



Douglas Fagner Costa Aleodin Silva

# **Estados Ligados de Mésons Charmosos via uma Abordagem Explicitamente Galilei-Covariante**

Salvador

2017



Douglas Fagner Costa Aleodin Silva

## **Estados Ligados de Mésons Charmosos via uma Abordagem Explicitamente Galilei-Covariante**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Universidade Federal da Bahia – UFBA

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Luciano Melo Abreu

Salvador

2017

*Dedico esta dissertação ao Eterno Deus e aos meus pais ...*

# Agradecimentos

Este trabalho é fruto de determinação e coragem, mas principalmente, de ajuda. Sem apoio de pessoas queridas, o que já estava difícil se tornaria missão impossível. De fato, não é fácil chegar nesta etapa da vida; todavia se faz necessário expressar -mesmo que soe clichê-, a felicidade do resultado de um trabalho duro; trilhado com desafios, alegrias, amor, superação...enfim, emoções. Ainda bem que foi assim, caso contrário teria sido muito chato.

Em primeiro lugar, agradeço ao Deus da Bíblia por ser quem Ele é. O mesmo Deus que deu razão, propósito e esperança para as vidas de Newton, Faraday, Maxwell, dentre outros físicos que reconheceram a inteligibilidade da natureza como Sua Palavra.

Aos meus pais, pelo amor, carinho, cuidado e conselhos inestimáveis.

Aos amigos que se fizeram presentes, Aristides Ernesto, Afonso Emidio de Vasconcelos Lopes, Jota Marthins, Júnior Eskelsen, Franklin C. Ribeiro, Cristiano Nascimento, Fillipe Elias, Lauro Neto, Mônica Queiroz, Raíssa Fernandes, Otoniel Medrado, Pedro Almeida Jr., Sodrê Neto, William Pereira, George Luiz, Willian Gama, Jefferson Santos, Marcos Ariel, Guilherme Souza da Silva, Jerry Anderson, Olavo Abla, Israel Cordeiro, Marcos Eberlin, Fábio Tosta, Luan Órion, Ives Lamarck, Ezequiel dos Santos, Augusto Torres, Venicius Eriel, Matheus Pagannelly, Antonio Henrique Leão, Gabriela Bianchini. Minha vida intelectual e formação pessoal, está relacionada com estes nomes. Provavelmente esqueci alguém, então já peço desculpas.

Aos professores do Instituto de Física da UFBA pela minha formação acadêmica, em especial ao professor Sérgio Guerrero que me fez gostar de Física novamente; e aos professores Nelson Andion e Luiz Malbouisson por compartilhar seus conhecimentos ímpares além da Física.

Por fim, ao CNPq por financiar esta pesquisa.

*“Porque nEle foram criadas todas as coisas que há nos céus e na terra, visíveis e invisíveis[...]Tudo foi criado por Ele e para Ele. Ele é antes de todas as coisas, e nEle tudo subsiste.”*  
*(Colossenses 1:16-17)*

# Resumo

A constituição de moléculas mesônicas contendo dois mésons charmosos é estudada no cenário da troca de mésons baseados numa teoria efetiva explicitamente galilei-covariante. Em particular, a abordagem utilizada é uma teoria de campos efetiva para baixas energias, formulada num espaço-tempo penta-dimensional que permite obter um formalismo com covariância galileana manifesta através da lagrangiana efetiva da XEFT que contém termos cinéticos e de interação. Utilizamos os resultados obtidos para calcular amplitudes de espalhamento e as propriedades de possíveis estados ligados nesse contexto.

**Palavras-chave:** Teorias de Campos Efetivas, Mésons Charmosos, Covariância Galileana.



# Abstract

The constitution of mesonic molecules containing two charm mesons is studied in the exchange scenario based on explicitly galilean covariant effective theory. In particular, the approach used is an effective field theory for low-energy, formulated in five-dimensional space-time that allows obtain a formalism with manifestly galilean covariance by the effective lagrangian of XEFT that contains kinetic terms and interaction. We used the results obtained to calculate scattering amplitudes and the properties of possible bound states in this context.

**Keywords:** Effective Field Theory, Charm Mesons, Galilean Covariance.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de um espalhamento quântico . . . . .	24
Figura 2 – Propagadores para os pión e os mésons. . . . .	38
Figura 3 – Vértices das transições $D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0$ e $D^0\pi^0 \rightarrow D^{*0}$ . . . . .	38
Figura 4 – Vértice proporcional a $C_1$ para $D^{*0}\bar{D}^0 \rightarrow D^{*0}\bar{D}^0$ . . . . .	39
Figura 5 – Vértice proporcional a $C$ para $D^{*0}\bar{D}^0 \rightarrow D^{*0}\bar{D}^0$ . . . . .	39
Figura 6 – Representação diagramática da amplitude de transição $\langle D^*\bar{D}   i\mathbf{T}   D^*\bar{D} \rangle$ até segunda ordem. As linhas duplas indicam os mésons vetoriais $D^*$ e as linhas sólidas o pseudo-escalar $\bar{D}$ . . . . .	43
Figura 7 – Amplitude de transição para o espalhamento $D - \bar{D}^*$ escritos na forma de Equações de Lippman-Schwinger. As linhas duplas indicam os mésons vetoriais $D^*$ ou $\bar{D}^*$ , e as linhas sólidas os pseudo-escalares $D$ ou $\bar{D}$ . . . . .	45
Figura 8 – Distribuição dos pólos da matriz-S no plano complexo; $\times$ representa pólos correspondentes a estados ligados; $\circ$ , pólos correspondentes a ressonâncias e $\bullet$ pólos correspondendo aos estados virtuais. . . . .	48
Figura 9 – Representação gráfica dos valores de $C_1$ e $C_2$ que podem formar um estado ligado com energia $E_b = 0.2$ MeV. . . . .	50

# Sumário

	<b>Lista de ilustrações</b> . . . . .	<b>10</b>
	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS GALILEI-COVARIANTE</b> . .	<b>15</b>
2.1	Grupo de Galilei . . . . .	15
2.2	Covariância Galileana . . . . .	16
2.3	Covariância Galileana e os Campos de Schrodinger e Proca . . . .	21
2.4	Matriz-S . . . . .	22
2.5	Interação . . . . .	25
2.6	Propagador de Feynman e Teorema de Wick . . . . .	27
2.7	O Propagador de Feynman como Função de Green . . . . .	29
2.8	A Auto-Interação Quártica . . . . .	30
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO MANIFESTAMENTE GALILEI-COVARIANTE DA</b> <b>XEFT</b> . . . . .	<b>33</b>
3.1	Discussão da XEFT . . . . .	33
3.2	Versão manifestamente covariante da XEFT . . . . .	36
3.3	Espalhamento $D^* \bar{D} \rightarrow D^* \bar{D}$ . . . . .	39
3.4	Estados Ligados . . . . .	43
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>52</b>

# 1 Introdução

Muitos sistemas não-relativísticos têm sido descritos através de uma abordagem Galilei-Covariante. Seguindo o conceito de simetria, Takahashi, por exemplo, foi pioneiro em investigar Teorias de Campos Não-Relativísticas usando a invariância galileana como guia [1]. Mesmo que a relatividade galileana tenha sido substituída pela de Einstein, o uso da abordagem Galilei-Covariante se mostrou útil para contornar vários problemas em uma gama de sistemas de baixas energias ou não-relativísticos [2], como por exemplo em problemas de muitos corpos e da física da matéria condensada [3], superfluidez, física de baixas temperaturas e condensado Bose-Einstein [4–6]. Um outro exemplo é a análise dos limites galileanos do eletromagnetismo -isto é, de uma teoria de campo eletromagnético consistente com a invariância galileana-, estabelecidos pela primeira vez por Le Bellac e Lévy-Leblond [7], recentemente estudados usando a forma tensorial das Equações de Maxwell via lagrangianas Galilei-Invariantes [8].

O formalismo Galilei-Covariante tem como espaço de base um espaço-tempo penta-dimensional [4], e a formulação de teorias de campos sobre esta base permite modelar sistemas físicos não-relativísticos em uma abordagem similar ao cenário relativístico. O esboço para implementar a simetria galileana nesses sistemas, consiste em definir lagrangianas com a covariância galileana manifesta num espaço-tempo pentadimensional e então reduzi-las à lagrangianas num espaço-tempo newtoniano  $(3,1)$ . Em termos de Teoria de Grupos, isto é realizado a partir das representações sobre um espaço de Hilbert do grupo formado pelas transformações isométricas da variedade penta-dimensional, o qual pode ser identificado como a versão covariante do grupo de Galilei estendido, cuja álgebra de Lie centralmente estendida é similar ao do grupo de Poincaré em um espaço-tempo quadri-dimensional [9]. Tal abordagem mediante a formulação covariante de teorias de campo galileanos, foi realizada por exemplo, em modelos de campos com bósons não-relativísticos, massivos e sem spin, acoplados a um campo de calibre [10].

Além de bósons não-relativísticos, hádrons pesados podem ser descritos por teorias de campos efetivas não-relativísticas [11] e fornecem motivação para aplicação da abordagem Galilei-Covariante. Por exemplo, no regime de baixas energias, sistemas ligados não-relativísticos formados por bárions ou mésons, são descritos por teorias de campo efetivas [12]. A existência de estados moleculares cujos graus de liberdade são principalmente os mésons pesados constituídos por um par quark-antiquark confinado, configuram objetos de interesse deste ponto de vista teórico. De modo geral, quando a distância entre os hádrons que constituem um estado molecular é grande

o suficiente, a individualidade de cada hádron é preservada [13]. Isto nos sugere que um estado molecular genuíno apresenta uma clara separação de escala entre uma estrutura longa e curta. Esta separação de escala é explorada via uma formulação em Teorias de Campos Efetivas quando a massa dos constituintes das moléculas hadrônicas são muito maiores do que seus momentos [14]. Nesse cenário, teorias efetivas não-relativísticas desenvolvidas de uma física mais fundamental são formuladas via lagrangianas efetivas. A partícula  $X(3872)$ , por exemplo, descoberta pela colaboração Belle [15] e que pode ser considerada um estado molecular fracamente ligado de méson-antiméson [2, 16] é estudada por Alfiky, Braaten e outros através de uma teoria de campo efetiva não-relativística, conhecida como XEFT ( $X(3872)$  *Effective Field Theory*), cujos graus de liberdade fundamentais são os mésons charmosos  $D$  e  $D^*$  (antimésons  $\bar{D}$  e  $\bar{D}^*$ ) [2, 16–19].

Nesta dissertação, o objetivo, em particular, é apresentar uma abordagem manifestamente Galilei-Covariante para o espalhamento e formação de um estado ligado entre os mésons (antimésons) da XEFT. A proposta é construir, portanto, uma abordagem Galilei-Covariante para uma Teoria de Campo Efetiva que descreve através de lagrangianas efetivas a dinâmica de mésons e píons. Por “Galilei-Covariante”, quer se dizer que os campos da XEFT serão definidos num espaço-tempo estendido com 5 dimensões e que esse modelo irá descrever uma física não-relativística.

A dissertação é organizada como se segue. No capítulo 2, discutimos brevemente o grupo de Galilei; a métrica e as transformações das coordenadas da nossa formulação galileana são introduzidas e uma análise tensorial do espaço pentadimensional é feita. Como exemplo, a versão explicitamente covariante da Equação de Schrodinger é apresentada. Após, construímos a teoria perturbativa para os campos não-relativísticos na representação de interação com o exemplo de um espalhamento  $2 \rightarrow 2$  e definimos o propagador de Feynman nesse contexto.

No capítulo 3, aplicamos nossa formulação galileana à XEFT. Definimos os campos galileanos pentadimensionais que nos permitem manifestar a covariância galileana explícita da lagrangiana efetiva da XEFT e dos propagadores de Feynman associados. Como aplicação da interação desenvolvida anteriormente, estudamos o espalhamento  $D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}$  descrito pela lagrangiana de interação mesônica da XEFT. Obtemos até segunda ordem as respectivas matrizes invariantes deste espalhamento. Por motivação de um estado molecular de méson-antiméson [16], generalizamos a lagrangiana de interação mesônica da XEFT na seção 3.4 ao considerarmos outros espalhamentos mesônicos. Isto é, com o objetivo de estudar estados ligados na seção 3.4, acrescentamos na lagrangiana de interação mesônica da XEFT termos correspondentes aos espalhamentos  $D\bar{D}^* \rightarrow D\bar{D}^*$ ,  $D^*\bar{D} \rightarrow D\bar{D}^*$  e  $D\bar{D}^* \rightarrow D^*\bar{D}$ . Calculamos a respectiva energia de ligação com o uso da Equação de Bethe-Salpeter e discutimos possibili-

dades de pólos da matriz-S que correspondem à estados ligados, ressonâncias ou estados virtuais. Concluimos o capítulo com a restrição encontrada nos valores das constantes de acoplamento que fornecem estados ligados.

No capítulo 4, encerramos a dissertação com os resultados e perspectivas de trabalho.

## 2 Teoria Quântica dos Campos Galilei-Covariante

Neste capítulo, apresentamos a formulação galileana pentadimensional e a covariância galileana explícita dos campos de Schrodinger. Posteriormente construímos campos na representação de interação e obtemos o valor esperado de vácuo do produto temporalmente ordenado desses campos. Por fim, calculamos o propagador de Feynman no espaço dos momentos e computamos a amplitude de espalhamento  $2 \rightarrow 2$  de partículas não-relativísticas para exemplificar o formalismo.

### 2.1 Grupo de Galilei

As transformações de Galilei não-homogêneas das coordenadas  $(\mathbf{x}, t)$  de um evento no espaço-tempo, são definidas como se segue e estabelecem a relação entre dois referenciais inerciais da física não-relativística,

$$\bar{\mathbf{x}} = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \quad (2.1.1)$$

$$\bar{t} = t + b, \quad (2.1.2)$$

com  $\mathbf{x}$  sendo as coordenadas espaciais no espaço euclidiano  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ ;  $R$  é uma matriz  $3 \times 3$  que representa uma rotação em  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbf{v}$  é a velocidade relativa entre os referenciais inerciais;  $\mathbf{a}$  uma translação espacial e  $b$  uma translação temporal. Podemos representar essas transformações também por [20] :

$$G(\mathbf{x}, t) = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}). \quad (2.1.3)$$

Ou seja,  $G$  é um objeto matemático que atua nas coordenadas  $(\mathbf{x}, t)$  e disto resulta as coordenadas  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ , tal qual definidas em (2.1.1) e (2.1.2). Diremos também que  $G$  é representado através do seu conjunto de elementos :

$$G = (\mathbf{a}, b, \mathbf{v}, R). \quad (2.1.4)$$

Podemos investigar se  $G$  obedece às propriedades de grupo. Considere duas aplicações sucessivas de (2.1.4). Tome  $G_1 = (a_1, b_1, v_1, R_1)$  e  $G_2 = (a_2, b_2, v_2, R_2)$ . É direto calcular que  $G_2 G_1$  resulta em uma lei de composição que também é uma transformação de Galilei  $G$  :

$$G_2 G_1 = (b_2 + b_1, \mathbf{a}_2 + R_2 \mathbf{a}_1 + b_1 \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + R_2 \mathbf{v}_1, R_2 R_1). \quad (2.1.5)$$

Semelhantemente, a transformação  $G$  que leva  $(\mathbf{x}, t)$  no próprio  $(\mathbf{x}, t)$  é uma transformação de Galilei. É trivial ver que esse elemento identidade seria :

$$G = E = (0, 0, 0, 1). \quad (2.1.6)$$

Também podemos calcular a inversa de  $G$ , denotada por  $G^{-1}$ , tal que  $GG^{-1} = E$ . É direto mostrar que

$$G^{-1} = (-b, -R^{-1}(\mathbf{a} - b\mathbf{v}), -R^{-1}\mathbf{v}, R^{-1}). \quad (2.1.7)$$

Assim, junto com a propriedade de associatividade, percebe-se que o conjunto de elementos denotados por (2.1.4), forma um grupo. Chamaremos este grupo de Grupo de Galilei ou simplesmente de  $\mathcal{G}$  que tem como representação de definição as transformações (2.1.1) e (2.1.2). Além disso,  $\mathcal{G}$  é caracterizado por 10 parâmetros : três parâmetros das rotações  $R$  (ângulos de Euler), três parâmetros da velocidade  $\mathbf{v}$  ; três parâmetros das translações espaciais  $\mathbf{a}$ , e finalmente, um parâmetro das translações temporais  $b$ .

A representação unitária irredutível sobre o espaço das funções que dependem de  $(\mathbf{x}, t)$  é dada por

$$U(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)f(\mathbf{x}, t) = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}). \quad (2.1.8)$$

Ao tomarmos os elementos de  $U$  com parâmetros infinitesimais, determinamos de modo usual os geradores de  $\mathcal{G}$  na representação em questão, que são :

$$H = i\frac{\partial}{\partial t}, \text{ o gerador das translações temporais,} \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{P} = -i\nabla, \text{ o gerador das translações espaciais,} \quad (2.1.10)$$

$$\mathbf{J} = -i\mathbf{r} \times \nabla, \text{ o gerador das rotações,} \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{k} = it\nabla, \text{ o gerador dos boosts ou transformações puras.} \quad (2.1.12)$$

Para obter equações dinâmicas invariantes por  $\mathcal{G}$  que descrevem sistemas não-relativísticos, deve-se construir representações unitárias irredutíveis de  $\mathcal{G}$  através de uma extensão central do grupo (Grupo de Galilei Estendido). Tal construção pode ser vista em [20].

A seguir, apresentaremos transformações lineares num espaço-tempo galileano de 5 dimensões que descrevem partículas não-relativísticas.

## 2.2 Covariância Galileana

Na Física relativística, o grupo de simetria das transformações é o de Poincaré. O grupo de Poincaré é definido através de transformações lineares no espaço de Minkowski que preservam a métrica ou a distância entre dois pontos. Nesse espaço métrico, podemos formular uma estrutura tensorial e desenvolver representações unitárias

irredutíveis com a covariância manifesta. Já no caso não-relativístico (o espaço-tempo galileano de 4 dimensões), não se consegue construir transformações lineares (rotações) para as equações (2.1.1) e (2.1.2). Para fazer isso, será necessário construir um espaço métrico em 5 dimensões [20].

As transformações de Galilei propostas neste trabalho são formuladas em uma variedade pseudo-riemanniana penta-dimensional denotada por  $\mathbb{G}$  e que possui a seguinte métrica [6]

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

O produto interno entre dois vetores arbitrários que pertencem ao espaço  $\mathbb{G}$ , é dado por

$$\begin{aligned} (x|y) &= \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \\ &= \sum_{i=1}^3 x^i y^i - x^4 y^5 - x^5 y^4, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{G}$ . Note que  $\sum_{i=1}^3 x^i y^i$  denota componentes dos vetores no espaço euclidiano  $\mathbb{E}$ .

As transformações de Galilei são definidas em  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ , a coordenada  $x^4$  e a coordenada  $x^5$ . Isto posto, munido de  $\mathbb{G}$ , é possível construir um espaço métrico que obedece as transformações [3]:

$$\bar{x}^i = R_j^i x^j + v^i x^4 + a^i, \quad (2.2.3)$$

$$\bar{x}^4 = x^4 + a^4, \quad (2.2.4)$$

$$\bar{x}^5 = x^5 + (v_i R_j^i x^j) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 x^4. \quad (2.2.5)$$

Com essas transformações, definimos o que chamaremos de *Vetor de Galilei* (g-vetor)  $x^\mu = (\mathbf{x}, x^4, x^5)$  que se transforma sob (2.2.3), (2.2.4) e (2.2.5). Uma das motivações para a transformação da coordenada  $x^5$ , pode ser vista na análise de um boost galileano no espaço dos momentos. A partícula livre, de massa  $m$  e velocidade  $\mathbf{v}$  num dado referencial, terá momento  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  e energia  $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ . Enquanto que num referencial que se move com velocidade relativa  $\mathbf{V}$ , o momento da partícula será

$$\mathbf{p}' = m(\mathbf{v} - \mathbf{V}) = \mathbf{p} - m\mathbf{V}, \quad (2.2.6)$$

com energia

$$\begin{aligned}
 E \rightarrow E' &= \frac{\mathbf{p}'^2}{2m}, \\
 &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - m\mathbf{V})^2, \\
 &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2, \\
 &= E - \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2.
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Daí, pode-se concluir que  $p^\mu = (\mathbf{p}, m, E)$  é um *Vetor de Galilei* que se transforma de modo similar às equações (2.2.3)-(2.2.5). Um simples argumento para a introdução da quinta coordenada é visto na lagrangiana da partícula livre. A lagrangiana de uma partícula livre não é invariante pelas transformações (2.1.1) e (2.1.2). Esta invariância, todavia, pode ser alcançada com a introdução da coordenada  $x^5$  (isto é, a introdução de um espaço estendido) de tal modo que a lagrangiana  $L$  da partícula livre seja transformada em  $L - m\dot{x}^5$  [3].

Podemos ver também que a norma de um g-vetor, é dada por

$$\|x\| = (x|x) = \mathbf{x}^2 - 2x^4x^5. \tag{2.2.8}$$

Se escolhermos

$$x^5 = \frac{\mathbf{x}^2}{2t} \equiv s, \tag{2.2.9}$$

a norma (2.2.8) será nula para  $x^4 = t$ .

Se quisermos escrever as componentes  $x^4$  e  $x^5$  de modo que elas tenham dimensão de comprimento (L), assim como  $x^1, x^2, x^3$ ; basta escolhermos  $x^4 = v_4 t$  e  $x^5 = \frac{s}{v_5}$  com dimensões  $[v_4] = [v_5] = \frac{L}{T}, [s] = \frac{L^2}{T}$  e a dimensão do tempo, [t], denotada por T. Assim, um Vetor de Galilei pode ser definido como  $(x^1, \dots, x^5) = (\mathbf{x}, v_4 t, \frac{s}{v_5})$ . Nesse trabalho, adotamos  $v_4 = v_5 = 1$ . Essa escolha das componentes  $x^4$  e  $x^5$  não foi arbitrária. Antes, é consequência de uma reescrita da distância entre dois pontos no espaço euclidiano que é preservada por transformações lineares. Isto é, dado dois vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ , temos que

$$r^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \tag{2.2.10}$$

sendo r a distância entre dois pontos. Reescrevemos a Eq. (2.2.10) como

$$n^2 = -\frac{1}{2}r^2 = -t\frac{\mathbf{x}^2}{2t} - t\frac{\mathbf{y}^2}{2t} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \tag{2.2.11}$$

Comparando (2.2.11) com (2.2.10), percebe-se que  $n^2$  é um caso particular do produto interno em  $\mathbb{G}$ . Desse modo, além de justificarmos a escolha de (2.2.9), também

obtemos

$$y^5 = \frac{\mathbf{y}^2}{2t}, \quad (2.2.12)$$

$$y^4 = t. \quad (2.2.13)$$

Portanto, há uma correspondência de vetores em  $\mathbb{E}$  para  $\mathbb{G}$ . Isto é, um vetor arbitrário  $\mathbf{A} \in \mathbb{E}$ , é imerso em  $\mathbb{G}$ , por :

$$\text{Im} : \mathbf{A} \rightarrow A = (\mathbf{A}, A_4, \frac{\mathbf{A}^2}{2A_4}); A \in \mathbb{G}. \quad (2.2.14)$$

É importante também elucidar a estrutura tensorial do espaço métrico  $\mathbb{G}$ . Definimos o abaixamento e levantamento de índices, de modo usual. Considerando um vetor arbitrário  $X \in \mathbb{G}$  e escrevendo-o em componentes da base do espaço tangente de  $\mathbb{G}$ , temos que

$$X = X^\mu e_\mu, \quad (2.2.15)$$

com  $\mu = 1, \dots, 5$ . Calculando a inversa da métrica, obtêm-se

$$(\eta^{\mu\nu})^{-1} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2.16)$$

Escrevemos, portanto,

$$X^\mu = \eta^{\mu\nu} X_\nu. \quad (2.2.17)$$

Daí, as relações entre as componentes contravariante e covariante do g-vetor X, ficam estabelecidas como

$$X^i = X_i, \quad (2.2.18)$$

$$X^4 = -X_5, \quad (2.2.19)$$

$$X^5 = -X_4, \quad (2.2.20)$$

com  $i=1,2,3$ . Note que as transformações (2.2.3)-(2.2.5), são transformações lineares do tipo

$$\bar{x}^\mu = G_\nu^\mu x^\nu + a^\mu, \quad (2.2.21)$$

onde,

$$a^5 = 0, \quad (2.2.22)$$

com

$$G_\nu^\mu = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 & v^1 & 0 \\ R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 & v^2 & 0 \\ R_1^3 & R_2^3 & R_3^3 & v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_i R_1^i & v_i R_2^i & v_i R_3^i & \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.23)$$

Os operadores diferenciais nessa formulação Galilei-Invariante, também se transformam como vetores, por

$$\bar{\partial}_\mu = S_\mu^\nu \partial_\nu, \quad (2.2.24)$$

sendo

$$S_\mu^\nu = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 & 0 & -v^1 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 & 0 & -v^2 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 & 0 & -v^3 \\ -v_i R_1^i & -v_i R_2^i & -v_i R_3^i & 1 & \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.25)$$

Das equações (2.2.24) e (2.2.25), nota-se que :

$$\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}^\mu = \partial_\mu \partial^\mu, \quad (2.2.26)$$

$$\bar{\partial}_5 = \partial_5. \quad (2.2.27)$$

Portanto,  $\partial^\mu = (\nabla, -\partial_5, -\partial_4) = (\nabla, -\partial_s, -\partial_t)$  é um *Vetor de Galilei*, e sua contração com outro operador é um invariante galileano :  $\partial^\mu \partial_\mu = \nabla^2 - 2\partial_t \partial_s = -k^2$ . O escalar de Galilei  $k$  tem um papel análogo ao da massa de repouso da relatividade de Einstein.

Utilizando a representação unitária sobre o espaço das funções de um ponto em  $\mathbb{G}$ , os geradores das transformações homogêneas (rotações) e das não-homogêneas (translações) da equação (2.2.21), são respectivamente :

$$M_{\mu\nu} := -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad (2.2.28)$$

$$P_\mu := -i\partial_\mu. \quad (2.2.29)$$

Estes geradores formam uma álgebra de Lie, conforme

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}). \quad (2.2.30)$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\nu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho). \quad (2.2.31)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \quad (2.2.32)$$

A partir das relações de comutação entre os geradores (2.2.30)-(2.2.32) associados ao Grupo de Galilei Estendido e os operadores formados pelo produtos dos geradores, determinamos os invariantes de Casimir desta álgebra de Lie:

$$I_1 = P_\mu P^\mu, \quad (2.2.33)$$

$$I_2 = P_5. \quad (2.2.34)$$

Além destes dois invariantes, há também um terceiro obtido via vetor de Pauli-Lubanski em  $\mathbb{G}$  [20].

Se aplicarmos esses invariantes sobre o espaço das funções escalares reais  $\varphi(x)$  dependentes de  $x \in \mathbb{G}$ , sob as transformações (2.2.3)-(2.2.5), tal que  $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$

; esperamos encontrar uma quantidade também invariante. Então, utilizando (2.2.33) e (2.2.34) junto com as relações (2.2.18)-(2.2.20), escrevemos as expressões :

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x) = k^2 \varphi(x), \quad (2.2.35)$$

$$\partial_5 \varphi(x) = -im\varphi(x), \quad (2.2.36)$$

onde  $k^2$  e  $m$  são as constantes que rotulam os invariantes de Casimir descritos nas eqs. (2.2.33) e (2.2.34), respectivamente.

Tomando  $k = 0$ , segue de (2.2.35) que

$$(-\nabla^2 + 2\partial_4 \partial_5) \varphi(x) = 0. \quad (2.2.37)$$

Pela solução de (2.2.37), vemos que  $\varphi(x)$  é da forma

$$\varphi(x) = e^{-imx^5} \psi(\mathbf{x}, x^4). \quad (2.2.38)$$

As funções escalares  $\varphi(x)$  são interpretadas como campos no espaço penta-dimensional; enquanto que o campo físico  $\psi(\mathbf{x}, x^4)$  representa um campo escalar não-relativístico em uma teoria sem interação. Substituindo a solução (2.2.38) na equação (2.2.37), obtemos a equação de Schrodinger:

$$i\partial_4 \psi(\mathbf{x}, x^4) = \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, x^4). \quad (2.2.39)$$

Deste modo, as equações (2.2.35) e (2.2.36) são a forma explicitamente covariante da equação de Schrodinger para um campo escalar real não-relativístico.

Na próxima seção, introduziremos o formalismo lagrangiano Galilei-Covariante para o campo de Schrodinger.

## 2.3 Covariância Galileana e os Campos de Schrodinger e Proca

Vamos considerar a formulação lagrangiana de um campo escalar complexo não-relativístico  $\Phi(x)$  definido na variedade galileana penta-dimensional  $\mathbb{G}$  com a métrica (2.2.1) e uma densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2m} [(\partial_\mu \Phi^* (\partial^\mu \Phi) - k^2 |\Phi|^2)], \quad (2.3.1)$$

com  $\mu = 1, \dots, 5$  e  $k$  um parâmetro arbitrário. Ao escrevermos a lagrangiana  $L$  associada à densidade  $\mathcal{L}_0$ , vem

$$L = \int \mathcal{L}_0 d^3x dx^5, \quad (2.3.2)$$

onde  $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ . Além disso, toda integração sobre  $dx^5$  será interpretada como [10]

$$\int dx^5 \rightarrow \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l ds. \quad (2.3.3)$$

A ação I da Eq. (2.3.2), é

$$I = \int L dt = \int \mathcal{L}_0 d^5x. \quad (2.3.4)$$

Aplicando o princípio da mínima ação de Hamilton na Eq. (2.3.4), encontramos as equações dinâmicas de movimento :

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi = -k^2 \Phi, \quad (2.3.5)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi^* = -k^2 \Phi^*. \quad (2.3.6)$$

Essas equações são invariantes sob as transformações (2.2.3)-(2.2.5) e já vimos por (2.2.26) que  $\partial_\mu \partial^\mu$  também é um invariante sob a transformação (2.2.24).

Ao definirmos  $\Phi(x) = e^{-imx^5} \phi(\mathbf{x}, x^4)$ , obtemos em (2.3.5) e (2.3.6), a Equação Livre de Schrodinger. Portanto, (2.3.5) e (2.3.6) são uma forma manifestamente covariante da Equação livre de Schrodinger para um campo escalar complexo não-relativístico.

Agora, vamos considerar um campo vetorial não-relativístico Galilei-Covariante. Considere a Lagrangiana de Proca abaixo com a covariância galileana explícita :

$$\mathcal{L}_{GProca} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{k^2}{2} A_\mu A^\mu, \quad (2.3.7)$$

onde  $k \neq 0$  e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.3.8)$$

com o vetor de galilei  $A_\mu$  obedecendo a condição  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . A lagrangiana (2.3.7) nos fornece

$$\partial_\mu \partial^\mu + k^2 (A_\nu) = 0, \quad (2.3.9)$$

que é a Equação de Schrodinger. Há dois limites para o campo vetorial  $A_\mu = (\mathbf{A}, A_4, A_5)$  : se  $A_4 = 0$ , obtêm-se o limite elétrico; já para  $A_5 = 0$ , o limite magnético [4].

O próximo passo da nossa formulação é introduzir a matriz-S e a amplitude de transição vácuo-para-vácuo de um produto ordenado de campos Galilei-Invariante para obtermos a fórmula de redução LSZ e o propagador de Feynman no contexto do espaço penta-dimensional  $\mathbb{G}$ .

## 2.4 Matriz-S

Vamos considerar por motivação do caso relativístico, a quantização do campo escalar livre na variedade  $\mathbb{G}$ , utilizando o formalismo canônico. Considere a hamiltoniana

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (2.4.1)$$

onde  $H_0$  é a hamiltoniana livre e  $H_{int}$  o termo de interação. O termo de interação será tomado pequeno, devido ao cenário de interesse ser o acoplamento fraco. A amplitude do processo que leva um estado inicial  $|a\rangle$  para um estado final  $|b\rangle$  é dada por :

$$\langle b | e^{-iH(T_f - T_i)} | a \rangle. \quad (2.4.2)$$

No limite  $T_f - T_i \rightarrow \infty$  e com a segunda quantização da hamiltoniana na teoria de campo, o operador  $e^{-iH(T_f - T_i)}$  é chamado de Matriz-S [21]. As amplitudes de espalhamento são dadas pelos elementos de matriz  $\langle b | S | a \rangle = \langle b | 1 + i\mathbf{T} | a \rangle$ , onde  $\mathbf{T}$  é uma matriz separada do operador identidade. Note também que  $S$  é um operador unitário, ou seja :

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1. \quad (2.4.3)$$

Até aqui, apresentamos os estados na representação de Schrodinger. No entanto, a representação de Heisenberg será mais vantajosa do ponto de vista da Covariância Galileana. Na representação de Heisenberg, a equação (2.4.2) fica reescrita como

$$\langle b | S | a \rangle = \langle b; T_f | a; T_i \rangle. \quad (2.4.4)$$

Considere agora um elemento genérico da matriz-S escrito na representação de Heisenberg cujos estados são rotulados através dos momentos

$$\langle p_1, p_2, \dots, p_n; T_f | q_1, q_2, \dots, q_m; T_i \rangle, \quad (2.4.5)$$

tal que no fim da computação,  $T_f \rightarrow \infty$  e  $T_i \rightarrow -\infty$ . Utilizando a mesma computação vista em [21], e ao usarmos a abordagem Galilei-Invariante da variedade  $\mathbb{G}$ , obtemos da equação (2.4.5) :

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^m \int d^5 x_i e^{-iq_i x_i} \prod_{j=1}^n d^5 y_j e^{ip_j y_j} \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \phi(y_1) \dots \phi(y_n) | 0 \rangle = \\ & = \prod_{i=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{q_i^2 - m^2} \prod_{j=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \langle p_1 \dots p_n | i\mathbf{T} | q_1 \dots q_m \rangle. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Essa é a fórmula de Redução LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann) na variedade  $\mathbb{G}$ . Sendo  $Z$  um c-número conhecido como renormalização da função de onda e  $q_i, p_j$  os respectivos momentos em 5 dimensões definidos na variedade  $\mathbb{G}$ . A fórmula de redução LSZ relaciona a amplitude de espalhamento com o valor esperado de vácuo de um produto ordenado de campos reais e escalares  $\phi$  Galilei-Invariantes.

Destarte, a matriz-S pode ser vista como um operador que relaciona o estado inicial e final num processo de espalhamento do tipo  $|\psi\rangle_{out} = S |\psi\rangle_{in}$ . O fluxo de probabilidade  $\mathbf{j}$  desse espalhamento deve satisfazer a equação da continuidade [22]

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.4.7)$$

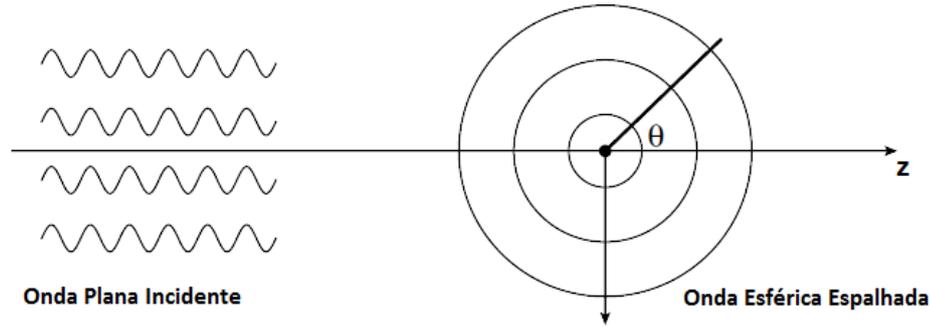


Figura 1 – Representação de um espalhamento quântico

onde  $\rho$  é a densidade de probabilidade associada. Usando o Teorema de Gauss para uma superfície esférica, consideramos que

$$\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (2.4.8)$$

Isto é, não há fonte ou sorvedouro de partículas no processo de espalhamento. Essa condição deve ser válida para todo elemento da matriz-S definido por

$$S_l(p) \equiv 1 + 2ipf_l(p), \quad (2.4.9)$$

onde  $p$  é o momento do centro de massa e  $f_l(p)$  a amplitude de espalhamento. Obedecendo (2.4.7),  $S_l(p)$  deve ser unitário como condição da conservação da probabilidade, ou seja

$$|S_l(p)| = 1. \quad (2.4.10)$$

O processo de espalhamento introduz uma mudança de fase nas ondas parciais que descrevem as partículas espalhadas. Para grandes distâncias, os efeitos de um espalhamento elástico, por exemplo, são resumidos à uma fase. Em consequência disso, se pudermos parametrizar os elementos da matriz-S (2.4.9) em termos da mudança de fase das ondas parciais, ganharemos informação sobre o processo de espalhamento. A unitariedade de  $S_l(p)$  permite-nos fazer isso ao escrevermos

$$S_l(p) = e^{2i\delta_l(p)}, \quad (2.4.11)$$

onde  $\delta_l(p)$  representa a mudança de fase das ondas parciais. De (2.4.9), temos que

$$f_l(p) = \frac{S_l - 1}{2ip}. \quad (2.4.12)$$

Escrevendo (2.4.12) com a mudança de fase explícita, vem

$$f_l(p) = \frac{e^{2i\delta_l(p)} - 1}{2ip} = \frac{e^{2i\delta_l(p)} \operatorname{sen} \delta_l}{p} = \frac{1}{p \cot \delta_l - ip} = \frac{p^{2l}}{p^{2l+1} \cot \delta_l - ip^{2l+1}}. \quad (2.4.13)$$

Para baixas energias, o primeiro termo do denominador é expandido em [23]

$$p^{2l+1} \cot \delta_l \approx -\frac{1}{a_l} + \frac{r_l}{2} p^2 - \dots, \quad (2.4.14)$$

sendo  $r_l$  o alcance efetivo. Para  $l = 0$ , o termo  $a_0$  é chamado de comprimento do espalhamento.

A matriz-S será fundamental para calcularmos espalhamentos e visto que iremos trabalhar com interações, naturalmente devemos estabelecer na nossa formulação uma teoria de perturbação.

## 2.5 Interação

Para construir a expansão perturbativa, relacionamos os campos livres escalares e reais  $\phi$  descritos com a hamiltoniana  $H$ , com campos que chamaremos de  $\phi_I$ , também definidos na variedade  $\mathbb{G}$ , e que evoluem temporalmente apenas com a hamiltoniana livre  $H_0$ , onde :

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi_I(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (2.5.1)$$

Este campo  $\phi_I$  é chamado de campo da representação de interação. Agora, vamos relacionar o campo  $\phi$  -que é descrito com a hamiltoniana completa-, com os campos de interação. Além disso, vamos fazer  $t - t_0 = \tau$ . O que nos leva ao resultado

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} \phi_I(t, \mathbf{x}) e^{iH_0\tau} e^{-iH\tau}. \quad (2.5.2)$$

Assim, pela equação (2.5.2) definimos o operador de evolução temporal

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (2.5.3)$$

que é unitário. Daí, podemos reescrever (2.5.2), como

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \mathbf{x}) U(t, t_0). \quad (2.5.4)$$

Note que  $H_0$  e  $H_{int}$  não comutam. No entanto, veja que

$$i \frac{\partial U}{\partial t} = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)} U(t, t_0). \quad (2.5.5)$$

De (2.5.5) definimos a hamiltoniana interagente  $H_I$ ,

$$H_I = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (2.5.6)$$

A solução de (2.5.5), é :

$$U(t, t_0) = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right] \right\}. \quad (2.5.7)$$

O ordenamento T na exponencial significa que todos termos da sua expansão de Taylor são temporalmente ordenados.

Agora, vamos computar o valor esperado de vácuo  $\langle 0 | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$  utilizando a equação (2.5.4) :

$$\langle 0 | (U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_0)) (U^\dagger(t_2, t_0) \phi_I(x_2) U(t_2, t_0)) \dots (U^\dagger(t_n, t_0) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0)) | 0 \rangle, \quad (2.5.8)$$

observe que

$$U^\dagger(t_2, t_0) = U(t_0, t_2), \quad (2.5.9)$$

$$U(t_1, t_0) U(t_0, t_2) = U(t_1, t_2). \quad (2.5.10)$$

Daí, usando as identidades (2.5.9) e (2.5.10), podemos combinar os fatores na equação (2.5.8), que resulta em :

$$\langle 0 | (U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2)) \phi_I(x_2) U(t_2, t_3) \dots (U^\dagger(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0)) | 0 \rangle. \quad (2.5.11)$$

Agora, vamos introduzir uma nova variável  $t$  tal que,

$$t \gg t_1 > t_2 > \dots > t_n \gg -t,$$

além disso,

$$U(t_n, t_0) = U(t_n, -t) U(-t, t_0), \quad (2.5.12)$$

e

$$U^\dagger(t_1, t_0) = U(t_0, t_1) = U(t_0, t) U(t, t_1) = U^\dagger(t, t_0) U(t, t_1). \quad (2.5.13)$$

Usando (2.5.12) e (2.5.13) e a nova variável  $t$ , reescrevemos (2.5.11) :

$$\langle 0 | (U^\dagger(t, t_0) [U(t, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) \dots U(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, -t)] U(-t, t_0) | 0 \rangle. \quad (2.5.14)$$

Os termos em colchete na equação (2.5.14), podem ser reescritos como o produto temporalmente ordenado :

$$T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) U(t, t_1) U(t_1, t_2) \dots U(t_n, -t) \}. \quad (2.5.15)$$

Combinando todos fatores  $U$  da equação (2.5.15) num único fator  $U(t, -t)$  e usando a solução (2.5.7), reescrevemos (2.5.11) como :

$$\langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \left\{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \exp \left[ -i \int_{-t}^t dt' H_I(t') \right] \right\} U(-t, t_0) | 0 \rangle. \quad (2.5.16)$$

Vamos escolher  $t_0 = -t$ , tal que  $t \rightarrow \infty$ . Com essa escolha,  $U(-t, t_0) = 1$  e  $U^\dagger(t, t_0) \rightarrow U^\dagger(\infty, -\infty)$ . Assim, o termo  $U^\dagger$  aplicado ao estado de vácuo na equação (2.5.16), passa a ser  $\langle 0 | U^\dagger(\infty, -\infty)$  que é o conjugado hermitiano de  $U(\infty, -\infty) | 0 \rangle$ . Ao aplicarmos o operador de evolução temporal  $U(\infty, -\infty)$  num estado de vácuo estável, isso terá como resultado o próprio estado de vácuo. Além disso, vetores de estado

na Mecânica Quântica que diferem por um fator de fase, ainda representam o mesmo vetor de estado. Desse modo,

$$U(\infty, -\infty) |0\rangle = e^{i\alpha} |0\rangle. \quad (2.5.17)$$

Para determinar  $\alpha$ , vamos multiplicar por  $\langle 0|$  ambos os lados da equação (2.5.17). Também usaremos a solução de U dada pela equação (2.5.7), que nos leva a

$$e^{i\alpha} = \langle 0| T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t') \right] \right\} |0\rangle. \quad (2.5.18)$$

Fazendo o mesmo procedimento para o conjugado hermitiano de  $U(\infty, -\infty) |0\rangle$ , obtemos:

$$e^{-i\alpha} = (\langle 0| T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t') \right] \right\} |0\rangle)^{-1}. \quad (2.5.19)$$

Daí, substituindo (2.5.19) em (2.5.16), e usando as escolhas dos tempos  $t_0$  e  $t$  acima mencionadas, chegamos finalmente na seguinte fórmula:

$$\langle 0| T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} |0\rangle = \frac{\langle 0| T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \exp \left[ -i \int d^5x \mathcal{H}_I \right] \} |0\rangle}{\langle 0| T \{ \exp \left[ -i \int d^5x \mathcal{H}_I \right] \} |0\rangle}, \quad (2.5.20)$$

onde  $\mathcal{H}_I$  é a densidade da hamiltoniana interagente. A integração se dá em toda variedade  $\mathbb{G}$ . Para obter (2.5.20) usamos a relação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_I(t') dt' = \int \mathcal{H}_I d^5x. \quad (2.5.21)$$

Em seguida, falaremos do propagador de Feynman e o Teorema de Wick para calcular o valor esperado vácuo de um produto-ordenado de campos, tal como o da Eq. (2.5.20). Para simplificar a notação, iremos omitir o índice I dos campos que se referem aos campos da representação de interação.

## 2.6 Propagador de Feynman e Teorema de Wick

O propagador de Feynman para um campo escalar complexo, com  $x, y \in \mathbb{G}$  é definido como

$$\langle 0| T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} |0\rangle, \quad (2.6.1)$$

tal que os campos  $\Phi$  são escritos com suas partes de criação e aniquilação :

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{l}} (a_{\mathbf{p}} e^{ip \cdot x}), \quad (2.6.2)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{l}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip \cdot x}). \quad (2.6.3)$$

$a_{\mathbf{p}}$  e  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  são respectivamente os operadores de aniquilação e criação, que satisfazem a relação de comutação  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ , com  $\Phi(x) = \phi(x) + \phi^\dagger(x)$  e  $l$  sendo uma constante com dimensão de comprimento, necessária para renormalização da integral sobre  $x^5$ , definida de  $-l/2$  até  $+l/2$ . O produto tempo-ordenado ou T-produto, de dois campos complexos, é definido como se segue:

$$T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} = \begin{cases} \Phi(x) \Phi^\dagger(y) & x^4 > y^4 \\ \Phi^\dagger(y) \Phi(x) & x^4 < y^4 \end{cases} \quad (2.6.4)$$

Desse modo, fazendo o T-produto de dois campos conforme equação (2.6.2), (2.6.3) e (2.6.4), para o caso  $x^4 > y^4$ , obtemos:

$$T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} = \phi(x) \phi(y) + \phi(x) \phi^\dagger(y) + \phi^\dagger(x) \phi(y) + \phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y). \quad (2.6.5)$$

A equação (2.6.5) pode ser reescrita como :

$$T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} = \phi(x) \phi(y) + \phi^\dagger(y) \phi(x) + \phi^\dagger(x) \phi(y) + \phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y) + [\phi(x), \phi^\dagger(y)], \quad (2.6.6)$$

$$T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} =: \phi(x) \phi^\dagger(y) : + [\phi(x), \phi^\dagger(y)]. \quad (2.6.7)$$

$: \phi(x) \phi^\dagger(y) :$  representa o produto de ordem normal dos operadores. Isto é, na equação (2.6.7) todos operadores de criação estão sempre à esquerda dos operadores de aniquilação, exceto no termo do comutador. Além disso, vamos definir a contração de dois campos, como se segue :

$$\widehat{\Phi(x) \Phi^\dagger(y)} = \begin{cases} [\phi(x), \phi^\dagger(y)] & x^4 > y^4 \\ [\phi(y), \phi^\dagger(x)] & x^4 < y^4. \end{cases} \quad (2.6.8)$$

O valor esperado de vácuo-para-vácuo da quantidade  $\widehat{\Phi(x) \Phi^\dagger(y)}$ , é o propagador de Feynman que denotaremos como  $D_F = (x - y)$ . Logo, a equação (2.6.7) fica como :

$$T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} =: \phi(x) \phi^\dagger(y) : + D_F(x - y). \quad (2.6.9)$$

Assim, o valor esperado vácuo-para-vácuo do termo de ordem normal, será nulo. Isto porque um operador de criação sempre irá atuar em  $\langle 0|$  ou um operador de aniquilação sempre irá atuar em  $|0\rangle$ . Portanto, o valor esperado vácuo-para-vácuo da equação (2.6.9) , é o próprio propagador de Feynman, que é um c-número :

$$\langle 0| T \{ \Phi(x) \Phi^\dagger(y) \} |0\rangle = D_F(x - y). \quad (2.6.10)$$

Note que realizamos o valor esperado de dois produtos temporalmente ordenado de campos. Porém, podemos generalizar (2.6.7) para um função de n-pontos. Uma ferramenta útil para essa empreitada é utilizar o Teorema de Wick em combinação com os propagadores de Feynman. O Teorema de Wick nos permite dizer que

$T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}$  (veja que  $x_1, \dots, x_n$  são pontos no espaço  $\mathbb{G}$ ) é igual ao produto normal ordenado :  $\phi(x_1)\dots\phi(x_n)$  : somado com todas combinações possíveis de ordenamento normal e contração de campos, onde a contração de dois campos, por exemplo,  $\phi(x_1) = \phi_1, \phi(x_2) = \phi_2$ , é igual ao propagador de Feynman  $D_F(x_1 - x_2) = D_{12}$ . Para exemplificar, vamos escrever o produto temporalmente ordenado de quatro campos:

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = & \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + D_{12} : \phi_3\phi_4 + D_{13} : \phi_2\phi_4 : \\ & + D_{14} : \phi_2\phi_3 + D_{23} : \phi_1\phi_4 + D_{24} : \phi_1\phi_3 : \\ & + D_{34} : \phi_1\phi_2 + D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

A prova desse teorema pode ser encontrada em [24]. Ao tomarmos o valor esperado de vácuo em (2.6.11), os termos de ordenamento normal vão para zero, e apenas os termos em que todos os campos foram contraídos, permanecem :

$$\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle = D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}. \quad (2.6.12)$$

$D(x_1 - x_2) = D_{12}$  é interpretado como a amplitude do processo que leva a partícula do ponto  $x_1$  para  $x_2$ . Desse modo,  $D(x_1 - x_2)D(x_3 - x_4)$  é a amplitude para o processo em que uma partícula vai de  $x_1$  para  $x_2$  e outra partícula vai de  $x_3$  para  $x_4$ , sem qualquer interação entre elas. Com esse resultado, vimos até aqui uma formulação covariante por Galilei na construção de uma teoria quântica de campo não-relativístico.

Na próxima seção, veremos que as funções de Green no espaço dos momentos em  $\mathbb{G}$  são escritas em termos do propagador de Feynman.

## 2.7 O Propagador de Feynman como Função de Green

Ao aplicarmos o operador  $\frac{1}{2m}(\partial_\mu\partial^\mu + k^2 + i\epsilon)$  no propagador de Feynman, obtemos conforme [25] que

$$\frac{1}{2m}(\partial_\mu\partial^\mu + k^2 + i\epsilon) D_F(x - y) \equiv \tilde{\delta}^5(x - y), \quad (2.7.1)$$

onde  $\tilde{\delta}^5(x - y)$  é uma delta de Dirac penta-dimensional, cuja transformada de Fourier no espaço penta-dimensional dos momentos, é

$$\tilde{\delta}^5(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^5 l} \int d^5 p e^{ip \cdot (x-y)} [2\pi\delta(p^4 - m)]. \quad (2.7.2)$$

O argumento da delta da equação (2.7.2) é invariante. A transformada de Fourier para o propagador de Feynman na variedade  $\mathbb{G}$  é dada por [26]:

$$D_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^5 l} \int d^5 p \tilde{\Delta}_F(p) e^{ip \cdot (x-y)} [2\pi\delta(p^4 - m)]. \quad (2.7.3)$$

Em ambas equações (2.7.2) e (2.7.3), o expoente de  $e^{ip \cdot (x-y)}$  é o produto interno em  $\mathbb{G}$  de  $p \cdot x$  e  $p \cdot y$  que são obtidos diretamente por (2.2.2)

$$p \cdot x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + p_4 t + p_5 s = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - p^4 s - p^5 t, \quad (2.7.4)$$

e de modo análogo para  $p \cdot y$ . Agora, vamos calcular o propagador de Feynman escrito no espaço dos momentos em  $\mathbb{G}$ . Substituindo (2.7.2) e (2.7.3) em (2.7.1) chega-se em

$$\frac{1}{2m} (\partial_\mu \partial^\mu + k^2 + i\epsilon) \frac{1}{(2\pi)^5 l} \int d^5 p \tilde{\Delta}_F(p) e^{ip \cdot (x-y)} [2\pi \delta(p^4 - m)] = \frac{1}{(2\pi)^5 l} \int d^5 p e^{ip \cdot (x-y)} [2\pi \delta(p^4 - m)], \quad (2.7.5)$$

que nos dá o propagador de Feynman no espaço dos momentos galileanos

$$\tilde{\Delta}_F(p) = \frac{2p^4}{-p_\mu p^\mu + k^2 + i\epsilon}. \quad (2.7.6)$$

Faremos  $k = 0$ , visto que é arbitrário. Utilizando (2.7.4) e (2.7.6) em (2.7.3), vem

$$D_F(x - y) = \frac{e^{-im(s_x - s_y)}}{(2\pi)^4 l} \int d^3 p \int \frac{e^{i[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - p^5(t_x - t_y)]}}{p^5 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{i\epsilon}{2m}} dp^5, \quad (2.7.7)$$

e realizando a mudança de variável  $p^5 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow p^5$ , juntamente com a representação  $\chi(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{-iw\tau}}{w + i\epsilon}$  da função degrau, obtemos

$$D_F(x - y) = \frac{-1}{l} e^{-im(s_x - s_y)} \frac{i}{(2\pi)^3} \chi(t_x - t_y) \int d^3 p e^{i[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t_x - t_y)]}. \quad (2.7.8)$$

A função de Green da Equação de Schrodinger para uma partícula sem spin de massa  $m$ , é dada por [25],

$$G^0(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t_x - t_y) = -\frac{i}{2\pi^3} \chi(t_x - t_y) \int d^3 p e^{i[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t_x - t_y)]}. \quad (2.7.9)$$

Portanto, o propagador de Feynman (2.6.8) pode ser escrito como

$$D_F(x - y) = G^0(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t_x - t_y) \frac{1}{l} e^{-im(s_x - s_y)}, \quad (2.7.10)$$

onde  $D_F(x - y)$  é a versão covariante galileana da Função de Green (o propagador de Feynman) da Equação de Schrodinger (2.7.1). Além disso, a Eq. (2.7.8) proíbe a existência simultânea de partículas e antipartículas, o que é consistente com o cenário não-relativístico.

## 2.8 A Auto-Interação Quártica

Agora, vamos computar a amplitude de espalhamento que leva um processo com duas partículas de momentos iniciais  $q_1$  e  $q_2$  para duas partículas com momentos

finais  $p_1$  e  $p_2$ , numa teoria em que  $\mathcal{H}_I = \lambda \frac{\phi^4}{4!}$ . Vamos relacionar as equações (2.4.6) e (2.5.20), que resultam em

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{q_i^2 - m^2} \prod_{j=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \langle p_1 p_2 | i\mathbf{T} | q_1 q_2 \rangle \\
 &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \exp \{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - q_1 x_3 - q_2 x_4)\} \\
 & \times \frac{\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \exp [-i \frac{\lambda}{4!} \int d^5 x \phi^4(x)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp [-i \int d^5 x \mathcal{H}_I] \} | 0 \rangle}.
 \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Em (2.8.1),  $Z$  é um c-número dado por  $Z = 1 + O(\lambda^2)$ . Para o nosso interesse, apenas os termos de primeira ordem em  $\lambda$  serão preservados. Desse modo, faremos  $Z = 1$  em (2.8.1). A expansão da exponencial faz com que o termo de ordem zero em  $\lambda$  não tenha qualquer contribuição para a amplitude de espalhamento. Nossa tarefa é portanto computar na equação (2.8.1) apenas o termo de primeira ordem em  $\lambda$ , que caculamos a seguir com a omissão do denominador :

$$\begin{aligned}
 & \int d^5 x d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \exp \{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - q_1 x_3 - q_2 x_4)\} \\
 & \times -i \frac{\lambda}{4} \int d^5 x \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \phi^4(x) \} | 0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

A computação da integral em  $d^5 x$  é extremamente simplificada ao utilizarmos o Teorema de Wick e o fato de que apenas cada campo  $\phi(x_i)$  contraído com cada um dos quatro campos  $\phi(x)$ , contribuirá com 4! contrações possíveis para o resultado final da amplitude de espalhamento  $\langle p_1 p_2 | i\mathbf{T} | q_1 q_2 \rangle$ , enquanto outras contrações serão nulas [21]. Conseqüentemente, obtemos de (2.8.2) :

$$\begin{aligned}
 & \int d^5 x d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \exp \{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 - q_1 x_3 - q_2 x_4)\} \\
 & \times \left(\frac{-i\lambda}{l}\right) D(x_1 - x) D(x_2 - x) D(x_3 - x) D(x_4 - x).
 \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Usando o resultado de (2.7.6), fazendo uma mudança de variável  $y_i = x_i - x$  em (2.8.3) e integrando primeiramente em  $y_i$ , resulta em

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{-i\lambda}{l}\right) \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(q_1) \tilde{\Delta}(q_2) \int d^5 x e^{i(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)x} \\
 &= \left(\frac{-i\lambda}{l}\right) (2\pi)^5 \delta^{(5)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \left(\prod_{i=1}^2 \frac{2p_{i5}}{p_i^\mu p_{i\mu} - k^2 - i\epsilon}\right) \left(\prod_{j=1}^2 \frac{2q_{j5}}{q_j^\mu q_{j\mu} - k^2 - i\epsilon}\right).
 \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Lembrando que  $p_{i\mu}, p_i^\mu, q_i^\mu, q_{i\mu}$  são os momentos pentadimensionais definidos em  $\mathbb{G}$  para cada partícula  $i$ . Os numeradores  $p_{i5}$  e  $q_{i5}$  são as quintas componentes dos momentos associados às partículas  $i$ . Até aqui omitimos o denominador de (2.8.1). Porém,

o denominador não terá qualquer efeito no resultado final de (2.8.2), visto que podemos colocá-lo sendo igual à 1 [21]. Nosso intuito é relacionar o lado esquerdo da equação (2.8.1) com o lado direito de (2.8.4), de modo que os pólos da fórmula de redução LSZ cancelem os propagadores de Feynman. Para isso, vamos fazer a prescrição  $i\epsilon$  ir para zero, bem como a constante  $k$  arbitrária. Disto, resulta que

$$\langle p_1 p_2 | i\mathbf{T} | q_1 q_2 \rangle = (-i\lambda) \frac{(2\pi)^5}{l} \delta^{(5)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2), \quad (2.8.5)$$

que é o elemento da matriz  $\mathbf{T}$  da amplitude de espalhamento  $2 \rightarrow 2$  em primeira ordem em  $\lambda$ . Este resultado pode ser generalizado para computações de outras amplitudes de espalhamento, com mais partículas envolvidas :

$$\langle p_1 \dots p_n | i\mathbf{T} | q_1 \dots q_m \rangle = \frac{(2\pi)^5}{l} \delta^{(5)} \left( \sum_i p_i - \sum_j q_j \right) iM_{fi}, \quad (2.8.6)$$

onde os rótulos de  $M_{fi}$  se referem ao estados iniciais e finais, respectivamente, ou mais explicitamente para uma teoria escalar,  $M_{fi} = (p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_m)$ . Nós vimos na seção 2.4, que a matriz-S pode ser escrita como  $S = 1 + i\mathbf{T}$ . Além disso, o fator  $(2\pi)^5 \delta^{(5)}(\sum_i p_i - \sum_j p_j)$  em (2.8.6) está relacionado com a matriz  $\mathbf{T}$ , de modo que, podemos escrever  $S$ , como

$$S = 1 + \frac{(2\pi)^5}{l} \delta^{(5)} \left( \sum_i p_i - \sum_j q_j \right) i\mathbf{M}. \quad (2.8.7)$$

Assim, se tomarmos um elemento da matriz-S entre um estado inicial  $|i\rangle$  e um estado final  $\langle f|$ , considerando a normalização não-relativística, o operador identidade transforma-se numa delta de dirac  $\delta_{fi}$  e o operador  $\mathbf{M}$  em  $M_{fi}$  :

$$\langle i | S | f \rangle = \delta_{fi} + \frac{(2\pi)^5}{l} \delta^{(5)} \left( \sum_i p_i - \sum_j p_j \right) iM_{fi}. \quad (2.8.8)$$

Formulamos neste capítulo uma Teoria Quântica de Campos interagentes em uma abordagem manifestamente Galilei-Covariante. No capítulo 3 iremos aplicá-la numa Teoria de Campo Efetiva com o objetivo de mostrar a covariância galileana explícita de uma lagrangiana efetiva associada com a dinâmica de mésons e píons em baixas energias; também aplicaremos nossos resultados das seções anteriores no espalhamento das interações entre os mésons descritos por esta lagrangiana efetiva.

## 3 Formulação Manifestamente Galilei-Covariante da XEFT

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem Galilei-Covariante da teoria de campo efetiva denominada XEFT. Utilizando os resultados do capítulo 2, generalizamos a lagrangiana de interação da XEFT ao considerarmos espalhamentos dos mésons charmosos  $D$  e  $D^*$  e calculamos a matriz invariante de espalhamento até segunda ordem para a interação  $D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}$  da XEFT. Após, com o uso da Equação de Bethe-Salpeter nesse contexto, investigamos os valores permitidos das constantes de acoplamento das interações entre os campos pseudo-escalar e vetorial associados aos mésons charmosos  $D$  e  $D^*$  que possam formar estados ligados  $|X_+\rangle$ .

### 3.1 Discussão da XEFT

Os hádrons são estados ligados de partículas elementares (quarks) via interação forte e podem ser divididos em dois tipos : mésons e bárions. Bárions são férmions constituídos de três quarks. Exemplos de bárions são o próton e o nêutron. Já os mésons, são bósons constituídos de um par quark-antiquark. A depender da natureza do par quark-antiquark, classificamos os mésons como píons, mésons  $K$ , mésons  $D$  (os mésons  $D$  também são denominados *mésons charmosos*) e mésons  $B$ . Os mésons da Teoria de Campo Efetiva Não-Relativística da X(3872) (esta Teoria de Campo Efetiva também é conhecida como XEFT), são píons e mésons charmosos. Os píons são os mésons mais leves; o pión utilizado nesta dissertação é o pión neutro,  $\pi^0$ , cuja composição é dada pelo par  $u\bar{u}$  ou  $d\bar{d}$ . Os mésons charmosos  $D^0$  e  $D^{*0}$  utilizados neste trabalho são compostos de um quark charmoso e um antiquark up ( $c\bar{u}$ ); os respectivos antiméson de  $D^0$  e  $D^{*0}$  denotados por  $\bar{D}^0$  e  $\bar{D}^{*0}$ , são constituídos de um quark up e de um antiquark charmoso ( $u\bar{c}$ ). O sobrescrito 0 implica que estes mésons e o pión possuem carga elétrica neutra.

Os hádrons podem formar moléculas denominadas *moléculas hadrônicas*. Tais moléculas são formadas por mésons ou bárions. Um exemplo de molécula hadrônica é o dêuteron, que é composto por um próton e um nêutron. Há também moléculas mesônicas; a partícula X(3872), por exemplo, por ter uma massa muito próxima da soma das massas de  $D^0$  e  $\bar{D}^{*0}$ , vem sendo interpretada como a superposição (ou um estado molecular  $DD^*$ ) de mésons charmosos  $D^*\bar{D} + D\bar{D}^*$ . Se a partícula X(3872) for de fato uma molécula mesônica, sua energia de ligação deve ser consideravelmente pequena, visto que a massa da partícula X(3872) é muito próxima com a do estado molecular

$DD^*$  [13]. Por esta razão, uma separação de escalas de energia é importante para tornar possível a análise de interações de baixas energias sem conhecer detalhes das interações em altas energias. Uma Teoria Efetiva é capaz de realizar isto ao delimitar a escala de energia do problema através de uma lagrangiana efetiva que utiliza apenas os graus de liberdade e interações relevantes na escala de energia considerada [27]. Os mésons com quarks pesados são chamados de *mésons pesados*.

Na física de moléculas hadrônicas em baixas energias, os mésons pesados têm como constituição um par quark-antiquark confinado [28] e quando a massa destes mésons pesados é muito maior do que seus momentos, podemos descrever a sua dinâmica via teorias efetivas em uma versão não-relativística [27] cujos graus de liberdade são os próprios hádrons [29]. Com esta motivação, a XEFT ou X(3872) Effective Field Theory, foi desenvolvida por Fleming et. al. na Ref. [19] a partir da Teoria de Perturbação Quiral (Chiral Perturbation Theory) de mésons pesados em interações de alta distância cujos graus de liberdade fundamentais são os mésons charmosos  $D$  e  $D^*$ .

A lagrangiana da XEFT contém campos não-relativísticos para mésons e píons. O campo para o pión  $\pi^0$  é denotado por  $\pi$ . Os campos pseudo-escalar e vetorial associados aos mésons  $D^0$  e  $D^{*0}$  são denotados por  $D$  e  $\mathbf{D}$ , respectivamente. Os termos cinéticos da lagrangiana Galilei-Invariante do XEFT são conforme [2] :

$$\mathcal{L}_{\pi^0} = \pi^\dagger \left( i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m_\pi} \right) \pi, \quad (3.1.1)$$

$$\mathcal{L}_{D^0} = D^\dagger \left( i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m_D} \right) D, \quad (3.1.2)$$

$$\mathcal{L}_{D^{*0}} = \mathbf{D}^\dagger \left( i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m_{D^*}} \right) \mathbf{D} - (\delta) \mathbf{D}^\dagger \cdot \mathbf{D}, \quad (3.1.3)$$

onde  $m_\pi$ ,  $m_D$  e  $m_{D^*}$ , são as massas de  $\pi^0$ ,  $D^0$  e  $D^{*0}$ , respectivamente. O termo  $\delta$  é a diferença da massa de  $D^{*0}$  com a soma das massas de  $D^0$  e  $\pi^0$ , isto é,  $\delta = m_{D^*} - (m_D + m_\pi)$ .

Os termos cinéticos das lagrangianas das antipartículas  $\bar{D}^0$  e  $\bar{D}^{*0}$  associadas a  $D^0$  e  $D^{*0}$ , são denotados por  $\mathcal{L}_{\bar{D}^0}$  e  $\mathcal{L}_{\bar{D}^{*0}}$ , e podem ser obtidos por (3.1.2) e (3.1.3) ao substituímos  $D$  por  $\bar{D}$  e  $\mathbf{D}$  por  $\bar{\mathbf{D}}$ . As lagrangianas cinéticas das antipartículas dos campos mesônicos, são, portanto

$$\mathcal{L}_{\bar{D}^0} = \bar{D}^\dagger \left( i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m_D} \right) \bar{D}, \quad (3.1.4)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{D}^{*0}} = \bar{\mathbf{D}}^\dagger \left( i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2(m_{D^*})} \right) \bar{\mathbf{D}} - (\delta) \bar{\mathbf{D}}^\dagger \cdot \bar{\mathbf{D}}. \quad (3.1.5)$$

As equações de movimento deste sistema são obtidas pela Equação de Euler-Lagrange

$$\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0, \quad (3.1.6)$$

com  $a=1,\dots,4$  e  $i=1,\dots,N$  e  $\phi$  representando campos escalares.

As Equações de Euler-Lagrange das lagrangianas (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.4) com relação a  $\pi^\dagger$ ,  $D^\dagger$  e  $\bar{D}^\dagger$  são

$$i\partial_t \pi = -\frac{\nabla^2 \pi}{2m_\pi}, \quad (3.1.7)$$

$$i\partial_t D = -\frac{\nabla^2 D}{2m_D}, \quad (3.1.8)$$

$$i\partial_t \bar{D} = -\frac{\nabla^2 \bar{D}}{2m_D}. \quad (3.1.9)$$

A lagrangiana Galilei-Invariante da XEFT também contém termos de interação. Eles consistem de interações de píons, interações de contato e interações  $\nabla^2$ . Os termos de interação de píons referentes à transição  $D^{*0} \leftrightarrow D^0 \pi^0$ , são obtidos pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{D^{*0} \leftrightarrow D^0 \pi^0} = \frac{g}{2f_\pi \sqrt{m_\pi m_{D^*}}} \left[ \mathbf{D}^\dagger \cdot (D [m_D \vec{\nabla} - m_\pi \overleftarrow{\nabla}] \pi) + (D [m_D \vec{\nabla} - m_\pi \overleftarrow{\nabla}] \pi)^\dagger \cdot \mathbf{D} \right], \quad (3.1.10)$$

onde  $f_\pi$  é a constante de decaimento do pión. Os termos de interação de píons para a transição  $\bar{D}^{*0} \leftrightarrow \bar{D}^0 \pi^0$  são calculados substituindo  $\mathbf{D}$  e  $D$  por  $\bar{\mathbf{D}}$  e  $\bar{D}$  em (3.1.10). Já a lagrangiana para a transição  $D^{*0} \bar{D}^0 \rightarrow D^{*0} \bar{D}^0$  da XEFT contém termos de interação de contato e interações  $\nabla^2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D^{*0} \bar{D}^0 \rightarrow D^{*0} \bar{D}^0} &= -C_1 (\bar{\mathbf{D}} \mathbf{D})^\dagger \cdot (\bar{\mathbf{D}} \mathbf{D}) + \frac{C}{4(2m_{D^*})^2} [(\bar{\mathbf{D}} \mathbf{D})^\dagger \cdot (\bar{D} [m_D \vec{\nabla} - (m_{D^*}) \overleftarrow{\nabla}]^2 \mathbf{D}) \\ &+ (\bar{D} [m_D \vec{\nabla} - (m_{D^*}) \overleftarrow{\nabla}]^2 \mathbf{D})^\dagger \cdot (\bar{\mathbf{D}} \mathbf{D})]. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

A XEFT descrita acima, é uma teoria Galilei-Invariante [2] e pode ser escrita em uma versão em que esta invariância é manifesta. A interação entre  $D^{*0} \bar{D}^0$ ,  $D^0 \bar{D}^0 \pi^0$  é formulada através de uma teoria de campo efetiva em que  $D^{*0}$ ,  $\bar{D}^0$  e  $\pi^0$  são explicitamente graus de liberdade. Essa formulação também é usada como uma estrutura matemática para quantificar os efeitos físicos além do setor  $D \bar{D} \pi$  [30]. Na próxima seção, utilizaremos a formulação Galilei-Covariante construída nos capítulos anteriores para demonstrar a covariância galileana explícita das lagrangianas associadas ao XEFT.

## 3.2 Versão manifestamente covariante da XEFT

Os campos Galilei-Covariantes são pentadimensionais e obedecem as transformações definidas em (2.2.3)-(2.2.5) com a métrica (2.2.1). Sugerimos que os campos Galilei-Covariantes pentadimensionais associados aos campos de  $\pi^0$ ,  $D^0$  e  $\bar{D}^0$ , são

$$\tilde{\pi}(x) = e^{-im_\pi x^5} \pi(\mathbf{x}, x^4), \quad (3.2.1)$$

$$\tilde{D}(x) = e^{-im_D x^5} D(\mathbf{x}, x^4), \quad (3.2.2)$$

$$\tilde{\bar{D}}(x) = e^{-im_D x^5} \bar{D}(\mathbf{x}, x^4), \quad (3.2.3)$$

onde  $\pi(\mathbf{x}, x^4)$ ,  $D(\mathbf{x}, x^4)$  e  $\bar{D}(\mathbf{x}, x^4)$  representam os campos físicos. Por conseguinte, reescrevemos as lagrangianas para  $\pi^0$ ,  $D^0$  e  $\bar{D}^0$  de modo explicitamente Galilei-Covariante, com

$$\mathcal{L}_{\pi^0} = \frac{1}{2m_\pi} (\partial_\mu \tilde{\pi} \partial^\mu \tilde{\pi}^\dagger), \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{L}_{D^0} = \frac{1}{2m_D} (\partial_\mu \tilde{D} \partial^\mu \tilde{D}^\dagger), \quad (3.2.5)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{D}^0} = \frac{1}{2m_D} (\partial_\mu \tilde{\bar{D}} \partial^\mu \tilde{\bar{D}}^\dagger), \quad (3.2.6)$$

onde  $\mu = 1, \dots, 5$ .

As Equações de Euler-Lagrange para (3.2.4)-(3.2.6) resulta, respectivamente, em

$$\frac{1}{2m_\pi} \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\pi}^\dagger = 0, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{1}{2m_D} \partial_\mu \partial^\mu \tilde{D}^\dagger = 0, \quad (3.2.8)$$

$$\frac{1}{2m_D} \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\bar{D}}^\dagger = 0. \quad (3.2.9)$$

As equações (3.2.7)-(3.2.9) são as equações de onda em uma forma explicitamente covariante para os campos não-relativísticos. Em outras palavras, se substituirmos os campos (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3) nas lagrangianas manifestamente Galilei-Covariantes (3.2.4), (3.2.5) e (3.2.6), vamos obter (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.4) que são as lagrangianas cinéticas sem a covariância galileana explícita para os campos de  $\pi^0$ ,  $D^0$  e  $\bar{D}^0$ .

Além disso, por uma transformação de Galilei

$$\tilde{\pi}(\bar{x}) = e^{-im\bar{x}^5} \pi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \quad (3.2.10)$$

$$= e^{-im[x^5 + (v_i R_j^i x^j) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 t]} \pi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \quad (3.2.11)$$

$$= e^{-imx^5} \pi(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.12)$$

$$= \tilde{\pi}(x), \quad (3.2.13)$$

calculamos diretamente que os campos físicos transformam-se como

$$\bar{\pi}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \pi(\mathbf{x}, t) e^{im[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 t]}. \quad (3.2.14)$$

Resta-nos agora mostrar a covariância galileana explícita da lagrangiana (3.1.3) e (3.1.5). Para isso, vamos considerar que o campo vetorial  $\mathbf{D}$  (e de modo análogo para  $\bar{\mathbf{D}}$ ) com massa  $m_{D^*}$ , é uma componente de um vetor pentadimensional galileano

$$\tilde{D}_\mu^* = (\mathbf{D}, 0, 0). \quad (3.2.15)$$

O campo Galilei-Covariante para  $D_\mu^*$  será denotado por  $\tilde{D}_\mu^*$  e é definido como

$$\tilde{D}^{*\mu}(x) = e^{-i(m_{D^*})x^5} D^{*\mu}(\mathbf{x}, x^4). \quad (3.2.16)$$

Com o uso de (3.2.16), a lagrangiana (3.1.3) que corresponde ao campo vetorial  $\mathbf{D}$  é manifesta com a covariância galileana explícita :

$$\frac{1}{2(m_{D^*})} (\partial_\mu \tilde{D}^{*\mu})^\dagger (\partial^\mu \tilde{D}_\mu^*) - (\delta) \tilde{D}_\mu^* \tilde{D}^{*\mu\dagger}, \quad (3.2.17)$$

sendo  $\delta = m_{D^*} - (m_D + m_\pi)$ .

As equações de Euler-Lagrange para campos vetoriais, são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu D_\nu)} = 0, \quad (3.2.18)$$

e nos levam até a equação de movimento associada à lagrangiana (3.2.17)

$$\frac{1}{2(m_{D^*})} \partial_\mu (\partial^\mu \tilde{D}^{*\nu})^\dagger = -(\delta) \tilde{D}^{*\nu\dagger}, \quad (3.2.19)$$

Com (3.2.15), podemos agora manifestar a versão covariante das lagrangianas de interação (3.1.10) e (3.1.11), que são respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D^{*0} \leftrightarrow D^0 \pi^0} = \frac{g}{2f_\pi \sqrt{m_\pi m_{D^*}}} \left\{ m_D [\tilde{D} \tilde{D}_\mu^\dagger (\partial^\mu \tilde{\pi}) + \tilde{D}^\dagger (\partial_\mu \tilde{\pi}^\dagger) \tilde{D}^{*\mu}] \right. \\ \left. - m_\pi [\tilde{D}_\mu^{*\dagger} (\partial^\mu \tilde{D}) \tilde{\pi} + \tilde{\pi}^\dagger (\partial_\mu \tilde{D}) \tilde{D}^{*\mu}] \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D^{*0} \bar{D}^0 \rightarrow D^{*0} \bar{D}^0} = -C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}_\mu^{*\dagger} \tilde{D}^{*\mu} + \frac{C}{4(2m_{D^*})^2} \left[ m_D^2 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} [(\partial_\mu \tilde{D}^{*\mu})^* (\partial^\mu \tilde{D}^*) \right. \\ \left. + (\partial^\mu \tilde{D}_\mu^*)^* (\partial_\mu \tilde{D}^{*\mu})] + (m_{D^*})^2 \tilde{D}^{*\mu} \tilde{D}_\mu^{*\dagger} [\partial_\mu \tilde{D} \partial^\mu \tilde{D}^\dagger + \partial_\mu \tilde{D}^\dagger \partial^\mu \tilde{D}] \right. \\ \left. - 2m_D (m_{D^*}) [(\partial_\mu \tilde{D} \partial^\mu \tilde{D}^\dagger) (\partial_\mu \tilde{D}^{*\mu})^* (\partial^\mu \tilde{D}_\mu^*) \right. \\ \left. + (\partial_\mu \tilde{D}^\dagger \partial^\mu \tilde{D}) (\partial^\mu \tilde{D}_\mu^*)^* (\partial_\mu \tilde{D}^{*\mu})] \right]. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Também calculamos o propagador de Feynman no espaço pentadimensional galileano dos momentos para  $\pi^0$ ,  $D^0$  e  $D^{*0}$  através da Eq. (2.7.6). Eles são, respectivamente :

$$\tilde{\Delta}_\pi(p) = \frac{2m_\pi}{-p_\mu p^\mu + i\epsilon}, \quad (3.2.22)$$

$$\tilde{\Delta}_D(p) = \frac{2m_D}{-p_\mu p^\mu + i\epsilon}, \quad (3.2.23)$$

$$\tilde{\Delta}_{D^*}(p) = \frac{2(m_{D^*})}{-p_\mu p^\mu - E_* - i\epsilon}. \quad (3.2.24)$$

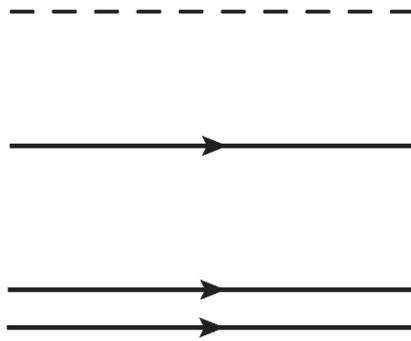


Figura 2 – Propagadores para os píon e os mésons.

O propagador para  $\pi^0$  é representado pela linha tracejada, enquanto que para  $D^0$  e  $D^{*0}$  as representações são de linhas sólidas e de linha sólida dupla, respectivamente. Já os propagadores para  $\bar{D}^0$  e  $\bar{D}^{*0}$  são representados de modo semelhante a  $D^0$  e  $D^{*0}$ , porém com as setas em sentido oposto.

A regra de Feynman para as interações dos píons na transição  $D^{*0} \leftrightarrow D^0\pi^0$  e  $\bar{D}^{*0} \leftrightarrow \bar{D}^0\pi^0$ , foram calculadas em [2], e é

$$\frac{g}{2\sqrt{m_\pi}f_\pi} \frac{(m_D q^\mu - m_\pi p^\mu)}{m_{D^*}}, \quad (3.2.25)$$

com  $q^\mu$  e  $p^\mu$  sendo os penta-momentos de saída de  $\pi^0$  e do méson  $D$ , respectivamente.

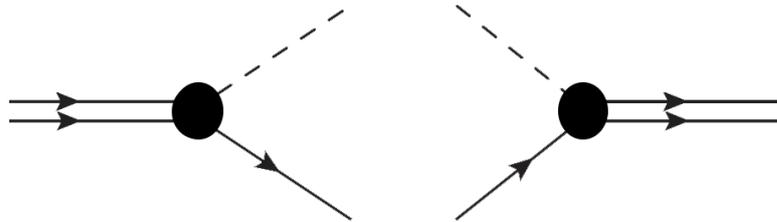


Figura 3 – Vértices das transições  $D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0$  e  $D^0\pi^0 \rightarrow D^{*0}$ .

Já as regras de Feynman para as interações de  $D^{*0}\bar{D}^0 \rightarrow D^{*0}\bar{D}^0$ , são calculadas multiplicando os termos da lagrangiana de interação (3.1.11) por  $i$  e contraindo os

campos. Além disso, os termos  $\nabla$  são substituídos pelos momentos das partículas que entram e saem do vértice. Assim, a regra de Feynman Galilei-Invariante para (3.1.11) fica como

$$-iC_1 - i\frac{C}{4} \frac{[(m_{D^*})p - m_D p_*]^2 + [(m_{D^*})p' - m_D p'_*]^2}{(2m_{D^*})^2}, \quad (3.2.26)$$

onde  $p$  e  $p_*$  são os momentos galileanos dos mésons que se aproximam; enquanto que  $p'$  e  $p'_*$  são os momentos dos mésons que se afastam. Os vértices de interação proporcionais a  $C_1$  e  $C$  referente a  $D^{*0}\bar{D}^0 \rightarrow D^{*0}\bar{D}^0$  são representados conforme as figuras abaixo.

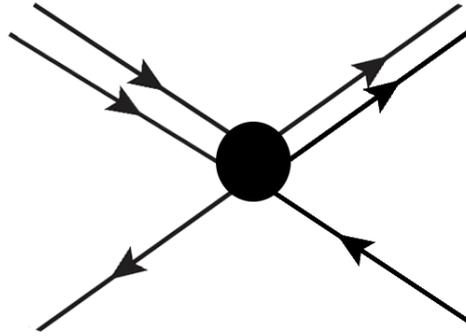


Figura 4 – Vértice proporcional a  $C_1$  para  $D^{*0}\bar{D}^0 \rightarrow D^{*0}\bar{D}^0$ .

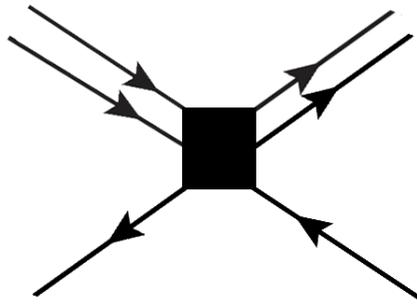


Figura 5 – Vértice proporcional a  $C$  para  $D^{*0}\bar{D}^0 \rightarrow D^{*0}\bar{D}^0$ .

Em seguida, vamos analisar, primeiramente, o espalhamento  $D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}$  descrito pela lagrangiana (3.2.21), utilizando a teoria de perturbação construída no capítulo 2. Para simplificar a notação, omitiremos o índice  $*$  dos campos mesônicos vetoriais Galilei-Covariantes.

### 3.3 Espalhamento $D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}$

A lagrangiana de interação mesônica (3.2.21) da XEFT pode ser generalizada com a adição de termos que correspondem aos espalhamentos  $D\bar{D}^* \rightarrow D\bar{D}^*$ ,  $D^*\bar{D} \rightarrow$

$D\bar{D}^*$  e  $D\bar{D}^* \rightarrow D^*\bar{D}$ . A lagrangiana de interação que descreve estes espalhamentos é encontrada em [16] sem a covariância galileana explícita, e que além do termo referente a  $\mathcal{L}_{D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}}$ , terá também os seguintes termos :

$$\mathcal{L}_{D\bar{D}^* \rightarrow D\bar{D}^*} = -C_1 \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu \tilde{D}^\dagger \tilde{D}, \quad (3.3.1)$$

$$\mathcal{L}_{D^*\bar{D} \rightarrow D\bar{D}^*} = C_2 \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu \tilde{D} \tilde{D}^\dagger, \quad (3.3.2)$$

$$\mathcal{L}_{D\bar{D}^* \rightarrow D^*\bar{D}} = C_2 \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu \tilde{D} \tilde{D}^\dagger. \quad (3.3.3)$$

Portanto, a lagrangiana de interação de quatro corpos, sem considerar o termo proporcional a C que contém derivadas, da interação mesônica generalizada Galilei-Covariante da XEFT, é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DD^*} &= \mathcal{L}_{D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}} + \mathcal{L}_{D\bar{D}^* \rightarrow D\bar{D}^*} + \mathcal{L}_{D^*\bar{D} \rightarrow D\bar{D}^*} + \mathcal{L}_{D\bar{D}^* \rightarrow D^*\bar{D}} \\ &= -C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu - C_1 \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu \tilde{D}^\dagger \tilde{D} + C_2 \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu \tilde{D} \tilde{D}^\dagger + C_2 \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu \tilde{D} \tilde{D}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Vamos analisar primeiramente como exemplo o processo de espalhamento  $D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}$  por motivação da referência [16] que estuda a possibilidade da X(3872) ser um estado molecular  $D^*\bar{D}^0$ , ignorando as interações com píons. Para isso, tomamos a lagrangiana de interação (3.2.21) sem derivadas nos campos (ou tomando C=0) :

$$\mathcal{L}_{D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}} = -C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu. \quad (3.3.5)$$

A hamiltoniana interagente,  $H_I$ , da interação (3.3.5), no contexto galileano, é obtida através de (2.5.21) :

$$H_I = \int \mathcal{H}_I d^3x dx^5 \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} &= \int -\mathcal{L}_{D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}} d^3x dx^5 \\ &= \int C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu d^3x dx^5, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

com  $\mathcal{H}_I$  sendo a densidade da hamiltoniana interagente. Consideramos que  $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_{D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}}$ .

A parte não-trivial da matriz-S, também pode ser vista como o operador de evolução temporal (2.5.7) definido no limite assintótico :

$$U(\infty, -\infty) \equiv i\mathbf{T} = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t') dt' \right] \right\}. \quad (3.3.8)$$

A amplitude de espalhamento de  $D^*\bar{D} \rightarrow D^*\bar{D}$  é, portanto,

$$\begin{aligned} \langle D^*\bar{D} | i\mathbf{T} | D^*\bar{D} \rangle &= \langle D\bar{D} | T \left\{ \exp \left[ -i \int H_I(t') dt' \right] \right\} | D\bar{D} \rangle \\ &= \langle D\bar{D} | T \left\{ \exp \left[ -i \int C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}_\mu^\dagger \tilde{D}^\mu d^5x \right] \right\} | D\bar{D} \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Expandindo a exponencial da Eq. (3.3.8) em série de Taylor até segunda ordem, vem

$$\exp \left[ -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \right] = 1 + (-i) \int dt' H_I(t') + \frac{(-i)^2}{2} \left[ \int dt'' H_I(t'') \int dt''' H_I(t''') \right]. \quad (3.3.10)$$

Logo, usando a expansão (3.3.10) em (3.3.9) obtemos

$$\langle D^* \bar{D} | i\mathbf{T} | D^* \bar{D} \rangle = \langle D^* \bar{D} | T \left\{ -i \int C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}_\mu^* \tilde{D}^{\mu\dagger} d^5 x \right\} | D^* \bar{D} \rangle \quad (3.3.11)$$

$$- \frac{1}{2} \langle D^* \bar{D} | T \left\{ \int C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}_\mu^* \tilde{D}^{\mu\dagger} d^5 x' \int C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D} \tilde{D}^{\mu\dagger} \tilde{D}_\mu^* d^5 x'' \right\} | D^* \bar{D} \rangle = S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)}. \quad (3.3.12)$$

Além disso, denotamos o primeiro termo de (3.3.11) por  $S_{fi}^{(1)}$ , e o segundo termo por  $S_{fi}^{(2)}$ .

O produto dos campos temporalmente ordenados em (3.3.11) é simplificado através do Teorema de Wick ao considerarmos que os estados podem ser escritos a partir dos operadores de criação e aniquilação atuando sobre o estado de vácuo, i.e,

$$a_{D^*}^\dagger a_{\bar{D}}^\dagger |0\rangle \sim |D^* \bar{D}\rangle, \quad (3.3.13)$$

$$\langle 0 | a_{D^*} a_{\bar{D}} \sim \langle D^* \bar{D} |, \quad (3.3.14)$$

onde  $a_{D^*}^\dagger$  e  $a_{D^*}$  são respectivamente os operadores de criação e aniquilação de  $D^*$ ; enquanto que  $a_{\bar{D}}^\dagger$  e  $a_{\bar{D}}$  são os operadores de criação e aniquilação de  $\bar{D}$ . A contração dos campos com seus operadores de criação e aniquilação para o primeiro termo de (3.3.11), é representada da seguinte maneira :

$$-i \langle 0 | a_{D^*} a_{\bar{D}} \int d^5 x C_1 \tilde{D}^\dagger \tilde{D}_\mu^* \tilde{D} \tilde{D}^{\mu\dagger} a_{D^*}^\dagger a_{\bar{D}}^\dagger |0\rangle. \quad (3.3.15)$$

Ao utilizarmos a fórmula de redução LSZ em (3.3.15), os propagadores associados ao espalhamento se cancelam, tornando a computação similar ao espalhamento  $2 \rightarrow 2$  visto na seção 2.5 ; isto é, em primeira ordem, a amplitude (3.3.11) é escrita como

$$S_{fi}^{(1)} = -i C_1 \frac{(2\pi)^5}{l} \delta^{(5)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2). \quad (3.3.16)$$

Utilizando a Eq. (2.8.5), calculamos a respectiva matriz invariante do espalhamento de (3.3.16) :

$$M_{D^* \bar{D}}^{(1)} = -C_1. \quad (3.3.17)$$

Devemos considerar também o segundo termo de (3.3.11). Note que nele há 4 campos em cada integral, o que significa que 4 deles irão se contrair com os operadores

de criação e aniquilação de  $\bar{D}$  e  $D^*$  (assim como em 3.3.15), enquanto que os outros 4 campos restantes serão contraídos em dois propagadores de Feynman :  $\overline{\tilde{D}_i^\dagger \tilde{D}^i}$  e  $\overline{\tilde{D} \tilde{D}^\dagger}$ . Procedendo da mesma forma feita para  $S_{fi}^{(1)}$ , chegamos ao seguinte resultado para  $S_{fi}^{(2)}$ :

$$S_{fi}^{(2)} = -\frac{C_1^2}{2l^2} \int d^5 x' \int d^5 x'' e^{i[(p'_1+p'_2)x'' - (p_1+p_2)x']} \tilde{\Delta}_{D^*}(x'' - x') \tilde{\Delta}_{\bar{D}}(x'' - x'). \quad (3.3.18)$$

Usando a equação (2.7.3) em (3.3.18) junto com a propriedade de filtragem da Delta de Dirac, nos leva a

$$S_{fi}^{(2)} = -\frac{(2\pi)^2 C_1^2}{2l^2} \int d^5 k \delta^{(5)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \delta(k^4 - m_{D^*}) \times \delta(p_1^4 + p_2^4 - k^4 - m_{\bar{D}}) \tilde{\Delta}_{D^*}(k) \tilde{\Delta}_{\bar{D}}(p_1 + p_2 - k). \quad (3.3.19)$$

Note que  $p_1^4 = m_{D^*}$  e  $p_2^4 = m_{\bar{D}}$ . Ou seja, o produto

$$\delta(k^4 - m_{D^*}) \delta(p_1^4 + p_2^4 - k^4 - m_{\bar{D}}), \quad (3.3.20)$$

é igual a

$$\delta(k^4 - m_{D^*}) \delta(0). \quad (3.3.21)$$

Assim, ao substituirmos (3.3.21) em (3.3.19) e usando a identidade  $\int_{-\infty}^{+\infty} dk^4 \delta(k^4 - m_{D^*}) = 1$ , obtemos

$$S_{fi}^{(2)} = -\frac{(2\pi)^2 C_1^2}{2l^2} \int d^3 k dk^5 \delta^{(5)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \tilde{\Delta}_{D^*}(k) \tilde{\Delta}_{\bar{D}}(p_1 + p_2 - k). \quad (3.3.22)$$

A enésima ordem da matriz de espalhamento  $\mathbf{M}$  em (2.8.7) é relacionada com a matriz de espalhamento  $M$  no centro de massa cf [25], onde

$$\mathbf{M}^{(n)} = \frac{(2\pi)^{n-1} M^{(n)}}{l^n \delta(0)}. \quad (3.3.23)$$

Portanto, a matriz invariante de espalhamento de  $S_{fi}^{(2)}$  no referencial do centro de massa, usando (2.8.7) e (3.3.23) em (3.3.22), é

$$M_{D^* \bar{D}}^{(2)} = \frac{iC_1^2}{2(2\pi)^4} \int d^3 k dk^5 \tilde{\Delta}_{D^*}(k) \tilde{\Delta}_{\bar{D}}(p_1 + p_2 - k). \quad (3.3.24)$$

Pelas equações (3.3.16) e (3.3.22) identificamos a representação diagramática da amplitude de transição  $\langle D^* \bar{D} | i\mathbf{T} | D^* \bar{D} \rangle$  (ver figura 6). Podemos ainda reescrever (3.3.24) com os propagadores de Feynman (3.2.23) e (3.2.24) referentes aos campos  $\bar{D}$  e  $D^*$ :

$$M_{D^* \bar{D}}^{(2)} = \frac{iC_1^2}{2(2\pi)^4} \int d^3 k dk^5 \frac{1}{\frac{1}{2m_{D^*}}(-k_\mu k^\mu - i\epsilon) - E_*} \frac{1}{\frac{1}{2m_D}[(p_1 + p_2 - k)^2 + i\epsilon]}. \quad (3.3.25)$$

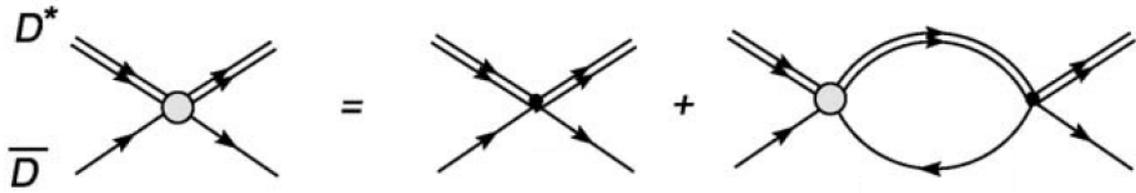


Figura 6 – Representação diagramática da amplitude de transição  $\langle D^* \bar{D} | i\mathbf{T} | D^* \bar{D} \rangle$  até segunda ordem. As linhas duplas indicam os mésons vetoriais  $D^*$  e as linhas sólidas o pseudo-escalar  $\bar{D}$ .

Sendo  $k_\mu k^\mu = \mathbf{k}^2 - 2k_4 k_5$ . Além disso, temos que

$$(p_1 + p_2 - k)^2 = \mathbf{k}^2 - 2m_D \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_{D^* \bar{D}}} - k^5 \right), \quad (3.3.26)$$

$\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_{D^* \bar{D}}} = E$  é a energia de um dos mésons do sistema no referencial do centro de massa. Assim,

$$M_{D^* \bar{D}}^{(2)} = \frac{iC_1^2}{2(2\pi)^4} \int d^3k dk^5 \frac{1}{\left[ \frac{1}{2(m_{D^*})} (-\mathbf{k}^2 - i\epsilon) - E_* + k^5 \right]} \frac{1}{\left[ \frac{1}{2m_D} (\mathbf{k}^2 + i\epsilon) - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_{D^* \bar{D}}} + k^5 \right]}. \quad (3.3.27)$$

Pelo Teorema dos Resíduos, integramos (3.3.27) sobre  $k^5$  e encontramos

$$M_{D^* \bar{D}}^{(2)} = \frac{C_1^2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 - 2\mu_{D^* \bar{D}}(E - E_*) + i\epsilon}, \quad (3.3.28)$$

onde  $\mu_{D^* \bar{D}}$  é a massa reduzida do sistema  $D^* \bar{D}$  dada por

$$\mu_{D^* \bar{D}} = \frac{m_{D^*} m_{\bar{D}}}{m_{D^*} + m_{\bar{D}}}. \quad (3.3.29)$$

Vimos até aqui o processo de espalhamento  $D^* \bar{D} \rightarrow D^* \bar{D}$  da XEFT. Todavia, o mesmo procedimento feito nesta seção pode ser realizado para os espalhamentos  $D \bar{D}^* \rightarrow D \bar{D}^*$ ,  $D^* \bar{D} \rightarrow D \bar{D}^*$  e  $D \bar{D}^* \rightarrow D^* \bar{D}$ .

A seguir calculamos as amplitudes associadas a  $D \bar{D}^* \rightarrow D \bar{D}^*$ ,  $D^* \bar{D} \rightarrow D \bar{D}^*$  e  $D \bar{D}^* \rightarrow D^* \bar{D}$  através da equação de Bethe-Salpeter no contexto galileano, e de modo semelhante ao cálculo para a amplitude de espalhamento de  $D^* \bar{D} \rightarrow D^* \bar{D}$ , teremos como resultado um termo de interação de contato e outro de loops. Além disso, vamos analisar as condições para se obter possíveis estados ligados de um estado molecular fracamente ligado de mésons.

### 3.4 Estados Ligados

Tendo como motivação a conjugação de carga positiva do estado  $X(3872)$ , como discutido na Ref. [16], vamos considerar o estado  $|X_+\rangle$  dado por [17–19]

$$|X_+\rangle = \frac{1}{2} [|D^* \bar{D}\rangle + |D \bar{D}^*\rangle], \quad (3.4.1)$$

cuja amplitude de transição  $T_{++}$  é definida como

$$\begin{aligned} T_{++} &= \langle X_+ | \mathbf{T} | X_+ \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\langle D^* \bar{D} | T | D^* \bar{D} \rangle + \langle D^* \bar{D} | T | D \bar{D}^* \rangle + \langle D \bar{D}^* | T | D^* \bar{D} \rangle + \langle D \bar{D}^* | T | D \bar{D}^* \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22}]. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Os elementos de  $T_{++}$  associados ao espalhamento dos mésons  $D$  e  $D^*$  correspondentes aos estado de (3.4.1), são amplitudes de transição representadas pelos elementos da matriz  $\mathbf{T}$ :

$$T_{11} = \langle D^* \bar{D} | \mathbf{T} | D^* \bar{D} \rangle, \quad (3.4.3)$$

$$T_{12} = \langle D^* \bar{D} | \mathbf{T} | D \bar{D}^* \rangle, \quad (3.4.4)$$

$$T_{21} = \langle D \bar{D}^* | \mathbf{T} | D^* \bar{D} \rangle, \quad (3.4.5)$$

$$T_{22} = \langle D \bar{D}^* | \mathbf{T} | D \bar{D}^* \rangle. \quad (3.4.6)$$

Note que a computação dos elementos de matriz  $T_{++}$  será feita de modo similar ao realizado anteriormente para  $\langle D^* \bar{D} | i\mathbf{T} | D^* \bar{D} \rangle$ . Para as interações de contato,  $T_{ii} \sim C_1$  e  $T_{ij, i \neq j} \sim C_2$ ; onde  $C_1$  e  $C_2$  são os parâmetros que descrevem a intensidade da interação. Porém, para obtermos os termos completos de ordem maior das amplitudes de transição, devemos também somar as contribuições de loop [2]. Essa soma é equivalente às Equações Lippmann-Schwinger [16]. Em outras palavras, os elementos de matriz das amplitudes de transição (3.4.3)-(3.4.6) tornam-se equações de Bethe-Salpeter [31], que no contexto galileano, são escritas da seguinte maneira :

$$iT_{11} = -iC_1 + \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{11} G_{DD^*} C_1 \bar{\delta} - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{12} G_{DD^*} C_2 \bar{\delta}, \quad (3.4.7)$$

$$iT_{12} = iC_2 + \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{12} G_{DD^*} C_1 \bar{\delta} - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{11} G_{DD^*} C_2 \bar{\delta}, \quad (3.4.8)$$

$$iT_{21} = iC_2 + \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{21} G_{DD^*} C_1 \bar{\delta} - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{22} G_{DD^*} C_2 \bar{\delta}, \quad (3.4.9)$$

$$iT_{22} = -iC_1 + \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{22} G_{DD^*} C_1 \bar{\delta} - \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} T_{21} G_{DD^*} C_2 \bar{\delta}, \quad (3.4.10)$$

onde  $\bar{\delta} = 2\pi\delta(k^4 - m_{D^*}^2)2\pi\delta(p_1^4 + p_2^4 - k^4 - m_D^2)$ .

As representações diagramáticas referentes a (3.4.7)-(3.4.10) são vistas na figura 7. O elemento  $G_{DD^*}$  é uma matriz diagonal onde os elementos não-nulos representam as funções de loop do espalhamento, e é definido como

$$G_{DD^*} \equiv \frac{1}{4} \tilde{\Delta}_{D^*}(k) \tilde{\Delta}_{\bar{D}}(p_1 + p_2 - k), \quad (3.4.11)$$

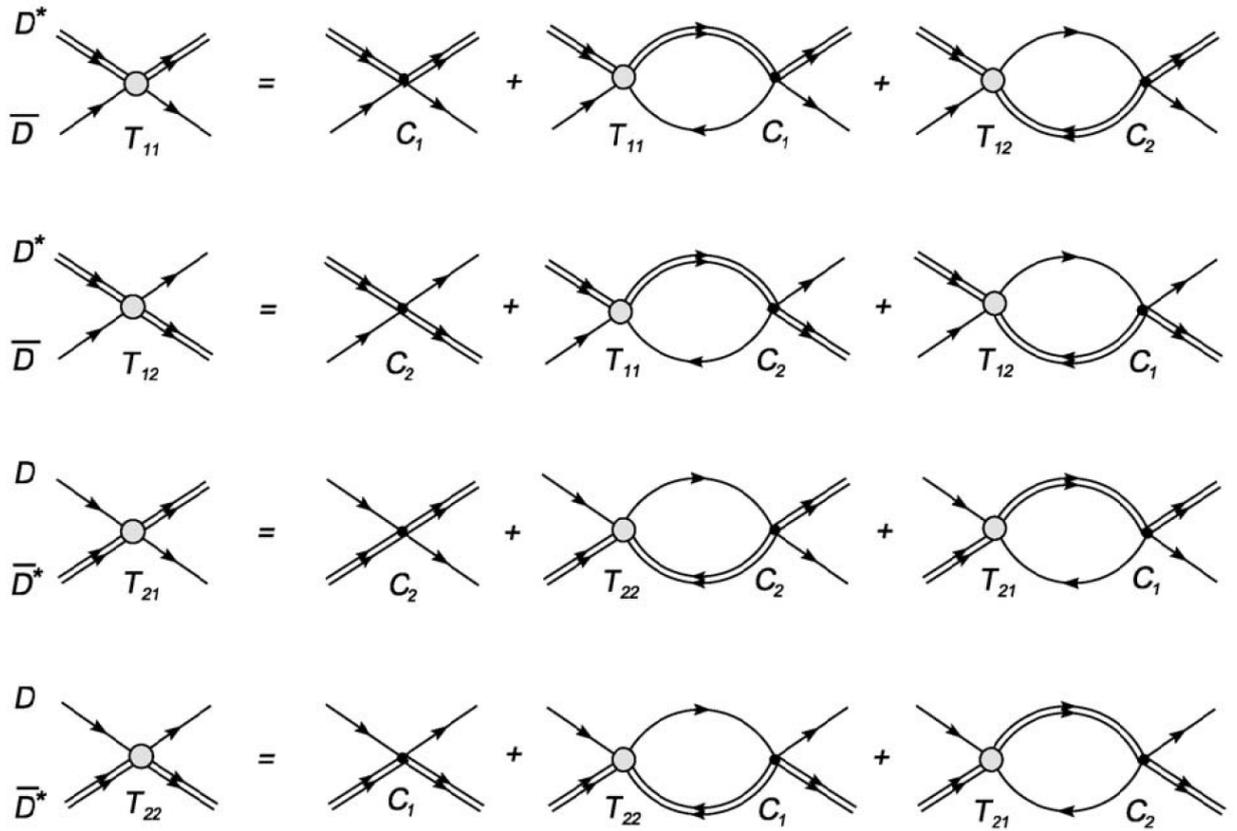


Figura 7 – Amplitude de transição para o espalhamento  $D - \bar{D}^*$  escritos na forma de Equações de Lippman-Schwinger. As linhas duplas indicam os mésons vectoriais  $D^*$  ou  $\bar{D}^*$ , e as linhas sólidas os pseudo-escalares  $D$  ou  $\bar{D}$ .

com  $\tilde{\Delta}_D(p_1 + p_2 - k)$  e  $\tilde{\Delta}_{D^*}(k)$  sendo os propagadores no contexto galileano do méson pseudoescalar  $\bar{D}$  e do méson vectorial  $D^*$ , respectivamente. Agora, vamos reescrever (3.4.7)-(3.4.10) numa notação matricial,

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \\ C_2 \\ C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix} + i\tilde{A} \begin{pmatrix} -C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ C_2 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_2 & -C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.4.12)$$

Comparando (3.4.12) com (3.4.7)-(3.4.10), é direto definir  $\tilde{A}$  como

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} G_{DD^*} \bar{\delta}, \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} \frac{1}{\left[ \frac{1}{2(m_{D^*})} (-\mathbf{k}^2 - i\epsilon) - \Delta + k^5 \right]} \frac{1}{\left[ \frac{1}{2m_D} (\mathbf{k}^2 + i\epsilon) - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_{DD^*}} + k^5 \right]} \bar{\delta}, \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

sendo  $\mu_{DD^*}$  a massa reduzida do sistema  $DD^*$  e  $\Delta \equiv m_{D^*} - m_D$ . Podemos ainda remover a integral em  $dk^5$  e  $dk^4$  de (3.4.14) através da propriedade da filtragem da

Delta de Dirac e o Teorema dos Resíduos. Disto resulta

$$\tilde{A} = \frac{2i\mu_{DD^*}}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 - 2\mu_{DD^*}(E_{DD^*} - \Delta) + i\epsilon}, \quad (3.4.15)$$

com  $E_{DD^*} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_{DD^*}}$ . A integração em  $d^3k$  torna (3.4.15) divergente. Através do formalismo de Bethe-Salpeter [32, 33], reescrevemos (3.4.2) como

$$T_{++} = V(1 - VG)^{-1} = \frac{\lambda}{1 - i\lambda\tilde{A}}, \quad (3.4.16)$$

onde  $G = i\tilde{A}$  e  $\lambda = V = -C_1 + C_2$ .

Para remover as divergências na integral (3.4.15) e também em (3.4.16), realizamos o procedimento de renormalização através do esquema de subtração  $\overline{MS}$  na regularização dimensional [16], que leva

$$\lambda \rightarrow \lambda_R, \quad (3.4.17)$$

$$\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}_R = -\frac{1}{8\pi}\mu_{DD^*} |\mathbf{p}| \sqrt{1 - \frac{2\mu_{DD^*}\Delta}{\mathbf{p}^2}}, \quad (3.4.18)$$

com o índice R denotando a quantidade renormalizada. Substituindo (3.4.17) e (3.4.18) em (3.4.16), temos que

$$T_{++} = \frac{\lambda_R}{1 - i\lambda_R\tilde{A}_R} \quad (3.4.19)$$

$$= \frac{\lambda_R}{1 + \frac{i}{8\pi}\lambda_R\mu_{DD^*} |\mathbf{p}| \sqrt{1 - \frac{\Delta}{E_{DD^*}}}}. \quad (3.4.20)$$

A energia  $E_{DD^*}$  que gera um pólo em (3.4.20), será denotada por  $E_{pole}$ , e é

$$E_{pole} = \frac{32\pi^2}{\lambda_R^2\mu_{DD^*}^3} - \Delta. \quad (3.4.21)$$

Vamos considerar que  $|X_+\rangle$  é um estado molecular fracamente ligado de mésons  $D^*$  e  $\bar{D}$ . Em geral, a massa de um estado molecular fracamente ligado  $A - B$  é dada por:

$$M_b = M_A + M_B - E_b, \quad (3.4.22)$$

onde  $E_b$  é a energia de ligação. Portanto, consideramos que a energia de ligação  $E_b$  do  $|X_+\rangle$ , será dada pela soma das massas de  $D$  e  $D^*$  subtraída pela massa associada ao estado  $|X_+\rangle$ , denotada por  $M_X$  [19], isto é :

$$E_b = (m_D + m_{D^*}) - M_X. \quad (3.4.23)$$

Além disso, a massa  $M_X$  é dada por [16], como

$$M_X = 2m_D - E_{pole}. \quad (3.4.24)$$

Assim, usando (3.4.24) em (3.4.23) e comparando com (3.4.21), temos que

$$E_b = \frac{32\pi^2}{\lambda_R^2 \mu_{DD}^3}. \quad (3.4.25)$$

Observa-se que a energia de ligação (3.4.25) diminui com o aumento do acoplamento  $\lambda$ . Consequentemente, as constantes de acoplamento  $C_1$  e  $C_2$  desempenham um papel na determinação de possíveis estados ligados de  $|X_+\rangle$ . Nosso intuito é investigar essas possibilidades. Assim, é conveniente verificar os valores acoplados de  $C_1$  e  $C_2$  que permitem estados ligados, ressonâncias ou estados virtuais. Para isso, devemos analisar os pólos da matriz-S. Em baixas energias, onde a expansão (2.4.14) é válida, a parte não-trivial da matriz-S dada por (2.4.15) para  $l=0$  fica como

$$f_0 = \frac{1}{\frac{-1}{a_0} - ip}. \quad (3.4.26)$$

Pólos na matriz-S podem corresponder a estados ligados [34] e sabendo que o momento associado à energia de ligação se torna imaginário (por conta de energias negativas), isto é,

$$p = i\sqrt{2\mu_{DD^*}E_b}, \quad (3.4.27)$$

com  $p = |\mathbf{p}|$ ; expressamos a energia de ligação  $E_b$  através de

$$\frac{-1}{a_0} - ip = 0 \Rightarrow E_b = \frac{1}{2\mu_{DD^*}a_0^2}, \quad (3.4.28)$$

onde  $a_0$  é conhecido como comprimento de espalhamento e é visto em (2.4.14) para  $l = 0$ . Logo, ao substituirmos (3.4.25) em (3.4.28), para  $l = 0$ , temos como resultado a dependência do comprimento de espalhamento de  $T_{++}$  com  $\lambda$  dada por

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mu_{DD^*}E_b}} = \frac{\lambda_R \mu_{DD^*}}{8\pi}. \quad (3.4.29)$$

A implementação de energias negativas em (3.4.27) nos dá 4 possibilidades de pólos para (3.4.26) : pólos com  $Im p > 0$  correspondem a estados ligados, e pólos com  $Im p < 0$  às ressonâncias; e há também pólos correspondentes aos estados virtuais (ver figura 8).

Por (2.4.13) e (2.4.14), temos que

$$T_0(k) = S_0(k) - 1 = \frac{2i}{cot\delta_0(p) - i}, \quad (3.4.30)$$

ou seja, um pólo ocorre nas matrizes **S** e **T** para  $cot\delta_0(k_b) = i$ . No entanto, um pólo de estado ligado na matriz-S (e consequentemente na matriz **T**) deve estar no eixo imaginário de  $p$ , assim

$$k_b = iK_b, \quad (3.4.31)$$

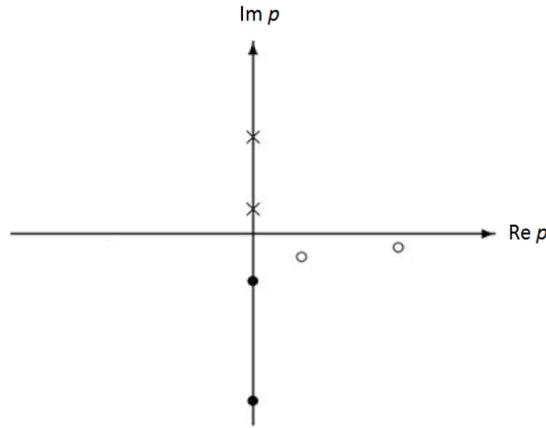


Figura 8 – Distribuição dos pólos da matriz-S no plano complexo;  $\times$  representa pólos correspondentes a estados ligados;  $\circ$ , pólos correspondentes a ressonâncias e  $\bullet$  pólos correspondendo aos estados virtuais.

onde  $K_b$  é um número real e positivo. Combinando (3.4.31) com (3.4.30), chega-se ao resultado

$$-K_b = k_b \cot \delta_0(k_b), \quad (3.4.32)$$

que ao compararmos com (2.4.14) nos leva a

$$K_b = a_0^{-1}, \quad (3.4.33)$$

que é a relação entre a posição do pólo na matriz-S ou  $\mathbf{T}$  com o comprimento de espalhamento. Note que podemos escrever  $T_l(k)$  usando (2.4.12) :

$$T_l(k) = \frac{2ip^{2l+1}}{-a_l^{-1} + \frac{1}{2}r_l p^2 - ip^{2l+1}}, \quad (3.4.34)$$

$$= \frac{i\Gamma}{E_r - E_{DD^*} - \frac{1}{2}i\Gamma} \quad (3.4.35)$$

com a posição de ressonância ,  $E_r$ , e a largura de ressonância  $\Gamma$  (ambos números reais e positivos), definidos por

$$E_r = \frac{1}{a_l r_l}, \quad (3.4.36)$$

$$\Gamma = -\frac{2}{r_l} p^{2l+1}, \quad (3.4.37)$$

onde assumimos que os pólos acontecem para a energia complexa

$$E_{DD^*} = E_r - \frac{1}{2}i\Gamma. \quad (3.4.38)$$

Podemos relacionar a posição do pólo  $K_b$  para estados ligados dados pela Eq. (3.4.33) com o acoplamento  $\lambda$  através de (3.4.29) (o mesmo pode ser feito para relacionar a posição das ressonâncias  $E_r$  dadas por (3.4.36) com  $\lambda$ ). Disto, resulta :

$$K_b = \frac{8\pi}{\lambda_R \mu_{DD^*}}. \quad (3.4.39)$$

Como  $K_b$  deve ser um número real e positivo, conseqüentemente,  $\lambda_R$  não pode ser negativo. Em outras palavras, para fornecer estados ligados,  $\lambda_R$  deve ser maior que zero; isto é, os valores dos parâmetros  $C_1$  e  $C_2$  devem ser tais que obedeam a restrição em que  $\lambda_R = -C_1 + C_2 > 0$ . Em comparação com a referência [16] e por motivação da XEFT, escolhemos o valor da energia de ligação (3.4.25) como sendo  $E_b = 0.2$  MeV, que nos fornece  $\lambda_R \approx 13.2 \times 10^{-4} \text{MeV}^{-2}$  para as massas  $m_D = 1864.91 \text{MeV}$  e  $m_{D^*} = 2006.98 \text{MeV}$  obtidas da *Particle Data Group* [35]. Os valores acoplados de  $C_1$  e  $C_2$  que geram um estado ligado de  $|X_+\rangle$  com  $E_b = 0.2$  MeV são representados através do gráfico da figura 9. Além disso, se admitirmos que o estado ortogonal à  $|X_+\rangle$  dado por

$$|X_-\rangle = \frac{1}{2} [|D^* \bar{D}\rangle - |D \bar{D}^*\rangle], \quad (3.4.40)$$

não é ligado, o espaço dos parâmetros  $(C_1, C_2)$  fica restrito aos valores das constantes de acoplamento que possam formar um estado ligado  $|X_+\rangle$ , já que para

$$\begin{aligned} T_{--} &= \langle X_- | \mathbf{T} | X_- \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\langle D^* \bar{D} | T | D^* \bar{D} \rangle - \langle D^* \bar{D} | T | D \bar{D}^* \rangle + \langle D \bar{D}^* | T | D^* \bar{D} \rangle - \langle D \bar{D}^* | T | D \bar{D}^* \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [T_{11} - T_{12} + T_{21} - T_{22}] \\ &= \frac{\lambda'_R}{1 - i\lambda'_R \tilde{A}_R}, \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

não há pólos correspondentes a estados ligados para  $C_1 + C_2 > 0$  com  $\lambda'_R = -C_1 - C_2$  [16]. Consideramos apenas valores com  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$  na figura 9. Portanto, com o uso da lagrangiana efetiva que descreve as interações do estado molecular  $|X_+\rangle$ , calculamos sua respectiva energia de ligação e com certas condições encontramos uma restrição nos valores de  $C_1$  e  $C_2$  para formar um estado ligado  $D^* \bar{D}$ .

Assim, utilizando uma abordagem galilei-covariante, confirmamos que com certas considerações e restrições nos valores das constantes de acoplamento da lagrangiana efetiva dos mésons charmosos  $D$  e  $D^*$ , é possível gerar um estado ligado  $|X_+\rangle$  fracamente ligado desses mésons.

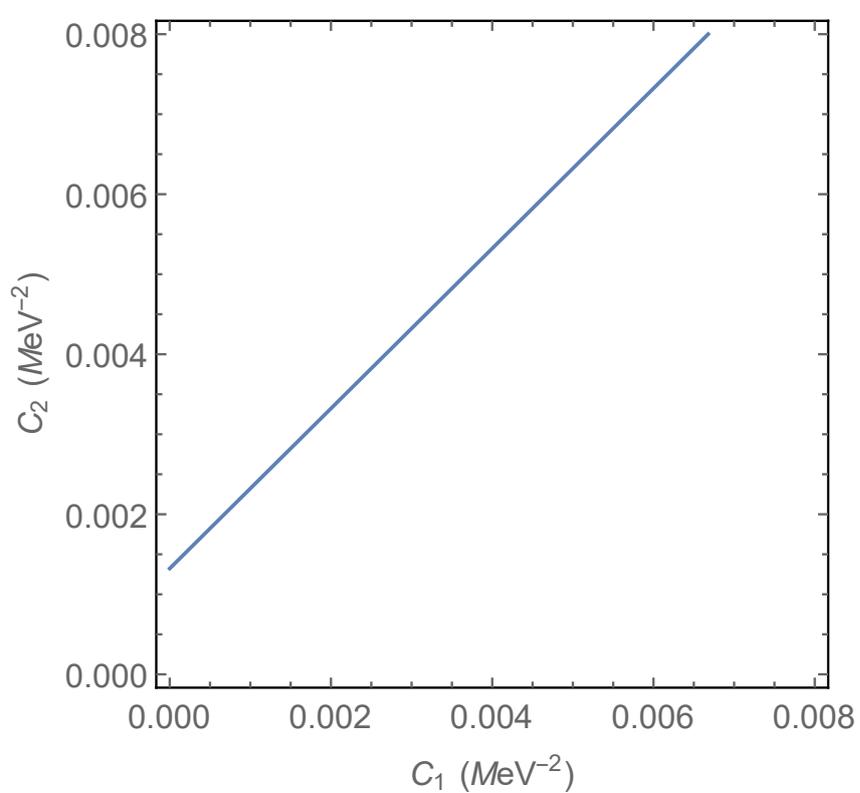


Figura 9 – Representação gráfica dos valores de  $C_1$  e  $C_2$  que podem formar um estado ligado com energia  $E_b = 0.2$  MeV.

## 4 Conclusões

Nós apresentamos uma formulação Galilei-Covariante num espaço-tempo pentadimensional (4,1). Definimos as transformações das coordenadas pertencentes a esse espaço vetorial e demonstramos a covariância galileana explícita da XEFT, confirmando assim sua invariância galileana tal como mencionada por [2]. Nossa formulação galileana também foi utilizada no formalismo da Teoria de Perturbação, onde consideramos a interação entre partículas não-relativísticas. Definimos nesse cenário as transformadas de Fourier para o propagador de Feynman, bem como explicitamos sua representação no espaço dos momentos galileanos.

Através da lagrangiana efetiva da XEFT sugerimos campos Galilei-Covariantes com 5 dimensões -e portanto com termos não-físicos, para os mésons  $D^{*0}$  e  $D^0$ , suas antipartículas, e também para o pión  $\pi^0$ . Demonstramos que as lagrangianas Galilei-Covariantes equivalem às lagrangianas sem a covariância explícita. Ademais, aplicamos a formulação galileana para o cálculo das amplitudes de transição que envolvem os mésons da XEFT e consideramos a expansão perturbativa até segunda ordem no acoplamento, o que resultou em interações de contato e loops. No contexto galileano, usamos a equação de Bethe-Salpeter, onde se fez necessário aplicar o esquema de subtração  $\overline{MS}$  na regularização dimensional para remover divergências; isso nos permitiu obter uma restrição dos valores das constantes de acoplamento das interações mesônicas que podem formar um estado molecular fracamente ligado  $D - \bar{D}^*$ .

Nos nossos cálculos tivemos que introduzir funções delta para que as integrações não fossem realizadas nas componentes dos momentos pentadimensionais que são equivalentes à massa, e portanto, invariantes galileanas. Com a introdução das deltas, as integrações são reduzidas nas componentes do quadrimomento e consequentemente a invariância galileana num espaço-tempo (3,1) de Minkowski foi restaurada.

Em perspectiva de trabalho, temos o intuito de estudar as propriedades da partícula  $X(3872)$  a partir de sua produção térmica e de decaimentos, tais como  $X(3872) \rightarrow D^0 \bar{D}^{*0}$  e  $D^0 + \bar{D}^{*0} \rightarrow X(3872) + \pi$ . Almejamos também usar a formulação Galilei-Invariante em outros hádrons que possam ser descritos por teorias efetivas. O uso da abordagem Galilei-Covariante de modo geral fornece motivação para o estudo de teorias de campos em sistemas de baixas energias, cujos resultados envolvendo a invariância galileana podem ser proveitosos.

## Referências

- [1] TAKAHASHI, Y. Towards the many-body theory with the galilei invariance as a guide: Part i. *Fortschritte der Physik*, Wiley Online Library, v. 36, n. 1, p. 63–81, 1988. Citado na página 12.
- [2] BRAATEN, E. Galilean-invariant xeft. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 11, p. 114007, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 12, 13, 34, 35, 38, 44 e 51.
- [3] OMOTE, M. et al. Galilean covariance and the schrödinger equation. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, Wiley Online Library, v. 37, n. 12, p. 933–950, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 12, 17 e 18.
- [4] MONTIGNY, M. d.; KHANNA, F.; SANTOS, E. Lorentz-like formulation of galilean field theories. *Canadian journal of physics*, NRC Research Press, v. 84, n. 6-7, p. 565–571, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- [5] BORDEMANN, M.; HOPPE, J. The dynamics of relativistic membranes. reduction to 2-dimensional fluid dynamics. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 317, n. 3, p. 315–320, 1993. Citado na página 12.
- [6] MONTIGNY, M. de; KHANNA, F.; SANTANA, A. On galilei-covariant lagrangian models of fluids. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 49, p. 10921, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.
- [7] BELLAC, M. L.; LÉVY-LEBLOND, J.-M. Galilean electromagnetism. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, Springer, v. 14, n. 2, p. 217–234, 1973. Citado na página 12.
- [8] MONTIGNY, M. de; KHANNA, F.; SANTANA, A. Lorentz-like covariant equations of non-relativistic fluids. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 36, n. 8, p. 2009, 2003. Citado na página 12.
- [9] FUSHCHICH, V.; NIKITIN, A. Reduction of the representations of the generalised poincaré algebra by the galilei algebra. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 13, n. 7, p. 2319, 1980. Citado na página 12.
- [10] ABREU, L.; MONTIGNY, M. D. Galilean covariant models of bosons coupled to a chern–simons gauge field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 38, n. 45, p. 9877, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.

- [11] JANSEN, M.; HAMMER, H.-W.; JIA, Y. Light quark mass dependence of the  $x(3872)$  in an effective field theory. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 1, p. 014033, 2014. Citado na página 12.
- [12] HOLT, J. W.; RHO, M.; WEISE, W. Chiral symmetry and effective field theories for hadronic, nuclear and stellar matter. *Physics Reports*, Elsevier, v. 621, p. 2–75, 2016. Citado na página 12.
- [13] HIDALGO-DUQUE, C.; NIEVES, J.; VALDERRAMA, M. P. Heavy quark spin symmetry and  $su(3)$ -flavour partners of the  $x(3872)$ . *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 914, p. 482–487, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 34.
- [14] MEHEN, T.; POWELL, J. W. Heavy quark symmetry predictions for weakly bound b-meson molecules. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 11, p. 114013, 2011. Citado na página 13.
- [15] ABE, K. et al. Properties of the  $x(3872)$  at belle. arXiv preprint hep-ex/0408116, 2004. Citado na página 13.
- [16] ALFIKY, M. T.; GABBIANI, F.; PETROV, A. A.  $X(3872)$ : Hadronic molecules in effective field theory. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 640, n. 5, p. 238–245, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 13, 40, 43, 44, 46 e 49.
- [17] FLEMING, S.; MEHEN, T. Hadronic decays of the  $x(3872)$  to  $\chi_{cJ}$  in effective field theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 094019, Nov 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.094019>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 43.
- [18] WANG, P.; WANG, X. Study of  $x(3872)$  from effective field theory with pion-exchange interaction. *Physical review letters*, APS, v. 111, n. 4, p. 042002, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 43.
- [19] FLEMING, S. et al. Pion interactions in the  $x(3872)$ . *Physical Review D*, APS, v. 76, n. 3, p. 034006, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 13, 34, 43 e 46.
- [20] ABREU A.E. SANTANA, E. S. S. e. A. R. L. Notes on the galilei group: Geometric aspects and recent developments. *Sitentibus*, v. 05, p. 1–18, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 17 e 20.
- [21] MAGGIORE, M. A modern introduction to quantum field theory. [S.I.]: Oxford University Press, 2005. v. 12. Citado 3 vezes nas páginas 23, 31 e 32.
- [22] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. J. Modern quantum mechanics. [S.I.]: Pearson Higher Ed, 2014. Citado na página 23.

- [23] BETHE, H. A. Theory of the effective range in nuclear scattering. *Physical Review*, APS, v. 76, n. 1, p. 38, 1949. Citado na página 24.
- [24] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V.; MARTINEC, E. An introduction to quantum field theory. [S.I.]: AIP, 1996. Citado na página 29.
- [25] ABREU, L. M. et al. Galilei-covariant path-integral quantization of non-relativistic complex scalar fields. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 308, n. 1, p. 244–262, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 42.
- [26] ABREU, L. M.; FERREIRA, F.; SANTOS, E. The quantization of galilean duffin-kemmer-petiau field. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, p. 235–241, 2010. Citado na página 29.
- [27] BURGESS, C. An introduction to effective field theory. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, Annual Reviews, v. 57, p. 329–362, 2007. Citado na página 34.
- [28] CANHAM, D. L.; HAMMER, H.-W.; SPRINGER, R. P. Scattering of  $d$  and  $d^*$  mesons off the  $x$  (3872). *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 1, p. 014009, 2009. Citado na página 34.
- [29] CHENG, H. yang; CHEUNG, C. yee; ZHANG, W. min. Effective Field Theory of Heavy Mesons. 1998. Citado na página 34.
- [30] BRAATEN, E.; HAMMER, H.-W.; MEHEN, T. Scattering of an ultrasoft pion and the  $x$  (3872). *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 3, p. 034018, 2010. Citado na página 35.
- [31] NIEVES, J.; ARRIOLA, E. R. Bethe-salpeter approach for meson-meson scattering in chiral perturbation theory. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 455, n. 1, p. 30–38, 1999. Citado na página 44.
- [32] GAMERMANN, D. et al. Dynamically generated open and hidden charm meson systems. *Physical Review D*, APS, v. 76, n. 7, p. 074016, 2007. Citado na página 46.
- [33] PENA, C.; BLASCHKE, D.  $X$  (3872) as a  $dd^*$  molecule bound by quark exchange forces. arXiv preprint arXiv:1201.0309, 2011. Citado na página 46.
- [34] BURKE, P. G. R-Matrix Theory of Atomic Collisions: Application to Atomic, Molecular and Optical Processes. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2011. v. 61. Citado na página 47.
- [35] BERINGER, J. et al. Review of particle physics particle data group. *Physical Review D (Particles, Fields, Gravitation and Cosmology)*, American Physical Society, v. 86, n. 1, 2012. Citado na página 49.