



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Tassia Andrade Ferreira

**Testes observacionais complementares na restrição
de modelos cosmológicos com interação no setor
escuro**

Salvador-BA

2016

TASSIA ANDRADE FERREIRA

**TESTES OBSERVACIONAIS COMPLEMENTARES NA RESTRIÇÃO DE
MODELOS COSMOLÓGICOS COM INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

SALVADOR-BA
2016

Andrade Ferreira, Tassia

Testes observacionais complementares na restrição de modelos cosmológicos com interação no setor escuro / Tassia Andrade Ferreira. – Salvador, 2016.

72 p. : il

Orientador: Prof. Dr. Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

Dissertação (Mestrado - Física) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, 2016.

1. Cosmologia. 2. Modelo com interação no setor escuro. 3. Fração de massa de gás. 4. Oscilações acústicas bariônicas. 5. Relógios cosmológicos. I. Bruno Magalhães Pigozzo, Cássio. II. Título.

AGRADECIMENTOS

First, I want to thank CAPES for providing me with the dough so that I could buy pretty things whenever I got sad.

I would like to thank my friends, whom I shall not name, lest I forget one and never hear the end of it. Two in particular deserve honourable mention: Zoher El-Bietar, who will always have a special place in my heart; and Patrícia Pereira, for, amongst so many other things, all the laughs when I needed them and for helping me stay determined when I felt like giving up.

I thank my family: Mom for all the wonderful things and accepting me in her heart even though I made plans to sell grilled cheese at the beach, many a times, during the preparation of this dissertation. I thank my father for all the times he came by my house with food (even if just for five minutes, which for him was probably a lifetime), for allowing me to have an international experience in my childhood and teenage years, which has undoubtedly set the grounds for my motivation to study the mysteries of the Universe, and for teaching me that doing what I love is worth more than being rich (I wouldn't know, though, I've never been particularly rich). I thank my brother for making it so easy for me to look good. I thank my little sister, for she makes me amazing popcorn and brownies, and only demands love (read *food*) in return, but no physical contact, lest I want to be hit. I also thank my aunt Angela, for giving me a lovely place to stay in one of the best neighbourhoods in town, for a *bargain*.

I thank George Lucas for introducing *Siths* to our world and making me sound so much cooler when I tell people that I work with cosmological models with interaction in the **dark sector**.

I express my undying gratitude towards Prof. Dr. Maria das Graças for looking after me during all these years, for being a role model and a *noor*¹ in the Physics Institute.

Mostly I thank my supervisor and friend (may I call you that?) Prof. Dr. Cassio Pigozzo, for being patient with me, for being my constant debugger, for all the books I borrowed (never to return), for not giving up on me no matter how incredibly daft some of my mistakes were, for teaching me about **modesty** and **humbleness**, for allowing me to travel halfway across the world for my best friend's wedding, a mere three weeks prior to this dissertation's *deadline*, for being so easily available whenever there were promises of brownies (and even when there weren't), for all the hours he invested in me (sometimes, even his sleeping hours), and for pushing me to finish this so that I may watch his favourite series already.

I would also like to thank the members of the master's thesis committee who have taken time to read this dissertation and have come to honour me at my presentation.

¹*Light*, in Arabic

And since I feel like this little corner is my own, let me just say to all those *horrible* people who kept pestering me with questions about when this dissertation would be done and when would I be presenting it: I am **not** impressed. What you do is annoying, how about, *next time*, instead of asking me for exact dates, inquire if I need help, or food, or a massage, or a drink, or something. *Geez*.

Probably about it.

Space: The final frontier
(Star Trek)

RESUMO

Uma das maiores preocupações na cosmologia atualmente é a incapacidade de compreender a discordância no valor observado da energia escura e o que é previsto pela Física de Partículas. Pensando nisso, o Grupo de Gravitação e Cosmologia da Universidade Federal da Bahia, e seus colaboradores, vêm desenvolvendo trabalhos em um modelo cosmológico alternativo capaz de atenuar esse problema. Este modelo é conhecido como $\Lambda(t)$ CDM, o qual admite a criação de matéria escura pelo decaimento da energia escura.

Complementando testes previamente realizados com este modelo, neste trabalho usamos testes de baixo *redshift* e menor precisão para analisá-lo e restringir seus parâmetros cosmológicos, a partir de observações de Fração de Massa de Gás, de Oscilações Acústica Bariônica e do Parâmetro de Hubble. Além do modelo $\Lambda(t)$ CDM, apresentamos também resultados para o modelo padrão, Λ CDM.

Durante o estudo de fração de massa de gás notamos um leque de modelagens para calcular seu valor teórico. Em vista disso, fizemos um estudo destes diferentes métodos para identificar o mais apropriado para os dados observacionais. Apresentamos restrições de parâmetros para três modelagens diferentes, e indicamos a que melhor se adéqua às observações.

Como era esperado, os testes, isoladamente, não resultam em boa restrição dos parâmetros cosmológicos de interesse, mas são úteis em quebra de degenerescências existentes, por exemplo, no teste de Supernovas. Em todos os casos, assim como nos testes previamente realizados, o modelo $\Lambda(t)$ CDM apresentou densidades de matéria escura superiores ao modelo padrão, demonstrando uma boa concordância nos resultados.

Palavras-chave: Cosmologia, modelo com interação no setor escuro, fração de massa de gás, oscilações acústicas bariônicas, relógios cosmológicos.

ABSTRACT

One of the biggest concerns in cosmology today is the inability to explain the disagreement between the observed value of dark energy and that predicted by Particle Physics. In light of this, the Cosmology and Gravitation Group of the Federal University of Bahia, and its collaborators, have been developing a series of studies in an alternate cosmological model that is able to unravel this puzzle. This model, known as $\Lambda(t)$ CDM, allows for the creation of dark matter with the decay of dark energy.

In this work, in order to complement the tests previously carried out with this model, we use tests of low redshift and lower precision to analyse and constrain the cosmological parameters, with data from Gas Mass Fraction, Baryon Acoustic Oscillations and the Hubble Parameter. We also include results for the standard model, Λ CDM.

While researching gas mass fraction, we came across a few variations for calculating its theoretical value. As such, a thorough study was made of these different methods in order to identify the one most suitable for our observational data. We present parameter constraints for three such methods, and indicate which one most appropriately matches the observations.

As was expected, each test separately was not able to provide good constraints on the cosmological parameters of interest; however, they prove effective in breaking degeneracies, for instance, in tests carried out with Supernovae. In every case, just as in tests that have been previously carried out, the $\Lambda(t)$ CDM model gave a higher dark matter density as compared to the standard model, thus showing good agreement in the results.

Keywords: Cosmology, model with interacting in the dark sector, gas mass fraction, baryon acoustic oscillations, cosmological clocks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Diagrama de Hubble retirado de 1.	1
Figura 2.1 – Evolução do parâmetro de densidade dos componentes de um Universo plano.	15
Figura 4.1 – Função de densidade de probabilidade (PDF).	35
Figura 4.2 – Gráfico conjunto apresentando duas PDFs e regiões de credibilidade.	38
Figura 4.3 – Exemplos de <i>traceplot</i>	42
Figura 5.1 – Diagrama de Hubble teórico para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.	50
Figura 5.2 – Ajuste de dados observacionais de $H(z)$ para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.	51
Figura 5.3 – Ajuste de D_v/r_s teórico para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.	52
Figura 5.4 – Ajuste de dados observacionais de BAO para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.	53
Figura 5.5 – Ajuste de f_{gas} teórico para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para <i>Allen 1</i>	54
Figura 5.6 – Ajuste de dados observacionais de f_{gas} para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para <i>Allen 1</i>	55
Figura 5.7 – Ajuste de f_{gas} teórico para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para <i>Allen 2</i>	55
Figura 5.8 – Ajuste de dados observacionais de f_{gas} para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para <i>Allen 2</i>	56
Figura 5.9 – Ajuste de dados observacionais de f_{gas} para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para <i>Ettori</i>	57
Figura 5.10–Ajuste de dados observacionais de análise conjunta de dados de f_{gas} + BAO + $H(z)$ para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM.	60
Figura 5.11–Ajuste de dados observacionais de análise conjunta de dados de f_{gas} + BAO + $H(z)$ + SN Ia para o modelo Λ CDM.	63
Figura 5.12–Ajuste de dados observacionais de análise conjunta de dados de f_{gas} + BAO + $H(z)$ + SN Ia para o modelo $\Lambda(t)$ CDM.	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Termodinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico em expansão.	14
Tabela 3.1 – Valores publicados de $H(z)$ obtidos a partir do método de idade diferencial.	23
Tabela 3.2 – Matriz de covariância de BAO.	26
Tabela 4.1 – Escala de Jeffreys para avaliar a relevância do Fator de Bayes para comparação de modelos.	34
Tabela 4.2 – Intervalo de credibilidade para a densidade de probabilidade posterior.	37
Tabela 5.1 – <i>Priors</i> utilizados na análise dos dados observacionais.	49
Tabela 5.2 – Valores dos parâmetros obtidos para o teste observacional com dados de $H(z)$	51
Tabela 5.3 – Valores dos parâmetros obtidos para o teste observacional com dados de BAO.	52
Tabela 5.4 – Valores dos parâmetros obtidos para o teste observacional com dados de f_{gas}	58
Tabela 5.5 – Valores dos parâmetros obtidos para a análise combinada de observações de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z)$	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Λ CDM	Λ <i>Cold Dark Matter</i> (Matéria Escura Fria)
$\Lambda(t)$ CDM	$\Lambda(t)$ <i>Cold Dark Matter</i> (Matéria Escura Fria)
BAO	<i>Baryon Acoustic Oscillation</i> (Oscilação Acústica Bariônica)
CMB	<i>Cosmic Microwave Background</i> (Radiação Cósmica de Fundo)
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
HMC	<i>Hamiltonian Monte Carlo</i> (Monte Carlo Hamiltoniano)
HST	<i>Hubble Space Telescope</i>
JLA	<i>Joint Light-curve Analysis</i>
MCMC	<i>Markov Chain Monte Carlo</i> (Cadeia Markov Monte Carlo)
MH	Metropolis-Hastings
<i>Posterior</i>	Distribuição de probabilidade a posteriori
<i>Prior</i>	Distribuição de probabilidade a priori
PDF	<i>Probability Density Function</i> (Função de Densidade de Probabilidade)
SDSS	<i>Sloan Digital Sky Survey</i>
SN Ia	Supernova do tipo Ia
SNLS	<i>Supernova Legacy Survey</i>
UFBA	Universidade Federal da Bahia
WIMP	<i>Weakly Interacting Massive Particle</i> (Partícula Massiva que Interage Fracamente)

SUMÁRIO

Lista de figuras	xi
Lista de tabelas	xiii
1 – Introdução	1
2 – A Cosmologia e o Universo em Expansão	5
2.1 O Princípio Cosmológico	5
2.2 A Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	6
2.3 Redshift Cosmológico	7
2.4 As Equações de Friedmann	8
2.5 Componentes do Universo	10
2.6 Λ CDM	12
2.7 $\Lambda(t)$ CDM	15
2.7.1 Época dominada por matéria	17
2.8 Distâncias Cosmológicas	18
2.8.1 Distância Própria	18
2.8.2 Distância Luminosidade	18
2.8.3 Distância Diâmetro-Angular	20
3 – As Observáveis	21
3.1 Parâmetro de Hubble	21
3.2 Oscilação Acústica Bariônica	22
3.2.1 Régua Padrão Estatística	22
3.2.2 A Física de BAO	24
3.3 Fração de Massa de Gás	26
3.3.0.1 Restrição de Parâmetros Cosmológicos	27
3.3.0.2 Parâmetro de Depleção	27
3.3.1 Variações do cálculo de f_{gas}	28
3.4 Supernova	29
3.4.1 Vela Padrão	29
3.4.2 Supernova do Tipo Ia	30
3.4.3 Joint Light-curve Analysis (JLA)	31
3.4.3.1 Correções para as Propriedades das Galáxias Hospedeiras	31
4 – Métodos Estatísticos	33

4.1	Inferência Bayesiana	33
4.1.1	Estimativa de Parâmetros	34
4.1.2	A Distribuição χ^2	35
4.1.3	Estimativa de Erros	36
4.1.3.1	Intervalo de Credibilidade	36
4.2	Cadeia Markov Monte Carlo	37
4.2.1	Métodos de Monte Carlo	38
4.2.2	Integração de Monte Carlo	39
4.2.3	Cadeia de Markov	39
4.2.4	Burn-in	40
4.2.5	Convergência	41
4.3	Algoritmo de Metropolis-Hastings	43
4.3.1	Distribuição Proposta	44
4.3.2	Função de Aceitação	45
4.3.3	Aceitação/Rejeição de uma Amostra	45
4.4	Monte Carlo Hamiltoniano	45
4.4.1	Dinâmica Hamiltoniana	45
4.4.2	Método de Leapfrog	46
4.4.3	Construção da Distribuição Alvo	47
4.4.4	Aplicação do Método	47
5	– Análise Computacional e Resultados	49
5.1	Método Computacional	49
5.2	Resultados	49
5.2.1	Parâmetro de Hubble	50
5.2.2	Oscilações Acústica Bariônica	51
5.2.3	Fração de Massa de Gás	53
5.2.3.1	Allen 1	54
5.2.3.2	Allen 2	54
5.2.3.3	Ettori	56
5.2.4	Análise Combinada de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z)$	59
5.2.5	Teste de Supernova + Análise Combinada de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z)$	62
6	– Conclusão	65
	Referências	67

1 INTRODUÇÃO

A new scientific truth does not triumph by convincing its opponents and making them see the light, but rather because its opponents eventually die and a new generation grows up that is familiar with it.

Max Planck

A cosmologia é uma ciência bastante antiga. As estrelas e galáxias, que são facilmente vistas no escuro da noite têm intrigado cientistas e leigos ao longo dos tempos. Recentemente, com o avanço da tecnologia, a cosmologia moderna tem ganhado cada vez mais espaço no mundo científico. Antes de introduzir as ferramentas que foram usadas neste trabalho, falarei brevemente sobre os acontecimentos notáveis da cosmologia.

A teoria da Relatividade Geral de Einstein, abandonando a noção de gravidade como uma força e conferindo uma natureza geométrica a ela, foi o passo inicial para a cosmologia moderna.

Em 1927, Lemaître foi o primeiro a fazer uma ligação entre a relatividade geral e a Lei de

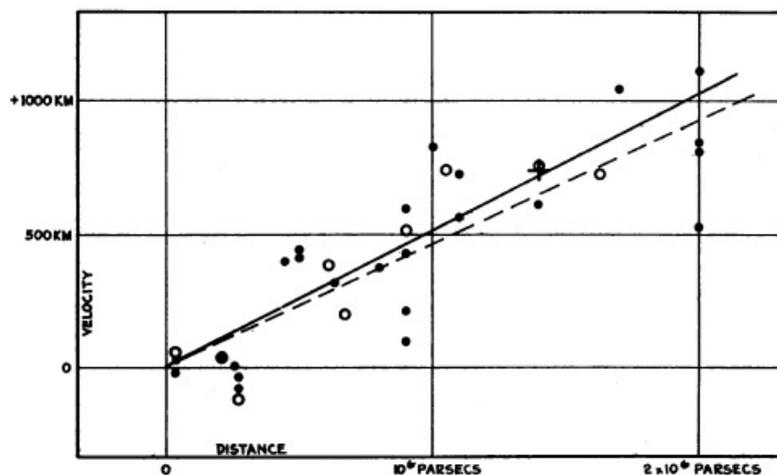


Figura 1.1 – Diagrama de Hubble retirado de [1]. Temos a velocidade (em km/s) vs a distância (em Parsec). A linha sólida é a de melhor ajuste para os pontos preenchidos, enquanto que a linha tracejada é o melhor ajuste para pontos vazios. Os pontos preenchidos foram corrigidos para o movimento do sol, está consideração não foi feita para os pontos vazios.

Hubble, estabelecendo que o Universo estava em expansão. Diante desta ideia, Lemaître propôs que se voltássemos no tempo o Universo iria contrair até um ponto no qual toda a matéria se concentraria em um único ponto. Esta teoria ficou conhecida como o modelo do *Big Bang* e é a que melhor descreve o Universo atualmente.

É importante lembrar que esta teoria não diz nada sobre uma singularidade inicial, apenas descreve e explica a evolução do Universo do momento em que ele expandia de um estado quente e denso, em tempos primordiais, até o estado frio, transparente e de baixa densidade de hoje.

Edwin Hubble, na década de 1920, encontrou uma relação quase linear entre distância e *redshift* ao combinar estudos da espectroscopia de galáxias espirais com estimativas de suas distâncias. Ele notou que as velocidades com que as galáxias se afastam de nós aumentam com a distância, como é esperado em um Universo em expansão ^[2]. Os resultados obtidos por Hubble, publicados em seu artigo *A Relation Between Distance And Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae* em 1929, estão apresentados na Figura 2.18.

Já em 1937, Zwicky^[3], obteve resultados interessantes ao aplicar o teorema virial ao aglomerado de galáxias Coma. Ele percebeu uma quantidade elevada de matéria (~ 400 vezes mais) que não era explicada observacionalmente ¹. Esta foi a primeira menção a matéria escura.

Desde então, outros estudos começaram a apontar uma quantidade excessiva de matéria em galáxias e aglomerados de galáxias ^[4, 5], e se tornou importante uma análise para entender melhor a origem de tal discordância observacional. Neste trabalho, avaliamos modelos cosmológicos com diferentes evoluções de matéria escura, que serão explicados mais adiante.

Mais recentemente os trabalhos de Riess et al.^[6] e Perlmutter et al.^[7] confirmaram que o Universo está em expansão acelerada. Isto introduziu uma nova grande questão na cosmologia e astrofísica: a natureza e a dinâmica da energia escura, responsável pela aceleração da expansão. A peculiaridade da energia escura é que ela possui pressão negativa, de forma que essa pressão vence a força gravitacional, fazendo com que o Universo expanda. A candidata mais provável para a energia escura, atualmente, é a constante cosmológica introduzida por Einstein, que veremos no próximo capítulo. Acredita-se que um outro tipo de expansão acelerada ocorreu quando o Universo era bem novo, conhecida como **inflação**. A inflação ajuda a resolver vários enigmas cosmológicos, como o problema da planaridade, o problema do horizonte, e ajuda também a explicar a formação de largas estruturas no Universo ^[8].

O modelo padrão, Λ CDM, proposto em [6], tem sido capaz de explicar muito bem as observações cosmológicas. Apesar de muitos testes terem lhe garantido credibilidade, existem outros modelos que também são capazes de explicar as observações. O modelo sugerido em Borges e Carneiro^[9], conhecido como $\Lambda(t)$ CDM, apresenta uma alternativa que atenua o problema do ajuste fino cosmológico, que o modelo padrão não tem sido capaz de explicar. Neste trabalho, usamos algoritmos de Monte Carlo para explorar o espaço de parâmetros, e testar os modelos a

¹Seus resultados estavam errados por uma ordem de magnitude, já que a constante de Hubble utilizada não correspondia ao seu valor real.

partir de observações de baixo *redshift* (BAO, $H(z)$ e fração de massa de gás), combinada com dados de Supernovas do Tipo Ia.

O Grupo de Gravitação e Cosmologia da UFBA tem, ao longo dos anos, realizado vários trabalhos relacionados ao modelo $\Lambda(t)$ CDMs parâmetros ^[10, 11, 12, 13, 14]. Neste trabalho, usamos testes de baixa precisão para complementar os outros estudos com este modelo. Pretendemos a partir deste trabalho conseguir ajustes que melhorem a restrição de parâmetros e a seleção de modelos.

2 A COSMOLOGIA E O UNIVERSO EM EXPANSÃO

There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable. There is another theory which states that this has already happened.

Douglas Adams, The Restaurant at the End of the Universe

Como vimos na introdução, a cosmologia é o estudo do Universo como um todo: de seus componentes (matéria, energia, radiação e curvatura), dos fenômenos que o constituem e de sua evolução. É, portanto, uma ciência multidisciplinar que adota uma teoria de gravitação. No caso do modelo padrão, a Relatividade Geral é adotada.

Nesta seção, falarei brevemente sobre os conceitos básicos da cosmologia, situando o objeto de estudo e os métodos que foram utilizados nesta pesquisa.

2.1 O Princípio Cosmológico

O princípio cosmológico pode ser pensado como sendo uma forma generalizada do **Princípio Copernicano**¹. Ele diz que, para escalas suficientemente grandes, o Universo pode ser considerado espacialmente homogêneo e isotrópico. Homogeneidade implica que a geometria do Universo é a mesma em qualquer ponto no espaço; isotropia significa que um observador verá o Universo exatamente igual em todas as direções. Essa hipótese é particularmente forte, e é a base para toda a cosmologia moderna.

Para entender este princípio, podemos pensar na existência de **observadores fundamentais** em cada ponto do Universo, que o enxergam como isotrópico. Essa ideia é importante porque dois observadores no mesmo ponto, mas com velocidades diferentes entre eles, não podem ambos ver isotropia no Universo.

¹A Terra não se encontra em uma posição especialmente favorecida no Universo.

Para dizer que o Universo é homogêneo, precisamos apenas que todos os observadores fundamentais observem distâncias angulares isotrópicas para *redshifts*² de até a terceira ordem. Da mesma forma, para provar a isotropia do Universo, não é necessário que todos os observadores fundamentais observem a Radiação Cósmica de Fundo (CMB) isotrópica, é suficiente que isso seja verdade até o octopolo ^[15].

Temos diversas observações indiretas que suportam o princípio cosmológico, como, por exemplo, os fótons da CMB oriundos de diferentes partes do Universo que apresentam quase a mesma temperatura. Outras observações como a distribuição de galáxias no Universo e o lenteamento fraco também dão força a esta teoria.

Como sabemos, o Universo não é homogêneo em pequenas escalas, estas inhomogeneidades podem ser consideradas como pequenas perturbações evoluindo no fundo homogêneo que é o Universo. Falaremos mais sobre este aspecto importante do Universo em futuros capítulos.

2.2 A Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Antes de começarmos a falar sobre a dinâmica do Universo, precisamos definir a métrica que o governa. Para aplicarmos o princípio cosmológico, precisamos que a métrica seja simétrica e que tenha a gravidade como manifestação na geometria, como é o caso da métrica **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker** (FLRW), que é uma solução exata das equações de campo da relatividade geral. O elemento de linha do espaço-tempo quadridimensional descrito por tal métrica é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\sigma^2, \quad (2.1)$$

onde os índices gregos variam de 0 a 3, os índices latinos de 1 a 3, em todo o texto. Temos que $dx^0 = dt$ e os outros três correspondem às coordenadas espaciais, também adotamos $c = 1$. O termo $g_{\mu\nu}$ é conhecido como o tensor da métrica, a função $a(t)$ é o **fator de escala cosmológico**, que descreve como as distâncias crescem com o tempo, e $d\sigma^2$ é a métrica independente do tempo. Podemos ter uma noção da expansão se definirmos a **distância comóvel** $\chi(r)$, que não se altera com o tempo, e obtendo a partir dela a **distância própria** $a(t)\chi(r)$. As coordenadas comóveis são usadas para localizar observadores fundamentais ^[16].

As informações a respeito da curvatura, dada por K , estão contidas em $d\sigma^2$, de forma que

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.2)$$

A constante K pode assumir os valores $+1, 0, -1$ para um Universo com geometria aberta, plana ou fechada, respectivamente. No caso de uma geometria fechada, o Universo pode ser considerado como a superfície de uma esfera imersa em um espaço Euclidiano quadridimensional. Nos outros dois casos, o Universo é infinito, sendo espacialmente plano para $K = 0$

²Abordaremos o *redshift* na Seção 2.3.

e uma sela quadridimensional para $K = -1$. Podemos inferir o valor de K através de dados observacionais do Universo. O intervalo $d\sigma^2$ está definido em coordenadas esféricas com (r, θ, ϕ) sendo coordenadas comóveis, e $\gamma_{11} = (1 - Kr^2)^{-1}$, $\gamma_{22} = r^2$ e $\gamma_{33} = r^2 \sin^2 \theta$.

Para um Universo dominado por matéria, na ausência da energia escura, o valor de K dita o seu destino. Para valores -1 ou 0 , o Universo se expande eternamente, como no caso do Universo Einstein-deSitter³. Para um valor $K = +1$, o Universo acaba com o *Big Crunch*, que é o oposto do *Big Bang* no sentido de ser a contração de toda a matéria do Universo até formar uma singularidade.

2.3 Redshift Cosmológico

Como as observações cosmológicas são obtidas via sinais de ondas eletromagnéticas, é importante entender como os fótons se propagam em um Universo homogêneo e isotrópico.

Considere a coordenada comóvel

$$\chi(r) = \begin{cases} \sin^{-1} r, & (K = +1) \\ r, & (K = 0) \\ \sinh^{-1} r, & (K = -1) \end{cases} \quad (2.3)$$

e o tempo conforme

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.4)$$

Podemos reescrever a métrica de uma forma mais simples, em termos de χ e τ :

$$d\sigma^2 = a^2(\tau) [d\tau^2 - d\chi^2 - f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.5)$$

onde

$$f_K(\chi) = r = \begin{cases} \sin \chi, & (K = +1) \\ \chi, & (K = 0) \\ \sinh \chi, & (K = -1) \end{cases}. \quad (2.6)$$

Como fótons percorrem uma geodésica nula com $ds = 0$, suas trajetórias podem ser descritas por

$$d\tau(t) = d\chi. \quad (2.7)$$

Portanto, um pulso emitido por uma fonte em $r = r_e$ no instante t_e , chegará no observador em $r = 0$ no instante t_0 , onde

$$d\tau(t_0) - d\tau(t_e) = d\chi(r_e). \quad (2.8)$$

³Universo dominado por matéria com $K = 0$.

Para um pulso sucessivo, temos

$$d\tau(t_0 + \delta t_0) - d\tau(t_e + \delta t_e) = d\chi(r_e). \quad (2.9)$$

Como $\delta t_e \ll t_e$ e $\delta t_0 \ll t_0$, podemos usar a definição de τ para escrever

$$\frac{d\tau(t_0)}{a(t_0)} \approx \frac{d\tau(t_e)}{a(t_e)}, \quad (2.10)$$

onde $a(t_0) = 1$. Definimos o *redshift* $z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$. Portanto, temos

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (2.11)$$

O *redshift* (desvio para o vermelho) cosmológico foi descoberto por Edwin Hubble ao analisar as linhas espectrais emitidas por estrelas de galáxias próximas que, em sua maioria, estão se afastando da nossa galáxia. Por conta da expansão do Universo, quanto mais longe um objeto, mais rapidamente ele se afasta do observador. Se considerarmos o modelo do *Big Bang*, quanto maior o *redshift*, mais jovem era o Universo no momento em que a radiação que estamos observando foi emitida. Isso é bastante útil, pois, ao determinar o *redshift*, sabemos quão longe no passado estamos olhando. Dessa forma é possível explorar a dinâmica do Universo em diferentes épocas, permitindo testar hipóteses sem a necessidade de realizar experimentos, já que isso seria impossível em um contexto cosmológico.

Para objetos próximos, como aqueles no Grupo Local⁴, observamos um *blueshift*, que indica que os objetos estão se aproximando, ao invés de se afastarem. Isto ocorre por conta dos efeitos gravitacionais, que atraem as galáxias próximas de forma que a expansão do Universo não predomina. Também podemos usar o *blueshift* para determinar a direção de rotação de sistemas binários no Universo.

2.4 As Equações de Friedmann

Para apresentar as **Equações de Friedmann**, é necessário introduzir as **Equações de Einstein** que relacionam a métrica com o fundo que preenche o Universo. Temos

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

e a equação que precisamos resolver para obter a dinâmica do Universo:

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi GT_{\nu}^{\mu}. \quad (2.13)$$

Nas equações acima, $G_{\mu\nu}$ é o **Tensor de Einstein**, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ é o **Tensor de Ricci**, \mathcal{R} é o **Escalar de Ricci** e Λ é a constante cosmológica. G é a constante gravitacional universal e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de

⁴É o grupo de galáxias à qual a Via Láctea pertence. Seu diâmetro é de aproximadamente 3 Mpc ($\approx 9 \times 10^{19}$ km).

energia-momento. O lado esquerdo da Eq. 2.12 caracteriza a geometria do espaço, enquanto que o lado direito descreve as energias e momentos dos componentes do Universo^[8].

A partir da métrica $g_{\mu\nu}$ podemos obter os símbolos de Christoffel^[17]:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}), \quad (2.14)$$

onde $g_{\alpha\nu}$ satisfaz a relação $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$. O tensor de Ricci é definido por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}. \quad (2.15)$$

A contração do tensor de Ricci nos dá o escalar de Ricci, ou a **curvatura escalar**

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Para a métrica FLRW, os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= a^2 H \gamma_{ij}, \\ \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{i0}^j = H \delta_j^i, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{Kr}{1-Kr^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-Kr^2), \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-Kr^2)\sin^2\theta, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot\theta, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde δ_j^i é o delta de Kronecker ($\delta_j^i = 1$ para $i = j$ e $\delta_j^i = 0$ para $i \neq j$). Definimos o **Parâmetro de Hubble**

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.18)$$

que é uma medida da taxa temporal de expansão, ou contração, do espaço.

A partir das Eqs. 2.15 e 2.16, podemos obter

$$\mathcal{R}_{00} = -3(H^2 + \dot{H}),$$

$$\mathcal{R}_{0i} = \mathcal{R}_{i0} = 0,$$

$$\mathcal{R}_{ij} = a^2(2H^2 + \dot{H} + 2K/a^2)\gamma_{ij}$$

$$\mathcal{R} = 6(2H^2 + \dot{H} + K/a^2).$$

(2.19)

Aplicando a relação $G^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}$ na Eq. 2.12, temos o tensor de Einstein

$$G^0_0 = -3(H^2 + K/a^2), \quad G^i_0 = G^0_i = 0, \quad G^i_j = -(3H^2 + 2\dot{H} + K/a^2)\delta^i_j. \quad (2.20)$$

Seguindo a restrição que, para um espaço-tempo na métrica de FLRW, o tensor de energia-momento da matéria de fundo tem a forma de um fluido perfeito

$$T^\mu_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta^\mu_\nu, \quad (2.21)$$

onde $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ é a velocidade do fluido em coordenadas comóveis. Os componentes (00) e (ij) de T^μ_ν são $T^0_0 = -\rho$ e $T^i_j = -p\delta^i_j$. Aqui, ρ é a densidade de energia e p é a pressão, ambos em função do tempo t . Desta forma, a partir dos componentes (00) e (ii) da Eq. 2.12, obtemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.22)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.23)$$

que são as equações de Friedmann.

Usamos o valor atual do Parâmetro de Hubble para definir

$$h = \frac{H_0}{100\text{km/s/Mpc}} \quad (2.24)$$

A Eq. 2.24 apresenta o parâmetro de Hubble atual adimensional, como é comumente usado na cosmologia observacional.

As equações de Friedmann são duas das mais importantes na cosmologia. Elas são responsáveis por descrever toda a sua dinâmica e evolução. Friedmann as derivou a partir das equações de Einstein, empregando toda a relatividade geral, mas esta não é a única forma de obtê-las. É possível chegar nos mesmos resultados a partir da gravidade Newtoniana, mas desta forma, perde-se o significado geométrico das equações, já que não existe a noção do espaço-tempo nesta abordagem.

2.5 Componentes do Universo

Nas equações de Friedmann temos termos de pressão e densidade de energia relacionados aos componentes do Universo, que podem ser: matéria, radiação, curvatura e energia escura; nesta seção iremos investigar as informações que podemos obter sobre eles.

A matéria é a componente do Universo mais fácil de identificar, já que nós e tudo o que vemos somos compostos de matéria. Classificamos a matéria em dois tipos: matéria bariônica, que é composta por prótons e nêutrons; e matéria não-bariônica, que não é composta por bárions,

como, por exemplo, neutrinos, elétrons livres, matéria escura, etc. A radiação, observada em forma de fótons, também é uma componente que faz parte do nosso dia-a-dia, já que é a partir dela que enxergamos a matéria bariônica. É comum se referir à radiação como matéria relativística. Já falamos previamente a respeito da curvatura, que é uma característica do espaço-tempo, e portanto é considerada uma componente do Universo. Em um contexto da Relatividade Geral, a geometria do Universo também participa do balanço energético do sistema. Por fim temos a energia escura que aparece na Eq. 2.12 representada por Λ . Antes de falar sobre esta componente, falarei sobre a história da constante cosmológica, que atualmente é a melhor candidata para a **energia escura** ^[8].

A constante cosmológica, que tem esse nome por sua densidade de energia ser considerada constante no tempo, foi primeiramente introduzida por Einstein, com o intuito de produzir um Universo estático como solução de suas equações de campo. Em 1929, Hubble combinou suas medidas de distância de galáxias com os resultados de Slipher do *redshift* associado a tais galáxias, e concluiu que o Universo estava em expansão ^[16]. Com isso, Einstein passou a considerar a constante o '*maior erro de sua vida*'⁵.

Em 1998, dois grupos independentes descobriram, a partir de dados de Supernovas do tipo Ia, que o Universo estava em expansão acelerada. Para explicar essa aceleração, precisamos de um mecanismo que viole a condição $\rho + 3p > 0$, portanto, a constante cosmológica foi novamente introduzida como um componente adicional de massa/energia, possuindo pressão negativa ^[18, 19].

A energia escura é assim chamada porque até então temos observado apenas seus efeitos, mas não sabemos nada sobre sua natureza. Observações indicam que ela deve ser homogênea sobre o espaço, de forma que afete sua geometria, mas que não siga a estrutura de matéria escura e bariônica. Em relação à expansão do Universo, a energia escura faz o papel da constante cosmológica. Explicarei mais adiante sobre seu parâmetro da equação de estado w , que impulsiona a expansão do Universo. A energia escura também pode ser associada a um campo escalar (com $-1 < w < -1/3$), conhecido como **quintessência**, que, diferente da constante cosmológica, é dinâmico, no sentido que sua densidade e equação de estado podem variar no tempo e no espaço ^[20, 21, 22]. Uma outra proposta para a energia escura é que $w < -1$, neste caso temos uma energia fantasma ^[23, 24]. Neste estudo consideraremos, além do modelo com constante cosmológica, um modelo que possui um decaimento na densidade de energia escura.

Do ponto de vista da Física de Partículas, a energia escura é associada à energia do vácuo. O problema da diferença entre o valor obtido para sua densidade de energia de forma teórica (ρ_{vac}) e o valor observado (ρ_{Λ}) é conhecido como o **Problema do Ajuste Fino**.

Agora que sabemos do que o Universo pode ser composto, podemos retornar à Eq. 2.22. Iremos multiplicá-la por a^2 , e derivá-la em relação ao tempo. Combinando o resultado com a Eq.

⁵De acordo com o Físico George Gamow.

2.23, temos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.25)$$

que é a **Equação de Continuidade** para uma cosmologia FLRW.

Podemos reescrever a Eq. 2.22 em termos dos parâmetros de densidade de matéria não relativística Ω_m , partículas relativísticas Ω_ρ , energia escura Ω_Λ e curvatura Ω_K . Onde

$$\sum_i \Omega_i = 1 \quad (2.26)$$

e

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \Omega_K = -\frac{K}{(aH)^2}. \quad (2.27)$$

Esta relação é válida para qualquer *redshift*.

2.6 Λ CDM

O modelo Λ CDM (Λ Matéria Escura Fria) tem conseguido fazer previsões robustas, além de ser bastante explicativo e observacionalmente bem aceito, permitindo, por exemplo, um entendimento sobre a formação de grandes estruturas, o estado inicial do Universo e a abundância cósmica de diferentes tipos de matéria e energia.

Como o nome sugere, o modelo Λ CDM consiste de dois componentes principais: a constante cosmológica, Λ , e a matéria escura fria, (*cold dark matter*). Já vimos o significado da constante cosmológica na seção anterior, portanto, falta falar sobre a motivação em investigar a matéria escura fria. A análise de dados observacionais indicam que, além de bárions, o Universo requer a existência de outro tipo de matéria: a matéria escura. Na astronomia observacional, a matéria escura pode ser qualquer tipo de componente massivo, mas escuro, no sentido de não ser detectável de forma direta pela tecnologia atual, como estrelas de nêutron, buracos negros e anãs marrons.

Uma forma de detectar esse tipo de matéria é a partir dos seus efeitos gravitacionais sobre outros corpos luminosos. No passado, por exemplo, quando nossos telescópios não eram tão eficientes, foi possível detectar Netuno a partir do seu efeito gravitacional sobre o planeta Urano. Atualmente, observações do movimento de estrelas dentro de galáxias e de galáxias em aglomerados, indicam que existe uma quantidade significativa de matéria escura no Universo. Já no **Modelo Padrão da Física de Partícula**⁶, existem partículas que interagem apenas a partir da força nuclear fraca e da força gravitacional. Um exemplo desse tipo de partículas, são as **Partículas Massivas que Interagem Fracamente** (WIMP), que são possíveis candidatas para a matéria escura [25, 16, 2].

A matéria escura fria é assim chamada porque, no momento em que se desacoplou de outros componentes do Universo, ela era não-relativística. Sua velocidade térmica era bem menor

⁶Não deve ser confundido com o Modelo Padrão da Cosmologia.

do que a velocidade da luz no momento de desacoplamento. No caso da matéria escura quente, ela era relativística no momento do desacoplamento. O atual modelo de formação de estrutura tem como base a aglomeração de matéria escura fria, pois a matéria bariônica por si só não seria capaz de produzir a configuração de formação de estruturas que hoje observamos.

Voltando à equação de continuidade, Eq. 2.25, podemos obter a densidade e pressão como funções do fator de escala, a . Se tomarmos a componente de matéria do fluido cósmico como um fluido perfeito, podemos escrever a equação do **parâmetro de estado** w geral

$$p_i = w\rho_i, \quad (2.28)$$

onde o índice $i = m$ para matéria ou $i = r$ para radiação. A matéria bariônica tem pressão nula, com $w = 0$, enquanto que a radiação $p_r = \rho_r/3$, ou seja, $w = 1/3$.

Avaliando a primeira lei da termodinâmica para um volume adiabático em expansão, em termos da densidade de energia temos

$$Vd\rho + (\rho + p)dV = 0. \quad (2.29)$$

Lembrando que $V \propto a^3$ e derivando em relação a a ,

$$\frac{d\rho}{da} + 3\left(\frac{\rho + p}{a}\right) = 0. \quad (2.30)$$

Substituindo a Eq. 2.28 na equação acima, obtemos

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (2.31)$$

que descreve a evolução de cada componente com o fator de escala quando conservada separadamente ^[16]. Voltaremos a falar sobre o significado desta relação em breve.

Se considerarmos que a energia escura tem a mesma equação de estado que o vácuo, então o valor $w = -1$ pode ser explicado pelo fato de que a pressão p_Λ tem que ser negativa para que o trabalho do termo $p dV$ na primeira lei da termodinâmica⁷ seja uma contribuição positiva para a energia interna total em um determinado volume comóvel em expansão. Uma análise termodinâmica ilustrando como a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico em expansão afeta cada um de seus componentes é apresentada na Tabela 2.1.

Como obtemos, na seção anterior, a densidade em termos do fator de escala, podemos reescrever os parâmetros de densidade de maneira mais conveniente, em termos de seus valores atuais, por exemplo

$$\Omega_m = \Omega_{m,0}a^{-3} = \Omega_{m,0}(1+z)^3, \quad (2.32)$$

e similarmente para os outros componentes. Finalmente, podemos escrever a Eq. 2.22 em função do *redshift*,

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_K(1+z)^2]^{1/2}. \quad (2.33)$$

⁷ $dU + p dV = 0$

Componente	w	ρ	p	T
Matéria	0	a^{-3}	a^{-5}	a^{-2}
Radiação	1/3	a^{-4}	a^{-4}	a^{-1}
Energia Escura	-1	a^0	a^0	

Tabela 2.1 – Termodinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico em expansão. Os resultados para matéria foram obtidos aproximando o Universo para um gás ideal adiabático, com $pV = Nk_B T$, e a partir da teoria cinética $k_B T \propto m\langle v^2 \rangle$. Para a radiação, consideramos o Universo como um fluido ultra relativístico.

Esta é a forma comumente utilizada em ajustes cosmológicos. Os parâmetros de densidade que aparecem nesta equação dependem do modelo e da observável utilizado.

Como dados de *Planck* 2015 [26] apontam para $|\Omega_K| < 0,005$, podemos considerar o Universo, se não plano, aproximadamente plano, e por isso neste trabalho adotamos apenas o caso da geometria plana.

Para estabelecer a importância de Ω_r , temos que analisar a época de igualdade entre as contribuições da matéria e da radiação. Podemos encontrar qual era o *redshift* no momento que isso aconteceu usando

$$1 + z_{rm} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}}. \quad (2.34)$$

Adotando os valores em [26]: $\Omega_{m,0} = 0,308$ e $\Omega_{r,0} = 9,23640 \times 10^{-5}$; temos $z_{rm} \approx 3335$. A Figura 2.1 apresenta o momento de igualdade matéria-radiação em termos do fator de escala. Como o *redshift* deste momento é bastante alto, e neste trabalho iremos utilizar *redshifts* relativamente baixos, podemos desconsiderar a contribuição de Ω_r em nossos ajustes cosmológicos.

A época dominada pela matéria foi seguida pela dominação de energia escura, que é a época em que vivemos, na qual tanto a energia escura como a matéria têm contribuições relevantes, e de mesma ordem. O que é conhecido como o **Problema da Coincidência** [8].

Aplicando os argumentos citados anteriormente, desconsideramos também a contribuição da radiação, Ω_r . Desta forma, temos

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}. \quad (2.35)$$

Este é o modelo usado na elaboração do programa em Fortran 90 contendo as rotinas que empregam os algoritmos de interesse nesta pesquisa, que serão discutidos nos próximos capítulos.

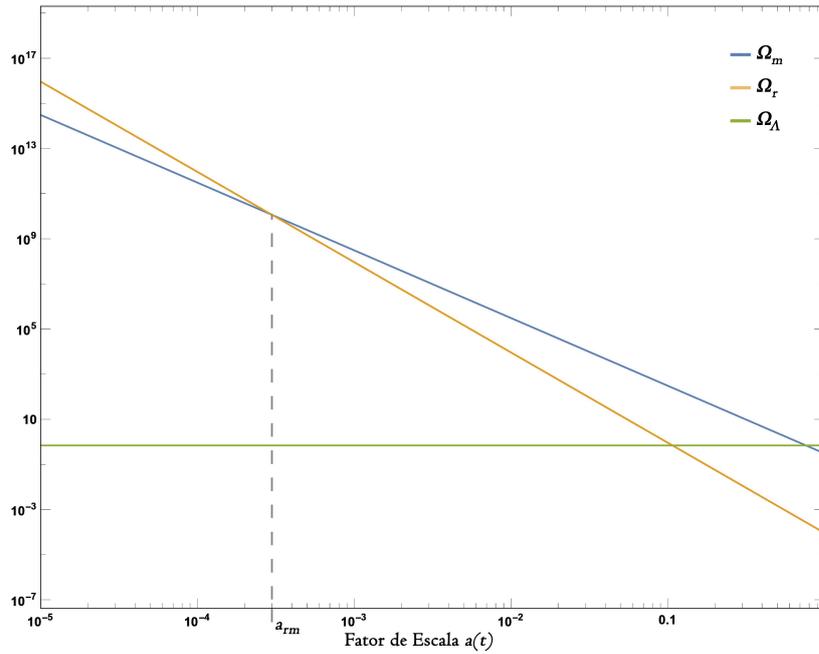


Figura 2.1 – Evolução do parâmetro de densidade dos diferentes componentes do Universo para uma geometria plana, no modelo $\Lambda(t)$ CDM. São apresentados os parâmetros da matéria Ω_m , da constante cosmológica Ω_Λ , e da radiação Ω_r . Os valores utilizados na confecção do gráfico estão de acordo com *Planck*^[26]. O ponto destacado é a época de igualdade radiação-matéria, a_{rm} .

2.7 $\Lambda(t)$ CDM

Alguns modelos têm sido estudados como alternativa para o modelo Λ CDM, por conta de sua incapacidade em explicar algumas questões-chaves sobre a dinâmica e a evolução do Universo. O Ajuste Fino é um destes problemas, que fala a respeito da grande incompatibilidade entre o valor observado hoje da constante cosmológica e o que é obtido através da Teoria Quântica de Campos. Nos primórdios da história do Universo, para que tenhamos a aceleração cósmica que observamos hoje, é necessário que, a partir da Eq. 2.22, o valor da constante cosmológica seja da ordem do quadrado do atual parâmetro de Hubble^[8]:

$$\rho_\Lambda \approx H_0^2 = (2,1332h \cdot 10^{-47} \text{ GeV})^2. \quad (2.36)$$

Uma das propostas para resolver este problema é considerar que a densidade de energia do vácuo é variável no tempo, e que tem caído desde o começo do Universo, para os valores atuais. Para a construção do modelo $\Lambda(t)$ CDM, foi adotada a lei para a variação da densidade de energia do vácuo proposta por Schützhold, que se baseia nas estimativas da teoria quântica de campos para um fundo curvo e em expansão^[27, 28]. Desta forma, temos que

$$\rho_\Lambda \approx m^3 H, \quad (2.37)$$

onde H é o parâmetro de Hubble e $m \approx 150 \text{ MeV}$ é a escala de energia da transição de fase quiral da cromodinâmica quântica. Se adotarmos $H_0 \approx 70(\text{km/s})\text{Mpc}$, podemos ver que o valor

de ρ_Λ se aproxima do que é medido hoje.

De agora em diante, passaremos a adotar $8\pi G = c = \hbar = 1$. E permanecemos com a equação de estado para o vácuo

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (2.38)$$

onde $\rho_\Lambda = \Lambda = \sigma H$ é a densidade de energia, e p_Λ é a pressão. Temos que σ é uma constante positiva da ordem de m^3 . Λ é uma função invariante das coordenadas comóveis, isto é, em um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, a função depende apenas do tempo.

Considere a equação de continuidade (2.25),

$$\frac{d}{dt}(\Lambda + \rho_i) + 3H(\Lambda + \rho_i + p_\Lambda + p_i) = 0. \quad (2.39)$$

Utilizando a Eq. 2.38 e lembrando que, para modelo $\Lambda(t)$ CDM, $\dot{\Lambda} \neq 0$ temos

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = -\dot{\Lambda}. \quad (2.40)$$

Para uma época dominada por matéria ($i = m$), esse resultado indica uma produção de matéria a partir da evolução temporal da energia escura. Uma análise detalhada deste modelo pode ser obtida em [9] e [29].

A partir da equação de estado (2.28), do ansatz $\Lambda = \sigma H$ e da equação de Friedmann (2.22) para um modelo plano,

$$3H^2 = \rho_m + \Lambda, \quad (2.41)$$

podemos reescrever a Eq. 2.40:

$$2\dot{H} + 3\gamma H^2 - \sigma\gamma H = 0, \quad (2.42)$$

onde $\gamma = w + 1$. A resolução desta equação nos dá a evolução temporal do parâmetro de Hubble,

$$H = \frac{\sigma/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}. \quad (2.43)$$

Ao combinarmos a equação acima com a equação de Friedmann (2.41), obtemos

$$\rho_i = \frac{\sigma^2}{12} \sinh^{-2}(-\sigma\gamma t/4). \quad (2.44)$$

Substituindo a Eq. 2.43 no ansatz,

$$\Lambda = \frac{\sigma^2/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}, \quad (2.45)$$

que descreve a evolução da densidade de energia escura no tempo.

Integramos a equação do parâmetro de Hubble (2.43), para obter a função do fator de escala,

$$a = C_i [\exp(-\sigma\gamma t/2) - 1]^{2/3\gamma}. \quad (2.46)$$

Para facilitar nosso trabalho, podemos obter a constante σ em uma forma mais simples. Partimos da equação para o parâmetro de densidade da energia escura,

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (2.47)$$

Como esta relação é válida para qualquer *redshift*,

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} = \frac{\sigma}{3H_0}. \quad (2.48)$$

Portanto temos

$$\sigma = 3H_0\Omega_{\Lambda,0}, \quad (2.49)$$

em termos de valores dos parâmetros atuais.

2.7.1 Época dominada por matéria

Como o valor de z_{rm} é bastante alto, e trabalharemos apenas com baixos *redshifts*, é seguro assumir que nossos dados observacionais são de um Universo dominado por matéria e energia escura. Para um Universo $\Lambda(t)$ CDM plano, dominado por matéria ($\gamma = 1$), temos o fator de escala,

$$a = C_m [\exp(\sigma t/2) - 1]^{2/3}, \quad (2.50)$$

onde C_m é uma constante de integração. A partir da equação acima, podemos obter

$$\rho_m = \frac{\sigma^2}{3} \left[\left(\frac{C_m}{a} \right)^3 + \left(\frac{C_m}{a} \right)^{3/2} \right] \quad (2.51)$$

e

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C_m}{a} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.52)$$

Na Eq. 2.51, o primeiro termo corresponde à matéria bariônica e não bariônica, como no caso do modelo Λ CDM, já o segundo termo aparece por conta da produção de matéria escura devido ao decaimento da densidade do vácuo, como é previsto pela equação de continuidade (2.40). Na análise deste modelo, é feita a suposição de que o decaimento da energia escura produz apenas matéria escura.

A partir da definição do *redshift*, podemos escrever

$$(z + 1)^{3/2} = \frac{e^{\sigma t_0/2} - 1}{e^{\sigma t/2} - 1}. \quad (2.53)$$

Ao substituirmos $\gamma = 1$ na Eq. 2.43 temos

$$e^{\sigma t/2} = \frac{3H}{3H - \sigma}, \quad (2.54)$$

que pode ser substituído na Eq. 2.53, com o auxílio da Eq. 2.49 para obter

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^{3/2} + \Omega_{\Lambda,0}]. \quad (2.55)$$

Esta é a equação que descreve o modelo $\Lambda(t)$ CDM para uma época com contribuições relevantes de matéria e de energia escura, e é ela que utilizaremos em nossas rotinas para o ajuste de parâmetros.

2.8 Distâncias Cosmológicas

Como vimos anteriormente, podemos usar distâncias cosmológicas para determinar $H(z)$, e, desta forma, restringir parâmetros de interesse. Visto que o Universo está em expansão, não temos como medir essas distâncias de forma direta, devemos, portanto, definir distâncias a partir de características observáveis das fontes.

A seguir apresentamos as distâncias usadas neste trabalho para a restrição de parâmetros cosmológicos.

2.8.1 Distância Própria

Definimos o **tempo próprio** como sendo o tempo medido por um relógio em repouso em relação a um observador fundamental, e, seguindo o princípio cosmológico, este será o tempo cósmico t , para todos os observadores fundamentais. Agora considere dois observadores com coordenadas $(0, \theta, \phi)$ e (r, θ, ϕ) , a **distância própria** entre eles pode ser escrita como

$$d_p = a(t) \int_r^0 \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = a(t)\chi(r), \quad (2.56)$$

onde $\chi(r)$ depende do valor de K , como descrito na Eq. 2.3. A distância própria é definida como sendo a geodésica espacial entre dois pontos no Universo quando o fator de escala tem valor fixo $a(t)$.

Na ausência de uma velocidade peculiar ⁸, a velocidade relativa de um objeto $v = \dot{d}$ é igual a $\dot{a}(t)x = Hd$, onde $a(t)$ é o fator de escala, x é a distância comóvel, H é o parâmetro de Hubble, e $d = ax$ é a distância entre duas galáxias. Desta forma, a velocidade deve aumentar linearmente com a distância, para baixos *redshifts*, com uma inclinação dada por H .

2.8.2 Distância Luminosidade

A distância própria $a(t)\chi(r)$ e a distância comóvel $\chi(r)$ de um objeto distante não podem ser obtidas diretamente, por conta da evolução da dinâmica do Universo durante o tempo que a luz leva para chegar ao observador. Precisamos encontrar a distância usando outros métodos que podem ser obtidos a partir das observações. Um exemplo é a **Distância Paralaxe**, que utiliza a triangulação para obter, com precisão, distâncias de até 100 parsec.

⁸A velocidade peculiar descreve o movimento local de um objeto, extraída a *velocidade de recessão* proveniente do fluxo de Hubble [8].

Podemos definir a distância luminosidade em um Universo plano, no espaço Euclidiano como

$$d_L^2 = \frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}}, \quad (2.57)$$

onde L_s é a luminosidade absoluta da fonte e \mathcal{F} é o fluxo observado. Podemos observar que a luminosidade absoluta não é a mesma que a luminosidade L_0 do fluxo observado, por conta da expansão do Universo. Essa é uma consideração que também devemos fazer em relação ao fluxo, que é dado por

$$\mathcal{F} = \frac{L_0}{4\pi(a_0 f_K(\chi))^2}, \quad (2.58)$$

onde o denominador é a área de uma esfera em $z = 0$. Substituindo a Eq. 2.58 na Eq. 2.57 temos,

$$d_L^2 = (a_0 f_K(\chi))^2 \frac{L_s}{L_0}. \quad (2.59)$$

Para obter o resultado da razão, utilizamos a definição de luminosidade $L = \Delta E / \Delta t$,

$$\frac{L_s}{L_0} = \frac{\Delta E_s}{\Delta t_s} \frac{\Delta t_0}{\Delta E_0}. \quad (2.60)$$

Como a energia do fóton é inversamente proporcional ao seu comprimento de onda, temos que

$$\Delta E_s / \Delta E_0 = \lambda_0 / \lambda_s = 1 + z, \quad (2.61)$$

que está em concordância com a Eq. 2.9. Similarmente, se observarmos a razão $\Delta t_0 / \Delta t_s$, podemos usar $c = \lambda / \Delta t$ para reescrevê-la,

$$\Delta t_0 / \Delta t_s = \lambda_0 / \lambda_s = 1 + z. \quad (2.62)$$

Desta forma, temos que a distância luminosidade se reduz a

$$d_L = (a_0 f_K(\chi))(1 + z), \quad (2.63)$$

onde $f_K(\chi)$ depende da geometria do espaço, como descrito pela Eq. 2.6.

Como estamos falando de sinais de luz, voltaremos à geodésica nula dos fótons. Combinando as Eq. 2.4 e 2.7 podemos escrevê-la como

$$\chi = \int_{t_{\text{emi}}}^{t_{\text{obs}}} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.64)$$

Podemos fazer a mudança de variável para que a integração seja feita no fator de escala,

$$\chi = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')}. \quad (2.65)$$

Fazendo $a \rightarrow z$,

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.66)$$

Finalmente, para um Universo plano ($K = 0$) temos

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')H_0}, \quad (2.67)$$

onde $E(z) = H(z)/H_0$.

Esta equação é importante, pois nos permite encontrar os valores dos parâmetros cosmológicos que melhor se ajustam às observações, como veremos na próxima seção.

2.8.3 Distância Diâmetro-Angular

Uma outra forma de medida adotada é a **distância diâmetro-angular** d_A , que é muito usada quando tratamos de objetos extensos como galáxias e aglomerados de galáxias, apesar da dificuldade de se definir as fronteiras destes elementos. Um exemplo de aplicação deste tipo de medida é nas observações de anisotropias da CMB.

Podemos usar a relação de Etherington para conectar a distância diâmetro-angular com a distância luminosidade, onde

$$d_A = \frac{d_L}{(1 + z)^2}. \quad (2.68)$$

Esta relação é válida para qualquer métrica, com tanto que o fluxo seja conservado ^[30].

Neste trabalho, usaremos a distância diâmetro-angular comóvel:

$$d_M = (1 + z)d_A, \quad (2.69)$$

ou, para um Universo plano ($K = 0$),

$$d_M = \int_0^z \frac{dz'}{E(z')H_0}. \quad (2.70)$$

Veremos, no próximo capítulo, como a distância diâmetro-angular pode ser usada com dados da **Oscilação Acústica Bariônica** para restringir parâmetros cosmológicos.

3 AS OBSERVÁVEIS

Yes, we too are stardust.

Jostein Gaarder, *Sophie's World*

Neste trabalho, consideramos apenas modelos cosmológicos descritos pela métrica FLRW, ou seja, desconsideramos qualquer tipo de perturbação local da métrica, pois pretendemos analisar apenas as características do Universo em grande escala. Estes modelos são capazes de explicar aspectos importantes do Universo observável, como, por exemplo, sua expansão desde um *Big Bang* quente, o *redshift* e até mesmo previsões sobre a abundância de elementos.

Mesmo com suas limitações, a família de modelos FLRW é a melhor candidata para descrever as observações em nível não perturbativo. Estes modelos também funcionam como ótimas ferramentas para estudar a natureza e o efeito da evolução cósmica. Portanto, podemos chamá-los de **Modelos Padrão da Cosmologia** ^[31]. Adotaremos os modelos Λ CDM e o $\Lambda(t)$ CDM para confrontar dados observacionais e, desta forma, obter valores de melhor ajuste para parâmetros cosmológicos de nosso interesse.

As melhores observáveis são aqueles das quais podemos separar a evolução do *redshift* cosmológico por conta da expansão do Universo, de sua evolução intrínseca. Portanto, procuramos sempre observáveis que podem ser padronizáveis, como é o caso das **Velas Padrão** (Supernovas do tipo Ia) e **Régua Padrão** (Oscilação Acústica Bariônica). A análise conjunta de dados tem sido cada vez mais importante, pois desta forma temos mais controle sobre os erros sistemáticos de cada observável, e conseguimos assim erros menores para os parâmetros cosmológicos encontrados, além de tornar possível a verificação da concordância de resultados oriundos de observações independentes. No caso de ortogonalidade das curvas de nível, fazemos uso disso para quebrar degenerescências no espaço de parâmetros, ou seja, para obter limites mais restritos para os mesmos.

3.1 Parâmetro de Hubble

Um dos maiores problemas de medidas cosmológicas obtidas através de Velas e Régua Padrão é que não é possível restringir, de forma direta, o valor do parâmetro de Hubble atual. Para que isso seja possível, precisamos determinar a taxa de expansão do Universo, de forma independente, e então usar este valor para testar modelos cosmológicos.

Uma forma de obter essa taxa é usando o **Método de Idade Diferencial** (*differential age method*) ^[32, 33]. Este método usa uma espécie de relógio para medir a variação da idade do Universo com o *redshift*. Na verdade, medimos a idade relativa de galáxias, Δt separadas por

um *redshift* Δz . Desta forma, podemos obter a derivada dz/dt a partir da razão $\Delta z/\Delta t$. Usamos este valor para obter

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (3.1)$$

Este tipo de teste é diferente dos outros aqui estudados, por se tratar de um estudo do tempo cósmico, ao invés da propagação da luz. A dificuldade deste método é primeiramente em obter uma boa população de galáxias, a partir das quais podemos seguir a evolução da idade do Universo de forma homogênea; e na confiança que devemos ter nos modelos de formação de galáxia, pois cada modelo pode dar uma idade diferente para uma mesma fonte. A Tabela 3.1 detalha a origem de cada um dos valores utilizados para o teste do parâmetro de Hubble ^[34].

Uma vez que temos os valores observacionais de $H(z)$, ou seja, $H_{\text{obs}}(z_i)$, usamos o **Teste** χ^2 para encontrar os valores para os parâmetros cosmológicos Θ que melhor reproduzem os dados do modelo $H_{\text{teo}}(z_i, \Theta)$ ¹. Construimos uma função densidade de probabilidade dos parâmetros da forma $e^{-\chi^2/2}$.

$$\chi_H^2 = \sum_i \frac{[H_{\text{obs}}(z_i) - H_{\text{teo}}(z_i, \Theta)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.2)$$

3.2 Oscilação Acústica Bariônica

A **oscilação acústica bariônica** (BAO) tem sido outra observação muito usada para medir distâncias no Universo, e, portanto, pode ser usada como um teste cosmológico para restrição de parâmetros de um modelo.

A vantagem que BAO apresenta em relação a outros tipos de observações (como SNe Ia e outros que envolvem fenômenos complexos e pouco entendidos) é que os valores de d_A e $H(z)$ são obtidos de maneira quase que completamente linear.

3.2.1 Régua Padrão Estatística

A **Régua Padrão Estatística** (SSR) se baseia na ideia de que aglomerados de galáxias e outras observáveis podem ter uma escala preferencial, na qual, quando observada com diferentes *redshifts*, pode ser usada para restringir a distância diâmetro angular. Esse tipo de abordagem foi primeiramente sugerido em 1987 ^[40], mas só foi utilizado em conjunto com dados de BAO em 2003, com o trabalho de Eisenstein ^[41], que utilizou dados conjuntos do *2dF Galaxy Redshift Survey* e do *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS).

Para entender a lógica de SSR, considere uma grade tridimensional, com galáxias posicionadas em suas interseções. Neste exemplo, fica fácil observar uma escala preferencial, mesmo que nossa grade esteja em expansão acelerada. Se mais galáxias forem adicionadas

¹Será apresentado na Seção 4.1.2

z	H	σH	Referência
0,09	69	12	[35]
0,17	83	8	[36]
0,1791	75	4	[37]
0,1993	75	5	[37]
0,27	77	14	[36]
0,3519	83	14	[37]
0,3802	83	13,5	[34]
0,4	95	17	[36]
0,4004	77	10,2	[34]
0,4247	87,1	11,2	[34]
0,4497	92,8	12,9	[34]
0,4783	80,9	9	[34]
0,48	97	62	[38]
0,5929	104	13	[37]
0,6797	92	8	[37]
0,781	105	12	[37]
0,8754	125	17	[37]
0,88	90	40	[38]
0,9	117	23	[36]
1,037	154	20	[37]
1,3	168	17	[36]
1,363	160	33,6	[39]
1,43	177	18	[36]
1,53	140	14	[36]
1,75	202	40	[36]
1,965	186,5	50,4	[39]

Tabela 3.1 – Valores publicados de $H(z)$ obtidos a partir do método de idade diferencial.

de maneira aleatória, ainda seria possível obter essa escala, de forma estatística, usando, por exemplo, a transformada de Fourier.

Considere agora essa mesma grade, mas em vez de termos galáxias em suas interseções, colocamos a primeira em uma posição aleatória. Com uma probabilidade p , colocamos uma outra galáxia, a uma distância L da primeira. Usando esta nova galáxia como ponto de partida, repetimos o processo para uma terceira galáxia, e assim por diante. Desta forma, não temos

mais uma distribuição regular e fácil de ser observada. Teremos então uma SSR com uma escala preferencial L na distribuição de galáxias.

Como a SSR adquirida através de BAO é um fenômeno físico linear, podemos transformá-lo em um teste absoluto, ou calibrado, de Alcock-Paczynski, que impõe uma restrição para o valor do produto entre o tamanho angular e o parâmetro de Hubble, $d_M(z) \times H(z)$, já que a escala preferencial de BAO é estabelecida pelo horizonte sonoro durante o desacoplamento². A partir disso, podemos restringir os parâmetros cosmológicos [42].

3.2.2 A Física de BAO

A origem de BAO vem da época em que o Universo era composto por um fluido de fótons e bárions que permaneciam acoplados e em equilíbrio térmico por conta do espalhamento de Thomson. As oscilações do fluido fóton-bárionico ocorrem por conta das interações entre as forças da pressão da radiação e da gravidade. Se considerarmos uma única perturbação de densidade esférica neste fluido, temos que ela irá se propagar com uma velocidade $c_s = c/\sqrt{3[1 + (3\Omega_{b,0}/4\Omega_{\gamma,0})(1+z)^{-1}]}$, que é a velocidade sonora, com $\Omega_{b,0}$ e $\Omega_{\gamma,0}$ representando os valores dos parâmetros de densidade atuais de bárions e fótons, respectivamente. Durante o período de recombinação, o Universo se torna neutro, e a pressão sob os bárions desaparece. A configuração bariônica congela enquanto os fótons passam a se propagar livremente, formando o que chamamos de Radiação Cósmica de Fundo. Como os bárions e a matéria escura interagem a partir da gravidade, a matéria bariônica tende a se acumular nessa escala. Isso cria um aumento na probabilidade de que uma galáxia se forme em torno dos resquícios de alta densidade da onda bariônica congelada [43, 44].

No caso de uma galáxia se formar no centro de nossa perturbação inicial, teríamos um pico na função de correlação do raio r_s da casca esférica, o que caracteriza o aumento na probabilidade de encontrar duas galáxias separadas por essa mesma distância. Essa escala é a máxima distância que a onda sonora consegue viajar no fluido fóton-bárionico desde a formação deste fluido até o horizonte acústico, na qual deveríamos observar hoje um excesso de matéria. Podemos obter o horizonte acústico a partir de

$$r_s(d) = \int_0^{t_d} \frac{c_s(t)}{a(t)} dt = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z')}{E(z')} dz', \quad (3.3)$$

onde t_d e z_d correspondem, respectivamente, ao tempo e *redshift* na época de arraste (*drag*), isto é, no momento em que os bárions se libertam do arraste de Compton dos fótons [45]. Esse *redshift* é dado por

$$z_d = \frac{1291(\Omega_m h^2)^{0,251}}{(\Omega_m h^2)^{0,828} + 0,659} [1 + b_1(\Omega_m h^2)^{b_2}] \quad (3.4)$$

²A distância comóvel que uma onda sonora poderia ter se deslocado no fluido fóton-bárionico, até o tempo de desacoplamento

onde

$$b_1 = 0,313(\Omega_m h^2)^{-0,419}[1 + 0,607(\Omega_m h^2)^{0,674}] \quad (3.5)$$

$$b_2 = 0,238(\Omega_m h^2)^{0,233}.$$

A escala acústica comóvel é de aproximadamente 150 Mpc, por conta da velocidade relativística das ondas sonoras primordiais, que, na época dominada por radiação, atingiam máximos de $\sim c/\sqrt{3}$. O tamanho da escala é responsável pelo seu aspecto quase que linear, pois dessa forma, a BAO não é afetada pela não-linearidade da formação de estruturas no Universo de baixo *redshift*. Por conta dessa larga escala, precisamos mapear grandes volumes do Universo para conseguirmos detectar a BAO e medir distâncias de maneira precisa. Um dos métodos mais usados para fazer essas medições é a partir do mapeamento 3D de galáxias.

Quando analisamos a Eq. 3.4, vemos que existe uma dependência em Ω_m , portanto nossa relação distância-*redshift* também depende deste parâmetro, e não apenas do *redshift*, como é comum para outras observáveis. O que acontece, na prática, é que as variações são pequenas o suficiente, e os *redshifts* tão próximos, que podemos considerar essa variação como sendo apenas uma dilatação na escala. Isso é uma aproximação boa, pois para baixos *redshifts*, as distâncias são inversamente proporcionais à constante de Hubble ^[46].

Uma das considerações que precisamos fazer, para BAO, é tratar a dilatação na linha-de-visão de maneira equivalente à dilatação transversal. Nós dizemos que a escala da dilatação é a raiz cúbica do produto da dilatação radial, multiplicada pelo quadrado da dilatação transversal. Ou seja,

$$D_V = \frac{1}{H_0} \left\{ \frac{cz}{E(z)} \left[\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]^2 \right\}^{1/3}. \quad (3.6)$$

Os dados obtidos de BAO geralmente são uma combinação da escala angular e da separação do *redshift*, que é obtida através de uma média esférica da escala de medida de BAO, dada pela razão:

$$d_z = \frac{D_V}{r_s}. \quad (3.7)$$

Podemos, portanto, usar este valor para construir a função χ^2 ,

$$\chi_{BAO}^2 = \sum (\mathbf{x} - \mathbf{d})^T (\mathbf{C}_{BAO}^{-1}) (\mathbf{x} - \mathbf{d}), \quad (3.8)$$

onde

$$(\mathbf{x}_i - \mathbf{d}_i) = D_v(z_i)/r_s - d_{z,i}. \quad (3.9)$$

\mathbf{C}_{BAO}^{-1} é a inversa da matriz de covariância. Nesta análise, consideramos r_s um parâmetro incômodo livre sobre o qual marginalizaremos. Trabalhos atuais apontam para medidas de r_s fracamente dependentes de modelos, de forma que usaremos um *prior* Gaussiano para este parâmetro. Os dados observacionais utilizados neste trabalho podem ser conferidos na Tabela 3.2

z	D_V/r_s							
0,106	$2,976 \pm 0,133$	1	0	0	0	0	0	0
0,32	$8,467 \pm 0,167$	0	1	0	0	0	0	0
0,57	$13,77 \pm 0,134$	0	0	1	0	0	0	0
0,44	$11,551 \pm 0,559$	0	0	0	1	0,54	$-9,71 \times 10^{-9}$	
0,6	$14,944 \pm 0,677$	0	0	0	0,54	1	0,36	
0,73	$16,932 \pm 0,580$	0	0	0	$-9,71 \times 10^{-9}$	0,36	1	

Tabela 3.2 – A primeira coluna nos dá o *redshift* no qual D_V/r_s foi medido. A segunda coluna contém os valores médios e o desvio padrão de D_V/r_s . A partir da terceira coluna temos os elementos da matriz de covariância normalizada, C_{BAO} .

3.3 Fração de Massa de Gás

A motivação para estudar a fração de massa de gás, f_{gas} vem da hipótese de que um aglomerado de galáxias é uma boa representação da quantidade de matéria do Universo como um todo ^[47]. A utilização da fração de massa de gás para restrição de parâmetros cosmológicos veio de resultados de simulações hidrodinâmicas não-radioativas, que mostram que a razão entre a massa do gás presente no aglomerado, e a massa total do mesmo, $f_{\text{gas}} = M_{\text{gas}}/M_{\text{tot}}$, nos maiores aglomerados dinamicamente relaxados ($kT > 5$ keV), permanece aproximadamente constante com o *redshift* ^[48].

O material bariônico de um aglomerado é dominado pelo gás intra-aglomerado que emite raios X predominantemente via *bremsstrahlung* térmico ^[49]. Como a emissividade deste gás é proporcional à sua densidade, podemos obter o perfil de massa do gás no aglomerado de forma precisa. Já a sua massa total só pode ser obtida através de hipóteses a respeito de seu equilíbrio hidrostático, portanto podemos usar apenas aglomerados dinamicamente relaxados. Também é importante que os aglomerados estudados sejam massivos o suficiente de forma que fenômenos astrofísicos, como a resposta de supernovas e o resfriamento, não os afetem de forma relevante.

Atualmente, existem três formas de obter informações de aglomerados de galáxias: a partir de análises óticas da sua dinâmica; através de observações de raio X; e do lenteamento gravitacional. Para os raios X, admitimos que o gás, que emite a radiação, está em equilíbrio eletrostático ao permear o aglomerado. A distribuição de massa total pode ser calculada se soubermos a temperatura e a densidade da distribuição radial do gás. No caso do lenteamento gravitacional, é possível obter a massa sem a necessidade de hipóteses sobre o estado dinâmico da matéria, como fazemos na análise ótica.

Fica claro que a melhor forma de obter dados de aglomerados é combinando todos os três métodos supracitados, lembrando que devemos fazer algumas considerações para aglomerados

com e sem a corrente de resfriamento (CF e NCF, respectivamente ³) na análise conjunta de lenteamento e raios X ^[50]. No caso de aglomerados CF, conseguimos obter bons resultados para a massa ao levarmos em conta os efeitos da corrente de resfriamento. Já com aglomerados NCF, a medida da massa obtida através de lenteamento gravitacional excede o valor de raios X por um fator de 2 – 4. Acredita-se que isso é causado pela diferença entre o estado dinâmico dos dois tipos de aglomerados. Enquanto que imagens óticas e de raio X mostram aglomerados CF tendo uma forma regular e estados dinamicamente relaxados, os aglomerados NCF são vistos em constante estado de convergência, e portanto apresentam o raio de seu núcleo inflado (como é esperado em simulações numéricas) ^[51, 52]. Em escalas mais largas ($r \gtrsim 0,5$ Mpc), essa discordância já não é mais observada, e os resultados de ambos os tipos de observações entram em concordância.

Para este trabalho, usamos os dados apresentados em Allen et al. ^[53].

3.3.0.1 Restrição de Parâmetros Cosmológicos

Considere um aglomerado com *redshift* z , até um raio angular característico θ_c , com fluxo de raio X, $S_X = L_X(1+z)^{-4}/(4\pi d_M^2) \propto M_{\text{gas}}^2 \theta_c^{-3} d_M^{-5}$, com luminosidade $L_X \approx n_{\text{gas}}^2 \Lambda(T_{\text{gas}}) \times \theta_c^3 d_M^3$, onde $\Lambda(T_{\text{gas}})$ é a função de resfriamento do plasma que emite o raio X, a qual depende apenas de sua temperatura ^[54]. Podemos calcular a fração de massa de gás deste aglomerado:

$$f_{\text{gas}} = \frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{tot}}} \propto \frac{S_X^{1/2} \theta_c^{3/2} d_M^{5/2}}{\theta_c d_M} \propto d_M(z, \Theta)^{3/2}, \quad (3.10)$$

onde os parâmetros do modelo são representados por Θ .

Como os valores de M_{gas} e M_{tot} dependem fortemente do modelo adotado, precisamos fazer uma recalibração dos dados para cada modelo estudado. Uma forma de fazer isso, é usando a modelagem descrita em [55]:

$$f_{\text{gas}} = \frac{b\Omega_{b,0}}{(1,18 - 0,012T_{\text{gas}})\Omega_{m,0}} \left[\frac{d_m(z; 0, 3; 0, 7)}{d_m(z, \Theta)} \right]^{3/2}, \quad (3.11)$$

onde T_{gas} é a temperatura do gás obtida através das observações, Ω_b é o parâmetro de densidade de bárions, e b é o parâmetro de depleção⁴, que será abordado mais adiante.

3.3.0.2 Parâmetro de Depleção

O parâmetro de depleção nos dá a quantidade de bárions cósmicos que são termalizados⁵ dentro do potencial do aglomerado, ou seja,

$$b = \frac{f_b}{\Omega_b/\Omega_m}. \quad (3.12)$$

³Do inglês, *cooling flow* e *non-cooling flow*

⁴Do inglês: *depletion parameter*

⁵Processo pelo qual corpos atingem o equilíbrio térmico por meio de uma interação mútua.

Este valor tende a ser menor que 1 porque alguns dos bárions aquecidos pela acreção, dentro do halo de matéria escura não relaxam como a maioria. Este parâmetro só pode ser obtido a partir de simulações numéricas, onde conhecemos a quantidade inicial de bárions cósmicos, e podemos mapear o número total que acretam dentro do halo ^[55]. Para chegar a este valor, foi feita uma análise da distribuição obtida para valores de $b(< r_{500})$, a partir de simulações usando o código GADGET-2 do Tree+SPH. O valor de b apresentado é relacionado aos sistemas mais massivos da simulação, que sofrem apenas aquecimento gravitacional; isso torna o valor apropriado para os objetos estudados neste trabalho, que são de alta temperatura e portanto não são muito afetados por processos radiativos como esfriamento, formação de estrelas e resposta estelar.

3.3.1 Variações do cálculo de f_{gas}

Uma outra modelagem para a obtenção de f_{gas} apresentada em [53] leva em consideração alguns outros parâmetros livres. Como um dos focos deste trabalho é testar modelos cosmológicos diferentes, a comparação entre modelagens de f_{gas} é indispensável. Para esta abordagem temos

$$f_{\text{gas}} = \frac{KA\gamma b(z)}{1 + s(z)} \left(\frac{\Omega_{b,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \left[\frac{d_m(z; 0, 3; 0, 7)}{d_m(z, \Theta)} \right]^{3/2}. \quad (3.13)$$

Como a equação acima calcula o valor de f_{gas} para um raio medido com a cosmologia do modelo padrão, introduzimos o fator

$$A = \left[\frac{H(z; 0, 3; 0, 7) d_m(z; 0, 3; 0, 7)}{H(z, \Theta) d_m(z, \Theta)} \right]^\eta, \quad (3.14)$$

que descreve a mudança de um ângulo subtendido por um raio r_{2500} quando a cosmologia varia.

A variável η é a inclinação dos dados de $f_{\text{gas}}(r/r_{2500})$ na região de r_{2500} , medido para uma cosmologia padrão. Este parâmetro é importante pois auxilia na restrição da energia escura.

O parâmetro γ é responsável pela modelagem da pressão de suporte não-térmica em aglomerados. Para este pacote de dados, este valor é ~ 1 ^[56, 57]. A consideração feita para a modelagem da fração de massa bariônica em estrelas é representada por $s(z) = s_0(1 + \alpha_s z)$, onde $s_0 = f_{\text{estrela}}/f_{\text{gas}}$, medido para cada aglomerado dentro de r_{2500} . Como não temos este valor para os aglomerados estudados, assumimos que seja próximo do raio virial, ou seja, $s = 0,16h_{70}^{0,5}$. O parâmetro de depleção, $b(z) = b_0(1 + \alpha_b z)$ é a razão pela qual a fração de bárions medida em r_{2500} é depletada em relação à média universal. Este parâmetro, como no caso de $s(z)$, inclui uma evolução com o *redshift* compatível com os resultados de simulações recentes.

O parâmetro K engloba a constante de calibração usada para parametrizar a incerteza na calibração de instrumentos e na modelagem de raio X. Similarmente ao parâmetro γ , seu valor também é ~ 1 . Os *priors* usados tanto nestes parâmetros como em outros no texto estão apresentados na Tabela 5.1.

Para este trabalho, analisamos o que acontece com f_{gas} quando introduzimos o fator A, e na sua ausência. Também simplificamos a Eq. 3.13,

$$f_{\text{gas}} = CA \left(\frac{\Omega_b}{\Omega_m} \right) \left[\frac{d_m(z; 0, 3; 0, 7)}{d_m(z, \Theta)} \right]^{3/2}, \quad (3.15)$$

onde

$$C = \frac{K\gamma b(z)}{1 + s(z)}. \quad (3.16)$$

Fazemos um estudo dos três métodos citados, e apresentamos os resultados de melhor ajuste na Tabela 5.3.

3.4 Supernova

Supernova é a explosão de uma estrela, que pode ocorrer ao final de sua vida. Ela pode ser classificada em dois grupos, a depender da presença de hidrogênio em suas linhas espectrais: Tipo I não contém hidrogênio; Tipo II contém hidrogênio. A análise de linhas espectrais das Supernovas do Tipo I, possibilita a divisão delas em 3 grupos: a) seu espectro é dominado por linhas de elementos massivos, como cálcio, enxofre, silício e ferro, mas não contém hélio; b) possui abundância de hélio; c) não possui hélio.

Supernovas dos tipo Ib, Ic e II ocorrem em estrelas massivas ($M > M_{\odot}$)⁶. Quando seus combustíveis nucleares se esgotam a força da gravidade domina, e seus centros entram em colapso. Após a explosão, essas supernovas formam buracos negros ou estrelas de nêutrons. O modelo mais aceito de cenário da Supernova do tipo Ia (SN Ia) é em sistemas binários compostos por uma anã branca e uma estrela companheira. Ainda há dúvidas em relação à natureza da companheira, pois não sabemos ao certo se seria uma estrela massiva, ou uma outra anã branca. A anã branca de carbono-oxigênio, recebe massa de sua estrela companheira até o limite de Chandrasekhar, $\sim 1,4M_{\odot}$, que é o máximo de massa que ela pode ter sem entrar em colapso. Quando esse limite é ultrapassado, a anã branca começa a colapsar, dando início a um processo conhecido como detonação de carbono, que é uma ignição violenta da fusão termonuclear dentro da estrela^[58]. A explosão é tão forte que a luminosidade pode chegar até $L = 4 \times 10^9 L_{\odot}$ ^[25].

3.4.1 Vela Padrão

Um objeto pode ser chamado de **Vela Padrão** se sua luminosidade L for conhecida. No Universo, além de conhecermos a luminosidade de um dado objeto, devemos saber como ela muda, ou se muda, a depender de sua posição e idade, ou seja, para que tenhamos uma vela padrão, o objeto tem que ser padronizável. Uma outra característica importante é ter uma alta luminosidade, de forma que possa ser observada a grandes distâncias, o que permite poder estudar o Universo quando mais jovem.

⁶ M_{\odot} e L_{\odot} correspondem à massa e a luminosidade solar, respectivamente.

Temos interesse nas SNe Ia por possuírem todos os aspectos supracitados. No caso de sua luminosidade, não todas as SNe Ia atingem um máximo de $L = 4 \times 10^9 L_\odot$, na verdade, suas luminosidades ficam em torno de $L \approx 3 \rightarrow 4 \times 10^9 L_\odot$. Isso não é um problema, pois sua luminosidade máxima está fortemente relacionada ao formato e à cor da SN Ia, o que torna possível padronizá-las, como veremos mais adiante.

3.4.2 Supernova do Tipo Ia

Para estudar a luminosidade de SN Ia, usamos o **Modulo de Distância**, que é a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M . A magnitude aparente é definida em termos do fluxo da fonte,

$$m = -2,5 \log_{10}(f/f_x), \quad (3.17)$$

onde $f_x = 2,53 \times 10^{-8} \text{W m}^{-2}$. No caso da magnitude absoluta, ela é a magnitude aparente que o objeto teria se estivesse sendo observado a 10 parsecs de distância. Ou seja, para uma fonte com luminosidade L ,

$$M = -2,5 \log_{10}(L/L_x), \quad (3.18)$$

onde $L_x = 78,7 L_\odot$, que é a luminosidade que um objeto com fluxo de $2,53 \times 10^{-8} \text{watt m}^{-2}$ produziria a uma distância de 10 parsecs^[25]. Desta forma, podemos obter o modulo da distância,

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right) + 25. \quad (3.19)$$

Nos dados obtidos de supernovas, a magnitude aparente m_B é dada no máximo da banda B (azul). Seu valor teórico, que depende do modelo, é dado por

$$m_B^{\text{mod}} = 5 \log_{10} d_L(z_{\text{CMB}}, z_{\text{hel}}, \Theta) - \alpha(s - 1) - \beta\mathcal{C} - \mathcal{M}_B, \quad (3.20)$$

onde $z_{\text{CMB}}, z_{\text{hel}}$ são, respectivamente, o *redshift* no referencial da CMB e no heliocêntrico⁷, e Θ representa o conjunto de valores dos parâmetros do modelo. α e β são considerados parâmetros incômodo, que caracterizam as relações formato-luminosidade e cor-luminosidade, respectivamente^[59]. Já os valores de s e \mathcal{C} correspondem à variação do formato e da cor de cada SN, respectivamente. Finalmente, \mathcal{M}_B também é um parâmetro de incômodo, e é a magnitude absoluta de uma SN Ia fiducial. Sabe-se que \mathcal{M}_B e h estão altamente correlacionados, portanto esperamos que, em ajustes onde ambos estão livres, se obtenha alta degenerescência em ambos.

Uma vez que temos o valor de m_B^{mod} , o próximo passo é calcular o χ^2 ,

$$\chi_{SN}^2 = \sum (\mathbf{m}_B - \mathbf{m}_B^{\text{mod}})^T (\mathbf{C}_{\text{SN}}^{-1}) (\mathbf{m}_B - \mathbf{m}_B^{\text{mod}}), \quad (3.21)$$

onde a matriz de covariância, é dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}_{\text{stat}} + \mathbf{C}_{\text{stat}} + \mathbf{C}_{\text{sys}}, \quad (3.22)$$

⁷Onde a contribuição devido aos movimentos de rotação e translação da Terra foram removidos.

\mathbf{D}_{stat} é a parte diagonal de incerteza estatística, dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{stat},ii} = & \left[\frac{5}{z_i \ln 10} \right]^2 \sigma_{z,i}^2 + \sigma_{\text{int}}^2 + \sigma_{\text{lenteamento}}^2 + \sigma_{m_B,i}^2 \\ & + \alpha^2 \sigma_{X_1,i}^2 + \beta^2 \sigma_{\mathcal{C},i}^2 \\ & + 2\alpha C_{m_B X_1,i} - 2\beta C_{m_B \mathcal{C},i} - 2\alpha\beta C_{X_1 \mathcal{C},i}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os três primeiros termos são relacionados à incerteza no *redshift* cosmológico por conta de: velocidades peculiares; variação da magnitude intrínseca da SN não explicada pelos outros termos; e variação da magnitude causada por lenteamento gravitacional, respectivamente. Essa aproximação é boa apenas para *redshifts* baixos, mas pode ser ignorada para *redshifts* maiores. O pacote de dados usado neste trabalho, que será abordado na próxima seção, já engloba esses valores em σ_{m_B} , que é o erro correspondente ao valor observado da magnitude. Nos outros termos, temos os erros dos valores observados do parâmetro de esticamento (X_1), do parâmetro de cor (\mathcal{C}), assim como as matrizes de covariância entre eles ($C_{X_1 \mathcal{C}}$, $C_{m_B X_1}$ e $C_{m_B \mathcal{C}}$). Para a soma das matrizes de covariância estatística e sistemática, temos

$$\mathbf{C}_{\text{stat}} + \mathbf{C}_{\text{sys}} = V_0 + \alpha^2 V_a + \beta^2 V_b + 2\alpha V_{0a} - 2\beta V_{0b} - 2\alpha\beta V_{ab}, \quad (3.24)$$

onde V_0 , V_a , V_b , V_{0a} , V_{0b} e V_{ab} são matrizes do pacote escolhido.

3.4.3 Joint Light-curve Analysis (JLA)

Neste trabalho, usamos os dados de SNe Ia do *Joint Light-curve Analysis* (JLA) para restringir parâmetros cosmológicos. O JLA é uma compilação de dados obtidos do SDSS, *Supernova Legacy Survey* (SNLS), *Hubble Space Telescope* (HST) e de dados de objetos próximos. Temos 740 SNe Ia com *redshifts* menores que 1,3.

O SDSS-II é a sonda com o maior número de supernovas confirmadas, onde 500, de um total de 4607, são SNe Ia. A JLA conta com 374 destas, de *redshifts* $0,05 < z < 1,4$. A contribuição do SNLS é dominada por SNe Ia de *redshift* baixos ($z < 0,08$), que fazem parte do terceiro pacote de dados fotométricos. As 14 SNe Ia de *redshifts* altos ($0,7 < z < 1,4$) foram obtidas através de dados do HST. A calibração dos dados e outras informações sobre este pacote podem ser encontradas em [60].

3.4.3.1 Correções para as Propriedades das Galáxias Hospedeiras

Observações têm mostrado uma forte dependência da SN com as características de sua galáxia hospedeira. As SNe com o mesmo formato de curva de luz e cor, têm, em média, magnitude maior (0,08 mag) quando são encontradas em galáxias massivas, e nas que possuem uma baixa taxa de formação de estrelas. Uma outra relação é que as SNe Ia são mais comuns em galáxias mais velhas, ou com uma alta taxa de formação de estrelas.

A razão por trás dessa dependência não é bem compreendida, mas, em geral, consideramos três características como responsáveis: metalicidade, massa da galáxia hospedeira, e taxa de formação de estrelas. Seguindo as conclusões de [61], dividimos o pacote de forma que a magnitude absoluta, \mathcal{M}_B , possui valores diferentes a depender da massa da galáxia hospedeira, que pode ser menor ou maior que $10^{10}M_{\odot}$. É de se esperar que a relação correta seja mais complexa do que é assumido, mas os dados deste pacote não necessitam de um modelo mais sofisticado [62].

4 MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Cosmologists are often in error but seldom in doubt.

Lev Davidovich Landau

Nas últimas décadas, a quantidade e a qualidade de dados cosmológicos têm crescido de maneira significativa, portanto existe a necessidade de métodos rápidos e eficientes para a avaliação destes. Os métodos Bayesianos têm ganhado popularidade na Cosmologia, Astrofísica e Astronomia como o procedimento de inferência padrão tanto para a estimativa de dados como para a seleção de modelos. Desta forma, aparece a importância de avaliar quais os melhores métodos, em termos de tempo computacional e precisão de resultados.

Esta pesquisa explora alguns algoritmos que utilizam a Cadeia de Markov Monte Carlo (MCMC): o algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) e o Monte Carlo Hamiltoniano (HMC).

4.1 Inferência Bayesiana

A inferência Bayesiana é um método estatístico que permite analisar um grupo de parâmetros Θ de um modelo H utilizando uma probabilidade subjetiva.

O primeiro passo, nesta abordagem, é decidir a **distribuição de probabilidade a priori**, ou simplesmente o *prior*, a ser usado, que pode ser informativo ou objetivo. Todas as incertezas e tudo o que sabemos sobre os valores dos parâmetros, antes da análise de dados, estão contidos em um *prior* informativo. Um *prior* objetivo, ou não-informativo, é aquele que tem mínima influência na **distribuição de probabilidade a posteriori**, também conhecido como o *posterior*. É importante notar que o *prior* perde relevância para um grande número de dados.

Em seguida, desejamos obter a **função da verossimilhança**, que é a função de probabilidade conjunta dos dados. Toda a informação obtida sobre os parâmetros está presente na verossimilhança.

Por fim, procuramos obter o *posterior*. A partir dele, podemos conhecer as quantidades estatísticas de nosso interesse, como os valores de parâmetros do modelo estudado, incertezas e correlações ^[63, 64].

Considere um conjunto de dados \mathbf{D} , a partir do qual podemos introduzir o **Teorema de Bayes**

$$Pr(\Theta | \mathbf{D}, H) = \frac{Pr(\mathbf{D} | \Theta, H) Pr(\Theta | H)}{Pr(\mathbf{D} | H)}, \quad (4.1)$$

onde $Pr(\Theta | \mathbf{D}, H) \equiv Pr(\Theta | \mathbf{D})$ é a densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros do modelo, $Pr(\mathbf{D} | \Theta, H) \equiv \mathcal{L}(\Theta)$ é a verossimilhança dos dados, e $Pr(\Theta | H) \equiv \pi(\Theta)$ é o *prior*. O denominador, conhecido como a **evidência Bayesiana**, $Pr(\mathbf{D} | H) \equiv Z$ representa o fator necessário para normalizar o *posterior* sobre o domínio de Θ ,

$$Z = \int_{\Omega_{\Theta}} \mathcal{L}(\Theta)\pi(\Theta)d\Theta. \quad (4.2)$$

Nesta análise, ela permite a comparação entre modelos a partir do **Fator de Bayes**,

$$B(\mathbf{D}) = \frac{Pr(\mathbf{D} | H_1)}{Pr(\mathbf{D} | H_2)}. \quad (4.3)$$

Para o caso comum de um *prior* objetivo, $\pi(H_1) = \pi(H_2) = 1/2$, um valor de $B(\mathbf{D}) > 1$ indica que H_1 é o modelo favorecido; caso $B(\mathbf{D}) < 1$, o modelo favorecido é H_2 . Desta forma, o Fator de Bayes indica qual dos modelos melhor prevê as observações. Uma vez que sabemos qual o modelo favorecido, procuramos saber quão significativo é este resultado, para isso utilizamos a **Escala de Jeffreys**, que avalia o $\ln B(\mathbf{D})$, como pode ser visto na Tabela 4.1 [65, 66].

$ \ln B(\mathbf{D}) $	Conclusão
< 1,0	Inconclusivo
1,0	Evidência positiva
2,5	Evidência moderada
5,0	Evidência forte

Tabela 4.1 – Escala de Jeffreys para avaliar a relevância do resultado fornecido pelo Fator de Bayes ao comparar dois modelos.

4.1.1 Estimativa de Parâmetros

A ideia por trás da estimativa de parâmetros é conseguir as estimativas de seus valores reais e de seus respectivos erros a partir da distribuição probabilística de Θ , para um conjunto de dados \mathbf{D} . Utilizamos a distribuição de probabilidade a posteriori, $Pr(\Theta | \mathbf{D})$, para calcular os valores esperados.

O método mais usado atualmente é o da **Máxima Verossimilhança**, que é uma abordagem **Frequentista** [67]. Aqui, os valores adotados para os parâmetros são os que correspondem ao pico do gráfico da verossimilhança. Um dos problemas deste método é a sua dependência com o *prior*, se este pico não coincidir com o do gráfico da distribuição de probabilidade a posteriori, seu valor máximo não necessariamente corresponderá ao máximo da verossimilhança.

Na estatística Bayesiana, construímos uma distribuição de probabilidade dos parâmetros do modelo. Diferentemente da abordagem frequentista não usamos apenas um ponto para descrever os parâmetros, mas uma distribuição inteira, conhecida como **Função de Densidade**

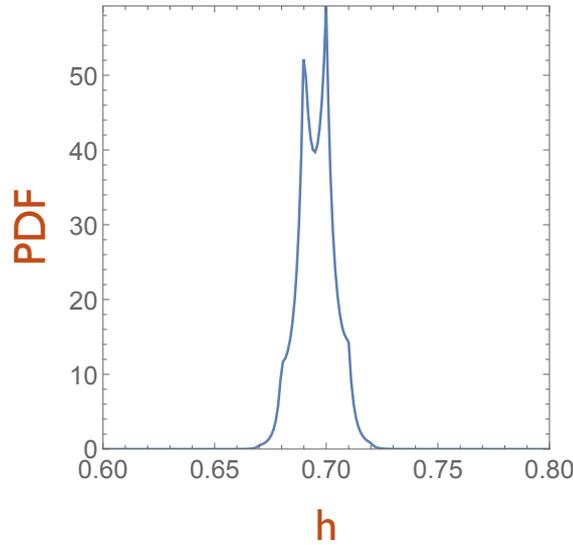


Figura 4.1 – Função de densidade de probabilidade, marginalizado sobre Ω_Λ , para um modelo cosmológico com apenas a constante cosmológica, tendo Ω_Λ e h livres.

de Probabilidade (PDF), a fim de perder menos informações sobre os parâmetros. A Figura 4.1 ilustra um exemplo no qual o pico do gráfico não é capaz de descrever bem uma distribuição.

A estimativa Bayesiana utiliza a **marginalização** dos parâmetros, o que permite a análise de cada parâmetro separadamente. A probabilidade *posterior* marginalizada $Pr(\theta_i | \mathbf{D})$ do parâmetro θ_i é dada por:

$$Pr(\theta_i | \mathbf{D}) = \int Pr(\Theta | \mathbf{D}) d\theta_1 \dots d\theta_n. \quad (4.4)$$

As Figuras 4.1 e 4.2 mostram exemplos de gráficos com a marginalização de parâmetros.

4.1.2 A Distribuição χ^2

Nesta pesquisa, sempre que possível, tentaremos aproximar as distribuições de erros para uma Gaussiana, a fim de facilitar a interpretação dos dados. Aplicamos esta aproximação a uma amostra de N medidas $\mathbf{D} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,

$$\text{prob}(x_n | \mu, \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x_n - \mu)^2}{\sigma_n^2} \right], \quad (4.5)$$

onde cada medida x_n tem desvio padrão σ_n , e μ é a média das amostras.

Calculamos a verossimilhança de todos os N dados, como sendo o produto da probabilidade de cada medida,

$$\mathcal{L}(\mathbf{D}; \mu) = \prod_{n=1}^N \text{prob}(x_n | \mu, \sigma_n). \quad (4.6)$$

Levando em consideração que o valor máximo de \mathcal{L} coincide com $\log \mathcal{L}$, escolhemos trabalhar com o último, já que este pode ser resolvido analiticamente de forma mais simples,

ocupando menos tempo computacional ^[67]. Temos

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{D}; \mu) = \sum_{n=1}^N \log[\text{prob}(x_n|\mu, \sigma_n)], \quad (4.7)$$

que pode ser reescrito,

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{D}; \mu) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(x_n - \mu)^2}{\sigma_n^2} + B, \quad (4.8)$$

onde todos os termos que não dependem de μ estão contidos em B . Finalmente, introduzimos a soma

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^N \frac{(x_n - \mu)^2}{\sigma_n^2}. \quad (4.9)$$

A partir da Eq. 4.9, podemos definir,

$$\mathcal{L}(\mathbf{D}; \mu) = C \exp \left[-\frac{\chi^2}{2} \right], \quad (4.10)$$

onde a constante C está relacionada à normalização da distribuição.

Desta forma, quando a função de verossimilhança for maximizada, estaremos minimizando χ^2 . Os valores dos parâmetros do modelo que minimizarem χ^2 são os que melhor se adequam às observações.

4.1.3 Estimativa de Erros

Quando tentamos estimar parâmetros, devemos lembrar que também é importante avaliar o erro associado. Alguns erros a serem considerados surgem por conta de erros sistemáticos que podem ser relacionados tanto à medição das observáveis como ao modelo estudado.

Vários métodos de estimativa de erros consistem em saber a distribuição de erro dos dados obtidos. Na Cosmologia e Astrofísica, essa distribuição é obtida através de argumentos físicos, isto é, dependem da forma como os dados são obtidos.

4.1.3.1 Intervalo de Credibilidade

Para uma distribuição de verossimilhança Gaussiana, o intervalo de credibilidade tem seu valor mediano centrado no valor máximo do gráfico, que torna sua análise trivial. Como neste trabalho estudaremos apenas distribuições aproximadamente Gaussianas, não discutiremos o tratamento para os casos nos quais a função da verossimilhança não é simétrica.

Em uma análise estatística, intervalos de credibilidade são usados para quantificar uma incerteza, de forma que nos permite representá-la com um limite inferior e um limite superior para seu valor. Considere uma amostra θ , obtida de uma distribuição Gaussiana, com desvio padrão σ . Para 1σ , por exemplo, esperamos que ao ajustar N pontos de dados com erros Gaussianos a uma

função qualquer, 31,7% de todos os pontos desviem do ajuste. De forma mais simples, existe 68,3% de chance que o valor do parâmetro desejado esteja contido neste intervalo ^[67].

Para obter os intervalos de credibilidade precisamos do valor mínimo de χ^2 , para que possamos relacionar os pontos a uma probabilidade P de que o valor real do parâmetro esteja contido na região $\chi^2 < \chi_{min}^2 + \Delta\chi_0^2$. Substituindo χ^2 por $\chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$ na Eq. 4.10 temos,

$$\mathcal{L}(\mathbf{D}|\theta) = C' \exp \left[-\frac{\Delta\chi^2}{2} \right]. \quad (4.11)$$

Precisamos encontrar o valor de $\Delta\chi_0^2$ tal que

$$P = \int_{\Delta\chi^2 < \Delta\chi_0^2} d^M\theta \mathcal{L}(\mathbf{D}|\theta), \quad (4.12)$$

para um problema com M parâmetros a serem ajustados.

P	Número de parâmetros livres				
	1	2	3	4	5
68,3%(1 σ)	1,00	2,30	3,53	4,72	5,89
95,4%(2 σ)	4,00	6,17	8,02	9,70	11,3
99,73%(3 σ)	9,00	11,8	14,2	16,3	18,2

Tabela 4.2 – O valor de P, na primeira coluna, é obtido a partir da Eq. 4.12. Os valores de $\Delta\chi^2$ são apresentados da segunda até a sexta coluna, para os M parâmetros livres. Estes valores definem o intervalo de credibilidade para a densidade de probabilidade posterior conjunta.

Os valores de P são obtidos de acordo com o procedimento descrito em [68], e estão apresentados na Tabela 4.2. Podemos usar estes valores para construir gráficos com regiões de credibilidade para algumas quantidades de parâmetros livres. A Figura 4.2 ilustra a construção de uma PDF para dois parâmetros livres, onde podemos observar diferentes regiões de credibilidade.

Este método é eficaz apenas para distribuições Gaussianas, como este não é sempre o caso, adotamos um método alternativo para obter as regiões de credibilidade. Partindo da fronteira inferior do domínio do parâmetro, integra-se a PDF até obter uma probabilidade acumulada de $(100 - 68,3)/2$, para 1σ , por exemplo. Em seguida, parte-se da fronteira superior do domínio do parâmetro, na direção oposta, até obter a mesma probabilidade acumulada. Este é o método usado neste trabalho, ao empregarmos o programa GetDist para obter gráficos.

4.2 Cadeia Markov Monte Carlo

A Cadeia Markov Monte Carlo (MCMC) é uma técnica computacional usada para obter amostras de uma distribuição de probabilidade, baseando-se na Cadeia de Markov, que é construída de maneira que sua distribuição alvo seja uma distribuição estável. Isso é importante

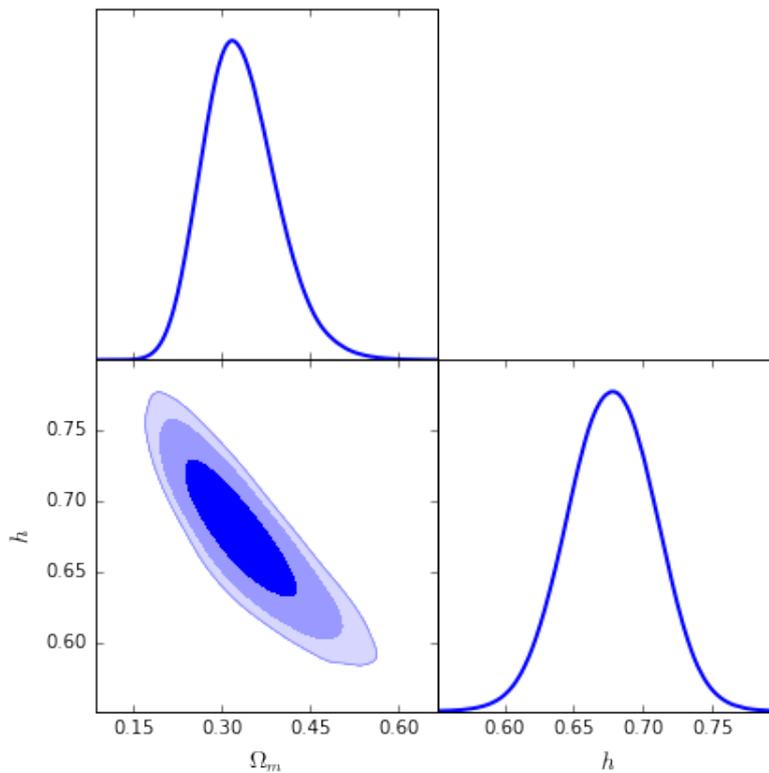


Figura 4.2 – O gráfico inferior à esquerda mostra regiões de credibilidade de 1σ , 2σ e 3σ conjunto para dois parâmetros, h e Ω_m . A figura superior é a função de densidade de probabilidade de Ω_m , marginalizado sobre h . Finalmente, a imagem inferior à direita apresenta a função de densidade de probabilidade de h , marginalizado sobre Ω_m . Os gráficos foram obtidos para um modelo cosmológico com Ω_m e h livres, a partir de dados observacionais do Parâmetro de Hubble.

porque permite definir a probabilidade de cada estado de um sistema para qualquer tempo aleatório t . Intuitivamente, o processo pode ser definido como uma caminhada aleatória em cadeia. O estado dessa cadeia após um dado número de passos é usado como uma amostra da distribuição alvo, onde sua qualidade dependerá, entre outros fatores, do número de passos utilizados ^[69].

A MCMC foi primeiramente mencionada em sua forma original, que é o algoritmo de Metropolis, em 1953, no artigo *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines* ^[70].

4.2.1 Métodos de Monte Carlo

Originalmente, os métodos de Monte Carlo foram propostos por Stanislaw Ulman e John von Neumann, no final da década de quarenta, em Los Alamos ^[71]. Os métodos fazem parte de uma classe de algoritmos computacionais que utilizam amostras aleatórias para analisar estatisticamente uma função usando a estrutura de um processo estocástico. Eles são usados em problemas físicos e matemáticos quando existe dificuldade ou é impossível obter resultados de integrais a partir de outros métodos matemáticos.

Estes métodos utilizam a **Lei dos Grandes Números** para aproximar integrais descritas por valores esperados a partir da média empírica de amostras independentes das variáveis ^[69].

4.2.2 Integração de Monte Carlo

A abordagem de Monte Carlo foi primeiramente usada para calcular integrais a partir de um gerador de números aleatórios. Suponha que queiramos calcular a integral

$$\int_a^b h(x)dx. \quad (4.13)$$

Se for possível decompor $h(x)$ em um produto de uma função $f(x)$ e uma probabilidade de densidade $P(x)$ definidos no intervalo de integração (a, b) , então

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)P(x)dx = E_{p(x)}[f(x)]. \quad (4.14)$$

Desta forma, ao retirar um grande número de variáveis aleatórias x_1, \dots, x_n da densidade $P(x)$ teremos

$$\int_a^b h(x)dx = E_{p(x)}[f(x)] \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (4.15)$$

A Eq. 4.15 é conhecida como a **Integração de Monte Carlo**, e pode ser usada para aproximar as distribuições a posteriori usadas na análise Bayesiana ^[72, 73]. Uma integral do tipo

$$I(y) = \int f(y|x)p(x)dx = E_{p(x)}[f(x)] \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (4.16)$$

pode ser aproximada para

$$\hat{I}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(y|x_i), \quad (4.17)$$

que tem como erro padrão

$$E^2[\hat{I}(y)] = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(f(y|x_i) - \hat{I}(y) \right)^2 \right), \quad (4.18)$$

conhecido como o **Erro Padrão de Monte Carlo**.

4.2.3 Cadeia de Markov

A cadeia de Markov segue um processo estocástico¹, onde uma sequência de elementos variáveis X_1, X_2, \dots, X_n é chamada de **cadeia de Markov** se a distribuição condicional de X_{n+1} , dado os elementos variáveis, depende apenas de X_n . Desta forma, estados futuros dependem unicamente do estado presente, sem conexão alguma com os estados passados, dentro de um

¹Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias X_n que evolui com o tempo n ^[74].

determinado **espaço de estados** \mathcal{X} que contém os valores que podem fazer parte da cadeia. Consideramos que \mathcal{X} é um espaço polonês², de Lebesgue, e que os resultados básicos intuitivos de probabilidade e da teoria da medida (Teorema de Fubini, probabilidade condicionada, etc.) podem ser aplicados [73].

A transição do estado X_n para X_{n+1} é determinada a partir da matriz de transição $\mathcal{P}(X_{n+1}|X_n)$, onde

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = \mathcal{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n), \quad (4.19)$$

são os valores de i_k que correspondem ao espaço de estados da cadeia.

A Eq. 4.19 permite definir a probabilidade de transição de n-passos

$$p_{ij}^{(m)} = \mathcal{P}(X_{n+m} = j|X_n = i), \quad (4.20)$$

que, por convenção, temos

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (4.21)$$

A partir da equação de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in \mathcal{Z}} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(m-r)}; \quad \forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (4.22)$$

obtemos,

$$\mathcal{P}^{(m)} = p_{ij}^{(m)} = \mathcal{P}^m, \quad (4.23)$$

que pode ser usado para relacionar a probabilidade de transição de n-passos à matriz de probabilidade de transição de n-passos [76].

4.2.4 Burn-in

Um aspecto importante a ser considerado durante a implantação de um amostrador que usa o método MCMC é o número de passos necessários para obter a convergência.

Burn-in é o processo de descartar os elementos iniciais de uma cadeia que utiliza este método. Começamos a cadeia de em um dado ponto x , que é então rodada por n passos (o período do *burn-in*), os quais serão descartados no final da simulação [77]. Ao considerar apenas os elementos posteriores ao período do *burn-in*, pretendemos obter uma distribuição a posteriori que não dependa dos valores iniciais da cadeia.

²Um espaço topológico é denominado *espaço polonês* se é métrico, separável e completo [75].

4.2.5 Convergência

Para que uma cadeia de Markov convirja para sua distribuição estacionária, ela precisa apresentar:

1. Irredutibilidade;
2. Aperiodicidade;
3. Recorrência positiva.

Irredutibilidade é a propriedade que garante que todos os estados são comunicantes e pertencem a uma única classe. Isto é, independente do presente estado, podemos atingir qualquer estado em um espaço de tempo finito ^[78, 74].

A periodicidade é relacionada ao período de ocorrência de um estado, que é dito periódico se for contido em ciclos, nos quais o maior divisor comum de seu tamanho é maior que 1; para um estado aperiódico, este número tem que ser igual a 1. Em uma cadeia de Markov irredutível, todos os estados têm períodos iguais, portanto precisamos apenas de um estado aperiódico para que todos seus estados o sejam ^[79].

Um estado é recorrente se existe probabilidade igual a 1 para se retornar a esse estado. Para que exista uma recorrência positiva, o tempo de recorrência deverá ser finito, como segue,

$$\mathcal{P}_n(\tau_n < \infty) = 1 \quad (4.24)$$

e

$$\mathbf{E}_n \tau_n < \infty. \quad (4.25)$$

Para uma cadeia de Markov que possui essas três propriedades, a Lei dos Grandes Números garante que, se a cadeia se estender por um tempo suficientemente grande, a distribuição empírica dos estados visitados irá se aproximar muito da distribuição estacionária.

Uma das dificuldades ao utilizar o método de Monte Carlo é saber se, depois de m passos, a cadeia obteve convergência. Contamos com métodos tanto visuais como estatísticos para certificarmos-nos disso. Um tal método é a verificação de quão bem a cadeia está sendo **misturada**, ou seja, se ela se move pelo espaço de maneira eficaz e satisfatória. Isto pode ser feito de forma visual, a partir da análise do *traceplot*, que nos mostra o valor de um dado parâmetro a cada iteração. O gráfico característico de uma boa mistura apresenta um valor médio contínuo, com pequenas flutuações, explorando bem o espaço onde a densidade é baixa, como mostra a Figura 4.3.

É importante lembrar que os testes de convergência não garantem que a cadeia realmente atingiu seu estado estacionário, eles apenas testam se existem as condições necessárias para tal. Também é necessário analisar a convergência e a mistura de todos os parâmetros livres, não apenas os de nosso interesse, pois corremos o risco de nossos valores finais não serem concisos.

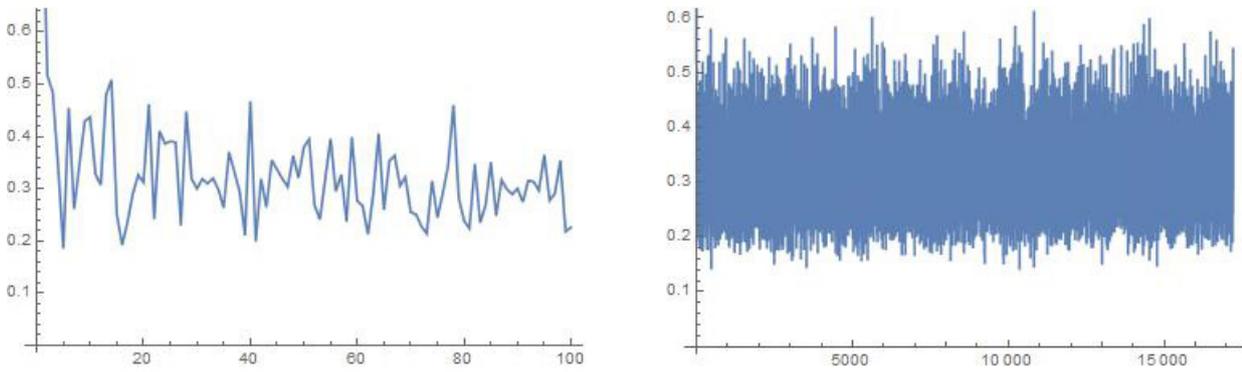


Figura 4.3 – À esquerda, temos um *traceplot* com uma mistura de estados insatisfatória. À direita, temos um *traceplot* com uma boa mistura de estados.

Um método estatístico para conferir a convergência é a partir do estudo das **autocorrelações** entre as retiradas de amostras. Para n passos, consideramos a correlação entre cada retirada de amostra e seu k -ésimo *lag*,

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (4.26)$$

onde esperamos que sua autocorrelação caia com o aumento do valor de k . Um valor alto de ρ_k para grandes valores de k indica que a cadeia não está sendo misturada de maneira eficiente e que há uma forte correlação entre as retiradas.

Um terceiro método é o **Diagnóstico de Múltipla Sequência**, proposto em [80], que consiste em duas etapas: primeiro construímos uma estimativa da distribuição alvo, centrada em sua moda, que é usada para criar cadeias independentes da simulação iterativa; a segunda etapa é a análise destas cadeias para comparar a correlação dentro de cada parte e entre elas [80]. Para tais comparações, examinamos cada parâmetro θ separadamente para estimar sua variância como sendo o peso da soma das variâncias entre cadeias e dentro de cada cadeia. Finalmente, calculamos o **fator de redução de escala potencial**. Seguimos os seguintes passos:

1. Simulamos de forma independente $m \geq 2$ cadeias, cada uma com tamanho $2n$, com pontos de partida retirados da estimativa da distribuição alvo. Para diminuir a dependência com a distribuição inicial, retiramos o *burn-in* destas cadeias.
2. Calculamos:
 - A variância dentro de cada cadeia

$$W = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_j^2, \quad (4.27)$$

com

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\theta_{ij} - \bar{\theta}_j)^2, \quad (4.28)$$

onde s_j^2 representa a variância da cadeia j , e W é a média aritmética da variância de cada cadeia. É possível que o valor de W seja abaixo do valor esperado para a variância da distribuição estacionária, pois não são todas as cadeias que atingem a convergência.

- A variância entre cadeias.

$$B = \frac{1}{m-1} \sum_m^{j=1} (\bar{\theta}_j - \bar{\bar{\theta}})^2, \quad (4.29)$$

onde

$$\bar{\bar{\theta}} = \frac{1}{m} \sum_m^{j=1} \bar{\theta}_j. \quad (4.30)$$

Este é o valor da média aritmética das variância das cadeias multiplicado por n , que é o número de retiradas de amostras de cada cadeia.

3. Estimamos, a partir das equações supracitadas, a variância da distribuição estacionária como sendo o peso da média de W e B .

$$\hat{\text{Var}}(\theta) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)W + \frac{1}{n}B. \quad (4.31)$$

Por conta da dispersão dos valores iniciais das cadeias, esta variância obtida pode ser superior ao seu valor verdadeiro.

4. Calculamos o fator de redução de escala potencial para cada parâmetro.

$$\hat{R} = \sqrt{\frac{\hat{\text{Var}}(\theta)}{W}}. \quad (4.32)$$

Um valor de \hat{R} alto (acima de 1, 1 - 1, 2) indica que as cadeias devem ser maiores para melhorar a convergência à distribuição estacionária.

Continuamos a modificar o tamanho das cadeias, até que o valor de \hat{R} se aproxime de 1. Finalmente, podemos combinar o total de amostras retiradas das últimas metades de cada cadeia simulada para compor uma única distribuição estacionária.

4.3 Algoritmo de Metropolis-Hastings

Este é um método usado para obter uma sequência de amostras aleatórias a partir de uma distribuição de probabilidade da qual a retirada de amostras é difícil. Ele geralmente é usado para um alto número de dimensões.

O método de Metropolis-Hastings tem vários exemplos de aplicação na cosmologia pela sua capacidade de trabalhar com modelos que contêm um grande número de parâmetros. Por conta deste mérito, foi escolhido para a comparação de um modelo de lentes gravitacionais a uma configuração de grandes arcos luminosos observada, que contava com seis parâmetros para o modelo de lentes e mais um para cada par de fontes ^[81]. Uma outra aplicação foi para a inferência de sondas de *redshift* fotométricos de galáxias com localização radial incerta ^[82], onde o espaço de parâmetros teve que ser dividido por conta do aspecto não-Gaussiano do *posterior* conjunto.

Ao empregarmos este algoritmo, a retirada de amostras de uma dada distribuição de probabilidade P é feita utilizando a função de densidade de probabilidade conjunta e a distribuição proposta. Para que isto seja feito, é necessário que exista a possibilidade de computar o valor da função estacionária $f(x)$ de forma a ser proporcional à densidade de $P(x)$. Esta proporcionalidade torna o algoritmo bastante útil, tendo em vista que, em muitos casos, calcular a normalização necessária pode ser extremamente complexo.

O algoritmo gera uma sequência de valores de forma que quanto mais valores de amostras forem produzidos, maior a chance da distribuição de valores se aproximar da distribuição alvo $P(x)$. Estes valores de amostras são produzidos de forma iterativa, com a distribuição da próxima amostra dependendo apenas do valor atual, o que a caracteriza como uma cadeia de Markov ^[83].

O método de varredura do espaço de estados \mathcal{X} segue três passos:

1. Geramos uma amostra x^* a partir de uma distribuição proposta $q(x^{(t)} | x^{(t-1)})$;
2. Calculamos a probabilidade de aceitação a partir da **função de aceitação** $\alpha(x^* | x^{(t-1)})$;
3. Aceitamos a amostra (probabilidade de aceitação: α), ou rejeitamos a amostra (probabilidade de rejeição: $1 - \alpha$).

4.3.1 Distribuição Proposta

Como ponto de partida do algoritmo, escolhemos uma amostra a partir da distribuição proposta, q ^[84]. É importante notar que estas amostras dependem da probabilidade de aceitação α para serem aceitas. Uma das restrições do algoritmo de Metropolis, no qual o Metropolis-Hastings se baseia, é que $q(x^* | x^{(t-1)})$ seja simétrica, ou seja,

$$q(x^* | x^{(t-1)}) = q(x^{(t-1)} | x^*). \quad (4.33)$$

Para o caso do algoritmo de Metropolis-Hastings, a simetria não é importante por conta da implementação de um fator de correlação c , que é definido a partir da distribuição proposta

$$c = \frac{q(x^{(t-1)} | x^*)}{q(x^* | x^{(t-1)})}. \quad (4.34)$$

4.3.2 Função de Aceitação

É importante que o algoritmo de Metropolis-Hastings seja capaz de estabelecer uma harmonia entre dois aspectos: 1) O amostrador deve percorrer áreas de maior probabilidade dentro da densidade conjunta; 2) O amostrador deve explorar todo o espaço, evitando ficar preso a apenas um local. É necessário que a função de aceitação tenha esses aspectos porque permite que o algoritmo atenda a condição de detalhamento balanceado, isso garante que a distribuição estacionária obtida realmente é o *posterior* desejado [72].

Definimos a função de aceitação:

$$\alpha(x^{(t)} | x^{(t-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{q(x^{(t-1)} | x^{(t)}) \pi(x^{(t)})}{q(x^{(t)} | x^{(t-1)}) \pi(x^{(t-1)})} \right\} \quad (4.35)$$

onde $\pi(\cdot)$ é a função conjunta.

4.3.3 Aceitação/Rejeição de uma Amostra

A amostra é aceita com probabilidade de aceitação α . O operador \min garante que o valor da probabilidade nunca é maior que 1. Operacionalmente, é gerado um número aleatório entre 0 e 1, se este valor for menor que α , a amostra é aceita, caso contrário, ela é rejeitada e continuamos com o estado da amostra anterior.

A taxa de aceite sempre deve ser monitorada. Se ela for muito alta, a cadeia provavelmente não está se movendo pelo espaço rápido o suficiente. Se for muito baixa, dizemos que o algoritmo não está sendo eficaz. Uma taxa de aceite ser muito alta ou baixa depende do algoritmo usado [73].

4.4 Monte Carlo Hamiltoniano

Este algoritmo, como o de Metropolis-Hastings, também tem sido aplicado a inferência de parâmetros cosmológicos. Um dos aspectos importantes deste método é ser capaz de contornar o fenômeno da ‘Maldição da Dimensionalidade’ [85], por integrar as equações de Hamilton no espaço de parâmetros. Graças a isso, pôde ser usado para explorar a distribuição a posteriori conjunta de centenas de parâmetros envolvidos na análise da formação e morfologia das estruturas de grande escala do Universo não-homogêneo, a partir de dados do SDSS [86]. O Monte Carlo Hamiltoniano também já foi usado com o CMB, como, por exemplo, para verificar o efeito de lentes gravitacionais a partir do *posterior* conjunto do potencial de lenteamento e do mapa do CMB não-lenteado [87].

4.4.1 Dinâmica Hamiltoniana

A dinâmica Hamiltoniana descreve o movimento de um corpo em termos de sua posição x e de seu momento p em um dado instante de tempo t . Existe uma energia potencial $U(\mathbf{x})$

associada a cada posição e uma energia cinética $K(\mathbf{p})$ para cada momento. A energia total do sistema é constante e é dada pelo Hamiltoniano

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = U(\mathbf{x}) + K(\mathbf{p}). \quad (4.36)$$

Usamos a dinâmica Hamiltoniana para demonstrar a conversão da energia cinética para a potencial e vice-versa. As equações que descrevem este movimento são conhecidas como as equações de Hamilton:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial K(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}. \quad (4.38)$$

Tendo em mãos as expressões para $\frac{\partial K(\mathbf{p})}{\partial p_i}$ e $\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ além das condições iniciais, isto é, x_0 e p_0 para um tempo t_0 , é possível calcular a posição e o momento do corpo para qualquer instante t .

4.4.2 Método de Leapfrog

As equações de Hamilton descrevem o movimento de um corpo no tempo de forma contínua. Para simular a dinâmica Hamiltoniana numericamente, é necessário tornar o tempo discreto, portanto decompos um intervalo de tempo em intervalos menores, de tamanho δ . Quanto menor este intervalo, melhor será a aproximação. O método de Leapfrog age atualizando os valores do momento e da posição sequencialmente, a partir da simulação da dinâmica do momento em um intervalo de tempo $\delta/2$, em seguida simulando a posição para um tempo δ , e então atualizando o valor do momento para mais um tempo $\delta/2$. Desta forma, temos os valores de x e p para o mesmo período de tempo^[88]. Ou seja:

1. Damos meio passo no tempo e calculamos a variável de momento

$$p_i(t + \delta/2) = p_i(t) - \left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial U}{\partial x_i(t)}; \quad (4.39)$$

2. Damos um passo inteiro no tempo e calculamos a variável da posição

$$x_i(t + \delta) = x_i(t) + \delta \frac{\partial K}{\partial p_i(t + \delta/2)}; \quad (4.40)$$

3. Damos meio passo e assim atualizamos a variável do momento

$$p_i(t + \delta) = p_i(t + \delta/2) - \left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{\partial K}{\partial p_i(t + \delta)}. \quad (4.41)$$

O método de Leapfrog pode ser rodado por L passos, simulando dados para $L \times \delta$ unidades de tempo.

4.4.3 Construção da Distribuição Alvo

A ideia por trás do HMC é criar uma função Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ de forma que a dinâmica resultante permita explorar a distribuição alvo $p(\mathbf{x})$ de forma eficiente. Usamos a **distribuição canônica** para relacionar $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e $p(\mathbf{x})$ ^[89]. Desta forma,

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{Z} e^{-H(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \quad (4.42)$$

onde Z é a função de partição, que, para o caso de métodos MCMC, pode ser descartada. Reescrevemos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &\propto e^{-[U(\mathbf{x})-K(\mathbf{p})]} \\ &\propto e^{-U(\mathbf{x})} e^{-K(\mathbf{p})} \\ &\propto p(\mathbf{x})p(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Podemos notar que, para a distribuição conjunta, \mathbf{p} e \mathbf{x} são fatoráveis, isso implica que as duas variáveis são independentes, e portanto a distribuição canônica $p(\mathbf{x})$ é independente da distribuição análoga para o momento. Assim, podemos adotar a dinâmica Hamiltoniana para retirar amostras da distribuição canônica conjunta sobre \mathbf{x} e ignorar as contribuições referentes ao momento. Estes momentos são, então, parâmetros de incômodo deste método, sobre os quais marginalizaremos.

O foco da estatística Bayesiana geralmente é a distribuição a posteriori, que pode ser expressa como uma distribuição canônica, usando uma energia potencial

$$U(\mathbf{x}) = \log [\pi(\mathbf{x}) \mathcal{L}(\mathbf{x} | \mathbf{D})], \quad (4.44)$$

onde os parâmetros do modelo são representados por \mathbf{x} , $\pi(\mathbf{x})$ é o *prior*, e $\mathcal{L}(\mathbf{x} | \mathbf{D})$ é a verossimilhança de um conjunto de dados \mathbf{D} .

4.4.4 Aplicação do Método

O objetivo deste algoritmo é utilizar a dinâmica Hamiltoniana para a construção de uma cadeia de Markov, com o intuito de que a exploração da densidade alvo $p(\mathbf{x})$ definida por $U(\mathbf{x})$ seja mais simples que usar uma distribuição de probabilidade ^[73]. Partindo de um estado inicial $[\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0]$ simulamos uma dinâmica Hamiltoniana por um dado período de tempo, usando o método supracitado de Leapfrog. Ao final do período, usamos os valores finais das variáveis de posição e momento como nossos valores propostos de variáveis $[\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*]$. O estado é aceito usando um critério de aceitação similar ao de Metropolis-Hastings.

Para um dado conjunto de valores iniciais, a dinâmica Hamiltoniana segue os contornos de uma energia constante em um estado de fases, onde temos que perturbar a dinâmica de maneira aleatória para explorar todo o espaço $p(\mathbf{x})$. O processo adotado para a obtenção de M amostras de uma distribuição alvo é o seguinte:

1. Definimos $t = 0$;
2. Geramos um valor inicial para $\mathbf{x}^{(0)}$;
3. Repetimos o seguinte processo até $t = M$;
 - Definimos $t = t + 1$,
 - Definimos um novo valor para a variável de momento a partir da retirada de uma amostra da distribuição canônica do momento $\mathbf{p}_0 \sim p(\mathbf{p})$,
 - Definimos $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^{(t-1)}$,
 - Rodamos o algoritmo de Leapfrog com ponto de partida $[\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0]$ por L passos com tamanho δ para obter os valores propostos $[\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*]$,
 - Calculamos a probabilidade de aceitação de Metropolis

$$\alpha = \min(1, \exp(-U(\mathbf{x}^*) + U(\mathbf{x}_0) - K(\mathbf{p}^*) + K(\mathbf{p}_0))), \quad (4.45)$$

- Retiramos um número aleatório u de $\text{Unif}(0, 1)$. Se $u \leq \alpha$ aceitamos o valor proposto \mathbf{x}^* e definimos o próximo estado na cadeia de Markov $\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(*)}$, caso contrário, $\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)}$.

5 ANÁLISE COMPUTACIONAL E RESULTADOS

It does not do to leave a live dragon out of your calculations, if you live near him.

J. R. R. Tolkien, The Hobbit

5.1 Método Computacional

Para a obtenção de cadeias Monte Carlo elaboramos um programa em Fortran 90 que utiliza os métodos de Metropolis-Hastings e do Monte Carlo Hamiltoniano para explorar o espaço de parâmetros. Em seguida, usamos o GetDist para analisar a convergência, obter intervalos de credibilidade e gerar gráficos dos parâmetros cosmológicos. Para alguns gráficos, o Mathematica foi usado.

Este capítulo está dividido em seções para cada observável, e para a combinação delas, de forma a facilitar a interpretação dos resultados.

Os *priors* utilizados neste trabalho estão apresentados na Tabela 5.1.

5.2 Resultados

Os resultados estão apresentados na forma de tabelas contendo o intervalo de credibilidade para os parâmetros do modelo e os de incômodo, de acordo com cada observável. Foram construídos gráficos da densidade de probabilidade e a análise conjunta de h e de Ω_{m0} para cada uma das observáveis, apresentando diferentes modelagens, como no caso de fração de massa de gás.

	Parâmetro	<i>Priors</i> Gaussianos	Referências
Parâmetro de densidade de bárions	$10^2 \Omega_b h^2$	$2,226 \pm 0,023$	[26]
Parâmetro de depleção	b	$0,874 \pm 0,023$	[55]
Inclinação de $f_{\text{gas}}(r \sim r_{2500})$	η	$0,214 \pm 0,020$	[53]
Horizonte acústico (Mpc)	r_s	$141,1 \pm 5,5$	[90]

Tabela 5.1 – *Priors* utilizados na execução do programa em Fortran 90 para gerar cadeias de Monte Carlo.

Também apresentamos diagramas com as curvas teóricas das observáveis, obtidos a partir dos valores médios dos parâmetros. As regiões preenchidas representam a região de credibilidade de 2σ .

5.2.1 Parâmetro de Hubble

Esta observável é a mais simples usada neste trabalho, pois comparamos o modelo diretamente com os valores obtidos a partir de relógios cosmológicos, como vimos na Seção 3.1. Este teste não contém parâmetros de incômodo, portanto apresentamos o intervalo de credibilidade somente para h e Ω_{m0} , na Tabela 5.2.

Conseguimos que o HMC explorasse bem o espaço de parâmetros, de forma que os valores obtidos foram tão bons quanto para o MH. Por este motivo, apresentamos os resultados superpostos na Figura 5.2. Conseguimos perceber uma superposição dos ajustes, com uma pequena discordância apenas para o valor de h no modelo Λ CDM, ao empregar o algoritmo de MH.

Quanto ao valor de Ω_{m0} , o teste mostra um valor levemente mais alto para o modelo $\Lambda(t)$ CDM, como esperávamos, em torno de $\sim 0,5$, mantendo sua concordância interna. Já no caso do modelo Λ CDM, também temos um valor coerente com resultados de outros trabalhos. A dispersão no ajuste ocorre devido ao baixo número de dados e a falta de conhecimento sobre os erros estatísticos e sistemáticos para esta observável.

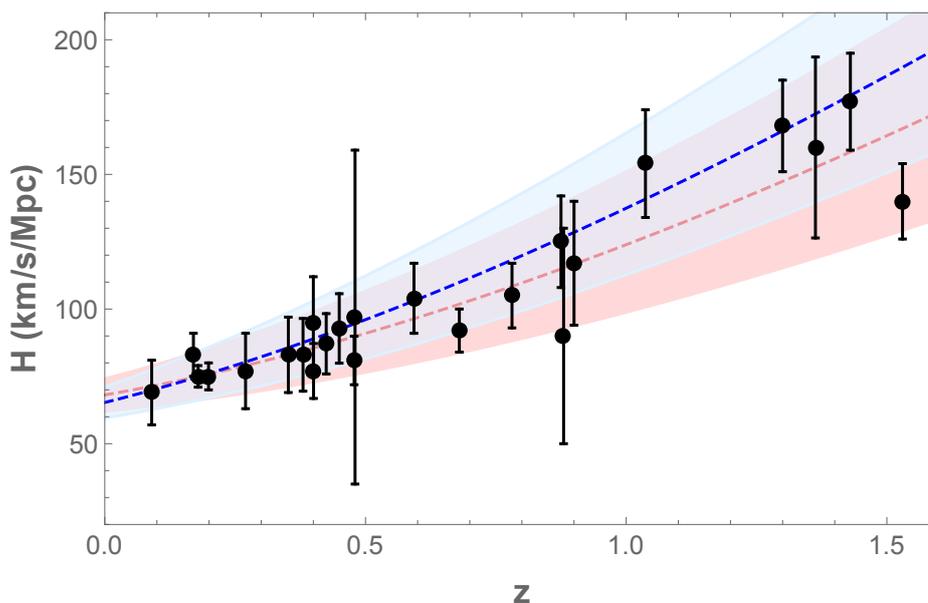


Figura 5.1 – Diagrama de Hubble teórico para o modelo padrão (vermelho) e para o modelo $\Lambda(t)$ CDM (azul), com dados observacionais de $H(z)$. As regiões preenchidas representam o intervalo de credibilidade dos valores médios.

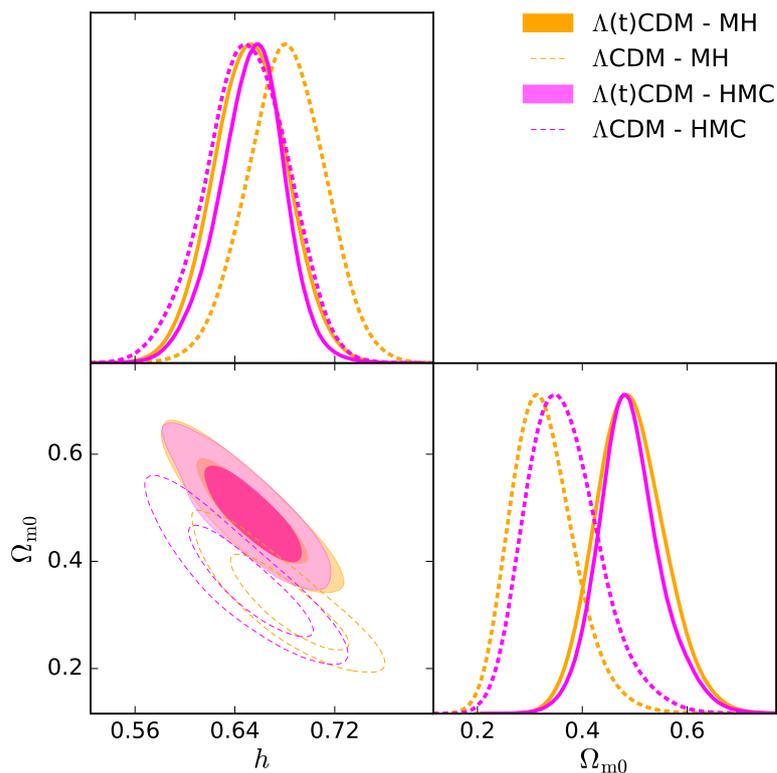


Figura 5.2 – Ajuste de dados observacionais de $H(z)$ para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. O gráfico superior exibe o PDF de Ω_{m0} , enquanto que o gráfico à direita mostra a PDF de h . O gráfico à esquerda apresenta o intervalo de credibilidade da análise conjunta dos dois parâmetros.

Parâmetro	Metropolis-Hastings		Monte Carlo Hamiltoniano	
	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM
h	$0,681^{+0,061}_{-0,063}$	$0,653^{+0,059}_{-0,058}$	$0,650^{+0,063}_{-0,066}$	$0,653^{+0,049}_{-0,057}$
Ω_{m0}^*	$0,33^{+0,12}_{-0,12}$	$0,49^{+0,14}_{-0,12}$	$0,36^{+0,15}_{-0,13}$	$0,49^{+0,13}_{-0,11}$
$\Omega_{dm}h^2$	$0,127^{+0,035}_{-0,033}$	$0,185^{+0,029}_{-0,031}$	$0,129^{+0,033}_{-0,031}$	$0,185^{+0,029}_{-0,031}$
$10^2\Omega_b h^2$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$2,230^{+0,043}_{-0,046}$	$2,227^{+0,023}_{-0,021}$

Tabela 5.2 – Valores dos parâmetros obtidos para o teste observacional com dados de $H(z)$, apresentados para um intervalo de 2σ .

5.2.2 Oscilações Acústica Bariônica

A dispersão nos valores dos parâmetros cosmológicos, como visto na Figura 5.4, devido à quantidade pequena de dados faz com que essa observável por si só não seja muito confiável para a restrição de parâmetros. Usamos ela neste trabalho por ser uma boa fonte de baixo *redshift*, já que a obtenção de sua razão de distância, D_v/r_s depende de poucas considerações, como explicado em capítulos anteriores. Como r_s é considerado uma régua padrão fracamente dependente de modelo ^[91, 90], mantemos-o livre, como um parâmetro de incômodo, usando um

prior uniforme sobre ele.

Obtemos uma boa restrição de parâmetros para ambos os algoritmos de MH e do HMC, com um intervalo até 37 % menor para o último. Ao verificarmos os valores obtidos pelo algoritmo de MH, para h , na Tabela 5.3, notamos o quão próximo este resultado é do valor obtido por Riess et al.^[92], i.e. $0,7324 \pm 0,0174$. Sua sensibilidade para este parâmetro pode ser usada na análise conjunta das observáveis para quebrar degenerescências, especialmente as oriundas da fração de massa de gás, como veremos mais adiante.

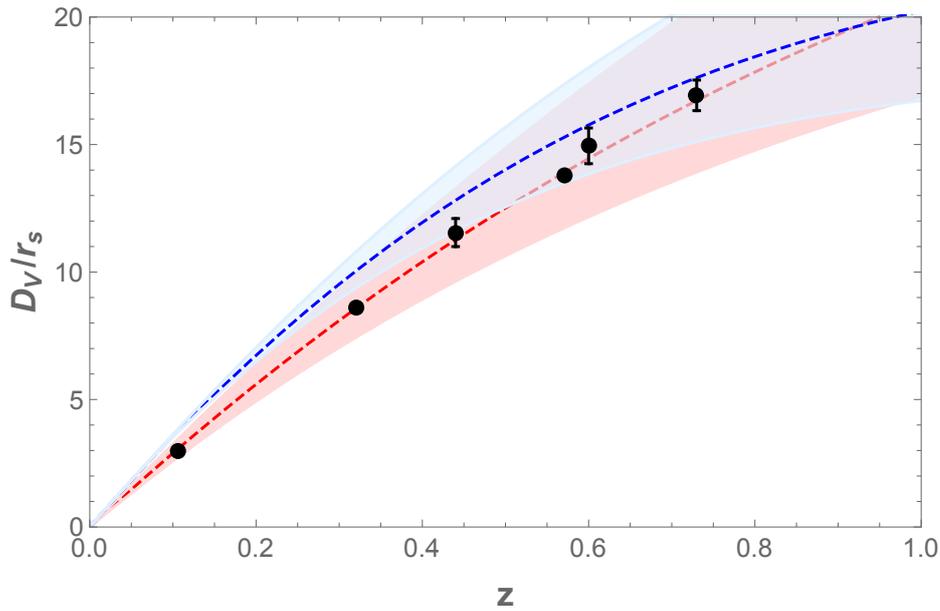


Figura 5.3 – Ajuste de D_v/r_s teórico para o modelo padrão (vermelho) e para o modelo $\Lambda(t)$ CDM (azul), com dados observacionais de BAO. As regiões preenchidas representam o intervalo de credibilidade de 2σ dos valores médios dos parâmetros.

Parâmetro	Metropolis-Hastings		Monte Carlo Hamiltoniano	
	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM
h	$0,716^{+0,072}_{-0,069}$	$0,711^{+0,068}_{-0,061}$	$0,665^{+0,046}_{-0,043}$	$0,680^{+0,037}_{-0,044}$
Ω_{m0}^*	$0,31^{+0,16}_{-0,14}$	$0,39^{+0,17}_{-0,15}$	$0,33^{+0,17}_{-0,16}$	$0,36^{+0,13}_{-0,12}$
$r_s(z_{\text{drag}})$ (Mpc)	$141,0^{+10,0}_{-10,0}$	$140,9^{+7,8}_{-8,2}$	$150,6^{+3,2}_{-3,0}$	$149,6^{+3,9}_{-2,6}$
$\Omega_{dm}h^2$	$0,132^{+0,065}_{-0,057}$	$0,172^{+0,059}_{-0,062}$	$0,121^{+0,058}_{-0,054}$	$0,142^{+0,040}_{-0,044}$
$10^2\Omega_b h^2$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$0,02226^{+0,00039}_{-0,00039}$	$0,02225^{+0,00034}_{-0,00031}$

Tabela 5.3 – Valores dos parâmetros obtidos para o teste observacional com dados de BAO, apresentados para um intervalo de 2σ .

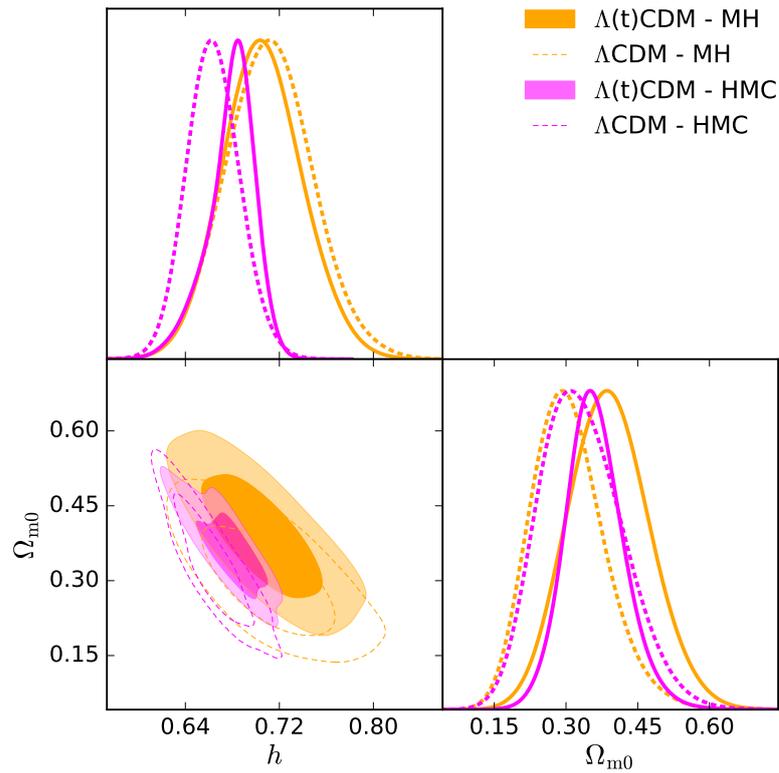


Figura 5.4 – Ajuste de dados observacionais de BAO para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. O gráfico superior exibe o PDF de Ω_{m0} , enquanto que o gráfico à direita mostra a PDF de h . O gráfico à esquerda apresenta o intervalo de credibilidade da análise conjunta dos dois parâmetros.

5.2.3 Fração de Massa de Gás

Durante a elaboração deste trabalho, encontramos duas modelagens diferentes para o cálculo da fração de massa de gás, em trabalhos de Allen et al.^[53] e Etori et al.^[55], que são dois pesquisadores renomados nesta área da cosmologia. Em vista disso, resolvemos fazer análises com ambas as abordagens, para testar qual melhor se adéqua às observações.

No caso da modelagem de Allen et al.^[53], fizemos pequenas modificações em sua modelagem, com o intuito de verificar a importância de cada variável. As duas modelagens estão apresentadas como *Allen 1*, para a mais simples e *Allen 2*, para a mais elaborada.

Como podemos conferir nos gráficos de cada modelagem, e na Tabela 5.4, temos uma grande dispersão em h para as três modelagens, além de um comportamento não Gaussiano da PDF. Isso ocorre porque dados de f_{gas} tendem a apresentar uma grande degenerescência neste parâmetro.

5.2.3.1 Allen 1

Para testar dados de f_{gas} , esta modelagem utiliza a equação

$$f_{\text{gas}} = C \left(\frac{\Omega_{b,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \left[\frac{d_m(z; 0, 3; 0, 7)}{d_m(z, \Theta)} \right]^{3/2}. \quad (5.1)$$

Note que a diferença entre esta equação e a Eq. 3.15 é a ausência do fator de correção angular A , que leva em consideração a variação da medida de um ângulo subtendido por um raio r_{2500} com o modelo cosmológico adotado.

A Figura 5.6 exibe o gráfico da densidade de probabilidade (PDF) de h e de Ω_{m0} para o modelo Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM para esta modelagem.

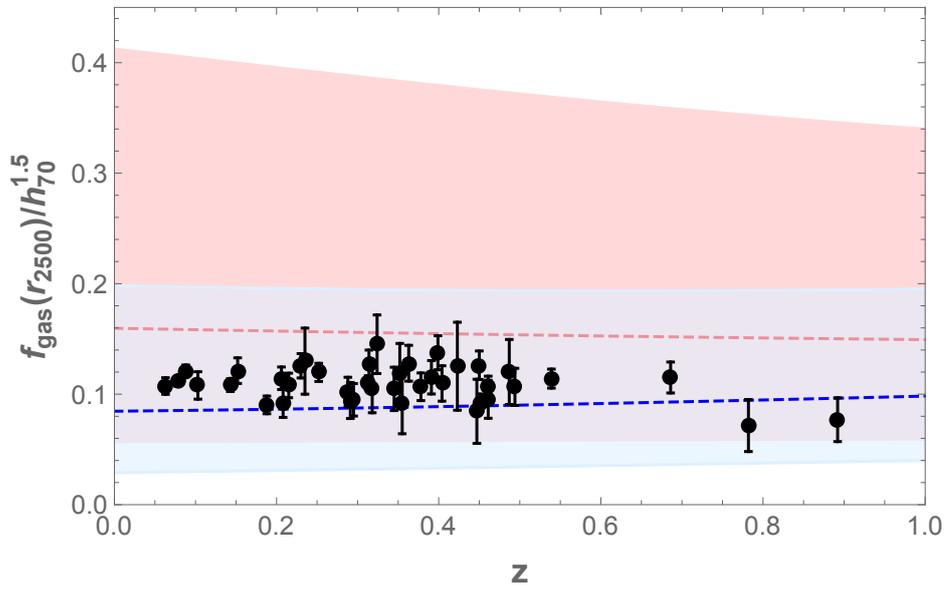


Figura 5.5 – Ajuste de f_{gas} teórico para o modelo padrão (vermelho) e para o modelo $\Lambda(t)$ CDM (azul), com dados observacionais de fração de massa de gás, com a modelagem *Allen 1*. As regiões preenchidas apresentam o intervalo de credibilidade de 2σ dos valores médios dos parâmetros.

5.2.3.2 Allen 2

Esta modelagem utiliza a Eq. 3.15:

$$f_{\text{gas}} = CA \left(\frac{\Omega_{b,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \left[\frac{d_m(z; 0, 3; 0, 7)}{d_m(z, \Theta)} \right]^{3/2}. \quad (5.2)$$

Enquanto que na modelagem *Allen 1*, obtemos um aumento de 39% na quantidade de matéria para o modelo $\Lambda(t)$ CDM em relação ao modelo padrão, em *Allen 2* percebemos um aumento de apenas 13%.

Como os valores de melhor ajuste dos parâmetros, obtidos na Tabela 5.4, são melhores restringidos para este caso, podemos concluir que esta modelagem é a mais adequada para este trabalho.

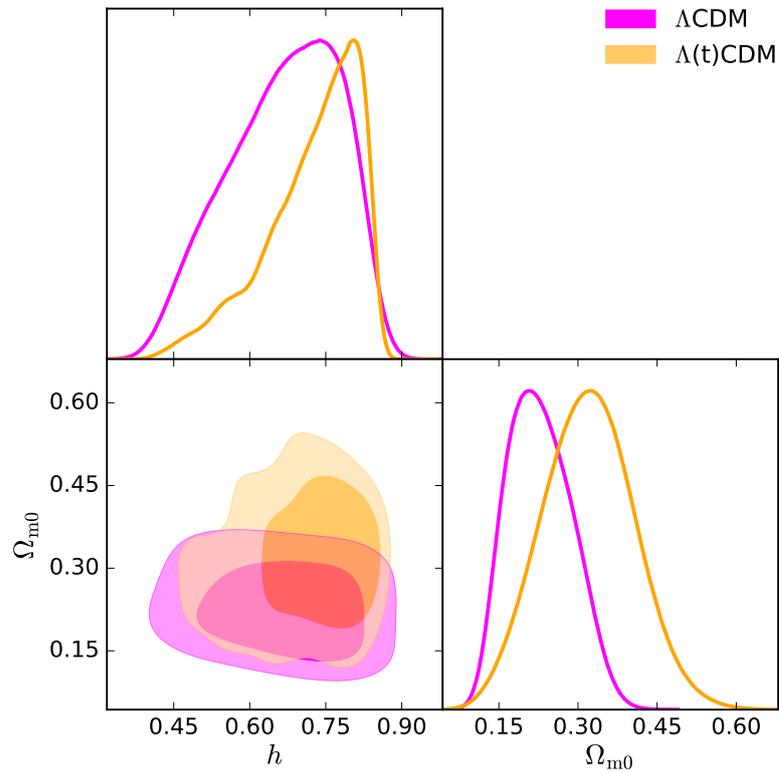


Figura 5.6 – Ajuste de dados observacionais de f_{gas} para os modelos ΛCDM e $\Lambda(t)\text{CDM}$ com a modelagem *Allen 1*. O gráfico superior exibe o PDF de Ω_{m0} , enquanto que o gráfico à direita mostra a PDF de h . O gráfico à esquerda apresenta o intervalo de credibilidade da análise conjunta dos dois parâmetros.

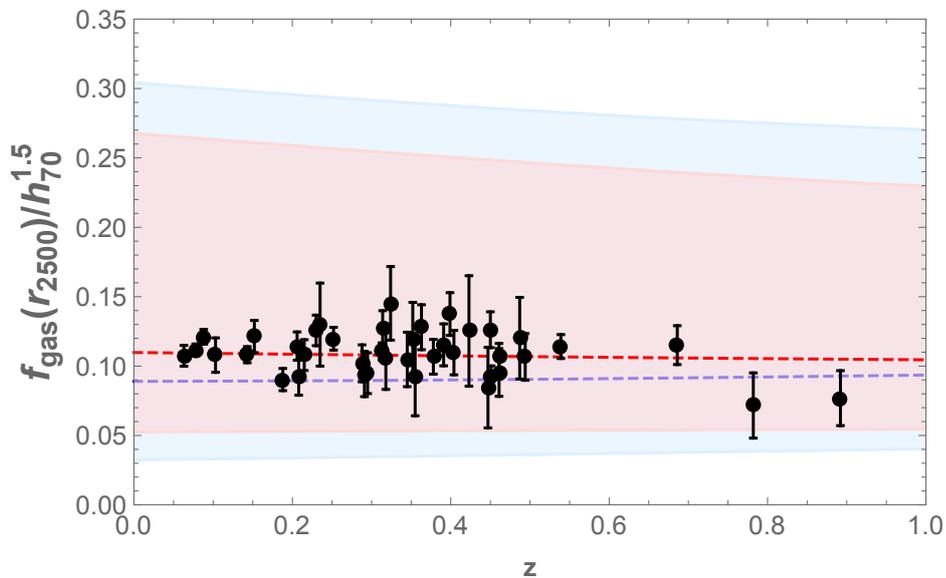


Figura 5.7 – Ajuste de f_{gas} teórico para o modelo padrão (vermelho) e para o modelo $\Lambda(t)\text{CDM}$ (azul), com dados observacionais de fração de massa de gás, com a modelagem *Allen 2*. As regiões preenchidas apresentam o intervalo de credibilidade de 2σ dos valores médios dos parâmetros.

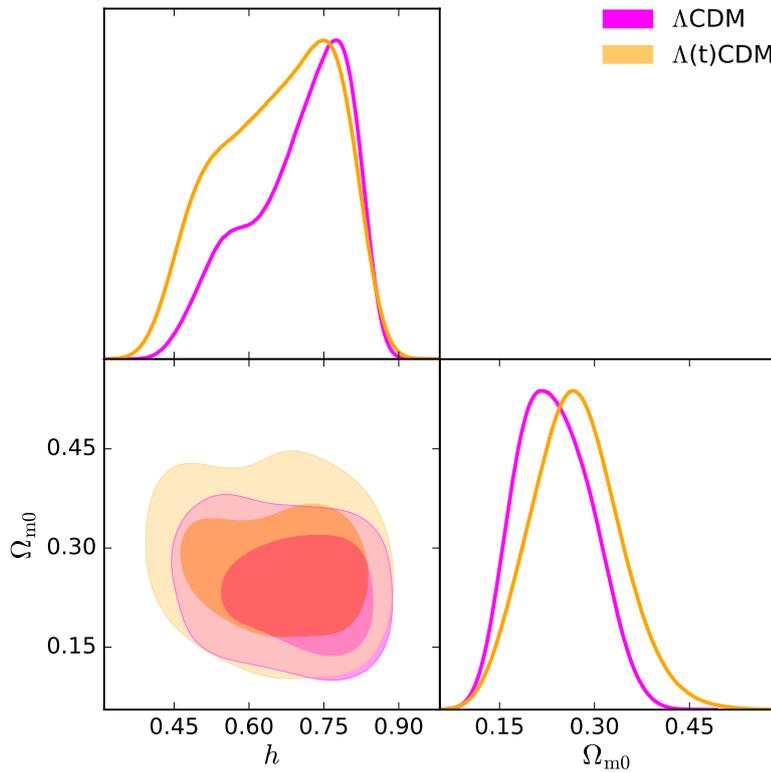


Figura 5.8 – Ajuste de dados observacionais de f_{gas} para os modelos ΛCDM e $\Lambda(t)\text{CDM}$ com a modelagem *Allen 2*. O gráfico superior exibe o PDF de Ω_{m0} , enquanto que o gráfico à direita mostra a PDF de h . O gráfico à esquerda apresenta o intervalo de credibilidade da análise conjunta dos dois parâmetros.

5.2.3.3 Etori

Esta modelagem utiliza a Eq. 3.11:

$$f_{\text{gas}} = \frac{b\Omega_{b,0}}{(1, 18 - 0, 012T_{\text{gas}})\Omega_{m,0}} \left[\frac{d_m(z; 0, 3; 0, 7)}{d_m(z, \Theta)} \right]^{3/2}. \quad (5.3)$$

Assim como para as outras modelagens, esperávamos observar um valor maior para a matéria bariônica no modelo $\Lambda(t)\text{CDM}$ em comparação ao modelo padrão, mas isso não foi evidenciado, como podemos ver claramente na Figura 5.9. Também não foi possível observar qualquer diferença nos ajustes dos parâmetros, o que é alarmante. Atribuímos isso ao fato de que esta é a mais simples das modelagens aqui estudadas. Em vista disso, podemos concluir a importância de fatores de correção, tanto para diferentes modelos, como para características intrínsecas dos aglomerados, como a pressão não térmica e a fração de bárions em estrelas.

Desta forma, dizemos que *Etori* não foi capaz de reproduzir bons resultados para o teste de fração de massa de gás. Existe uma grande degenerescência em h , como no caso das outras modelagens, contudo o comportamento não Gaussiano para a PDF de Ω_{m0} é único para este caso, o que também mostra a ineficiência da modelagem.

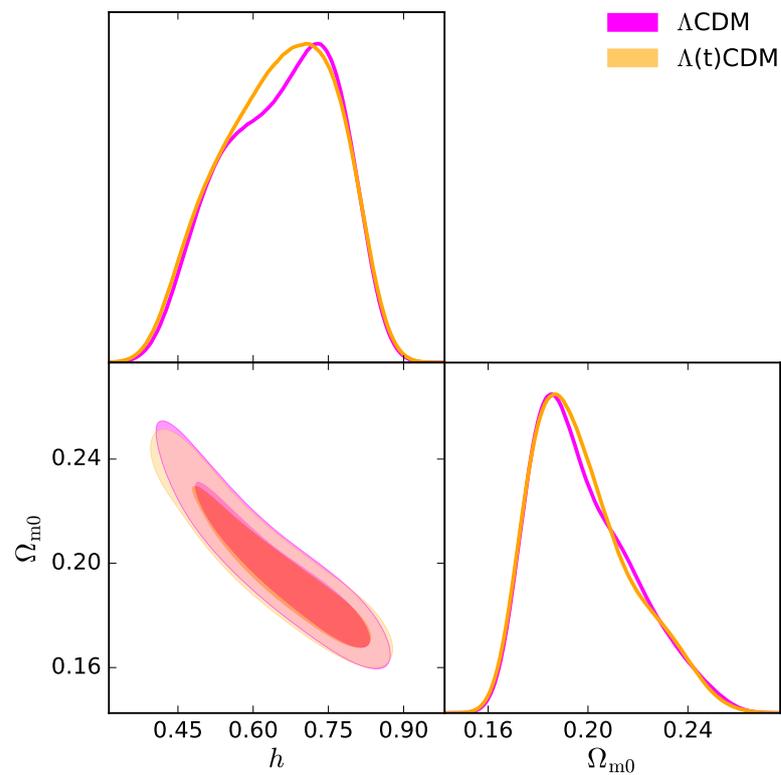


Figura 5.9 – Ajuste de dados observacionais de f_{gas} para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM com a modelagem *Ettori*. O gráfico superior exibe o PDF de Ω_{m0} , enquanto que o gráfico à direita mostra a PDF de h . O gráfico à esquerda apresenta o intervalo de credibilidade da análise conjunta dos dois parâmetros.

Parâmetro	Allen 1		Allen 2		Ettori	
	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM
h	$0,67^{+0,18}_{-0,21}$	$0,73^{+0,13}_{-0,20}$	$0,70^{+0,16}_{-0,21}$	$0,66^{+0,19}_{-0,22}$	$0,66^{+0,19}_{-0,21}$	$0,65^{+0,19}_{-0,21}$
Ω_{m0}^*	$0,23^{+0,12}_{-0,11}$	$0,32^{+0,17}_{-0,17}$	$0,24^{+0,11}_{-0,11}$	$0,27^{+0,14}_{-0,13}$	$0,198^{+0,042}_{-0,033}$	$0,197^{+0,042}_{-0,033}$
b	-	-	-	-	$0,873^{+0,044}_{-0,044}$	$0,874^{+0,044}_{-0,045}$
C	$1,35^{+0,66}_{-0,73}$	$1,35^{+0,66}_{-0,73}$	$0,99^{+0,43}_{-0,40}$	$1,09^{+0,54}_{-0,52}$	-	-
η	-	-	$0,2140^{+0,0060}_{-0,0059}$	$0,2140^{+0,0060}_{-0,0058}$	-	-
$\Omega_{dm}h^2$	$0,081^{+0,089}_{-0,072}$	$0,15^{+0,12}_{-0,12}$	$0,094^{+0,083}_{-0,075}$	$0,097^{+0,10}_{-0,086}$	$0,063^{+0,036}_{-0,039}$	$0,061^{+0,037}_{-0,039}$
$10^2\Omega_b h^2$	$2,226^{+0,044}_{-0,045}$	$2,225^{+0,045}_{-0,045}$	$2,227^{+0,045}_{-0,045}$	$2,226^{+0,046}_{-0,046}$	$2,227^{+0,046}_{-0,045}$	$2,227^{+0,043}_{-0,044}$

Tabela 5.4 – Valores dos parâmetros obtidos para o teste observacional com dados de f_{gas} , apresentados para um intervalo de 2σ .

5.2.4 Análise Combinada de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z)$

Como vimos nas seções anteriores, os resultados obtidos para as observáveis apresentam uma dispersão muito grande na restrição dos parâmetros cosmológicos. Para atenuar este problema, usamos a análise combinada de todas as observáveis utilizadas neste trabalho, e, como verificamos na Tabela 5.5, os resultados obtidos são melhores restritos do que para as análises separadas.

A Figura 5.10 exibe o gráfico da densidade de probabilidade (PDF) de h e de Ω_{m0} para o modelo ΛCDM e $\Lambda(t)\text{CDM}$. Incluímos, nesta figura, os resultados para cada uma das modelagens de f_{gas} para facilitar a comparação entre elas.

Os resultados obtidos a partir da modelagem de *Ettori*, assim como na análise separada, também apresentam valores baixos para Ω_{m0} , em ambos os modelos. Os dois métodos baseados na modelagem de Allen et al.^[53] nos dão resultados bastante próximos para os parâmetros de interesse, ambos compatíveis com os apresentados na literatura, como podemos conferir na Tabela 5.5.

É importante notar que o intervalo de credibilidade obtido para esta análise foi próximo à restrição com testes de Supernovas, como veremos na próxima sessão. Isso mostra que a combinação dessas observáveis de baixo *redshift* foi uma boa abordagem para restringir parâmetros cosmológicos, de maneira satisfatória, tendo em vista que tínhamos uma pequena quantidade de dados e pouco controle sobre erros sistemáticos e estatísticos, quando comparado à Supernovas.

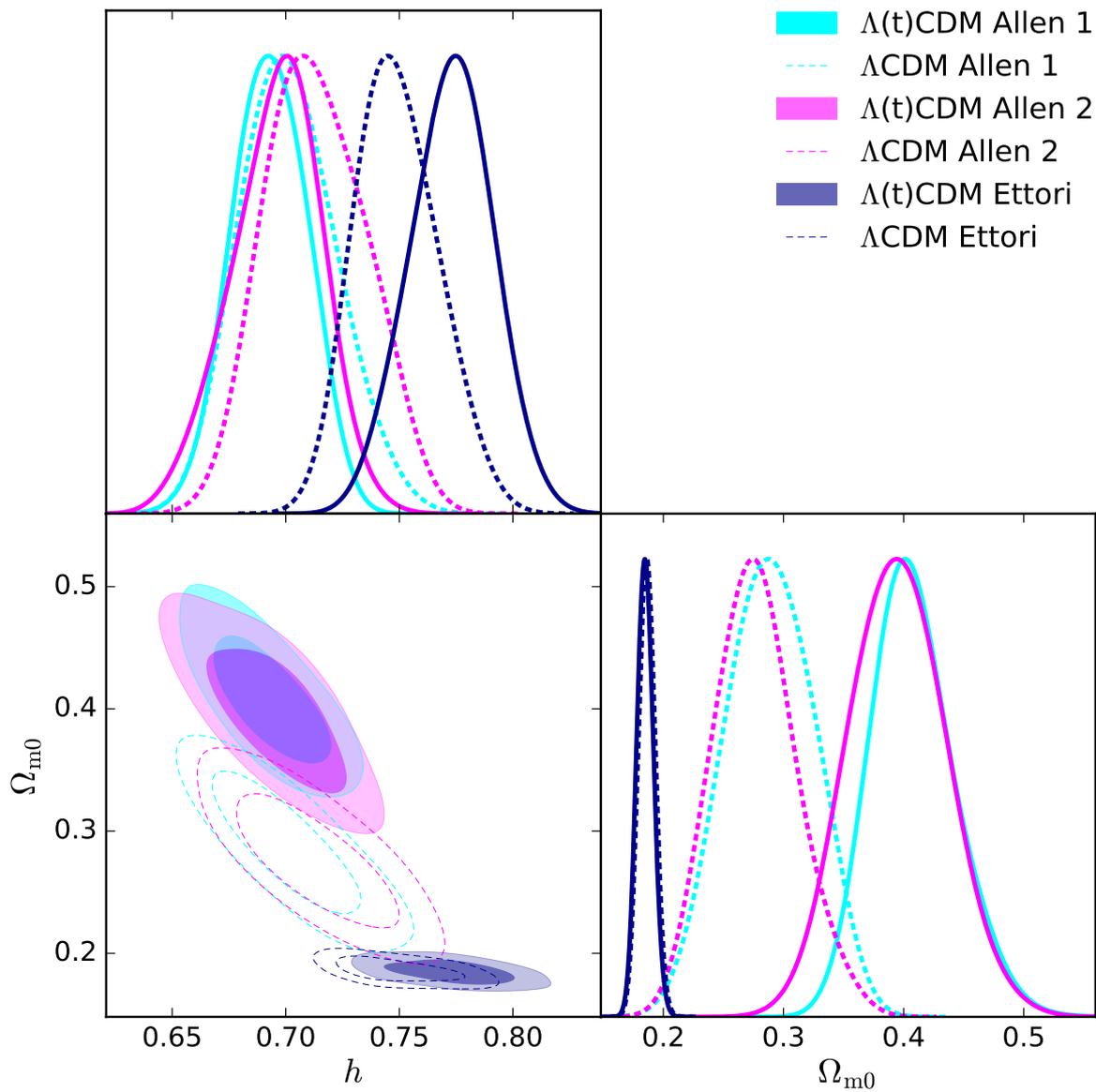


Figura 5.10 – Ajuste de dados observacionais de análise conjunta de dados de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z)$ para os modelos Λ CDM e $\Lambda(t)$ CDM. O gráfico superior exibe o PDF de Ω_{m0} , enquanto que o gráfico à direita mostra a PDF de h . O gráfico à esquerda apresenta o intervalo de credibilidade da análise conjunta dos dois parâmetros.

Parâmetro	Allen 1		Allen 2		Ettori	
	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM	Λ CDM	$\Lambda(t)$ CDM
h	$0,701^{+0,043}_{-0,040}$	$0,693^{+0,031}_{-0,032}$	$0,713^{+0,043}_{-0,039}$	$0,696^{+0,037}_{-0,042}$	$0,749^{+0,037}_{-0,034}$	$0,773^{+0,035}_{-0,036}$
Ω_{m0}^*	$0,289^{+0,068}_{-0,071}$	$0,408^{+0,072}_{-0,066}$	$0,276^{+0,070}_{-0,066}$	$0,395^{+0,080}_{-0,079}$	$0,186^{+0,014}_{-0,013}$	$0,185^{+0,014}_{-0,013}$
b	-	-	-	-	$0,886^{+0,044}_{-0,044}$	$0,895^{+0,045}_{-0,044}$
C	$1,20^{+0,24}_{-0,25}$	$1,65^{+0,24}_{-0,21}$	$1,16^{+0,25}_{-0,23}$	$1,60^{+0,25}_{-0,24}$	-	-
η	-	-	$0,2140^{+0,0060}_{-0,0059}$	$0,2141^{+0,0060}_{-0,0059}$	-	-
$r_s(z_{\text{drag}})$ (Mpc)	$145,1^{+5,2}_{-5,7}$	$142,9^{+4,2}_{-4,4}$	$143,2^{+6,4}_{-6,7}$	$143,2^{+6,0}_{-5,4}$	$143,0^{+6,4}_{-7,1}$	$142,1^{+6,6}_{-6,4}$
$\Omega_{dm}h^2$	$0,119^{+0,024}_{-0,024}$	$0,173^{+0,024}_{-0,022}$	$0,118^{+0,025}_{-0,023}$	$0,168^{+0,026}_{-0,025}$	$0,0821^{+0,0093}_{-0,0080}$	$0,0881^{+0,0094}_{-0,0094}$
$10^2\Omega_b h^2$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$2,226^{+0,045}_{-0,045}$	$2,231^{+0,045}_{-0,045}$	$2,234^{+0,045}_{-0,045}$

Tabela 5.5 – Valores dos parâmetros obtidos para a análise combinada de observações de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z)$, apresentados para um intervalo de 2σ .

5.2.5 Teste de Supernova + Análise Combinada de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z)$

Uma forma de restringir ainda mais os parâmetros cosmológicos é incluir dados de Supernovas do tipo Ia, já que dispomos de uma boa quantidade de dados desta observável, além de termos um bom conhecimento de seus erros sistemáticos e estatísticos. Mesmo em sua análise separada, conseguimos obter uma dispersão muito baixa para SN Ia, quando comparamos com os resultados obtidos a partir das outras observáveis usadas neste trabalho, como podemos conferir nas Figuras 5.11 e 5.12.

Como no modelo $\Lambda(t)$ CDM obtivemos uma PDF mais deslocada para a esquerda para Ω_{m0} com o teste de SN Ia, em comparação à PDF obtida para a análise conjunta, esperamos que a inclusão desta observável na análise, desloque esta distribuição para a esquerda, de forma que os valores sejam mais próximos aos obtidos em trabalhos anteriores do Grupo de Gravitação e Cosmologia da UFBA. Além disso, esperamos também conseguir um intervalo de credibilidade mais restrito, de forma que nossos valores de melhor ajuste sejam mais confiáveis.

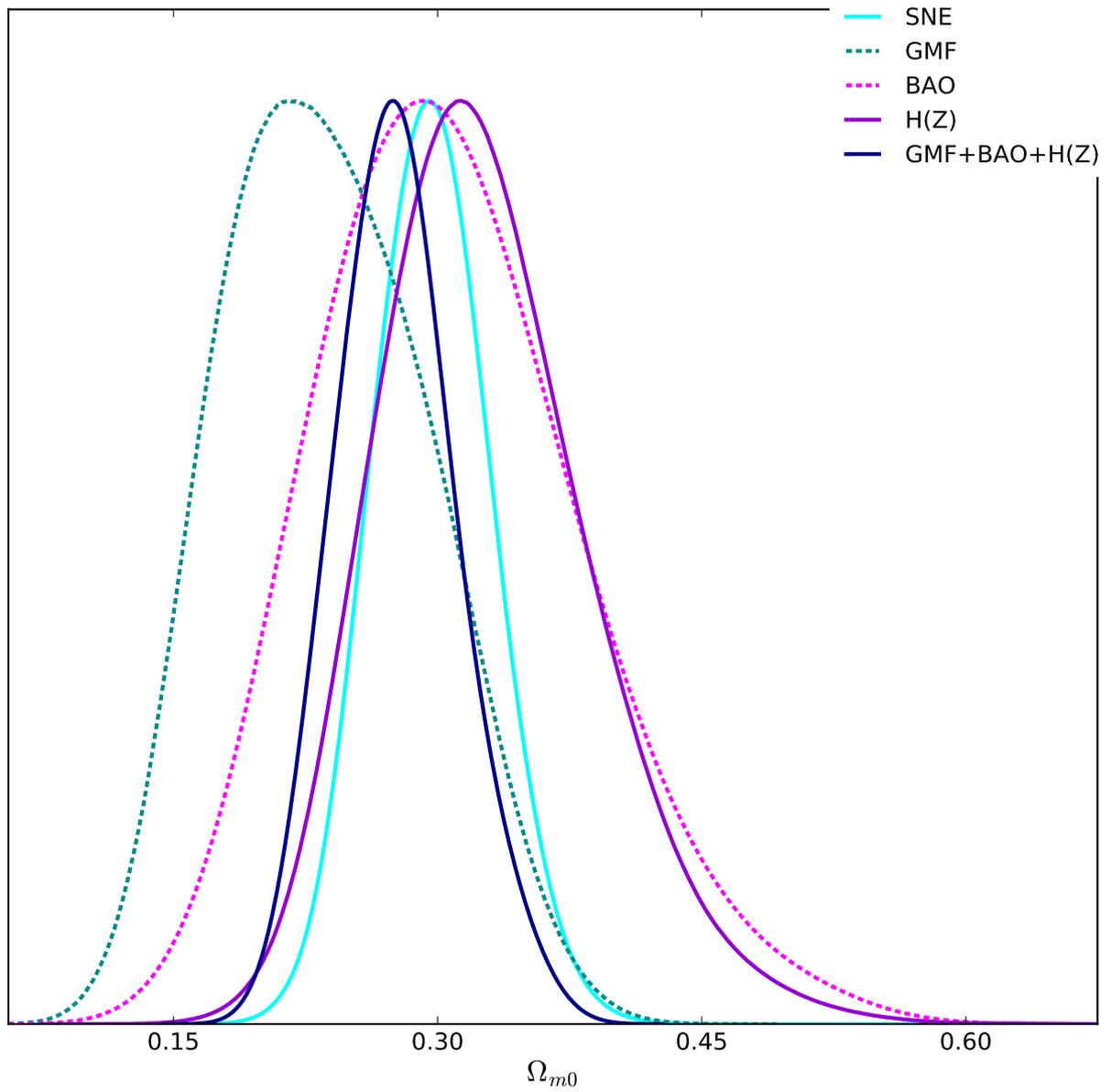


Figura 5.11 – Ajuste de dados observacionais de análise conjunta de dados de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z) + \text{SN Ia}$ para o modelo Λ CDM.

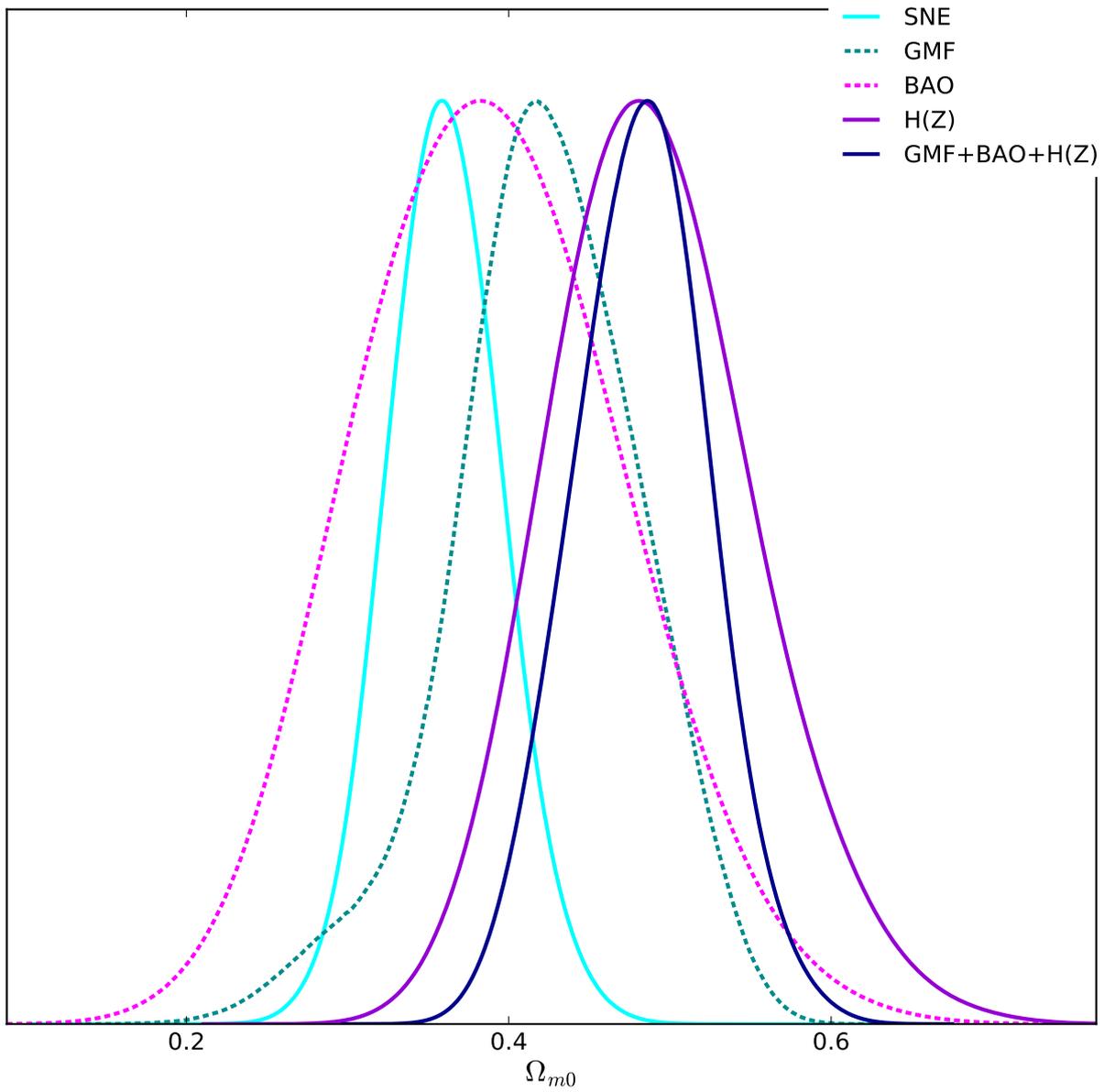


Figura 5.12 – Ajuste de dados observacionais de análise conjunta de dados de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H(z) + \text{SN Ia}$ para o modelo $\Lambda(t)\text{CDM}$.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho avaliamos testes cosmológicos em baixo *redshift* que têm menor precisão que outros testes já estudados para o modelo $\Lambda(t)$ CDM, como Supernovas do tipo Ia, CMB e espectro de potência de massa de largas estruturas. Entre as observações estudadas estão BAO, dados de relógios cosmológicos – $H(z)$ – e de fração de massa de gás em aglomerados relaxados.

No estudo da fração de massa de gás, nos deparamos com duas modelagens diferentes para o cálculo de fração de massa de gás (Ettori et al. e Allen et. al). Ao analisar o método descrito em Allen et al.^[53], resolvemos simplificá-lo a fim de verificar a relevância dos fatores de correção, particularmente de A^1 . Assim, nossas análises foram realizadas para as três modelagens escolhidas.

A análise conjunta de BAO+ $H(z)$ + f_{gas} apresentou valores para os parâmetros cosmológicos compatíveis com os encontrados na literatura, com a exceção dos resultados obtidos para Ettori, que apresentam valores muito baixos para Ω_{m0} em ambos os modelos. A modelagem de Ettori talvez não seja adequada para o pacote de dados utilizado, possivelmente por o perfil de temperatura adotado não ser compatível com os dados. Verificamos que o h , para esta observável, têm alta degenerescência. Ao compararmos os valores obtidos na combinação de $f_{\text{gas}} + \text{BAO} + H$ com o teste de SN Ia, vemos que podemos esperar que uma análise conjunta para todas essas observáveis reduza um pouco o valor de Ω_{m0} para o modelo $\Lambda(t)$ CDM, além de restringir um pouco mais seus intervalos de confiança.

Os diagramas para as observáveis também apresentaram resultados muito bons, em concordância com as observações, mostrando que o modelo $\Lambda(t)$ CDM é um forte candidato para descrever a dinâmica do Universo, mesmo a partir do testes com observáveis de baixa precisão. Em particular, o estudo feito com dados de f_{gas} abre discussões sobre como a matéria escura em aglomerados evolui com o tempo.

Pudemos constatar que os algoritmos de MCMC foram capazes de explorar bem o espaço de parâmetros, gerando resultados aceitáveis com um baixo tempo computacional. Para a maioria das observáveis, o Monte Carlo Hamiltoniano não identificou uma região de alta probabilidade, por este motivo resolvemos usar este algoritmo somente para dados de $H(z)$, para o qual conseguimos um bom desempenho. Até o momento, tivemos melhores resultados com Metropolis-Hastings, visto que foi possível verificar a convergência com apenas quatro cadeias com 10^6 passos, o que torna este método rápido e eficaz. Em trabalhos futuros, o código do HMC será reavaliado, de forma a melhor explorar o espaço de parâmetros e garantir convergência das cadeias. Pretendemos desenvolver novos códigos próprios para o algoritmo de Gibbs e de *Nested Sampling* com base nos programas já prontos. Em particular, o *Nested Sampling*

¹Ver Eq. 3.14.

é interessante pois podemos obter, ao mesmo tempo que construímos as cadeias, o valor da evidência Bayesiana do modelo estudado, com a qual será possível fazer a seleção de modelos de maneira propriamente Bayesiana.

A combinação dessas observáveis aqui apresentados com outras já estudadas, e de maior precisão, será interessante para verificarmos quantitativamente se o acréscimo dessas novas observações tornam os intervalos de credibilidade dos parâmetros mais estreitos ou não, para que possamos avaliar o impacto no modelo cosmológico de concordância.

REFERÊNCIAS

- 1 HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 15, 1929.
- 2 DODELSON, S. *Modern Cosmology*. Cambridge: Academic Press, 2003.
- 3 ZWICKY, F. On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. *Astrophysical Journal*, v. 86, 1937.
- 4 BABCOCK, H. W. The rotation of the andromeda nebula. *Lick Observatory bulletin*, v. 498, 1939.
- 5 RUBIN, V. C.; FORD, W. K. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophysical Journal*, v. 159, 1970.
- 6 RIESS, A. G. et al. New hubble space telescope discoveries of type Ia supernovae at $z \geq 1$: Narrowing constraints on the early behavior of dark energy. *The Astrophysical Journal*, v. 659, 2007.
- 7 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, v. 517, 1999.
- 8 AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark Energy: Theory and Observations*. New York: Cambridge University Press, 2010.
- 9 BORGES, H. A.; CARNEIRO, S. Friedmann cosmology with decaying vacuum density. *General Relativity and Gravitation*, v. 37, 2005.
- 10 PIGOZZO, C. et al. Observational tests for $\Lambda(t)$ CDM cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2011, 2011.
- 11 VELTEN et al. Grb hubble diagram and constraints on a $\Lambda(t)$ CDM model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 431, 2013.
- 12 PIGOZZO, C. *Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Bahia, 2010.
- 13 CARNEIRO, S. et al. Supernova constraints on decaying vacuum cosmology. *Physical Review D*, v. 74, 2006.
- 14 CARNEIRO, S. et al. Observational constraints on late-time $\Lambda(t)$ cosmology. *Physical Review D*, v. 77, 2008.
- 15 MAARTENS, R. Is the universe homogeneous? *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, v. 369, 2011.
- 16 MO, H.; BOSCH, F. van den; WHITE, S. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- 17 CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004.

- 18 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, v. 116, n. 3, 1998.
- 19 FILIPPENKO, A. V.; RIESS, A. G. Results from the high- z supernova search team. *Physics Reports*, v. 307, n. 1, 1998.
- 20 TSUJIKAWA, S. Quintessence: A review. *Classical and Quantum Gravity*, v. 30, 2013.
- 21 WEI, H. Cosmological evolution of quintessence and phantom with a new type of interaction in dark sector. *Nuclear Physics B*, v. 845, 2011.
- 22 AMENDOLA, L. Coupled quintessence. *Physical Review D*, v. 62, 2000.
- 23 TSUJIKAWA, S. Dark energy: investigation and modeling. *ArXiv e-prints*, arXiv:1004.1493 [astro-ph.CO], 2010.
- 24 CALDWELL, R. R. A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Physics Letters B*, v. 545, 2002.
- 25 RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. Ohio: Pearson, 2003.
- 26 ADE, P. A. R. et al. On the definition of distance in general relativity. *ArXiv e-prints*, arXiv:1502.01589v2 [astro-ph.IM], 2015.
- 27 SCHÜTZHOLD, R. On the cosmological constant and the cosmic coincidence problem. *International Journal of Modern Physics A*, v. 17.
- 28 SCHÜTZHOLD, R. Small cosmological constant from the QCD trace anomaly? *Physical Review Letters*, v. 89.
- 29 CARNEIRO, S. From de sitter to de sitter: A non-singular inflationary universe driven by vacuum. *International Journal of Modern Physics D*, v. 15, 2006.
- 30 ETHERINGTON, I. M. H. On the definition of distance in general relativity. *Philosophical Magazine Series 7*, v. 15, 1933.
- 31 ELLIS, G. F. R.; ELST, H. V. *Theoretical and Observational Cosmology*. Cargèse: Springer, 1999.
- 32 JIMENEZ, R.; LOEB, A. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal*, v. 573, n. 1, 2002.
- 33 DUNLOP, J. et al. A 3.5-gyr-old galaxy at redshift 1.55. *Nature*, v. 381, 1996.
- 34 MORESCO, M. et al. A 6 % measurement of the hubble parameter at $z = 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 14, 2016.
- 35 JIMENEZ, R. et al. Constraints on the equation of state of dark energy and the hubble constant from stellar ages and the CMB. *The Astrophysical Journal*, v. 593, n. 2, 2003.
- 36 SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physics Review D*, v. 71, 2005.

- 37 MORESCO, M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to $z \approx 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 6, 2012.
- 38 STERN, D. et al. Cosmic chronometers: Constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 8, 2010.
- 39 MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the hubble parameter with cosmic chronometers at $z \approx 2$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 450, 2015.
- 40 SHANKS, T. et al. The spatial clustering of QSOs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 227, 1987.
- 41 EISENSTEIN, D. J. Large-scale structure and future surveys. *ASP Conference Series*, v. 280, 2002.
- 42 SANTOS, B.; DEVI, N. C.; ALCANIZ, J. S. Bayesian comparison of non-standard cosmologies using type Ia supernovae and BAO data. *ArXiv e-prints*, arXiv:1603.06563 [astro-ph.CO], 2016.
- 43 BASSETT, B. A.; HLOZEK, R. Baryon acoustic oscillations. In: *Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. cap. 9.
- 44 LI, X. et al. Comparison of cosmological models using standard rulers and candles. *Research in Astronomy and Astrophysics*, v. 16, n. 5, 2016.
- 45 EISENSTEIN, D. J.; HU, W. Baryonic features in the matter transfer function. *The Astrophysical Journal*, v. 496, 1998.
- 46 EISENSTEIN, D. J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, v. 633, n. 2, 2005.
- 47 WHITE, S. D. M. et al. The baryon content of galaxy clusters: a challenge to cosmological orthodoxy. *Nature*, v. 366, n. 6454, 1993.
- 48 CRAIN, R. A. et al. The baryon fraction of Λ CDM haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 377, n. 41, 2007.
- 49 SARAZIN, C. L. X-ray emission from clusters of galaxies. *Reviews of Modern Physics*, v. 58, n. 1, 1986.
- 50 ALLEN, S. W.; ETTORI, S.; FABIAN, A. C. Chandra measurements of the distribution of mass in the luminous lensing cluster abell 2390. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 324, n. 4, 2001.
- 51 ALLEN, S. W. Resolving the discrepancy between x-ray and gravitational lensing mass measurements for clusters of galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 296, n. 2, 1998.
- 52 SQUIRES, G. et al. Weak gravitational lensing and x-ray analysis of abell 2163. *The Astrophysical Journal*, v. 482, n. 2, 1997.

- 53 ALLEN, S. W. et al. Improved constraints on dark energy from chandra x-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 383, n. 3, 2008.
- 54 ETTORI, S.; TOZZI, P.; ROSATI, P. Constraining the cosmological parameters with the gas mass fraction in local and $z > 0.7$ galaxy clusters. *Astronomy and Astrophysics*, v. 398, 2003.
- 55 ETTORI, S. et al. The cluster gas mass fraction as a cosmological probe: a revised study. *Astronomy and Astrophysics*, v. 501, n. 1, 2009.
- 56 PFROMMER, C. et al. Simulating cosmic rays in clusters of galaxies – I. effects on the sunyaev-zel'dovich effect and the x-ray emission. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 378, n. 2, 2007.
- 57 NAGAI, D.; KRAVTSOV, A. V.; VIKHLININ, A. Effects of galaxy formation on thermodynamics of the intracluster medium. *The Astrophysical Journal*, v. 668, n. 1, 2007.
- 58 WEINBERG, N. N.; BILDSTEN, L. Carbon detonation and shock-triggered helium burning in neutron star superbursts. *The Astrophysical Journal*, v. 670, n. 2, 2007.
- 59 CONLEY, A. et al. Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the supernova legacy survey. *The Astrophysical Journal Supplement*, v. 192, 2011.
- 60 BETOULE, M. et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astronomy and Astrophysics*, v. 568, 2014.
- 61 SULLIVAN, M. et al. The dependence of type Ia supernovae luminosities on their host galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 406, n. 2, 2010.
- 62 WANG, S.; WEN, S.; LI, M. Exploring the cosmological consequences of JLA supernova data with improved flux-averaging technique. *ArXiv e-prints*, arXiv:1606.01779 [astro-ph.CO], 2016.
- 63 ALLISON, R.; DUNKLEY, J. Comparison of sampling techniques for bayesian parameter estimation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 437, 2014.
- 64 BAYES, T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Biometrika*, v. 45, 1958.
- 65 TROTTA, R. Applications of bayesian model selection to cosmological parameters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 378, 2007.
- 66 JEFFREYS, H. *Theory of Probability*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- 67 ANDRAE, R. Error estimation in astronomy: A guide. *ArXiv e-prints*, arXiv:1009.2755 [astro-ph.IM], 2010.
- 68 GREGORY, P. *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica® Support*. New York: Cambridge University Press, 2010.
- 69 ROBERT, C.; CASELLA, G. A short history of markov chain monte carlo: Subjective recollections from incomplete data. *Statistical Science*, v. 26, n. 1, 2011.
- 70 METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, v. 21, n. 6, 1953.

- 71 METROPOLIS, N. The beginning of the monte carlo method. *Los Alamos Science*, v. 15, 1987.
- 72 ROBERT, C. P.; CASELLA, G. *Introducing Monte Carlo Methods with R*. New York: Springer, 2010.
- 73 BROOKS, S. et al. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*. London: Chapman and Hall/CRC, 2011.
- 74 LAWLER, G. F. *Introduction to Stochastic Processes*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.
- 75 BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics: General Topology*. New York: Springer, 1995.
- 76 PLAVNICK, A. The fundamental theorem of markov chains. *VIGRE REU*, 2008.
- 77 MORTLOCK, D. Computational statistics. *ICIC Data Analysis Workshop*, 2013.
- 78 HOPCROFT, J.; KANNAN, R. *Foundations of Data Science*. 2013.
- 79 RICHEY, M. The evolution of markov chain monte carlo methods. *The American Mathematical Monthly*, v. 117, n. 5, 2010.
- 80 GELMAN, D. B. R. A. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, v. 7, 1992.
- 81 ZIESER, B.; BARTELMANN, M. Constraints on cosmological parameters from strong gravitational lensing by galaxy clusters. *ArXiv e-prints*, arXiv:1204.0372 [astro-ph.CO], 2012.
- 82 JASCHE, J.; WANDEL, B. D. Bayesian inference from photometric redshift surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 425, 2012.
- 83 LYNCH, S. M. *Introduction to Applied Bayesian Statistics and Estimation for Social Scientists*. New York: Springer, 2007.
- 84 CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the metropolis-hastings algorithm. *The American Statistician*, v. 49, 1995.
- 85 BELLMAN, R. E. *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*. Princeton: Princeton University Press, 1961.
- 86 LECLERCQ, F.; WANDEL, B. Bayesian large-scale structure inference: Initial conditions and the cosmic web. *Proceedings of the International Astronomical Union. Symposium No. 306*, v. 10, 2014.
- 87 ANDERES, E.; WANDEL, B. D.; LAVAUX, G. Bayesian inference of CMB gravitational lensing. *The American Astronomical Society*, v. 808, n. 2, 2015.
- 88 DUANE, S. et al. Hybrid monte carlo. *Physics Letters B*, v. 197, 1987.
- 89 NEAL, R. M. An improved acceptance procedure for the HMC algorithm. *Journal of Computational Physics*, v. 111, 1994.
- 90 VERDE, L. et al. The length of the low-redshift standard ruler. *ArXiv e-prints*, arXiv:1607.05297 [astro-ph.CO], 2016.

- 91 HEAVENS, A.; JIMENEZ, R.; VERDE, L. Standard rulers, candles, and clocks from the low-redshift universe. *Physical Review Letters*, v. 113, 2014.
- 92 RIESS, A. G. et al. A 2.4 % determination of the local value of the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, v. 826, 2016.