



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Superposições de estados tipo gato de Schrödinger do campo  
eletromagnético: geração e propriedades**

Maurício Vieira Dantas

Novembro – 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Superposições de estados tipo gato de Schrödinger do campo  
eletromagnético: geração e propriedades**

Maurício Vieira Dantas

**Orientador:** Jorge Mário C. Malbouisson

Dissertação apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal da Bahia para a  
obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador – Novembro de 2003

## Resumo

Utilizando interferometria tipo Ramsey e interações dispersivas átomo-campo é possível gerar, numa cavidade HQ – High Quality-, sequências de superposições de estados tipo gato de Schrödinger correspondentes a superposições simétricas de estados coerentes circulares, auto-estados da potência  $2N$  do operador aniquilação de um modo do campo eletromagnético, onde  $N$  é o número de átomos envolvidos no processo. Explorando todas as possíveis detecções atômicas do esquema introduzido em [1] é possível construir uma árvore genealógica completa desses estados onde os principais ramos são determinados pela primeira geração (estados coerentes pares e ímpares) que podem ser gerados a partir de um estado coerente inicial na cavidade. Todos os estados pertencentes a um determinado ramo possuem paridade de número de fótons bem definidas, possuindo apenas estados número pares ou ímpares ocupados. Estudamos a estatística de fótons para tais famílias e mostramos a existência de grupos de estados dispostos da mesma distribuição de número de fótons. Inversão de população para átomos de dois níveis interagindo com tais campos, como descrito no modelo de Jaynes-Cummings na aproximação de onda girante mostra colapsos e ressurgimentos bem definidos. Também estudamos a ocorrência de compressão de quadratura nos estados pertencentes a todas as famílias para todas as gerações. Representações no espaço de fase são analisadas, especialmente as funções de Husimi e Wigner. Também abordamos a questão do quão não-clássicos são esses estados, tanto no contexto de medidas no espaço de fase quanto tipo medida. Por fim estudamos a perda de coerência de tais estados através do tempo.

## Abstract

Using Ramsey-type interferometry and atom-field dispersive interaction it is possible to generate, in a high-Q cavity, sequences of superpositions of Schrödinger cat states corresponding to symmetrical superpositions of circular coherent states, which are eigenstates of the  $2N$  power of the annihilation operator of a mode of the electromagnetic field, where  $N$  is the number of atoms involved in the process. By exploring all possible atomic detections sequences of the scheme introduced in [1], one can draw a complete genealogical tree of such states where the two main branches are associated with first generation (even and odd coherent states), which can be formed by starting from an initial coherent state in the cavity. All states pertaining to each branch have of well-defined photon number parity, having only even or odd number states occupied. We study the statistics of photons to such families and show that an enumerable number of groups of such states are composed of states having the same photon-number distribution. Population inversion for a two levels atoms interacting with such field states, as described in Jaynes-Cummings model in the rotating wave approximation, show well defined and collapses and revivals. We also investigate of quadrature squeezing among states pertaining to all families, for all generations. Phase space representation are analyzed, especially the Husimi and Wigner functions. We also address the question of how nonclassical such states are, both within the phase space and the distance type of measures contexts. Finally we study the coherence loss of such states through time.

# **Agradecimentos**

## **Primordialmente**

À minha mãe

## **Especialmente**

A todos os meus amigos e colegas,

especialmente Hélio Tsuzuki.

Meu orientador, Jorge Mário Malbouisson.

(Este trabalho foi financiado pela CAPES)

“Somos uma forma do cosmos conhecer a si mesmo.”

**Carl Sagan**

Dedico esse trabalho aos meus saudosos parentes,

Avó Eulina,

Tio Didiu,

E Tia Dilza.

# Conteúdo

## Lista de figuras

viii

<b>1</b>	<b>Estados não clássicos do campo eletromagnético</b>	<b>4</b>
1.1	Quantização do campo eletromagnético . . . . .	4
1.2	Estados básicos . . . . .	8
1.2.1	Estados número . . . . .	8
1.2.2	Estados coerentes . . . . .	10
1.2.3	Estados comprimidos . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Geração de superposições de estados tipo gato de Schrödinger</b>	<b>19</b>
2.1	Geração em cavidades . . . . .	20
2.2	Geração em modos viajantes . . . . .	25
2.3	Normalização . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Propriedades não clássicas das superposições de estado tipo gato de Schrödinger</b>	<b>32</b>
3.1	Distribuição de probabilidade de fótons . . . . .	33
3.1.1	Estados com mesma distribuição de probabilidade . . . . .	41
3.1.2	Estatística de fótons . . . . .	45
3.1.3	Fator de Mandel . . . . .	51
3.2	Inversão de população atômica . . . . .	58
3.3	Compressão de ruído quântico nas quadraturas . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Representações no espaço de fase</b>	<b>72</b>
4.1	O operador densidade . . . . .	72
4.2	Representação P de Glauber . . . . .	73
4.3	Representação de Wigner . . . . .	74
4.3.1	Função característica . . . . .	76
4.4	Função Q de Husimi . . . . .	80

4.5	Medidas de não classicalidade . . . . .	87
4.5.1	Função $R(z, \tau)$ . . . . .	87
4.5.2	Profundidade não clássica . . . . .	95
5	Decoerência dos estados . . . . .	97
6	Conclusões . . . . .	103
	Referências . . . . .	106

## Lista de figuras

2.1	.....	21
2.2	.....	25
2.3	.....	26
2.4	.....	28
3.1	$P_+(n; \alpha = 2)$ .....	34
3.2	$P_-(n; \alpha = 2)$ .....	34
3.3	$P_{++}(n; \alpha = 2)$ .....	36
3.4	$P_{+-}(n; \alpha = 2)$ .....	36
3.5	$P_{-+}(n; \alpha = 2)$ e $P_{--}(n; \alpha = 2)$ .....	37
3.6	$P_{+++}(n; \alpha = 2)$ .....	38
3.7	$P_{++-}(n; \alpha = 2)$ .....	38
3.8	$P_{+-+}(n; \alpha = 2)$ e $P_{+--}(n; \alpha = 2)$ .....	39
3.9	$P_{-++}(n; \alpha = 2)$ e $P_{--+}(n; \alpha = 2)$ .....	40
3.10	$P_{---}(n; \alpha = 2)$ e $P_{-+-}(n; \alpha = 2)$ .....	40
3.11	$P_{+---}(n; \alpha = 2)$ e $P_{-++-}(n; \alpha = 2)$ .....	41
3.12	$\langle \hat{n} \rangle_{+++} X \alpha^2$ .....	50
3.13	$Q_{+-}(\alpha^2)$ .....	54
3.14	$Q_{+--}(\alpha^2)$ e $Q_{-++}(\alpha^2)$ .....	56
3.15	.....	61
3.16	.....	61
3.17	.....	62
3.18	.....	62
3.19	.....	63
3.20	.....	63
3.21	.....	64
3.22	.....	64
3.23	.....	65
3.24	.....	65
3.25	$ \psi_+\rangle$ .....	66
3.26	$ \psi_-\rangle$ .....	67
3.27	$ \psi_{++}\rangle$ .....	67

3.28	$\left. \begin{array}{l} \psi_{+-} \\ \psi_{--} \end{array} \right\}$	$\dots$	68
3.29	$\left. \begin{array}{l} \psi_{+-} \\ \psi_{--} \end{array} \right\}$ e $ \psi_{-+}\rangle$	$\dots$	68
3.30	$\left. \begin{array}{l} \psi_{+++} \\ \psi_{++-} \end{array} \right\}$	$\dots$	68
3.31	$\left. \begin{array}{l} \psi_{++-} \\ \psi_{+--} \end{array} \right\}$	$\dots$	69
3.32	$\left. \begin{array}{l} \psi_{+--} \\ \psi_{---} \end{array} \right\}$ e $ \psi_{+-+}\rangle$	$\dots$	69
3.33	$\left. \begin{array}{l} \psi_{---} \\ \psi_{--+} \end{array} \right\}$	$\dots$	69
3.34	$\left. \begin{array}{l} \psi_{--+} \\ \psi_{-++} \end{array} \right\}$	$\dots$	70
3.35	$\left. \begin{array}{l} \psi_{-++} \\ \psi_{-+-} \end{array} \right\}$	$\dots$	70
3.36	$\left. \begin{array}{l} \psi_{-+-} \\ \psi_{-++} \end{array} \right\}$	$\dots$	70
3.37	$\dots$	$\dots$	71
4.1	$W_{--}(\alpha, x, y); \alpha = 2$	$\dots$	81
4.2	$W_{+++}(\alpha, x, y); \alpha = 2$	$\dots$	81
4.3	$W_{+-+}(\alpha, x, y); \alpha = 2$	$\dots$	82
4.4	$W_{+--}(\alpha, x, y); \alpha = 2$	$\dots$	82
4.5	$W_{-++}(\alpha, x, y); \alpha = 2$	$\dots$	83
4.6	$W_{--+}(\alpha, x, y); \alpha = 2$	$\dots$	83
4.7	$W_{---}(\alpha, x, y); \alpha = 2$	$\dots$	84
4.8	$Q_{+}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	86
4.9	$Q_{-}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	86
4.10	$Q_{-}(\alpha = 3, x, y) - Q_{+}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	87
4.11	Aspécto genérico das funções Q de segunda geração	$\dots$	88
4.12	$Q_{++}(\alpha = 3, x, y) - Q_{--}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	88
4.13	$Q_{+++}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	89
4.14	$Q_{++-}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	89
4.15	$Q_{+-+}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	90
4.16	$Q_{+--}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	90
4.17	$Q_{-++}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	91
4.18	$Q_{--+}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	91
4.19	$Q_{---}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	92
4.20	$Q_{--+}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	92
4.21	$Q_{-+-}(\alpha = 3, x, y)$	$\dots$	93
5.1	$A'_1(t)$	$\dots$	102
5.2	$A'_2(t)$	$\dots$	102
5.3	$A'_3(t)$	$\dots$	102

# Introdução

As primeiras indicações de que a descrição microscópica da natureza deve ser quantum-mecânica apareceram com os trabalhos de Planck, que em 1900 tratou a distribuição espectral de luz térmica postulando que a energia de um oscilador harmônico é quantizada, e de Einstein em 1905, que explica o efeito fotoelétrico através da hipótese de que a energia de um feixe de luz é distribuída em pacotes discretos posteriormente batizados como fótons.

Apesar de já haver desde cedo essa conexão com a teoria quântica, a óptica física foi desenvolvida de forma mais ou menos independente desta. A vasta maioria dos experimentos físicos-ópticos podem ser explicados adequadamente através da teoria clássica da radiação eletromagnética baseada nas equações de Maxwell. Experimentos de interferência do tipo de Young possuem previsões idênticas seja a abordagem clássica ou quântica. Diferenças entre as previsões clássicas e quânticas só aparecem em experimentos de interferência de ordens superiores envolvendo interferências de intensidades. Num experimento desse, dois campos elétricos são detectados num fotomultiplicador e suas intensidades podem interferirem-se. Enquanto a teoria clássica trata da interferência de intensidades, na teoria quântica a interferência continua sendo ao nível das amplitudes de probabilidade. Essa é uma das maiores diferenças entre as duas teorias.

Até 1963 foram realizados alguns novos experimentos em interferometria, embora ainda completamente descritos pela teoria clássica. Nesse ano R.J. Glauber [4] mostrou pela primeira vez, na sua formulação quântica da teoria da coerência óptica, algumas previsões de natureza puramente quântica relacionadas ao anti-agrupamento de fótons.

A partir do trabalho de Glauber foi realizada uma série de desenvolvimentos teóricos e experimentais que possibilitaram, por exemplo, a geração de superposições de estados do tipo gato de Schrödinger, de realização um tanto difícil devido a sua fragilidade frente a pequenas dissipações.

São justamente os estados tipo gato de Schrödinger o nosso objeto de estudo mais específico. O estudo baseia-se no aparato experimental desenvolvido na França por Laroche, Brune, Raimond, Davidovich [15][14][13] entre outros, através do qual se pode gerar uma superposição de estados coerentes numa cavidade mesoscópica configurada a partir da passagem de um átomo de Rydberg devidamente preparado pela cavidade. Posteriormente foi proposto um esquema para a geração de outros estados a partir da passagem de outros átomos de Rydberg através do aparato, o que veio a chamar-se estados tipo gato de Schrödinger de gerações posteriores. Nesse trabalho generalizamos o processo de geração destes estados incluindo aí os estados provenientes das várias sequências de detecção dos átomos de Rydberg.

Este trabalho está organizado de forma que, no capítulo 1 é apresentada uma revisão da quantização do campo eletromagnético e dos estados coerentes deste campo. No capítulo 2 é descrito o processo de geração de superposições de estados tipo gato de Schrödinger, tanto em cavidades de alta qualidade como em modos viajantes do campo. Propriedades estatísticas importantes como a distribuição de número de fótons, número médio de fótons e o fator de Mandel, caracterizadoras desses estados, além da inversão de população atômica e da compressão de quadratura, são estudadas no capítulo 3. No capítulo 5 estudamos a decoerência destes estados do campo. As representações dos estados

no espaço de fase, tais como a representação  $P$  de Glauber, a função  $Q$  de Husimi e a função de Wigner, assim como a profundidade não clássica, são apresentadas no capítulo 4. Conclusões e perspectivas são deixadas para o capítulo 6.

## Capítulo 1

# Estados não clássicos do campo eletromagnético

Iniciaremos com uma breve revisão de alguns conceitos básicos que serão usados neste trabalho com o objetivo de introduzir a notação usada.

### 1.1 Quantização do campo eletromagnético

Tomemos como ponto de partida para quantização do campo eletromagnético as equações de Maxwell no vácuo:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

onde  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\mu_0$  e  $\varepsilon_0$  sendo a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo, com  $\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$ . As equações de Maxwell são invariantes por calibre e, usualmente, é conveniente a escolha do calibre de Coulomb, onde os vetores  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  podem ser descritos através do potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  sob a forma:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (1.5)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.6)$$

com a condição do calibre de Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.7)$$

Neste calibre, verifica-se que  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.8)$$

Agora separamos o potencial vetor em dois termos complexos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t) \quad (1.9)$$

onde  $\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t)$  contém todas as amplitudes que variam com  $e^{-i\omega t}$  para  $\omega > 0$  e  $\vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t)$  contém todas as amplitudes que variam com  $e^{i\omega t}$ . É mais conveniente trabalhar com um conjunto de variáveis discretas que todo o contínuo. Devemos portanto nos restringir a um certo volume do espaço e expandir o potencial vetor em termos de um conjunto de funções de modo ortogonais

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_k c_k \hat{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} \quad (1.10)$$

onde os coeficientes de Fourier  $c_k$  são constantes num campo livre. O conjunto de vetores função de modo  $\hat{u}_k(\vec{r})$ , que corresponde à frequência  $\omega_k$ , irá satisfazer a equação de onda

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \hat{u}_k(\vec{r}) = 0 \quad (1.11)$$

considerando não haver material refratário. As funções de modo também devem satisfazer a condição de transversalidade:

$$\nabla \cdot \hat{u}_k(\vec{r}) = 0 \quad (1.12)$$

As funções de modo formam uma base ortonormal completa

$$\int_V \hat{u}_k^*(\vec{r}) \hat{u}_{k'}(\vec{r}) = \delta_{kk'} \quad (1.13)$$

As funções de modo dependem das condições de contorno do volume considerado, ou seja, condições de contorno periódicas para ondas livres ou condições apropriadas a paredes refletoras, que levam a ondas estacionárias. Temos portanto que, as funções de ondas planas apropriadas a um volume cúbico de lado  $L$  deve ser escrito como

$$\hat{u}_k(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} \hat{e}^{(\lambda)} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.14)$$

onde  $\hat{e}^{(\lambda)}$  é o vetor de polarização unitário. O índice referente ao modo,  $k$ , descreve várias variáveis: o índice de polarização ( $\lambda = 1, 2$ ), e as coordenadas cartesianas do vetor propagação  $\vec{k}$ . Cada componente do vetor  $\vec{k}$  assume os valores

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}; \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

O vetor polarização  $\hat{e}^{(\lambda)}$  deve ser perpendicular a  $\vec{k}$  de acordo com a condição de transversalidade.

O potencial vetor deve ser escrito agora então como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ a_k \hat{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \hat{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right] \quad (1.15)$$

e a forma correspondente do vetor campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  é

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_k \left( \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ a_k \hat{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger \hat{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right] \quad (1.16)$$

Os fatores de normalização foram escolhidos do modo a fazer com que as amplitudes  $a_k$  e  $a_k^\dagger$  sejam adimensionais.

Na teoria do eletromagnetismo clássico essas amplitudes de Fourier são complexas. Na quantização do campo eletromagnético as amplitudes complexas são elevadas á categoria de operadores mutuamente adjuntos. Como os fótons, que são os quanta do campo eletromagnético, são bósons, a relação de comutação escolhida para os operadores  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^*$  deve ser:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad ; \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} . \quad (1.17)$$

A evolução dinâmica da amplitude do campo elétrico deve então ser descrita por um ensemble de osciladores harmônicos independentes obedecendo as relações de comutação acima. Os estados quânticos de cada modo podem então ser descritos independentemente uns dos outros. O estado quântico de cada modo é então descrito por um vetor do estado de Hilbert associado a este modo. Já o estado do campo como um todo deve ser descrito pelo produto tensorial entre os vetores de cada um dos modos do campo.

O hamiltoniano do campo eletromagnético na forma clássica é dado por

$$H = \int (\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) dr \quad (1.18)$$

Substituindo a (1.16) em  $\vec{E}$  e a expressão equivalente para  $\vec{H}$ , utilizando a condição de transversalidade e completude e substituindo as amplitudes complexas por operadores, o hamiltoniano pode ser reduzido à forma

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (1.19)$$

que representa a soma do número de fótons em cada modo multiplicado por  $\hbar\omega_k$  mais  $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ , que representa a energia de flutuação do vácuo em cada modo.

## 1.2 Estados básicos

### 1.2.1 Estados número

O hamiltoniano acima tem auto valores do tipo  $\hbar\omega_k (n_k + \frac{1}{2})$  onde  $n_k$  é um número natural. Os auto estados correspondentes são os chamados estados número ou estados de Fock, que são escritos como  $|n_k\rangle$ . Esses estados são auto estados do operador número, definido como  $\hat{N} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ , de forma que

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle . \quad (1.20)$$

O estado fundamental do oscilador (ou estado de vácuo do campo) é definido por

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0 . \quad (1.21)$$

Assim, a energia do estado fundamental é dada por

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum \hbar\omega_k . \quad (1.22)$$

Como não há limite para as frequências na soma sobre os modos do campo eletromagnético, a energia do estado fundamental é infinita, o que parece ser uma dificuldade conceitual da teoria do campo eletromagnético quantizado. Entretanto, como na prática o que se quer obter são diferenças de energia do campo eletromagnético num determinado sistema, o ponto zero de energia infinita não leva necessariamente a uma divergência, podendo ser simplesmente subtraído.  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  são os operadores de abaixamento e levantamento para o conjunto de auto estados do oscilador harmônico. Em termos de fótons eles representam a aniquilação e a criação de um fóton com um vetor onda  $\vec{k}$  um vetor de polarização  $\hat{e}_k$ . Daí a terminologia operadores de aniquilação e criação.

A aplicação dos operadores de criação e destruição sobre os estados número obedece às relações

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = n_k^{1/2} |n_k - 1\rangle, \quad (1.23)$$

$$\hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = (n_k + 1)^{1/2} |n_k + 1\rangle. \quad (1.24)$$

A partir da segunda das relações acima pode-se obter um vetor de estado de Fock qualquer a partir da aplicação sucessiva do operador de criação ao estado de vácuo, de forma que

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} |0\rangle, \quad n_k = 0, 1, 2 \dots \quad (1.25)$$

Os estados de Fock são ortogonais

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{mn} \quad (1.26)$$

e formam uma base completa no espaço de Hilbert

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1. \quad (1.27)$$

Apesar dos estados número serem uma representação útil para fótons de altas energias, como por exemplo os raios gama, onde o número de fótons é bem pequeno, estes não se configuram a melhor representação para campos ópticos, onde o número total de fótons é grande. Dificuldades experimentais tem impedido a geração de estados de Fock com um número de fótons razoavelmente pequeno, embora grandes avanços têm sido obtidos recentemente. A maior parte dos campos ópticos são superposições de estados número (estados puros) ou misturas estatísticas de estados (estados misturados). Apesar de tudo, os estados de Fock do campo eletromagnético têm sido usados como base numa série de problemas em óptica quântica, incluindo algumas teorias em laser.

### 1.2.2 Estados coerentes

Uma base mais apropriada para vários campos ópticos são os estados coerentes. Os estados coerentes possuem um número indefinido de fótons, o que os permite ter uma fase mais bem definida que os estados de Fock, onde a fase é completamente randômica. O produto das incertezas nas quadraturas do campo num estado coerente é o mínimo permitido pelo princípio da incerteza. Nesse sentido, os estados coerentes são os estados quantum mecânicos mais próximos da descrição clássica do campo, sendo também chamados de estados quasi-clássicos. Vamos agora apresentar algumas características desses estados.

**Condições definindo estados coerentes:** No contexto da Física clássica verifica-se possível caracterizar o estado de um oscilador harmônico através de um parâmetro adimensional complexo, cujas partes real e imaginária estariam associadas à posição e ao

momento, respectivamente, sob a forma

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{x}(t) + i\bar{p}(t)] \quad (1.28)$$

com  $\bar{x}(t)$  e  $\bar{p}(t)$  adimensionais, ou seja:

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x(t) = \beta x(t), \quad (1.29)$$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{\hbar\beta}p(t), \quad (1.30)$$

o que permite escrever as equações de movimento clássicas do oscilador harmônico como

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{m}p(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{x}(t) = \omega\bar{p}(t), \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dt}p(t) = -m\omega^2x(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{p}(t) = -\omega\bar{x}(t) \quad (1.32)$$

Substituindo as expressões acima na definição de  $\alpha(t)$  e derivando em relação ao tempo tem-se

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}, \quad (1.33)$$

onde

$$\alpha_0 = \alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{x}(0) + i\bar{p}(0)] \quad (1.34)$$

Com essas definições podemos reescrever  $\bar{x}(t)$  e  $\bar{p}(t)$  como

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}], \\ \bar{p}(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t}], \end{aligned}$$

e a energia clássica do sistema torna-se igual a

$$H = \frac{1}{2m}[p(0)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2[x(0)]^2 \quad (1.35)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\{[\bar{x}(0)]^2 + [p(0)]^2\} \quad (1.36)$$

$$= \hbar\omega|\alpha_0|^2 . \quad (1.37)$$

Na construção do estado coerente, uma das exigências que se faz é que os valores médios dos operadores associados às grandezas clássicas assumam os mesmos valores dessas grandezas a cada instante. Para isso desenvolvemos os valores médios dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  e substituímos esses valores nas expressões dos valores médios dos operadores  $\hat{X}(t)$ ,  $\hat{P}(t)$  e  $\hat{H}$ . Observa-se então que, para que tenhamos uma correspondência entre as expressões clássicas e quânticas de  $\hat{X}(t)$  e  $\hat{P}(t)$ , devemos impor

$$\langle \hat{a} \rangle (0) = \alpha_0 . \quad (1.38)$$

Aplicando essa mesma exigência a  $\hat{H}$  somos levados a estabelecer

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle (0) = \alpha_0 . \quad (1.39)$$

Utilizaremos agora essas duas condições acima para definir um estado coerente.

**Estados coerentes como auto-estados do operador  $\hat{a}$ :** Introduzamos o operador  $\hat{b}(\alpha_0)$ , definido por:

$$\hat{b}(\alpha_0) = \hat{a} - \alpha_0 ; \quad (1.40)$$

temos portanto

$$\hat{b}^\dagger(\alpha_0)\hat{b}(\alpha_0) = \hat{a}^\dagger\hat{a} - \alpha_0\hat{a}^\dagger - \alpha_0^*\hat{a} + \alpha_0^*\alpha_0 \quad (1.41)$$

e o quadrado da norma do vetor  $\hat{b}(\alpha_0) |\psi(0)\rangle$  é

$$\begin{aligned} & \langle \psi(0) | \hat{b}^\dagger(\alpha_0) \hat{b}(\alpha_0) | \psi(0) \rangle = \\ & \langle \psi(0) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi(0) \rangle - \alpha_0 \langle \psi(0) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi(0) \rangle \\ & - \alpha_0^* \langle \psi(0) | \hat{a} | \psi(0) \rangle + \alpha_0^* \alpha_0 . \end{aligned} \quad (1.42)$$

Substituindo-se as condições (1.38) e (1.39), obtém-se

$$\begin{aligned} & \langle \psi(0) | \hat{b}^\dagger(\alpha_0) \hat{b}(\alpha_0) | \psi(0) \rangle = \\ & \alpha_0^* \alpha_0 - \alpha_0 \alpha_0^* - \alpha_0^* \alpha_0 + \alpha_0^* \alpha_0 = 0 . \end{aligned} \quad (1.43)$$

Como o vetor é suposto ter norma não nula, devemos ter  $\hat{b}(\alpha_0) |\psi(0)\rangle = 0$ , que de acordo com a definição do operador  $\hat{b}(\alpha_0)$  dá

$$\hat{a} |\psi(0)\rangle = \alpha |\psi(0)\rangle \quad (1.44)$$

Temos portanto um estado que é auto estado do operador  $\hat{a}$  cujo auto valor é o parâmetro  $\alpha$ . Isso faz com que utilizemos este parâmetro para caracterizar o vetor de estado. Portanto, denotaremos o auto-vetor de  $\hat{a}$  associado ao auto-valor  $\alpha$  por  $|\alpha\rangle$ .

**Expansão de  $|\alpha\rangle$  na base número:** Definamos o estado coerente  $|\alpha\rangle$  usando uma expansão em estados número sob a forma

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha) |n\rangle \quad (1.45)$$

Temos então que

$$a |\alpha\rangle = \sum c_n(\alpha) \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (1.46)$$

Substituindo essa relação em (33) obtemos

$$c_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n(\alpha) \quad (1.47)$$

Essa relação nos permite determinar por recorrência todos os coeficientes  $c_n(\alpha)$  em termos de  $c_0(\alpha)$ :

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0(\alpha) \quad (1.48)$$

Decorre então que, uma vez fixado o valor de  $c_0(\alpha)$ , todos os outros coeficientes  $c_n(\alpha)$  também são fixados. O vetor  $|\alpha\rangle$  é portanto especificado de forma única a menos de um fator multiplicativo. Devemos escolher  $c_0(\alpha)$  real e positivo e normalizar o vetor  $|\alpha\rangle$ , o que o determina de forma completa. Nesse caso, os coeficientes  $c_n(\alpha)$  satisfazem

$$\sum_n |c_n(\alpha)|^2 = 1, \quad (1.49)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |c_0(\alpha)|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} &= |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \\ \Rightarrow c_0(\alpha) &= e^{-|\alpha|^2/2}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

e finalmente

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.51)$$

**O operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$ :** De forma alternativa, é possível mostrar que um estado coerente pode ser obtido do deslocamento do vácuo através da aplicação do operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$ , definido como

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad (1.52)$$

Esse operador é unitário, ou seja

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = 1. \quad (1.53)$$

Se utilizarmos a fórmula  $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$ , válida quando  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ , podemos reescrever o operador deslocamento como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\alpha^*\hat{a}}. \quad (1.54)$$

Aplicando  $e^{\alpha^*\hat{a}}$  ao estado de vácuo temos

$$e^{\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = [1 - \alpha^*\alpha + \frac{\alpha^{*2}}{2!} + \dots]|0\rangle = |0\rangle \quad (1.55)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Comparando com a expansão mostrada anteriormente, ficamos com

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (1.57)$$

o que explicita a ação do operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$ .

**Valor esperado da energia num estado  $|\alpha\rangle$ :** Consideremos um oscilador no estado  $|\alpha\rangle$ . Vemos da expressão anterior que uma medida da energia determina um resultado do tipo  $E_n = \hbar\omega n$  (retirando a energia do ponto zero) com a probabilidade

$$P_n(\alpha) = |c_n(\alpha)|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (1.58)$$

A distribuição de probabilidade obtida,  $P_n(\alpha)$ , é portanto, uma distribuição poissoniana.

Como

$$P_n(\alpha) = \frac{|\alpha|^2}{n} P_{n-1}(\alpha), \quad (1.59)$$

é fácil verificar que  $P_n(\alpha)$  alcança seu valor máximo quando  $n$  é igual à parte inteira de  $|\alpha|^2$ .

Para calcular o valor esperado  $\langle \hat{H} \rangle_\alpha$  da energia podemos usar (1.58) e a expressão

$$\langle \hat{H} \rangle_\alpha = \sum_n P_n(\alpha) n \hbar \omega. \quad (1.60)$$

Por outro lado é fácil perceber que, como  $\langle \alpha | a^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$ , temos

$$\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha \quad (1.61)$$

e, portanto,

$$\langle \hat{H} \rangle_\alpha = \hbar \omega \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \hbar \omega |\alpha|^2. \quad (1.62)$$

O produto escalar entre dois estados coerentes pode ser obtido utilizando o operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha\beta^*\right] \\ \Rightarrow |\langle \beta | \alpha \rangle|^2 &= e^{-|\alpha - \beta|^2} \end{aligned} \quad (1.63)$$

O que mostra que dois estados coerentes podem ser considerados aproximadamente ortogonais no limite em que  $|\alpha - \beta| \gg 1$ . Superposições de dois estados coerentes quasi-ortogonais são conhecidas como estados tipo gato de Schrödinger pois correspondem a superposições quânticas de estados quasi-clássicos distintos.

### 1.2.3 Estados comprimidos

De acordo com o princípio da incerteza de Heisemberg, a descrição de um estado quântico está limitada pela desigualdade

$$\Delta P \Delta X \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (1.64)$$

Em termos dos operadores de quadratura do campo eletromagnético, definidos pela expressão

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left( \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0} \right)^{1/2} [\hat{X}_1 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{X}_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad (1.65)$$

onde

$$\hat{X}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad (1.66)$$

$$\hat{X}_2 = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (1.67)$$

obtem-se

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle \geq 1. \quad (1.68)$$

Essa desigualdade é obtida em seu limite mínimo para estados coerentes, onde  $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = 1$ . Entretanto, é possível definir-se uma classe de estados de incerteza mínima onde uma de suas quadraturas tem incerteza menor que um em detrimento do aumento da outra. Estes são os chamados estados comprimidos, que podem ser obtidos através da aplicação do operador de compressão sobre um estado coerente. O operador de compressão é dado por

$$\hat{S}(\epsilon) = \exp\left(\frac{1}{2} \epsilon^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2} \epsilon \hat{a}^{\dagger 2}\right), \quad (1.69)$$

onde  $\varepsilon = r \exp(2i\phi)$  é um número complexo arbitrário.

Nota-se que o operador de compressão obedece as relações:

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon) = \hat{S}^{-1}(\varepsilon) = \hat{S}(-\varepsilon), \quad (1.70)$$

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}(\varepsilon) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(-2i\phi) \sinh r, \quad (1.71)$$

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\varepsilon) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} \exp(-2i\phi) \sinh r. \quad (1.72)$$

Se definirmos uma amplitude complexa rotacionada

$$\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2 = (X_1 + iX_2) \exp(-i\phi), \quad (1.73)$$

temos

$$\hat{S}^\dagger(\varepsilon)(\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2)\hat{S}(\varepsilon) = \hat{Y}_1 \exp(-r) + i\hat{Y}_2 \exp(r). \quad (1.74)$$

O operador de compressão portanto atenua um componente da amplitude complexa (rotacionada) e amplifica o outro. O grau de atenuação ou de amplificação é determinado por  $r = |\varepsilon|$ , chamado de fator de compressão.

Há outros estados importantes do campo eletromagnético como, por exemplo, os estados de fase (complementares aos estados de Fock) e diversas superposições dos estados básicos mas que não serão discutidos aqui.

## Capítulo 2

# Geração de superposições de estados tipo gato de Schrödinger

Neste capítulo estudaremos a geração de superposições de estados tipo gato de Schrödinger a partir de dois aparatos que permitem a produção de superposições de estados coerentes circulares tanto em cavidades como em modos viajantes. O primeiro aparato refere-se ao chamado experimento de Paris [ 11 ], onde o agente de interação com o campo são átomos de prova. O segundo é uma adaptação do interferômetro de Mach-Zender que utiliza estados tipo número em interação com campo coerente via um meio Kerr, tratando-se portanto de uma interação efetiva campo-campo. Como será demonstrado, ambos processos dão origem à mesma família de estados. Vejamos primeiramente o experimento de Paris e logo em seguida o interferômetro de Mach-Zender.

### 2.1 Geração em cavidades

Estados coerentes de um modo do campo eletromagnético podem ser produzidos numa cavidade mesoscópica de alta qualidade através de uma corrente clássica. A cavidade é composta de dois espelhos esféricos de nióbio cuidadosamente polidos dispostos frente à frente. A geometria da cavidade é compatível com a aplicação de um campo eletrostático ao longo do eixo da cavidade, o que é essencial para a manipulação de estados circulares num átomo interagente. Dois pequenos orifícios no centro dos espelhos permitem o acoplamento com um gerador de microondas sendo que a frequência de ressonância, ajustada através da translação entre os espelhos, e o fator de qualidade  $Q$ , podem ser facilmente determinados através de experimentos de transmissão na cavidade. No equilíbrio térmico o modo da cavidade contém um certo número médio de fótons térmicos, originados do vazamento de campo térmico. Esse campo é removido da cavidade antes de cada sequência experimental através da emissão de pulsos atômicos contendo átomos preparados no nível mais baixo,  $g$ , da transição ressonante com a cavidade. Esses átomos absorvem eficientemente os fótons térmicos e reduzem a temperatura efetiva associada ao campo. No procedimento proposto, átomos de Rydberg interagem com o campo da cavidade. Esses átomos são descritos através de estados circulares (Kleppner e Hulet, 1983), cuja transição entre estados vizinhos envolve comprimentos de onda da ordem dos milímetros para números quânticos principais em torno de 50. O experimento utiliza três níveis circulares com números quânticos principais iguais a 50, 51 e 52, correspondentes aos chamados estados  $e$ ,  $g$  e  $i$ , respectivamente. O preparo de níveis circulares (Nussenzveig et al., 1993) combina excitação de laser de diodo e transições de radiofrequência. Primeiramente os átomos são preparados num estado circular excitado  $|e\rangle$ , logo após serem lançados de uma fonte com velocidades selecionadas, através

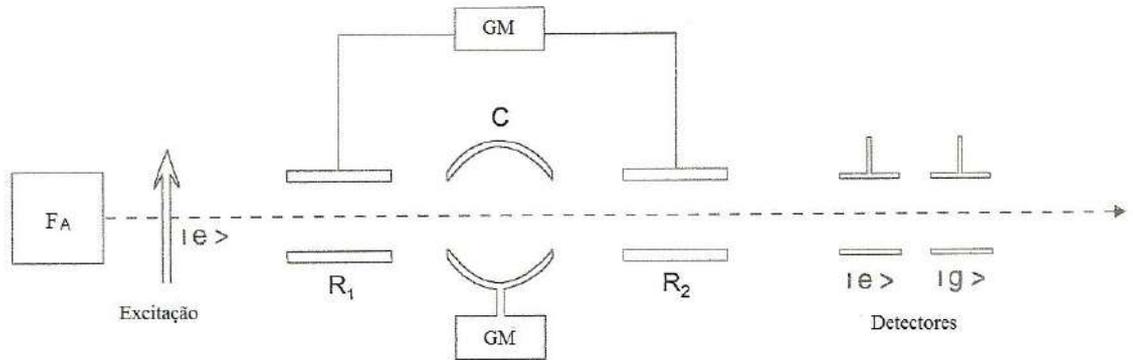


Figura 2.1: Esquema da geração em cavidades

de um feixe de laser. Adiante o átomo cruza a cavidade de alta qualidade, posta entre duas outras de baixa qualidade, chamadas de zonas de Ramsey (Fig. 2.1).

Em ambas zonas de Ramsey, campos clássicos produzidos por um gerador de microondas interagem ressonantemente com a transição  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  dos átomos Rydberg e as intensidades são ajustadas de modo a produzir um pulso de  $\frac{\pi}{2}$  quando os átomos a cruzam, de forma que:

$$|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle) \quad (2.1)$$

$$|g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |e\rangle) \quad (2.2)$$

Já ao atravessar a cavidade central, o átomo interage dispersivamente com o campo eletromagnético de acordo com o hamiltoniano

$$\hat{H}_{int} = \hbar\omega_{ef}\hat{a}^\dagger\hat{a}(|i\rangle\langle i| - |e\rangle\langle e|) \quad (2.3)$$

onde  $\omega_{ef} = 2P^2/\Delta$ ,  $P$  é o momento de dipolo atômico e  $|i\rangle$  corresponde ao estado do átomo de Rydberg com  $n = 52$ . A frequência da cavidade é ajustada próxima à ressonância com a transição  $|e\rangle \rightarrow |i\rangle$ , separados por  $\Delta$ , que é bem diferente ao associado à transição  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ .

Note que  $\hat{H}_{int}^n = (\hbar\omega_{ef})^n(\hat{a}^\dagger\hat{a})^n(|i\rangle\langle i| + (-1)^n|e\rangle\langle e|)$  e portanto,

$$\begin{aligned} & \hat{U}(t)(C_g|g\rangle + C_e|e\rangle)|\Psi_c\rangle \\ &= \exp\left(\frac{-i\hat{H}_{int}t}{\hbar}\right)(C_g|g\rangle + C_e|e\rangle)|\Psi_c\rangle \\ &= C_g|g\rangle|\Psi_c\rangle + C_e|e\rangle(\exp[i\phi a^\dagger a]|\Psi_c\rangle) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Isso implica que quando o átomo atravessa a cavidade numa superposição de estados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , a interação dispersiva acaba produzindo uma variação  $\phi$  na fase do campo da cavidade quando o estado atômico é  $|e\rangle$  mas conserva a fase quando o estado é  $|g\rangle$ , ou seja:

$$(C_g|g\rangle + C_e|e\rangle)|\Psi_c\rangle \rightarrow C_g|g\rangle|\Psi_c\rangle + C_e|e\rangle(\exp[i\phi a^\dagger a]|\Psi_c\rangle), \quad (2.5)$$

com  $\phi = \omega_{ef}t_c$  e  $t_c$  igual ao tempo que o átomo permanece na cavidade.

Em seguida os átomos atravessam a segunda zona de Ramsey, sofrendo outro pulso de  $\pi/2$ , antes de serem detectados.

Considerando o campo na cavidade inicialmente no estado coerente  $|\alpha\rangle$ , com  $\alpha$

real e  $\phi_1 = \pi$ , o estado emaranhado átomo - campo evolui, à medida em que o átomo atravessa cada cavidade, de acordo com a seqüência:

$$\begin{array}{ll}
 1^{\circ} \text{ átomo} & |\Psi_{\text{átomo}}\rangle \otimes |\Psi_{\text{campo}}\rangle \\
 \text{Após R1} & |g\rangle |\alpha\rangle + |e\rangle |\alpha\rangle \\
 \text{Após C} & |g\rangle |\alpha\rangle + |e\rangle |\exp(i\pi)\alpha\rangle \\
 \text{Após R2} & |g\rangle (|\exp(i\pi)\alpha\rangle + |\alpha\rangle) + |e\rangle (|\exp(i\pi)\alpha\rangle - |\alpha\rangle)
 \end{array}$$

Dessa forma, uma detecção do átomo no estado  $|g\rangle$  projeta o campo na cavidade no estado coerente par  $(|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle)$ , enquanto a detecção em  $|e\rangle$  projeta o campo no estado coerente ímpar  $(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$ .

Podemos então escrever o campo na cavidade como:

$$|\Psi_{\varepsilon_1}(\alpha)\rangle = \mathcal{N}_{\varepsilon_1}(\alpha) [ |-\alpha\rangle + \varepsilon_1 |\alpha\rangle ] \quad (2.6)$$

Esses são os chamados estados tipo gato de Schrödinger do campo eletromagnético na cavidade, com  $\varepsilon_1 = +1$  para estados pares (detecção em  $|g\rangle$ ) e  $\varepsilon_1 = -1$  para estados ímpares (detecção em  $|e\rangle$ ).

Se um segundo átomo é lançado da fonte logo em seguida, a um tempo suficientemente curto para que o estado do campo na cavidade não perca a coerência e a uma velocidade tal que a interação do átomo com o campo cause neste uma variação de fase  $\phi_2 = \pi/2$ , ocorrerá um processo semelhante ao ocorrido na passagem do primeiro átomo, de forma que:

$$\begin{array}{ll}
 2^{\circ} \text{ Átomo} & |\Psi_{\text{átomo}}\rangle \otimes |\Psi_{\text{campo}}\rangle \\
 \text{Após R1} & (|g\rangle + |e\rangle) |\Psi_{\varepsilon_1}(\alpha)\rangle \\
 \text{Após C} & |g\rangle |\Psi_{\varepsilon_1}(\alpha)\rangle + |e\rangle |\Psi_{\varepsilon_1}(\exp(\frac{i\pi}{2})\alpha)\rangle \\
 \text{Após R2} & |g\rangle (|\Psi_{\varepsilon_1}(\exp(\frac{i\pi}{2})\alpha)\rangle + |\Psi_{\varepsilon_1}(\alpha)\rangle) + |e\rangle (|\Psi_{\varepsilon_1}(\exp(\frac{i\pi}{2})\alpha)\rangle - |\Psi_{\varepsilon_1}(\alpha)\rangle)
 \end{array}$$

Percebe-se mais uma vez que o campo é projetado em estados gatos de schrödinger pares ou ímpares, agora de segunda geração, de acordo com as detecções em  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$

respectivamente. Dessa forma o campo na cavidade pode ser expresso sob a forma:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha)\rangle &= \frac{\mathcal{N}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha)}{\mathcal{N}_{\varepsilon_1}(\alpha)} \left[ \left| \Psi_{\varepsilon_1} \left( \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)\alpha \right) \right\rangle + \varepsilon_2 |\Psi_{\varepsilon_1}(\alpha)\rangle \right] \\
&= \mathcal{N}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha) [\varepsilon_1\varepsilon_2 |\alpha\rangle + \varepsilon_1 \left| \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)\alpha \right\rangle \\
&\quad + \varepsilon_2 \left| \exp(i\pi)\alpha \right\rangle + \left| \exp\left(\frac{3\pi i}{2}\right)\alpha \right\rangle] \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Passando um terceiro átomo, ajustado com velocidade tal a produzir uma variação de fase  $\phi_3 = \frac{\pi}{4}$  no campo da cavidade, teremos, ao final do percurso, um estado gato de Schrödinger de terceira geração:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(\alpha)\rangle &= \frac{\mathcal{N}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(\alpha)}{\mathcal{N}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha)} \left[ \left| \Psi_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left( \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\alpha \right) \right\rangle + \varepsilon_3 |\Psi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha)\rangle \right] \\
&= \mathcal{N}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(\alpha) [\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 |\alpha\rangle + \varepsilon_2\varepsilon_3 \left| \exp(i\pi)\alpha \right\rangle + \varepsilon_1\varepsilon_3 \left| \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)\alpha \right\rangle \\
&\quad + \varepsilon_1\varepsilon_2 \left| \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\alpha \right\rangle + \varepsilon_3 \left| \exp\left(\frac{3i\pi}{2}\right)\alpha \right\rangle + \varepsilon_2 \left| \exp\left(\frac{5i\pi}{4}\right)\alpha \right\rangle \\
&\quad + \varepsilon_1 \left| \exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\alpha \right\rangle + \left| \exp\left(\frac{7i\pi}{4}\right)\alpha \right\rangle] \tag{2.8}
\end{aligned}$$

De forma genérica, após a passagem de N átomos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_N}(\alpha)\rangle &= \\
&\frac{\mathcal{N}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_N}(\alpha)}{\mathcal{N}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{N-1}}(\alpha)} \left[ \left| \Psi_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{N-1}} \left( \exp\left(\frac{i\pi}{2^{N-1}}\right)\alpha \right) \right\rangle + \varepsilon_N |\Psi_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{N-1}}(\alpha)\rangle \right] \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Dessa forma é possível expressar um estado de geração N no plano  $\alpha$  como a soma do estado imediatamente anterior com ele próprio rotacionado em  $\pi/2^{N-1}$ , como mostra o diagrama abaixo

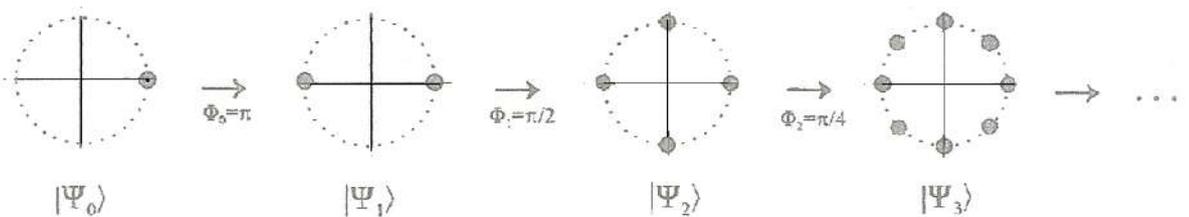


Figura 2.2:

## 2.2 Geração em modos viajantes

O esquema do método proposto é ilustrado na figura [2.3]. Um interferômetro de Mach-Zehnder (IMZ) contém um meio Kerr em um dos braços. Esse meio acopla um modo externo ao interferômetro, denotado por modo  $a$ , a um modo interno, o modo  $b$ . A interação dispersiva efetiva entre esses dois modos no meio Kerr é descrita pelo hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_K = \hbar K \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad (2.10)$$

onde  $K$  é proporcional à terceira ordem da susceptibilidade  $\chi^{(3)}$ .

Assumimos que o modo  $a$  contém o estado coerente  $|\alpha\rangle$  e que um único fóton entra por um dos lados do primeiro separador de feixes SF1 e o estado de vácuo pelo outro lado.

Imediatamente depois da passagem por SF1 o estado do sistema é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + i|0,1\rangle)_{IMZ} |\alpha\rangle \quad (2.11)$$

## Interferômetro de Mach-Zehnder

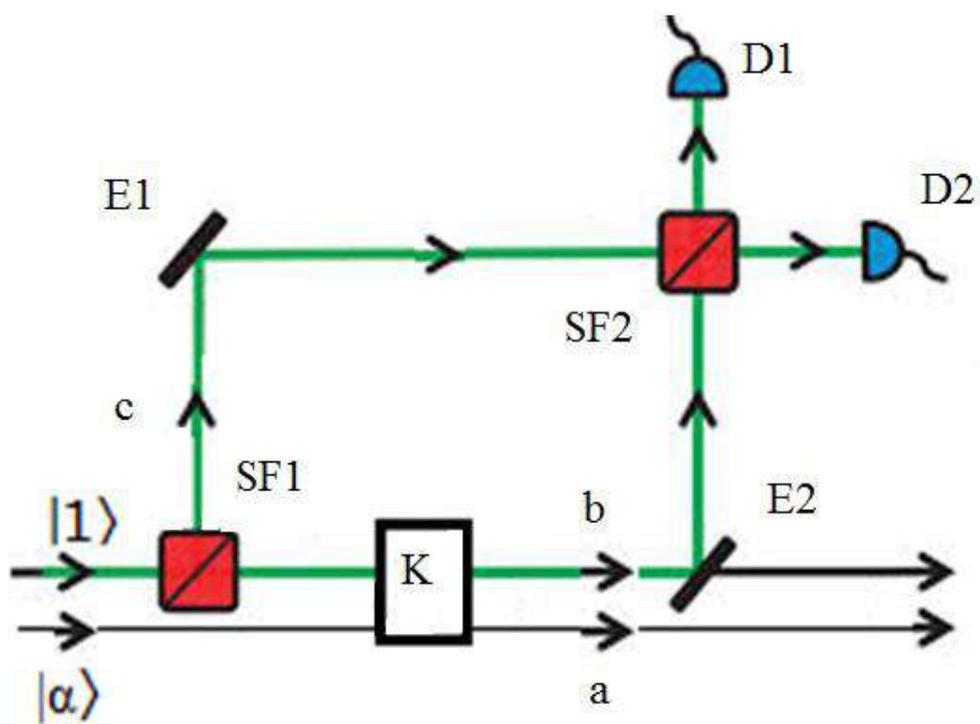


Figura 2.3

onde o primeiro número nos termos da parte do estado associada ao IMZ corresponde ao feixe no sentido horário, enquanto o segundo ao feixe anti-horário. Indo adiante, imediatamente antes do segundo separador de feixes SF2, o estado geral do sistema evolui para

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle |\alpha\rangle + i |0, 1\rangle |\alpha \exp(i\varphi)\rangle) \quad (2.12)$$

onde  $\varphi = \frac{Kl}{v}$ , sendo  $l$  o comprimento do meio e  $v$  a velocidade da luz no meio. O deslocamento da fase no estado coerente é consequência da sua interação com o meio Kerr, representada pelo operador unitário

$$\hat{U} = \exp(-i\varphi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b}), \quad (2.13)$$

que é de fato um controlador de fase que só age sobre o estado coerente se houver a presença do fóton no meio Kerr. Observa-se, de acordo com as expressões de  $\hat{H}_K$  e  $\hat{U}$ , que o deslocamento de fase é proporcional à não linearidade do meio Kerr. Logo após a passagem por SF2 ocorre as transformações

$$|1, 0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + i |0, 1\rangle), \quad (2.14)$$

$$|0, 1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle + i |1, 0\rangle), \quad (2.15)$$

o que faz com que o estado do sistema com um todo seja descrito por

$$\frac{1}{2}[|1, 0\rangle (|\alpha\rangle - |\alpha \exp(-i\varphi)\rangle) + i |0, 1\rangle (|\alpha\rangle + |\alpha \exp(-i\varphi)\rangle)]. \quad (2.16)$$

Portanto, a depender da detecção do estado  $|1, 0\rangle$  ou  $|0, 1\rangle$ , o modo  $a$  pode ser projetado nos estados

$$|\alpha\rangle \pm |\alpha \exp(-i\varphi)\rangle. \quad (2.17)$$

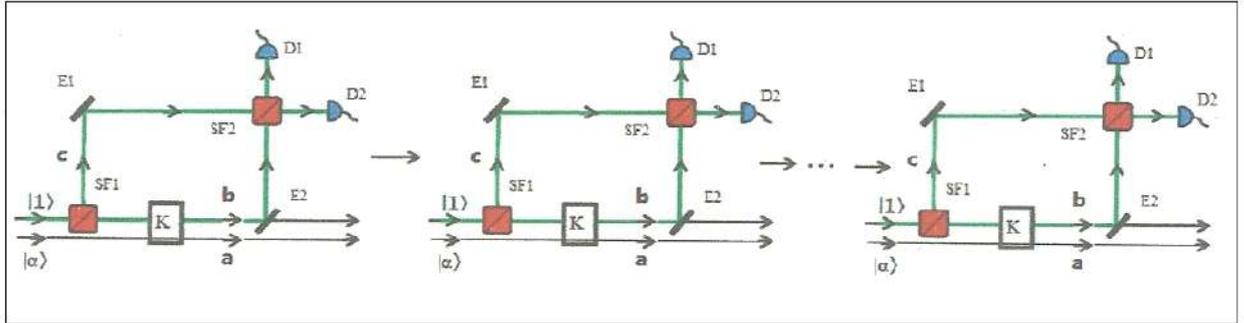


Figura 2.4:

Assim o estado no modo  $a$  pode ser escrito como

$$|\psi_{\pm}\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |\alpha \exp(-i\varphi)\rangle), \quad (2.18)$$

que é o mesmo gato de Schrödinger encontrado na primeira geração do processo descrito na seção anterior. De fato é nítida a analogia entre os dois processos. Além disso, montando-se uma seqüência de interferômetros alinhados (Fig. 2.4) gera-se os estados de gerações posteriores, tal qual descrito para os estados na cavidade. Nessa analogia os separadores de feixes fazem papel semelhante ao das zonas de Ransey enquanto que o meio Kerr ao da cavidade ressonante.

Em ambos os processos, dificuldades para a implementação experimental surgem devido, fundamentalmente, à decoerência. Tal aspecto é tanto pior quanto mais estados coerentes compoñham a superposição, sendo mais grave no caso de cavidades.

## 2.3 Normalização

Vejamos agora como são expressas as diversas constantes de normalização para os estados gato de Schrödinger. Na primeira geração  $N_{\varepsilon_1}(\alpha)$  é obtida fazendo-se  $\langle \Psi_{\varepsilon_1}(\alpha) | \Psi_{\varepsilon_1}(\alpha) \rangle = 1$ , podendo ser expressa como:

$$N_{\varepsilon_1}(\alpha) = [2 \exp(-\alpha^2) \mathcal{F}_{\varepsilon_1}(\alpha^2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.19)$$

Onde a constante

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(\alpha^2) = \frac{1}{2}[\exp(\alpha^2) + \varepsilon_1 \exp(-\alpha^2)] \quad (2.20)$$

será utilizada na generalização das expressões para os estados  $|\Psi\rangle$ , suas normalizações e expressões de indicadores estatísticos.

Explicitamente, as constantes  $\mathcal{F}_+(\alpha^2)$  e  $\mathcal{F}_-(\alpha^2)$  são dadas por:

$$\mathcal{F}_+(\alpha^2) = \cosh(\alpha^2) \quad (2.21)$$

$$\mathcal{F}_-(\alpha^2) = \sinh(\alpha^2) \quad (2.22)$$

Da mesma forma que na primeira geração, tem-se, na segunda  $\langle \Psi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha) | \Psi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha) \rangle = 1$ , o que leva a

$$N_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha) = [2^4 \exp(-\alpha^2) \mathcal{F}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha^2)]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

e

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha^2) = \frac{1}{2}[\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(\alpha^2) + \varepsilon_2 \operatorname{Re}\{\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(\exp(\frac{i\pi}{2})\alpha^2)\}] \quad (2.24)$$

Onde há duas constantes pares e duas ímpares:

$$\mathcal{F}_{++}(\alpha^2) = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha^2) + \cos(\alpha^2)] \quad (2.25)$$

$$\mathcal{F}_{+-}(\alpha^2) = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha^2) - \cos(\alpha^2)] \quad (2.26)$$

e

$$\mathcal{F}_{-+}(\alpha^2) = \frac{1}{2} \sinh(\alpha^2) \quad (2.27)$$

$$\mathcal{F}_{--}(\alpha^2) = \frac{1}{2} \sinh(\alpha^2) \quad (2.28)$$

Repetindo o mesmo procedimento para a terceira geração obtém-se

$$\mathcal{N}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\alpha) = [2^6 \exp(-\alpha^2) \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\alpha^2)]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

e

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\alpha^2) = \frac{1}{2} [\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\alpha^2) + \varepsilon_3 \operatorname{Re}\{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\exp(\frac{i\pi}{4})\alpha^2)\}] \quad (2.30)$$

Que explicitamente corresponde às quatro constantes pares:

$$\mathcal{F}_{+++}(\alpha^2) = \frac{1}{4} [\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2 + 2 \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)] \quad (2.31)$$

$$\mathcal{F}_{++-}(\alpha^2) = \frac{1}{4} [\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2 - 2 \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)] \quad (2.32)$$

$$\mathcal{F}_{+--}(\alpha^2) = \frac{1}{4} [\cosh \alpha^2 - \cos \alpha^2 - 2 \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)] \quad (2.33)$$

$$\mathcal{F}_{+-+}(\alpha^2) = \frac{1}{4} [\cosh \alpha^2 - \cos \alpha^2]$$

e às quatro ímpares

$$\mathcal{F}_{---}(\alpha^2) = \frac{1}{4} [\sinh(\alpha^2) - 2 \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)] \quad (2.34)$$

$$\mathcal{F}_{-+-}(\alpha^2) = \frac{1}{4} \left[ \sinh(\alpha^2) - 2 \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (2.35)$$

$$\mathcal{F}_{-++}(\alpha^2) = \frac{1}{4} \left[ \sinh(\alpha^2) + 2 \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (2.36)$$

$$\mathcal{F}_{--+}(\alpha^2) = \frac{1}{4} \left[ \sinh(\alpha^2) + 2 \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (2.37)$$

De forma genérica, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & |\Psi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha)\rangle = \\ & \frac{\mathcal{N}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha)}{\mathcal{N}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{N-1}}(\alpha)} \left[ \left| \Psi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{N-1}} \left( \exp\left(\frac{i\pi}{2^{N-1}}\right) \alpha \right) \right\rangle + \varepsilon_N \left| \Psi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{N-1}}(\alpha) \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde

$$\mathcal{N}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha) = [2^{2N} \exp(-\alpha^2) \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots}(\alpha^2)]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

e

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2) = \\ & \frac{1}{2} \left[ \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{N-1}}(\alpha^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_N \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{N-1}} \left( \exp\left(\frac{i\pi}{2^{N-1}}\right) \alpha^2 \right) + \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{N-1}} \left( \exp\left(-\frac{i\pi}{2^{N-1}}\right) \alpha^2 \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

As constantes de normalização são importantes para se determinar as propriedades estatísticas destes estados.

## Capítulo 3

# Propriedades não clássicas das superposições de estado tipo gato de Schrödinger

Neste capítulo estudaremos as propriedades não clássicas das superposições de estados tipo gato de Schrödinger cuja geração foi discutida no capítulo anterior. Estudaremos basicamente a estatística de fótons, a inversão de população atômica para átomos interagindo com tais campos e investigaremos se estes apresentam compressão de ruído quântico nas quadraturas.

### 3.1 Distribuição de probabilidade de fótons

As expansões das superposições de estados tipo gato da Schrödinger na base número

$$|\Psi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n; \alpha) |n\rangle, \quad (3.1)$$

onde  $C_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n, \alpha) = \langle n | \Psi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha) \rangle$ , podem ser obtidas utilizando a relação (válida para um estado coerente  $\beta$ )

$$\langle n | \beta \rangle = \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}\right). \quad (3.2)$$

Daí, pode-se obter facilmente a distribuição de probabilidade de fótons:

$$P_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n; \alpha) = |C_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n; \alpha)|^2 \quad (3.3)$$

Para os estados de primeira geração, tem-se:

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_1}(n; \alpha) &= |\mathcal{N}_{\varepsilon_1}(\alpha)|^2 |\langle n | [-\alpha] + \varepsilon_1 |\alpha \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1}(\alpha^2)} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} \left| \frac{1}{2} [(\exp i\pi)^n + \varepsilon_1] \right|^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

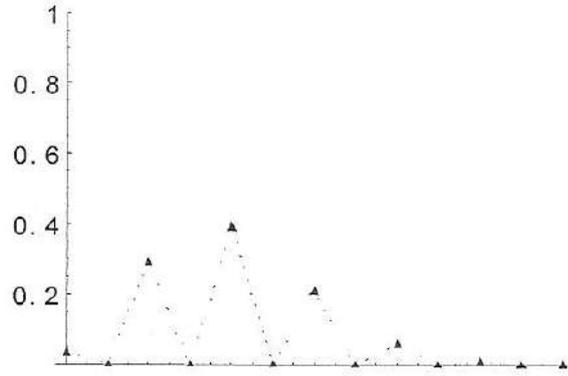
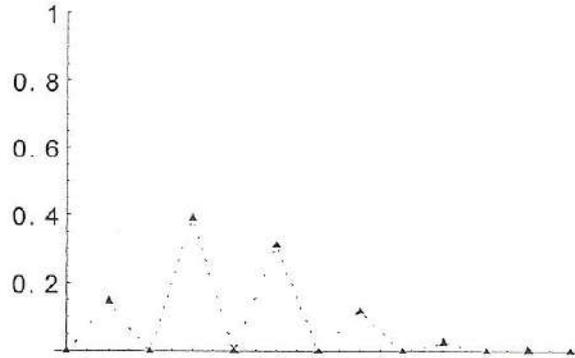
Vê-se imediatamente que para os estados pares ( $\varepsilon_1 = +1$ ) de primeira geração apenas os estados de Fock com  $n$  par participam da superposição, enquanto estados ímpares ( $\varepsilon_1 = -1$ ) são constituídos apenas de estados número ímpares. De forma explícita, a expressão para a distribuição de probabilidade de fótons é dada por

$$P_{\varepsilon_1}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \varepsilon_1 \cos n\pi)}{n!((1 + \varepsilon_1) \cosh \alpha^2 + (1 - \varepsilon_1) \sinh \alpha^2)}, \quad (3.5)$$

ou seja,

$$P_+(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos n\pi)}{2n! \cosh \alpha^2}, \quad (3.6)$$

$$P_-(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 - \cos n\pi)}{2n! \sinh \alpha^2}. \quad (3.7)$$

Figura 3.1:  $P_+(n; \alpha = 2)$ Figura 3.2:  $P_-(n; \alpha = 2)$ 

Estas distribuições estão ilustradas a seguir para o valor  $\alpha = 2$ .

Para os estados de segunda geração obtém-se

$$\begin{aligned}
 P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(n; \alpha) &= \\
 &= |\mathcal{N}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\alpha)|^2 \left| \langle n | \left[ \varepsilon_1 \varepsilon_2 |\alpha\rangle + \varepsilon_1 \left| \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \alpha \right\rangle + \varepsilon_2 \left| \exp(i\pi) \alpha \right\rangle + \left| \exp\left(\frac{3\pi i}{2}\right) \alpha \right\rangle \right] \right|^2 \\
 &= \frac{1}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\alpha^2)} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} \left| \frac{1}{4} [(\exp i\pi)^n + \varepsilon_1] \left[ \left(\exp \frac{i\pi}{2}\right)^n + \varepsilon_2 \right] \right|^2 \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Novamente percebe-se a manifestação de duas classes distintas de estados de segunda gera-

ção: a par, para  $\varepsilon_1 = +1$ , e a ímpar, para  $\varepsilon_1 = -1$ , cujos estados são constituídos apenas por estados de Fock com números pares ou ímpares, respectivamente. Entretanto nota-se que os estados de paridade par possuem distribuições de probabilidade diferentes entre si enquanto os de paridade ímpar possuem a mesma distribuição. Explicitamente, para a segunda geração, chega-se à seguinte expressão:

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \varepsilon_2 \cos(\frac{n\pi}{2}))(\varepsilon_1 + \cos(n\pi))}{n!(1 + \varepsilon_1)(\cosh \alpha^2 + \varepsilon_2 \cos \alpha^2) - (\varepsilon_1 - 1) \sinh \alpha^2}, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$P_{++}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n!(\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2)}, \quad (3.10)$$

$$P_{+-}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n!(\cosh \alpha^2 + \sinh \alpha^2 - \cos \alpha^2)}, \quad (3.11)$$

$$P_{-+}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 - \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n! \sinh \alpha^2}, \quad (3.12)$$

$$P_{--}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n! \sinh \alpha^2}. \quad (3.13)$$

Estas distribuições estão apresentadas adiante; vê-se através dos gráficos para as primeiras duas gerações que os estados  $|\Psi_-(\alpha)\rangle$ ,  $|\Psi_{-+}(\alpha)\rangle$  e  $|\Psi_{--}(\alpha)\rangle$  possuem a mesma distribuição de probabilidade.

Já para estados de terceira geração obtém-se:

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(n; \alpha) &= |\mathcal{N}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(\alpha)|^2 |\langle n | [\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 |\alpha\rangle + \varepsilon_2\varepsilon_3 |\exp(i\pi)\alpha\rangle + \varepsilon_1\varepsilon_3 \left| \exp(\frac{i\pi}{2})\alpha \right\rangle + \varepsilon_1\varepsilon_2 \left| \exp(\frac{i\pi}{4})\alpha \right\rangle \\ &\quad + \varepsilon_3 \left| \exp(\frac{3i\pi}{2})\alpha \right\rangle + \varepsilon_2 \left| \exp(\frac{5i\pi}{4})\alpha \right\rangle + \varepsilon_1 \left| \exp(\frac{3i\pi}{4})\alpha \right\rangle + \left| \exp(\frac{7i\pi}{4})\alpha \right\rangle^2 |^2 \\ &= \frac{1}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(\alpha^2)} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} \left| \frac{1}{8} [(\exp i\pi)^n + \varepsilon_1] \left[ (\exp \frac{i\pi}{2})^n + \varepsilon_2 \right] \left[ (\exp \frac{i\pi}{4})^n + \varepsilon_3 \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ção: a par, para  $\varepsilon_1 = +1$ , e a ímpar, para  $\varepsilon_1 = -1$ , cujos estados são constituídos apenas por estados de Fock com números pares ou ímpares, respectivamente. Entretanto nota-se que os estados de paridade par possuem distribuições de probabilidade diferentes entre si enquanto os de paridade ímpar possuem a mesma distribuição. Explicitamente, para a segunda geração, chega-se à seguinte expressão:

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \varepsilon_2 \cos(\frac{n\pi}{2})(\varepsilon_1 + \cos(n\pi)))}{n!(1 + \varepsilon_1)(\cosh \alpha^2 + \varepsilon_2 \cos \alpha^2) - (\varepsilon_1 - 1) \sinh \alpha^2}, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$P_{++}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n!(\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2)}, \quad (3.10)$$

$$P_{+-}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n!(\cosh \alpha^2 + \sinh \alpha^2 - \cos \alpha^2)}, \quad (3.11)$$

$$P_{-+}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 - \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n! \sinh \alpha^2}, \quad (3.12)$$

$$P_{--}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))}{2n! \sinh \alpha^2}. \quad (3.13)$$

Estas distribuições estão apresentadas adiante; vê-se através dos gráficos para as primeiras duas gerações que os estados  $|\Psi_-(\alpha)\rangle$ ,  $|\Psi_{-+}(\alpha)\rangle$  e  $|\Psi_{--}(\alpha)\rangle$  possuem a mesma distribuição de probabilidade.

Já para estados de terceira geração obtém-se:

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(n; \alpha) = & |N_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(\alpha)|^2 | \langle n | [\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 | \alpha \rangle + \varepsilon_2\varepsilon_3 | \exp(i\pi)\alpha \rangle + \varepsilon_1\varepsilon_3 \left| \exp(\frac{i\pi}{2})\alpha \right\rangle + \varepsilon_1\varepsilon_2 \left| \exp(\frac{i\pi}{4})\alpha \right\rangle \\ & + \varepsilon_3 \left| \exp(\frac{3i\pi}{2})\alpha \right\rangle + \varepsilon_2 \left| \exp(\frac{5i\pi}{4})\alpha \right\rangle + \varepsilon_1 \left| \exp(\frac{3i\pi}{4})\alpha \right\rangle + \left| \exp(\frac{7i\pi}{4})\alpha \right\rangle^2 |^2 \\ = & \frac{1}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}(\alpha^2)} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} \left| \frac{1}{8} [(\exp i\pi)^n + \varepsilon_1] \left[ (\exp \frac{i\pi}{2})^n + \varepsilon_2 \right] \left[ (\exp \frac{i\pi}{4})^n + \varepsilon_3 \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

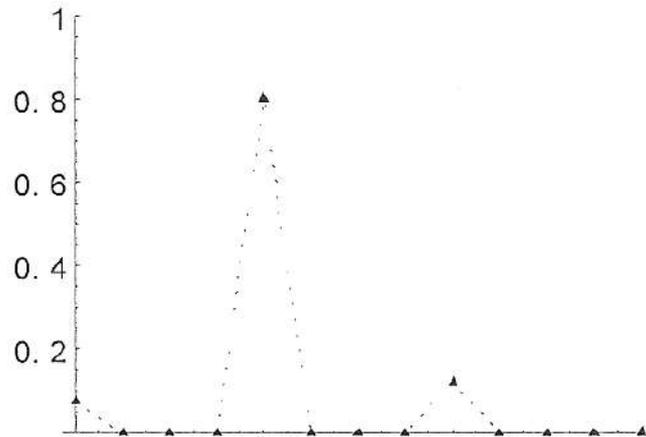


Figura 3.3:  $P_{++}(n; \alpha = 2)$

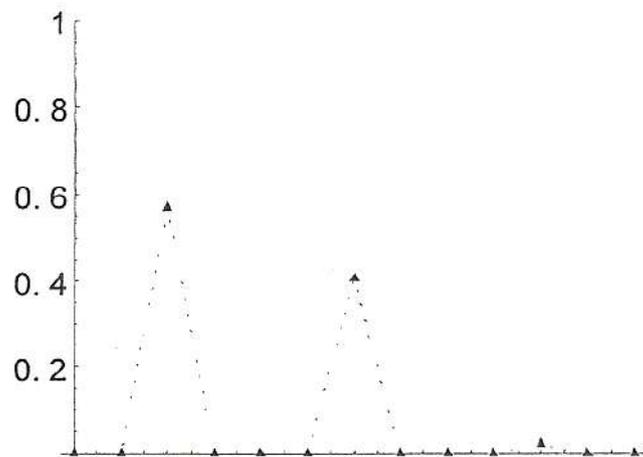


Figura 3.4:  $P_{+-}(n; \alpha = 2)$

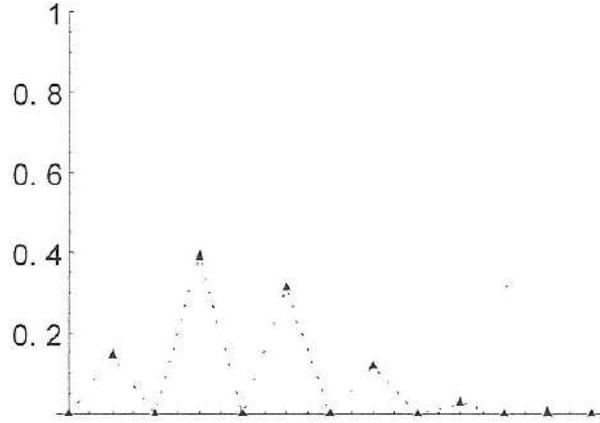


Figura 3.5:  $P_{-+}(n; \alpha = 2)$  e  $P_{--}(n; \alpha = 2)$

Mais uma vez nota-se que os estados pares (ímpares) são compostos apenas de estados número pares (ímpares). Isto se deve, claramente, ao fator  $[(\exp i\pi)^n + \varepsilon_1] = (-1)^n + \varepsilon_1$ . Explicitamente, as expressões para a distribuição de probabilidade dos estados pares de terceira geração são dadas por:

$$P_{+++}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 + \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2 + 2 \cos(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}))}, \quad (3.15)$$

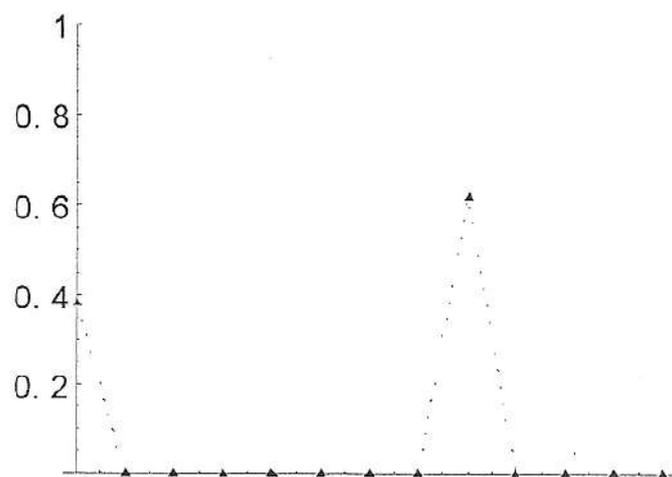
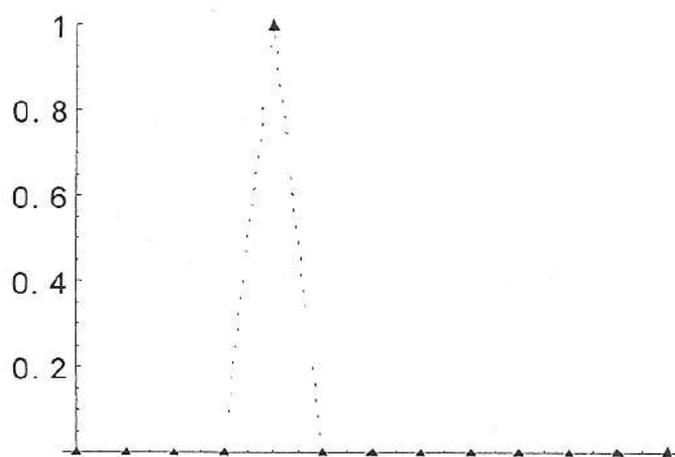
$$P_{+-+}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 + \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\cosh \alpha^2 - \cos \alpha^2)}, \quad (3.16)$$

$$P_{+--}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2)}, \quad (3.17)$$

$$P_{++-}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 + \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2 - 2 \cos(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}))}. \quad (3.18)$$

Para os estados ímpares de terceira geração, tem-se:

$$P_{-++}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 - \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 + \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\sinh \alpha^2 + 2 \cos(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}) \sinh(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}))}, \quad (3.19)$$

Figura 3.6:  $P_{+++}(n; \alpha = 2)$ Figura 3.7:  $P_{++-}(n; \alpha = 2)$

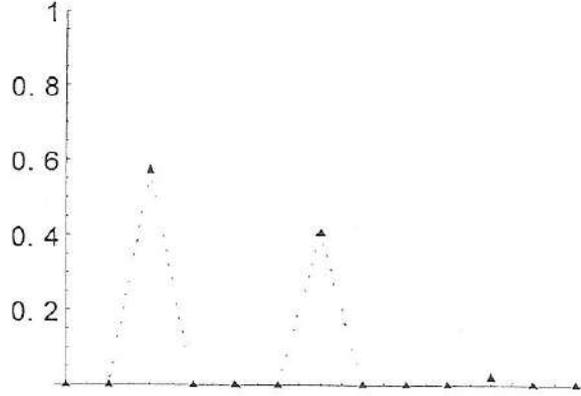


Figura 3.8:  $P_{+-+}(n; \alpha = 2)$  e  $P_{+--}(n; \alpha = 2)$

$$P_{+-+}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 - \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 + \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\sinh \alpha^2 + 2 \cos(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}) \sinh(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}))}, \quad (3.20)$$

$$P_{+--}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 - \cos(n\pi))(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\sinh \alpha^2 - 2 \cos(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}) \sinh(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}))}, \quad (3.21)$$

$$P_{-+-}(n; \alpha) = \frac{\alpha^{2n}(1 - \cos(n\pi))(1 + \cos(\frac{n\pi}{2}))(1 - \cos(\frac{n\pi}{4}))}{2n!(\sinh \alpha^2 - 2 \cos(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}) \sinh(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}))}. \quad (3.22)$$

Novamente percebe-se que alguns estados vão compartilhar a mesma distribuição de probabilidade de número fótons, o que faz sugerir que este seja um fenômeno recorrente ao longo das gerações. A regra de recorrência para a determinação dos estados que devem possuir a mesma distribuição de fótons será exposta no final dessa seção.

Das expressões acima pode-se determinar uma expressão genérica para a distribuição de probabilidade de fótons para estados da  $n$ -ésima geração:

$$P_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n; \alpha) = \frac{1}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2)} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} A_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n) \quad (3.23)$$

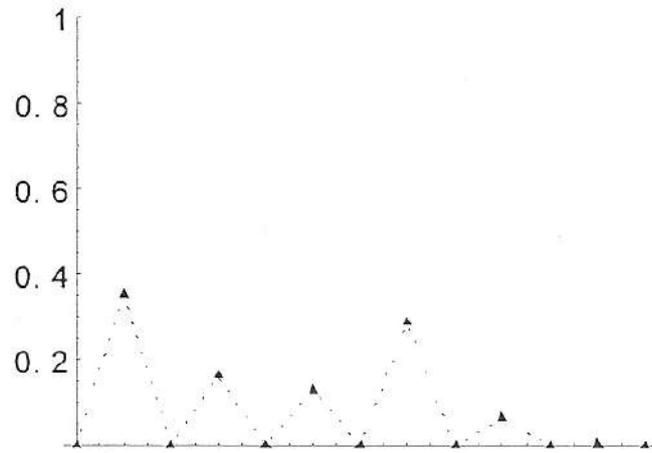


Figura 3.9:  $P_{-+++}(n; \alpha = 2)$  e  $P_{----}(n; \alpha = 2)$

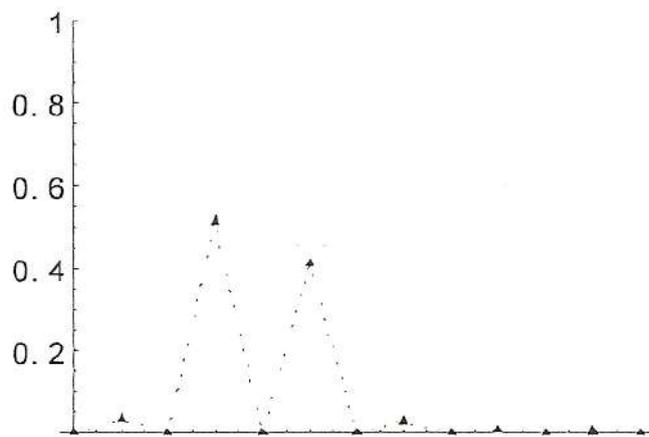


Figura 3.10:  $P_{----}(n; \alpha = 2)$  e  $P_{-+-}(n; \alpha = 2)$

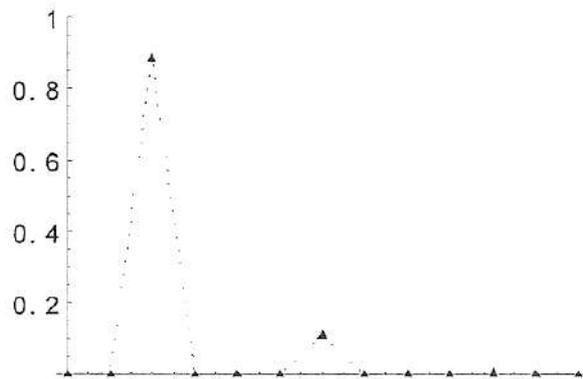


Figura 3.11:  $P_{+--+}(n; \alpha = 2)$  e  $P_{+---}(n; \alpha = 2)$

com

$$A_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n) = \left| \frac{1}{2^N} \prod_{j=1}^N \left[ \exp\left(\frac{ni\pi}{2^{j-1}}\right) + \varepsilon_j \right] \right|^2 \quad (3.24)$$

Para todos estes estados, ocorrem fortes oscilações na distribuição de probabilidade de fótons, havendo sistematicamente a presença de buracos na distribuição, devido à interferência no espaço de fase, o que caracteriza a natureza quantum-mecânica destes estados.

### 3.1.1 Estados com mesma distribuição de probabilidade

Como se vê da seção anterior há uma série de estados com distribuição de probabilidade de fótons idênticas. Isso foi identificado para os estados

$$\begin{aligned} &|\Psi_-(\alpha)\rangle, |\Psi_{-+}(\alpha)\rangle \text{ e } |\Psi_{--}(\alpha)\rangle \\ &|\Psi_{+-}(\alpha)\rangle, |\Psi_{+--}(\alpha)\rangle \text{ e } |\Psi_{+--+}(\alpha)\rangle \\ &|\Psi_{---+}(\alpha)\rangle \text{ e } |\Psi_{-++}(\alpha)\rangle \\ &|\Psi_{-+-}(\alpha)\rangle \text{ e } |\Psi_{--}(\alpha)\rangle \end{aligned}$$

Se observarmos as distribuições de probabilidade de fótons para as gerações posteriores notamos o aparecimento de diversos outros casos de repetição. Vejamos, por exemplo, como ocorrem as repetições na quarta geração:

$$P_{++++}(\alpha, n) \neq P_{+++}(\alpha, n)$$

$$P_{+---}(\alpha, n) = P_{+--+}(\alpha, n)$$

$$P_{++--}(\alpha, n) \neq P_{++-+}(\alpha, n)$$

$$P_{+-++}(\alpha, n) = P_{+--+}(\alpha, n)$$

$$P_{-+++}(\alpha, n) = P_{-++-}(\alpha, n)$$

$$P_{----}(\alpha, n) = P_{-+--}(\alpha, n)$$

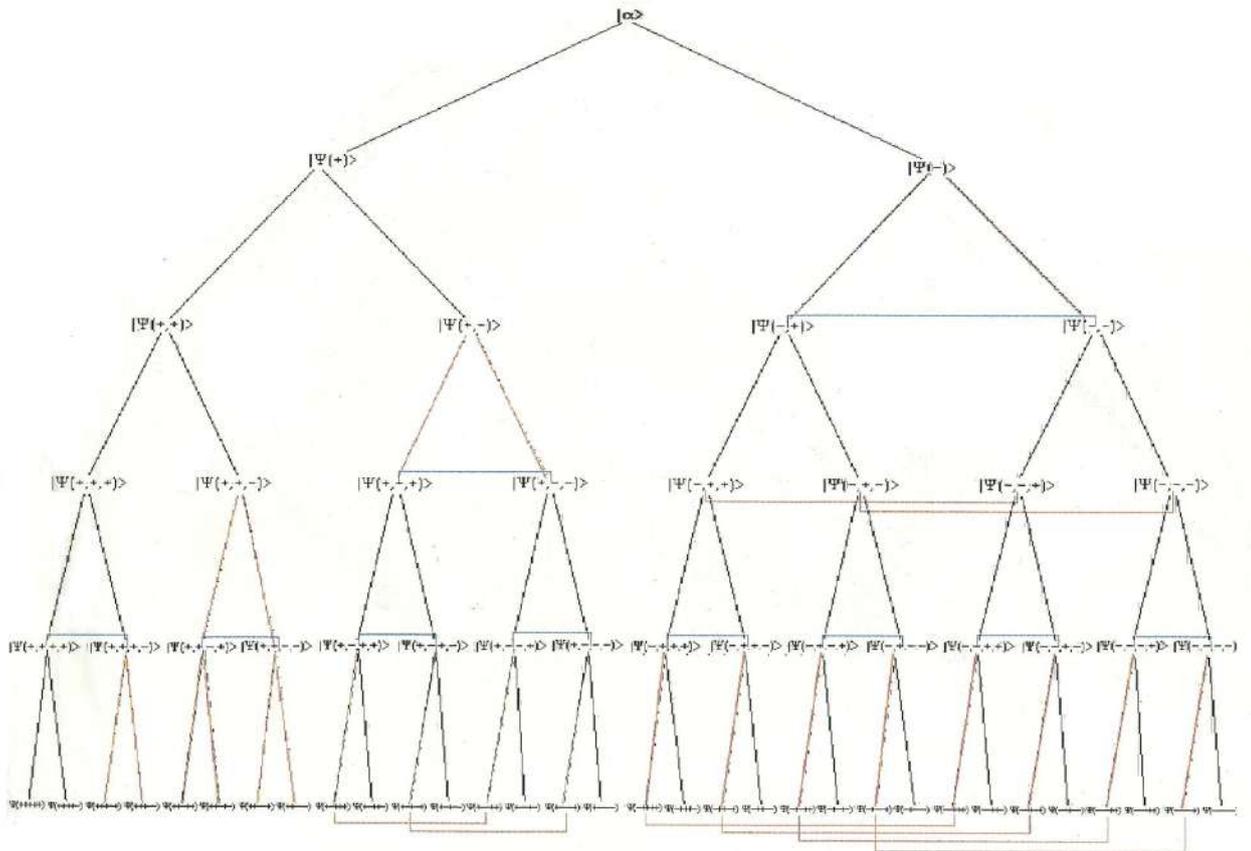
$$P_{-+-+}(\alpha, n) = P_{----+}(\alpha, n)$$

$$P_{-++-}(\alpha, n) = P_{-++-}(\alpha, n)$$

Notamos além disso que as distribuições  $P_{++--}(\alpha, n)$  e  $P_{++-+}(\alpha, n)$  são idênticas à distribuição  $P_{++-}(\alpha, n)$  de terceira geração.

Indo mais adiante obtemos, na quinta geração, as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 P_{++++-}(\alpha, n) &\neq P_{+++++}(\alpha, n) & P_{-++++}(\alpha, n) &= P_{---+++}(\alpha, n) \\
 P_{+++--+}(\alpha, n) &\neq P_{+++--}(\alpha, n) & P_{-+----}(\alpha, n) &= P_{-----}(\alpha, n) \\
 P_{++-++}(\alpha, n) &\neq P_{++--+}(\alpha, n) & P_{-+-+-}(\alpha, n) &= P_{----+-}(\alpha, n) \\
 P_{+--+-}(\alpha, n) &\neq P_{+----}(\alpha, n) & P_{-++-+}(\alpha, n) &= P_{--+-+}(\alpha, n) \\
 P_{+---+}(\alpha, n) &= P_{+-----}(\alpha, n) & P_{-++++-}(\alpha, n) &= P_{---+++}(\alpha, n) \\
 P_{+--+}(\alpha, n) &= P_{+-----}(\alpha, n) & P_{-++--}(\alpha, n) &= P_{---+--}(\alpha, n) \\
 P_{+--++}(\alpha, n) &= P_{+---++}(\alpha, n) & P_{-+-++}(\alpha, n) &= P_{----++}(\alpha, n) \\
 P_{+--+}(\alpha, n) &= P_{+---+-}(\alpha, n) & P_{-+---+}(\alpha, n) &= P_{-----+}(\alpha, n)
 \end{aligned}$$



Das tabelas acima (e da representação como uma árvore genealógica apresentada), percebe-se que os únicos estados a nunca terem suas distribuições idênticas à quaisquer outros são os pares com sinal + para a segunda detecção em diante, sendo a detecção -, portanto, o que ocasiona a reprodução de uma certa distribuição. Dessa forma tem-se a seguinte regra de recorrência para o aparecimento de repetições de probabilidade de número de fótons: Havendo uma detecção + para certo estado, seus dois descendentes diretos irão por certo ter distribuições de probabilidade de número de fótons distintas. Já a partir de uma primeira detecção -, os descendentes diretos desses estados terão a mesma distribuição de probabilidade, não importando se a detecção posterior for + ou -, desde que as outras possíveis detecções sejam as mesmas. Por exemplo: na quinta geração temos a distribuição  $P_{+-+--}(\alpha, n)$ , onde a primeira detecção ímpar é a segunda. Portanto, de acordo com a regra, o sinal da terceira não altera a distribuição de probabilidade do estado se todos os outros sinais forem mantidos inalterados. Logo a distribuição  $P_{+-+--}(\alpha, n)$  será idêntica à  $P_{+-----}(\alpha, n)$ . De forma análoga a distribuição  $P_{+---++}(\alpha, n)$  será idêntica à  $P_{+-----}(\alpha, n)$ , e assim por diante, como pode ser visto na figura.

Também de acordo com a regra, verifica-se um fenômeno interessante para os estados ímpares: todos os pares de estados podem ser obtidos permutando o sinal da segunda detecção e mantendo as outras sem alterações. Esse fenômeno naturalmente também se manifesta nos estados pares de acordo com a primeira ramificação ímpar de forma que a permutação do sinal da próxima detecção estabelecerá os pares de mesma distribuição de probabilidade.

Surge portanto a questão de como distinguir os estados de mesma distribuição de probabilidade de número de fótons, até porque toda uma série de indicadores estatísticos utilizados para caracterizar os estados são construídos em função das mesmas distribuições. Como veremos mais adiante o fator de Mandel, o número médio de fótons e a inversão atômica são exemplos de funções com essa característica.

### 3.1.2 Estatística de fótons

A estatística de fótons é uma das propriedades que podem revelar a natureza quântica do campo eletromagnético. De fato, estados do campo eletromagnético onde a variância do número de fótons,  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$ , tem valor menor que o número médio,  $\langle \hat{n} \rangle$ , são tipicamente quânticos, sem nenhum análogo clássico, sendo chamados estados de estatística sub-poissoniana. Estados clássicos, ao contrário, exibem estatística super-poissoniana, com  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle > \langle \hat{n} \rangle$ , enquanto estados quasi-clássicos, como o estado coerente do campo eletromagnético, podem apresentar estatística poissoniana,  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle$ .

Para desenvolver expressões genéricas para o número médio de fótons e a variância do número de fótons para estes estados, pode-se partir da condição de normalização da probabilidade,  $\sum_{n=0}^{\infty} P_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n; \alpha) = 1$ , que leva diretamente à expansão de Taylor (em potências de  $\alpha^2$ ) das funções de normalização:

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2)^n}{n!} \mathcal{A}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n). \quad (3.25)$$

A partir desta expansão obtém-se o número médio de fótons e o valor esperado de  $\hat{n}^2$  para nossos estados:

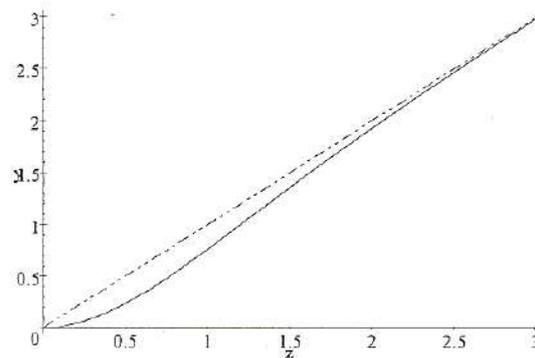
$$\langle \hat{n} \rangle_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n; \alpha) = \alpha^2 \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}^{(1)}(\alpha^2)}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2)}, \quad (3.26)$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(n; \alpha) = \langle \hat{n} \rangle_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} + \alpha^4 \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}^{(2)}(\alpha^2)}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2)}, \quad (3.27)$$

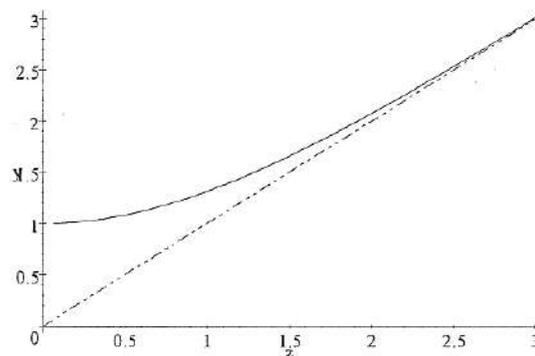
onde  $\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}^{(m)}$  significa a m-ésima derivada de  $\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}$  com respeito a  $\alpha^2$ .

Particularmente, para a primeira geração, tem-se:

$$\langle \hat{n} \rangle_+ = \alpha^2 \tanh(\alpha^2) \quad ; \quad \langle \hat{n} \rangle_- = \alpha^2 \coth(\alpha^2) \quad . \quad (3.28)$$



$$\langle \hat{n} \rangle_+ \times \alpha^2$$



$$\langle \hat{n} \rangle_- \times \alpha^2$$

O que mostra que para o estado par  $\langle \hat{n} \rangle < \alpha^2$  enquanto que para o estado ímpar  $\langle \hat{n} \rangle >$

$\alpha^2$  para pequenos valores de  $\alpha^2$ , ambos aproximando-se assintoticamente da estatística poissoniana com o crescimento de  $\alpha^2$ .

Para os estados de segunda geração tem-se a seguinte expressão para o número médio de fótons,

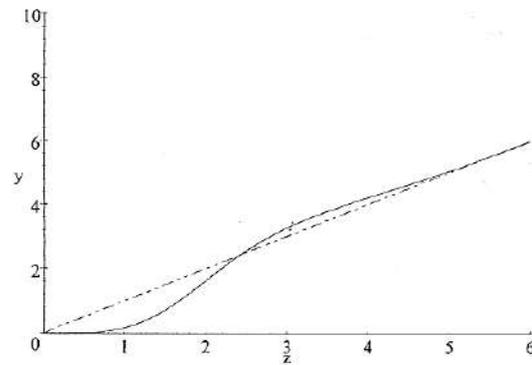
$$\langle \hat{n} \rangle_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \alpha^2 \frac{(\exp(\alpha^2) - \varepsilon_1 \exp(-\alpha^2)) - 2\varepsilon_2(1 + \varepsilon_1) \sin \alpha^2}{(\exp(\alpha^2) + \varepsilon_1 \exp(-\alpha^2)) + 2\varepsilon_2(1 + \varepsilon_1) \cos \alpha^2}, \quad (3.29)$$

que, explicitamente, reduz-se a:

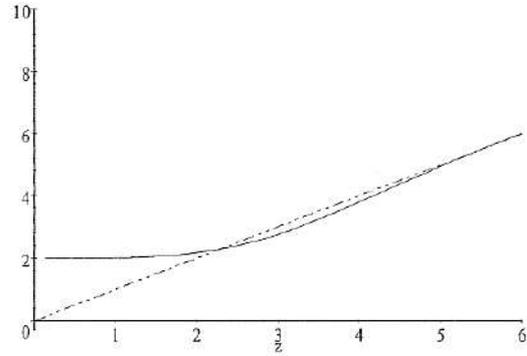
$$\langle \hat{n} \rangle_{++} = \alpha^2 \frac{(\exp(\alpha^2) - \exp(-\alpha^2)) - 2 \sin \alpha^2}{(\exp(\alpha^2) + \exp(-\alpha^2)) + 2 \cos \alpha^2}, \quad (3.30)$$

$$\langle \hat{n} \rangle_{+-} = \alpha^2 \frac{(\exp(\alpha^2) - \exp(-\alpha^2)) + 2 \sin \alpha^2}{(\exp(\alpha^2) + \exp(-\alpha^2)) - 2 \cos \alpha^2}, \quad (3.31)$$

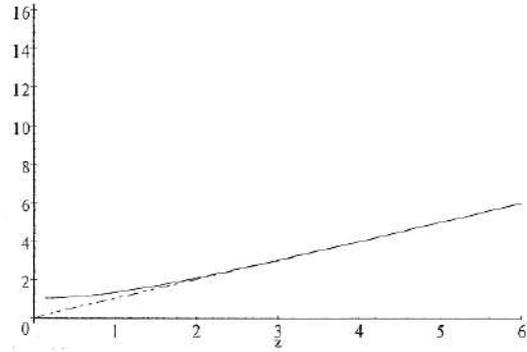
$$\langle \hat{n} \rangle_{-+} = \langle \hat{n} \rangle_{--} = \alpha^2 \frac{(\exp(\alpha^2) - \exp(-\alpha^2))}{(\exp(\alpha^2) + \exp(-\alpha^2))} \quad (3.32)$$



$$\langle \hat{n} \rangle_{++} \propto \alpha^2$$



$$\langle \hat{n} \rangle_{+-} \times \alpha^2$$



$$\langle \hat{n} \rangle_{-+} \times \alpha^2 \text{ e } \langle \hat{n} \rangle_{--} \times \alpha^2$$

Na segunda geração apenas o estado par puro ( $++$ ) apresentou  $\langle \hat{n} \rangle > \alpha^2$  para valores baixos de  $\alpha^2$ .

Na terceira geração, a expressão genérica para o número médio de fótons é dada por

$$\langle \hat{n} \rangle_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} = \alpha^2 \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3}$$

$$a_1 = (1 - \varepsilon_1) \cosh \alpha^2$$

$$a_2 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \sinh \alpha^2$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\varepsilon_3 \left( \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

$$b_1 = \sinh \alpha^2 (1 - \varepsilon_1)$$

$$b_2 = (1 + \varepsilon_1)(\cosh \alpha^2 + \varepsilon_2 \cos \alpha^2)$$

$$b_3 = \varepsilon_3 \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \left( (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - (1 - \varepsilon_1) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

As expressões para os estados pares são:

$$\langle \hat{n} \rangle_{+++} = \frac{\alpha^2 (\sinh \alpha^2 - \sin \alpha^2 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right))}{\cos \alpha^2 + \cosh \alpha^2 + 2 \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}, \quad (3.33)$$

$$\langle \hat{n} \rangle_{++-} = \frac{\alpha^2 (\sinh \alpha^2 - \sin \alpha^2 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right))}{\cos \alpha^2 + \cosh \alpha^2 - 2 \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}, \quad (3.34)$$

$$\langle \hat{n} \rangle_{+-+} = \frac{\alpha^2 (\sinh \alpha^2 + \sin \alpha^2)}{\cosh \alpha^2 + \cos \alpha^2}, \quad (3.35)$$

$$\langle \hat{n} \rangle_{+--} = \frac{\alpha^2 (\sinh \alpha^2 + \sin \alpha^2)}{\cosh \alpha^2 - \cos \alpha^2}. \quad (3.36)$$

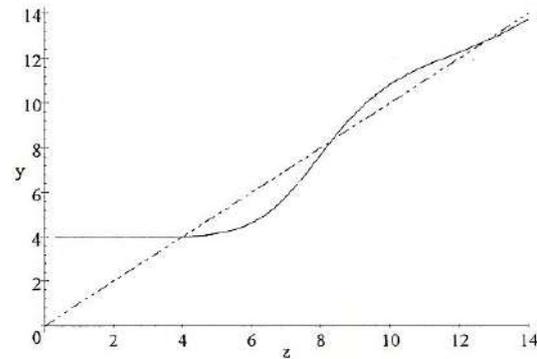
Para os ímpares obtém-se:

$$\langle \hat{n} \rangle_{-++} = \frac{\alpha^2 (\cosh \alpha^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right))}{\sinh \alpha^2 + \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}, \quad (3.37)$$

$$\langle \hat{n} \rangle_{---+} = \frac{\alpha^2 (\cosh \alpha^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right))}{\sinh \alpha^2 + \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}, \quad (3.38)$$

$$\langle \hat{n} \rangle_{----} = \frac{\alpha^2 (\cosh \alpha^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right))}{\sinh \alpha^2 - \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}, \quad (3.39)$$

$$\langle \hat{n} \rangle_{-+-} = \frac{\alpha^2 (\cosh \alpha^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right))}{\sinh \alpha^2 - \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}. \quad (3.40)$$



$$\langle \hat{n} \rangle_{+++} \times \alpha^2$$

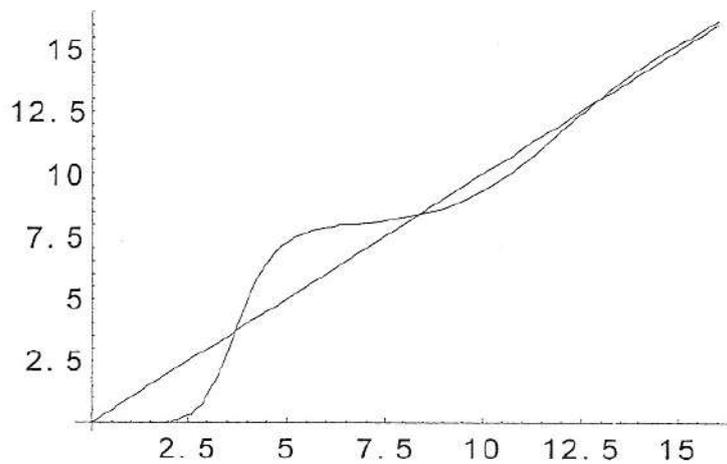
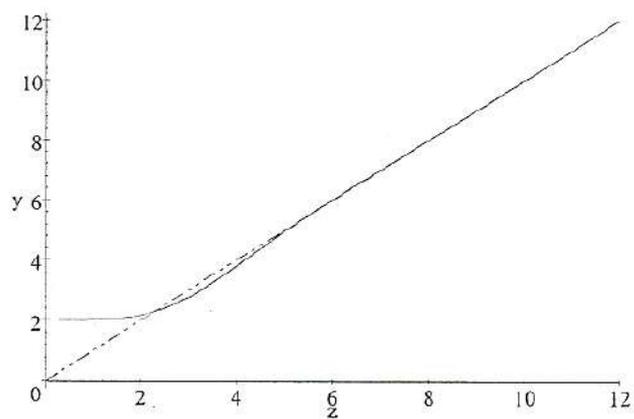
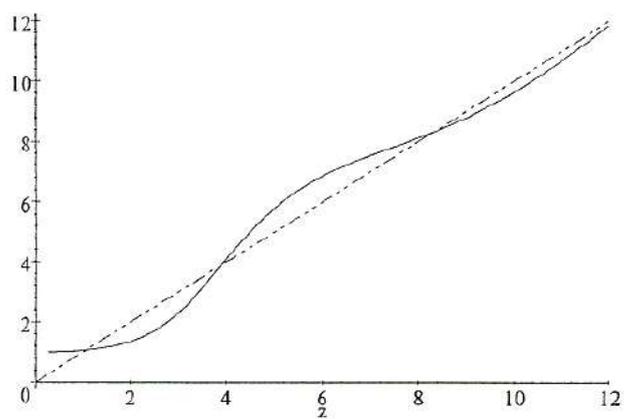


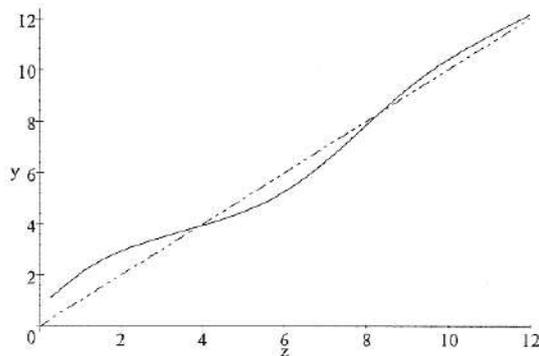
Figura 3.12:  $\langle \hat{n} \rangle_{+++} X \alpha^2$



$\langle \hat{n} \rangle_{+--} X \alpha^2$  e  $\langle \hat{n} \rangle_{-+-} X \alpha^2$



$\langle \hat{n} \rangle_{-++} X \alpha^2$  e  $\langle \hat{n} \rangle_{--+} X \alpha^2$



$$\langle \hat{n} \rangle_{---} \propto \alpha^2 \text{ e } \langle \hat{n} \rangle_{-+-} \propto \alpha^2$$

Nota-se que todos os estados de terceira geração apresentam número médio de fótons que oscila em torno do valor  $\alpha^2$ . É interessante notar que apenas para o estado  $|\Psi_{+++}(\alpha)\rangle$  tem-se  $\langle \hat{n} \rangle < \alpha^2$  para valores baixos de  $\alpha^2$ , o contrário ocorrendo para os outros estados. Vê-se portanto que basta haver uma detecção ímpar para que, para valores pequenos de  $\alpha^2$ , tenha-se  $\langle \hat{n} \rangle > \alpha^2$ . A relação entre a natureza da estatística e o valor de  $\alpha^2$  é explicitada quando desenvolve-se o fator de Mandel.

### 3.1.3 Fator de Mandel

Para caracterizar a natureza da estatística dos estados do campo eletromagnético pode-se fazer uso do fator de Mandel, que é definido como

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} \\ &= \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} - \langle \hat{n} \rangle - 1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ou, de forma genérica, em relação múltiplas gerações dos estados:

$$Q_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2) = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}}{\langle \hat{n} \rangle_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}} - \langle \hat{n} \rangle_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} - 1 \quad (3.42)$$

que, de acordo com as expressões (3.26) e (3.27), pode ser escrito como:

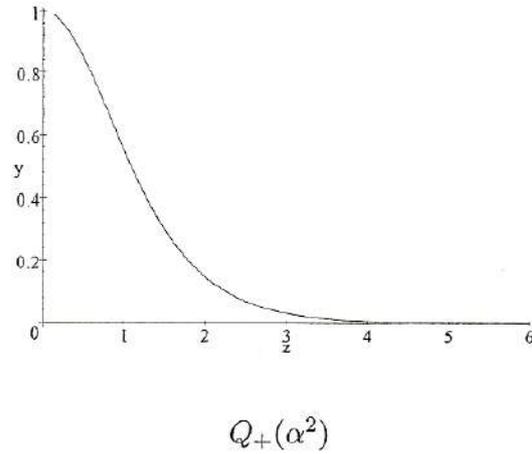
$$Q_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2) = \alpha^2 \left[ \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}^{(2)}(\alpha^2)}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}^{(1)}(\alpha^2)} - \frac{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}^{(1)}(\alpha^2)}{\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha^2)} \right]. \quad (3.43)$$

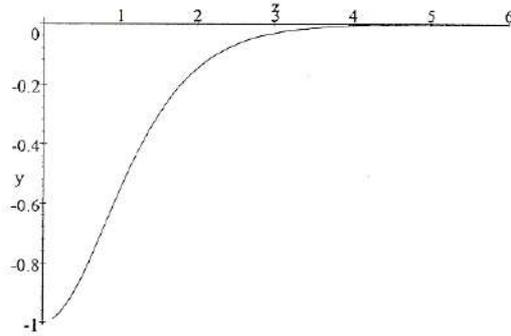
Pela definição é evidente que estados do campo eletromagnético com o valor de  $Q$  menor que zero têm estatística sub-poissoniana, sendo portanto estados puramente quantum mecânicos, sem análogo clássico. Nesse sentido, o fator  $Q$  apresenta seu menor valor,  $-1$ , para um estado de Fock, enquanto que para um estado coerente vale zero, indicando a estatística poissoniana desse estado.

Explicitamente, para a primeira geração tem-se as seguintes expressões para o fator de Mandel:

$$Q_+(\alpha^2) = \alpha^2(\coth(\alpha^2) - \tanh(\alpha^2)), \quad (3.44)$$

$$Q_-(\alpha^2) = -Q_+(\alpha^2). \quad (3.45)$$





$$Q_-(\alpha^2)$$

Para estados de segunda geração encontra-se a seguinte expressão genérica:

$$Q_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\alpha^2) = \frac{c_1}{c_2 + c_3},$$

onde

$$c_1 = -2\alpha^2(-1 + \varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_1)^2 \varepsilon_2 \sin \alpha^2 \sinh \alpha^2)$$

$$c_2 = ((-1 + \varepsilon_1) \cosh \alpha^2 + (1 + \varepsilon_1)(\varepsilon_2 \sin \alpha^2 - \sinh \alpha^2))$$

$$c_3 = ((1 + \varepsilon_1)(\cosh \alpha^2 + \varepsilon_2 \cos \alpha^2) - (-1 + \varepsilon_1) \sinh \alpha^2),$$

com as expressões para os estados pares sendo

$$Q_{++}(\alpha^2) = \frac{2\alpha^2 \sin \alpha^2 \sinh \alpha^2}{(\cos \alpha^2 + \cosh \alpha^2)(\sin \alpha^2 - \sinh \alpha^2)}, \quad (3.46)$$

$$Q_{+-}(\alpha^2) = \frac{2\alpha^2 \sin \alpha^2 \sinh \alpha^2}{(\cos \alpha^2 - \cosh \alpha^2)(\sin \alpha^2 + \sinh \alpha^2)}, \quad (3.47)$$

enquanto para os ímpares tem-se

$$Q_{-+}(\alpha^2) = Q_{--}(\alpha^2) = \frac{-\alpha^2}{\sinh \alpha^2 \cosh \alpha^2}. \quad (3.48)$$

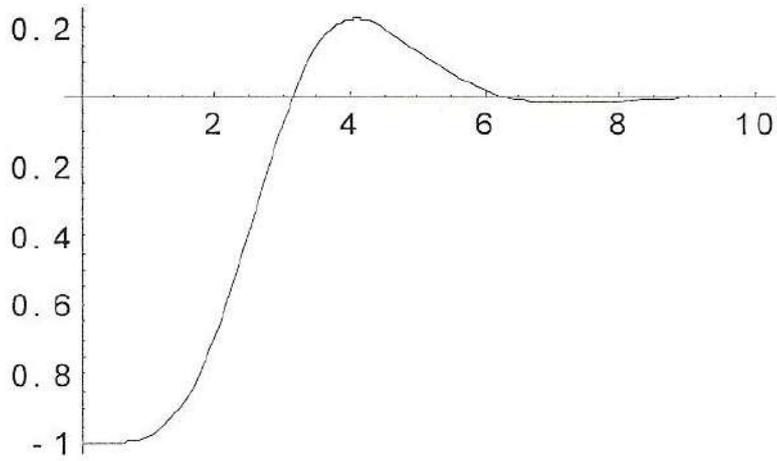
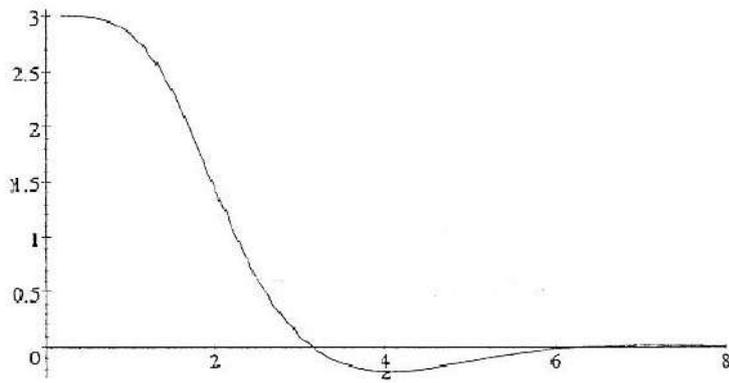
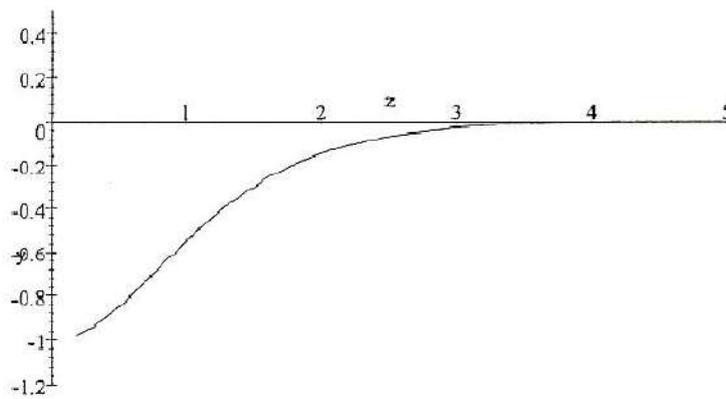


Figura 3.13:  $Q_{+-}(\alpha^2)$



$Q_{++}(\alpha^2)$

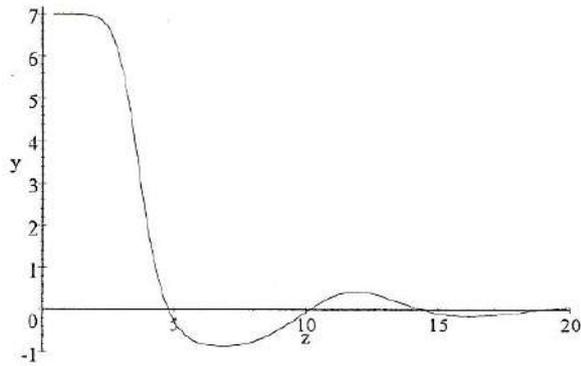


$Q_{--}(\alpha^2) \text{ e } Q_{-+}(\alpha^2)$

Já para a terceira geração

$$\begin{aligned}
 & Q_{+++}(\alpha^2) = \\
 & = \alpha^2 \frac{\sin \alpha^2 + \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \sinh \alpha^2 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}{\cos \alpha^2 + \cosh \alpha^2 + 2 \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)} \\
 & + \alpha^2 \frac{\cos \alpha^2 - \cosh \alpha^2 + 2 \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}{\sin \alpha^2 + \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \sinh \alpha^2 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)} \\
 & \\
 & Q_{++-}(\alpha^2) = \\
 & = \alpha^2 \frac{\sin \alpha^2 - \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \sinh \alpha^2 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}{\cos \alpha^2 + \cosh \alpha^2 - 2 \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)} \\
 & + \alpha^2 \frac{\cos \alpha^2 - \cosh \alpha^2 - 2 \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}{\sin \alpha^2 - \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \sinh \alpha^2 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)} \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

$$Q_{+--}(\alpha^2) = Q_{-++}(\alpha^2) = 2\alpha^2 \frac{\sin \alpha^2 \sinh \alpha^2}{(\cos \alpha^2 - \cosh \alpha^2)(\sin \alpha^2 + \sinh \alpha^2)} \quad (3.50)$$



$$Q_{+++}(\alpha^2)$$

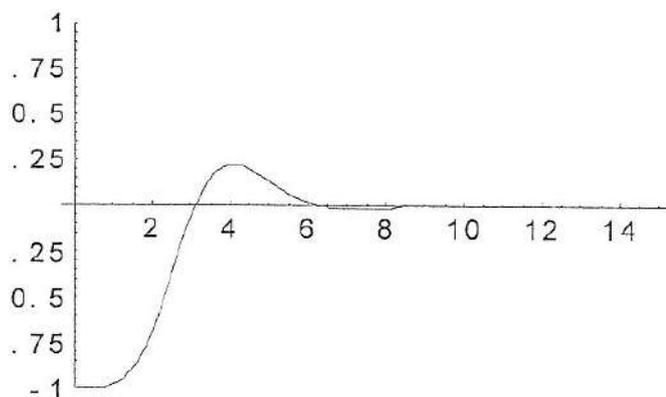
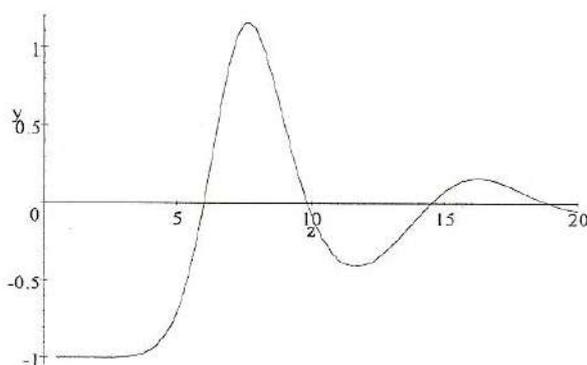


Figura 3.14:  $Q_{+--+}(\alpha^2)$  e  $Q_{+---}(\alpha^2)$



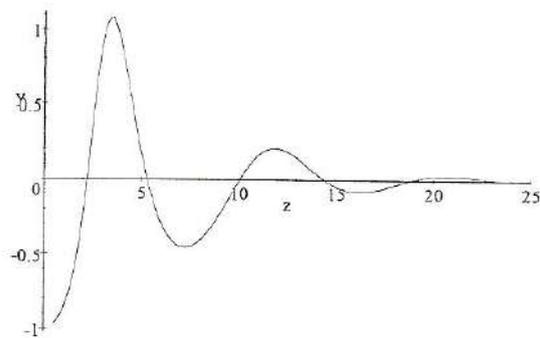
$Q_{++-}(\alpha^2)$

Para os estados ímpares obtém-se

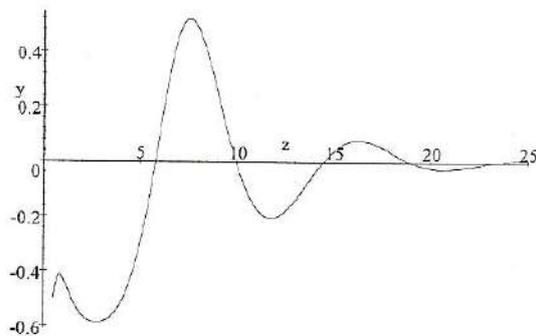
$$\begin{aligned}
 & Q_{-+-}(\alpha^2) = Q_{- - -}(\alpha^2) = \\
 & \quad -\sinh \alpha^2 - \cosh \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \sin \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \\
 = & \alpha^2 \frac{-\cosh \alpha^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \cosh \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) - \sin \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \sinh \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\sinh \alpha^2 - \cos \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \sinh \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right)} \\
 & + \alpha^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sin \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \sinh \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) + \cos \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \cosh \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \right) - \cosh \alpha^2}{\sinh \alpha^2 - \cos \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right) \sinh \left( \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \right)} \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{-++}(\alpha^2) &= Q_{--+}(\alpha^2) = \\
&= \alpha^2 \frac{\sinh \alpha^2 - \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}{\cosh \alpha^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \right)} \\
&+ \alpha^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sin\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) - \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \right) - \cosh \alpha^2}{\sinh \alpha^2 + \cos\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

sendo os gráficos:



$Q_{-++}(\alpha^2)$  e  $Q_{--+}(\alpha^2)$



$Q_{---}(\alpha^2)$  e  $Q_{-+-}(\alpha^2)$

Dos gráficos do fator de Mandel para as três primeiras gerações fica evidente a oscilação do seu valor em torno de zero, ou seja, ocorre oscilação na natureza da estatística do estado quando se varia o valor de  $\alpha^2$ . Entretanto, para qualquer que seja o estado, o valor fator de Mandel tende a zero a partir de certo valor de  $\alpha^2$ , o que significa que todos os estados apresentam estatística poissoniana para grandes intensidades do campo.

Os únicos estados que apresentam estatística super-poissoniana para  $\alpha^2$  próximo de zero são os estados pares (só detecção +). Qualquer detecção ímpar, independentemente da sua ordem, gera um estado com estatística inicial ( $\alpha^2 \sim 0$ ) sub-poissoniana.

Vê-se, portanto, a mesma relação entre entes com expressões idênticas observada para a distribuição de probabilidade de número de fótons e para o número médio de fótons.

### 3.2 Inversão de população atômica

Vamos agora estudar a inversão de população atômica para átomos de dois níveis interagindo com o campo em uma superposição de estados tipo gato de Schrödinger. Investigar a inversão de população atômica entre os níveis fundamental e excitado pode ser particularmente útil para distinguir um estado coerente de uma mistura poissoniana, já que a inversão atômica envolve elementos de matriz fora da diagonal principal do operador densidade. Também é possível avaliar a variação da inversão de população com a intensidade do campo.

A partir do modelo de James-Cummings a um fóton na aproximação de onda girante pode-se escrever o hamiltoniano do sistema interagente átomo-campo

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (3.53)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência de transição entre o estado fundamental e o excitado ( $\hbar\omega_0 = E_e - E_g$ ),  $\omega$  é a frequência do modo do campo e  $\lambda$  o parâmetro de acoplamento átomo-campo.  $\hat{\sigma}_3$  é a matriz de Pauli e  $\hat{\sigma}_+$  e  $\hat{\sigma}_-$  correspondem aos operadores de suspensão e abaixamento na base atômica de dois níveis, dadas por:

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, o operador de evolução temporal,  $\hat{U}(t, 0) = \exp(\frac{iHt}{\hbar})$ , tem a seguinte representação matricial no espaço de Hilbert atômico:

$$\hat{U}(t, 0) = \exp(-i\omega nt) \begin{pmatrix} \hat{O}_{11} & \hat{O}_{12} \\ \hat{O}_{21} & \hat{O}_{22} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{O}_{11} &= \exp(-i\omega \hat{n}t) \left[ \cos(\lambda t \sqrt{\hat{\nu} + 1}) - \frac{i\delta \sin(\lambda t \sqrt{\hat{\nu} + 1})}{2 \sqrt{\hat{\nu} + 1}} \right] \\ \hat{O}_{12} &= -i \exp(-i\omega \hat{n}t) \frac{\hat{a} \sin(\lambda t \sqrt{\hat{\nu}})}{\sqrt{\hat{\nu}}} \\ \hat{O}_{21} &= \exp(-i\omega \hat{n}t) \frac{\hat{a}^\dagger \sin(\lambda t \sqrt{\hat{\nu} + 1})}{\sqrt{\hat{\nu} + 1}} \\ \hat{O}_{22} &= \exp(-i\omega \hat{n}t) \left[ \cos(\lambda t \sqrt{\hat{\nu}}) + \frac{i\delta \sin(\lambda t \sqrt{\hat{\nu}})}{2 \sqrt{\hat{\nu}}} \right] \end{aligned}$$

onde  $\delta = (\omega_0 - \omega)\lambda^{-1}$  e  $\hat{\nu} = \hat{n} + \delta^2/4$  com  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Para o sistema átomo-campo inicialmente num estado puro  $|\psi_{AC}(0)\rangle$ , pode-se determinar  $|\psi_{AC}(t)\rangle = \hat{U}(t, 0) |\psi_{AC}(0)\rangle$  e daí então obter a inversão atômica  $W(t) = \langle \psi_{AC}(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi_{AC}(t) \rangle$ .

Assumindo que inicialmente o átomo está numa superposição normalizada dos estados excitado e fundamental,  $|\psi_A(0)\rangle = C_g |g\rangle + C_e |e\rangle$ , e que o campo é descrito pela matriz densidade  $\hat{\rho}_c(0)$ , de forma que  $\hat{\rho}_{AC}(0) = |\psi_A(0)\rangle \langle \psi_A(0)| \otimes \hat{\rho}_c(0)$ , então, ao tempo  $t$ , a matriz densidade do sistema átomo-campo é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AC}(t) &= \hat{U}(t, 0) \hat{\rho}_{AC}(0) \hat{U}^\dagger(t, 0) \\ &= \exp(-i\omega \hat{n}t) \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \exp(i\omega \hat{n}t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{A}_{11} &= |C_e|^2 O_{11} \hat{\rho}_c(0) O_{11}^\dagger + C_e C_g^* O_{11} \hat{\rho}_c(0) O_{12}^\dagger \\ &\quad + C_e^* C_g O_{12} \hat{\rho}_c(0) O_{11}^\dagger + |C_g|^2 O_{12} \hat{\rho}_c(0) O_{12}^\dagger \\ \hat{A}_{22} &= |C_e|^2 O_{21} \hat{\rho}_c(0) O_{21}^\dagger + C_e C_g^* O_{21} \hat{\rho}_c(0) O_{22}^\dagger \\ &\quad + C_e^* C_g O_{22} \hat{\rho}_c(0) O_{21}^\dagger + |C_g|^2 O_{22} \hat{\rho}_c(0) O_{22}^\dagger\end{aligned}$$

Aqui os elementos de matriz  $\hat{A}_{12}$  e  $\hat{A}_{21}$  não precisam ser calculados, já que não interferem no cálculo das médias dos observáveis cujas representações matriciais são diagonais no espaço atômico.

Dessa forma, a inversão atômica torna-se:

$$\begin{aligned}W(t) &= Tr[\hat{\rho}_{AC}(t) \hat{\sigma}_3] \\ &= Tr[\exp(-i\omega \hat{n} t) (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{22}) \exp(i\omega \hat{n} t)]\end{aligned}\quad (3.56)$$

que, para o caso ressonante, quando  $\delta = 0$ , toma a forma:

$$\begin{aligned}W_0(t) &= |c_e|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda\sqrt{n+1}) \langle n | \hat{\rho}_c | n \rangle - \\ &\quad |c_g|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\lambda\sqrt{n}) \langle n | \hat{\rho}_c | n \rangle + 2 |c_e| |c_g| \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\phi + \gamma) |\langle n | \hat{\rho}_c | n+1 \rangle|\end{aligned}\quad (3.57)$$

onde  $\phi$  e  $\gamma$  são definidos de forma que  $c_e c_g = |c_e| |c_g| \exp(-i\phi)$  e  $\langle n | \hat{\rho}_c | n+1 \rangle = |\langle n | \hat{\rho}_c | n+1 \rangle| \exp(i\gamma)$ .

O último termo acima não contribui para a inversão atômica no caso dos nossos estados uma vez que eles possuem apenas estados de Fock ou ímpares ocupados.

Para os estados das três primeiras gerações são obtidos os gráficos da inversão atômica para o caso ressonante dados pelas figuras 3.16 a 3.25 onde foi tomado  $|c_e| =$

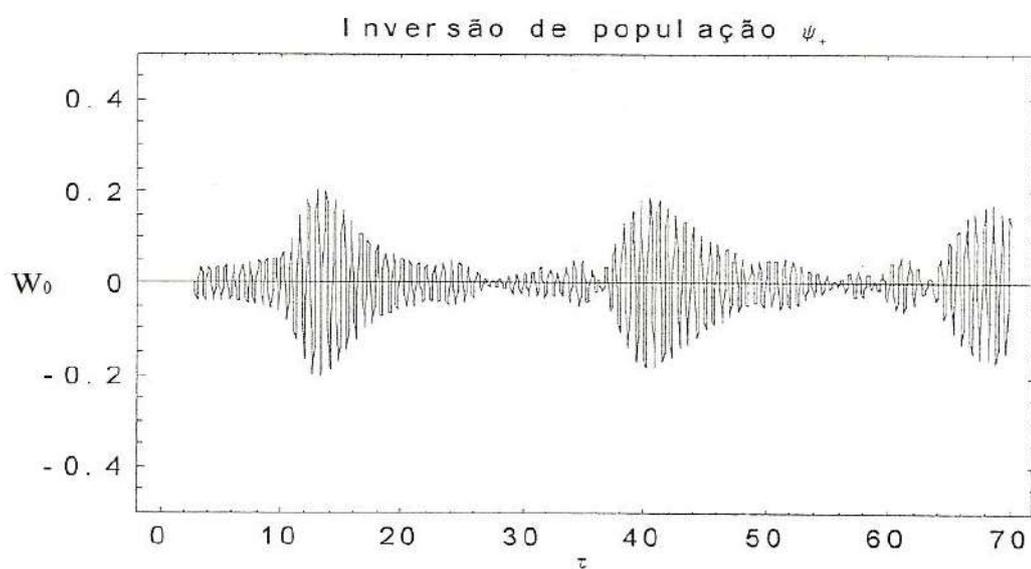


Figura 3.15:

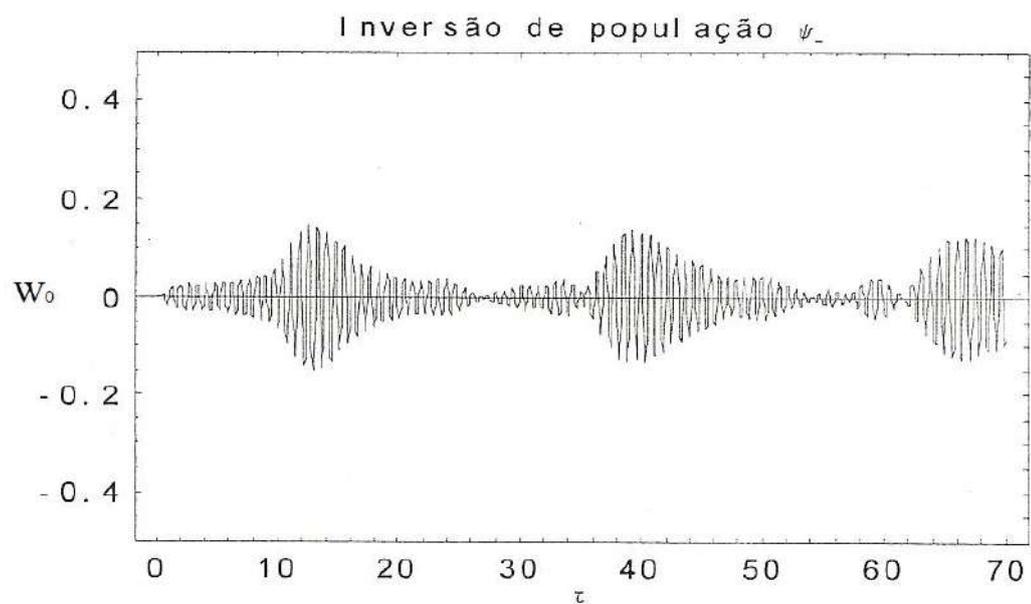


Figura 3.16:

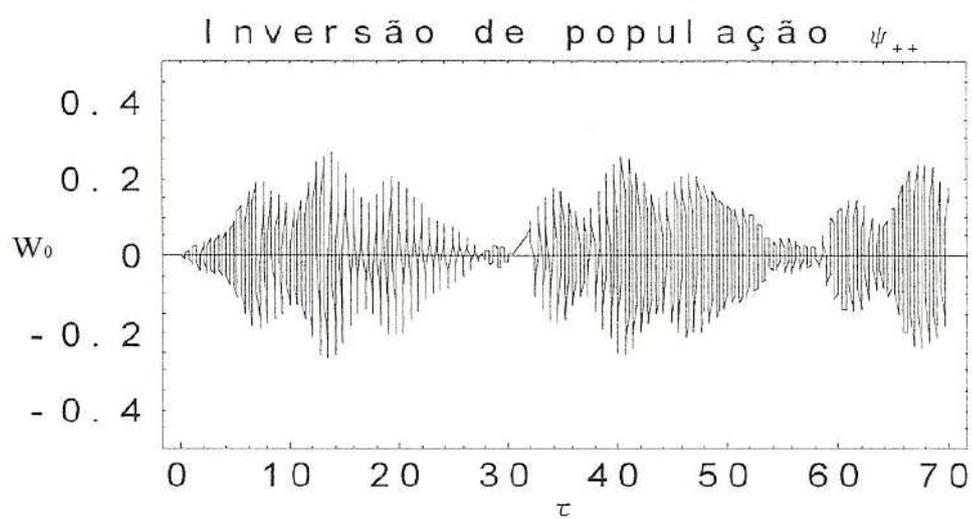


Figura 3.17:

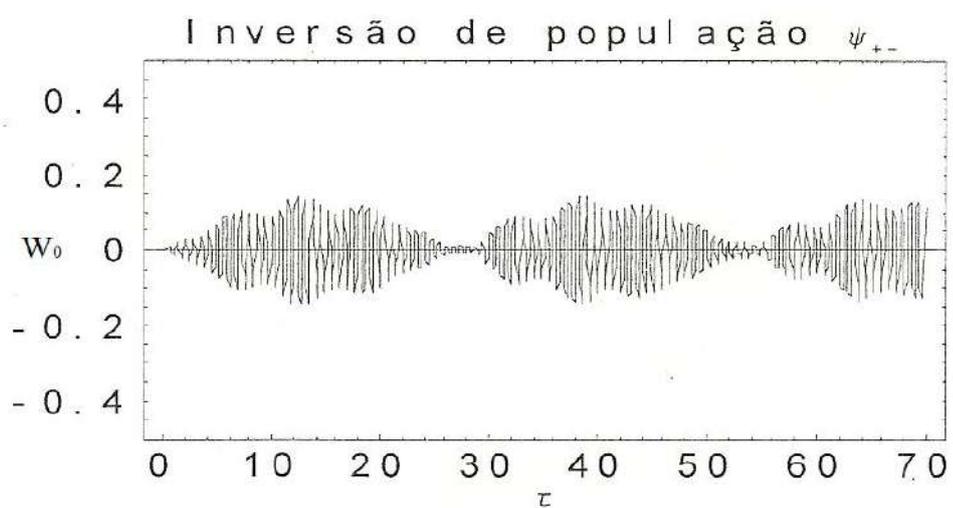


Figura 3.18:

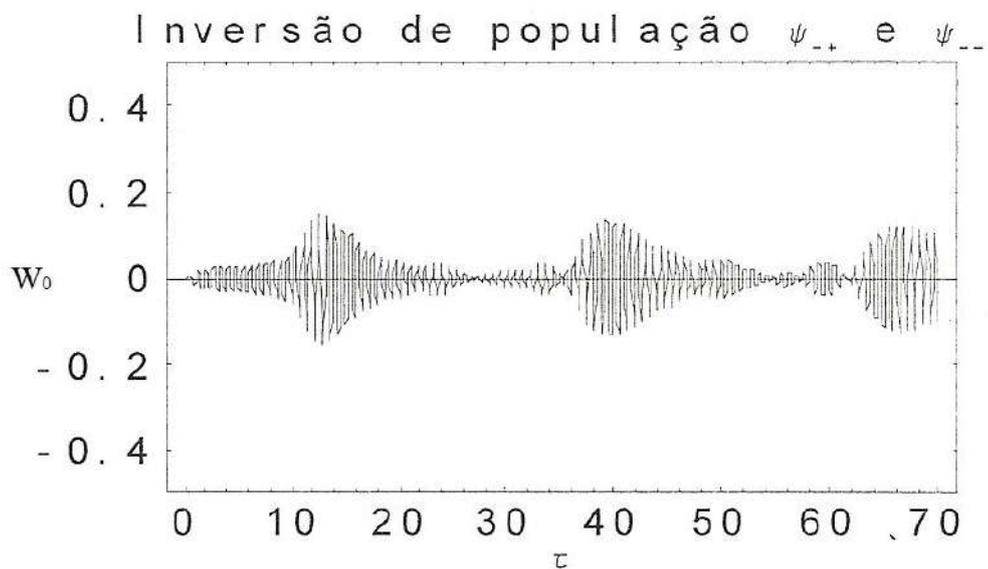


Figura 3.19:

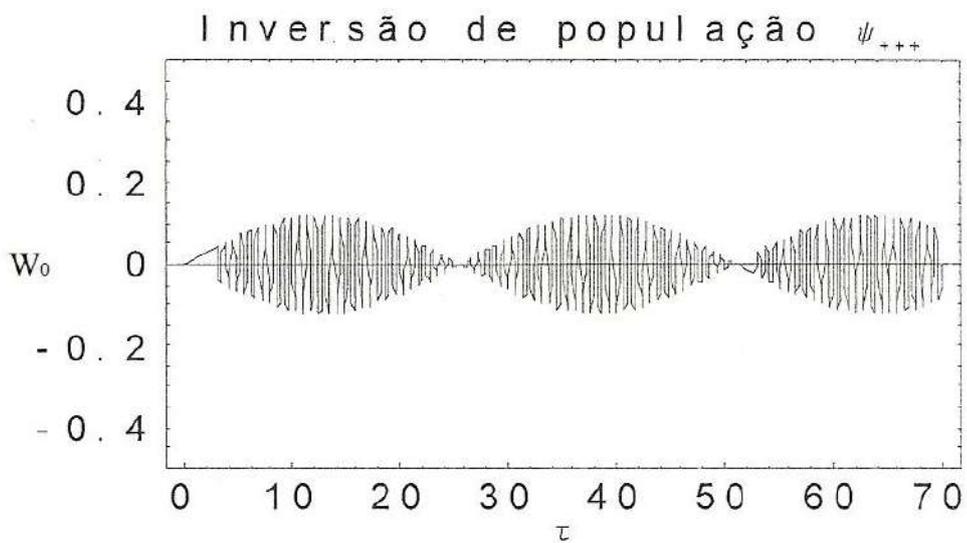


Figura 3.20:

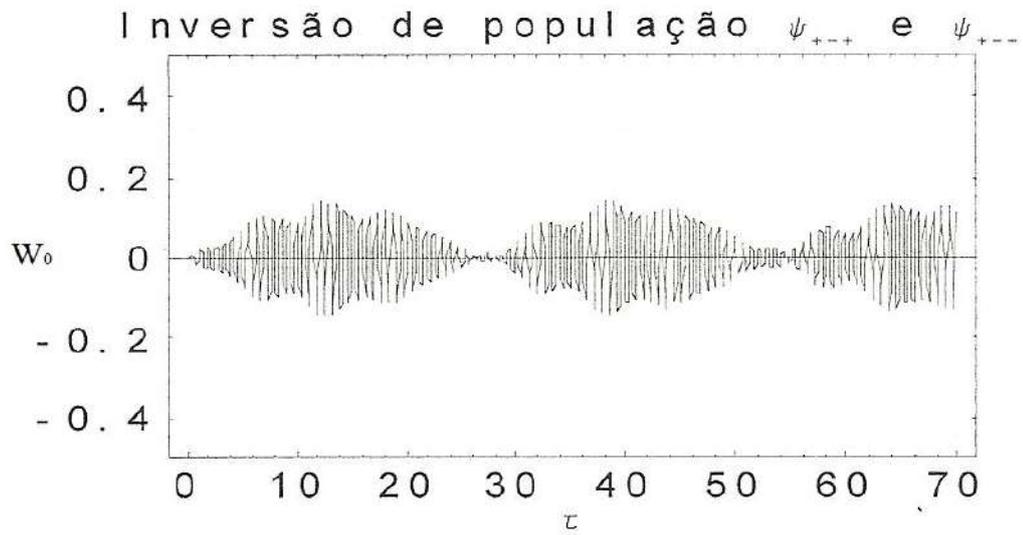


Figura 3.21:

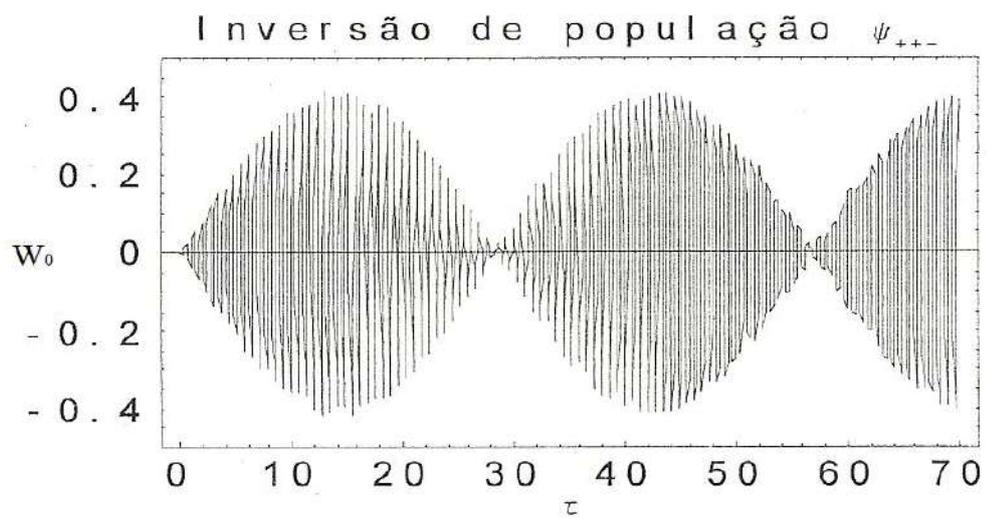


Figura 3.22:

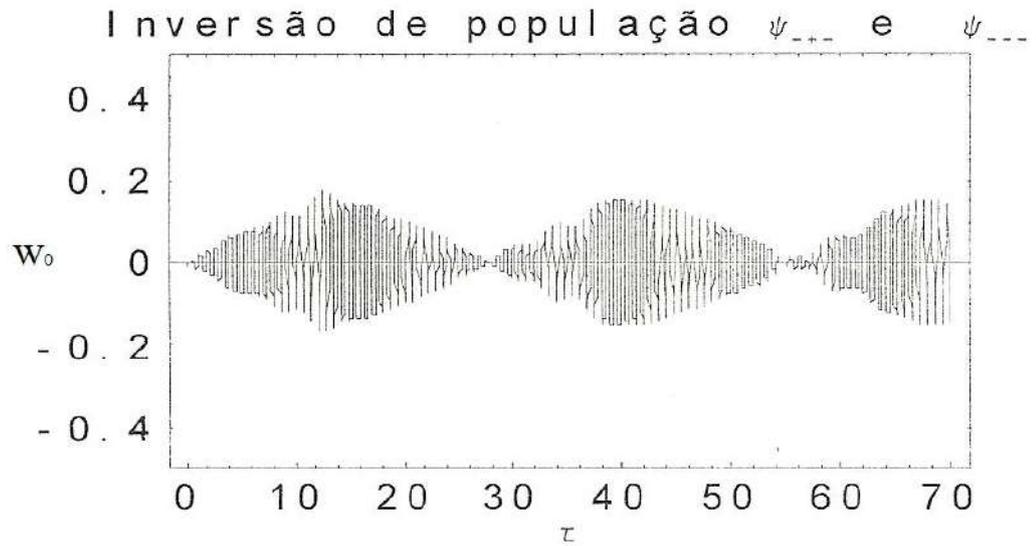


Figura 3.23:

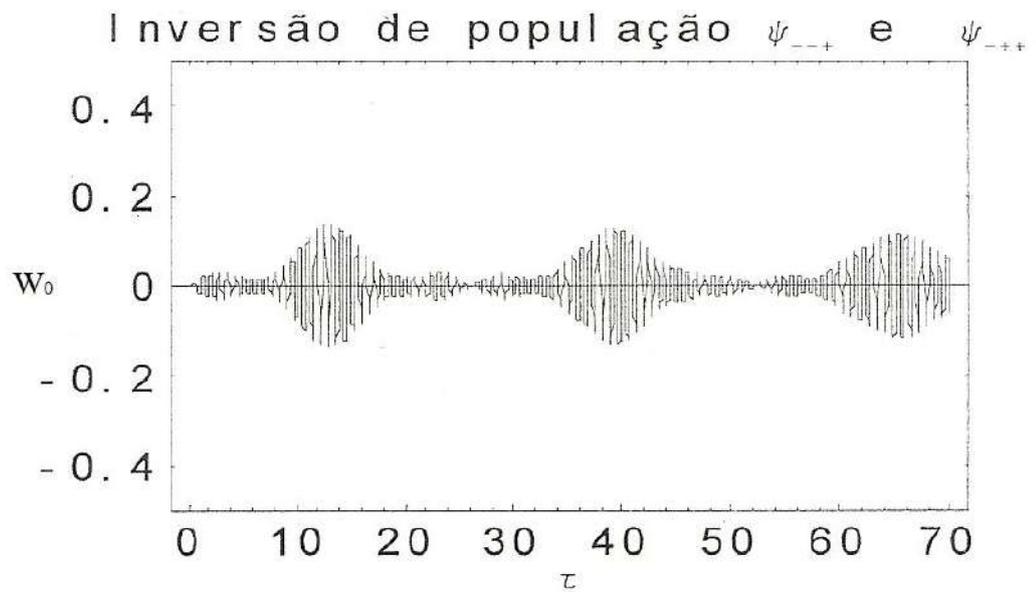


Figura 3.24:

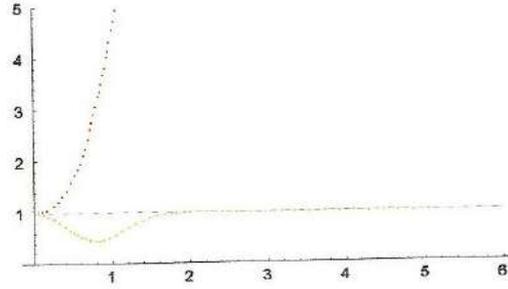


Figura 3.25:  $|\psi_+\rangle$

Observa-se, claramente, a existência de colapsos e ressurgimentos na inversão de população atômica nos vários casos apresentados.

### 3.3 Compressão de ruído quântico nas quadraturas

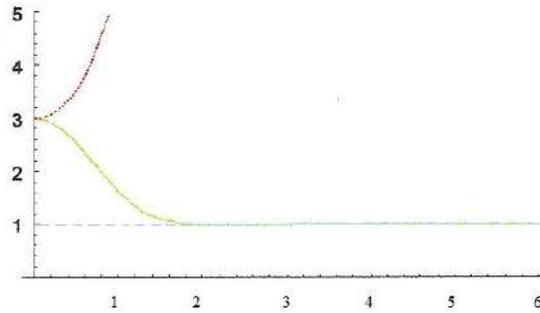
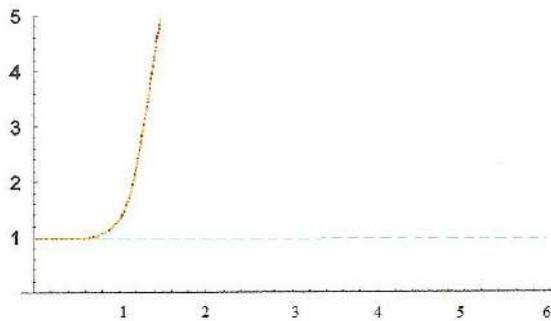
Vamos agora calcular as variâncias das quadraturas do campo nos nossos estados,

$$\langle (\Delta \hat{X}_i)^2 \rangle = \langle \Psi_{\epsilon_1 \dots \epsilon_N}(\alpha) | (\Delta \hat{X}_i)^2 | \Psi_{\epsilon_1 \dots \epsilon_N}(\alpha) \rangle,$$

com  $i = 1, 2$ , para investigar se ocorre compressão do ruído quântico.

Vamos utilizar as variâncias das quadraturas dos estados coerentes como referência, já que correspondem ao valor mínimo permitido pelo princípio de incerteza de Heisenberg, comparando com os gatos de gerações posteriores. Para isso observemos os gráficos das variâncias contra o parâmetro  $\alpha$  onde utilizamos vermelho para a quadratura  $\hat{x}_1$ , verde para  $\hat{x}_2$  e azul para o estado coerente.

Na primeira geração observa-se compressão de quadratura apenas na quadratura  $\hat{x}_2$  do estado par com o valor do parâmetro  $\alpha$  indo até dois. A partir daí o squeezing na

Figura 3.26:  $|\psi_{-}\rangle$ Figura 3.27:  $|\psi_{++}\rangle$ 

quadratura  $\hat{x}_2$  aproxima-se assintoticamente do squeezing do estado coerente para ambos os estados.

Para todos os estados de segunda geração o squeezing é idêntico para as duas quadraturas, sendo que em nenhum caso desta geração observa-se compressão de quadratura.

Nenhum dos estados da terceira geração apresentam compressão na quadratura  $\hat{x}_1$  e nenhum na quadratura  $\hat{x}_2$ .

Na quarta geração ocorre um fenômeno bastante interessante se se compara os estados que apresentam os mesmos padrões de compressão de quadratura com os estados da quarta geração que apresentam mesma distribuição de probabilidade de número de fótons:

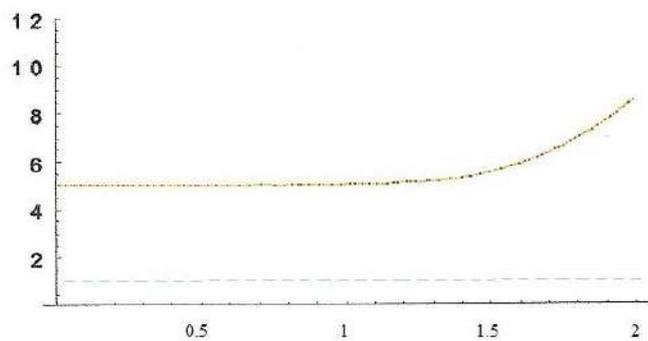


Figura 3.28:  $|\psi_{+-}\rangle$

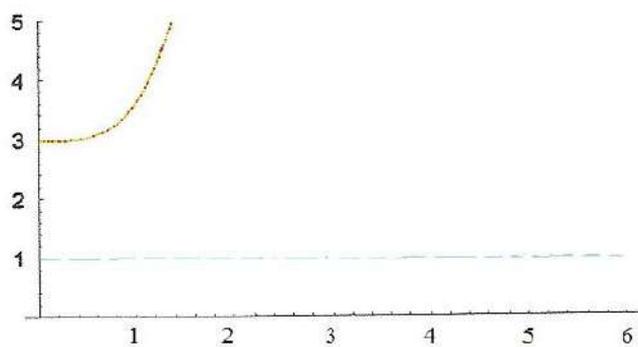


Figura 3.29:  $|\psi_{--}\rangle$  e  $|\psi_{-+}\rangle$

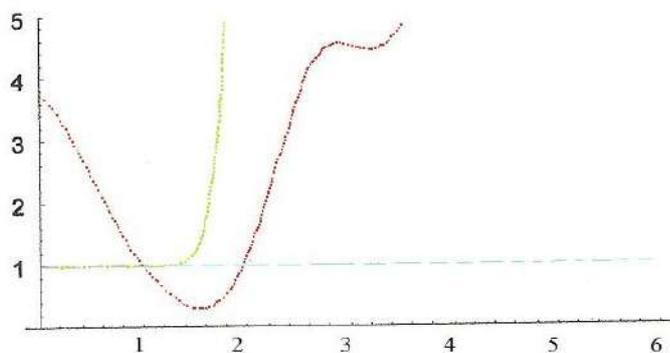


Figura 3.30:  $|\psi_{+++}\rangle$

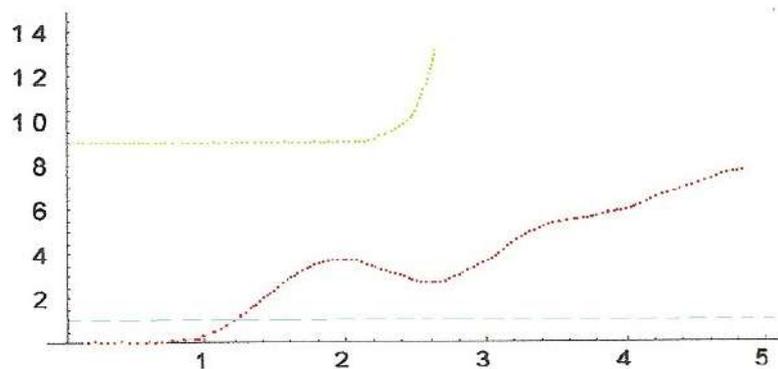


Figura 3.31:  $|\psi_{++-}\rangle$

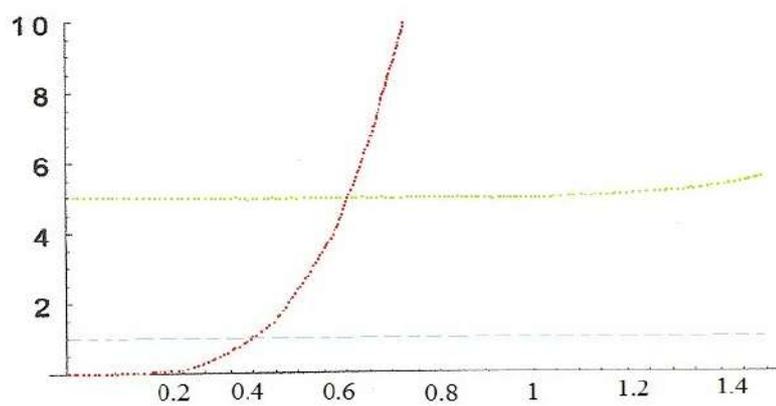


Figura 3.32:  $|\psi_{+--}\rangle$  e  $|\psi_{+-+}\rangle$

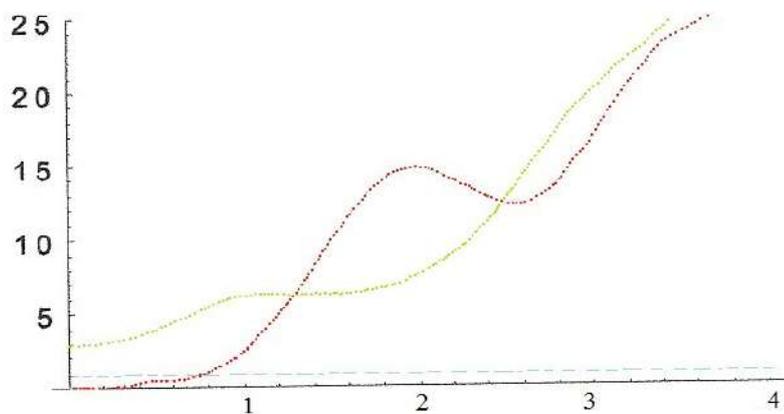


Figura 3.33:  $|\psi_{---}\rangle$

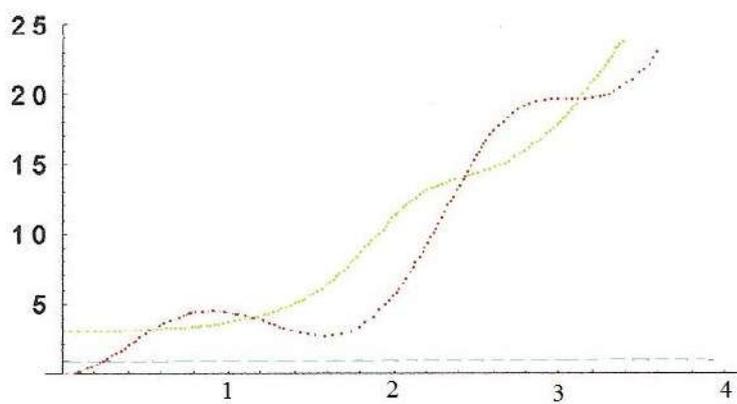


Figura 3.34:  $|\psi_{--+}\rangle$

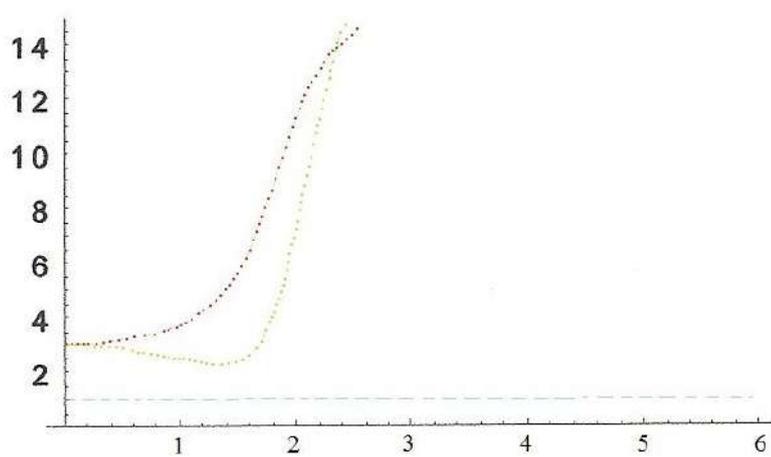


Figura 3.35:  $|\psi_{-++}\rangle$

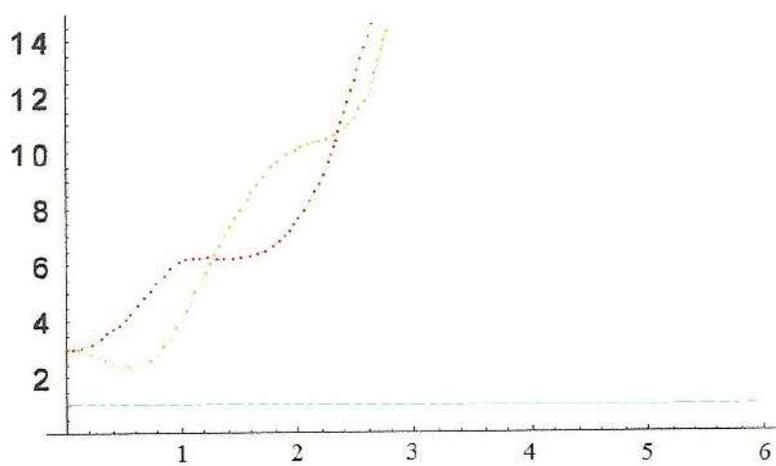


Figura 3.36:  $|\psi_{+--}\rangle$

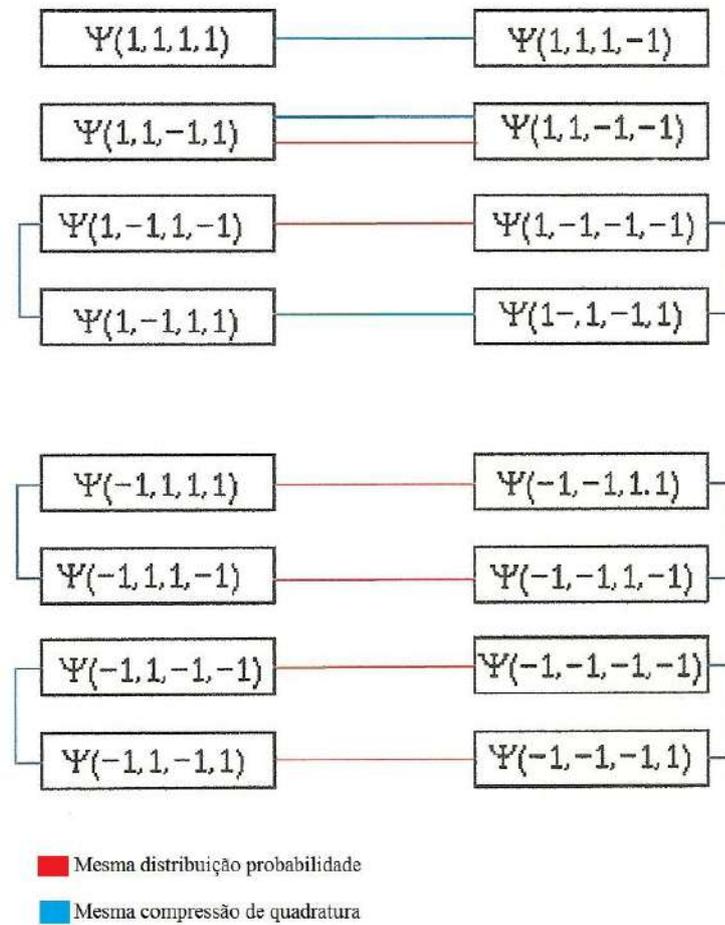


Figura 3.37:

os estados que formam pares de distribuição de probabilidade de número de fótons idênticas, por outro lado, distinguem-se em relação à compressão de quadratura. Ou seja, duas duplas de estados que possuem mesma distribuição de probabilidade vão formar duas duplas de estados com mesma compressão de quadratura onde os estados são cruzados e recombina- dos. Dessa forma a compressão quadratura revela-se um indicador capaz de distinguir estados que até então não possuíam qualquer meio de diferenciá-los.

## Capítulo 4

# Representações no espaço de fase

Estudaremos agora as representações, no espaço de fase, dos nossos estados.

### 4.1 O operador densidade

Para um estado puro o operador densidade é definido por

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi| \quad (4.1)$$

Se, por outro lado, não se há certeza sobre o estado do sistema e conhece-se a probabilidade  $P_\psi$  deste ser encontrado no estado  $|\psi\rangle$ , o operador densidade é definido por

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle \langle\psi| \quad (4.2)$$

A partir das definições acima é possível escrever o valor médio de um observável como

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\psi} P_{\psi} \langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) \quad (4.3)$$

expressão válida tanto para estados puros quanto para misturas estatísticas.

É fácil perceber que  $\hat{\rho}$  é hermitiano e portanto pode ser diagonalizado. Se  $|\phi_i\rangle$  são auto estados de  $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|, \quad \langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (4.4)$$

O que implica que

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{\psi} P_i^2 |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \implies \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_i P_i^2 \leq 1 \quad (4.5)$$

sendo que para estados puros  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$  enquanto que para misturas estatísticas  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$ .

Em termos da base de Fock,

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n} \rho_{mn} |n\rangle \langle m| \quad (4.6)$$

## 4.2 Representação P de Glauber

Os estados coerentes formam um conjunto completo de estados, ou melhor ainda, uma base supercompleta. Eles podem portanto ser usados como uma base apesar de serem, de fato, não ortogonais. A seguinte representação diagonal, em termos de estados coerentes, foi introduzida independentemente por Glauber [4] e Sudarshan [5], e tem a forma

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (4.7)$$

onde  $d^2\alpha = d(\text{Re}\{\alpha\})d(\text{Im}\{\alpha\})$

Pode-se imaginar que a função  $P(\alpha)$  é análoga a uma distribuição de probabilidade para valores de  $\alpha$ . Entretanto este nem sempre é o caso, haja visto o operador de projeção  $|\alpha\rangle \langle \alpha|$  ser composto por estados não ortogonais e portanto  $P(\alpha)$  não poder ser

interpretada como uma distribuição de probabilidade genuína. Deve-se lembrar que os estados coerentes  $|\alpha\rangle$  e  $|\alpha'\rangle$  são aproximadamente ortonormais para  $|\alpha - \alpha'| \gg 1$ . Então se  $P(\alpha)$  varia suavemente num intervalo consideravelmente grande do parâmetro, há um senso aproximado de que a função  $P(\alpha)$  possa ser interpretada de acordo com a descrição clássica. Existe, entretanto, alguns estados quânticos do campo eletromagnético, onde a função  $P(\alpha)$  assumam valores negativos ou torne-se extremamente singular. Para esses estados não existe descrição clássica e  $P(\alpha)$  obviamente não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade clássica. Para estados coerentes, por exemplo, se  $\hat{\rho} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$  a distribuição  $P(\alpha)$  é dada pela derivada segunda da função delta de Dirac

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0) \quad (4.8)$$

### 4.3 Representação de Wigner

Distribuições de probabilidade no espaço de fase são muito úteis na mecânica estatística clássica. Médias de grandezas funções da posição e do momento de partículas podem ser obtidas integrando essas funções com seus respectivos pesos.

Em mecânica quântica, médias similares são obtidas utilizando-se a eq.4.3. O princípio da incerteza de Heisenberg proíbe a existência de uma distribuição de probabilidade verdadeira no espaço de fase, haja visto não ser possível a determinação simultânea da posição e do momento da partícula. Apesar disso, distribuições no espaço de fase continuam tendo papel importante na mecânica quântica, permitindo o cálculo de médias operadores funções da posição e do momento como integrais clássicas de funções complexas. Essas funções estão associadas a esses operadores através de regras de correspondência, que irão

dependem do ordenamento dos operadores.

De todas as representações no espaço de fase, a distribuição de Wigner é a mais natural quando se procura por um análogo quanto mecânico para uma distribuição no espaço de fase clássica.

As funções de Wigner são construídas de uma forma que suas distribuições marginais coincidam com as quadraturas da distribuição de probabilidade:

$$\begin{aligned}\int dp W(q, p) &= \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \\ \int dq W(q, p) &= \langle p | \hat{\rho} | p \rangle\end{aligned}\quad (4.9)$$

O que indica diretamente sua propriedade de normalização.

Essas propriedades se matêm constante se efetuarmos uma rotação nos eixos do espaço de fase, de maneira que

$$\begin{aligned}\hat{q}_\theta &= \hat{U}^\dagger(\theta) \hat{q} \hat{U}(\theta) = \hat{q} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta \\ \hat{p}_\theta &= \hat{U}^\dagger(\theta) \hat{p} \hat{U}(\theta) = -\hat{q} \sin \theta + \hat{p} \cos \theta\end{aligned}\quad (4.10)$$

ou de forma inversa

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \hat{q}_\theta \cos \theta - \hat{p}_\theta \sin \theta \\ \hat{p} &= \hat{q}_\theta \sin \theta + \hat{p}_\theta \cos \theta\end{aligned}\quad (4.11)$$

Daf, substituindo a primeira condição, tem-se

$$P(\theta) = \int W(\hat{q}_\theta \cos \theta - \hat{p}_\theta \sin \theta, \hat{q}_\theta \sin \theta + \hat{p}_\theta \cos \theta) dp_\theta \quad (4.12)$$

Ou, pela definição quantum-mecânica,

$$P(\theta) = \langle q | \hat{U}(\theta) \hat{q} \hat{U}^\dagger(\theta) | q \rangle \quad (4.13)$$

Foi provado por Radon [51] que se se conhece  $P(\theta)$  para todos os ângulos é possível reconstruir a função de Wigner associada de forma única através da chamada transformada inversa de Radon, em contraposição à eq. 4.12., que é a transformada de Radon. Das expressões acima portanto, percebe-se que é possível determinar a função de Wigner de forma única através do operador densidade do sistema.

### 4.3.1 Função característica

Na prática mostra-se bastante útil desenvolver-se a função  $P$  através da função característica, que nada mais é do que a transformada de Fourier da distribuição

$$\chi(u, v) = \iint W(p, q) \exp(-iuq - ivp) dq dp \quad (4.14)$$

Já a função característica associada a  $P(\theta)$  é definida, de forma análoga como

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \int P(\theta) \exp(-i\xi q_\theta) dq_\theta \quad (4.15)$$

de onde, substituindo o valor de  $P(\theta)$  dado por 4.12 tem-se

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \iint W(p, q) \exp(-i\xi q_\theta) dq_\theta dp_\theta \quad (4.16)$$

mudando as variáveis de integração de  $(q_\theta, p_\theta)$ , ficamos com

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(p, q) \exp[-i\xi(q \cos \theta + p \sin \theta)] dq dp \quad (4.17)$$

Vemos portanto que  $\tilde{p}(\xi, \theta)$  é a transformada de Fourier de  $W(q, p)$  em coordenadas polares

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \chi(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \quad (4.18)$$

Ou seja, uma vez conhecida a função  $P(\theta)$  é possível obter-se  $\tilde{p}(\xi, \theta)$  e daí calcular-se a função de Wigner  $W(p, q)$ . A ligação com o operador densidade é feita a partir de 4.13

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\xi, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q_\theta | \hat{\rho} | q_\theta \rangle \exp(-i\xi q_\theta) dq_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q_\theta | \hat{\rho} \exp(-i\xi \hat{q}_\theta) | q_\theta \rangle dq_\theta \\ &= \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(-i\xi \hat{q}_\theta)]\end{aligned}\quad (4.19)$$

Onde  $\xi \hat{q}_\theta = \hat{q} \xi \cos \theta + \hat{p} \xi \sin \theta$  o que faz com que, se pusermos  $u = \xi \cos \theta$  e  $v = \xi \sin \theta$ , possamos escrever

$$\chi(u, v) = \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(-iu\hat{q} - iv\hat{p})] \quad (4.20)$$

Uma outra forma para a função característica pode ser escrita em função dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  utilizando-se as relações

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (u + iv) \quad (4.21)$$

O que leva a

$$\begin{aligned}\chi(\eta, \eta^*) &= \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(-i\eta^* \hat{a} - i\eta \hat{a}^\dagger)] \\ &= \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a})] \\ &= \exp\left(\frac{-\eta \eta^*}{2}\right) \text{Tr}[e^{-\eta^* \hat{a}} \hat{\rho} e^{\eta \hat{a}^\dagger}]\end{aligned}\quad (4.22)$$

A transformada de Fourier dessa expressão nos fornece a função de Wigner, expressa em função dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ :

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \eta \exp(\alpha \eta^* - \alpha^* \eta) \chi(\eta, \eta^*) \quad (4.23)$$

Usando a relação  $\text{Tr}[e^{-\eta^* \hat{a}} |\lambda\rangle \langle \delta| e^{\eta \hat{a}^\dagger}] = \langle \delta | |\lambda\rangle \exp(\eta \delta^* - \eta^* \lambda)$ , válida para estados coerentes  $|\lambda\rangle$  e  $|\delta\rangle$  podemos obter as funções de Wigner para os estados gato de Schrödinger. No caso

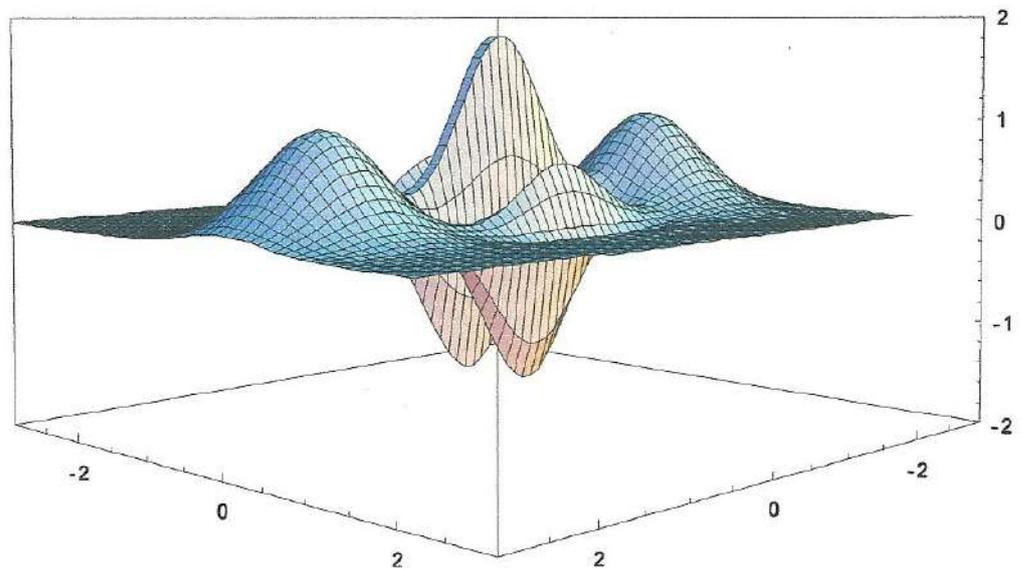
particular de um estado coerente  $|\alpha\rangle$  obtém-se

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta - 2\alpha|^2\right] \quad (4.24)$$

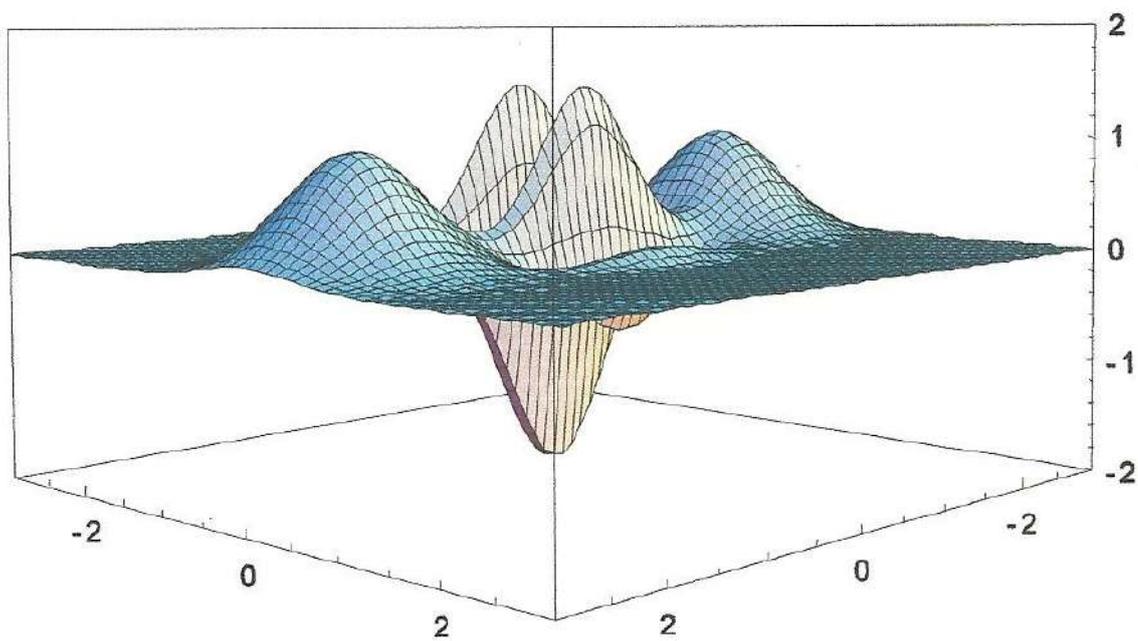
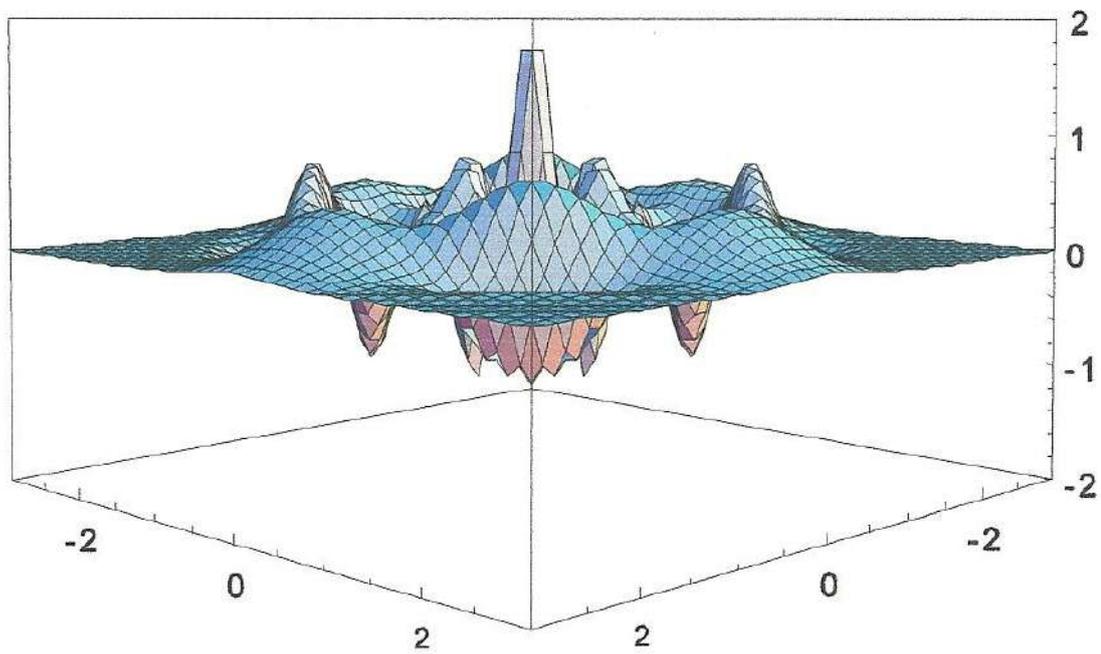
Portanto, para um estado gato de Schrödinger de primeira geração, com  $\beta = x + iy$ , temos:

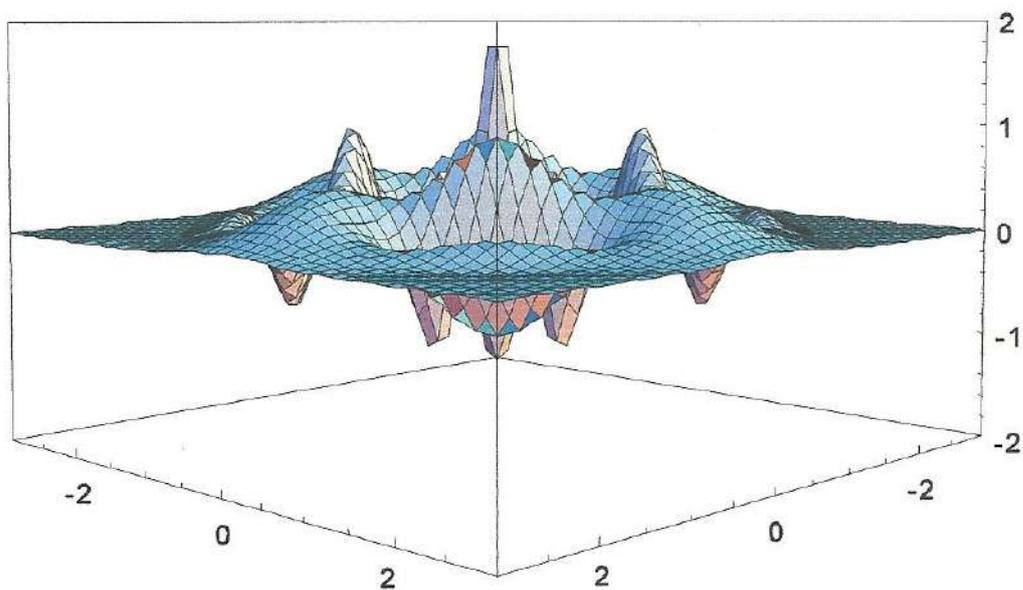
$$W_{\varepsilon_1}(\alpha, x, y) = \frac{2 \exp(-(x^2 + y^2))(\exp(-\alpha^2) \cosh(4\alpha x) + \varepsilon_1 \exp(\alpha^2) \cos(4\alpha x))}{\exp(\alpha^2) + \varepsilon_1 \exp(-\alpha^2)} \quad (4.25)$$

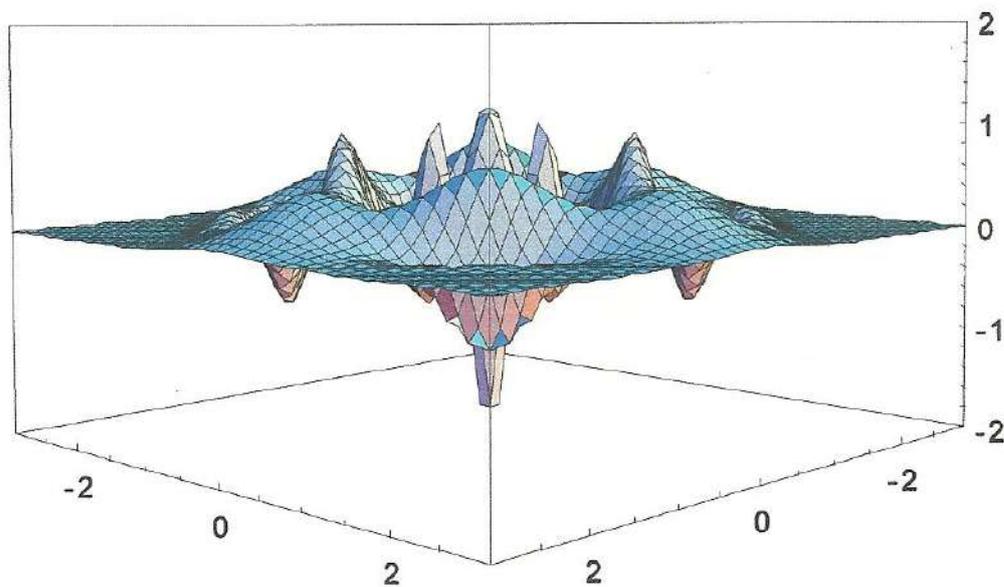
Já para a segunda geração em diante as expressões genéricas para a função de Wigner assumem expressões muito grandes. Seus gráficos entretanto possuem aspectos esteticamente muito interessantes, sendo nitidamente diferentes uns dos outros, o que garante a utilização dessa representação na distinção entre as superposições de estados tipo gato de Schrödinger.



$W_+(\alpha, x, y); \alpha = 2$

 $W_-(\alpha, x, y); \alpha = 2$  $W_{++}(\alpha, x, y); \alpha = 2$



$$W_{+-}(\alpha, x, y); \alpha = 2$$


$$W_{-+}(\alpha, x, y); \alpha = 2$$

#### 4.4 Função Q de Husimi

Uma função alternativa corresponde aos elementos de matriz da diagonal principal do operador densidade num estado coerente puro

$$Q(\alpha) = \frac{\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle}{\pi} \geq 0$$

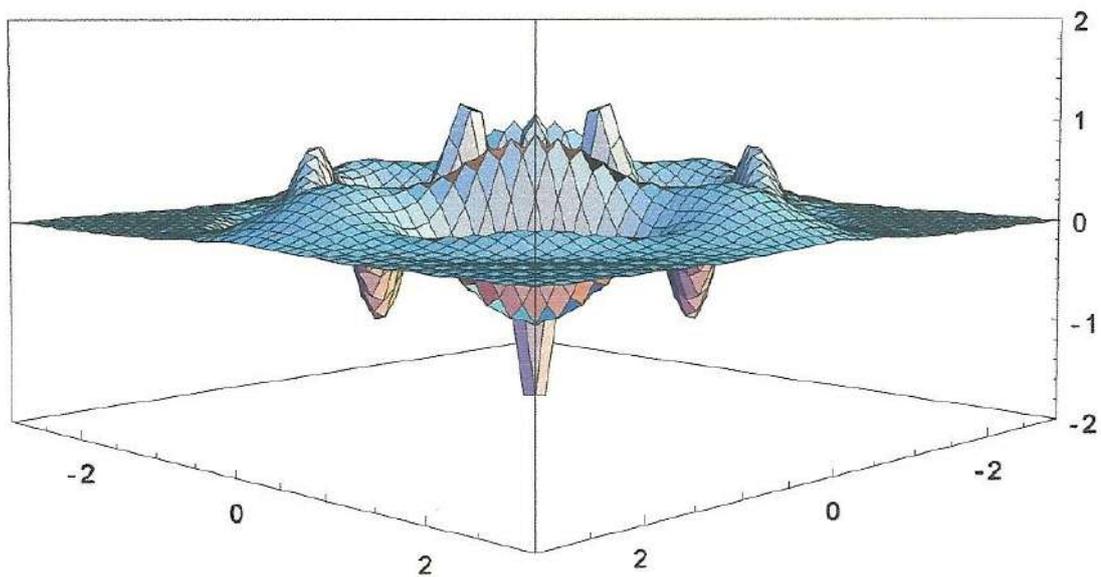


Figura 4.1:  $W_{--}(\alpha, x, y)$ ;  $\alpha = 2$

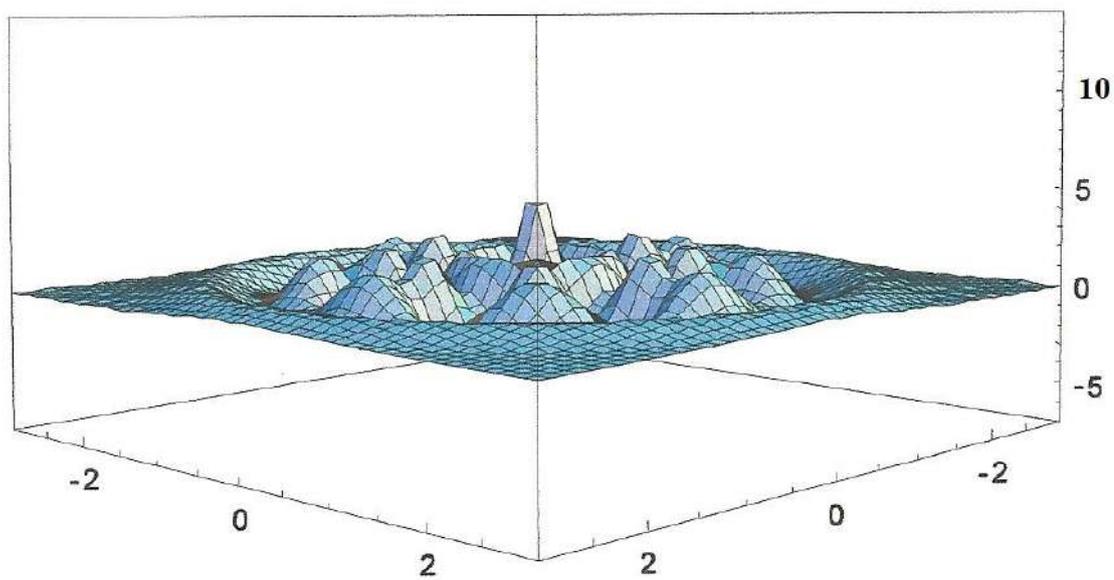


Figura 4.2:  $W_{+++}(\alpha, x, y)$ ;  $\alpha = 2$

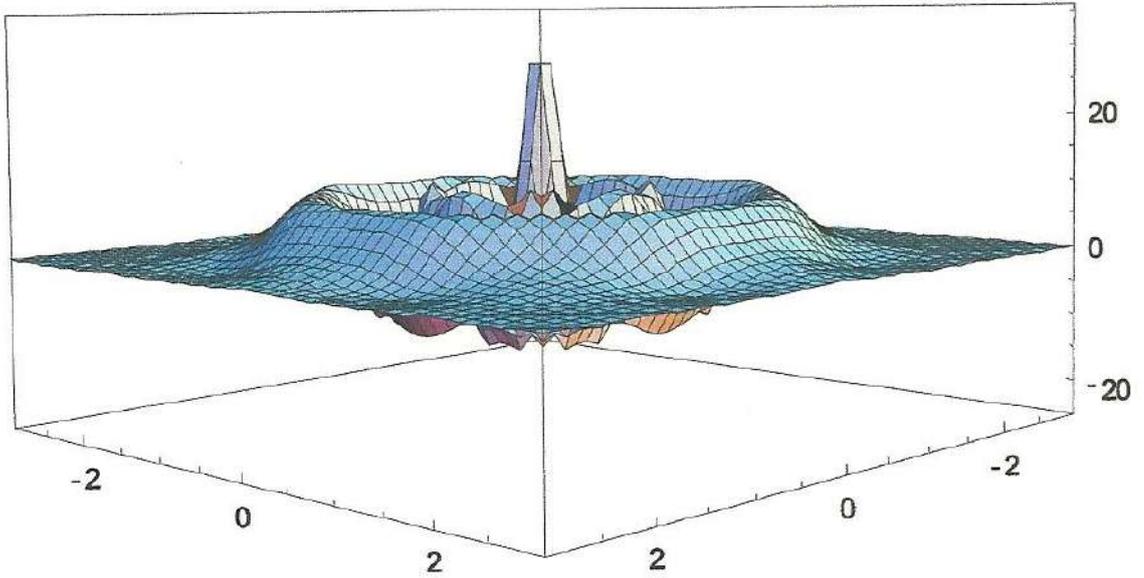


Figura 4.3:  $W_{++-}(\alpha, x, y)$ ;  $\alpha = 2$

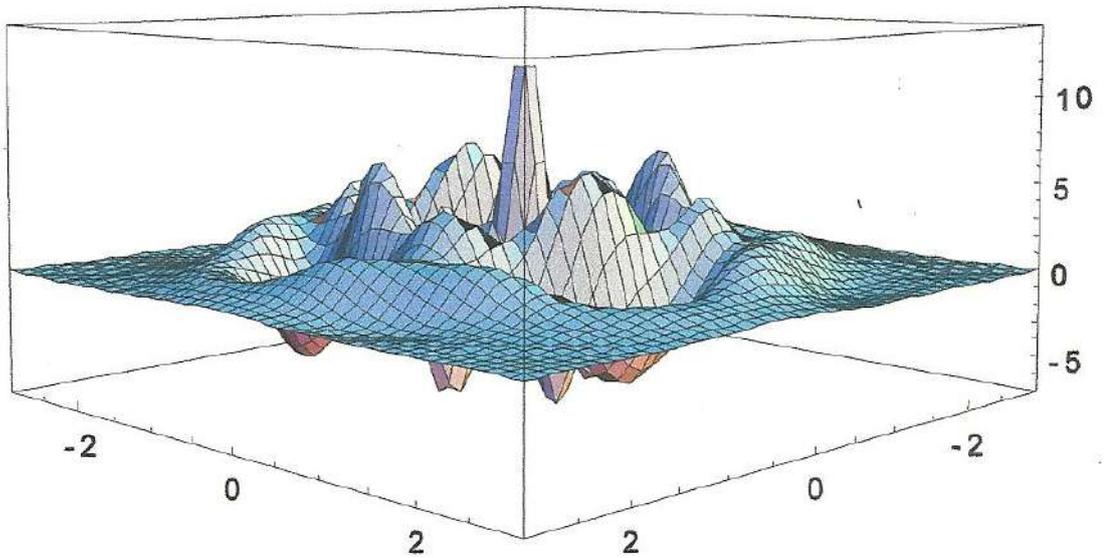


Figura 4.4:  $W_{+--}(\alpha, x, y)$ ;  $\alpha = 2$

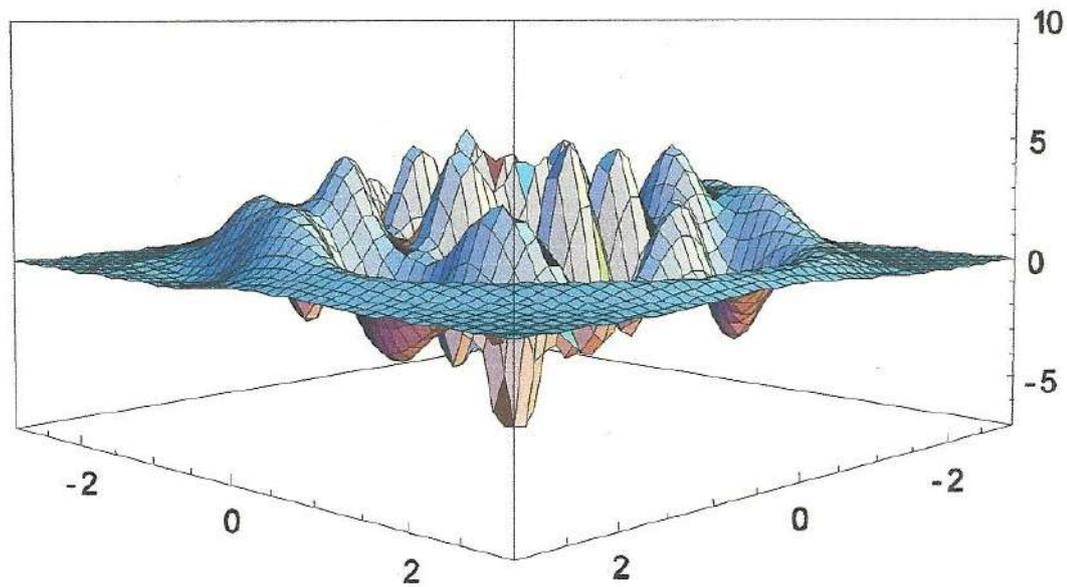


Figura 4.5:  $W_{-++}(\alpha, x, y)$ ;  $\alpha = 2$

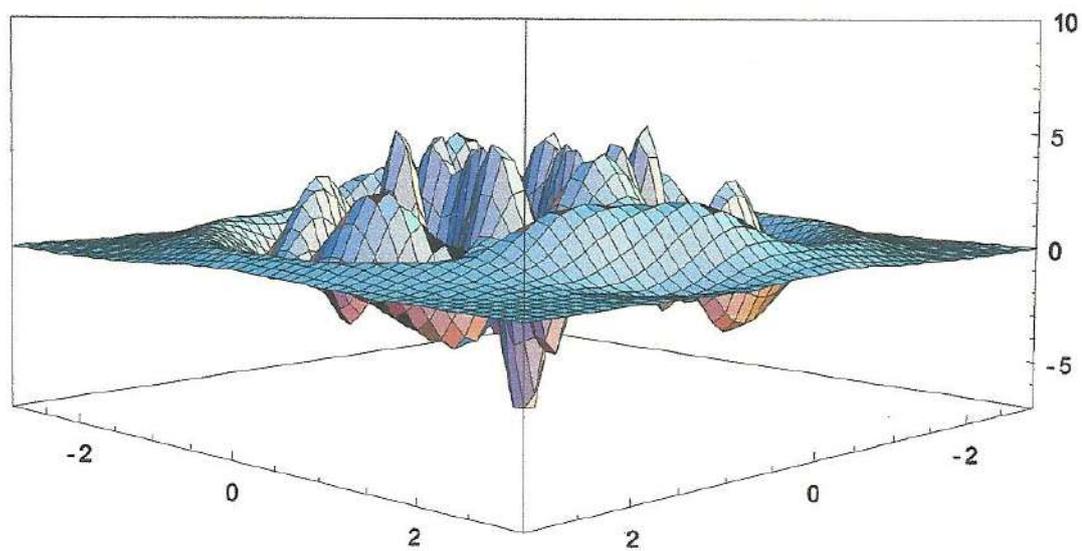


Figura 4.6:  $W_{--+}(\alpha, x, y)$ ;  $\alpha = 2$

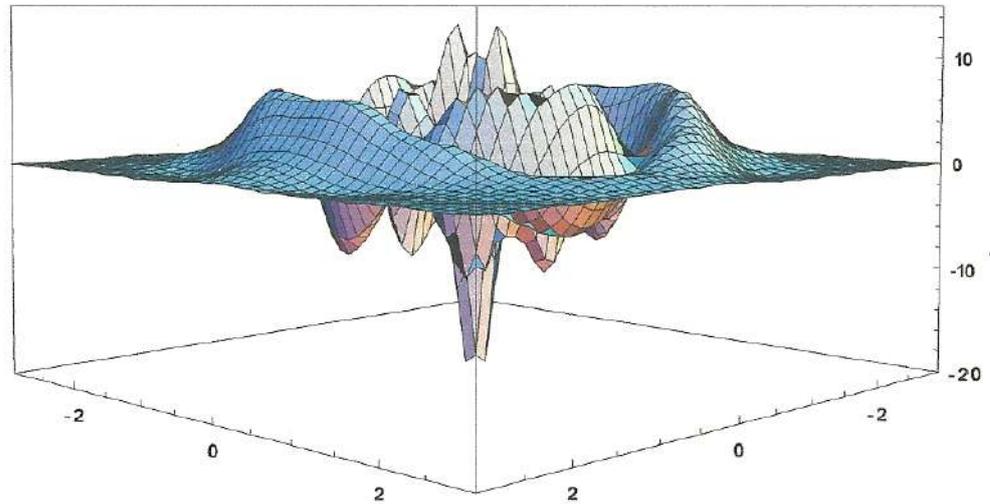


Figura 4.7:  $W_{---}(\alpha, x, y)$ ;  $\alpha = 2$

que é claramente uma função não negativa já que o operador densidade é positivo. A função  $Q$  também é limitada:  $Q(\alpha) < \frac{1}{\pi}$ .

A função  $Q$  de Husimi pode ser expressa como a transformada de Fourier da função característica de ordenamento anti-normal  $\chi_A(\eta)$

$$\chi_A(\eta) = \text{Tr}[\hat{\rho} e^{-\eta^* \hat{a}} e^{\eta \hat{a}^\dagger}] = \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha \langle \alpha | e^{\eta \hat{a}^\dagger} \hat{\rho} e^{-\eta^* \hat{a}} | \alpha \rangle = \int e^{\eta \alpha^* - \eta^* \alpha} Q(\alpha) d^2 \alpha$$

Portanto,  $Q(\alpha)$  é a transformada inversa de Fourier

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{-\eta \alpha^* + \eta^* \alpha} \chi_A(\eta) d^2 \eta$$

e a relação entre as funções  $Q(\alpha)$  e  $P(\alpha)$  é

$$Q(\alpha) = \frac{\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int d^2 \beta P(\beta) |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \int P(\beta) e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Ou seja, a função  $Q(\alpha)$ , assim como a função de Wigner, é uma convolução gaussiana da função  $P(\alpha)$ . Esta é, entretanto, convoluída com uma gaussiana com  $\sqrt{2}$  vezes o comprimento da função de Wigner, o que propicia um melhor comportamento para essa função.

Para um estado coerente puro  $|\beta\rangle$ , a função  $Q$  é dada por

$$Q(\alpha) = \frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2}{\pi} = \frac{e^{-|\alpha-\beta|^2}}{\pi}$$

e para um estado de Fock

$$Q(\alpha) = \frac{|\langle\alpha|n\rangle|^2}{\pi} = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{\pi n!}$$

Para as superposições de estados coerentes tipo gato de Schrödinger aqui estudados tem-se:

$$Q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N}(\alpha, z) = \frac{|\langle z | \psi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N}(\alpha) \rangle|^2}{\pi}$$

$$Q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N}(\alpha, x, y) = \frac{\exp[-(|x|^2 + |y|^2)]}{2^{2N} \pi \mathcal{F}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N}(\alpha^2)} \sum_{m, n=0}^{2^N-1} a(m)a(n) \times \\ \times \exp \left\{ \alpha \left[ x \left( \exp \left( i \frac{m\pi}{2^{N-1}} \right) + \exp \left( -i \frac{n\pi}{2^{N-1}} \right) \right) + iy \left( \exp \left( -i \frac{n\pi}{2^{N-1}} \right) - \exp \left( i \frac{m\pi}{2^{N-1}} \right) \right) \right] \right\}$$

Através dos gráficos das primeira gerações percebe-se que os gráficos das funções de Hussimi são representadas por "sinos" no espaço de fase de  $Q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N}(x, y)$  para dado  $\alpha$ .

Visualmente os gráficos das funções de Hussimi referentes à primeira geração são bem semelhantes de forma que para distingui-las graficamente tomamos a diferença entre esses dois casos (Fig. 4.10): Vê-se portanto que, apesar de semelhantes, há uma sutil mas significativa diferença entre as representações  $Q$ , o que mostra ser possível utiliza-las inclusive como meio de distinção dos estados.

Na segunda geração ocorre um fenômeno semelhante ao visto na primeira: as funções  $Q$  apresentam-se extremamente semelhantes umas às outras de forma que para distingui-las é necessário obter a diferença entre as funções. Nesse processo verificou-se que

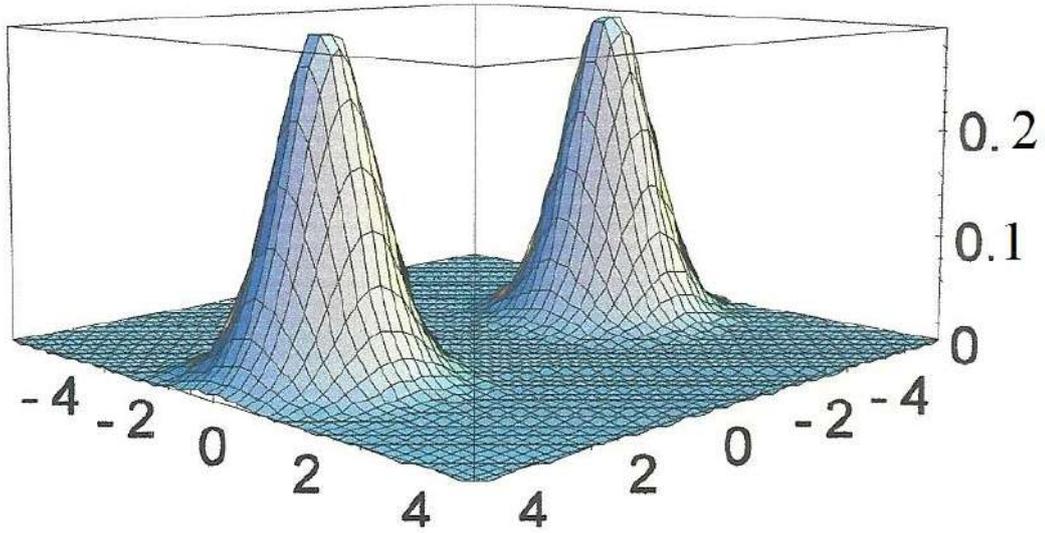


Figura 4.8:  $Q_+(\alpha = 3, x, y)$

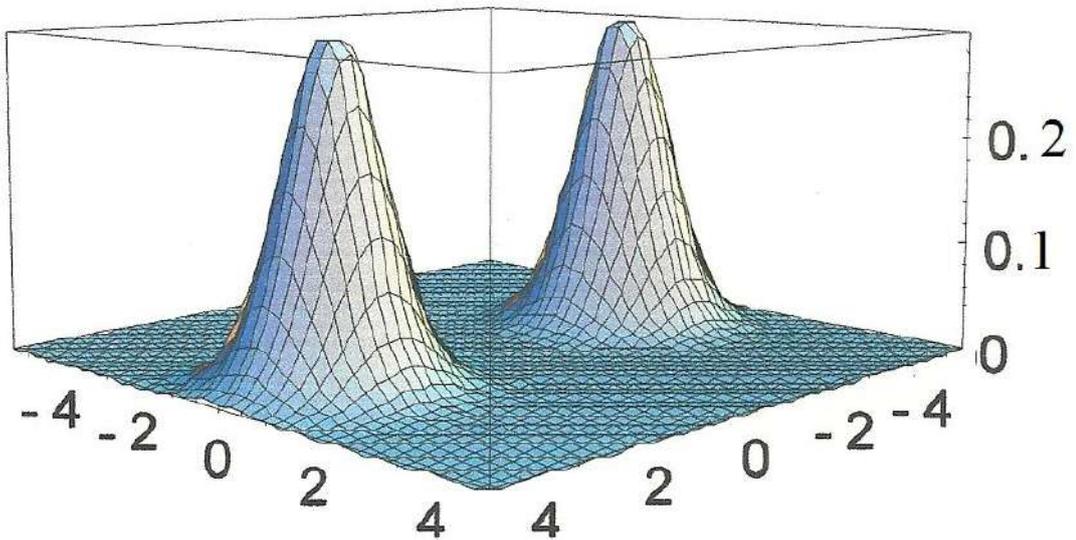


Figura 4.9:  $Q_-(\alpha = 3, x, y)$

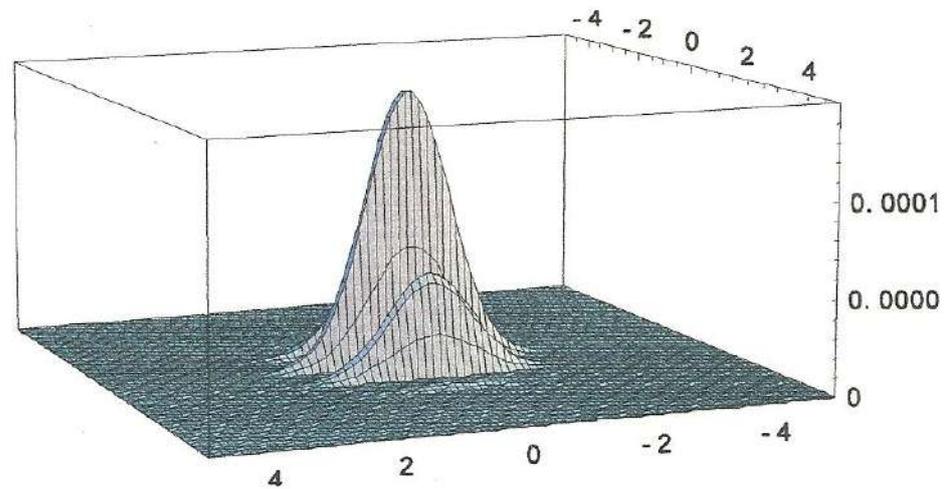


Figura 4.10:  $Q_-(\alpha = 3, x, y) - Q_+(\alpha = 3, x, y)$

as funções  $Q$  são todas distintas entre si, garantindo mais uma possibilidade de distinção dos estados

Na terceira geração, seguindo o que foi visto para as duas primeiras, a função  $Q$  aparece representada graficamente com uma função com um número de máximos igual a  $2^N$  onde  $N$  representa a geração à qual está associada a função. Mais uma vez percebe-se que todas as funções  $Q$  de Husimi são distintas entre si, nesse caso de forma evidente de acordo com os seus gráficos.

## 4.5 Medidas de não classicalidade

### 4.5.1 Função $R(z, \tau)$

Na descrição do campo eletromagnético através dos estados coerentes estabelece-se as representações  $P$  e  $Q$ , correspondentes ao ordenamento normal e antinormal, respectivamente, dos operadores de criação e destruição. Suas funções de distribuições, ou quasidis-

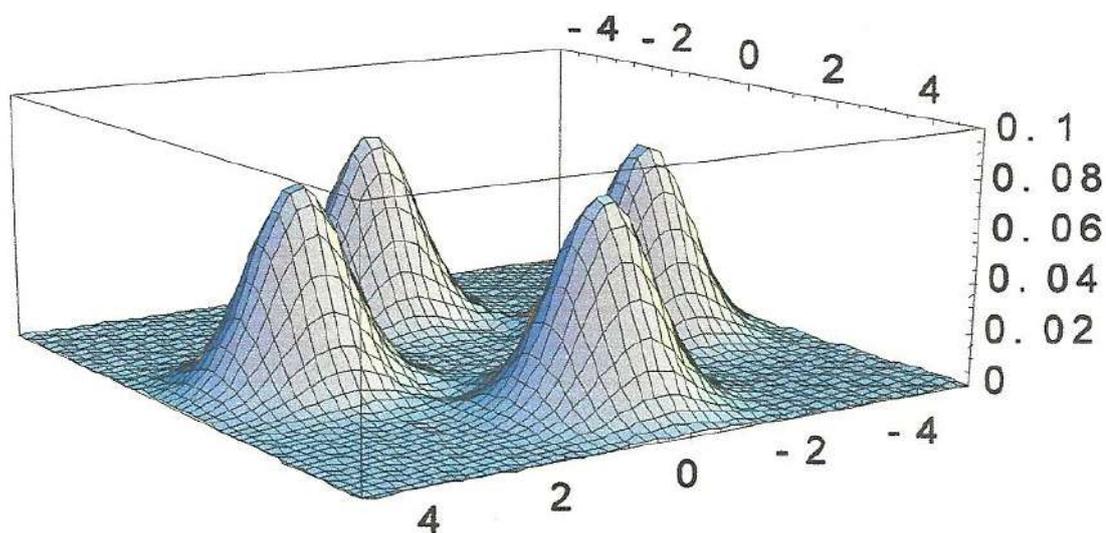


Figura 4.11: Aspécto genérico das fun es  $Q$  de segunda gera o

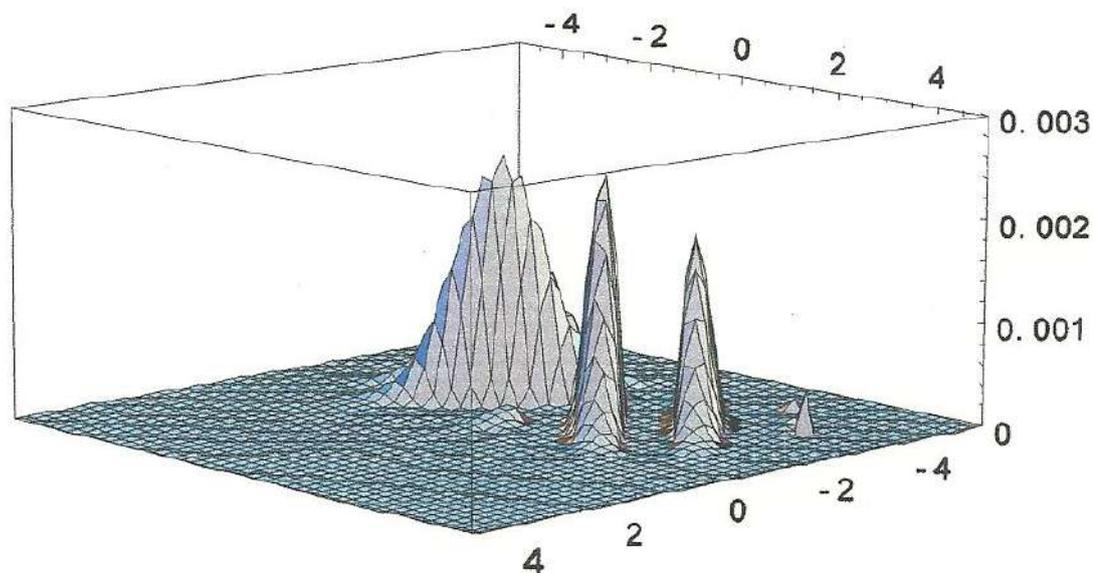


Figura 4.12:  $Q_{++}(\alpha = 3, x, y) - Q_{--}(\alpha = 3, x, y)$

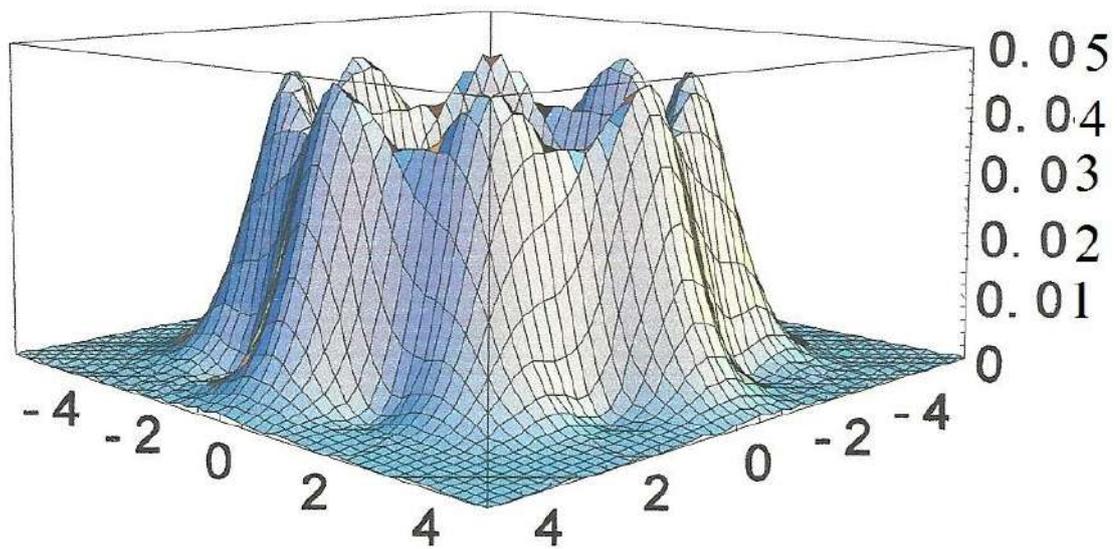


Figura 4.13:  $Q_{+++}(\alpha = 3, x, y)$

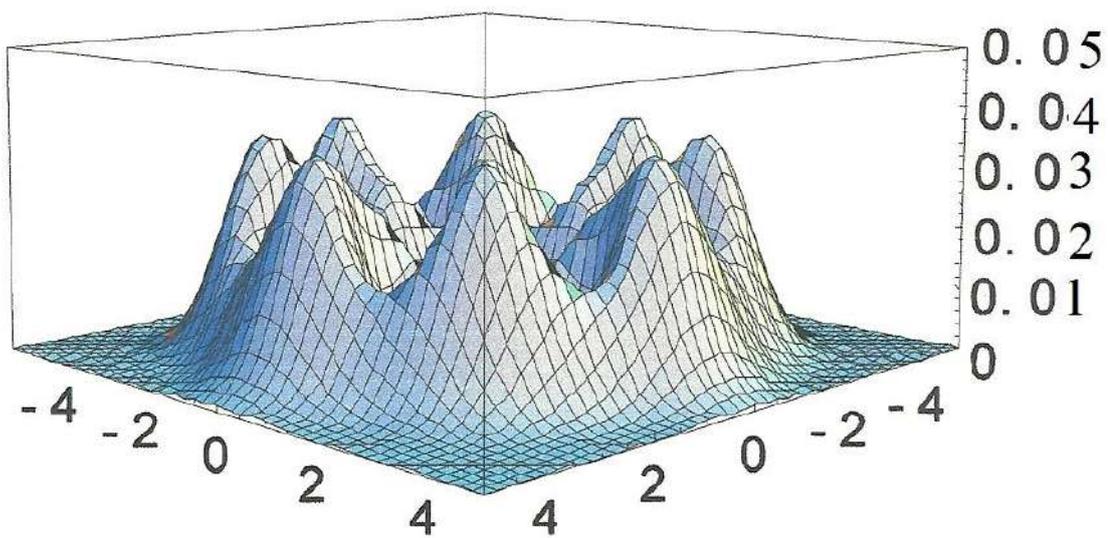


Figura 4.14:  $Q_{++-}(\alpha = 3, x, y)$

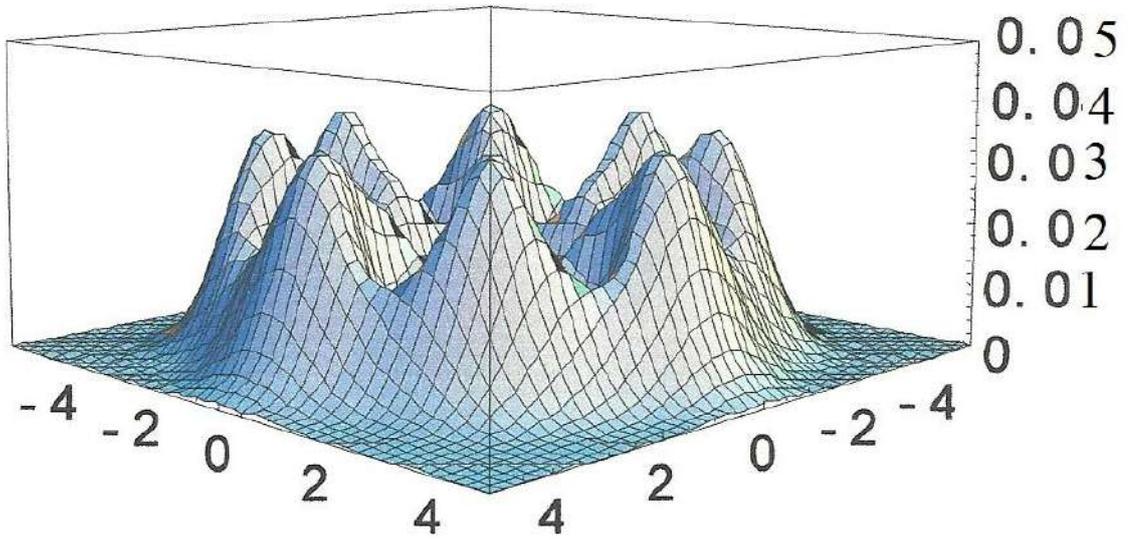


Figura 4.15:  $Q_{++-}(\alpha = 3, x, y)$

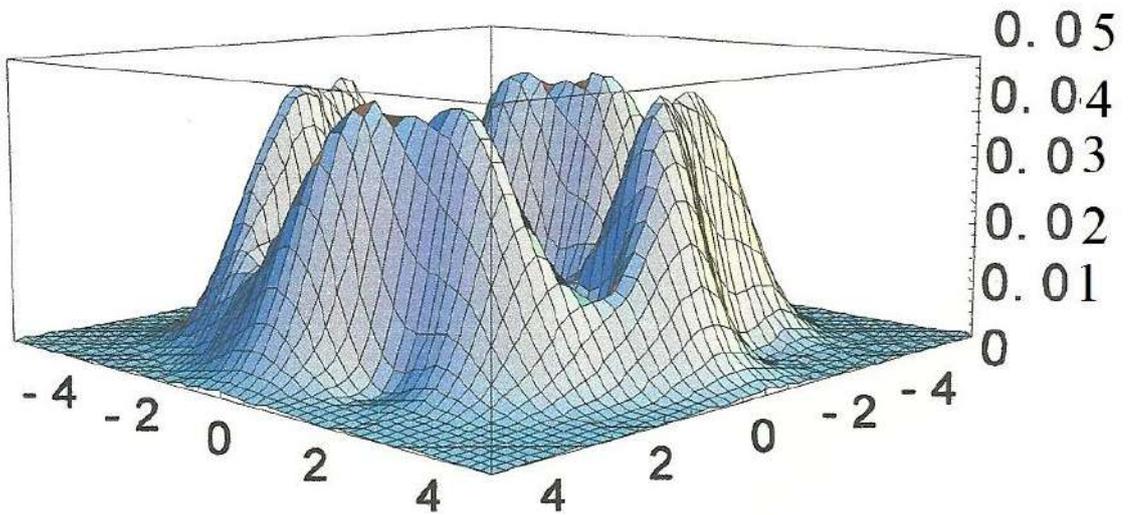


Figura 4.16:  $Q_{+--}(\alpha = 3, x, y)$

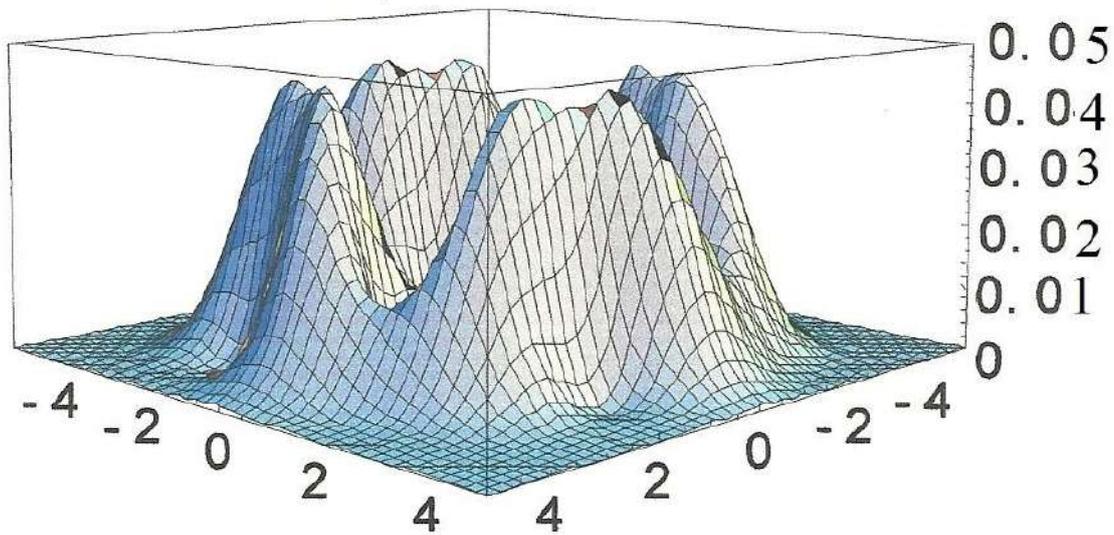


Figura 4.17:  $Q_{+--}(\alpha = 3, x, y)$

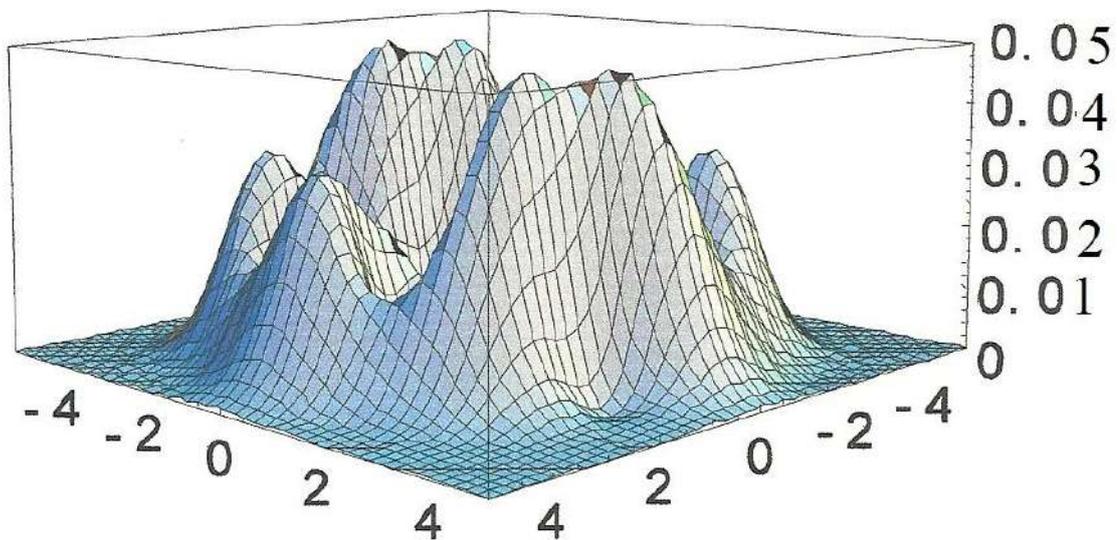


Figura 4.18:  $Q_{---}(\alpha = 3, x, y)$

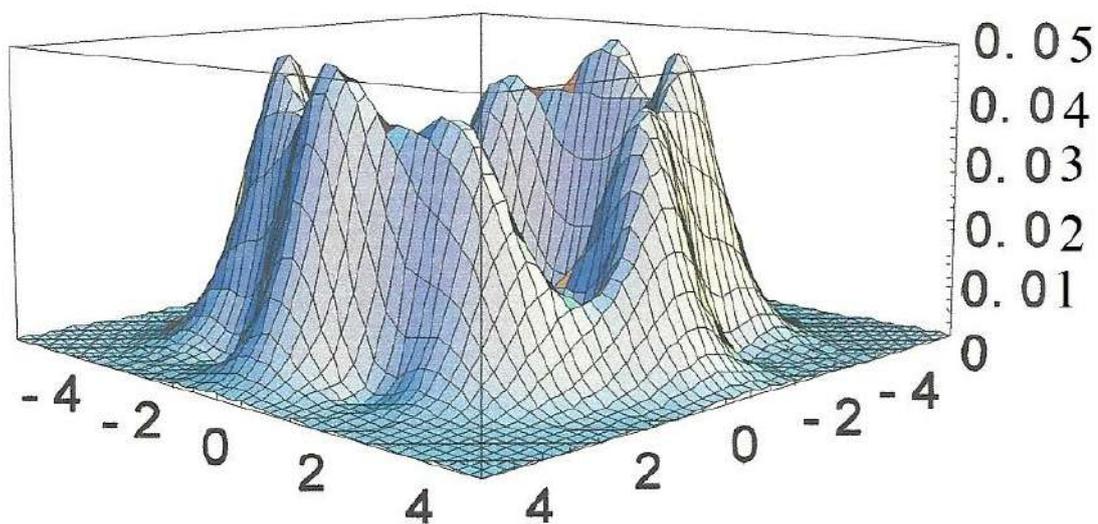


Figura 4.19:  $Q_{--+}(\alpha = 3, x, y)$

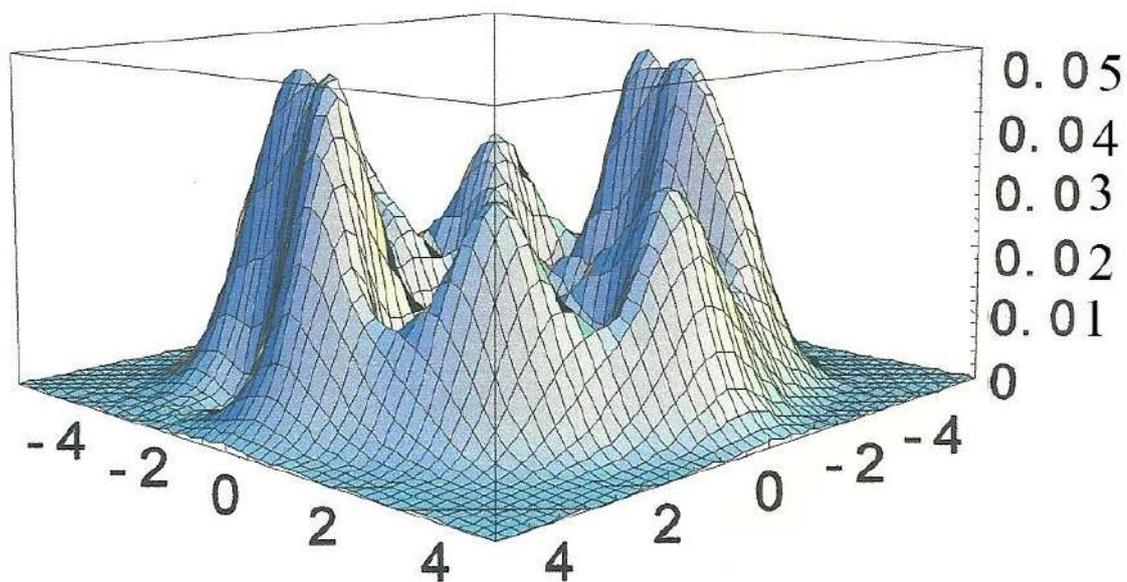


Figura 4.20:  $Q_{-+-}(\alpha = 3, x, y)$

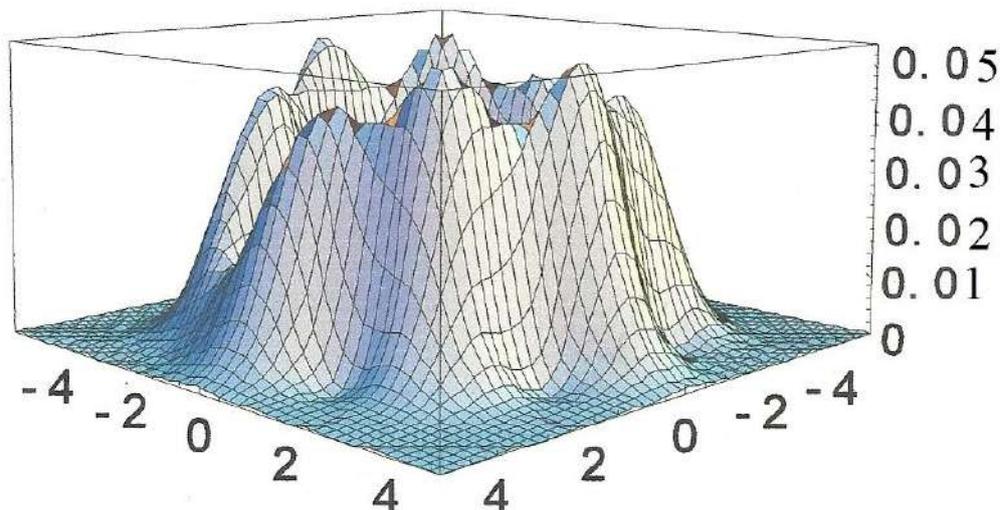


Figura 4.21:  $Q_{-++}(\alpha = 3, x, y)$

tribuições, no plano complexo estão relacionadas através da seguinte convolução:

$$Q(z) = \frac{1}{\pi} \int d^2w \exp(-|z - w|^2) P(w) \quad (4.26)$$

onde  $z$  e  $w$  são variáveis complexas. Seguindo Cahill [32] e Glauber, mas numa forma um pouco diferente, Lee, C. T [7] introduz um parâmetro contínuo  $\tau$  e define a seguinte distribuição genérica

$$R(z, \tau) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\pi} \int d^2w \exp[-\frac{1}{\tau} |z - w|^2] P(w) \quad (4.27)$$

Para os casos onde  $\tau = 0, \frac{1}{2}$  e  $1$  a função  $R$  assume a forma da função  $P$ , da função de Wigner,  $W$ , e da função  $Q$  de Husimi,  $Q$ , respectivamente.

$$P(w) = \exp |w|^2 \frac{1}{\pi} \int d^2u \langle -u | \rho | u \rangle \exp |u|^2 \exp(wu^* - w^*u) \quad (4.28)$$

$$R(z, \tau) = \frac{1}{1+\tau} \exp\left(\frac{1}{1+\tau} |z|^2\right) \frac{1}{\pi} \int d^2u \langle -u | \rho | u \rangle \exp\left(-\frac{1}{1-\tau} [(2\tau-1) |u|^2 + (zu^* - z^*u)]\right) \quad (4.29)$$

Determinemos agora a função  $R(z, \tau)$  para uma superposição de estados coerentes.

Para isso tomemos como exemplo uma superposição de dois estados do tipo

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= c_1 |\alpha_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle \\ \Rightarrow \hat{\rho} &= |\psi\rangle \langle \psi| \end{aligned} \quad (4.30)$$

Desenvolvamos o elemento de matriz genérico  $\langle -u | \rho | u \rangle$

$$\begin{aligned} \langle -u | \rho | u \rangle &= \\ c_1 c_1^* \langle -u | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_1 | u \rangle + c_2 c_2^* \langle -u | \alpha_2 \rangle \langle \alpha_2 | u \rangle + c_1 c_2^* \langle -u | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 | u \rangle + c_2 c_1^* \langle -u | \alpha_2 \rangle \langle \alpha_1 | u \rangle \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde, após desenvolver cada um dos termos, utilizando o produto escalar para estados coerentes e arrumando-os, ficamos com

$$\begin{aligned} \langle -u | \rho | u \rangle &= \\ c_1 c_1^* \exp(-|\alpha_1|^2) \exp[-|u|^2 + -\alpha_1^* u - \alpha_1 u^*] + c_2 c_2^* \exp(-|\alpha_2|^2) \exp[-|u|^2 + -\alpha_2^* u - \alpha_2 u^*] \\ + c_1 c_2^* \exp\left[-\left(\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}{2}\right)\right] \exp[-|u|^2 + -\alpha_2^* u - \alpha_1 u^*] \\ + c_2 c_1^* \exp\left[-\left(\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}{2}\right)\right] \exp[-|u|^2 + -\alpha_1^* u - \alpha_2 u^*] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Substituindo os elementos de matriz na expressão de  $R(z, \tau)$  ficamos com quatro termos a serem integrados. Para efetuar cada integração é feita uma substituição de variável de forma a colocá-las numa forma gaussiana, de fácil integração. Após mais simplificações, a

expressão de  $R(z, \tau)$  para uma superposição de dois estados coerentes fica:

$$\begin{aligned}
R(z, \tau) &= c_1 c_1^* \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{\tau} |z - \alpha_1|^2\right] + c_2 c_2^* \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{\tau} |z - \alpha_2|^2\right] \\
&+ c_1 c_2^* \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha_1 \alpha_1^* + \alpha_2 \alpha_2^* - 2\alpha_1 \alpha_2^*)\right] \exp\left[-\frac{1}{\tau}(z - \alpha_1)(z^* - \alpha_2^*)\right] \\
&+ c_2 c_1^* \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha_1 \alpha_1^* + \alpha_2 \alpha_2^* - 2\alpha_2 \alpha_1^*)\right] \exp\left[-\frac{1}{\tau}(z - \alpha_2)(z^* - \alpha_1^*)\right] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Essa expressão também pode ser escrita como

$$R(z, \tau) = \sum_{i,j=1}^2 c_i c_j^* \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_i^* + \alpha_j \alpha_j^* - 2\alpha_i \alpha_j^*)\right] \exp\left[-\frac{1}{\tau}(z - \alpha_i)(z^* - \alpha_j^*)\right] \quad (4.34)$$

O que sugere uma generalização do tipo

$$R(z, \tau) = \sum_{i,j=1}^N c_i c_j^* \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_i^* + \alpha_j \alpha_j^* - 2\alpha_i \alpha_j^*)\right] \exp\left[-\frac{1}{\tau}(z - \alpha_i)(z^* - \alpha_j^*)\right] \quad (4.35)$$

para uma superposição genérica de estados coerentes do tipo

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\alpha_i\rangle$$

#### 4.5.2 Profundidade não clássica

A profundidade não clássica de um dado estado, segundo Lee [6] e [7], é o menor valor de  $\tau$  ( $\tau_{\min}$ ) para o qual a função  $R(z, \tau)$  torna-se não negativa. Para os estados que estudamos,  $\tau_{\min} = 1$ , o que corresponde a dizer que nossos estados são tão não clássicos quanto os estados de Fock. Este resultado está de acordo com o teorema de Lütkenhaus e Barnett[20], que afirma que estados puros não gaussianos têm profundidade máxima.

Há outras possíveis medidas de não classicalidade baseadas na noção de de distância entre estados. Elege-se um conjunto de estados como sendo os mais clássicos e a medida de não classicalidade de um dado estado fica definida como a menor distância entre

o estado e um estado arbitrário dentro do conjunto dos mais clássicos. Em tal caso, estados com profundidade não clássica máxima terão medidas de não classicalidade diferentes. Isto acontece com nossos estados, mas não desenvolveremos este aspecto aqui.

## Capítulo 5

# Decoerência dos estados

A não evidência de superposições quânticas em sistemas macroscópicos é certamente uma das questões conceituais mais polêmicas da mecânica quântica. Como se sabe, o termo gato de Schrödinger, por exemplo, tem sua origem no questionamento de Schrödinger a respeito das consequências da utilização do formalismo da mecânica quântica em sistemas macroscópicos, no caso um gato numa caixa fechada equipada com um dispositivo letal cujo acionamento dependeria de um fenômeno no nível microscópico. A perspectiva de uma descrição do estado do gato como uma superposição dos estados ‘vivo’ e ‘morto’, durante o tempo em que este permanece fechado na caixa, deixa no ar a necessidade de um melhor entendimento da passagem entre as descrições clássica e quântica. Como se poderia explicar que, apesar de se supor que as regras da mecânica quântica são válidas no nível macroscópico, não se percebe a manifestação de superposições coerentes de estados assim como no nível microscópico? É justamente no centro dessa questão que surge a necessidade de se estudar o papel da dissipação na perda da coerência. O processo de decoerência advém

da irreversibilidade do acoplamento entre o sistema observado e o reservatório associado ao mundo externo. Nesse processo, uma superposição de estados quânticos evolue para uma mistura estatística, que por sua vez permite uma descrição clássica da evolução dos estados dos sistemas.

Neste tratamento estudaremos a decoerência das múltiplas gerações dos estados gato de Schrödinger a partir do acoplamento do sistema com um reservatório térmico. Para isso utilizaremos o formalismo da matriz densidade, onde procuraremos obter a matriz densidade do campo  $\rho(t)$  a partir de  $\rho(0)$  através de um procedimento baseado no uso de sua respectiva função característica em ordem normal.

Vejamos. Por definição:

$$\begin{aligned} C_N(\lambda, \lambda^*) &= Tr\{\hat{\rho}(t) \exp(\lambda \hat{a}^\dagger) \exp(-\lambda^* \hat{a})\} \\ &= \exp\left(\frac{-\lambda \lambda^*}{2}\right) Tr\{\exp(-\lambda^* \hat{a}) \rho(t) \exp(\lambda \hat{a}^\dagger)\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

que para um estado tipo gato de Schrödinger dado de forma genérica por

$$|\psi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(\alpha)\rangle = |N_N|^2 \sum_{m,n=1}^N a_m a_n |\alpha_m\rangle \langle \alpha_n| \quad (5.2)$$

toma a forma

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = |N_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda \lambda^*}{2}\right) Tr\{\exp(-\lambda^* \hat{a}) \left[ \sum_{m,n=1}^N a_m a_n |\alpha_m\rangle \langle \alpha_n| \right] \exp(\lambda \hat{a}^\dagger)\} \quad (5.3)$$

Utilizando as fórmulas válidas para estados coerentes

$$Tr\{\exp(-\lambda^* \hat{a}) |\alpha\rangle \langle \beta| \exp(\lambda \hat{a}^\dagger)\} = \langle \beta | \alpha \rangle \exp(-\lambda^* \alpha + \lambda \beta^*) \quad (5.4)$$

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha \beta^*\right] \quad (5.5)$$

ficamos com

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = |N_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda\lambda^*}{2}\right) \sum_{m,n=1}^N a_m a_n \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_m|^2 + |\alpha_n|^2) + \alpha_m \alpha_n^*\right] \exp[-\lambda^* \alpha_m + \lambda \alpha_n^*] \quad (5.6)$$

que para

$$\alpha_m = \alpha \exp\left(i \frac{\pi m}{2^{N-1}}\right) \text{ e } \alpha_n = \alpha \exp\left(i \frac{\pi n}{2^{N-1}}\right) \quad (5.7)$$

fica

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = |N_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda\lambda^*}{2}\right) \sum_{m,n=1}^N a_m a_n \exp[|\alpha|^2 (\exp(i \frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1)] \times \exp\left[-\lambda^* \alpha \exp\left(i \frac{\pi m}{2^{N-1}}\right) + \lambda \alpha^* \exp\left(-i \frac{\pi n}{2^{N-1}}\right)\right] \quad (5.8)$$

A evolução temporal da função característica associada a uma interação com o reservatório pode ser dada por

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = C_N(\lambda \exp(-\frac{\gamma t}{2}), \lambda^* \exp(-\frac{\gamma t}{2}), 0) \quad (5.9)$$

O que leva a

$$C_N(\lambda, \lambda^*, t) = |N_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda\lambda^*}{2} \exp(-\gamma t)\right) \sum_{m,n=1}^N a_m a_n \exp[|\alpha|^2 (\exp(i \frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1)] \times \exp\left[-\lambda^* \exp(-\frac{\gamma t}{2}) \alpha \exp\left(i \frac{\pi m}{2^{N-1}}\right) + \lambda \exp(-\frac{\gamma t}{2}) \alpha^* \exp\left(-i \frac{\pi n}{2^{N-1}}\right)\right] \quad (5.10)$$

Agora pergunta-se: Qual deveria ser a matriz densidade a fim de obter-se a função característica acima, sem impor  $\lambda \rightarrow \lambda \exp(-\frac{\gamma t}{2})$ ? Por comparação induzida obtém-se

$$\rho = |N_N|^2 \exp\left[\frac{-\lambda\lambda^*}{2} (\exp(-\gamma t) - 1)\right] \sum_{m,n=0}^{2^{N-1}} a_m a_n \exp[|\alpha|^2 (\exp(i \frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1) (1 - \exp(-\frac{\gamma t}{2}))] \left| \alpha \exp\left(i \frac{\pi m}{2^{N-1}} - \frac{\gamma t}{2}\right) \right\rangle \left\langle \alpha \exp\left(i \frac{\pi n}{2^{N-1}} - \frac{\gamma t}{2}\right) \right| \quad (5.11)$$

Sendo que para  $\gamma t \ll 1$ ,  $(1 - \exp(-\frac{\gamma t}{2})) \rightarrow \gamma t$  simplifica-se para

$$\rho = |N_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda\lambda^*}{2}\gamma t\right) \sum_{m,n=0}^{2^N-1} a_m a_n \exp[|\alpha|^2 (\exp(i\frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1)\gamma t] \times \left| \alpha \exp(i\frac{\pi m}{2^{N-1}} - \frac{\gamma t}{2}) \right\rangle \left\langle \alpha \exp(i\frac{\pi n}{2^{N-1}} - \frac{\gamma t}{2}) \right| \quad (5.12)$$

Para verificar a validade da expressão acima bastas substituir a matriz densidade encontrada na definição da função característica e desenvolver de modo análogo ao feito anteriormente.

Estamos interessados em conhecer a evolução temporal da coerência dos estados gato de Schrödinger, que no nosso caso são superposições de estados coerentes. A coerência, como se sabe, está associada à preservação dos termos cruzados da matriz densidade, de origem tipicamente quântica. Por isso, para analisarmos a evolução da coerência no tempo, definamos a amplitude de coerência, que é a soma dos coeficientes dos termos fora da diagonal principal da matriz densidade, apesar de que a inclusão dos termos puros apenas adicionaria uma constante igual a  $2^N$  ao somatório da amplitude de coerência:

$$A_N(t) = |N_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda\lambda^*}{2}\gamma t\right) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m \neq n}}^{2^N-1} a_m a_n \exp[|\alpha|^2 (\exp(i\frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1)\gamma t] \quad (5.13)$$

De onde se percebe que para cada termo da superposição tem-se

$$t_{dec} = \frac{t_c}{|\alpha|^2 (\exp(i\frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1)} \quad (5.14)$$

ou, separando-se as partes real e imaginária

$$\begin{aligned} t_{dec} &= \frac{t_c}{2|\alpha|^2} + it_c \frac{\sin(\frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}})}{2|\alpha|^2 (1 - \cos(\frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}))} \\ &= \frac{t_c}{2|\alpha|^2} (1 + i \frac{\sin \theta_N}{(1 - \cos \theta_N)}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Vejamos então como a coerência se desenvolve em função de suas paridades para as primeiras gerações. Para isso definamos a raiz do quadrado da amplitude de coerência

a fim de que possamos avaliar o efeito na dissipação causado pelo decaimento dos termos cruzados de forma absoluta:

$$\begin{aligned}
 A_N(t) &= |\mathcal{N}_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda\lambda^*}{2}\gamma t\right) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m \neq n}}^{2^N-1} (a_m a_n)^2 \exp[|\alpha|^2 (\exp(i\frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1)\gamma t] \\
 &= |\mathcal{N}_N|^2 \exp\left(\frac{-\lambda\lambda^*}{2}\gamma t\right) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m \neq n}}^{2^N-1} \exp[|\alpha|^2 (\exp(i\frac{\pi(m-n)}{2^{N-1}}) - 1)\gamma t] \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Onde  $(a_m a_n)^2 = 1$ . Para normalizar  $A_N(t)$ , podemos dividi-la por  $A_N(0)$ , de acordo como sugerido por [3]

$$A'_N(t) = \frac{A_N(t)}{A_N(0)} \quad (5.17)$$

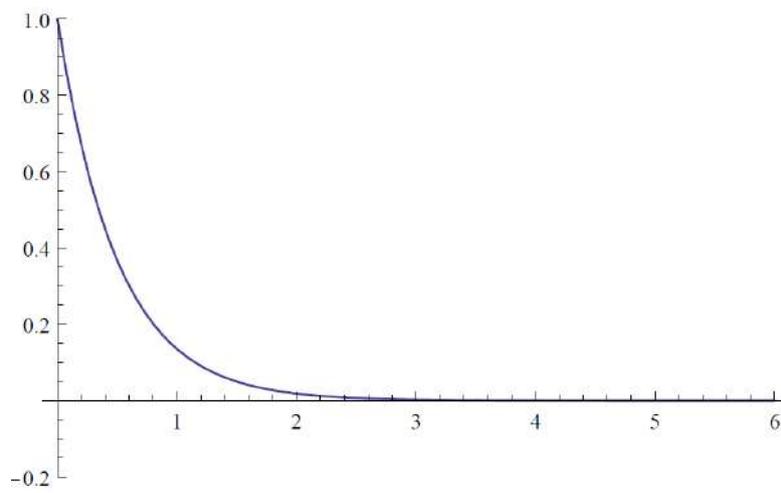
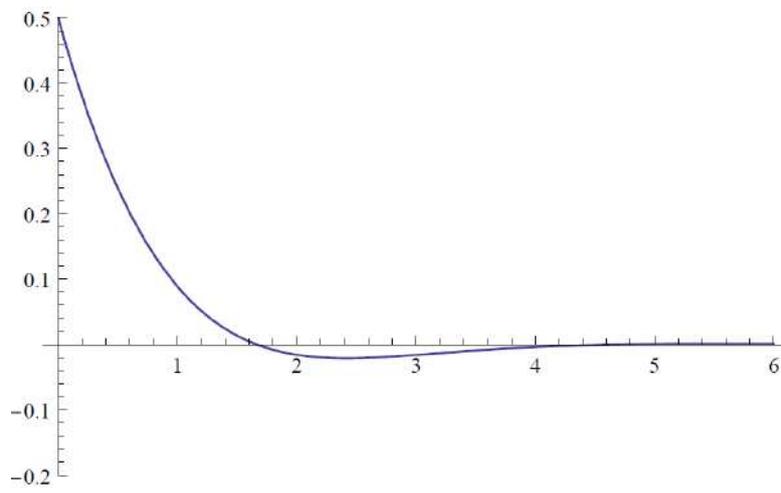
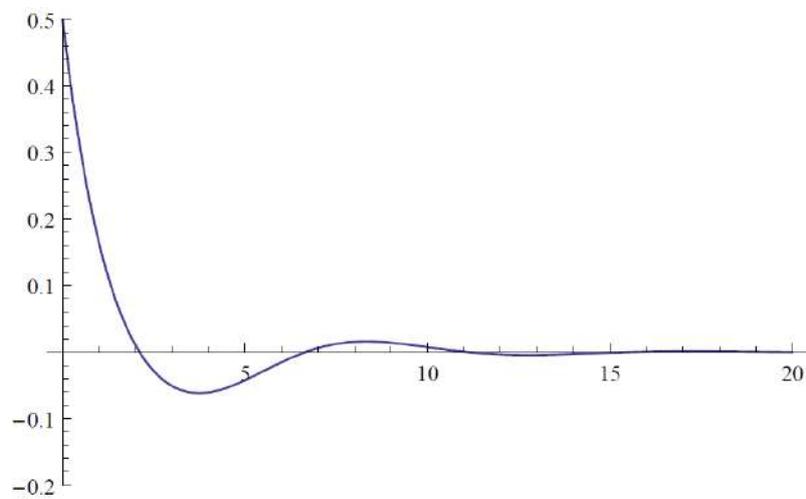
Dessa forma vê-se que a decoerência é uma característica típica da geração, independentemente do estado específico.

$$A'_1(t) = e^{-(\frac{\lambda\lambda^*}{2} + 2\alpha^2)\gamma t} \quad (5.18)$$

$$A'_2(t) = \frac{1}{6} e^{-(\frac{\lambda\lambda^*}{2} + 2\alpha^2)\gamma t} \left(1 + 2e^{\alpha^2\gamma t} \cos \alpha^2\gamma t\right) \quad (5.19)$$

O gráfico de  $A'_1(t)$  (Fig. 5.1) exhibe o comportamento esperado, iniciando com  $A'_1(0) = 1$ , na ausência de decoerência, chegando rapidamente a zero, quando a decoerência é total. Já para a segunda geração (Fig. 5.2), ocorre uma inversão no sinal de  $A'_2(t)$ , um fenômeno de interferência de natureza fundamentalmente quantum mecânica, que manifesta-se devido às diversas possíveis trajetórias de detecções e passagens pelas zonas de Ramsey que podem levar a um mesmo estado final.

Outra característica das gerações posteriores é que o novo valor máximo será igual a  $\frac{1}{2}$ . Tal fato é consequência de já não termos uma fase de  $\pm i\pi$  (Eq. 5.16), como na primeira geração, o que levava a contribuição – superposição - de termos idênticos, ocasionando numa amplitude máxima igual a  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Os gráficos de  $A'_3(t)$ ,  $A'_4(t)$  e  $A'_5(t)$  (Fig. 5.3-5.6) confirmam o aumento da modulação da amplitude enquanto esta tende a zero, como evidenciado no detalhe de  $A'_5(t)$  (Fig. 5.6).

Figura 5.1:  $A'_1(t)$ Figura 5.2:  $A'_2(t)$ Figura 5.3:  $A'_3(t)$

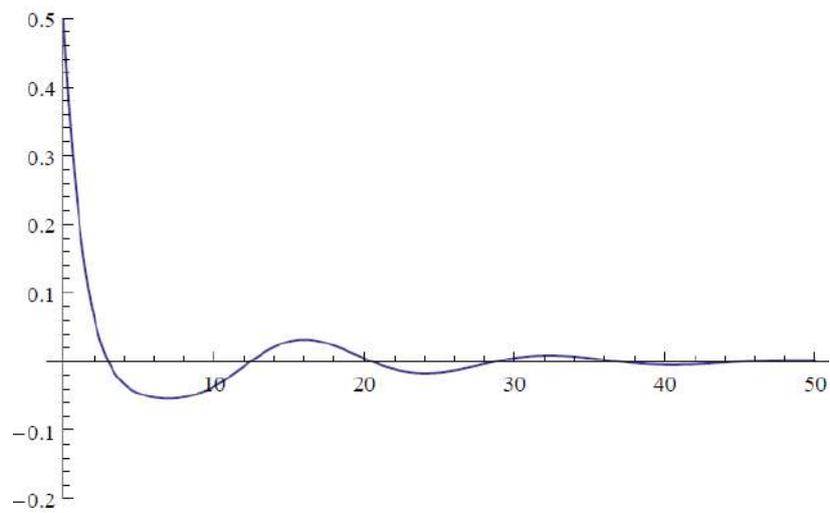


Figura 5.4:  $A'_4(t)$

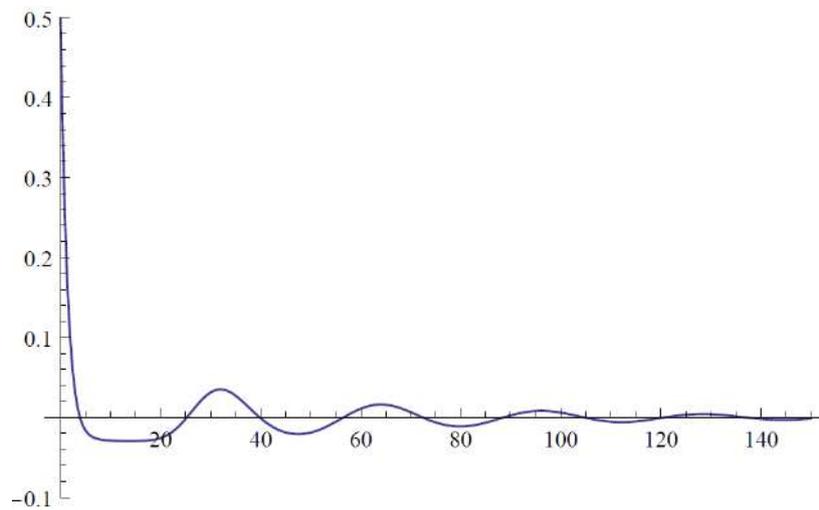


Figura 5.5:  $A'_5(t)$

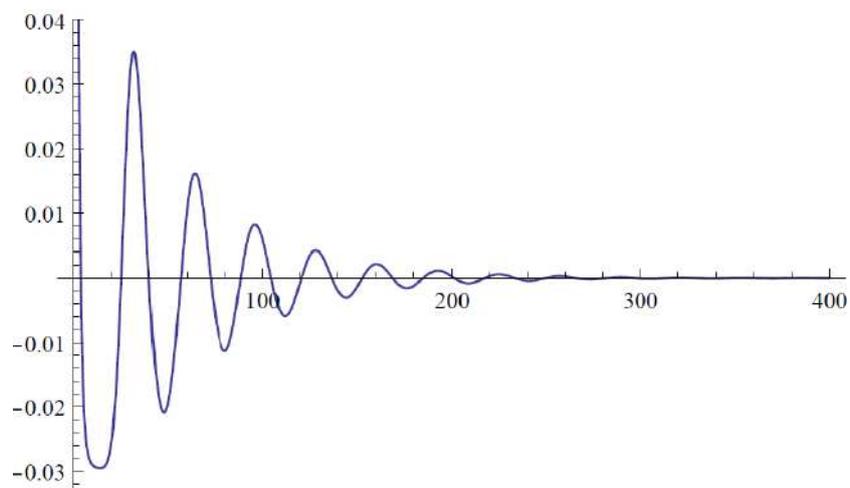


Figura 5.6:  $A'_s(t)$

## Capítulo 6

# Conclusões

Neste trabalho desenvolveu-se uma generalização da normalização das superposições de estados tipo gato de Schrödinger de gerações posteriores produzidos tanto numa cavidade como num meio Kerr a partir dos esquemas de geração descritos na literatura. A generalização desenvolvida abrange todos os possíveis entes da família de estados do campo, incluindo os ditos cruzados, provenientes de detecções distintas no estado do campo entre duas ou mais gerações. Uma vez estabelecida a normalização passou-se a investigar os diversos indicadores estatísticos do campo. Inicialmente foi estudada a distribuição de número de fótons, de onde se percebeu que, dentro do conjunto de estados em cada geração, ocorre o seguinte fenômeno: toda vez que é efetivada uma detecção ímpar até a segunda geração, a próxima detecção não interfere na distribuição de probabilidade do estado gerado, contanto que as possíveis outras detecções permaneçam inalteradas. Portanto as únicas descendências da família imunes a ter descendentes com distribuições de probabilidade "clonadas" são aquelas formadas por entes pares cuja segunda detecção seja par, independentemente das outras

detecções. Outro fator em que os estados pares puros se destacam é no número médio de fótons. Apenas os estados pares puros possuem número médio de fótons menor que  $\alpha^2$  para valores baixos de  $\alpha^2$ . Verificou-se que basta haver uma detecção ímpar, não importando a ordem em esta aparece, para que  $\langle \hat{n} \rangle > \alpha^2$ . Além disso é notado que, a partir da segunda geração há a tendência de que  $\langle \hat{n} \rangle \rightarrow \alpha^2$  de forma oscilatória. É com o fator de Mandel que verifica-se que os casos em que  $\langle \hat{n} \rangle > \alpha^2$  e  $\langle \hat{n} \rangle < \alpha^2$  estão associados a uma natureza estatística sub e super-poissoniana respectivamente. Até esse ponto todos os indicadores da estatística dos estados mantêm a mesma relação de similaridade, impedindo a distinção de uma série de estados que possuem seus indicadores clonados.

Na representação dos estados no espaço de fase surge a possibilidade de distinguir estados até então indistinguíveis, seja através da função de Wigner, seja através da função Q de Husimi, haja visto o fato dessas funções reconstruírem o estado no espaço de fase através de sua função característica. Essas funções podem ser generalizadas na forma de uma nova função, a função  $R(z, \tau)$ , que a depender do valor de  $\tau$ , 0,  $\frac{1}{2}$  ou 1, assume a forma da função P, da função de Wigner, W, e da função Q de Husimi, respectivamente. O valor de  $\tau$  também pode ser utilizado como um indicador do quão não clássico é um determinado estado, o que é convencionalmente chamado profundidade não clássica. Outra forma de avaliar a não classicalidade de um estado é através do chamado grau de não classicalidade, obtido através do traço da matriz densidade e definida como uma distância no espaço de fase.

Investigou-se ainda a inversão de população atômica sob os estados estudados. Como a expressão para a inversão de população envolve apenas termos do tipo  $\langle n | \hat{\rho}_c | n \rangle$ , os padrões típicos da inversão de população com o tempo obedecem a mesma relação de

semelhança obtida para os indicadores estatísticos estudados. De toda forma há uma característica típica para todos os estados: O colapso e ressurgimento na inversão de população atômica.

O estudo da compressão de quadratura mostrou-se bastante útil na distinção de estados com mesma estatística, particularmente os de terceira geração, apesar de que a compressão de quadratura também apresenta repetições entre estados, só que esses são distintos em termos da estatística. Em geral a compressão de quadratura em função de  $\alpha^2$  está associada a uma tangente hiperbólica, sendo que na segunda geração ocorre uma coincidência entre os valores das duas quadraturas além de que ocorre a mesma relação de semelhança entre os estados observada na natureza da estatística.

Por fim, analisamos a perda de coerência para os estados utilizando para isso uma amplitude de coerência normalizada, definida como a soma dos coeficientes dos elementos cruzados da matriz densidade em função do tempo, que revelou os padrões típicos de perda de coerência para cada geração.

## Referências

- [1] M. Born and R. Oppenheimer, *Ann. d. Phys.*, **84**, 457 (1927).
- [2] C. C. J. Roothaan, *Rev. Mod. Phys.*, **23**(2), 69 (1951).
- [3] S. S Mizrahi, A. L. Souza Silva, *J. Opt. B* 2 (2000) 271.
- [4] Glauber, R. J., *Phys. Rev.*, **131**, 2766, (1963)
- [5] Sudarshan, E. C. G., *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 227, (1963)
- [6] Lee, C. T. , *Phys. Rev. A*, **52**, 3374 (1995)
- [7] Lee, C. T. , *Phys. Rev. A*, **44**, 2775 (1991)
- [8] Malbouisson, J. M. C., Baseia, B., *J. Mod. Opt.* **46**, 2015. (1999)
- [9] Malbouisson, J. M. C., Duarte, S.B., Baseia, B, *Physica A*, **285**, 397, (2000)
- [10] Gerry, C. C., Knight, P. L., *Am. J. Phys.*, **65**, 965, (1997)
- [11] Davidovich, L., Brune, M. , Raimond, J. M. , Haroche, S. *Phys. Rev. A*, **53**, 1295, (1996)
- [12] Raimond, J. M. Brune, M. , Haroche, S, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 565, (2001)
- [13] Brune, M., Haroche, S., Lefèvre, V., Raimond, J. M., Zagury, N., *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 876, (1990)

- [14] Davidovich, L., Maali, A., Brune, M., Raimond, J. M., Haroche, S, Phys. Rev. Lett., **71**, 2360, (1993)
- [15] Brune, M., Haroche, S., Raimond, J. M., Davidovich, L., Zagury, N., Phys. Rev. A, **45**, 5193, (1993)
- [16] Walls, D.F. , Milburn, G. J., Quantum Optics, 1st Edn, Springer, (1994)
- [17] Mandel, L. , Wolf. E. , Optical Coherence and Quantum Optics, 1st Edn, Cambridge University Press, (1995)
- [18] Cohen - Tannoudji, C., Diu, B. , Laloë, F. Quantum Mechanics, 2nd Edn, Willey & Sons, (1977)
- [19] Dirac, P.A. M., The principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press (1958)
- [20] Lütkenhaus, N. and Barnett, S. M., Phys. Rev. A **51**, 3340
- [21] Kimble, H. J. and Mandel, Phys. Rev. A **13**, 2123 (1976)
- [22] Hulet, R. G. and D. Klepner, Phys. Rev. Lett. **51**, 1430 (1983)
- [23] Nussenzveig, P., F. Bernardot, M. Brune, J. Hare, J. M. Raimond, S. Haroche, and W. Gawlik, Phys. Rev. A **48**, 3991 (1995).
- [24] Gerry, C. C., Phys. Rev. A **59**, 4095 (1999)
- [25] Song, S., Caves, C. M, and Yurk, B., Phys. Rev. A **41**, 5261 (1990)
- [26] Yurk, B. Schleich and Walls, D. F., Phys. Rev. A **41**, 1703 (1990)
- [27] Gerry. C. C. and Grobe, R., Phys. Rev. A **51**, 1698 (1995)
- [28] Gerry. C. C. and Grobe, R., J. Mod. Opt. **44** , 41 (1997)
- [29] Souza, L, A., Baseia, B., Malbuisson, J. M. C. Phys. Lett. A. **309**, 5 (2003)

- [30] Dirac, P. A. M., Proc. R. Soc. London **114**, 243 (1927)
- [31] Glauber, R. J., Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963)
- [32] Cahill, K. E. and Glauber, R. J., Phys Rev. **177** 1857 (1969)
- [33] Cahill, K. E. and Glauber, R. J., Phys Rev. **177** 1882 (1969)
- [34] Jaynes, E. T. and Cummings, F. W., Proc. IEEE **51** 89 (1963)
- [35] Mandel, L., Opt. Lett. **4** 205 (1979)
- [36] Domokos, P., Adam, P., Janszky, J. and Zeilinger, A., Phys. Rev. Lett. **77** 1663 (1996)
- [37] Romero, K. M. F., Nemes, M. C., Peixoto de Faria, J. G. Salgueiro, A. N. and de Toledo Piza, A. F. R., Phys. Rev. A **58** 3205 (1998)
- [38] Zurec, W. H. Phys. today 36-44 (1991)
- [39] Howard, S. and Roy, S. K., Am. J. Phys. **55** 1109 (1987)
- [40] Einstein, A. Podolsk, B. and Rose, N., Phys. Rev. **47** 777 (1935)
- [41] Loudon, R. and Knight, P. L., J. Mod. Opt. **34** 209 (1987)
- [42] Nussenzveig, H. M. Introduction to Quantum Optics, Springer, Berlin, 1994
- [43] Dantas, C. M. A. and Baseia, B. Physica A **265** 176 (1999)
- [44] Holland, M. J., Walls, D. F. and Zoller, P. Phys. Rev. Lett. **67** 1716 (1991)
- [45] Brune, M. Nussenzveig, P. SchimidtKaler, F., Bernardot, F., Maali, A. Raimond, J. M. and Haroche, S., Phys. Rev. Lett. **72** 3339 (1994)
- [46] Malbouisson, J. M. C. and Baseia, B. Phys. Lett. A **290** 234 (2001)
- [47] Gerry, C. C. and Benmussa, A., Phys. Lett. A **303** 30 (2002)

- [48] Baseia, B. Moussa, M. H. Y., Bagnato, V. S., Phys. Lett. A **240** 277 (2001)
- [49] Zagury, N., de Toledo Piza, A. F. R., Phys. Rev. A **50** 2908 (2001)
- [50] Ghosh, H. and Gerry, C. C., J. Opt. Soc. Am. B **14** 2782 (1997)
  
- [51] Radon, J.; Parks, P.C. (translator), "On the determination of functions from their integral values along certain manifolds", IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol. 5, No. 4, pp. 170–176, (1986).