.121)$$

$$\tilde{a} = u(\beta) \tilde{a}(\beta) - v(\beta) a^\dagger(\beta), \quad (1.122)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) - v(\beta) a(\beta). \quad (1.123)$$

Observe que

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = \tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \quad (1.124)$$

Por esta razão, $|0(\beta)\rangle$ é chamado de vácuo térmico.

O valor médio do operador \hat{n} é

$$\begin{aligned} n(\beta) &= \langle \hat{n} \rangle = \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | [u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta)] [u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta) = \frac{1}{1 + e^{\beta\omega}}, \end{aligned} \quad (1.125)$$

que é a conhecida distribuição de Fermi-Dirac, onde usamos a definição (1.99).

1.4 Relação de $|0(\beta)\rangle$ e a Matriz de Densidade

A equação (1.15) nos fornece uma relação entre o vácuo térmico e a matriz densidade ρ do sistema, isto é,

$$\begin{aligned}
 |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} \sum_n e^{-\beta H/2} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \frac{1}{[Z(\beta)]^{1/2}} e^{-\beta H/2} \sum_n |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \rho^{1/2} |I\rangle,
 \end{aligned} \tag{1.126}$$

onde

$$|I\rangle = \sum_n |n, \tilde{n}\rangle, \tag{1.127}$$

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}. \tag{1.128}$$

Capítulo 2

Estados Coerentes

Neste capítulo faremos uma introdução aos estados do campo eletromagnético quantizado, estado de número ou estado de Fock, estados coerentes, estados comprimidos e estudaremos a estatísticas destes através do Fator de Mandel. Faremos uma apresentação detalhada dos tópicos de interesse baseados nas referências [28, 31, 34, 57, 59].

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Na ausência de fontes, o campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell, dadas por [57]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.4}$$

onde $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, μ_0 e ε_0 são respectivamente a permeabilidade elétrica e magnética do espaço livre e $\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$. As equações de Maxwell são invariantes de calibre. No calibre de Coulomb, \mathbf{B} e \mathbf{E} podem ser encontrados do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ da seguinte forma

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

com a condição do calibre de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.7)$$

Substituindo a relação (2.5) na equação (2.4) encontramos que o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

O potencial vetor pode ser separado em dois termos da seguinte forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ contém as amplitudes que variam como $e^{-i\omega t}$ para $\omega > 0$ e $\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t))^*$ contém as amplitudes que variam como $e^{i\omega t}$.

Para um conjunto discreto de variáveis, a expansão do potencial vetor que descreve o campo confinado num certo volume do espaço será escrita como um conjunto discreto de funções ortogonais para cada modo, isto é,

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_k c_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t}, \quad (2.10)$$

onde os coeficientes de Fourier c_k são constantes para o campo livre. O conjunto de funções vetoriais $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$, correspondente às frequências ω_k , satisfaz a equações da onda

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2}\right)\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.11)$$

desde que o volume não contenha material refratário. As funções $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ satisfazem a condição de transversalidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.12)$$

e formam um conjunto completo ortonormal, isto é,

$$\int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{kk'}. \quad (2.13)$$

As funções $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ dependem das condições de contorno do volume físico sob consideração. Assim, condições de contorno periódicas correspondem a modos de onda caminhante e condições apropriadas levam-nos às ondas padrão, isto é, funções de onda plana apropriadas ao volume cúbico de lado L que podem ser escritas como,

$$\mathbf{u}_k^\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \hat{e}^{(\lambda)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.14)$$

onde $\hat{e}^{(\lambda)}$ é o vetor de polarização unitário. O índice do modo pode descrever diversas variáveis discretas, por exemplo, o índice de polarização ($\lambda = 1, 2$) e as três componentes cartesianas do vetor de propagação \mathbf{k} . Cada componente do vetor de onda \mathbf{k} assume os valores,

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (2.15)$$

sendo que o vetor polarização $\hat{e}^{(\lambda)}$ é perpendicular a \mathbf{k} de acordo com a condição de transversalidade, equação (2.12).

O potencial vetor pode então ser escrito na forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0} \right)^{1/2} \left[a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \right], \quad (2.16)$$

desta maneira o campo elétrico fica dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} \left[a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \right], \quad (2.17)$$

onde os fatores de normalização foram escolhidos de tal forma que as amplitudes a_k e a_k^\dagger sejam adimensionais.

Na teoria eletromagnética clássica as amplitudes de Fourier são números complexos. A quantização do campo é acompanhada pela escolha de a_k e a_k^\dagger como operadores mutuamente adjuntos. Já que fótons são bósons, as relações de comutação apropriadas para os operadores a_k e a_k^\dagger são dadas pelos comutadores

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}] &= [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \\ [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta_{kk'}. \end{aligned}$$

O Hamiltoniano para o campo eletromagnético é dado por

$$H = \frac{1}{2} \int (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) d\mathbf{r}.$$

Substituindo (2.17) para \mathbf{E} e a expressão equivalente para \mathbf{H} e fazendo uso das condições (2.12) e (2.13), o Hamiltoniano para o campo eletromagnético pode ser reduzido à forma da soma de um sistema de osciladores,

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right).$$

Portanto, o comportamento dinâmico das amplitudes do campo elétrico pode ser descrito como um conjunto de osciladores harmônicos independentes obedecendo às relações de comutação acima. Os estados quânticos de cada modo podem agora ser descritos independentemente um do outro.

2.2 Estados Coerentes - Definição

O Hamiltoniano de um único modo do campo é dado por

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.18)$$

Consideremos estados $|\alpha\rangle$, autoestado do operador de aniquilação a com autovalor α , isto é,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.19)$$

Os estados $|\alpha\rangle$ são chamados de estados coerentes. Da equação (2.19) segue

$$\langle\alpha|a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*, \quad (2.20)$$

O operador a não é hermitiano, portanto não podemos afirmar “a priori” que seus autovalores sejam reais e que os autovetores são ortogonais e formam um conjunto completo.

Fazendo a expansão do estado $|\alpha\rangle$ na base número $|n\rangle$ temos

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde

$$c_n(\alpha) = \langle n|\alpha\rangle. \quad (2.22)$$

Substituindo a relação (2.21) na equação (2.19) resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n(\alpha) |n\rangle, \quad (2.23)$$

desta forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n(\alpha) |n\rangle. \quad (2.24)$$

Logo, multiplicando ambos os membros da equação (2.24) por $\langle m|$ e usando a relação de ortonormalidade dos estados $|n\rangle$, obtém-se,

$$\langle m| \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} |n\rangle = \langle m| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n(\alpha) |n\rangle, \quad (2.25)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} \langle m|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n(\alpha) \langle m|n\rangle. \quad (2.26)$$

Portanto,

$$c_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n(\alpha), \quad (2.27)$$

e desta expressão obtemos

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0(\alpha), \\ c_2(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} c_0(\alpha), \\ c_3(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} c_2(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}} c_0(\alpha), \\ c_4(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{4}} c_3(\alpha) = \frac{\alpha^4}{\sqrt{4!}} c_0(\alpha), \end{aligned}$$

e assim por diante. Portanto, a relação de recorrência para os coeficientes $c_n(\alpha)$ é dada por

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0(\alpha). \quad (2.28)$$

E então, a equação (2.21) pode ser escrita como

$$|\alpha\rangle = c_0(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.29)$$

Para a determinação do coeficiente $c_0(\alpha)$ usaremos a condição de normalização para os estados $|\alpha\rangle$, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\alpha\rangle &= \langle m|c_0^*(\alpha)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}c_0(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= |c_0(\alpha)|^2\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\langle m|n\rangle \\
&= |c_0(\alpha)|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \\
&= |c_0(\alpha)|^2e^{|\alpha|^2}=1,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

o que implica em

$$c_0(\alpha)=\langle 0|\alpha\rangle=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \tag{2.31}$$

E das equações (2.22), (2.28) e (2.31) tem-se

$$c_n(\alpha)=\langle n|\alpha\rangle \tag{2.32}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \tag{2.33}$$

Desta forma, o estado coerente do oscilador assume a forma

$$|\alpha\rangle=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{2.34}$$

e seu adjunto

$$\langle\alpha|=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}\langle n|. \tag{2.35}$$

Usando a relação (1.23), as equações (2.34) e (2.35) podem ser reescritas como,

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \alpha | &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0 | \frac{(\alpha^* a)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle 0 | e^{\alpha^* a}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Obtém-se assim a distribuição de probabilidade para bósons no estado coerente usando a relação (2.32), isto é,

$$|c_n(\alpha)|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.38)$$

que é a distribuição de Poisson de valor médio $|\alpha|^2$. Isto significa que o número de bósons num estado coerente não está definido. O número médio de bósons no estado coerente é dado por,

$$\begin{aligned}\langle \hat{n} \rangle_{\alpha} &= \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^{\dagger} a | \alpha \rangle \\ &= |\alpha|^2,\end{aligned}\quad (2.39)$$

onde foram usadas as relações (2.19) e (2.20).

2.3 Operador Deslocamento

Uma outra forma de descrever estados coerentes é assumir que existe um operador unitário D que atua como um operador deslocamento sobre os operadores a e a^{\dagger} . Considere D um operador, função de um parâmetro complexo γ , satisfazendo as relações

$$D^{-1}(\gamma) a D(\gamma) = a + \gamma, \quad (2.40)$$

$$D^{-1}(\gamma) a^{\dagger} D(\gamma) = a^{\dagger} + \gamma. \quad (2.41)$$

Da equação (2.40) resulta

$$aD(\gamma) = D(\gamma)a + \gamma D(\gamma), \quad (2.42)$$

ou seja,

$$[a, D(\gamma)] = \gamma D(\gamma), \quad (2.43)$$

e

$$aD^{-1}(\gamma) = D^{-1}(\gamma)(a - \gamma). \quad (2.44)$$

Atuando o operador $aD^{-1}(\gamma)$ no estado coerente $|\alpha\rangle$, obtém-se

$$\begin{aligned} aD^{-1}(\gamma)|\alpha\rangle &= D^{-1}(\gamma)(a - \gamma)|\alpha\rangle \\ &= (\alpha - \gamma)D^{-1}(\gamma)|\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde foi utilizada a equação (2.19). Consequentemente $D^{-1}(\gamma)|\alpha\rangle$ é um autoestado de a correspondente ao autovalor $\alpha - \gamma$. Em particular, escolhendo $\gamma = \alpha$,

$$aD^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle = 0. \quad (2.46)$$

Como o estado de vácuo do oscilador é unicamente definido pela relação ($a|0\rangle = 0$), o estado $D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle$ é precisamente o estado de vácuo, $|0\rangle$, ou seja, os estados coerentes são formas deslocadas do estado de vácuo do oscilador, pela atuação do operador deslocamento $D(\alpha)$, isto é,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (2.47)$$

Vamos agora deduzir uma forma explícita para $D(\alpha)$. Considere um deslocamento infinitesimal $d\alpha$ em torno de $\alpha = 1$, tal que $D(0) = 1$. Pode-se então propor uma forma explícita em primeira ordem para o operador deslocamento como

$$D(d\alpha) = 1 + a^\dagger d\alpha - ad\alpha^*. \quad (2.48)$$

Observe que as relações (2.40) e (2.41) são satisfeitas. Desta forma o lado esquerdo da equação (2.43) fica dado por

$$\begin{aligned} [a, D(d\alpha)] &= [a, 1 + a^\dagger d\alpha - ad\alpha^*] \\ &= d\alpha, \end{aligned} \tag{2.49}$$

e o lado direito por

$$\begin{aligned} d\alpha D(d\alpha) &= d\alpha [1 + a^\dagger d\alpha - ad\alpha^*] \\ &= d\alpha + a^\dagger (d\alpha)^2 - ad\alpha^* d\alpha \\ &= d\alpha, \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde foi usada a relação $[a, a^\dagger] = 1$.

Considerando $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, vamos mostrar que o operador deslocamento D possui a propriedade de multiplicação de grupo, ou seja,

$$D(d\alpha_1 + d\alpha_2) = D(d\alpha_1) D(d\alpha_2). \tag{2.51}$$

De fato, a partir da definição (2.48), resulta então que

$$\begin{aligned} [a, D(d\alpha_1 + d\alpha_2)] &= [a, 1 + a^\dagger d(\alpha_1 + \alpha_2) - ad(\alpha_1^* + \alpha_2^*)] \\ &= d\alpha_1 + d\alpha_2. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Por outro lado, da equação (2.50) temos

$$\begin{aligned} [a, D(d\alpha_1) D(d\alpha_2)] &= [a, D(d\alpha_1)] D(d\alpha_2) + D(d\alpha_1) [a, D(d\alpha_2)] \\ &= d\alpha_1 D(d\alpha_2) + D(d\alpha_1) d\alpha_2 \\ &= d\alpha_1 + d\alpha_2. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Desta maneira, dos resultados (2.52) e (2.53) temos

$$[a, D(d\alpha_1) + D(d\alpha_2)] = [a, D(d\alpha_1)D(d\alpha_2)],$$

o que prova que o operador deslocamento possui a propriedade de multiplicação (2.51).

Com este resultado, a forma explicita do operador $D(\alpha)$ pode ser encontrada. Considere $\alpha = \alpha'\lambda$, onde λ é um parâmetro real e α' um número complexo fixo. Da propriedade (2.51) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{D(\alpha'[\lambda + d\lambda]) - D(\alpha'\lambda)}{d\lambda} &= \frac{D(\alpha'\lambda)D(\alpha'd\lambda) - D(\alpha'\lambda)}{d\lambda} \\ &= \frac{D(\alpha'd\lambda) - 1}{d\lambda}D(\alpha'\lambda) \\ &= \frac{[1 + a^\dagger\alpha'd\lambda - a\alpha'^*d\lambda] - 1}{d\lambda}D(\alpha'\lambda) \\ &= [\alpha'a^\dagger - \alpha'^*a]D(\alpha'\lambda), \end{aligned} \tag{2.54}$$

então,

$$\frac{d}{d\lambda}D(\alpha'\lambda) = (\alpha'a^\dagger - \alpha'^*a)D(\alpha'\lambda), \tag{2.55}$$

cujas solução é dada por

$$D(\alpha'\lambda) = e^{(\alpha'a^\dagger - \alpha'^*a)\lambda}. \tag{2.56}$$

Como λ é arbitrário, podemos escolher $\lambda = 1$, e a equação (2.56) torna-se

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \tag{2.57}$$

Deste modo, das equações (2.47) e (2.57), os estados coerentes ficam definidos por

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle, \tag{2.58}$$

que é corretamente normalizada já que $D(\alpha)$ é unitário.

É interessante discutir a relação entre as duas formas que derivamos para os estados coerentes. Para isto usaremos a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff [67],

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^Ae^B, \quad (2.59)$$

que tem validade para operadores que satisfazem as relações

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0. \quad (2.60)$$

Fazendo a identificação $A = \alpha a^\dagger$ e $B = -\alpha^* a$, encontra-se os comutadores

$$[\alpha a^\dagger, -\alpha^* a] = -\alpha\alpha^* [a^\dagger, a] = \alpha\alpha^* = |\alpha|^2, \quad (2.61)$$

e

$$[\alpha a^\dagger, [\alpha a^\dagger, -\alpha^* a]] = [-\alpha\alpha^*, [\alpha a^\dagger, -\alpha^* a]] = 0, \quad (2.62)$$

então o operador deslocamento (2.57) pode ser escrito como

$$D(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha^* a). \quad (2.63)$$

Substituindo a relação (2.63) na equação (2.58), teremos

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha^* a) |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^\dagger) \left[1 - \alpha^* a + \frac{(\alpha^*)^2}{2!} a^2 + \dots\right] |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.64)$$

que é a equação (2.34). Isto mostra a equivalência entre o método do operador de aniquilação e o método do operador deslocamento para a definição do estado coerente.

2.4 Propriedades dos Estados $|\alpha\rangle$

2.4.1 Ortogonalidade

Para verificarmos a ortogonalidade dos estados coerentes partiremos das equações (2.34) e (2.35). Desta forma temos,

$$\begin{aligned}\langle\gamma|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|\gamma|^2+|\alpha|^2)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|\gamma|^2+|\alpha|^2)}e^{\gamma^*\alpha},\end{aligned}\tag{2.65}$$

onde foi usada a ortonormalidade dos estados $|n\rangle$. Se os estados $|\alpha\rangle$ e $|\gamma\rangle$ fossem ortogonais o produto escalar (2.65) tornar-se-ia nulo para $\alpha \neq \gamma$. Portanto, a norma da projeção do estado $|\gamma\rangle$ no estado $|\alpha\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned}|\langle\gamma|\alpha\rangle|^2 &= \left[e^{-\frac{1}{2}(|\gamma|^2+|\alpha|^2)}e^{\gamma^*\alpha} \right] \left[e^{-\frac{1}{2}(|\gamma|^2+|\alpha|^2)}e^{\gamma^*\alpha} \right] \\ &= e^{-(\alpha\alpha^*-\gamma^*\alpha-\gamma^*\alpha+\gamma\gamma^*)} \\ &= e^{-|\alpha-\gamma|^2}.\end{aligned}\tag{2.66}$$

De acordo com o resultado anterior, dois estados coerentes arbitrários possuem superposição não nula, superposição esta que será tanto menor quanto maior for a diferença $|\alpha - \gamma|$. Desta forma, estados com valores de α e γ muito diferentes são aproximadamente ortogonais. A não ortogonalidade dos estados coerentes é uma consequência de serem autoestados de um operador não-hermitiano.

2.4.2 Relação de Completeza

A relação de completeza para o conjunto de estados coerentes é fundamental para a constituição de uma base. Escrevendo, se for possível, o operador unidade como uma

soma ou integral sobre todo o plano complexo α do operador projeção $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, a completeza estará verificada. Para esta proposta, o cálculo da integral

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha, \quad (2.67)$$

deve ser feito. Considerando

$$\alpha = \operatorname{Re}\alpha + i\operatorname{Im}\alpha = x + iy = |\alpha|e^{i\theta} = re^{i\theta}, \quad (2.68)$$

$$d^2\alpha = d(\operatorname{Re}\alpha)d(\operatorname{Im}\alpha) = dx dy = r dr d\theta, \quad (2.69)$$

e usando as relações (2.34) e (2.35) teremos,

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha &= \int \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n| d^2\alpha \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{m!n!}} \int e^{-|\alpha|^2} \alpha^m \alpha^{*n} d^2\alpha. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Esta expressão em coordenadas polares pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{m!n!}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{m+n} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-(m-n)\theta} \\ &= 2\pi \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{m!n!}} \delta_{mn} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{m+n} r dr \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\ &= \pi, \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde usamos a nova variável $z = r^2$ e as identidades

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{-(m-n)\theta} = 2\pi \delta_{mn}, \quad (2.72)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz = n!. \quad (2.73)$$

Desta maneira a relação de completeza dos estados coerentes pode ser escrita como

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha = \mathbf{1}, \quad (2.74)$$

onde $\mathbf{1}$ é o operador identidade. O fato da integral sobre o plano complexo do operador projeção não ser $\mathbf{1}$, significa que o conjunto $\{|\alpha\rangle\}$ é super-completo.

2.4.3 Relação de Incerteza

O valor esperado de um operador A calculado num estado $|\psi\rangle$ é dado por,

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad (2.75)$$

e sua variância, ΔA , é definida por,

$$[\langle \Delta A \rangle_\psi]^2 = \langle A^2 \rangle_\psi - [\langle A \rangle_\psi]^2. \quad (2.76)$$

Vamos usar essas definições para analisar a incompatibilidade entre posição e momento na mecânica quântica. Esta incompatibilidade é expressa pela relação de comutação entre os operadores de posição X e momentum P . Isto é equivalente ao princípio de incerteza de Heisenberg, que estabelece que as medidas simultâneas dos valores médios dos operadores X e P no estado $|\psi\rangle$ são tais que

$$\langle \Delta X \rangle_\psi \langle \Delta P \rangle_\psi \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.77)$$

Definindo os operadores posição X e momentum P como

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad (2.78)$$

$$P = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a - a^\dagger), \quad (2.79)$$

e fazendo uso das equações (2.19) e (1.17), os valores médios dos operadores posição X e momento P no estado coerente $|\alpha\rangle$ podem ser calculados da forma

$$\begin{aligned}\langle X \rangle_\alpha &= \langle \alpha | \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha + \alpha^*]\end{aligned}\tag{2.80}$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha,\tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}\langle P \rangle_\alpha &= \langle \alpha | (-i) \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a - a^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= (-i) \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \alpha | (a - a^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= (-i) \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} [\alpha - \alpha^*]\end{aligned}\tag{2.82}$$

$$= \sqrt{2m\hbar\omega} \operatorname{Im} \alpha.\tag{2.83}$$

Do mesmo modo, as correspondentes variâncias são dadas por

$$\begin{aligned}\langle X^2 \rangle_\alpha &= \langle \alpha | \frac{\hbar}{2m\omega} (a + a^\dagger)^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1] \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(2 \operatorname{Re} \alpha)^2 + 1],\end{aligned}\tag{2.84}$$

$$\begin{aligned}\langle P^2 \rangle_\alpha &= \langle \alpha | (-i)^2 \frac{m\hbar\omega}{2} (a - a^\dagger)^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} [1 - (\alpha - \alpha^*)^2] \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} [1 + (2 \operatorname{Im} \alpha)^2].\end{aligned}\tag{2.85}$$

Portanto, os desvios quadráticos médios no estado coerente são dados por

$$\begin{aligned}
 [\langle \Delta X \rangle_\alpha]^2 &= \langle X^2 \rangle_\alpha - [\langle X \rangle_\alpha]^2 \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1] - \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha + \alpha^*] \right]^2 \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega},
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
 [\langle \Delta P \rangle_\alpha]^2 &= \langle P^2 \rangle_\alpha - [\langle P \rangle_\alpha]^2 \\
 &= \frac{m\hbar\omega}{2} [1 - (\alpha - \alpha^*)^2] - \left[(-i) \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} [\alpha + \alpha^*] \right]^2 \\
 &= \frac{m\hbar\omega}{2},
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

de maneira que,

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta X \rangle_\alpha \langle \Delta P \rangle_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \\
 &= \frac{\hbar}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

Desta forma o estado coerente $|\alpha\rangle$ é um estado de mínima incerteza, pois o produto $\langle \Delta X \rangle_\alpha \langle \Delta P \rangle_\alpha$ assume o menor valor permitido pelo princípio de Heisenberg.

2.4.4 Expansão de Estados Arbitrários

Mesmo não sendo ortogonais e formando um conjunto super-completo, pode-se fazer uma expansão dos estados do oscilador em termos do conjunto de estados coerentes.

Um estado normalizado arbitrário do oscilador harmônico, $|\Psi\rangle$, pode ser expandido na base da representação número da forma

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

com $\sum |c_n|^2 = 1$.

Considere a função

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad (2.90)$$

de uma variável complexa z , a qual é analítica em todo plano complexo. De acordo com a equação (2.89) existe uma correspondência entre as funções f e os estados do oscilador.

Daqui por diante denotaremos os estados correspondentes à função $f(z)$ como $|f\rangle$, de maneira que a equação (2.89) pode ser reescrita como

$$|f\rangle = f(a^\dagger) |0\rangle, \quad (2.91)$$

onde

$$f(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}. \quad (2.92)$$

Multiplicando o lado direito da equação (2.91) pelo operador identidade, definido pela relação (2.74), obtemos a expansão de $|f\rangle$ em termos dos estados $|\alpha\rangle$, isto é,

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha f(a^\dagger) |0\rangle. \quad (2.93)$$

Entretanto, de acordo com a equação autovalores, (2.20), temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha| f(a^\dagger) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} \langle \alpha| (a^\dagger)^n \\ &= \langle \alpha| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (\alpha^*)^n \\ &= \langle \alpha| f(\alpha^*), \end{aligned} \quad (2.94)$$

de maneira que,

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha f(\alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| 0\rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha f(\alpha^*) e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde foi usado o resultado (2.31). A função $f(\alpha^*)$ correspondente ao estado $|f\rangle$ pode ser obtida a partir do produto escalar entre $\langle\gamma|$ e $|f\rangle$, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle\gamma|f\rangle &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} f(\alpha^*) \langle\gamma|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} f(\alpha^*) e^{-\frac{1}{2}(|\gamma|^2+|\alpha|^2)} e^{\gamma^*\alpha} \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} \int d^2\alpha f(\alpha^*) e^{\gamma^*\alpha-|\alpha|^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha (\alpha^*)^n e^{\gamma^*\alpha-|\alpha|^2}. \tag{2.96}
\end{aligned}$$

Pode-se expandir a função $f(\alpha^*)$ numa série de potências convergente, pois $f(\alpha^*)$ é analítica. Então vale a relação

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha (\alpha^*)^n e^{\gamma^*\alpha-|\alpha|^2} = (\gamma^*)^n. \tag{2.97}$$

Desta relação, (2.97), segue que

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} e^{\gamma^*\alpha-|\alpha|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\gamma^*)^n}{\sqrt{n!}}, \tag{2.98}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha f(\alpha^*) e^{\gamma^*\alpha-|\alpha|^2} = f(\gamma^*). \tag{2.99}$$

Desse modo, o produto escalar (2.96) torna-se

$$\langle\gamma|f\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (\gamma^*)^n \tag{2.100}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} f(\gamma^*), \tag{2.101}$$

isto é,

$$f(\alpha^*) = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle\alpha|f\rangle. \tag{2.102}$$

Em conseqüência, existe de fato uma correspondência unívoca entre os coeficientes $f(\alpha^*)$ da expansão (2.95) e os estados $|f\rangle$ do oscilador.

De forma análoga, obtém-se a expansão do estado adjunto de (2.95) como

$$\langle g| = \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} [g(\gamma^*)]^* \langle \gamma|. \quad (2.103)$$

A não ortogonalidade dos estados coerentes permite-nos escrever um estado coerente em função de todos os outros. De acordo com a equação (2.95), o estado $|\alpha\rangle$ fica dado por

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} \left[e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} g(\gamma^*) \langle \gamma| \alpha \rangle \right] |\gamma\rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma \langle \gamma| \alpha \rangle |\gamma\rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma e^{\gamma^* \alpha - \frac{1}{2}(|\gamma|^2 + |\alpha|^2)} |\gamma\rangle, \end{aligned} \quad (2.104)$$

onde foram usados os resultados (2.102) e (2.65).

2.4.5 Expansão de Operadores

Usando a relação de completeza, podemos expandir um operador A na representação número como

$$\begin{aligned} A &= \sum_{m,n} |n\rangle A_{nm} \langle m| \\ &= \sum_{m,n} A_{nm} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \left(a^\dagger \right)^n |0\rangle \langle 0| (a)^m, \end{aligned} \quad (2.105)$$

onde

$$A_{nm} = \langle n| A |m\rangle. \quad (2.106)$$

A expansão do operador A em termos dos estados coerentes fica dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha A \frac{1}{\pi} |\gamma\rangle \langle \gamma| d^2\gamma \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\gamma |\alpha\rangle \langle \alpha| A |\gamma\rangle \langle \gamma|. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Pode-se calcular o elemento matricial que conecta os estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\gamma\rangle$ a partir da expansão (2.105) da forma

$$\begin{aligned} \langle\alpha|A|\beta\rangle &= \sum_{m,n} A_{nm} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \langle\alpha|(a^\dagger)^n|0\rangle \langle 0|(a)^m|\gamma\rangle \\ &= \sum_{m,n} A_{nm} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \alpha^{*n} \beta^m \langle\alpha|0\rangle \langle 0|\gamma\rangle \\ &= \sum_{m,n} \left[A_{nm} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \alpha^{*n} \gamma^m \right] e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2} \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$= A_{\xi}(\alpha^*, \gamma) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)}, \quad (2.109)$$

onde foram usadas as equações (2.19), (2.20) e (2.31) e

$$A_{\xi}(\alpha^*, \gamma) = \sum_{m,n} A_{nm} \frac{\alpha^{*n} \gamma^m}{\sqrt{n!m!}}, \quad (2.110)$$

Substituindo a relação (2.109) na relação (2.107), tem-se

$$A = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\gamma |\alpha\rangle A_{\xi}(\alpha^*, \gamma) \langle\gamma| e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)}. \quad (2.111)$$

Isto mostra que há uma correspondência unívoca entre a função $A_{\xi}(\alpha^*, \gamma)$ e operador A .

Desta forma, a expansão de um operador A em termos de estados coerentes é única.

Similarmente para A^\dagger ,

$$A^\dagger = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\gamma |\alpha\rangle A_{\xi}^*(\alpha^*, \gamma) \langle\gamma| e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)}, \quad (2.112)$$

com

$$A_{\xi}^*(\alpha^*, \gamma) = \langle\alpha|A^\dagger|\gamma\rangle e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)}. \quad (2.113)$$

2.5 Operador Densidade

As médias estatísticas são obtidas de maneira mais simples se calculadas a partir da expansão do operador densidade ρ em termos de estados coerentes. O operador densidade

pode ser representado de maneira única por uma função analítica em todo plano α^* e β finitos, denominada $\mathfrak{R}(\alpha^*, \beta)$. Das equações (2.108) e (2.110) segue

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) &= e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \langle \alpha | \rho | \beta \rangle \\ &= e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2} \left[e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | \rho | m \rangle \right] \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | \rho | m \rangle.\end{aligned}\quad (2.114)$$

Conhecendo o elemento de matriz $\langle n | \rho | m \rangle$, a equação (2.114) define $\mathfrak{R}(\alpha^*, \beta)$.

Inversamente, o elemento de matriz ρ na base da representação número, $\langle n | \rho | m \rangle$, pode ser obtido quando a função $\mathfrak{R}(\alpha^*, \beta)$ é conhecida. Para tanto, multiplica-se a expressão (2.114) por $(\alpha)^k (\beta^*)^l e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}$ e faz-se a integração em ambos os lados sobre os planos complexo α e β , isto é,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int d^2\alpha d^2\beta \mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) (\alpha)^k (\beta^*)^l e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2} \\ &= \int d^2\alpha d^2\beta \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | \rho | m \rangle (\alpha)^k (\beta^*)^l e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\langle n | \rho | m \rangle}{\sqrt{n!m!}} \int d^2\alpha (\alpha^*)^n (\alpha)^k e^{-|\alpha|^2} \int d^2\beta (\beta^*)^l \beta^m e^{-|\beta|^2}.\end{aligned}\quad (2.115)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}\int d^2\alpha (\alpha^*)^n (\alpha)^k e^{-|\alpha|^2} &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n+k} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-(k-n)\theta} \\ &= 2\pi \delta_{kn} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n+k} r dr,\end{aligned}\quad (2.116)$$

então,

$$\int d^2\beta (\beta^*)^l \beta^m e^{-|\beta|^2} = 2\pi \delta_{lm} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{m+l} r dr.\quad (2.117)$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\Gamma &= 4\pi^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\langle n|\rho|m\rangle}{\sqrt{n!m!}} \delta_{kn} \delta_{lm} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n+k} r dr \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{m+l} r dr \\
&= 4\pi^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\langle k|\rho|l\rangle}{\sqrt{k!l!}} \int_0^{\infty} (r^2)^k e^{-r^2} r dr \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r^2)^l r dr \\
&= \pi^2 \langle k|\rho|l\rangle \sqrt{k!l!},
\end{aligned} \tag{2.118}$$

onde foram usadas as coordenadas polares definidas pelas equações (2.68) e (2.69), e as identidades (2.72) e (2.73). Da primeira linha da equação (2.115) e do resultado (2.118), tem-se,

$$\langle n|\rho|m\rangle = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}. \tag{2.119}$$

Se $\mathfrak{R}(\alpha^*, \beta)$ for conhecida pode-se escrever o operador ρ na forma

$$\rho = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta |\alpha\rangle \mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) \langle\beta| e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}. \tag{2.120}$$

A média estatística do operador A é definida como

$$\langle A \rangle = Tr \rho A. \tag{2.121}$$

Usando a expressão (2.120) para o operador densidade ρ , a relação (2.121) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} Tr [|\alpha\rangle \langle\beta| A] \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{\eta} [\langle\eta|\alpha\rangle \langle\beta|A|\eta\rangle] \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \langle\beta|A|\alpha\rangle \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \mathfrak{R}(\alpha^*, \beta) A_{\frac{1}{2}}(\alpha^*, \beta) e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

O traço do operador ρ deve ser normalizado à unidade, então, de acordo com a expansão (2.120), obtém-se

$$\begin{aligned} Tr\rho &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \Re(\alpha^*, \beta) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} Tr[|\alpha\rangle\langle\beta|] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \Re(\alpha^*, \beta) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \langle\beta|\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\alpha d^2\beta \Re(\alpha^*, \beta) e^{\alpha^*\beta - |\alpha|^2 - |\beta|^2} = 1 \end{aligned} \quad (2.123)$$

Desde que $\Re(\alpha^*, \beta)$ é uma função de potências de α^* , conforme a equação (2.114), pode-se calcular a integral no plano complexo α , que aparece em (2.123), com a ajuda do resultado (2.99), isto é,

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \Re(\alpha^*, \beta) e^{\alpha^*\beta - |\alpha|^2} = \Re(\beta^*, \beta). \quad (2.124)$$

De maneira que a equação (2.123) resulta em

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\beta \Re(\beta^*, \beta) e^{-|\beta|^2} = 1, \quad (2.125)$$

que é a condição de normalização sobre a função \Re .

2.6 Representação de Coordenadas

A função de onda $\varphi(x)$, correspondente à função de transformação do estado $|\varphi\rangle$ para a representação de coordenadas $\{|x\rangle\}$ é obtida por

$$\varphi(x) = \langle x | \varphi \rangle. \quad (2.126)$$

As equações

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P, \quad (2.127)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - i \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P, \quad (2.128)$$

definem os operadores de destruição e aniquilação em função dos operadores posição X e momentum P , então a equação (2.19) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= a|\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} [m\omega X + iP] |\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.129)$$

A função transformação do estado coerente para a representação de coordenadas, $\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$, é obtida multiplicando-se ambos os membros da equação (2.129) pelo autovetor $\langle x|$ do operador X com autovalor x ,

$$X|x\rangle = x|x\rangle, \quad (2.130)$$

e

$$\langle x|P = -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x|. \quad (2.131)$$

Desta maneira encontra-se

$$\begin{aligned} \sqrt{2m\hbar\omega} \alpha \langle x|\alpha\rangle &= \langle x|[m\omega X + iP]|\alpha\rangle \\ &= m\omega x \langle x|\alpha\rangle + i(-i\hbar) \frac{d}{dx} \langle x|\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Por um rearranjo dos termos desta equação, obtemos a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \langle x|\alpha\rangle = \left[\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \alpha - \frac{m\omega}{\hbar} x \right] \langle x|\alpha\rangle, \quad (2.133)$$

cujas solução é dada por

$$\langle x|\alpha\rangle = C e^{-(m\omega/2\hbar)x^2 + \sqrt{2m\omega/\hbar}\alpha x}. \quad (2.134)$$

Então, de acordo com a normalização dos estados coerentes $|\alpha\rangle$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^*(x) \alpha(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\langle x|\alpha\rangle|^2 dx = 1, \quad (2.135)$$

a constante de integração C pode ser encontrada. De fato, da relação (2.134) obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\langle x | \alpha \rangle|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |C|^2 e^{-m\omega/\hbar x^2 + \sqrt{2m\omega/\hbar}(\alpha + \alpha^*)x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |C|^2 e^{-[\sqrt{m\omega/\hbar}x^2 - (\alpha + \alpha^*)/\sqrt{2}]^2 + (\alpha + \alpha^*)^2/2} dx \\
&= |C|^2 e^{(\alpha + \alpha^*)^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\sqrt{m\omega/\hbar}x^2 - (\alpha + \alpha^*)/\sqrt{2}]^2} dx.
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Usando as variáveis $y \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}x$, $k \equiv (\alpha + \alpha^*)/\sqrt{2}$ e a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[y-k]^2} dy = \sqrt{\pi}, \tag{2.137}$$

obtemos,

$$|C|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)^2}, \tag{2.138}$$

ou seja,

$$C = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}(\alpha + \alpha^*)^2 + i\theta_\alpha}, \tag{2.139}$$

onde θ_α é uma fase real arbitrária. O fator $e^{i\theta_\alpha}$ não é fisicamente relevante, então a fase θ_α pode ser dada por

$$\theta_\alpha = -i \frac{(\alpha^{*2} - \alpha^2)}{4}, \tag{2.140}$$

das relações (2.80) e (2.82), a equação (2.140) pode ser escrita como

$$\theta_\alpha = [\text{Re } \alpha] [\text{Im } \alpha] = \frac{1}{2\hbar} \langle X \rangle_\alpha \langle P \rangle_\alpha. \tag{2.141}$$

Então, da equação (2.140) a equação (2.139) pode ainda ser escrita como,

$$C = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2)}, \tag{2.142}$$

e finalmente, a solução (2.134) resulta em

$$\langle x | \alpha \rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2)} \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \alpha x \right] \quad (2.143)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2)} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x - \alpha \right]^2 \right\}. \quad (2.144)$$

Entretanto, da equação (2.57),

$$\langle x | \alpha \rangle = \langle x | D(\alpha) | 0 \rangle = \langle x | e^{a^\dagger \alpha - a \alpha^*} | 0 \rangle, \quad (2.145)$$

e usando as relações (2.127) e (2.128) temos

$$a^\dagger \alpha - a \alpha^* = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{(\alpha - \alpha^*)}{\sqrt{2}} X - \frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{(\alpha + \alpha^*)}{\sqrt{2}} P, \quad (2.146)$$

com a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff, (2.59), obtemos

$$\begin{aligned} \langle x | \alpha \rangle &= \langle x | \exp \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{(\alpha - \alpha^*)}{\sqrt{2}} X - \frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{(\alpha + \alpha^*)}{\sqrt{2}} P \right] | 0 \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha^{*2})} \langle x | e^{\sqrt{m\omega/2\hbar}(\alpha - \alpha^*)X} e^{-i\sqrt{\hbar/2m\omega}(\alpha + \alpha^*)P/\hbar} | 0 \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha^{*2})} e^{\sqrt{m\omega/2\hbar}(\alpha - \alpha^*)x} \langle x | e^{-i\sqrt{\hbar/2m\omega}(\alpha + \alpha^*)P/\hbar} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Observe que $e^{-i\nu P/\hbar}$ é o operador translação, isto é,

$$\langle x | e^{-i\nu P/\hbar} = \langle x - \nu |, \quad (2.148)$$

deste modo temos,

$$\langle x | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha^{*2})} e^{\sqrt{m\omega/2\hbar}(\alpha - \alpha^*)x} \left\langle x - i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha + \alpha^*) \middle| 0 \right\rangle \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha^{*2})} e^{\sqrt{m\omega/2\hbar}(\alpha - \alpha^*)x} \\ &\quad \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} e^{-\sqrt{m\omega/2\hbar}(\alpha + \alpha^*)x} e^{-\frac{1}{4}(\alpha + \alpha^*)^2} \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2)} e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} e^{-\sqrt{2m\omega/\hbar}\alpha x} \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2)} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x - \alpha \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Observa-se assim que a representação de coordenadas do estado coerente $|\alpha\rangle$ a partir de sua definição obtida pelo método do operador deslocamento, (2.151), é idêntica àquela obtida pelo método do operador aniquilação, (2.144).

Analogamente, encontra-se a função de onda na representação de momentos, sendo $\langle p|$ o autoestado do operador P com autovalor p , para o qual vale a relação $\langle p|X = i\hbar(d/dp)\langle p|$. Desta maneira,

$$\langle p|\alpha\rangle = (\pi\hbar m\omega)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + \alpha^2)} \exp\left\{-\left[(2\hbar m\omega)^{-\frac{1}{2}}p + i\alpha\right]^2\right\}. \quad (2.152)$$

As funções de onda (2.151) e (2.152) são exatamente as formas deslocadas das funções de onda do estado fundamental do oscilador harmônico.

A relação (2.150) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle x|\alpha\rangle &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\langle X\rangle_\alpha\langle P\rangle_\alpha/2\hbar} e^{-[(x-\langle X\rangle_\alpha)/2\langle\Delta X\rangle_\alpha]^2 + i\langle P\rangle_\alpha/\hbar} \\ &= e^{i\theta_\alpha} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-[(x-\langle X\rangle_\alpha)/2\langle\Delta X\rangle_\alpha]^2 + i\langle P\rangle_\alpha/\hbar}, \end{aligned} \quad (2.153)$$

onde as equações (2.80), (2.82) e (2.141) foram usadas e onde θ_α é a fase dada pela equação (2.140). Portanto,

$$\begin{aligned} \left|\langle x|\alpha\rangle^2\right| &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-[(x-\langle X\rangle_\alpha)/2\langle\Delta X\rangle_\alpha]^2 + i\langle P\rangle_\alpha/\hbar} e^{-[(x-\langle X\rangle_\alpha)/2\langle\Delta X\rangle_\alpha]^2 - i\langle P\rangle_\alpha/\hbar} \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}[(x-\langle X\rangle_\alpha)/\langle\Delta X\rangle_\alpha]^2}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Isto é, para qualquer estado coerente $|\alpha\rangle$, a função de onda na representação de coordenadas $\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$ é um pacote de onda gaussiano.

2.7 Evolução Temporal

O Hamiltoniano do oscilador harmônico é dado por,

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (2.155)$$

com a equação de autovalores,

$$\begin{aligned} H |n\rangle &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ &= E_n |n\rangle. \end{aligned} \quad (2.156)$$

O observável H não depende explicitamente do tempo, desta maneira a evolução temporal de qualquer estado $|\varphi\rangle$ é dada por

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\varphi\rangle. \quad (2.157)$$

Então, para o estado coerente $|\alpha\rangle$, tem-se

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle \\ &= e^{-iHt/\hbar} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \end{aligned} \quad (2.158)$$

O estado $|\alpha(t)\rangle$ permanece um autovetor do operador a para todo instante de

tempo t , com autovalor $\alpha e^{-i\omega t}$, isto é,

$$\begin{aligned}
a|\alpha(t)\rangle &= \alpha e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \\
&= e^{-i\omega t/2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} a|n\rangle \\
&= e^{-i\omega t/2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\
&= e^{-i\omega t/2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= (\alpha e^{-i\omega t}) e^{-i\omega t/2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= (\alpha e^{-i\omega t}) e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \\
&= \alpha e^{-i\omega t} |\alpha(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{2.159}$$

Além disso, a energia média do oscilador é constante

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(t) | H | \alpha(t) \rangle &= \langle \alpha e^{-i\omega t} | e^{i\omega t/2} H e^{-i\omega t/2} | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \hbar\omega \langle \alpha e^{-i\omega t} | \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \hbar\omega \langle \alpha e^{-i\omega t} | \left((\alpha e^{-i\omega t})^* (\alpha e^{-i\omega t}) + \frac{1}{2} \right) | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) \\
&= \langle \alpha | H | \alpha \rangle.
\end{aligned} \tag{2.160}$$

Os valores médios dos operadores posição e momento, dados pelas relações (2.81),

(2.83), (2.84), (2.85), tornam-se

$$\begin{aligned}
\langle X \rangle_\alpha(t) &= \langle \alpha(t) | X | \alpha(t) \rangle \\
&= \langle \alpha e^{-i\omega t} | e^{i\omega t/2} X e^{-i\omega t/2} | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \langle \alpha e^{-i\omega t} | X | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha e^{-i\omega t} | (a + a^\dagger) | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha e^{-i\omega t} | [\alpha e^{-i\omega t} + (\alpha e^{-i\omega t})^*] | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\omega t}), \tag{2.161}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle_\alpha(t) &= \langle \alpha(t) | P | \alpha(t) \rangle \\
&= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \alpha e^{-i\omega t} | (a - a^\dagger) | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\
&= \sqrt{2m\hbar\omega} \operatorname{Im}(\alpha e^{-i\omega t}), \tag{2.162}
\end{aligned}$$

$$\langle X^2 \rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2m\omega} [2 \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\omega t})^2 + 1], \tag{2.163}$$

$$\langle P^2 \rangle_\alpha = \frac{m\hbar\omega}{2} [1 + 2 \operatorname{Im}(\alpha e^{-i\omega t})^2], \tag{2.164}$$

com os desvios quadráticos médios dados por

$$\begin{aligned}
[\langle \Delta X \rangle_\alpha(t)]^2 &= \langle X^2 \rangle_\alpha(t) - [\langle X \rangle_\alpha(t)]^2 \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}, \tag{2.165}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\langle \Delta P \rangle_\alpha(t)]^2 &= \langle P^2 \rangle_\alpha(t) - [\langle P \rangle_\alpha(t)]^2 \\
&= \frac{m\hbar\omega}{2}. \tag{2.166}
\end{aligned}$$

Como $\langle \Delta X \rangle_\alpha(t)$ e $\langle \Delta P \rangle_\alpha(t)$ não dependem do tempo temos

$$[\langle \Delta X \rangle_\alpha(t)] [\langle \Delta P \rangle_\alpha(t)] = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.167)$$

ou seja, o pacote de onda se mantém como um pacote de onda de mínima incerteza ao longo do tempo.

A função de onda na representação de coordenadas é dada por

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) &= \langle x | \alpha(t) \rangle \\ &= \langle x | e^{-i\omega t/2} | \alpha e^{-i\omega t} \rangle = e^{-i\omega t/2} \langle x | \alpha e^{-i\omega t} \rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} e^{-i\theta_\alpha(t)} e^{i\langle P_\alpha \rangle(t)x/\hbar} \langle x - \langle X_\alpha \rangle(t) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.168)$$

onde as relações (2.149), (2.82) e (2.80) foram usadas. Da relação (2.154),

$$\begin{aligned} |\alpha(x, t)|^2 &= |\langle x | \alpha(t) \rangle|^2 = |\langle x - \langle X_\alpha \rangle(t) | 0 \rangle|^2 \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}[(x - \langle X_\alpha \rangle(t))/\langle \Delta X \rangle_\alpha(t)]^2}, \end{aligned} \quad (2.169)$$

isto é, o pacote de onda permanece gaussiano e sua forma não muda com o tempo.

2.8 Estados Comprimidos

Um estado comprimido $|\xi, \alpha\rangle$ pode ser gerado [28, 35, 52, 57, 58, 59, 63] aplicando-se o produto do operador deslocamento,

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \quad (2.170)$$

e o operador

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}\right], \quad \xi = r e^{i\phi}, \quad (2.171)$$

no vácuo, isto é,

$$|\xi, \alpha\rangle = S(\xi) D(\alpha) |0\rangle, \quad (2.172)$$

com a equação de autovalor

$$b|\xi, \alpha\rangle = \alpha|\xi, \alpha\rangle.$$

As expressões abaixo são verificadas para o operador de compressão $S(\xi)$

$$b = S(\xi) a S^\dagger(\xi), \quad (2.173)$$

$$b^\dagger = S(\xi) a^\dagger S^\dagger(\xi). \quad (2.174)$$

A forma explícita do operador b pode ser encontrada usando a relação (1.47), e fazendo

$A = (\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2)/2$ e $B = a$, isto é,

$$b = a + \frac{1}{1!} \left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}, a \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}, \left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}, a \right] \right] \quad (2.175)$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}, \left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}, \left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}, a \right] \right] \right] + \dots, \quad (2.176)$$

então,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2}{2}, a \right] &= \frac{1}{2} \left\{ \xi [a^{\dagger 2}, a] - \xi^* [a^2, a] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \xi \left\{ -[a, a^\dagger] a^\dagger - a^\dagger [a, a^\dagger] \right\} \\ &= -\xi a^\dagger, \end{aligned} \quad (2.177)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2, -\xi a^\dagger] &= \frac{1}{2} [-\xi^* a^2, -\xi a^\dagger] \\ &= \frac{1}{2} \xi \xi^* [a^2, a^\dagger] \\ &= \xi \xi^* a, \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2, \xi \xi^* a] &= \frac{1}{2} \xi \xi \xi^* [a^{\dagger 2}, a] \\
&= \frac{1}{2} \xi \xi \xi^* (-2a^\dagger) \\
&= -\xi \xi \xi^* a^\dagger,
\end{aligned} \tag{2.179}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2, -\xi \xi \xi^* a^\dagger] &= \frac{1}{2} \xi \xi \xi^* \xi^* 2a \\
&= \xi \xi \xi^* \xi^* a,
\end{aligned} \tag{2.180}$$

e assim por diante. Desta forma, a equação (2.175) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
b &= a + \frac{1}{1!} (-\xi a^\dagger) + \frac{1}{2!} (\xi \xi^* a) + \frac{1}{3!} (-\xi \xi \xi^* a^\dagger) + \frac{1}{4!} (\xi \xi \xi^* \xi^* a) + \dots \\
&= \left[a + \frac{1}{2!} \xi \xi^* a + \frac{1}{4!} \xi \xi \xi^* \xi^* a \right] - \frac{1}{1!} \xi a^\dagger - \frac{1}{3!} \xi \xi \xi^* a^\dagger - \dots \\
&= a \left[1 + \frac{1}{2!} \xi \xi^* + \frac{1}{4!} \xi \xi \xi^* \xi^* + \dots \right] - a^\dagger \left[\frac{1}{1!} \xi + \frac{1}{3!} \xi \xi \xi^* + \dots \right],
\end{aligned} \tag{2.181}$$

como $\xi = r e^{i\phi}$, a equação acima toma a forma

$$\begin{aligned}
b &= a \left[1 + \frac{1}{2!} r^2 + \frac{1}{4!} r^4 + \dots \right] - a^\dagger e^{i\phi} \left[\frac{1}{1!} r + \frac{1}{3!} r^3 + \dots \right] \\
&= a \cosh r - a^\dagger e^{i\phi} \sinh r.
\end{aligned} \tag{2.182}$$

De forma análoga,

$$b^\dagger = a^\dagger \cosh r - a e^{-i\phi} \sinh r. \tag{2.183}$$

2.9 Superposição de Estados Coerentes

Introduzimos uma superposição de estados coerentes da forma [37, 49, 50]

$$|\Psi\rangle = N \left[|\alpha\rangle + e^{i\phi} |-\alpha\rangle \right], \tag{2.184}$$

com o fator de normalização N dado por

$$N = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos \phi e^{-2\alpha^2}}}. \quad (2.185)$$

Para $\phi = 0$, obtemos os estados coerentes pares

$$|\Psi_+\rangle = N_+ [|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle], \quad (2.186)$$

onde

$$N_+ = \frac{1}{\sqrt{2 + 2e^{-2|\alpha|^2}}}.$$

As relações seguintes terão utilidade em diversos cálculos,

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle -\alpha | \hat{n} | -\alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (2.187)$$

$$\langle \alpha | \hat{n} | -\alpha \rangle = \langle -\alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = -|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.188)$$

O estado $|\Psi_+\rangle$ satisfaz a equação de autovetor

$$a^2 |\Psi_+\rangle = \alpha^2 |\Psi_+\rangle. \quad (2.189)$$

O valor médio do operador número no estado coerentes par é dado por,

$$\langle \Psi_+ | \hat{n} | \Psi_+ \rangle = 2N_+^2 |\alpha|^2 [1 - e^{-2|\alpha|^2}], \quad (2.190)$$

e o valor médio do operador número quadrado é

$$\langle \Psi_+ | \hat{n}^2 | \Psi_+ \rangle = 2N_+^2 |\alpha|^2 [1 + |\alpha|^2 - (1 - |\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}], \quad (2.191)$$

onde usamos as relações (2.187) e (2.188) nas equações (2.190) e (2.191).

Substituindo as relações (2.190) e (2.191) em (2.216) encontramos o fator de Mandel para o estado coerente par, isto é,

$$Q = \frac{4|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2}}, \quad (2.192)$$

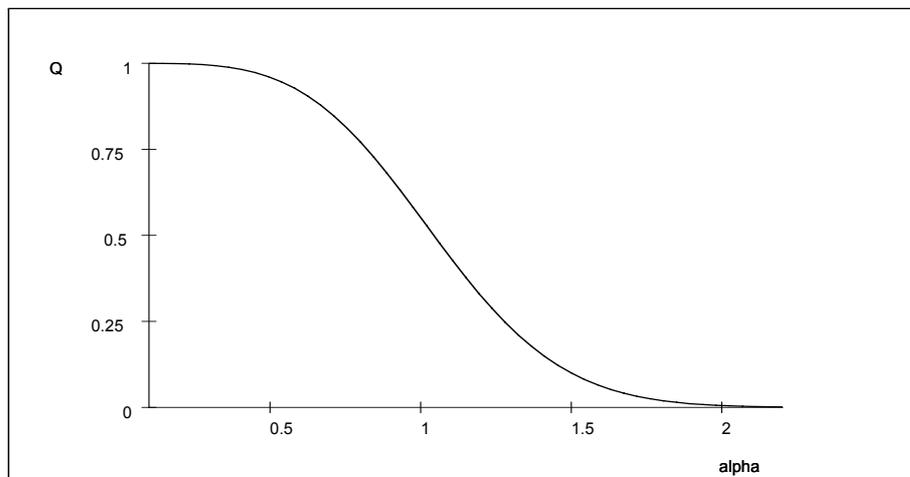


Figura 2.1: Fator de Mandel para estado coerente par.

Na figura (2.1), traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado coerente par como função de α . Observamos que à medida que α cresce a estatística deste estado tende de valores super-Poissoniano à Poissoniano.

Para $\phi = \pi$, obtemos os estados coerentes ímpares,

$$|\Psi_{-}\rangle = N_{-} [|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle], \quad (2.193)$$

onde

$$N_{-} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{-2|\alpha|^2}}}. \quad (2.194)$$

O estado $|\Psi_{-}\rangle$ satisfaz a equação de autovetor

$$a^2 |\Psi_{-}\rangle = \alpha^2 |\Psi_{-}\rangle. \quad (2.195)$$

O valor médio do operador número no estado coerente ímpar é dado por,

$$\langle \Psi_{-} | \hat{n} | \Psi_{-} \rangle = 2N_{-}^2 |\alpha|^2 [1 + e^{-2|\alpha|^2}]. \quad (2.196)$$

O valor médio do operador número quadrado no estado coerente ímpar é dado por

$$\langle \Psi_{-} | \hat{n}^2 | \Psi_{-} \rangle = 2N_{-}^2 |\alpha|^2 [1 + |\alpha|^2 + (1 - |\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}], \quad (2.197)$$

onde usamos as relações (2.187) e (2.188) nas equações (2.196) e (2.197).

Substituindo as relações (2.196) e (2.197) em (2.216) encontramos o fator de Mandel para o estado coerente ímpar, isto é,

$$Q = -\frac{4|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2}}. \quad (2.198)$$

Na figura (2.2), traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado coerente ímpar como função de α . Observamos que à medida que α cresce a estatística deste estado tende de valores sub-Poissonianos à Poissoniano.

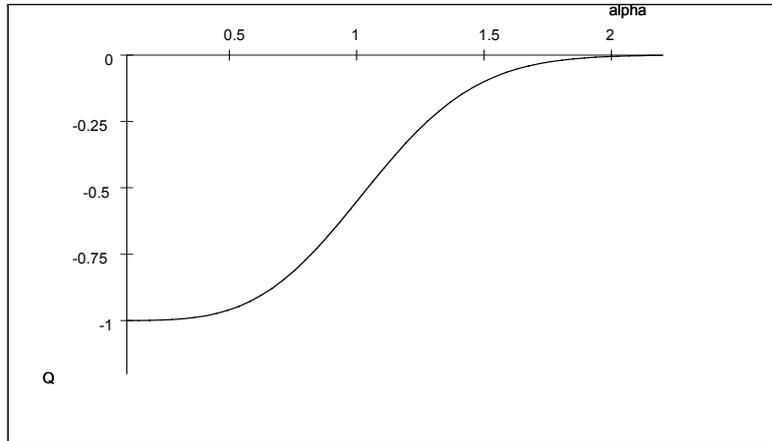


Figura 2.2: Fator de Mandel para estado coerente ímpar

Para $\phi = \pi/2$, obtemos os estados de Yurke-Stoler

$$|\Psi_{YS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle]. \quad (2.199)$$

O estado $|\Psi_{YS}\rangle$ satisfaz a equação de autovetor

$$a^2 |\Psi_{YS}\rangle = \alpha^2 |\Psi_{YS}\rangle. \quad (2.200)$$

O valor médio do operador número no estado de Yurke-Stoler é dado por

$$\langle \Psi_{YS} | \hat{n} | \Psi_{YS} \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.201)$$

O valor médio do operador número quadrado no estado de Yurke-Stoler é dado por

$$\langle \Psi_{YS} | \hat{n}^2 | \Psi_{YS} \rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4, \quad (2.202)$$

onde usamos as relações (2.187) e (2.188) nas equações (2.201) e (2.202).

Substituindo as relações (2.201) e (2.202) em (2.216) encontramos o fator de Mandel para o estado de Yurke-Stoler, isto é,

$$Q = 0, \quad (2.203)$$

portanto o estado de Yurke-Stoler possui estatística Poissoniana.

2.10 Função Q

A função Q é composta pelos elementos da matriz diagonal do operador densidade num estado coerente [47, 57, 64], isto é,

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \rho | \beta \rangle, \quad (2.204)$$

que é regular e não-negativa. A função Q para um estado coerente $|\alpha\rangle$ é dada por

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp \left[- (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \right], \quad \alpha = x_0 + iy_0 \text{ e } \beta = x + iy. \quad (2.205)$$

A função Q para um estado comprimido $|\alpha, r\rangle$ é dada por

$$Q(\beta, \beta^*) = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | D(\alpha) S(r) | 0 \rangle|^2. \quad (2.206)$$

A função Q é útil para calcular valores esperados de produtos dos operadores a e a^\dagger anti-normalmente ordenados, isto é,

$$\langle (a)^n (a^\dagger)^m \rangle = \int \alpha^n \alpha^{*m} Q(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha. \quad (2.207)$$

2.11 Função Característica

A função característica pode ser definida por [47, 57, 63, 64],

$$\chi(\eta) = Tr \left\{ \rho e^{\eta a^\dagger - \eta^* a} \right\}. \quad (2.208)$$

Além disso, define-se a função característica simetricamente e anti-simetricamente ordenada respectivamente, por

$$\chi_N(\eta) = \text{Tr} \left\{ \rho e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \right\}, \quad (2.209)$$

$$\chi_A(\eta) = \text{Tr} \left\{ \rho e^{-\eta^* a} e^{\eta a^\dagger} \right\}. \quad (2.210)$$

Usando a identidade (2.59), as funções características são relacionadas da forma

$$\chi(\eta) = \chi_N(\eta) \exp \left(-\frac{1}{2} |\eta|^2 \right). \quad (2.211)$$

2.12 Função de Wigner

A função de Wigner [47, 57, 59, 63, 64], $w(\beta)$, pode ser definida como uma transformada de Fourier da função característica simetricamente ordenada $\chi_N(\eta)$, ou seja,

$$w(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp[\eta^* \alpha - \eta \alpha^*] \chi(\eta) d^2 \eta, \quad (2.212)$$

que pode assumir valores negativos. Para um estado coerente $|\alpha\rangle = \left| \frac{1}{2}(X_1 + iX_2) \right\rangle$, a função de Wigner é dada por

$$w(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right], \quad (2.213)$$

onde $x_i = x_i - X_i$. Para o estado comprimido

$$w(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \exp \left[x_1^2 e^{-2r} + x_2^2 e^{2r} \right]. \quad (2.214)$$

A função de Wigner pode ser usada para calcular valores esperados de produtos dos operadores a e a^\dagger simetricamente ordenados,

$$\left\langle \left\{ \left(a^\dagger \right)^m \left(a \right)^n \right\} \right\rangle = \int d^2 \beta \beta^{*m} \beta^n w(\beta). \quad (2.215)$$

2.13 Fator de Mandel

O fator de Mandel no estado $|\psi\rangle$ é definido por

$$Q = \frac{(\Delta\hat{n})_\psi^2}{\langle\hat{n}\rangle_\psi} - 1, \quad (2.216)$$

onde,

$$(\Delta\hat{n})_\psi^2 = \langle\hat{n}^2\rangle_\psi - \langle\hat{n}\rangle_\psi^2, \quad (2.217)$$

é a variância, equação (2.76).

Para estudarmos a estatística de um determinado estado, introduzimos o fator de Mandel [46]. Para $Q = 0$ a estatística é dita Poissoniana, para $Q > 0$ a estatística é dita super-Poissoniana e para $-1 \leq Q < 0$ a estatística é dita sub-Poissoniana. Apenas estados não clássicos apresentam estatística sub-Poissoniana.

Para o estado número, o fator de Mandel é dado por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{n^2 - \bar{n}^2}{\bar{n}} - 1 \\ &= -1, \end{aligned} \quad (2.218)$$

portanto o estado número, um estado quântico puro, possui estatística sub-Poissoniana.

Para o estado coerente o fator de Mandel é dado por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{|\alpha|^4 - |\alpha|^2 - |\alpha|^4}{|\alpha|^2} - 1 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.219)$$

ou seja, o estado coerente possui estatística Poissoniana, como vimos em (2.38).

No capítulo seguinte usaremos os resultados e as definições aqui introduzidas, mas num contexto térmico. O processo de termalização utilizará o formalismo da dinâmica de campos térmicos apresentado no capítulo 1.

Capítulo 3

Estados Coerentes em DCT

Neste capítulo estamos interessados em estudar o efeito de temperatura associado com coerência. Neste sentido, usaremos o formalismo de DCT e a definição de estados coerentes introduzidos nos capítulos precedentes. Apresentaremos uma revisão sustentada, principalmente, nas referências [27] e [37]. Neste capítulo e no próximo estaremos usando a notação do capítulo 2 em que $\beta = 1/(\kappa_B T)$.

3.1 Estados Coerentes Térmicos

A dinâmica de campos térmicos permite pensar no uso do vácuo térmico e dos operadores térmicos bosônicos para introduzir a termalização de um estado coerente como [38, 48],

$$\begin{aligned}
 |\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle &= U(\beta)D(\alpha)\tilde{D}(\alpha)|0, \tilde{0}\rangle, \\
 &= D(\alpha; \beta)\tilde{D}(\alpha; \beta)|0(\beta)\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

onde

$$D(\alpha; \beta) = \exp[\alpha a^\dagger(\beta) - \alpha^* a(\beta)] \quad (3.2)$$

$$\tilde{D}(\alpha; \beta) = \exp[\alpha^* \tilde{a}^\dagger(\beta) - \alpha \tilde{a}(\beta)] \quad (3.3)$$

e $U(\beta)$ é a transformação de Bogoliubov definida por

$$U(\beta) = e^{-\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger)}. \quad (3.4)$$

Segue como consequência que

$$a(\beta)|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle = \alpha|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle, \quad (3.5)$$

$$\tilde{a}(\beta)|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle = \alpha^*|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle. \quad (3.6)$$

A média térmica do operador número \hat{n} no estado $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$ é

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | a^\dagger a | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\ &= \langle \alpha, \tilde{\varphi}; \beta | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | \alpha, \tilde{\varphi}; \beta \rangle \\ &= [u(\beta) + v(\beta)]^2 |\alpha|^2 + v^2(\beta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

A média térmica do operador número quadrado no estado $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) + u^3 v |\alpha|^2 (2 + 4|\alpha|^2) \\ &\quad + u^2 v^2 [|\alpha|^2 (2 + 5|\alpha|^2) + (1 + |\alpha|^2)^2] \\ &\quad + v^3 u |\alpha|^2 (5 + 4|\alpha|^2) + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Assim, o estado $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$ produz corretamente os efeitos térmicos em estados coerentes.

3.1.1 Função Característica

Os operadores posição e momento são escritos a partir dos operadores de aniquilação e criação como [38]

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a^\dagger + a), \quad (3.9)$$

$$\tilde{Q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\tilde{a}^\dagger + \tilde{a}), \quad (3.10)$$

$$P = i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a^\dagger - a), \quad (3.11)$$

$$\tilde{P} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\tilde{a}^\dagger - \tilde{a}). \quad (3.12)$$

A função característica no estado coerente termalizado é dada por [39]

$$\begin{aligned} \chi(p, q) &= \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \exp \left[-i \left(pP + qQ + p^* \tilde{P} + q^* \tilde{Q} \right) \right] | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} [q^2 \langle (\Delta Q)^2 \rangle + p^2 \langle (\Delta P)^2 \rangle + pq \langle \Delta P \Delta Q + \Delta Q \Delta P \rangle \right. \\ &\quad + q^{*2} \langle (\Delta \tilde{Q})^2 \rangle + p^{*2} \langle (\Delta \tilde{P})^2 \rangle + p^* q^* \langle \Delta \tilde{P} \Delta \tilde{Q} + \Delta \tilde{Q} \Delta \tilde{P} \rangle \\ &\quad \left. + 2|p|^2 \langle \Delta P \Delta \tilde{P} \rangle + 2|q|^2 \langle \Delta Q \Delta \tilde{Q} \rangle + 2qp^* \langle \Delta Q \Delta \tilde{P} \rangle + 2pq^* \langle \Delta P \Delta \tilde{Q} \rangle \right\} \\ &\quad \times \exp \left[-i \left(p \langle P \rangle + q \langle Q \rangle + p^{*2} \langle \tilde{P} \rangle + q^{*2} \langle \tilde{Q} \rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para explicitar a função característica no estado coerente termalizado, as relações seguintes serão úteis

$$\begin{aligned} a^\dagger a^\dagger &= \left[u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta) \right] \left[u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta) \right] \\ &= u^2(\beta) a^\dagger(\beta) a^\dagger(\beta) + u(\beta) v(\beta) \left[a^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta) + \tilde{a}(\beta) a^\dagger(\beta) \right] \\ &\quad + v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}(\beta), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
aa &= \left[u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \left[u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\
&= u^2(\beta)a(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta) \left[a(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \tilde{a}^\dagger(\beta)a(\beta) \right] \\
&\quad + v^2(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] \left[u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\
&= u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta) \left[a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \tilde{a}(\beta)a(\beta) \right] \\
&\quad + v^2(\beta) \left[1 + \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta) \right],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
a\tilde{a} &= \left[u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \left[u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta) \right] \\
&= u^2(\beta)a(\beta)\tilde{a}(\beta) + u(\beta)v(\beta) \left[1 + a^\dagger(\beta)a(\beta) + \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] \\
&\quad + v^2(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
a\tilde{a}^\dagger &= \left[u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \left[u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta) \right] \\
&= u^2(\beta)a(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + uv \left[a(\beta)a(\beta) + \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\
&\quad + v^2(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)a(\beta),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}a^\dagger &= \left[u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta) \right] \left[u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] \\
&= u^2(\beta)\tilde{a}(\beta)a^\dagger(\beta) + uv \left[\tilde{a}(\beta)\tilde{a}(\beta) + a^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) \right] \\
&\quad + v^2(\beta)a^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^\dagger a^\dagger &= \left[u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta) \right] \left[u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] \\
&= u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + u(\beta)v(\beta) \left[\tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta) + a(\beta)a^\dagger(\beta) \right] \\
&\quad + v^2(\beta)a(\beta)\tilde{a}(\beta),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde as relações (1.65) – (1.68) e as relações de comutação entre os operadores térmicos foram usadas. Tomando-se o valor esperado das equações (3.15) – (3.21) no estado coerente termalizado $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$ obtemos

$$\langle a^\dagger a^\dagger \rangle = u^2(\beta)\alpha^{*2} + 2u(\beta)v(\beta)|\alpha|^2 + v^2(\beta)\alpha^2, \quad (3.22)$$

$$\langle aa \rangle = u^2(\beta)\alpha^2 + 2u(\beta)v(\beta)|\alpha|^2 + v^2(\beta)\alpha^{*2}, \quad (3.23)$$

$$\langle a^\dagger a \rangle = u^2(\beta)|\alpha|^2 + u(\beta)v(\beta)[\alpha^{*2} + \alpha^2] + v^2(\beta)(1 + |\alpha|^2), \quad (3.24)$$

$$\langle a\tilde{a} \rangle = u^2(\beta)\alpha^2 + u(\beta)v(\beta)[1 + 2|\alpha|^2] + v^2(\beta)\alpha^{*2}, \quad (3.25)$$

$$\langle a\tilde{a}^\dagger \rangle = u^2(\beta)|\alpha|^2 + u(\beta)v(\beta)[\alpha^2 + \alpha^{*2}] + v^2(\beta)|\alpha|^2, \quad (3.26)$$

$$\langle \tilde{a}a^\dagger \rangle = u^2(\beta)|\alpha|^2 + u(\beta)v(\beta)[\alpha^{*2} + \alpha^2] + v^2(\beta)|\alpha|^2, \quad (3.27)$$

$$\langle \tilde{a}^\dagger a^\dagger \rangle = u^2(\beta)\alpha^{*2} + u(\beta)v(\beta)[1 + 2|\alpha|^2] + v^2(\beta)\alpha^2, \quad (3.28)$$

onde usamos (3.5) e (3.6).

O valor médio do operador posição (3.9) pode então ser encontrado

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a^\dagger + a) | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) + u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\alpha + \alpha^*) [u(\beta) + v(\beta)], \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde foram usadas as relações (1.65), (1.67) e (3.5). De maneira similar,

$$\langle \tilde{Q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2w}} (\alpha + \alpha^*) [u(\beta) + v(\beta)], \quad (3.30)$$

$$\langle P \rangle = -i\sqrt{\frac{w}{2}} (\alpha - \alpha^*) [u(\beta) + v(\beta)], \quad (3.31)$$

$$\langle \tilde{P} \rangle = -i\sqrt{\frac{w}{2}} (\alpha - \alpha^*) [v(\beta) + u(\beta)]. \quad (3.32)$$

A variância do operador posição calculada no estado coerente térmico é dada por

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle = \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2. \quad (3.33)$$

O valor médio do operador posição quadrado é dado por

$$\langle Q^2\rangle = \frac{1}{2w} \left[\langle a^\dagger a^\dagger\rangle + \langle aa\rangle + 2\langle a^\dagger a\rangle + 1 \right]. \quad (3.34)$$

Substituindo as relações (3.22) – (3.24) na equação (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} \langle Q^2\rangle &= \frac{1}{2w} \{ u^2(\beta) (\alpha^{*2} + \alpha^2 + 2|\alpha|^2) + 2u(\beta)v(\beta)(2|\alpha|^2 \\ &\quad + \alpha^* \alpha^* + \alpha\alpha) + v^2(\beta)[\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2(1 + |\alpha|^2)] + 1 \}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação (3.29) resulta

$$\langle Q\rangle^2 = \frac{1}{2w} (\alpha^{*2} + \alpha^2 + 2|\alpha|^2) [u^2(\beta) + v^2(\beta) + 2u(\beta)v(\beta)]. \quad (3.36)$$

Substituindo as equações (3.35) e (3.36) em (3.33), e após algumas manipulações encontra-se

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle = \frac{1}{2w} \coth\left(\frac{\beta w}{2}\right). \quad (3.37)$$

Analogamente podemos calcular

$$\langle(\Delta P)^2\rangle = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2, \quad (3.38)$$

com

$$\begin{aligned} \langle P^2\rangle &= -\frac{w}{2} \left[\langle aa\rangle + \langle a^\dagger a^\dagger\rangle - 2\langle a^\dagger a\rangle - 1 \right] \\ &= -\frac{w}{2} \{ u^2(\beta) (\alpha^{*2} + \alpha^2 - 2|\alpha|^2) + 2u(\beta)v(\beta)(2|\alpha|^2 \\ &\quad - \alpha^{*2} - \alpha^2) + v^2(\beta)[\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2(1 + |\alpha|^2)] - 1 \}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

e

$$\begin{aligned} \langle P \rangle^2 &= -\frac{w}{2} \{ u^2(\beta) (\alpha^{*2} + \alpha^2 - 2|\alpha|^2) + 2u(\beta)v(\beta)(2|\alpha|^2 - \alpha^2 \\ &\quad - \alpha^{*2}) + v^2(\beta)[\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha|^2] \}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Então,

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle = \frac{1}{2w} \coth \left(\frac{\beta w}{2} \right).$$

Ademais,

$$\langle \Delta P \Delta \tilde{P} \rangle = \langle P \tilde{P} \rangle - \langle P \rangle \langle \tilde{P} \rangle, \quad (3.41)$$

com

$$\begin{aligned} \langle P \tilde{P} \rangle &= \frac{w}{2} \left[\langle a \tilde{a} \rangle - \langle a \tilde{a}^\dagger \rangle - \langle a^\dagger \tilde{a} \rangle + \langle a^\dagger \tilde{a}^\dagger \rangle \right] \\ &= \frac{w}{2} \{ (\alpha - \alpha^*)^2 (u^2(\beta) + v^2(\beta)) \\ &\quad + 2u(\beta)v(\beta)(1 + 2|\alpha|^2 - \alpha^2 - \alpha^{*2}) \}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \langle P \rangle \langle \tilde{P} \rangle &= \frac{w}{2} \{ (\alpha - \alpha^*)^2 (u^2(\beta) + v^2(\beta)) \\ &\quad + 2u(\beta)v(\beta)(1 + 2|\alpha|^2 - \alpha^2 - \alpha^{*2}) \}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

substituindo as equações (3.42) e (3.43) na equação (3.41) resulta

$$\langle \Delta P \Delta \tilde{P} \rangle = \frac{w}{2} \operatorname{cosech} \left(\frac{\beta w}{2} \right). \quad (3.44)$$

De maneira semelhante,

$$\langle \Delta Q \Delta \tilde{Q} \rangle = \langle Q \tilde{Q} \rangle - \langle Q \rangle \langle \tilde{Q} \rangle, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \langle Q \tilde{Q} \rangle &= \frac{1}{2w} \left[\langle a \tilde{a} \rangle + \langle a \tilde{a}^\dagger \rangle + \langle a^\dagger \tilde{a} \rangle + \langle a^\dagger \tilde{a}^\dagger \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2w} \{ (\alpha + \alpha^*)^2 (u^2(\beta) + v^2(\beta)) \\ &\quad + 2u(\beta)v(\beta)(1 + 2|\alpha|^2 + \alpha^2 + \alpha^{*2}) \}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle \langle \tilde{Q} \rangle &= \frac{1}{2w} \{ (\alpha + \alpha^*)^2 (u^2(\beta) + v^2(\beta)) \\ &\quad + 2u(\beta)v(\beta)(1 + 2|\alpha|^2 + \alpha^2 + \alpha^{*2}) \}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Substituindo as equações (3.46) e (3.47) na equação (3.45) obtemos,

$$\langle \Delta Q \Delta \tilde{Q} \rangle = \frac{w}{2} \operatorname{cosech} \left(\frac{\beta w}{2} \right).$$

De forma análoga,

$$\langle \Delta P \Delta Q + \Delta Q \Delta P \rangle = \langle \Delta \tilde{P} \Delta \tilde{Q} + \Delta \tilde{Q} \Delta \tilde{P} \rangle = 0. \quad (3.48)$$

Usando os resultados anteriores, a função característica para o estado coerente térmico é dada por,

$$\begin{aligned} \chi(p, q) &= \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \exp \left[-i \left(pP + qQ + p^* \tilde{P} + q^* \tilde{Q} \right) \right] | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} \Theta \left[\omega (p^2 + p^{*2}) + \frac{(q^2 + q^{*2})}{2} \right] - \Lambda \left(\omega |p|^2 + \frac{|q|^2}{\omega} \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left[-i \left(p \langle P \rangle + q \langle Q \rangle + p^* \langle \tilde{P} \rangle + q^* \langle \tilde{Q} \rangle \right) \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde

$$\Theta = \coth \left(\frac{\beta w}{2} \right), \quad (3.50)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \operatorname{cosech} \left(\frac{\beta w}{2} \right). \quad (3.51)$$

3.2 Estados Comprimidos Térmicos

A implementação do formalismo da DCT em estados comprimidos se dá através da introdução do sistema til, portanto, de acordo com as regras de conjugação til temos

$$\tilde{D}(\alpha) = \exp(\alpha^* \tilde{a}^\dagger - \alpha \tilde{a}), \quad (3.52)$$

$$\tilde{S}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* \tilde{a}^{\dagger 2} - \xi \tilde{a}^2)\right], \quad \xi = r e^{i\phi}, \quad (3.53)$$

e

$$|\tilde{\xi}, \tilde{\alpha}\rangle = \tilde{S}(\xi) \tilde{D}(\alpha) |\tilde{0}\rangle. \quad (3.54)$$

com a equação de autovalor

$$\tilde{b} |\tilde{\xi}, \tilde{\alpha}\rangle = \alpha^* |\tilde{\xi}, \tilde{\alpha}\rangle, \quad (3.55)$$

onde

$$\tilde{b} = \tilde{S}(\xi) a \tilde{S}(\xi)^\dagger = \tilde{a} \cosh r - \tilde{a}^\dagger e^{-i\phi} \sinh r. \quad (3.56)$$

Desta maneira os operadores térmicos são introduzidos a partir dos operadores não térmicos através da transformação de Bogoliubov $U(\beta)$, isto é,

$$\begin{aligned} b(\beta) &= U(\beta) b U^\dagger(\beta) \\ &= U(\beta) \left[a \cosh r - a^\dagger e^{i\phi} \sinh r \right] U^\dagger(\beta) \\ &= \cosh r U(\beta) a U^\dagger(\beta) - U(\beta) a^\dagger U^\dagger(\beta) e^{i\phi} \sinh r \\ &= a(\beta) \cosh r - a^\dagger(\beta) e^{i\phi} \sinh r. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Analogamente,

$$b^\dagger(\beta) = a^\dagger(\beta) \cosh r - a(\beta) e^{-i\phi} \sinh r, \quad (3.58)$$

$$\tilde{b}(\beta) = \tilde{a}(\beta) \cosh r - \tilde{a}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \sinh r, \quad (3.59)$$

$$\tilde{b}^\dagger(\beta) = \tilde{a}^\dagger(\beta) \cosh r - \tilde{a}(\beta) e^{i\phi} \sinh r, \quad (3.60)$$

onde as equações

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (3.61)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (3.62)$$

foram usadas. Multiplicando a equação (3.57) por $\cosh r$ e a equação (3.58) por $e^{i\phi} \sinh r$, e após algumas manipulações, encontramos

$$a(\beta) = b(\beta) \cosh r + b^\dagger(\beta) e^{i\phi} \sinh r. \quad (3.63)$$

De maneira semelhante

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = \tilde{b}^\dagger(\beta) \cosh r + \tilde{b}(\beta) e^{i\phi} \sinh r, \quad (3.64)$$

$$\tilde{a}(\beta) = \tilde{b}(\beta) \cosh r + \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \sinh r, \quad (3.65)$$

$$a^\dagger(\beta) = b^\dagger(\beta) \cosh r + b(\beta) e^{-i\phi} \sinh r. \quad (3.66)$$

Os operadores térmicos satisfazem as equações,

$$b(\beta) \left| \xi, \tilde{\xi}, \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \right\rangle = \alpha \left| \xi, \tilde{\xi}, \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \right\rangle, \quad (3.67)$$

$$\tilde{b}(\beta) \left| \xi, \tilde{\xi}, \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \right\rangle = \alpha^* \left| \xi, \tilde{\xi}, \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \right\rangle. \quad (3.68)$$

As equações (3.67) e (3.68) podem ser reescritas como

$$\left| \xi, \tilde{\xi}, \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \right\rangle = U(\beta) S(\xi) \tilde{S}(\xi) D(\alpha) \tilde{D}(\alpha) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (3.69)$$

3.2.1 Função Característica

A função característica no estado comprimido térmico é dada por

$$\begin{aligned}
\chi(p, q) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}[q^2 \langle (\Delta Q)^2 \rangle + p^2 \langle (\Delta P)^2 \rangle + pq \langle \Delta P \Delta Q + \Delta Q \Delta P \rangle \right. \\
&\quad + q^{*2} \langle (\Delta \tilde{Q})^2 \rangle + p^{*2} \langle (\Delta \tilde{P})^2 \rangle + p^* q^* \langle \Delta \tilde{P} \Delta \tilde{Q} + \Delta \tilde{Q} \Delta \tilde{P} \rangle \\
&\quad \left. + 2|p|^2 \langle \Delta P \Delta \tilde{P} \rangle + 2|q|^2 \langle \Delta Q \Delta \tilde{Q} \rangle + 2qp^* \langle \Delta Q \Delta \tilde{P} \rangle + 2pq^* \langle \Delta P \Delta \tilde{Q} \rangle\right\} \\
&\quad \times \exp\left[-i\left(p \langle P \rangle + q \langle Q \rangle + p^{*2} \langle \tilde{P} \rangle + q^{*2} \langle \tilde{Q} \rangle\right)\right]. \tag{3.70}
\end{aligned}$$

O valor médio do operador posição no estado comprimido térmico é dado por,

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \tilde{\xi}, \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | Q | \xi, \tilde{\xi}, \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle a^\dagger + a \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \langle u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + u(\beta)a^\dagger(\beta) \\
&\quad + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (u(\beta) + v(\beta)) [\alpha (\cosh r + \sinh r e^{-i\phi}) \\
&\quad + \alpha^* (\cosh r + \sinh r e^{i\phi})]. \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{Q} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (u(\beta) + v(\beta)) [\alpha (\cosh r + \sinh r e^{-i\phi}) \\
&\quad + \alpha^* (\cosh r + \sinh r e^{i\phi})], \tag{3.72}
\end{aligned}$$

$$\langle P \rangle = i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (u(\beta) + v(\beta)) \left[\alpha (-\cosh r + \sinh r e^{-i\phi}) + \alpha^* (\cosh r - \sinh r e^{i\phi}) \right], \tag{3.73}$$

$$\langle \tilde{P} \rangle = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (u(\beta) + v(\beta)) \left[\alpha^* (-\cosh r + \sinh r e^{i\phi}) + \alpha (\cosh r - \sinh r e^{-i\phi}) \right]. \tag{3.74}$$

As relações seguintes terão utilidade ulteriormente,

$$\begin{aligned}
a^\dagger a^\dagger &= \left[u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta) \right] \left[u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta) \right] \\
&= \left[u(\beta) \left\{ b^\dagger(\beta) \cosh r + b(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right\} + v(\beta) \left(\tilde{b}(\beta) \cosh r + \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right) \right] \\
&\quad \times \left[u(\beta) \left\{ b^\dagger(\beta) \cosh r + b(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right\} + v(\beta) \left(\tilde{b}(\beta) \cosh r + \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right) \right] \\
&= u^2(\beta) [b^\dagger(\beta) b^\dagger(\beta) \cosh^2 r + \{2b^\dagger(\beta) b(\beta) + 1\} e^{-i\phi} \sinh r \cosh r \\
&\quad + b(\beta) b(\beta) e^{-2i\phi} \sinh^2 r] + 2u(\beta) v(\beta) [b^\dagger(\beta) \tilde{b}(\beta) \cosh^2 r \\
&\quad + b^\dagger(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + b(\beta) \tilde{b}(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \cosh r \\
&\quad + b(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-2i\phi} \sinh^2 r] + v^2(\beta) [\tilde{b}(\beta) \tilde{b}(\beta) \cosh^2 r \\
&\quad + \{2\tilde{b}^\dagger(\beta) \tilde{b}(\beta) + 1\} e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + \tilde{b}^\dagger(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-2i\phi} \sinh^2 r], \tag{3.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aa &= \left[u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \left[u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\
&= \left[u(\beta) \left\{ b(\beta) \cosh r + b^\dagger(\beta) e^{i\phi} \sinh r \right\} + v(\beta) \left(\tilde{b}^\dagger(\beta) \cosh r + \tilde{b}(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right) \right] \\
&\quad \times \left[u(\beta) \left\{ b(\beta) \cosh r + b^\dagger(\beta) e^{i\phi} \sinh r \right\} + v(\beta) \left(\tilde{b}^\dagger(\beta) \cosh r + \tilde{b}(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right) \right] \\
&= u^2(\beta) [b(\beta) b(\beta) \cosh^2 r + \{2b^\dagger(\beta) b(\beta) + 1\} e^{i\phi} \sinh r \cosh r \\
&\quad + b^\dagger(\beta) b^\dagger(\beta) e^{2i\phi} \sinh^2 r] + 2u(\beta) v(\beta) [b(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) \cosh^2 r \\
&\quad + b(\beta) \tilde{b}(\beta) e^{i\phi} \sinh r \cosh r + b^\dagger(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{i\phi} \sinh r \cosh r \\
&\quad + b^\dagger(\beta) \tilde{b}(\beta) e^{2i\phi} \sinh^2 r] + v^2(\beta) [\tilde{b}^\dagger(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) \cosh^2 r \\
&\quad + \{2\tilde{b}^\dagger(\beta) \tilde{b}(\beta) + 1\} e^{i\phi} \sinh r \cosh r + \tilde{b}(\beta) \tilde{b}(\beta) e^{2i\phi} \sinh^2 r], \tag{3.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^\dagger a &= \left[u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta) \right] \left[u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \right] \\
&= \left[u(\beta) \left\{ b^\dagger(\beta) \cosh r + b(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right\} + v(\beta) \left(\tilde{b}(\beta) \cosh r + \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \right) \right] \\
&\quad \times \left[u(\beta) \left\{ b(\beta) \cosh r + b^\dagger(\beta) e^{i\phi} \sinh r \right\} + v(\beta) \left(\tilde{b}^\dagger(\beta) \cosh r + \tilde{b}(\beta) e^{i\phi} \sinh r \right) \right] \\
&= u^2(\beta) \left[b^\dagger(\beta) b(\beta) \cosh^2 r + \left\{ b^\dagger(\beta) b^\dagger(\beta) e^{i\phi} + b(\beta) b(\beta) e^{i\phi} \right\} \sinh r \cosh r \right. \\
&\quad \left. + \left\{ 1 + b^\dagger(\beta) b(\beta) \right\} \sinh^2 r \right] + u(\beta) v(\beta) \left[b^\dagger(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) \cosh^2 r \right. \\
&\quad \left. + b^\dagger(\beta) \tilde{b}(\beta) e^{i\phi} \sinh r \cosh r + b(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \cosh r \right. \\
&\quad \left. + b(\beta) \tilde{b}(\beta) \sinh^2 r + \tilde{b}^\dagger(\beta) b(\beta) \cosh^2 r \right. \\
&\quad \left. + \tilde{b}(\beta) b^\dagger(\beta) e^{i\phi} \cosh r \sinh r + \tilde{b}^\dagger(\beta) b(\beta) e^{-i\phi} \sinh r \cosh r \right. \\
&\quad \left. + \tilde{b}^\dagger(\beta) b^\dagger(\beta) \sinh^2 r \right] + v^2(\beta) \left[\left\{ 1 + \tilde{b}^\dagger(\beta) \tilde{b}(\beta) \right\} \cosh^2 r \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \tilde{b}(\beta) \tilde{b}(\beta) e^{i\phi} + \tilde{b}^\dagger(\beta) \tilde{b}^\dagger(\beta) e^{-i\phi} \right\} \sinh r \cosh r \right. \\
&\quad \left. + \tilde{b}^\dagger(\beta) \tilde{b}(\beta) \sinh^2 r \right], \tag{3.77}
\end{aligned}$$

onde as relações (3.63) – (3.66) e as relações de comutação entre os operadores térmicos foram usadas. Tomando-se o valor esperado das equações acima temos

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger a^\dagger \rangle &= u^2(\beta) \left[\alpha^{*2} \cosh^2 r + \left(2|\alpha|^2 + 1 \right) e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + \alpha^2 e^{-2i\phi} \sinh^2 r \right] \\
&\quad + 2u(\beta) v(\beta) \left[\alpha^{*2} \cosh^2 r + |\alpha|^2 e^{-i\phi} \sinh r \cosh r \right. \\
&\quad \left. + |\alpha|^2 e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + \alpha^2 e^{-2i\phi} \sinh^2 r \right] + v^2(\beta) \left[\alpha^{*2} \cosh^2 r \right. \\
&\quad \left. + \left(2|\alpha|^2 + 1 \right) e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + \alpha^2 e^{-2i\phi} \sinh^2 r \right], \tag{3.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle aa \rangle &= u^2(\beta) \left[\alpha^2 \cosh^2 r + \left(2|\alpha|^2 + 1 \right) e^{i\phi} \sinh r \cosh r + \alpha^{*2} e^{2i\phi} \sinh^2 r \right] \\
&+ 2u(\beta)v(\beta) \left[\alpha^2 \cosh^2 r + |\alpha|^2 e^{i\phi} \sinh r \cosh r \right. \\
&+ \left. |\alpha|^2 e^{i\phi} \sinh r \cosh r + \alpha^{*2} e^{2i\phi} \sinh^2 r \right] + v^2(\beta) \left[\alpha^2 \cosh^2 r \right. \\
&+ \left. \left(2|\alpha|^2 + 1 \right) e^{i\phi} \sinh r \cosh r + \alpha^{*2} e^{2i\phi} \sinh^2 r \right], \tag{3.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n} \rangle &= u^2(\beta) \left[|\alpha|^2 \cosh^2 r + \left(\alpha^{*2} e^{i\phi} + \alpha^2 e^{-i\phi} \right) \sinh r \cosh r + \left(1 + |\alpha|^2 \right) \sinh^2 r \right] \\
&+ u(\beta)v(\beta) \left[|\alpha|^2 \cosh^2 r + \alpha^{*2} e^{i\phi} \sinh r \cosh r \right. \\
&+ \left. \alpha^2 e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + |\alpha|^2 \sinh^2 r + |\alpha|^2 \cosh^2 r \right. \\
&+ \left. \alpha^{*2} e^{i\phi} \cosh r \sinh r + \alpha^2 e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + |\alpha|^2 \sinh^2 r \right] \\
&+ v^2(\beta) \left[\left(1 + |\alpha|^2 \right) \cosh^2 r + \left(\alpha^{*2} e^{i\phi} + \alpha^2 e^{-i\phi} \right) \sinh r \cosh r \right. \\
&+ \left. |\alpha|^2 \sinh^2 r \right]. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

A variância do operador posição calculada no estado comprimido térmico é dada por

$$\langle (\Delta Q)^2 \rangle = \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2. \tag{3.81}$$

O valor médio do operador posição quadrado é dado por

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{1}{2w} \left[\langle a^\dagger a^\dagger \rangle + \langle aa \rangle + 2\langle a^\dagger a \rangle + 1 \right], \tag{3.82}$$

substituindo as relações (3.78) – (3.80) na equação (3.82) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Q^2 \rangle &= \frac{1}{2\omega} \{ u^2(\beta) [[\alpha^2 (\cosh^2 r + e^{-2i\phi} \sinh^2 r + 2e^{i\phi} \sinh r \cosh r) + \alpha^{*2} (\cosh^2 r \\
&\quad + e^{2i\phi} \sinh^2 r + 2e^{i\phi} \sinh r \cosh r) + 2|\alpha|^2 (\cosh^2 r \\
&\quad + (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \sinh r \cosh r + \sinh^2 r)] + v^2(\beta) [\alpha^{*2} (\cosh^2 r \\
&\quad + e^{2i\phi} \sinh^2 r + 2e^{i\phi} \sinh r \cosh r) + \alpha^2 (\cosh^2 r + e^{-2i\phi} \sinh^2 r \\
&\quad + 2e^{-i\phi} \sinh r \cosh r) + 2|\alpha|^2 (\cosh^2 r + \sinh^2 r + (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \sinh r \cosh r) \\
&\quad + 2u(\beta)v(\beta) [|\alpha|^2 (\cosh^2 r + e^{i\phi} \sinh r \cosh r + e^{-i\phi} \sinh r \cosh r \\
&\quad + \sinh^2 r) + \alpha^2 (\cosh^2 r + e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + e^{-i\phi} \sinh r \cosh r \\
&\quad + e^{-2i\phi} \sinh^2 r) + \alpha^{*2} (\cosh^2 r + e^{i\phi} \sinh r \cosh r \\
&\quad + e^{i\phi} \sinh r \cosh r + e^{2i\phi} \sinh^2 r) + |\alpha|^2 (\cosh^2 r \\
&\quad + e^{-i\phi} \sinh r \cosh r + e^{i\phi} \sinh r \cosh r + \sinh^2 r)]. \tag{3.83}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (3.81) o quadrado da relação (3.71) e a relação (3.83), então após algumas manipulações encontra-se [39]

$$\langle (\Delta Q)^2 \rangle = \frac{1}{2\omega} [u^2(\beta) (\cosh 2r + \sinh 2r \cos \phi) + v^2(\beta) (\cosh 2r + \sinh 2r \cos \phi)].$$

Analogamente,

$$\langle (\Delta \tilde{Q})^2 \rangle = \frac{1}{2\omega} [v^2(\beta) (\cosh 2r + \sinh 2r \cos \phi) + u^2(\beta) (\cosh 2r + \sinh 2r \cos \phi)],$$

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega [u^2(\beta) (\cosh 2r - \sinh 2r \cos \phi) + v^2(\beta) (\cosh 2r - \sinh 2r \cos \phi)],$$

$$\langle (\Delta \tilde{P})^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega [v^2(\beta) (\cosh 2r - \sinh 2r \cos \phi) + u^2(\beta) (\cosh 2r - \sinh 2r \cos \phi)],$$

$$\langle \Delta P \Delta Q + \Delta Q \Delta P \rangle = u^2(\beta) \sinh 2r \sin \phi + v^2(\beta) \sinh 2r \sin \phi, \tag{3.84}$$

$$\langle \Delta \tilde{P} \Delta \tilde{Q} + \Delta \tilde{Q} \Delta \tilde{P} \rangle = -v^2(\beta) \sinh 2r \sin \phi - u^2(\beta) \sinh 2r \sin \phi,$$

$$\langle \Delta P \Delta \tilde{P} \rangle = \frac{1}{2} \omega u(\beta) v(\beta) (\cosh 2r - \sinh 2r \cos \phi + \cosh 2r - \sinh 2r \cos 2\phi), \quad (3.85)$$

$$\langle \Delta Q \Delta \tilde{Q} \rangle = \frac{1}{2\omega} u(\beta) v(\beta) (\cosh 2r + \sinh 2r \cos \phi + \cosh 2r + \sinh 2r \cos \phi), \quad (3.86)$$

$$\langle \Delta Q \Delta \tilde{P} \rangle = \langle \Delta P \Delta \tilde{Q} \rangle = -\frac{1}{2} u(\beta) v(\beta) (\sinh 2r \sin \phi + \sinh 2r \sin \phi). \quad (3.87)$$

3.3 Fator de Mandel para os Estados Coerentes Térmicos

Substituindo as relações (3.7) e (3.8) na relação (2.216) encontramos o fator de Mandel para os estados coerentes térmicos

$$\begin{aligned} Q = & \frac{1}{\left(1 + 2\bar{n} + 2(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}\right) |\alpha|^2 + \bar{n}} \{(\bar{n} + 1)^2 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) \\ & + (1 + \bar{n})^{3/2} \bar{n}^{1/2} |\alpha|^2 (2 + 4|\alpha|^2) + (\bar{n} + \bar{n}^2) (|\alpha|^2 (2 + 5|\alpha|^2) \\ & + (1 + |\alpha|^2)^2) + \bar{n}^{3/2} (1 + \bar{n})^{1/2} |\alpha|^2 (5 + 4|\alpha|^2) \\ & + \bar{n}^2 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)] - ((1 + 2\bar{n} \\ & + 2(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}) |\alpha|^2 + \bar{n})^2\} - 1. \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde $\bar{n} = v^2(\beta)$, equação (1.36). Para $T \rightarrow 0$ a relação (3.88) se reduz a $Q = 0$, equação (2.219), que é o resultado conhecido para os estados coerentes a temperatura zero.

Na figura (3.1) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado coerente térmico em função de \bar{n} para $\alpha = 1, 5, 10$ respectivamente. Observamos que este estado possui estatística Poissoniana e o fator de Mandel varia linearmente com o aumento da temperatura. A medida que aumentamos α esta variação torna-se menos acentuada.

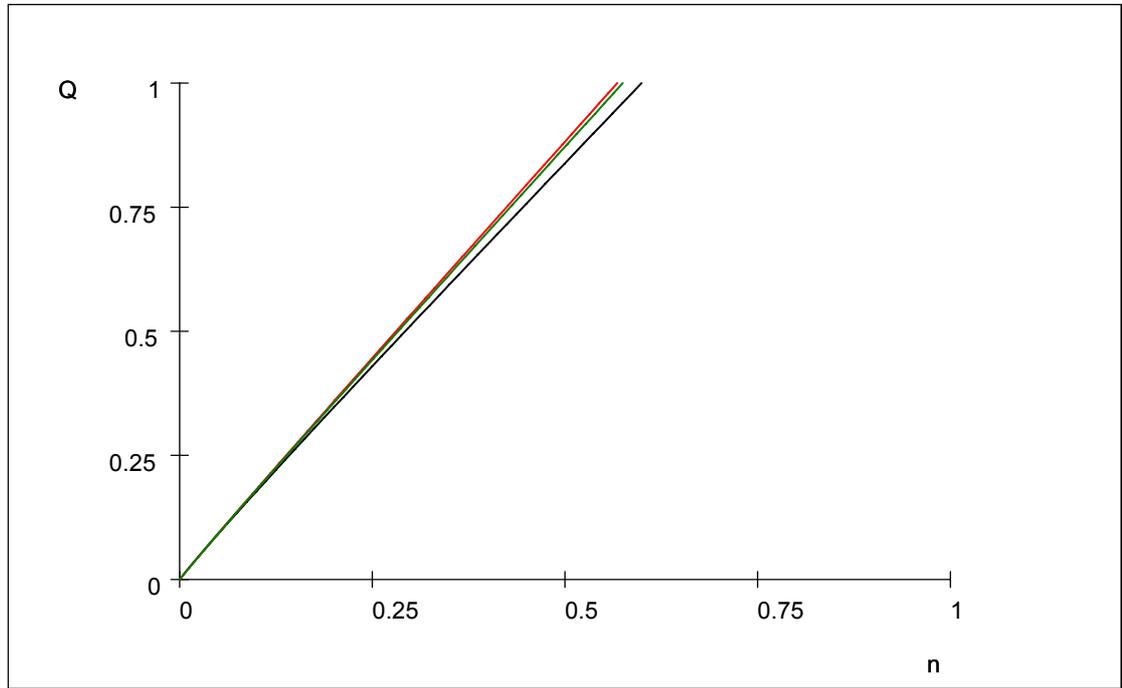


Figura 3.1: Fator de Mandel para estado coerente térmico para $\alpha = 1$ (linha preta), $\alpha = 2$ (linha verde), $\alpha = 5$ (linha vermelha).

No capítulo seguinte, usando a sistemática apresentada neste capítulo, estudaremos as propriedades de estados números introduzidas através do esquema de DCT.

Capítulo 4

Estados de Superposição em DCT

Superposição de estados tem sido extensivamente estudado em óptica quântica, a exemplo de estados número [48] e estados coerentes [49, 68]. Outro importante exemplo estudado na óptica quântica são estados que interpolam entre dois estados, isto é, para limites bem definidos estes estados tendem a um determinado estado [47, 51, 52, 53].

Na seção 4.1 introduziremos a noção de superposição de estados número, seguindo a referência [48], e analisaremos sua contrapartida térmica, estudando em particular a estatística destes estados; na seção 4.2 introduziremos estados coerentes pares térmicos, estados coerentes ímpares térmicos, estados de Yurke-Stoler térmicos e estudaremos o fator de Mandel para estes estados; na seção 4.3 faremos uma revisão dos estados geométricos generalizados; na seção 4.4 introduziremos os estados geométricos generalizados térmicos.

4.1 Superposição de Estados Número em DCT

O caso mais simples de superposição de estados números é dado por $|\psi_1\rangle$ formado pela soma dos estados números $|1\rangle$ e $|0\rangle$ [48], como

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |0\rangle). \quad (4.1)$$

Embora trivial, analisaremos este caso a título de ilustrar nosso procedimento com a DCT.

O valor médio do operador número no estado $|\Psi_1\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \hat{n} | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{2} (\langle 1 | + \langle 0 |) \hat{n} (|1\rangle + |0\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle 1 | \hat{n} | 1 \rangle + \langle 0 | \hat{n} | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{n} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{n} | 1 \rangle) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por outro lado, o valor médio do operador número quadrado no estado $|\Psi_1\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \hat{n}^2 | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{2} (\langle 1 | + \langle 0 |) \hat{n}^2 (|1\rangle + |0\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle 1 | \hat{n}^2 | 1 \rangle + \langle 0 | \hat{n}^2 | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{n}^2 | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{n}^2 | 1 \rangle) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando as relações (4.2) e (4.3) em (2.216) o fator de Mandel para o estado $|\psi_1\rangle$ é dado por

$$Q = -\frac{1}{2}, \quad (4.4)$$

isto é, o estado $|\psi_1\rangle$ possui estatística sub-poissoniana como esperado.

Usando as regras de conjugação til, introduzimos o estado $|\tilde{\psi}_1\rangle$ dado por

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\tilde{1}\rangle + |\tilde{0}\rangle). \quad (4.5)$$

Desta maneira o estado de superposição térmico é introduzido como

$$\begin{aligned} |\Psi_1; \beta\rangle &= U(\beta) |\psi_1\rangle \otimes |\tilde{\psi}_1\rangle \\ &= \frac{1}{2} U(\beta) [|0, \tilde{0}\rangle + |0, \tilde{1}\rangle + |1, \tilde{0}\rangle + |1, \tilde{1}\rangle] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{2} (|0, \tilde{0}; \beta\rangle + |0, \tilde{1}; \beta\rangle + |1, \tilde{0}; \beta\rangle + |1, \tilde{1}; \beta\rangle). \quad (4.7)$$

O valor médio do operador número no estado térmico $|\Psi_1; \beta\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1; \beta | \hat{n} | \Psi_1; \beta \rangle &= \frac{1}{4} [\langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\ &\quad + \langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{1}; \beta \rangle \\ &\quad + \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\ &\quad + \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{1}; \beta \rangle \\ &\quad + \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\ &\quad + \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{1}; \beta \rangle \\ &\quad + \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\ &\quad + \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n} | 1, \tilde{1}; \beta \rangle] \\ &= \frac{1}{4} [6v^2 + 2u^2 + 2uv], \end{aligned} \quad (4.8)$$

com u dado na equação (1.35) e v dado na equação (1.36). O valor médio do operador

número quadrado no estado térmico $|\Psi_1; \beta\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_1; \beta | \hat{n}^2 | \Psi_1; \beta \rangle &= \frac{1}{4} [\langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\
&+ \langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{1}; \beta \rangle \\
&+ \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\
&+ \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 0, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{1}; \beta \rangle \\
&+ \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\
&+ \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{0}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{1}; \beta \rangle \\
&+ \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 0, \tilde{1}; \beta \rangle \\
&+ \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{0}; \beta \rangle + \langle 1, \tilde{1}; \beta | \hat{n}^2 | 1, \tilde{1}; \beta \rangle] \\
&= \frac{1}{4} [10v^4 + 2u^4 + 16u^2v^2 + 2u^3v + 6uv^3]. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

O fator de Mandel, equação (2.216), para o estado de superposição térmico $|\Psi_1; \beta\rangle$ é dado por

$$Q = \frac{11\bar{n} + 11\bar{n}^2 + 1}{8\bar{n} + 2 + 2(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}} - 1, \tag{4.10}$$

onde $\bar{n} = v^2(\beta)$, equação (1.36). Na figura (4.1) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado de superposição térmico $|\Psi_1; \beta\rangle$. Observamos que a medida que a temperatura aumenta a estatística deste estado tende de valores sub-Poissonianos à super-Poissonianos. Para $T \rightarrow 0$ a relação (4.10) se reduz ao resultado encontrado a temperatura zero, equação (4.4).

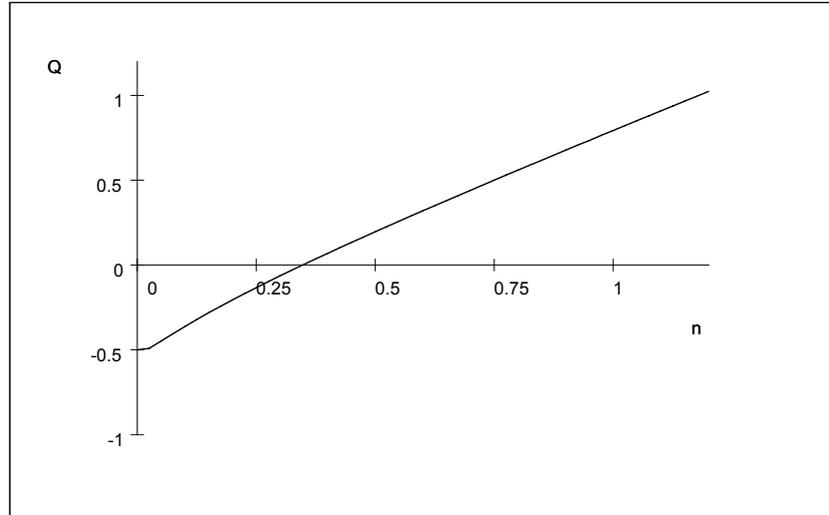


Figura 4.1: Fator de Mandel para o estado $|\Psi_1; \beta\rangle$

Baseado no estado $|\psi_1\rangle$ definimos um estado formado pela soma de N estados número como

$$|\psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^N |n\rangle, \quad (4.11)$$

sendo o correspondente estado til dado por

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{\tilde{m}=0}^N |\tilde{m}\rangle.$$

Usando o formalismo da DCT para introduzir o estado de superposição térmico, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_N; \beta\rangle &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{\tilde{m}=0}^N U(\beta) |n, \tilde{m}\rangle \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{\tilde{m}=0}^N |n, \tilde{m}; \beta\rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A média do operador número no estado $|\Psi_N; \beta\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_N; \beta | \hat{n} | \Psi_N; \beta \rangle &= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n,n'=0}^N \sum_{\tilde{m},\tilde{m}'=0}^N \langle n', \tilde{m}'; \beta | \hat{n} | n, \tilde{m}; \beta \rangle \\
&= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n,n'=0}^N \sum_{\tilde{m},\tilde{m}'=0}^N [\{u^2 n + v^2 (1 + \tilde{m})\} \delta_{n,n'} \delta_{\tilde{m},\tilde{m}'} \\
&\quad + uv (n+1)^{1/2} (\tilde{m}+1)^{1/2} \delta_{n+1,n'} \delta_{\tilde{m}+1,\tilde{m}'} \\
&\quad + uvn^{1/2} \tilde{m}^{1/2} \delta_{n-1,n'} \delta_{\tilde{m}-1,\tilde{m}'}].
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Além disso, a média do operador número quadrado no estado $|\Psi_N; \beta\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_N; \beta | \hat{n}^2 | \Psi_N; \beta \rangle &= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n,n'=0}^N \sum_{\tilde{m},\tilde{m}'=0}^N \langle n', \tilde{m}'; \beta | \hat{n}^2 | n, \tilde{m}; \beta \rangle \\
&= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n,n'=0}^N \sum_{\tilde{m},\tilde{m}'=0}^N [\{u^4 n^2 + v^4 (1 + \tilde{m})^2 + 2u^2 v^2 n (1 + \tilde{m}) \\
&\quad + u^2 v^2 n \tilde{m} + u^2 v^2 (n+1) (1 + \tilde{m})\} \delta_{n,n'} \delta_{\tilde{m},\tilde{m}'} + \{u^3 v (n+1)^{3/2} (1 \\
&\quad + \tilde{m})^{1/2} + uv^3 (n+1)^{1/2} (1 + \tilde{m})^{3/2} + u^3 v (n+1)^{1/2} (1 + \tilde{m})^{3/2} \\
&\quad + uv^3 (n+1)^{1/2} (1 + \tilde{m})^{1/2} (2 + \tilde{m})\} \delta_{n+1,n'} \delta_{\tilde{m}+1,\tilde{m}'} \\
&\quad + \{uv^3 n^{1/2} \tilde{m}^{1/2} \tilde{m} + uv^3 n^{1/2} \tilde{m}^{1/2} (1 + \tilde{m}) + u^3 v n n^{1/2} \tilde{m}^{1/2} \\
&\quad + u^3 v (n-1) n^{1/2} \tilde{m}^{1/2}\} \delta_{n-1,n'} \delta_{\tilde{m}-1,\tilde{m}'} \\
&\quad + u^2 v^2 [(n+1) (n+2) (1 + \tilde{m}) (2 + \tilde{m})]^{1/2} \delta_{n+2,n'} \delta_{\tilde{m}+2,\tilde{m}'} \\
&\quad + u^2 v^2 [n (n-1) \tilde{m} (\tilde{m}-1)]^{1/2} \delta_{n-2,n'} \delta_{\tilde{m}-2,\tilde{m}'}],
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde usamos as relações (1.69) e (1.70).

Na figura (4.2) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado de superposição térmico $|\Psi_N; \beta\rangle$ como função de \bar{n} para $N = 2, 3, 4, 5$ respectivamente. Observamos que para $N = 2, 3, 4$, a medida que a temperatura aumenta, a estatística deste estado tende de

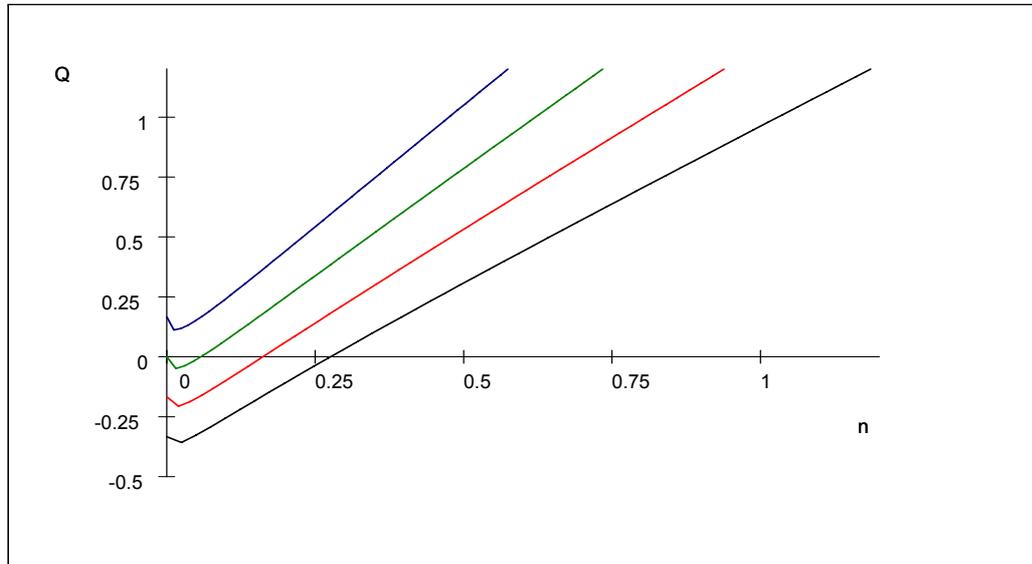


Figura 4.2: Fator de Mandel para o estado de superposição térmico $|\Psi_N; \beta\rangle$ para $N = 2$ (linha preta), $N = 3$ (linha vermelha), $N = 4$ (linha verde), $N = 5$ (linha azul).

valores sub-Poissonianos à super-Poissonianos. Para $N \geq 5$ este estado possui estatística super-Poissoniana.

4.2 Superposição de Estados Coerentes em DCT

4.2.1 Estados Coerentes Pares Térmicos

Usando o formalismo da DCT, introduzimos os estados coerentes pares térmicos a partir da conjugação til, resultando em

$$|\tilde{\Psi}_+\rangle = \tilde{N}_+ [|\tilde{\alpha}\rangle + |-\tilde{\alpha}\rangle], \quad (4.15)$$

com

$$\tilde{N}_+ = \frac{1}{\sqrt{2 + 2e^{-2|\alpha|^2}}}, \quad (4.16)$$

e

$$\tilde{a}^2 \left| \tilde{\Psi}_+ \right\rangle = \alpha^{*2} \left| \tilde{\Psi}_+ \right\rangle. \quad (4.17)$$

Introduzimos o estado coerente par térmico como,

$$\begin{aligned} |\Psi_+; \beta\rangle &= U(\beta) |\Psi_+\rangle \otimes \left| \tilde{\Psi}_+ \right\rangle \\ &= N_+ [|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle + |\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta\rangle + |-\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle + |-\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta\rangle], \end{aligned}$$

com a constante de normalização dada por

$$N_+ = \frac{1}{\sqrt{4 + 8e^{-2|\alpha|^2} + 4e^{-4|\alpha|^2}}}. \quad (4.18)$$

O estado coerente par térmico satisfaz as equações de autovalor

$$\tilde{a}^2(\beta) |\Psi_+; \beta\rangle = \alpha^{*2} |\Psi_+; \beta\rangle, \quad (4.19)$$

$$a^2(\beta) |\Psi_+; \beta\rangle = \alpha^2 |\Psi_+; \beta\rangle. \quad (4.20)$$

As relações seguintes terão utilidade em diversos cálculos,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= u^2 |\alpha|^2 + v^2(1 + |\alpha|^2) + uv(\alpha^{*2} + \alpha^2) \\ &= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= u^2 |\alpha|^2 + v^2(1 + |\alpha|^2) - uv(\alpha^{*2} + \alpha^2) \\ &= \langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-2|\alpha|^2} \left[u^2 |\alpha|^2 + uv(\alpha^{*2} - \alpha^2) + v^2(1 - |\alpha|^2) \right] \\ &= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-2|\alpha|^2} \left[-u^2 |\alpha|^2 + uv (\alpha^{*2} - \alpha^2) + v^2 (1 + |\alpha|^2) \right] \\
&= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-2|\alpha|^2} \left[-u^2 |\alpha|^2 + uv (\alpha^2 - \alpha^{*2}) + v^2 (1 + |\alpha|^2) \right] \\
&= \langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-2|\alpha|^2} \left[u^2 |\alpha|^2 + uv (\alpha^2 - \alpha^{*2}) + v^2 (1 - |\alpha|^2) \right] \\
&= \langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-4|\alpha|^2} \left[-u^2 |\alpha|^2 + uv (\alpha^2 + \alpha^{*2}) + v^2 (1 - |\alpha|^2) \right] \\
&= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-4|\alpha|^2} \left[-u^2 |\alpha|^2 - uv (\alpha^2 + \alpha^{*2}) + v^2 (1 - |\alpha|^2) \right] \\
&= \langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n} | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) + 2 |\alpha|^2 u^3 v [1 + 2 |\alpha|^2] \\
&\quad + 2 |\alpha|^2 uv^3 [3 + 2 |\alpha|^2] + u^2 v^2 [2 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) \\
&\quad + 3 |\alpha|^4 + (1 + |\alpha|^2)^2] + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)] \\
&= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) - 2 |\alpha|^2 u^3 v [1 + 2 |\alpha|^2] \\
&\quad - 2 |\alpha|^2 uv^3 [3 + 2 |\alpha|^2] + u^2 v^2 [2 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) \\
&\quad + 3 |\alpha|^4 + (1 + |\alpha|^2)^2] + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)] \\
&= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-2|\alpha|^2} \{ u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) + u^2 v^2 [2 |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \\
&\quad + 1] + v^4 [1 - |\alpha|^2 (3 - |\alpha|^2)] \} \\
&= \langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\
&= \langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle \\
&= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-2|\alpha|^2} \{ -u^4 |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) + u^2 v^2 [-2 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) \\
&\quad + 1] + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)] \} \\
&= \langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle \\
&= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle \\
&= \langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle, \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-4|\alpha|^2} \{ -u^4 |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) + 2u^3 v [|\alpha|^2 (1 \\
&\quad - |\alpha|^2) - |\alpha|^4] + 2uv^3 [|\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \\
&\quad + |\alpha|^2 (2 - |\alpha|^2)] + u^2 v^2 [-2 |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \\
&\quad + 3 |\alpha|^4 + (1 - |\alpha|^2)^2] + v^4 [1 - |\alpha|^2 (3 - |\alpha|^2)] \} \\
&= \langle -\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle, \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle &= u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) - 2 |\alpha|^2 u^3 v [1 + 2 |\alpha|^2] \\
&\quad + 2 |\alpha|^2 u v^3 [3 + 2 |\alpha|^2] + u^2 v^2 [2 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) \\
&\quad + 3 |\alpha|^4 + (1 + |\alpha|^2)^2] + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)], \quad (4.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta \rangle &= e^{-4|\alpha|^2} \{ -u^4 |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) + 2u^3 v [-|\alpha|^2 (1 \\
&\quad - |\alpha|^2) + |\alpha|^4] - 2uv^3 [|\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \\
&\quad + |\alpha|^2 (2 - |\alpha|^2)] + u^2 v^2 [-2|\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \\
&\quad + 3|\alpha|^4 + (1 - |\alpha|^2)^2] + v^4 [1 - |\alpha|^2 (3 - |\alpha|^2)] \} \\
&= \langle \alpha, -\tilde{\alpha}; \beta | \hat{n}^2 | -\alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

O valor médio do operador número no estado coerente par térmico é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_+; \beta | \hat{n} | \Psi_+; \beta \rangle &= 4N_+^2 [u^2 |\alpha|^2 + v^2 (1 + |\alpha|^2)] + 2v^2 e^{-2|\alpha|^2} \\
&\quad + e^{-4|\alpha|^2} (-u^2 |\alpha|^2 + v^2 (1 - |\alpha|^2)), \quad (4.36)
\end{aligned}$$

onde usamos as relações (4.21) – (4.28). O valor médio do operador número quadrado no estado par térmico é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_+; \beta | \hat{n}^2 | \Psi_+; \beta \rangle &= 4N_+^2 \{ u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) + u^2 v^2 [4 |\alpha|^2 \\
&\quad + 6 |\alpha|^4 + 1] + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)] \\
&\quad + 2e^{-2|\alpha|^2} [u^4 |\alpha|^4 + u^2 v^2 (1 - 2|\alpha|^4) \\
&\quad + v^4 (1 + |\alpha|^4)] + e^{-4|\alpha|^2} [-u^4 |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \\
&\quad + u^2 v^2 (1 + 6|\alpha|^4 - 4|\alpha|^2) \\
&\quad + v^4 (1 - |\alpha|^2 (3 - |\alpha|^2))] \}, \quad (4.37)
\end{aligned}$$

onde usamos as relações (4.29) – (4.35). Fazendo $\alpha \in \Re$ nas equações (4.36) e (4.37) e $v^2 = \bar{n}$, (1.36), resulta em

$$\begin{aligned} \langle \Psi_+; \beta | \hat{n} | \Psi_+; \beta \rangle &= 4N_+^2 [\alpha^2 + 2\alpha^2 \bar{n} + e^{-4\alpha^2} (-\alpha^2 + \bar{n} - 2\bar{n}\alpha^2) \\ &\quad + 2\bar{n}e^{-2\alpha^2} + \bar{n}], \end{aligned} \quad (4.38)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \Psi_+; \beta | \hat{n}^2 | \Psi_+; \beta \rangle &= 4N_+^2 [(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) \\ &\quad + (1 + \bar{n}) \bar{n} (1 + 4\alpha^2 + 6\alpha^4) + \bar{n}^2 \{1 + \alpha^2 (3 + \alpha^2)\}] \\ &\quad + e^{-4\alpha^2} \{-(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2) + (1 + \bar{n}) \bar{n} (1 - 4\alpha^2 \\ &\quad + 6\alpha^4) + \bar{n}^2 \{1 - \alpha^2 (3 - \alpha^2)\}\} + 2e^{-2\alpha^2} \{(1 + \bar{n})^2 \alpha^4 \\ &\quad + (1 + \bar{n}) \bar{n} (1 - 2\alpha^4) + \bar{n}^2 (1 + \alpha^4)\}], \end{aligned} \quad (4.39)$$

com

$$N_+ = \frac{1}{\sqrt{4 + 8e^{-2\alpha^2} + 4e^{-4\alpha^2}}}. \quad (4.40)$$

De acordo com as relações (4.38) e (4.39) o fator de Mandel para o estado coerente par térmico, com $\alpha \in \Re$, é dado por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\alpha^2 + 8\alpha^2 \bar{n} + e^{-4\alpha^2} (-4\alpha^2 + 4\bar{n} - 8\bar{n}\alpha^2) + 8\bar{n}e^{-2\alpha^2} + 4\bar{n}} [\\ &\quad 4(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) + 4(1 + \bar{n}) \bar{n} (1 + 4\alpha^2 + 6\alpha^4) + 4\bar{n}^2 \{1 + \alpha^2 (3 + \alpha^2)\} \\ &\quad + e^{-4\alpha^2} \{-4(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2) + 4(1 + \bar{n}) \bar{n} (1 - 4\alpha^2 + 6\alpha^4) + 4\bar{n}^2 [1 \\ &\quad - \alpha^2 (3 - \alpha^2)]\} + e^{-2\alpha^2} \{8(1 + \bar{n})^2 \alpha^4 + (1 + \bar{n}) \bar{n} (8 - 16\alpha^4) + \bar{n}^2 (8 + 8\alpha^4)\} \\ &\quad - (4 + 8e^{-2\alpha^2} + 4e^{-4\alpha^2})^{-1/2} ([4\alpha^2 + 8\alpha^2 \bar{n} \\ &\quad + e^{-4\alpha^2} (-4\alpha^2 + 4\bar{n} - 8\bar{n}\alpha^2) + 8\bar{n}e^{-2\alpha^2} + 4\bar{n}]^2) - 1, \end{aligned} \quad (4.41)$$

com $\bar{n} = v^2(\beta)$, (1.36). Para $T \rightarrow 0$ a relação (4.41) se reduz à equação (2.192), que é o resultado obtido para temperatura zero.

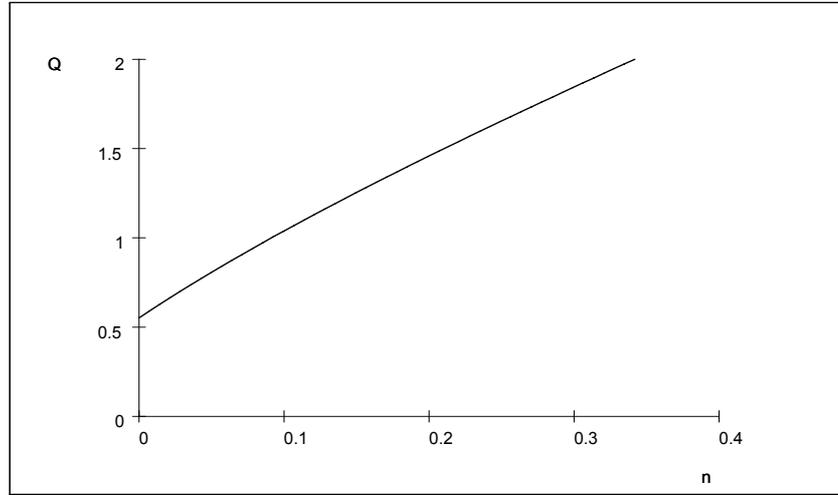


Figura 4.3: Fator de Mandel para estado coerente par térmico $\alpha = 1$.

Na figura (4.3) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o coerente par térmico como função de \bar{n} para $\alpha = 1$. Observamos que este estado possui estatística Poissoniana e o fator de Mandel varia linearmente com o aumento da temperatura. A medida que aumentamos α esta variação torna-se mais acentuada.

4.2.2 Estados Coerentes Ímpares Térmicos

De acordo com a DCT podemos definir os estados coerentes ímpares térmicos introduzindo o estado til

$$|\tilde{\Psi}_-\rangle = \tilde{N}_- [|\tilde{\alpha}\rangle - |-\tilde{\alpha}\rangle], \quad (4.42)$$

com

$$\tilde{N}_- = \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{-2|\alpha|^2}}}, \quad (4.43)$$

e

$$\tilde{a}^2 |\tilde{\Psi}_-\rangle = \alpha^{*2} |\tilde{\Psi}_-\rangle. \quad (4.44)$$

Introduzimos o estado coerente ímpar térmico como,

$$\begin{aligned} |\Psi_{-}; \beta\rangle &= U(\beta) |\Psi_{-}\rangle \otimes |\tilde{\Psi}_{-}\rangle \\ &= N_{-} [|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle - |\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta\rangle - |-\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle + |-\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta\rangle], \end{aligned}$$

com a constante de normalização dada por

$$N_{-} = \frac{1}{\sqrt{4 - 8e^{-2|\alpha|^2} + 4e^{-4|\alpha|^2}}}. \quad (4.45)$$

O estado coerente ímpar térmico satisfaz as equações de autovalor

$$\tilde{a}^2(\beta) |\Psi_{-}; \beta\rangle = \alpha^{*2} |\Psi_{-}; \beta\rangle, \quad (4.46)$$

$$a^2(\beta) |\Psi_{-}; \beta\rangle = \alpha^2 |\Psi_{-}; \beta\rangle. \quad (4.47)$$

O valor médio do operador número no estado coerente ímpar térmico é dado por

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{-}; \beta | \hat{n} | \Psi_{-}; \beta \rangle &= 4N_{-}^2(\alpha) [u^2 |\alpha|^2 + v^2 (1 + |\alpha|^2) - 2v^2 e^{-2|\alpha|^2} \\ &\quad + e^{-4|\alpha|^2} (-u^2 |\alpha|^2 + v^2 (1 - |\alpha|^2))], \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde usamos as relações (4.21) – (4.28). O valor médio do operador número quadrado no estado coerente ímpar térmico é dado por,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{-}; \beta | \hat{n}^2 | \Psi_{-}; \beta \rangle &= 4N_{-}^2(\alpha) \{ u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) + u^2 v^2 [4 |\alpha|^2 \\ &\quad + 6 |\alpha|^4 + 1] + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)] \\ &\quad - 2e^{-2|\alpha|^2} [u^4 |\alpha|^4 + u^2 v^2 (1 - 2 |\alpha|^4) \\ &\quad + v^4 (1 + |\alpha|^4)] + e^{-4|\alpha|^2} [-u^4 |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \\ &\quad + u^2 v^2 (1 + 6 |\alpha|^4 - 4 |\alpha|^2) \\ &\quad + v^4 (1 - |\alpha|^2 (3 - |\alpha|^2))] \}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde usamos as relações (4.29)–(4.35). Fazendo $\alpha \in \Re$ nas equações (4.48), (4.49) e $v^2 = \bar{n}$, (1.36), resulta em

$$\langle \Psi_-; \beta | \hat{n} | \Psi_-; \beta \rangle = 4N_-^2(\alpha) [\alpha^2 + 2\alpha^2\bar{n} + e^{-4\alpha^2}(-\alpha^2 + \bar{n} - 2\bar{n}\alpha^2) - 2\bar{n}e^{-2\alpha^2} + \bar{n}], \quad (4.50)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \Psi_-(\alpha, \tilde{\alpha}; \beta) | \hat{n}^2 | \Psi_-(\alpha, \tilde{\alpha}; \beta) \rangle &= 4N_-^2(\alpha) [(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) \\ &\quad + (1 + \bar{n}) \bar{n} (1 + 4\alpha^2 + 6\alpha^4) + \bar{n}^2 \{1 + \alpha^2 (3 + \alpha^2)\} \\ &\quad + e^{-4\alpha^2} \{- (1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2) + (1 + \bar{n}) \bar{n} (1 - 4\alpha^2 \\ &\quad + 6\alpha^4) + \bar{n}^2 \{1 - \alpha^2 (3 - \alpha^2)\}\} - 2e^{-2\alpha^2} \{(1 + \bar{n})^2 \alpha^4 \\ &\quad + (1 + \bar{n}) \bar{n} (1 - 2\alpha^4) + \bar{n}^2 (1 + \alpha^4)\}], \end{aligned} \quad (4.51)$$

com

$$N_- = \frac{1}{\sqrt{4 - 8e^{-2\alpha^2} + 4e^{-4\alpha^2}}}. \quad (4.52)$$

De acordo com as relações (4.50) e (4.51) o fator de Mandel para o estado coerente ímpar térmico, com $\alpha \in \Re$, é dado por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\alpha^2 + 8\alpha^2\bar{n} + e^{-4\alpha^2}(-4\alpha^2 + 4\bar{n} - 8\bar{n}\alpha^2) - 8\bar{n}e^{-2\alpha^2} + 4\bar{n}} [\\ &\quad 4(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) + 4(1 + \bar{n}) \bar{n} (1 + 4\alpha^2 + 6\alpha^4) + 4\bar{n}^2 \{1 + \alpha^2 (3 + \alpha^2)\} \\ &\quad + e^{-4\alpha^2} \{-4(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2) + 4(1 + \bar{n}) \bar{n} (1 - 4\alpha^2 + 6\alpha^4) + 4\bar{n}^2 [1 \\ &\quad - \alpha^2 (3 - \alpha^2)]\} - e^{-2\alpha^2} \{8(1 + \bar{n})^2 \alpha^4 + (1 + \bar{n}) \bar{n} (8 - 16\alpha^4) + \bar{n}^2 (8 + 8\alpha^4)\} \\ &\quad - [4 - 8e^{-2\alpha^2} + 4e^{-4\alpha^2}]^{-1} (4\alpha^2 + 8\alpha^2\bar{n} \\ &\quad + e^{-4\alpha^2} (-4\alpha^2 + 4\bar{n} - 8\bar{n}\alpha^2) - 8\bar{n}e^{-2\alpha^2} + 4\bar{n})^2] - 1. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Para $T \rightarrow 0$ a relação (4.53) se reduz a equação (2.198), que é o resultado obtido para temperatura zero.

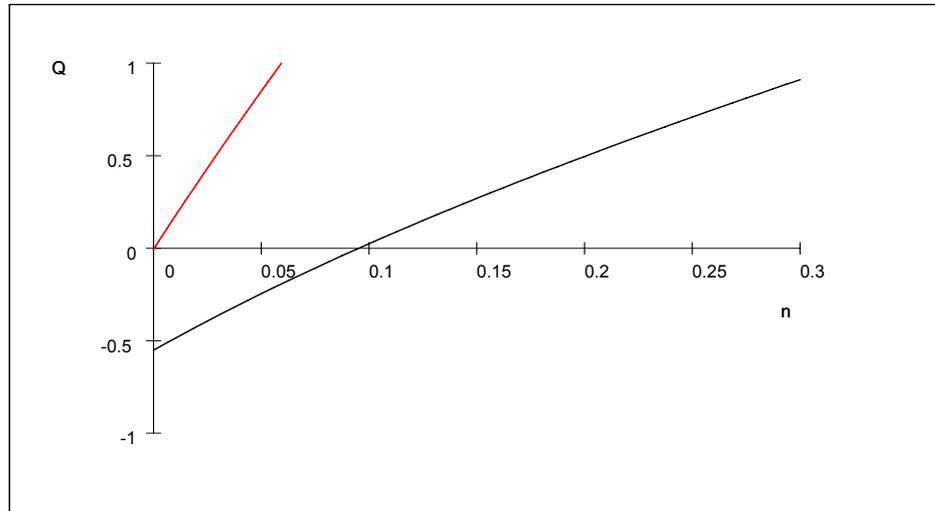


Figura 4.4: Fator de Mandel para estado coerente ímpar térmico $\alpha = 1$ (linha preta) e $\alpha = 2$ (linha vermelha).

Na figura (4.4) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado coerente ímpar térmico como função de \bar{n} para $\alpha = 1, 2$. Observamos que para $\alpha = 1$ a medida que a temperatura aumenta a estatística deste estado tende de valores sub-Poissonianos à super-Poissonianos. Para $\alpha \geq 2$ este estado possui estatística super-Poissoniana. Podemos também observar que o fator de Mandel varia linearmente com o aumento da temperatura. À medida que aumentamos α esta variação torna-se mais acentuada.

4.2.3 Estados de Yurke-Stoler Térmicos

Usaremos o formalismo da DCT para introduzir os estados de Yurke-Stoler térmicos, desta forma definimos

$$|\tilde{\Psi}_{YS}\rangle = \frac{1}{2} [|\tilde{\alpha}\rangle - i|-\tilde{\alpha}\rangle], \quad (4.54)$$

e

$$\tilde{a}^2 |\tilde{\Psi}_{YS}\rangle = \alpha^{*2} |\tilde{\Psi}_{YS}\rangle. \quad (4.55)$$

Introduzimos o estado de Yurke-Stoler térmico como,

$$|\Psi_{YS}; \beta\rangle = \frac{1}{4} [|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle - i|\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta\rangle + i|-\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle + |-\alpha, -\tilde{\alpha}; \beta\rangle].$$

O estado de Yurke-Stoler térmico satisfaz as equações de autovalor

$$\tilde{a}^2(\beta) |\Psi_{YS}; \beta\rangle = \alpha^{*2} |\Psi_{YS}; \beta\rangle, \quad (4.56)$$

$$a^2(\beta) |\Psi_{YS}; \beta\rangle = \alpha^2 |\Psi_{YS}; \beta\rangle. \quad (4.57)$$

O valor médio do operador número no estado de Yurke-Stoler térmico é dado por

$$\langle \Psi_{YS}; \beta | \hat{n} | \Psi_{YS}; \beta \rangle = u^2 |\alpha|^2 + v^2 (1 + |\alpha|^2) + e^{-4|\alpha|^2} uv (\alpha^{*2} + \alpha^2), \quad (4.58)$$

onde usamos as relações (4.21) – (4.28). O valor médio do operador número quadrado no estado de Yurke-Stoler térmico é dado por,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{YS}; \beta | \hat{n}^2 | \Psi_{YS}; \beta \rangle &= u^4 |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) + u^2 v^2 [4 |\alpha|^2 \\ &\quad + 6 |\alpha|^4 + 1] + v^4 [1 + |\alpha|^2 (3 + |\alpha|^2)] \\ &\quad + 2e^{-4|\alpha|^2} [u^3 v (|\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) - |\alpha|^4) \\ &\quad + uv^3 (|\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) + |\alpha|^2 (2 - |\alpha|^2))], \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde usamos as relações (4.29) – (4.35). Fazendo $\alpha \in \Re$ nas equações (4.58), (4.59) e $v^2 = \bar{n}$, (1.36), resulta

$$\langle \Psi_{YS}; \beta | \hat{n} | \Psi_{YS}; \beta \rangle = (1 + \bar{n}) \alpha^2 + \bar{n} (1 + \alpha^2) + 2\alpha^2 e^{-4\alpha^2} (\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}, \quad (4.60)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{YS}(\alpha, \tilde{\alpha}; \beta) | \hat{n}^2 | \Psi_{YS}(\alpha, \tilde{\alpha}; \beta) \rangle &= (1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) + (1 + \bar{n}) \bar{n} [4\alpha^2 \\
&+ 6\alpha^4 + 1] + \bar{n}^2 [1 + \alpha^2 (3 + \alpha^2)] \\
&+ 2e^{-4\alpha^2} [(1 + \bar{n})^{3/2} \bar{n}^{1/2} (\alpha^2 (1 - \alpha^2) - \alpha^4) \\
&+ (1 + \bar{n})^{1/2} \bar{n}^{3/2} (\alpha^2 (1 - \alpha^2) \\
&+ \alpha^2 (2 - \alpha^2))]. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

De acordo com as relações (4.60) e (4.61) o fator de Mandel para o estado de Yurke-Stoler térmico, com $\alpha \in \mathfrak{R}$, é dado por

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{(1 + \bar{n}) \alpha^2 + \bar{n} (1 + \alpha^2) + 2\alpha^2 e^{-4\alpha^2} (\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}} [(1 + \bar{n})^2 \alpha^2 (1 + \alpha^2) \\
&+ (1 + \bar{n}) \bar{n} [4\alpha^2 + 6\alpha^4 + 1] + \bar{n}^2 [1 + \alpha^2 (3 + \alpha^2)] \\
&+ 2e^{-4\alpha^2} [(1 + \bar{n})^{3/2} \bar{n}^{1/2} (\alpha^2 (1 - \alpha^2) - \alpha^4) \\
&+ (1 + \bar{n})^{1/2} \bar{n}^{3/2} (\alpha^2 (1 - \alpha^2) + \alpha^2 (2 - \alpha^2))] - \\
&\left. \left((1 + \bar{n}) \alpha^2 + \bar{n} (1 + \alpha^2) + 2\alpha^2 e^{-4\alpha^2} (\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2} \right)^2 \right] - 1. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Para $T \rightarrow 0$ a relação (4.62) se reduz a equação (2.203), que é o resultado obtido para temperatura zero.

Na figura (4.5), traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado de Yurke-Stoler térmico para $\alpha = 1$ como função de \bar{n} . Observamos que este estado possui estatística Poissoniana e o fator de Mandel varia linearmente com o aumento da temperatura.

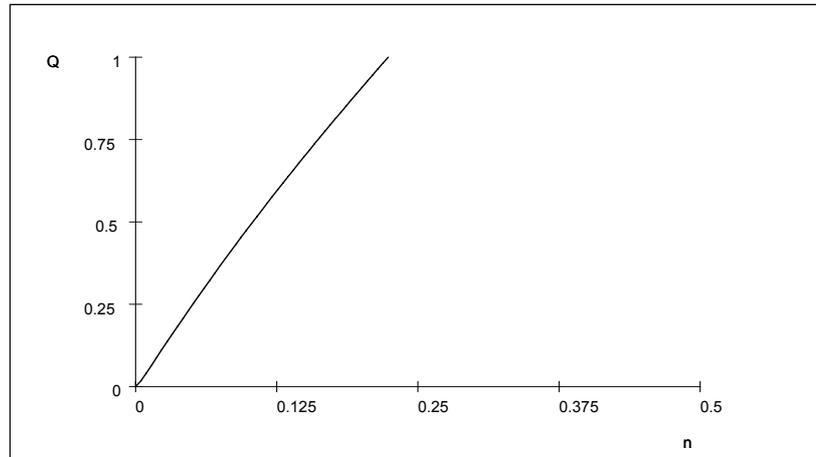


Figura 4.5: Fator de Mandel para estado de Yurke-Stoler térmico para $\alpha = 1$

4.3 Estado Geométrico Generalizado

Define-se os estados geométricos generalizados [53] como

$$|Y, M\rangle = \lambda_0 \sum_{n=0}^M Y^{n/2} |n\rangle, \quad (4.63)$$

onde $Y = |Y| e^{2i\psi}$ é um número complexo e a constante de normalização é dada por

$$|\lambda_0|^2 = \frac{1 - |Y|}{1 - |Y|^{M+1}}, \quad |Y| \neq 1. \quad (4.64)$$

Para $|Y| < 1$, e $M \rightarrow \infty$ o operador densidade para o estado geométrico generalizado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{Y,\psi} &= \lim_{M \rightarrow \infty} |Y, M\rangle \langle Y, M| \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} |\lambda_0|^2 \sum_{n,m=0}^M Y^{n/2} Y^{*m/2} |n\rangle \langle m|. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Assumindo que ψ é uma fase aleatória e fazendo a média sobre o estado (4.65) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\rho}_{Y,\psi} \rangle_\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}_{Y,\psi} d\psi \\
&= \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n,m=0}^M |Y|^{(n+m)/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\psi} d\psi |n\rangle \langle m| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^n}{(1 + \bar{n})^{\bar{n}+1}} |n\rangle \langle n|, \tag{4.66}
\end{aligned}$$

onde

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1},$$

que é a distribuição de Bose. Portanto, com a escolha dos parâmetros $|Y|$, M e ψ os estados geométricos generalizados reduzem-se ao estado caótico. Para $\psi = 0$ e o limite $|Y| \rightarrow \infty$, obtemos para o estado geométrico generalizado

$$|Y, M\rangle = \sum_{n=0}^M \delta_{n,M} |n\rangle, \text{ para todo } n \leq M. \tag{4.67}$$

O valor esperado do operador número no estado geométrico generalizado é dado por

$$\begin{aligned}
\langle Y, M | \hat{n} | Y, M \rangle &= |\lambda_0|^2 \sum_{n=0}^M n |Y|^n \\
&= |\lambda_0|^2 \sum_{n=0}^M |Y| \frac{\partial}{\partial |Y|} |Y|^n \\
&= |\lambda_0|^2 |Y| \frac{\partial}{\partial |Y|} \sum_{n=0}^M |Y|^n \\
&= |\lambda_0|^2 |Y| \frac{\partial}{\partial |Y|} \left[\frac{1 - |Y|^{M+1}}{1 - |Y|} \right] \\
&= \frac{|Y| \left(1 - (M+1) |Y|^M + M |Y|^{M+1} \right)}{(1 - |Y|) (1 - |Y|^{M+1})}, \tag{4.68}
\end{aligned}$$

onde usamos a soma de n termos da série geométrica [73]

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q(1-q^n)}{1-q}, \quad (4.69)$$

e a relação (4.64). Após algumas manipulações a relação (4.68) pode ser escrita como

$$\langle Y, M | \hat{n} | Y, M \rangle = \frac{|Y| \left(1 - (M+1)|Y|^M + M|Y|^{M+1} \right)}{(1-|Y|) \left(1 - |Y|^{M+1} \right)}. \quad (4.70)$$

Analogamente para o valor esperado do operador número quadrado no estado geométrico generalizado,

$$\begin{aligned} \langle Y, M | \hat{n}^2 | Y, M \rangle &= |\lambda_0|^2 \sum_{n=0}^M n^2 |Y|^n \\ &= \frac{1}{(1-|Y|)^2 \left(1 - |Y|^{M+1} \right)} [|Y| (1 + |Y|) - (M+1)^2 |Y|^{M+1} \\ &\quad + (2M^2 + 2M - 1) |Y|^{M+2} - M^2 |Y|^{M+3}]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Para $M = 1$, as relações (4.70) e (4.71) são dadas por

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{|Y| \left(1 - 2|Y| + |Y|^2 \right)}{(1-|Y|) \left(1 - |Y|^2 \right)}, \quad (4.72)$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = \frac{|Y| (1 + |Y|) - 4|Y|^2 + 3|Y|^3 - |Y|^4}{(1-|Y|)^2 \left(1 - |Y|^2 \right)}. \quad (4.73)$$

Substituindo as relações (4.72) e (4.73) na relação (2.216) obtemos o fator de Mandel no estado geométrico generalizado para $M = 1$, isto é,

$$Q = \frac{1}{1+|Y|} - 1. \quad (4.74)$$

Observamos que este estado possui estatística sub-Poissoniana.

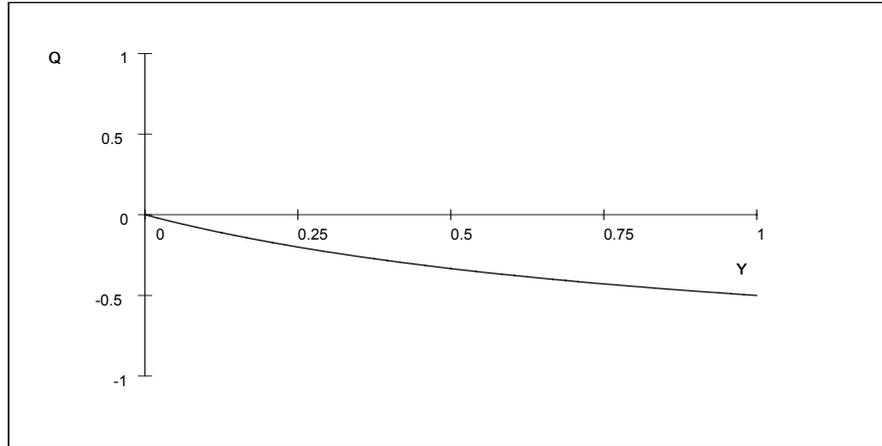


Figura 4.6: Fator de Mandel para o estado geométrico generalizado para $M = 1$

Para $M = 2$, as relações (4.70) e (4.71) são dadas por

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{|Y| (1 - 3|Y|^2 + 2|Y|^3)}{(1 - |Y|)(1 - |Y|^3)}, \quad (4.75)$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = \frac{|Y| (1 + |Y|) - 9|Y|^3 + 11|Y|^4 - 4|Y|^5}{(1 - |Y|)^2 (1 - |Y|^3)}. \quad (4.76)$$

Substituindo as relações (4.75) e (4.76) na relação (2.216) obtemos o fator de Mandel no estado geométrico generalizado para $M = 2$, isto é,

$$Q = -\frac{|Y| (2|Y| + 2|Y|^2 - 1)}{(|Y| + |Y|^2 + 1)(2|Y| + 1)}. \quad (4.77)$$

Observamos que à medida que o parâmetro Y aumenta a estatística deste estado tende de valores sub-Poissonianos à super-Poissonianos.

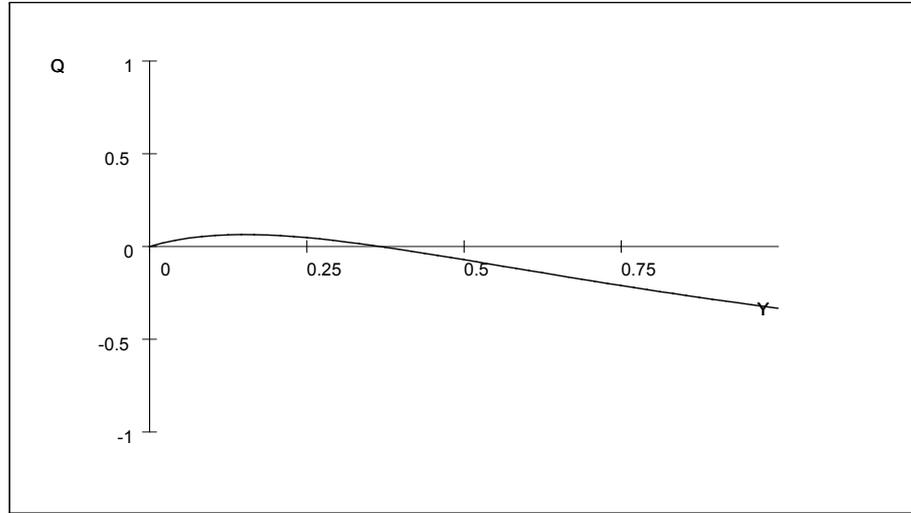


Figura 4.7: Fator de Mandel para o estado geométrico generalizado para $M = 2$

4.4 Estado Geométrico Generalizado em DCT

Usaremos o formalismo da DCT para introduzir o estado

$$|\tilde{Y}, M\rangle = \lambda_0^* \sum_{\tilde{m}=0}^M \tilde{Y}^{*\tilde{m}/2} |\tilde{m}\rangle. \quad (4.78)$$

Desta forma o estado geométrico generalizado térmico fica dado por

$$|Y, \tilde{Y}, M; \beta\rangle = \xi_0 \sum_{n, \tilde{m}=0}^M Y^{n/2} \tilde{Y}^{*\tilde{m}/2} |n, \tilde{m}; \beta\rangle, \quad (4.79)$$

com a constante de normalização

$$|\xi_0|^2 = \left(\frac{1 - |Y|}{1 - |Y|^{M+1}} \right)^2, \quad |Y| \neq 1. \quad (4.80)$$

O valor médio do operador número no estado geométrico generalizado térmico é dado por

$$\begin{aligned}
\langle Y, \tilde{Y}, M; \beta | \hat{n} | Y, \tilde{Y}, M; \beta \rangle &= |\xi_0|^2 \sum_{n, \tilde{m}=0}^M \sum_{n', \tilde{m}'=0}^M |Y|^{\tilde{m}+n} \langle n', \tilde{m}'; \beta | \hat{n} | n, \tilde{m}; \beta \rangle \\
&= |\xi_0|^2 \sum_{n, \tilde{m}=0}^M \sum_{n', \tilde{m}'=0}^M |Y|^{\tilde{m}+n} [\{u^2 \tilde{m}' \\
&\quad + v^2 (1 + \tilde{m})\} \delta_{\tilde{m}', n} \delta_{\tilde{m}, n'} + uv (\tilde{m}' + 1)^{1/2} (\tilde{m} \\
&\quad + 1)^{1/2} \delta_{\tilde{m}'+1, n} \delta_{\tilde{m}+1, n'} \\
&\quad + uv \tilde{m}'^{1/2} \tilde{m}^{1/2} \delta_{\tilde{m}'-1, n} \delta_{\tilde{m}-1, n'}]. \tag{4.81}
\end{aligned}$$

O valor médio do operador número quadrado no estado $|Y, \tilde{Y}, M; \beta\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}
\langle Y, \tilde{Y}, M; \beta | \hat{n}^2 | Y, \tilde{Y}, M; \beta \rangle &= |\xi_0|^2 \sum_{m, n=0}^M \sum_{\tilde{m}, \tilde{n}=0}^M Y^{m/2} Y^{\tilde{m}/2} Y^{n/2} Y^{\tilde{n}/2} \\
&\quad \cdot \langle n, \tilde{n}; \beta | \hat{n}^2 | m, \tilde{m}; \beta \rangle \\
&= |\xi_0|^2 \sum_{m, n=0}^M \sum_{\tilde{m}, \tilde{n}=0}^M Y^{m/2} Y^{\tilde{m}/2} Y^{n/2} Y^{\tilde{n}/2} [\{u^4 m^2 \\
&\quad + v^4 (1 + \tilde{m})^2 + 2u^2 v^2 m (1 + \tilde{m}) + u^2 v^2 m \tilde{m} \\
&\quad + u^2 v^2 (m + 1) (1 + \tilde{m})\} \delta_{m, n} \delta_{\tilde{m}, \tilde{n}} + \{u^3 v (m \\
&\quad + 1)^{3/2} (1 + \tilde{m})^{1/2} + uv^3 (m + 1)^{1/2} (1 + \tilde{m})^{3/2} \\
&\quad + u^3 v (m + 1)^{1/2} (1 + \tilde{m})^{3/2} + uv^3 (m + 1)^{1/2} (1 \\
&\quad + \tilde{m})^{1/2} (2 + \tilde{m})\} \delta_{m+1, n} \delta_{\tilde{m}+1, \tilde{n}} + \{uv^3 m^{1/2} \tilde{m}^{1/2} \tilde{m} \\
&\quad + uv^3 m^{1/2} \tilde{m}^{1/2} (1 + \tilde{m}) + u^3 v m m^{1/2} \tilde{m}^{1/2} + u^3 v (m \\
&\quad - 1) m^{1/2} \tilde{m}^{1/2}\} \delta_{m-1, n} \delta_{\tilde{m}-1, \tilde{n}} + u^2 v^2 [(m + 1) (m \\
&\quad + 2) (1 + \tilde{m}) (2 + \tilde{m})]^{1/2} \delta_{m+2, n} \delta_{\tilde{m}+2, \tilde{n}} + u^2 v^2 [m (m \\
&\quad - 1) \tilde{m} (\tilde{m} - 1)]^{1/2} \delta_{m-2, n} \delta_{\tilde{m}-2, \tilde{n}}, \tag{4.82}
\end{aligned}$$

onde foram usadas as equações (1.69) e (1.70). Fazendo $M = 1$, $Y \in \mathfrak{R}$ e $v^2 = \bar{n}$, (1.36), as equações (4.81) e (4.82) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \langle Y, \tilde{Y}, M; \beta | \hat{n} | Y, \tilde{Y}, M; \beta \rangle &= \left(\frac{1 - |Y|}{1 - |Y|^2} \right)^2 (\bar{n} + Y(2\bar{n} + 1) + 2Y\bar{n} + Y^2(3\bar{n} + 1) \\ &\quad + 2Y(\bar{n}^2 + \bar{n})^{1/2}), \end{aligned} \quad (4.83)$$

e

$$\begin{aligned} \langle Y, \tilde{Y}, M; \beta | \hat{n}^2 | Y, \tilde{Y}, M; \beta \rangle &= \left(\frac{1 - |Y|}{1 - |Y|^2} \right)^2 [\bar{n}^2 + (1 + \bar{n})\bar{n} + Y((\bar{n} + 1)^2 + 5\bar{n}^2 \\ &\quad + 6(1 + \bar{n})\bar{n} + 2(1 + \bar{n})^{3/2}\bar{n}^{1/2} + 6(1 + \bar{n})^{1/2}\bar{n}^{3/2} \\ &\quad + Y^2((\bar{n} + 1)^2 + 4\bar{n}^2 + 9(1 + \bar{n})\bar{n})], \end{aligned} \quad (4.84)$$

substituindo as relações (4.83) e (4.84) na relação (2.216) obtemos o fator de Mandel para os estados geométricos generalizados térmicos, isto é,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\bar{n} + Y(2\bar{n} + 1) + 2Y\bar{n} + Y^2(3\bar{n} + 1) + 2Y(\bar{n}^2 + \bar{n})^{1/2}[\bar{n}^2 + (1 + \bar{n})\bar{n} + Y((\bar{n} + 1)^2 \\ &\quad + 5\bar{n}^2 + 6(1 + \bar{n})\bar{n} + 2(1 + \bar{n})^{3/2}\bar{n}^{1/2} + 6(1 + \bar{n})^{1/2}\bar{n}^{3/2} + Y^2((\bar{n} + 1)^2 + 4\bar{n}^2 \\ &\quad + 9(1 + \bar{n})\bar{n}) - \left(\frac{1 - Y}{1 - Y^2} \right)^2 ((\bar{n} + Y(2\bar{n} + 1) + 2Y\bar{n} + Y^2(3\bar{n} + 1) \\ &\quad + 2Y(\bar{n}^2 + \bar{n})^{1/2})^2]} - 1. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Para $T \rightarrow 0$ a relação (4.85) se reduz a equação (4.74), que é o resultado obtido para temperatura zero.

Na figura (4.8) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado geométrico generalizado térmico para $M = 1$. Observamos que à medida que o parâmetro Y aumenta o estado torna-se cada vez mais sub-Poissonianos.

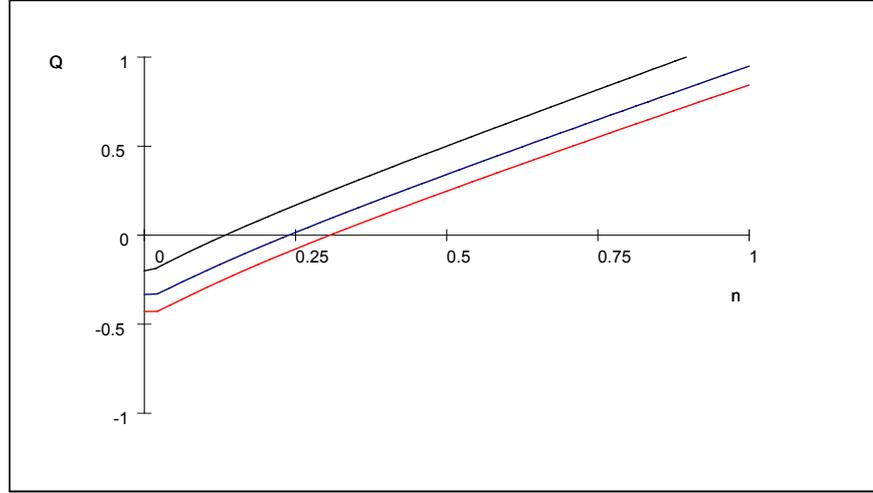


Figura 4.8: Fator de Mandel para estado geométrico generalizado térmico, $M = 1$ e $Y = 0.25$ (linha preta), $Y = 0.5$ (linha azul), $Y = 0.75$ (linha vermelha).

Fazendo $M = 2$ e $Y \in \Re$, as equações (4.81) e (4.82) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \langle Y, \tilde{Y}, M; \beta | \hat{n} | Y, \tilde{Y}, M; \beta \rangle &= \left(\frac{1 - |Y|}{1 - |Y|^3} \right)^2 (v^2 + |Y| (u^2 + 3v^2 + 2uv)) \\ &+ |Y|^2 (3u^2 + 6v^2 + uv (2\sqrt{2} + 3)) \\ &+ |Y|^3 (3u^2 + 5v^2 + 4uv) + |Y|^4 (2u^2 + 3v^2), \end{aligned} \quad (4.86)$$

e

$$\begin{aligned} \langle Y, \tilde{Y}, M; \beta | \hat{n}^2 | Y, \tilde{Y}, M; \beta \rangle &= \left(\frac{1 - |Y|}{1 - |Y|^3} \right)^2 (v^4 + u^2v^2 + |Y| (u^4 + 5v^4 + 6u^2v^2 \\ &+ 2u^3v + 6uv^3) + |Y|^2 (5u^4 + 14v^4 + 23u^2v^2 \\ &+ 8\sqrt{2}u^3v + 16\sqrt{2}uv^3) + |Y|^3 (5u^4 + 13v^4 \\ &+ 30u^2v^2 + 12u^3v + 20uv^3) + |Y|^4 (4u^4 + 9v^4 \\ &+ 25u^2v^2)), \end{aligned} \quad (4.87)$$

substituindo as relações (4.86) e (4.87) na relação (2.216) obtemos o fator de Mandel para

os estados geométricos generalizados térmicos como

$$\begin{aligned}
Q = & (\bar{n} + |Y| \left(1 + 4\bar{n} + 2(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}\right) + |Y|^2 (3 + 9\bar{n} + (2\sqrt{2} + 3)(\bar{n} \\
& + \bar{n}^2)^{1/2}) + |Y|^3 (3 + 8\bar{n} + 4(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}) + |Y|^4 (2 + 5\bar{n})^{-1} [2\bar{n}^2 \\
& + \bar{n} + |Y| (1 + 8\bar{n} + 12\bar{n}^2 + 2(1 + \bar{n})^{3/2} \bar{n}^{1/2} + 6(1 + \bar{n})^{1/2} \bar{n}^{3/2}) \\
& + |Y|^2 (5 + 33\bar{n} + 20\bar{n}^2 + 8\sqrt{2}(1 + \bar{n})^{3/2} \bar{n}^{1/2} + 16\sqrt{2}(1 \\
& + \bar{n})^{1/2} \bar{n}^{3/2}) + |Y|^3 (5 + 40\bar{n} + 48\bar{n}^2 + 12(1 + \bar{n})^{3/2} \bar{n}^{1/2} \\
& + 20(1 + \bar{n})^{1/2} \bar{n}^{3/2}) + |Y|^4 (4 + 38\bar{n}^2 + 33\bar{n}) \\
& - \left(\frac{1 - |Y|}{1 - |Y|^3}\right)^2 (\bar{n} + |Y| (1 + 4\bar{n} + 2(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}) \\
& + |Y|^2 (3 + 9\bar{n} + (2\sqrt{2} + 3)(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}) \\
& + |Y|^3 (3 + 8\bar{n} + 4(\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2}) + |Y|^4 (2 + 5\bar{n})^2] - 1. \tag{4.88}
\end{aligned}$$

Para $T \rightarrow 0$ a relação (4.88) se reduz a equação (4.77), que é o resultado obtido para temperatura zero.

Na figura (4.9) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado geométrico generalizado térmico para $M = 2$.

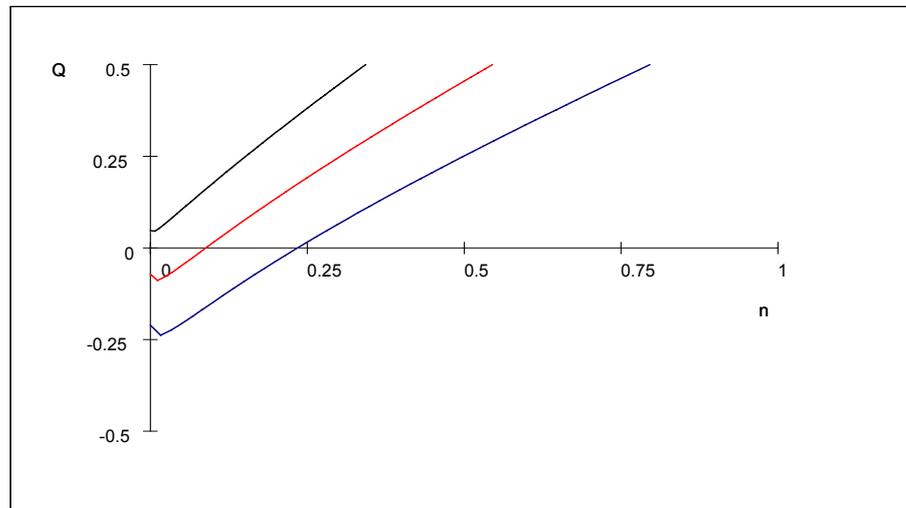


Figura 4.9: Fator de Mandel para estado geométrico generalizado térmico, $M = 2$ e $Y = 0.25$ (linha preta), $Y = 0.5$ (linha vermelha), $Y = 0.75$ (linha azul).

No próximo capítulo usaremos o formalismo da DCT para introduzirmos uma generalização do estado número caótico.

Capítulo 5

Estado Número Caótico

Generalizado

No capítulo 1 introduzimos o formalismo da dinâmica de campos térmicos num contexto térmico, isto é, usamos o formalismo para introduzir temperatura. Neste capítulo usaremos a prescrição da dinâmica de campos térmicos para a geração de estados ópticos quânticos [54, 55]. Mais especificamente usaremos o formalismo da DCT para introduzir uma generalização do estado número caótico definido de acordo com a literatura na seção 5.1, o estado número caótico generalizado. Na seção 5.2 introduzimos o estado número caótico generalizado; na seção 5.3 estudamos a estatística do estado número caótico generalizado.

5.1 Estado Número Caótico

Um estado de interpolação entre o estado número e o estado caótico, alternativo ao estado geométrico generalizado (4.63) é o estado número caótico [47]. Este estado é

definido por

$$\rho_{ENC}(\bar{n}, N) = \frac{1}{(1 + \bar{n})^N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} P_m^B(\bar{n}) |N + m\rangle \langle N + m|, \quad (5.1)$$

onde $P_m^B(\bar{n})$ é a distribuição do tipo Bose-Einstein, dada por

$$P_m^B(\bar{n}) = \frac{1}{1 + \bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^m, \quad \text{com } \bar{n} = \langle \hat{n} \rangle. \quad (5.2)$$

O estado número caótico se reduz ao estado número $|N\rangle$ no limite $\bar{n} \rightarrow 0$, isto é

$$\rho_{ENC}(\bar{n} \rightarrow 0, N) = |N\rangle \langle N|. \quad (5.3)$$

Além disso, para $N = 0$,

$$\begin{aligned} \rho_{ENC}(\bar{n}, 0) &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m^B(\bar{n}) |m\rangle \langle m| \\ &= \rho_{ch}(\bar{n}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde ρ_{ch} é a matriz densidade para o estado caótico.

O valor médio do operador número no estado número caótico é dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle_{ENC} &= \frac{1}{(1 + \bar{n})^N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} P_m^B(\bar{n}) (N + m) \\ &= \frac{1}{(1 + \bar{n})^N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} (1 - A) A^m (N + m) \\ &= \frac{(1 - A)}{(1 + \bar{n})^N} \left[N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} A^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} A^m m \right] \\ &= \frac{(1 - A)}{(1 + \bar{n})^N} \left[N \frac{1}{(1 - A)^{N+1}} + (N + 1) \frac{A}{(1 - A)^{N+2}} \right] \\ &= (1 - A) (1 - A)^N \left[N \frac{1}{(1 - A)^{N+1}} + (N + 1) \frac{A}{(1 - A)^{N+2}} \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

que após algumas manipulações encontramos

$$\langle \hat{n} \rangle_{ENC} = N + (N + 1) \bar{n}. \quad (5.6)$$

O valor médio do operador número quadrado no estado número caótico é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n} \rangle_{ENC} &= \frac{1}{(1 + \bar{n})^N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} P_m^B(\bar{n}) (N + m)^2 \\
&= \frac{(1 - A)}{(1 + \bar{n})^N} \left[N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} A^m (N^2 + 2mN + m^2) \right] \\
&= \frac{(1 - A)}{(1 + \bar{n})^N} \left[N^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} A^m + 2N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} mA^m \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} A^m m^2 \right] \\
&= (1 - A)^{N+1} \left[\frac{N^2}{(1 - A)^{N+1}} + \frac{(N + 1)(N + 2)A^2}{(1 - A)^2(1 - A)^{N+1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(N + 1)A + 2N(N + 1)A}{(1 - A)(1 - A)^{N+1}} \right], \tag{5.7}
\end{aligned}$$

após algumas manipulações encontramos

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_{ENC} = N^2 + (2N + 1)(N + 1)\bar{n} + (N + 1)(N + 2)\bar{n}^2, \tag{5.8}$$

onde usamos

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N + m)!}{N!m!} A^m = \frac{1}{(1 - A)^{N+1}} \tag{5.9}$$

nas equações (5.5) e (5.7).

Substituindo as relações (5.6) e (5.8) na relação (2.216) obtemos o fator de Mandel para o estado número caótico, isto é,

$$Q = \frac{(N + 1)\bar{n}^2 - N}{(N + 1)\bar{n} + N}. \tag{5.10}$$

Na figura (5.1) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado número caótico em função de \bar{n} para $N = 0, 1, 5, 15$, respectivamente. Observamos que para $N = 0$ o estado número caótico possui estatística Poissoniana como esperado. Para $N \geq 1$ a medida que a temperatura aumenta a estatística deste estado tende de valores sub-Poissonianos à Super-Poissonianos.

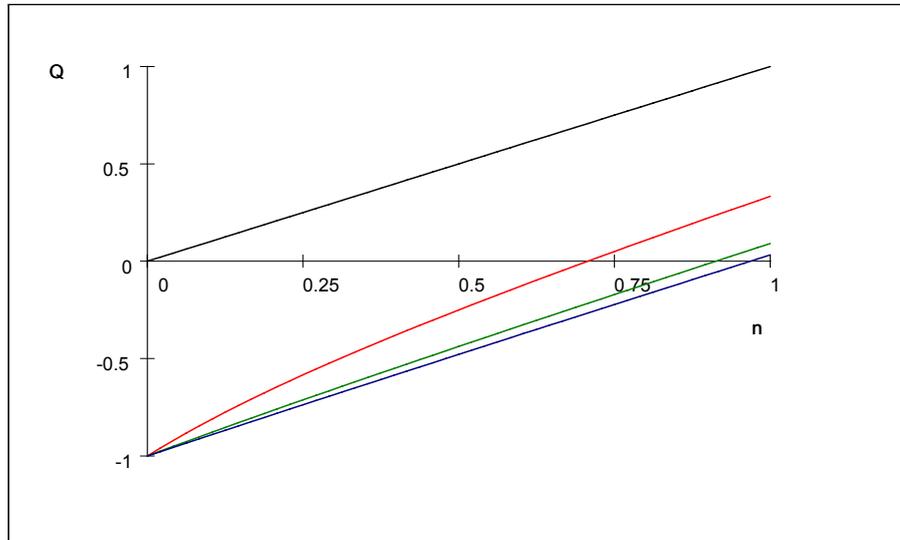


Figura 5.1: Fator de Mandel para estado número caótico $N = 0$ (linha preta), $N = 1$ (linha vermelha), $N = 5$ (linha verde), $N = 15$ (linha azul).

Na próxima seção usaremos o formalismo da DCT para introduzirmos uma generalização do estado número caótico aqui apresentado.

5.2 Estado Número Caótico Generalizado

Introduzimos aqui o estado número caótico generalizado como

$$|N, \zeta\rangle = \frac{1}{N!} \left[a^\dagger(\zeta) \right]^N \left[\tilde{a}^\dagger(\zeta) \right]^N |0(\zeta)\rangle. \quad (5.11)$$

Os operadores $a^\dagger(\zeta)$ e $\tilde{a}^\dagger(\zeta)$ são escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação a e a^\dagger

$$a(\zeta) = u(\zeta)a - v(\zeta)\tilde{a}^\dagger, \quad (5.12)$$

$$a^\dagger(\zeta) = u(\zeta)a^\dagger - v(\zeta)\tilde{a}, \quad (5.13)$$

$$\tilde{a}(\zeta) = u(\zeta)\tilde{a} - v(\zeta)a^\dagger, \quad (5.14)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\zeta) = u(\zeta)\tilde{a}^\dagger - v(\zeta)a, \quad (5.15)$$

inversamente

$$a = u(\zeta)a(\zeta) + v(\zeta)\tilde{a}^\dagger(\zeta), \quad (5.16)$$

$$a^\dagger = u(\zeta)a^\dagger(\zeta) + v(\zeta)\tilde{a}(\zeta), \quad (5.17)$$

$$\tilde{a} = u(\zeta)\tilde{a}(\zeta) + v(\zeta)\tilde{a}^\dagger(\zeta), \quad (5.18)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\zeta)\tilde{a}^\dagger(\zeta) + v(\zeta)a(\zeta), \quad (5.19)$$

onde

$$u(\zeta) = \cosh \theta(\zeta),$$

$$v(\zeta) = \sinh \theta(\zeta).$$

Observe que aqui a e \tilde{a} são interpretados como modos distintos do campo eletromagnético.

O operador número e o operador número quadrado são escritos em termos dos operadores

$a(\zeta)$ e $a^\dagger(\zeta)$ como

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \left[u(\zeta)a^\dagger(\zeta) + v(\zeta)\tilde{a}(\zeta) \right] \left[u(\zeta)a(\zeta) + v(\zeta)\tilde{a}^\dagger(\zeta) \right] \\ &= u^2(\zeta)a^\dagger(\zeta)a(\zeta) + u(\zeta)v(\zeta) \left[a^\dagger(\zeta)\tilde{a}^\dagger(\zeta) + \tilde{a}(\zeta)a(\zeta) \right] \\ &\quad + v^2(\zeta)\tilde{a}(\zeta)\tilde{a}^\dagger(\zeta), \end{aligned} \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{n}^2 &= \left[u^2(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) + u(\zeta) v(\zeta) \left[a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) + \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) \right] + v^2(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \right] \\
&\quad \times \left[u^2(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) + u(\zeta) v(\zeta) \left[a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) + \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) \right] + v^2(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \right] \\
&= u^4(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) + u^3(\zeta) v(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \\
&\quad + u^3(\zeta) v a^\dagger(\zeta) a(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) + u^2(\zeta) v^2(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \\
&\quad + u^3(\zeta) v(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) + u^2(\zeta) v^2(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \\
&\quad + u^2(\zeta) v^2(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) + u(\zeta) v^3(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \\
&\quad + u(\zeta) v^3(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) + u^2(\zeta) v^2(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \\
&\quad + u^2(\zeta) v^2(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) + u(\zeta) v^3(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \\
&\quad + u^2(\zeta) v^2(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) a^\dagger(\zeta) a(\zeta) + u(\zeta) v^3(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) a^\dagger(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \\
&\quad + u^3(\zeta) v(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \tilde{a}(\zeta) a(\zeta) + v^4(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta) \tilde{a}(\zeta) \tilde{a}^\dagger(\zeta), \tag{5.21}
\end{aligned}$$

onde usamos as relações (5.16) e (5.17). O valor esperado do operador número no estado número caótico generalizado é dado por

$$\langle N, \zeta | \hat{n} | N, \zeta \rangle = N + (2N + 1) \varepsilon, \quad \text{onde } \varepsilon = v^2(\zeta). \tag{5.22}$$

Para $\zeta \rightarrow 0$ a relação (5.22) se reduz a

$$\langle N, \zeta \rightarrow 0 | \hat{n} | N, \zeta \rightarrow 0 \rangle = N,$$

que é o valor esperado do operador número no estado número. Para $N \rightarrow 0$ a relação (5.22)

se reduz a

$$\langle N \rightarrow 0, \zeta | \hat{n} | N \rightarrow 0, \zeta \rangle = \varepsilon$$

que é o valor esperado do operador número no estado caótico. Portanto, o estado número caótico generalizado pode ser caracterizado como um estado de interpolação. O valor esperado do operador número quadrado no estado número caótico generalizado é dado por

$$\langle N, \zeta | \hat{n}^2 | N, \zeta \rangle = N^2 + (4N + 6N^2 + 1) \varepsilon + (6N + 6N^2 + 2) \varepsilon^2, \quad (5.23)$$

onde usamos a relação (5.21).

5.3 Estatística do Estado Número Caótico Generalizado

Substituindo as relações (5.22) e (5.23) na relação (2.216) obtemos o fator de Mandel para o estado número caótico generalizado, isto é,

$$Q = \frac{\varepsilon + 2N\varepsilon + \varepsilon^2 + 2N\varepsilon^2 + 2N^2\varepsilon + 2N^2\varepsilon^2}{N + (2N + 1)\varepsilon} - 1.$$

Na figura (5.2) traçamos o gráfico do fator de Mandel para o estado número caótico generalizado em função de ε para $N = 0, 1, 5$, respectivamente. Observamos que para $N = 0$ o estado número caótico possui estatística Poissoniana, para $N \geq 1$, à medida que a temperatura aumenta a estatística deste estado tende de valores sub-Poissonianos à Super-Poissonianos.

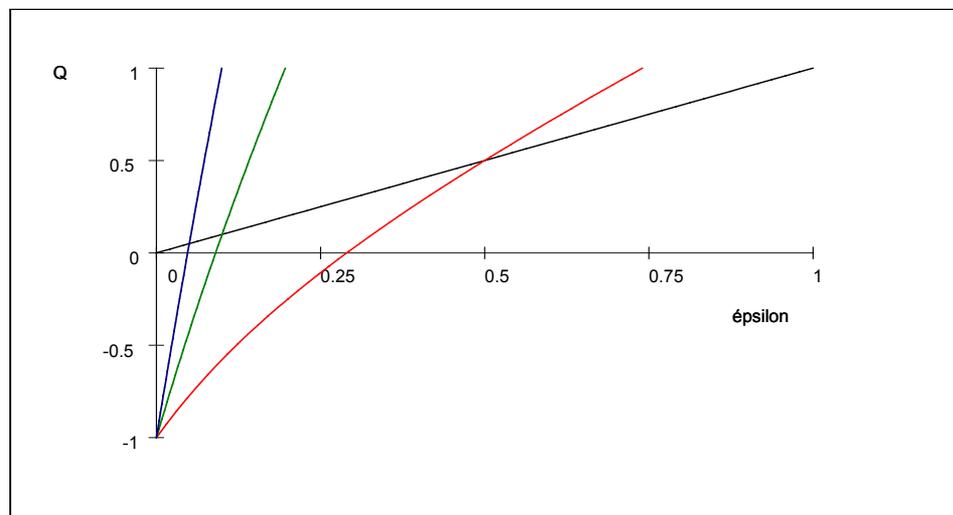


Figura 5.2: Fator de Mandel para estado número cáotico generalizado $N = 0$ (linha preta), $N = 1$ (linha vermelha), $N = 5$ (linha verde), $N = 10$ (linha azul).

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho utilizamos o formalismo da dinâmica de campos térmicos para estudar o efeito de temperatura nas propriedades estatísticas de estados de superposição do campo eletromagnético, introduzimos as contrapartidas térmicas através do formalismo da dinâmica de campos térmicos (DCT) e então estudamos o fator de Mandel. Foi estudado o efeito da temperatura na estatística dos estados coerentes, estados coerentes pares, estados coerentes ímpares, estados de Yurke-Stoler, superposições de estados número e estado geométrico generalizado.

Doravante nossos esforços consistirão em utilizar o formalismo DCT para estudar: o efeito de temperatura na função de correlação de segunda ordem e na compressão em quadratura; geração de novos estados do campo eletromagnético quantizado; e estados fermiônicos (de interesse em supersimetria).

Além dos resultados específicos dos diversos estados estudados, cabe ressaltar dois aspectos de interesses práticos, característicos do formalismo DCT. O primeiro é a facilidade

para introduzirmos os efeitos de temperatura, a partir de um aparato algébrico similar àquele utilizado nas definições dos estados de superposição estudados. Este aparato algébrico é constituído basicamente da transformação de Bogoliubov (um tipo de estado comprimido de dois modos [10]) e as regras de conjugação til. Isto sugere explorar esta estrutura para a construção de novos estados de superposição. Foi nesta perspectiva que introduzimos o estado número caótico generalizado.

Bibliografia

- [1] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 351.
- [2] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particles Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [3] H. Ezawa, Y. Tomozawa, H. Umezawa, N. Cimento, Ser. X **5** (1957) 810. Neste trabalho o método de Matsubara foi generalizado para campos relativísticos.
- [4] Uma apresentação pedagógica dos diferentes métodos em teoria quântica de campos pode ser encontrado no livro de A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (W. Scientific, Singapore, 1997).
- [5] T. Tomé, M.J. Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, EdUSP, São Paulo, 2001.
- [6] R.L. Liboff, *Kinetic Theory: Classical, Quantum and Relativistic Descriptions*, Wiley-Interscience, New York, 1998.
- [7] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).

- [8] Y. Takahashi, H. Umezawa, *Collect. Phenom.* 2 (1975) 55 [reeditado em *Int. J. Mod. Phys. B* 10 (1996) 1755].
- [9] H. Umezawa, H. Matsumoto, M. Tachiki, *Thermofield Dynamics and Condensed States* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [10] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Macro, Micro and Thermal Physics*, AIP Press, NY, 1995.
- [11] An analysis between imaginary time and real-time finite temperature field theory is found in R. Kobes, *Phys. Rev. D* 42 (1990) 562.
- [12] I. Ojima, *Ann. Phys. (N. Y.)* **137** (1981) 1.
- [13] A. E. Santana, A. Matos Neto, J. D. M. Vianna, F. C. Khanna, *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999) 641.
- [14] T. Kopf, A. E. Santana, F. C. Khanna, *J. Math. Phys.* 38 (1997) 4971.
- [15] E. Celeghini, et al, *Phys. Lett. A* 244 (1998) 455.
- [16] A. E. Santana, F. C. Khanna, *Phys. Lett. A* 203 (1995) 68.
- [17] A. E. Santana, A. Matos Neto, J. D. M. Vianna, F. C. Khanna, *Physica A* 280 (2000) 405.
- [18] M. C. B. Andrade, A. E. Santana, J. D. Vianna, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 (2000) 4015.
- [19] F. C. Khanna and A. E. Santana, *An Introduction to Thermal Field Dynamics*, (monografia a ser publicada - notas de curso UFBA, 2003).

- [20] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, *Phys. Rev. D* 64 (2001) 086005.
- [21] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, *Int. J. Mod. Phys. A* 18 (2003) 2109.
- [22] J. P. Whitehead, H. Matsumoto and H. Umezawa, *Phys. Lett. A* 103 (1984) 408.
- [23] J. C. da Silva, *Thermofield Dynamics e Aplicações em Eletrodinâmica Quântica Confinada*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Bahia, 2001.
- [24] J. C. da Silva, A. Matos Neto, F.C. Khanna and A. E. Santana, *Phys. Rev. A* 66 (2002) 052101.
- [25] A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, *J. Phys. A: Math. Gen.* 35 (2001) 2263.
- [26] A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana, *Nucl. Phys. B* 631 (2002) 83.
- [27] H. Queiroz, *O Operador Espalhamento para Férmions num Campo Externo em Thermofield Dynamics*, Tese de Doutorado, IFT-T.009/02, Instituto de Física Teórica-UNESP, São Paulo, 2002.
- [28] H. Queiroz, *Estados Coerentes*, Monografia de Qualificação, Instituto de Física Teórica-UNESP, São Paulo, 2001.
- [29] A. Mann and M. Revzen, *Phys. Lett. A* 134 (1989) 273.
- [30] A. Mann, M. Revzen, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Phys. Lett. A* 140 (1989) 475.

- [31] R. J. Glauber, Phys. Rev.130 (1963) 2529.
- [32] R. J. Glauber, Phys. Rev.131 (1963) 2766.
- [33] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 84.
- [34] L. Davidovich, Rev. Mod. Phys. 68 (1996) 127.
- [35] V. V. Dodonov, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 4 (2002) R1.
- [36] W.-M. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, Rev. Mod. Phys.62 (1990) 476.
- [37] S. M. Barnett e P. L. Knight, J. Opt. Soc. Am. B 2 (1985) 467.
- [38] A. Mann e M. Revzen, Phys. Lett. A 134 (1989) 273.
- [39] A. Kireev, A. Mann, M. Revzen e H. Umezawa, Phys. Lett. A 142 (1989) 215.
- [40] S. Chaturvedi, R. Sandhya, V. Srinivasan e R. Simon, Phys. Rev. A 41 (1990) 3969.
- [41] S. M. Barnett e S. J. D. Phoenix, Phys. Rev. A 40 (1989) 2404.
- [42] S. M. Barnett e S. J. D. Phoenix, Phys. Rev. A 44 (1991) 535.
- [43] F. C. Khanna, A. Mann, M. Revzen e S. Roy, Phys. Lett. A 294 (2002) 1.
- [44] A. E. Santana, F. C. Khanna, M. Revzen, Phys. Rev. A (2002).
- [45] M. Revzen, A. Mann. F. C. Khanna Phys. Let. A (2004).
- [46] L. Mandel, Opt. Lett. (1979) 205
- [47] B. Baseia, S. B. Duarte e J. M. C. Malbouisson, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 3 (2001) 152.

- [48] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Bucke e S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* 35 (1987) 2567.
- [49] C. C. Gerry e P. L. Knight, *Am. J. Phys.* 65 (1997) 964.
- [50] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Manko, *Physica (Amsterdam)* 72 (1974) 597.
- [51] B. Baseia, A. F. de Lima e A. J. da Silva, *Mod. Phys. Lett. B*, (1995) 1673.
- [52] I. A. Barbosa, G. C. Marques e B. Baseia, *Physica A* 280 (2000) 346.
- [53] A. S. F. Obada, S. S. Hassan, R. R. Puri e M. S. Abdalla, *Phys. Rev. A* 48 (1993) 3174.
- [54] Wen-Fa Lu, *J. Phys. A* 32 (1999) 5037.
- [55] A. V. Chizhov and B. K. Murzakhmetov, *Phys. Lett. A* 176 (1993) 33.
- [56] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Lalöe, *Quantum Mechanics*, VI, J. Wiley&Sons, NY, 1977.
- [57] D. F. Walls, G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [58] D. F. Walls, *Nature* 306 (1983) 141.
- [59] Marlan O. Scully e M. Suhail Zubairy, *Quantum optics*, Cambridge University Press, NY, 2001.
- [60] C. M. Caves and B. L. Schumaker, *Phys. Rev. A* 31 (1985) 3068.
- [61] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* 26 (1982) 1817.

- [62] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 1693.
- [63] M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* 40 (1989) 2494.
- [64] J. M. C. Malbouisson, S. B. Duarte e B. Baseia, *Physica A* 285 (2000) 397.
- [65] T. Garavaglia, *Phys. Lett. A* 145 (1990) 215.
- [66] G. C. Gerry and P. L. Knight, *Am. J. Phys.* 65 (1997) 964.
- [67] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961.
- [68] V. Busěk, A. Vidiella-Barranco and L. Knight, *Phys. Rev. A* 45 (1992) 6570.
- [69] a ser publicado.
- [70] F. T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 912.
- [71] H. P. Yuen, *Phys. Rev. A* 13 (1976) 226.
- [72] S. K. Bose and U. B. Dubey, *Fortschr.* 35 (1987) 675.
- [73] Abramowitz e I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, N. Y. 1972.