



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rosana de Andrade Sousa

**Redes de Interação Preferencial: um modelo de
redes complexas com dinâmica de arestas
ponderadas.**

Salvador

14 de setembro de 2016

Rosana de Andrade Sousa

Redes de Interação Preferencial: um modelo de redes complexas com dinâmica de arestas ponderadas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Universidade Federal da Bahia – UFBA

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Dr. José Garcia Vivas Miranda

Salvador

14 de setembro de 2016

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

Sousa, Rosana de Andrade

Redes de Interação Preferencial: um modelo de redes complexas com dinâmica de arestas ponderadas / Rosana de Andrade Sousa. -- Salvador, 2016.

78 f. : il

Orientadora: José Garcia Vivas Miranda.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós Graduação em Física) -- Universidade Federal da Bahia, Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, 2016.

1. Redes Complexas. 2. Redes Ponderadas. 3. Crescimento. 4. Interação Preferencial. I. Vivas Miranda, José Garcia. II. Título.

Aos meus pais. Enquanto eu respirar, vou me lembrar de vocês (Fernando Anitelli).

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador José Garcia Vivas Miranda por toda paciência e compreensão, principalmente por acreditar em mim e não me deixar desistir. Agradeço a minha família: Robson Andrade, Rosângela Andrade e Manuella Andrade. Particularmente a Rosângela, por nunca ter me deixado sozinha; e por sempre me dar motivos para continuar. Você é quem me faz forte; sem você eu não sou ninguém! A Ana Luiza Carvalho, por todas as horas de conversas, conforto, carinho e dedicação que sempre foram muito além da relação profissional.

Aos meus queridos amigos Rone Lemos, Mariana Medeiros, Antônio Pacífico Neto e Ariadne Helena, muito obrigada pela amizade, pelo companheirismo, por sempre poder contar com vocês nos momentos de alegrias, tristezas, angústias e vitórias. Com vocês tudo é melhor, mais humano. Agradeço a minha amiga Cândia Barreto pela amizade e apoio, por me nortear e ajudar durante todo este período. Agradeço aos meus amigos Pedro Teodoro e Elaine Cambui pelo carinho, amizade, pelas horas de descontração e de trabalho, pelas conversas, risadas e conselhos. A Vinícius Nonato, não tenho como agradecer por toda a amizade, apoio, dedicação e paciência que tem comigo desde que o conheço. Obrigada por acreditar em mim, mais do que eu mesma, e por enfrentar comigo todos os obstáculos, sem desanimar.

Agradeço aos colegas do NITRE principalmente a Raphael Rosário, Lucas Gabriel e Eslaine Santos. Aos amigos do Instituto de Física, sobretudo a Vinícius Mendonça, Wallas Nascimento, Eric Pinto, Felipe Ventura, Leonardo Fabio, Edwin Mozo, Alfredo Blanco, Bruno Bastos, Anderson Alexandre, Elenilson Nery e Adauto Dias, por todas as conversas, risos e resenhas que tornaram esse período mais leve. Aos funcionários do colegiado, particularmente a Marcos Paulo, João Paulo e Marli Cabral, por todo o apoio. Às tantas amizades que fiz na biblioteca, especialmente a Talita Costa e Rosa Bunchaft. Às pessoas com quem compartilhei apartamento, principalmente a Lucas Godeiro.

Às amigas que, mesmo distante, sempre estiveram por perto, dando-me forças para continuar, Sandra Oliveira, Isis Rolim e Sheila Freitas. E a minha grande amiga Andriele Prado: "Pra nós, todo o amor do mundo", mais uma vez.

A CAPES pelo apoio financeiro.

“How I wish you were here. We’re just two lost souls swimming in a fish bowl, year after year. Running over the same old ground, what have we found? The same old fears! Wish you were here...”

(David Gilmour, Roger Waters)

Resumo

Neste trabalho é proposto um modelo de redes ponderadas baseado em mecanismos semelhantes ao modelo de redes livres de escala de Albert e Barabási, denominado Redes de Interação Preferencial. O propósito deste modelo é reproduzir sistemas que possuem tamanho fixo e no qual a intensidade das conexões mais fortes é reforçada com o decorrer do tempo. Este modelo é composto por dois processos: o crescimento do peso das arestas da rede e a interação preferencial, isto é, quanto maior for o peso de uma aresta, maior será a sua probabilidade de ser escolhida. Para entender as características das Redes de Interação Preferencial, foram realizadas simulações de redes para diversos valores dos parâmetros do modelo— tamanho da rede, acréscimo de peso e quantidade de iterações— e em seguida, foram analisados o comportamento das probabilidades acumuladas complementar dos pesos das arestas destas redes. Por fim, em uma aplicação das Redes de Interação Preferencial, foram comparadas redes construídas a partir dos sinais do eletroencefalograma de indivíduos com as redes geradas por meio do modelo.

Palavras-chaves: Redes Complexas. Redes Ponderadas. Crescimento. Interação Preferencial.

Abstract

In this work, a model of weighted networks based on similar Albert-Barabási's scale free networks Model mechanisms, coined Preferential Interaction Networks, is proposed. This model aims to reproduce systems who have fixed size and the intensity of the strong connections is strengthened with time. This network model is composed by two processes: the growth of the weights of the networks' edges and the preferential interaction, i.e., the greater is the weight of an edge, the greater is its probability of being selected. To understand the features of Preferential Interaction Networks, simulations of networks were made for several values of the model parameters – network size, weight increase and number of interactions – and subsequently, the behavior of the complementary cumulative probabilities of weights of the edges of these networks were analyzed. Lastly, in an application of Preferential Interaction Networks, networks were constructed from electroencephalogram signals from individuals and were compared with networks generated by the model.

Keywords: Complex Networks. Weighted Networks. Growth. Preferential Interaction.

Lista de ilustrações

Figura 1 – (a) Mapa de Königsberg (b) Grafo de Königsberg.	5
Figura 2 – Grafo: vértices e arestas	7
Figura 3 – Grafo: representação gráfica	7
Figura 4 – (a) Grafo direcionado e (b) Grafo não direcionado	8
Figura 5 – Multigrafo	8
Figura 6 – Grafo (a) Ponderado e (b) Não ponderado	9
Figura 7 – Grafo regular	9
Figura 8 – Grafo simples	9
Figura 9 – (a) Grafo G e (b) Matriz de adjacência	10
Figura 10 – (a) Grafo G ponderado e (b) Matriz de adjacência	11
Figura 11 – Grafo G	12
Figura 12 – (a) Distribuição de graus dos vértices e (b) Distribuição acumulada complementar dos graus dos vértices	12
Figura 13 – Grafo com hub	13
Figura 14 – Coeficiente de aglomeração do vértice v_1	14
Figura 15 – Grafos Variantes no Tempo	19
Figura 16 – Construção da Rede Estática Agregada	19
Figura 17 – Construção do modelo de Redes Aleatórias $G(N,P)$	22
Figura 18 – Construção do modelo de Redes Aleatórias $G(N,M)$	22
Figura 19 – Modelo de mundo pequeno	24
Figura 20 – Modelo de redes livres de escala de Albert e Barabási	26
Figura 21 – (a) Distribuição normal e (b) Lei de potência	27
Figura 22 – Redes de Interação Preferencial	32
Figura 23 – Rotina Principal	33
Figura 24 – Sub-rotinas	34
Figura 25 – Probabilidade. (a) P_i grande (b) P_i pequena	35
Figura 26 – Efeito do número de iterações nas RIP. (a) 10 vértices; (b) 100 vértices; (c) 1000 vértices.	37
Figura 27 – Redes com 10 vértices e acréscimo de peso igual a 10 unidades	38
Figura 28 – Efeito dos acréscimos de pesos nas RIP. (a) 10 vértices; (b) 100 vértices; (c) 1000 vértices.	41
Figura 29 – Redes com 10 vértices e diferentes valores para o acréscimo de peso	42
Figura 30 – Redes com 100 vértices e diferentes valores para o acréscimo de peso	44
Figura 31 – Gráficos não interpolados do indivíduo A	47
Figura 32 – Ilustração do cálculo do índice D_{RMS}	48
Figura 33 – Gráficos interpolados do indivíduo A	49

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Matriz de adjacência para uma rede com 10 vértices e 100 iterações . .	39
Tabela 2	–	Matriz de adjacência para uma rede com 10 vértices e 10^7 iterações . .	40
Tabela 3	–	D_{RMS} : indivíduo A	50
Tabela 4	–	Comparações: indivíduo A e modelo	51
Tabela 5	–	D_{RMS} : indivíduo B	53
Tabela 6	–	Comparações: indivíduo B e modelo	54
Tabela 7	–	(a) D_{RMS} : indivíduo C (b) D_{RMS} : indivíduo D	56
Tabela 8	–	Comparações: modelo e indivíduos C e D	56

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	Teoria dos grafos: Uma abordagem histórica	4
2.2	Definição e tipos de grafos	7
2.3	Representação e caracterização dos grafos	10
2.4	Redes Complexas	15
2.5	Grafos Variantes no Tempo	18
2.6	Modelos de Redes Complexas	20
2.6.1	Modelo de Redes Aleatórias	20
2.6.2	Modelo de Redes de Mundo Pequeno	23
2.6.3	Modelo de Redes Livres de Escala	24
2.6.4	Modelos com Redes Ponderadas	27
3	REDES DE INTERAÇÃO PREFERENCIAL	30
4	RESULTADOS	36
4.1	Análise dos parâmetros das RIP	36
4.1.1	Análise do efeito das iterações nas RIP	37
4.1.2	Análise dos efeitos dos acréscimos de peso e do tamanho da rede	41
4.2	Aplicação	45
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	58
	APÊNDICE A – SINCRONIZAÇÃO POR MOTIFS	60
	REFERÊNCIAS	63

1 Introdução

As redes são descritas basicamente como uma estrutura composta por elementos que se conectam [1], e podem ser representadas e visualizadas por meio de uma estrutura matemática denominada *grafo*, na qual consiste de vértices ligados por meio de arestas [2]. As arestas de um grafo indicam alguma espécie de relação entre os seus vértices. O estudo das redes, na forma da Teoria dos Grafos, é um dos pilares fundamentais da matemática discreta e teve o seu início por volta de 1736 com o matemático Leonard Euler [3].

Diversos sistemas reais podem ser representados por meio de redes. Na maioria destes sistemas, a análise dos seus componentes individuais é insuficiente para explicar o comportamento observado pelo sistema como um todo [4], posto que existem variáveis importantes que são intrínsecas tanto às conexões dos elementos do sistema, quanto ao mecanismo da construção destas conexões [2]. Por exemplo, a análise de apenas um indivíduo não permite conclusões amplas à respeito da sociedade. Estes sistemas são denominados sistemas complexos e as redes que os descrevem, redes complexas. Outras propriedades dos sistemas complexos, tais como a não-linearidade, a auto-organização e a emergência são apresentadas e discutidas em [5].

Os sistemas que podem ser representados por intermédio das redes compreendem desde sistemas comuns ao cotidiano como as redes sociais, a rede de energia elétrica, de telefonia e de Internet até as redes neurais, alimentares ou de citação de artigos científicos [6]. De acordo com Newman [1,3] o estudo das redes pode ser classificado em 4 tipos distintos, são eles: redes sociais, redes de informação, redes biológicas e redes tecnológicas.

Nos últimos anos, com a disponibilidade de computadores que nos permitiram reunir e analisar dados em grande escala. As análises das redes por meio da teoria dos grafos se tornaram inadequada, uma vez que a análise visual de redes compostas por milhões ou bilhões de vértices são inviáveis [3]. Desta forma, surgiu a necessidade de se desenvolverem abordagens estatísticas para as análises das redes, além de modelos capazes de imitar o desenvolvimento de uma rede e produzir as propriedades observadas em topologias reais [7]. Em relação aos principais modelos de redes complexas, podem ser citados: o modelo de redes aleatórias de Erdős e Rényi, o modelo de redes de mundo pequeno de Watts e Strogatz e o modelo de redes livres de escala de Albert e Barabási.

As redes referentes a esses modelos apresentam estruturas booleanas, ou seja, as arestas são representadas como estados binários: presente ou ausente [8], conseqüentemente, não é possível exprimir a diversidade da intensidade das conexões [7,9]. Desta forma, alguns sistemas são melhor descritos por meio de redes ponderadas. Nessas redes, as conexões

dispõem de valores numéricos cujas definições dependem do sistema a ser analisado.

Uma vez que os componentes de um sistema podem variar com o tempo, para descrever estas mudanças por meio de redes é necessário utilizar alguma metodologia capaz de representar a dinâmica desse sistema, como por exemplo, os Grafos Variantes no Tempo [10]. As redes que descrevem uma mudança de comportamento dos seus elementos com o decorrer do tempo são chamadas de redes dinâmicas.

Com o propósito de construir um modelo capaz de descrever sistemas com o tamanho fixo, e no qual a intensidade das conexões mudam com o tempo, de forma a reforçar as conexões mais fortes, desenvolvemos as Redes de Interação Preferencial–RIP. Este modelo, se baseia em redes dinâmicas e para a sua construção adotamos o formalismo matemático dos grafos variantes no tempo. Além disso, admitimos que as RIP são ponderadas, uma vez que estamos interessados em analisar a intensidade das conexões de um sistema. Desta forma, construímos um modelo regido por dois mecanismos: crescimento do peso das arestas da rede e interação preferencial. O crescimento do peso das arestas da rede, isto é, em cada iteração uma aresta da rede terá seu peso modificado e a interação preferencial que se refere à tendência que quanto maior for o peso de uma aresta, maior é a probabilidade dessa aresta ter o seu peso alterado.

Os mecanismos adotados na construção do RIP são semelhantes aos utilizados no modelo de redes livres de escala de Albert e Barabási [11], isto é, crescimento e conexão preferencial. No entanto, no modelo de redes livres de escala, o processo de crescimento se refere a adição contínua de vértices à rede; e a conexão preferencial é definida como a tendência dos novos vértices estabelecer conexões com os vértices mais conectados da rede. Diferentemente das RIP, no modelo de redes livres de escala, a intensidade das conexões não é considerada, haja visto que as redes são representadas como estruturas booleanas. O modelo de redes livres de escala descreve sistemas em que o seu tamanho cresce com o decorrer do tempo, enquanto que as RIP descrevem sistemas com tamanho fixo.

Para a aplicação das RIP, construímos redes a partir de sinais do eletroencefalograma de 4 indivíduos, com o auxílio do método de Sincronização por Motifs [12, 13]. Estas redes representam o padrão de conectividade cerebral desses indivíduos, enquanto os mesmos realizam uma determinada tarefa. Em seguida, comparamos as distribuições dos pesos das arestas das redes estudadas com as distribuições dos pesos das arestas das RIP para diferentes valores dos seus parâmetros, e constatamos que o padrão de conectividade cerebral de um indivíduo qualquer, pode ser reproduzido por meio dos mecanismos que formulamos para as RIP.

A estrutura deste trabalho é composta por 5 capítulos e obedece a seguinte ordem: no Capítulo 1, esta introdução; no Capítulo 2, são apresentados os conceitos teóricos que são as bases da construção das RIP; no Capítulo 3, é descrita detalhadamente a metodologia das RIP. O Capítulo 4 traz as análises dos parâmetros do modelo proposto,

além de sua aplicação em Neurociência, baseado no trabalho: *Estudo da conectividade cortical em estado alterado de consciência: Meditação* [14]. No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e sugestões de pesquisas futuras. Por fim, no *Apêndice A*, descrevemos com detalhes o método de Sincronização por Motifs adotado nas construções das redes geradas a partir de dados de EEG.

2 Fundamentação Teórica

Este capítulo, organizado em três seções, apresenta inicialmente uma breve introdução histórica acerca da origem da teoria dos grafos, seguida da apresentação do seu formalismo matemático, com ênfase em sua representação geométrica e os tipos de grafos. Na seção seguinte, são enumeradas algumas representações de grafos, sobretudo a partir de uma matriz de adjacência; e são apontados alguns conceitos usados nesta dissertação como: grau, grau ponderado de um vértice, distribuição de graus de uma rede, hubs, coeficiente de aglomeração e diâmetro de uma rede. Neste contexto, é estabelecida uma conexão entre a teoria dos grafos e as redes complexas, bem como é apresentado o conceito de Grafos Variantes no Tempo - GVT. A terceira seção é dividida em quatro subitens. A descrição de três modelos de redes, que são a base para o estudo e desenvolvimento da pesquisa em redes complexas, é discutida nos três primeiros subitens. O quarto subitem aborda alguns modelos de redes livres de escala que utilizam arestas ponderadas na sua construção.

2.1 Teoria dos grafos: Uma abordagem histórica

O estudo das redes iniciou-se no século XVIII com a teoria dos grafos. No ano de 1736, o matemático suíço Leonhard Euler fundamentou a teoria dos grafos e o seu raciocínio topológico ao solucionar o Problema das Sete Pontes de Königsberg. Este nome faz referência à cidade prussiana de Königsberg, que atualmente se chama Kaliningrado e se situa em território russo. A cidade é cortada pelo rio Pregel que a divide em quatro áreas de terra, unidas por um complexo, à época composto por sete pontes (Figura 1 (a)). Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar as sete pontes exatamente uma única vez e retornar ao ponto inicial. Para resolver este problema, Euler construiu uma representação simplificada e operacional da cidade de acordo com a Figura 1(b), na qual as áreas de terra separadas por pontes foram representadas por pontos (denominados nós ou vértices na teoria dos grafos) e as sete pontes foram representadas por meio de linhas (referidos na teoria dos grafos por arcos ou arestas). Neste texto, são adotados os termos vértices e arestas. Uma estrutura composta por vértices e arestas é denominada grafo. Euler concluiu que é impossível atravessar todas as sete pontes e voltar ao ponto de origem, sem que haja repetição de pontes no percurso. Isto seria possível apenas se todas as áreas de terra possuísem um número par de pontes ou se apenas duas áreas de terra apresentassem um número ímpar de pontes [4, 7, 15–18].

Em meados do século XIX, o físico russo Gustav Robert Kirchhoff iniciou o desenvolvimento da teoria das árvores (uma classe especial de grafos) para modelar circuitos elétricos. A teoria das árvores foi utilizada ainda nos estudos sobre isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos, em química orgânica por Cayley, e pelo matemático francês Camille

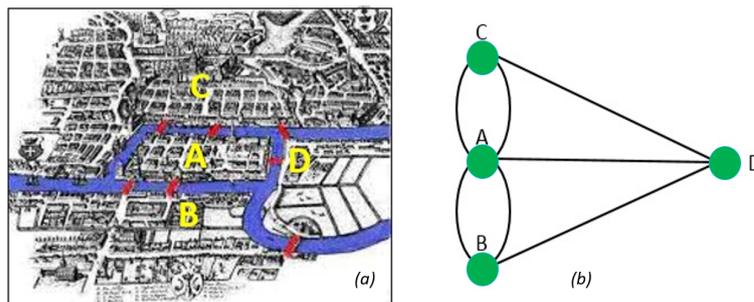


Figura 1 – (a) Mapa de Königsberg (b) Grafo de Königsberg.(Figura adaptada [19])

Jordan, pioneiro em estabelecer um formalismo matemático à teoria das árvores [15,17]. Poucos anos depois do formalismo elaborado por Jordan, foi enunciada por Francis Guthrie e De Morgan a conjectura das quatro cores, proposta em 1850, mas provada apenas em 1976, por K. Appel e W. Haken. O teorema das quatro cores estabelece que todo mapa desenhado em um plano e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com apenas quatro cores, de maneira que regiões adjacentes apresentem colorações diferentes [15–18]. As tentativas de demonstrar a conjectura das quatro cores promoveu o desenvolvimento de conceitos importantes, a exemplo dos polinômios cromáticos, elaborado por Birkhoff (1912); o grafo dual de Whitney (1931); e o teorema desenvolvido por Brooks (1941), que limita o número cromático de um grafo [17].

Os conceitos de ciclo e de caminho euleriano e hamiltoniano surgiram igualmente no século XIX. O matemático, físico e astrônomo irlandês Willian Rowan Hamilton, muito conhecido principalmente por seu trabalho em Mecânica Analítica, desenvolveu um jogo denominado Icosiano. Hamilton construiu um *mundo* representado por um dodecaedro, no qual cada vértice simboliza uma cidade do mundo real, entre elas Londres; e as ligações entre elas são representadas por arestas. O objetivo é sair e voltar a Londres, após ter visitado todas as cidades uma única vez.

Embora este problema é análogo ao problema das pontes de Königsberg, há algumas distinções: enquanto no problema resolvido por Euler, cada aresta deve ser visitada uma única vez, com início e término no mesmo vértice; para Hamilton, cada vértice deve ser visitado apenas uma vez e depois retorna-se ao ponto de partida. Essas trajetórias são denominadas, respectivamente, ciclo euleriano e ciclo hamiltoniano. Do mesmo modo, grafos contendo estes ciclos são ditos grafos euleriano e grafos hamiltoniano, respectivamente [15–18].

Na década de 1950, os matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi propuseram que grafos poderiam seguir um padrão aleatório de formação e introduziram um novo conceito: grafos aleatórios [4, 20]. O modelo de Erdős-Rényi, conhecido como teoria dos grafos aleatórios, unifica a teoria dos grafos com algumas ferramentas da teoria das probabilidades. A partir do modelo de redes aleatórias, é possível estudar as propriedades

dos grafos em função do crescimento das conexões¹ aleatórias entre os vértices. Grafos aleatórios apresentam uma distribuição desordenada de arestas que conecta os seus vértices. Devido a este modelo de referência, muitos fenômenos naturais e sociais podem ser analisados, tais como a disseminação de doenças, reações químicas, a propagação de vírus na Internet, entre outros.

Sete anos depois, Stanley Milgram, psicólogo social vinculado à Universidade de Havard, descobriu uma propriedade importante presente em grafos que representam as relações sociais: o fenômeno do mundo pequeno [4, 20]. Interessado na estrutura da sociedade americana, ele realizou um experimento para determinar a distância média entre duas pessoas quaisquer nos Estados Unidos (EUA). O experimento foi realizado da seguinte forma: foram enviadas cartas a um conjunto de pessoas, escolhidas aleatoriamente, moradoras de Omaha, em Nebraska. Cada portador de uma carta tinha como objetivo enviá-la para um determinado destinatário residente em Boston, a capital do estado de Massachusetts. Se o portador não o conhecesse, deveria entregá-la a algum conhecido seu que pudesse eventualmente conhecer o destinatário. Nesse modelo, os vértices do grafo representam os indivíduos que contribuíram para as cartas chegarem ao seu destino final. As arestas, por sua vez, representam o caminho feito por cada carta, por meio destes indivíduos. De acordo com a referência [4], foram distribuídas 160 cartas. Destas, apenas 42 retornaram. O menor caminho percorrido por uma carta foi equivalente a 2 conexões e o maior, 12 conexões. Ao calcular o valor médio das conexões feitas por estas 42 cartas, obtém-se aproximadamente 6. Devido a esse experimento, surgiu o conceito de *seis graus de separação*, ou seja, entre duas pessoas, escolhidas de forma aleatória em qualquer lugar do mundo, é possível conectá-las por meio de apenas seis contatos intermediários - o que explica a denominação *efeito mundo pequeno* atribuída a este fenômeno.

Em 1998, com base no experimento de Milgram, o físico Duncan J. Watts e o matemático Steven Strogatz construíram um algoritmo com o auxílio de grafos aleatórios para estudar o fenômeno de mundo pequeno de forma generalizada [4, 20]. De acordo com esse algoritmo, os grafos que representam as interações sociais exibem padrões muito aglomerados, de modo a compor pequenas quantidades de conexões entre cada indivíduo. Eles criaram um modelo de grafo no qual os vértices representam as pessoas e as arestas são simbolizadas por ligações entre elas. O padrão de funcionamento desse modelo, no qual as pessoas se conectam às pessoas mais próximas, e a indivíduos escolhidos aleatoriamente, gera grafos com características de mundo pequeno. O uso deste modelo permite demonstrar que a distância média entre dois sujeitos quaisquer no mundo não ultrapassa uma quantidade pequena de pessoas intermediárias, desde que existam algumas conexões aleatórias entre elas.

No ano seguinte, contrariamente aos modelos de grafos aleatórios já estabelecidos,

¹ O conceito de conexão pode ser definido como uma aresta que une dois vértices.

Albert-László Barabási e Réka Albert apostaram na existência de uma dinâmica particular, capaz de regular a formação dos grafos [4, 20]. Para isso, construíram um modelo denominado redes livres de escala (*Scale-free Networks*). Este modelo é composto por dois ingredientes de construção: *crescimento*, que permite a adição de vértices a cada passo de tempo, e *conexão preferencial*, que condiciona esses novos vértices a se conectarem preferencialmente a outros, interligados a um maior número de conexões. Consequentemente, estas redes apresentam poucos vértices altamente conectados (*hubs*) e muitos vértices com poucas conexões. A distribuição de graus para os vértices obedece uma lei de potência $P(k) \sim k^{-\gamma}$, onde k é o número de conexões de um vértice escolhido aleatoriamente e γ é o expoente de escala.

Na próxima subseção é apresentada a definição matemática de grafo e alguns dos seus tipos.

2.2 Definição e tipos de grafos

Conforme abordado anteriormente, um grafo corresponde a uma coleção de pontos, conhecidos como vértices, unidos em pares por linhas que conectam estes vértices, denominadas arestas [1], como mostrado na Figura 2.

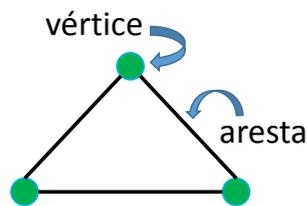


Figura 2 – Grafo: vértices e arestas

Matematicamente, podemos definir um grafo $G(V, E)$ como um conjunto finito de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i\}$ conectados por um conjunto de arestas $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_k\}$, onde cada aresta e_k representa um par de vértices (v_i, v_j) que relaciona os vértices v_i e v_j , isto é, $e_k = (v_i, v_j)$. A notação simplificada e_{ij} também pode ser usada para representar uma aresta e_k .

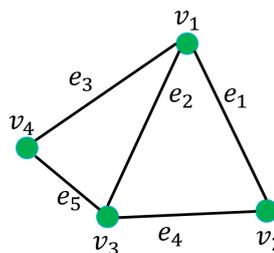


Figura 3 – Grafo: representação gráfica

Desta forma, para o grafo da Figura 3, o conjunto de vértices V é definido como $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e o conjunto das arestas E é definido como $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, onde $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_1, v_4)$, $e_4 = (v_2, v_3)$, $e_5 = (v_3, v_4)$.

Os grafos podem ser classificados em vários tipos, tais como: grafo direcionado e grafo não direcionado, multigrafo, grafo ponderado ou não ponderado, grafo regular e grafo simples. Um determinado grafo pode pertencer a mais de um tipo. Os tipos de grafos aqui definidos, podem ser encontrados em [16, 18].

Direcionado e não direcionado: Um grafo direcionado, ou *Digrafo*, é aquele cujos arcos, e não mais arestas, expressam um determinado sentido. Conseqüentemente, o arco que conecta um determinado vértice v_i a outro v_j é diferente do arco que liga o vértice v_j ao vértice v_i . Os arcos de um grafo direcionado são representados por meio de setas que indicam a direção de um vértice para o outro (Figura 4(a)). Contrariamente aos grafos direcionados, as arestas dos grafos não direcionados não têm o sentido da conexão. Dessa forma, não há distinção entre a aresta que conecta o v_i ao vértice v_j e a aresta que conecta o vértice v_j ao vértice v_i . As arestas dos grafos não direcionados são representadas por meio de segmentos de reta, como demonstra a Figura 4(b).

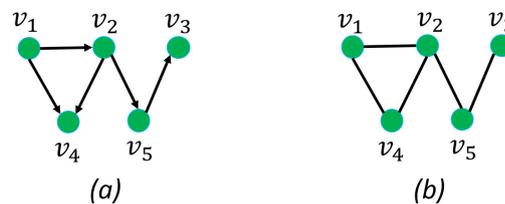


Figura 4 – (a) Grafo direcionado e (b) Grafo não direcionado

Multigrafo: Um multigrafo é um grafo que possui pelo menos um par de arestas com vértices iguais. O grafo da Figura 5 é um multigrafo, pois existem duas arestas que conectam os vértices v_2 e v_3 .

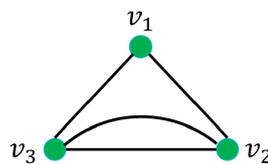


Figura 5 – Multigrafo

Ponderados ou não ponderados: Em grafos ponderados existem valores numéricos (pesos) associados as suas arestas. Em oposição, as arestas dos grafos não ponderados, não possuem valores numéricos associados a elas. A Figura 6 exemplifica-os. Os valores e o significado dos pesos de um grafo ponderado dependem de qual sistema

o grafo representa. Em um grafo em que os vértices correspondem as cidades e as arestas simbolizam as estradas, o peso pode representar a distância entre elas.

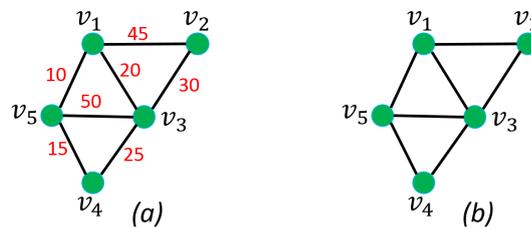


Figura 6 – Grafo (a) Ponderado e (b) Não ponderado

Regular: Um grafo G é r -regular (ou regular de grau² r) quando cada vértice de G possui o mesmo número r de arestas. A Figura 7 exemplifica um grafo 3-regular (ou regular de grau 3), pois cada vértice do grafo possui três arestas.

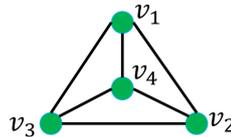


Figura 7 – Grafo regular

Simples: Em um grafo simples G , as arestas ou vértices não possuem pesos; não existe mais de uma aresta entre os mesmos vértices; e não há auto-conexões ou laços³. Um grafo simples, portanto, não é ponderado, não é um multigrafo e não possui laços, como o grafo da Figura 8.

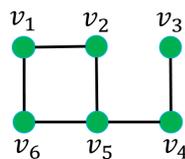


Figura 8 – Grafo simples

Os tipos de grafos utilizados no desenvolvimento deste trabalho foram: grafo simples, grafo ponderado e o grafo regular. Todos os procedimentos estão detalhados no Capítulo 3.

² A definição de grau de um vértice será discutida posteriormente na subseção 2.3.

³ Um laço é definido como uma aresta que conecta um vértice a si mesmo.

2.3 Representação e caracterização dos grafos

Os grafos podem ser representados e armazenados tanto por meio de um diagrama, como demonstra a Figura 2, quanto por meio de listas e matrizes. As listas mais utilizadas são a lista de incidência e a lista de adjacência. As matrizes mais utilizadas são a matriz de incidência, a matriz geodésica, a matriz diagonal, a matriz laplaciana e matriz de adjacência [21].

Na implementação do modelo desenvolvido neste trabalho, todos os grafos foram representados por meio de matrizes de adjacência. A primeira parte dessa seção traz uma abordagem sobre a matriz de adjacência para grafos não ponderados e ponderados. Em seguida, são apresentados alguns dos principais índices que medem quantitativamente as propriedades topológicas dos grafos. As representações e definições estabelecidas nesta seção seguem as referências [1, 3, 7, 18].

Matriz de adjacência para grafos não ponderados

A matriz de adjacência $A_{N \times N}$, referente a um grafo com N vértices, é construída mediante duas possibilidades: caso exista uma aresta entre os vértices v_i e v_j , o elemento de matriz a_{ij} recebe o número 1; do contrário, o elemento a_{ij} recebe o valor 0. Ou seja,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ estão conectados} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.1)$$

Perceba que o elemento de matriz a_{ij} corresponde a aresta $a_k = a_{ij} = (v_i, v_j)$ entre o vértice v_i e o vértice v_j . A matriz de adjacência é simétrica, se e somente se, o grafo que ela representa for não direcionado. É importante observar também que, na matriz de adjacência de um grafo simples, a diagonal principal é sempre composta por 0 pois, como citado anteriormente, para este tipo de grafo não existem laços. A Figura 9 ilustra um grafo simples e sua matriz de adjacência.

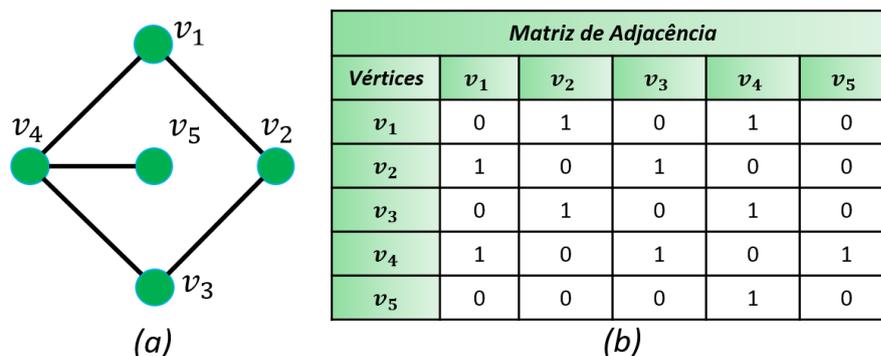


Figura 9 – (a) Grafo G e (b) Matriz de adjacência

Matriz de adjacência para grafos ponderados

A construção da matriz de adjacência para um grafo ponderado ocorre por meio do preenchimento dos elementos a_{ij} da matriz com o peso w_{ij} de cada aresta. Se dois vértices não estão conectados, então o elemento de matriz correspondente a estes vértices recebe o número 0. Este conceito pode ser representado de outro modo, como

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{onde } w_{ij} \text{ é o peso da aresta entre o vértice } v_i \text{ e o vértice } v_j \\ 0, & \text{caso não haja aresta entre o vértice } v_i \text{ e o vértice } v_j \end{cases} \quad (2.2)$$

Para um melhor entendimento, a Figura 10 apresenta um grafo ponderado simples e sua matriz de adjacência:

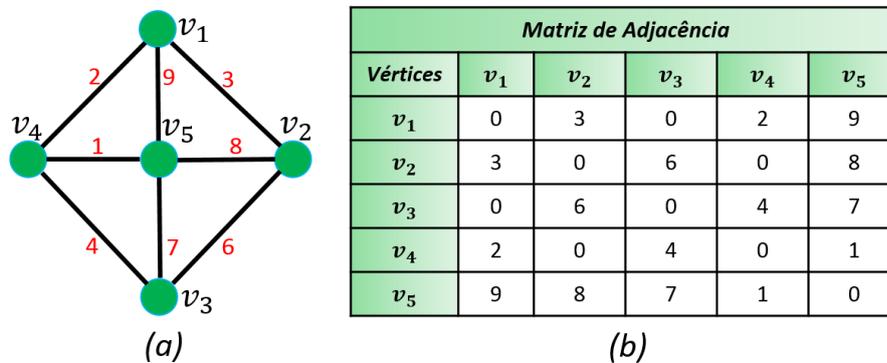


Figura 10 – (a) Grafo G ponderado e (b) Matriz de adjacência

Grau de um vértice

Para grafos não ponderados e não direcionados, o grau de um vértice v_i é calculado por meio da soma da quantidade de arestas conectadas a este vértice. Ao utilizar a matriz de adjacência, é possível escrever matematicamente o grau k_i do vértice v_i da seguinte forma:

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \quad (2.3)$$

onde o elemento de matriz a_{ij} é definido por meio da Condição 2.1 e N é o número total de vértices do grafo.

Grau ponderado de um vértice

Em um grafo ponderado, para se calcular o grau ponderado k_i^w de um vértice v_i , é necessário considerar os pesos de cada aresta conectada a esse vértice. O grau ponderado de um vértice v_i é dado por

$$k_i^w = \sum_{j=1}^N w_{ij}, \quad (2.4)$$

onde w_{ij} é o peso das arestas discutido na Condição (2.2).

Grau médio de um grafo

O grau médio $\langle k \rangle$ de um grafo G é dado pela média aritmética dos graus de cada vértice, isto é,

$$\langle k \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N k_i}{N}. \tag{2.5}$$

Distribuição do grau ponderado médio

Um parâmetro muito utilizado no estudo dos grafos consiste na distribuição de graus dos vértices de um grafo G . Esta distribuição é obtida por meio de um histograma de todos os possíveis graus k_i dos vértices e suas respectivas probabilidades P_{k_i} .

Considere um grafo G composto por N vértices. Seja N_k a quantidade de vértices com um dado grau k . A probabilidade P_k de um vértice v_i , escolhido aleatoriamente dentre os vértices de G , ter grau igual a k é calculada por meio da seguinte equação:

$$P_k = \frac{N_k}{N}. \tag{2.6}$$

A Figura 11 traz um grafo G simples composto por 20 vértices e a Figura 12(a), a distribuição dos graus destes vértices. Os pontos do gráfico da figura representam a probabilidade P_k de um vértice com um determinado grau k ser sorteado aleatoriamente dentre todos os 20 vértices do grafo G . Este cálculo é obtido por meio da Equação (2.6).

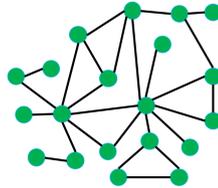


Figura 11 – Grafo G

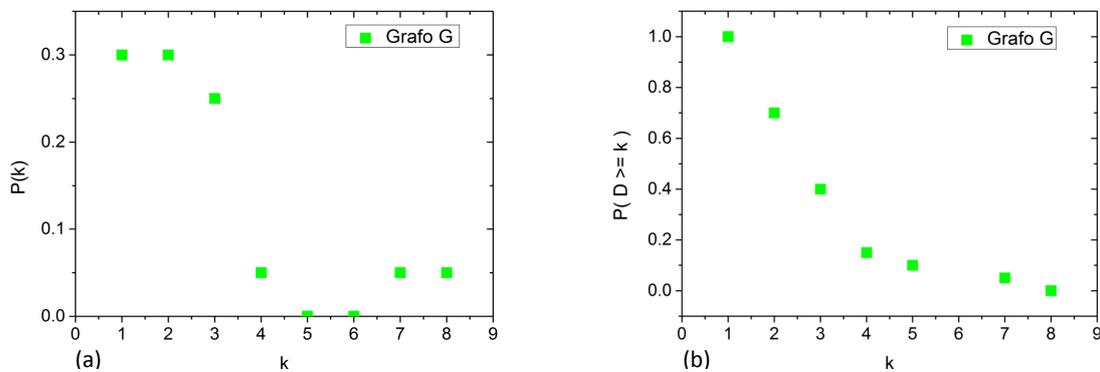


Figura 12 – (a) Distribuição de graus dos vértices e (b) Distribuição acumulada complementar dos graus dos vértices

Algumas distribuições, a exemplo daquelas em forma de uma lei de potência, são melhor visualizadas por meio do gráfico da distribuição acumulada complementar dos

graus. Essa distribuição informa a probabilidade de encontrar vértices na rede com grau D maior ou igual a um dado grau k . Segundo a Equação (2.7), este cálculo se baseia no somatório de todas as probabilidades P_k dos vértices com grau menor que k , obtidas por meio da Equação (2.6). A probabilidade $P_{D \geq k}$ de se encontrar vértices com grau D , onde D é maior ou igual a k é descrita conforme abaixo:

$$P_{D \geq k} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_i, \quad (2.7)$$

onde P_i corresponde à Equação (2.6).

A Figura 12(b) corresponde ao gráfico da distribuição acumulada complementar dos graus dos vértices do grafo da Figura 11. Este tipo de distribuição permite visualizar de forma mais clara as características dos grafos. Ao analisar a distribuição 12(b) é possível verificar que vértices com grau igual a 1 são os mais frequentes no grafo G , em oposição ao vértice com grau 8, que é o maior grau e o menos frequente. A distribuição acumulada complementar dos vértices de um grafo é sempre uma função decrescente.

Neste trabalho, é utilizada a distribuição acumulada complementar para analisar os resultados do modelo a ser descrito no Capítulo 3.

Hubs de um grafo

Outro conceito necessário para o entendimento deste trabalho é a definição de hubs. De acordo com [4], os hubs são definidos como vértices que possuem graus maiores do que o grau médio do grafo. De outra maneira, um hub é definido como um vértice cujo grau $k_{v_i} \gg \langle k \rangle + 2\sigma$. Dessa forma, o vértice v_9 da Figura 13 é um exemplo de hub.

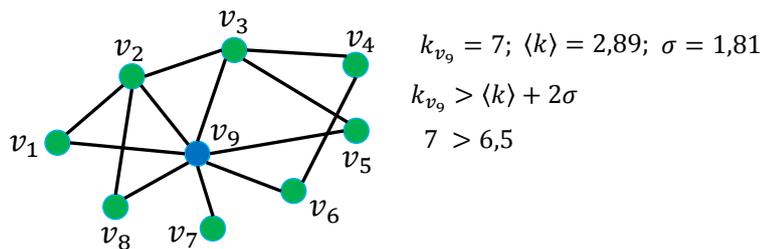


Figura 13 – Grafo com hub

Coefficiente de aglomeração de um vértice

O coeficiente de aglomeração C_{v_i} de um determinado vértice v_i pertencente a um grafo G mede o nível de conexão entre este vértice e os seus vizinhos. De outra forma, o coeficiente de aglomeração de um vértice v_i é a probabilidade de que os vértices adjacentes⁴ a v_i sejam adjacentes entre si. Para tanto, é calculada a razão do número de arestas entre

⁴ Em um grafo simples G , dois vértices v_i e v_j são adjacentes caso exista uma aresta entre eles.

os vizinhos do vértice v_i , denotado por E_{v_i} , e o número máximo possível de arestas entre esses vizinhos, que é dado por $k_{v_i}(k_{v_i} - 1)/2$ onde k_{v_i} é o grau do vértice v_i . Assim, o coeficiente de aglomeração é dado por

$$C_{v_i} = \frac{2E_{v_i}}{k_{v_i}(k_{v_i} - 1)}. \quad (2.8)$$

Desta forma, o coeficiente de aglomeração do vértice v_1 do grafo abaixo é igual a $1/3$.

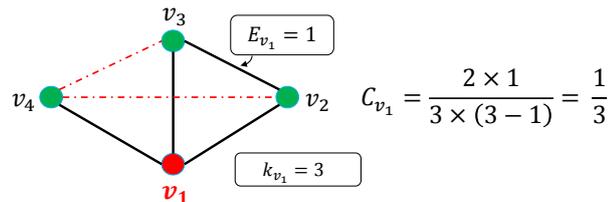


Figura 14 – Coeficiente de aglomeração do vértice v_1

O coeficiente de aglomeração será sempre um número entre 0 e 1. Quanto maior a quantidade de conexões entre os vizinhos do vértice v_i , maior será o seu coeficiente de aglomeração. Se o coeficiente de aglomeração for 0, significa que os vizinhos do vértice v_i não estão conectados entre si. De outro modo, se o coeficiente de aglomeração for igual a 1, significa que todos os vizinhos do vértice v_i estão conectados entre si. Uma observação relevante é que a definição de coeficiente de aglomeração se aplica somente a vértices com grau maior do que 1.

Coeficiente de aglomeração médio de um grafo

O coeficiente de aglomeração médio de um grafo G pode ser obtido por meio da soma dos coeficientes de aglomeração C_i de todos os vértices do grafo dividida pelo tamanho⁵ N do grafo, como definido na equação abaixo:

$$\langle C \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N C_i}{N}. \quad (2.9)$$

No entanto, esta média é realizada apenas sobre os vértices que possuem coeficiente de aglomeração definido.

Diâmetro de um grafo

O comprimento do caminho⁶ que conecta dois vértices v_i e v_j é medido pela quantidade de arestas existentes entre eles. Define-se l_{ij} como o caminho com o menor

⁵ Por um abuso de linguagem, o tamanho de um grafo G será definido como o seu número total de vértices.

⁶ O caminho entre dois vértices de uma rede é a sequência, sem repetições, de arestas que ligam estes vértices.

comprimento entre os vértices v_i e v_j . O valor máximo de l_{ij} é chamado de diâmetro do grafo.

Caminho mínimo médio de um vértice

O caminho mínimo médio de um vértice v_i é dado por

$$\langle l_i \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} l_{ij}}{N-1}, \quad (2.10)$$

De outra forma, pode-se dizer que $\langle l_i \rangle$ é a média aritmética de todos os caminhos mínimos do vértice v_i .

Caminho mínimo médio da rede

O caminho mínimo médio da rede é a média aritmética de todos os $\langle l_i \rangle$ de cada vértice v_i

$$\langle l \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \langle l_i \rangle}{N}. \quad (2.11)$$

2.4 Redes Complexas

De maneira simplificada, uma rede é definida como uma abstração matemática utilizada para representar as relações presentes entre as partes de um sistema. Isto é possível, desde que este sistema seja composto de partes individuais, ou componentes, ligadas entre si de alguma maneira [1]. Na construção de uma rede, cada componente do sistema é representado por meio de pontos denominados vértices, que são conectados entre si por meio de linhas, as arestas. Isto pode ser exemplificado pela Internet, que constitui uma rede de roteadores e computadores (vértices) ligados por meio de conexões físicas ou sem fio (arestas). De modo similar, a *World Wide Web-WWW* é uma enorme rede virtual de páginas da web (vértices) conectadas por hiperlinks (arestas) [6].

A representação de um sistema por meio de uma rede se baseia, sobretudo, no padrão de conexão do sistema, isto é, nas interações entre os seus constituintes. Os sistemas descritos deste modo incluem desde os sistemas tangíveis ao espaço euclidiano, como a rede de energia elétrica, auto-estradas, sistemas de metrô e redes neurais, até os sistemas definidos no espaço abstrato, a exemplo das redes de amizade ou de colaboração científica [7].

A maioria das redes estudadas descrevem sistemas que mudam com o passar do tempo. Na rede da Internet, por exemplo, computadores podem ser adicionados a ela e/ou desconectados, assim como as conexões entre eles podem ser interrompidas por algum motivo. Desse modo, os sistemas e as redes que os representam não são estáticos,

mas dinâmicos! Uma rede dinâmica, como o nome sugere, expressa uma mudança de comportamento de seus elementos. Estas mudanças podem estar relacionadas às alterações das conexões entre os seus elementos, bem como à natureza dessas conexões.

A dinâmica da rede é uma característica muito importante, pois possibilita que uma determinada rede possa ser considerada um sistema complexo, ou mais especificamente, uma rede complexa. Um sistema complexo é aquele que exhibe um comportamento de difícil previsibilidade, pois ele se modifica continuamente, de forma não linear, ao longo do tempo. Características como não linearidade, auto-organização e emergência, dentre outras, são frequentemente encontradas em sistemas complexos [4].

De acordo com [4], de forma resumida, um sistema é tido como *não linear* na medida que pequenas causas podem provocar grandes efeitos, e vice-versa. Isto contraria os sistemas lineares, nos quais as relações entre causa e efeito são proporcionais. A característica de *auto-organização* se refere à capacidade de alguns sistemas de criar padrões de comportamento não previsíveis, sem a necessidade de um organismo central de planejamento, seja ele interno ou externo. Por fim, a *emergência* é definida como o processo de formação de padrões complexos, não planejados, que emergem a partir de uma repetição de interações simples. Em sistemas complexos, esses padrões ocorrem devido à característica de auto-organização. Estas e outras características de sistemas complexos são abordadas de forma aprofundada em [5, 19].

Em [1, 3] Newman divide o estudo das redes complexas em quatro categorias: redes sociais, redes de informação, redes biológicas e redes tecnológicas.

Redes Sociais: Uma rede social é um conjunto formado por indivíduos ou grupos de indivíduos com algum padrão de contato ou interações entre eles. Como exemplos, é possível citar as redes de colaboração de atores em filmes e a rede de colaboração científica. No primeiro caso, os vértices são os atores e dois vértices têm uma aresta em comum se atores contracenarem em um mesmo filme. De forma análoga, na rede de colaboração científica, os cientistas correspondem aos vértices; existe uma aresta entre dois vértices somente se estes cientistas publicarem um artigo juntos.

Uma propriedade estrutural inerente às redes sociais é o fato da distância média entre os vértices ser curta. Essas redes possuem ainda alto coeficiente de aglomeração, pois suas arestas estão dispostas de forma a compor triângulos entre os vértices da rede.

Redes de Informação: As redes de informação podem ser igualmente denominadas redes de conhecimento, por constituírem um conjunto de dados (vértices) conectados entre si (arestas). A *World Wide Web*, citada anteriormente, representa a maior rede com topologia conhecida. Em 1999, o tamanho dessa rede alcançou aproximadamente um bilhão de vértices [4].

Uma segunda rede de informação é a rede de citação de publicações científicas, na qual os artigos publicados simulam os vértices e as referências a um determinado artigo, os arcos. Dessa forma, se em um artigo A há uma citação do artigo B , existe um arco que se origina em A e aponta para B . É importante mencionar que seja na rede WWW, seja na rede de citação, as conexões são feitas por meio de arestas direcionada. A existência de um vínculo que relaciona A com B não implica na existência de um vínculo no sentido contrário. Em redes com arestas direcionadas, é possível calcular as distribuições de graus de saída e de entrada.

Redes Biológicas: As redes biológicas correspondem aos padrões de interação entre determinados elementos biológicos; e são construídas de forma similar às demais redes, visto que seus componentes (elementos biológicos) representam os vértices desta rede e as interações entre estes componentes, as arestas. Na biologia molecular, as redes representam os padrões de reações entre substâncias químicas na célula. Os neurocientistas utilizam redes ainda para representar padrões de conexões entre as células cerebrais. Na rede neural de seres como os Neumatóides *C. Elegans*, por exemplo, os neurônios equivalem aos vértices e a sinapse que os conectam, a aresta. Em Ecologia, as redes alimentares, ou simplesmente teias alimentares, são utilizadas para quantificar a interação entre espécies diversas [22]. Dessa forma, as espécies simbolizam os vértices, bem como a relação predador-presa representam as arestas. O estudo da referência [23], sobre as sete maiores teias alimentares conhecidas afirma que as redes alimentares são altamente agrupadas. Estes autores consideraram a rede não dirigida; e identificaram que a distribuição de graus de algumas dessas redes seguem uma lei de potência⁷ com expoente 1.1. A pesquisa desenvolvida na referência [24] demonstra que algumas dessas distribuições de graus podem ser ajustadas como uma distribuição exponencial.

Redes Tecnológicas: As redes tecnológicas são construídas pelo homem com o objetivo de distribuir algum produto ou recurso, como a eletricidade ou a informação. São exemplos de redes tecnológicas as redes de energia, redes de transporte, redes de entrega, redes de distribuição de telefonia, entre outras. Na rede de energia, os geradores, transformadores e subestações remetem aos vértices, enquanto as linhas de transmissão de alta tensão correspondem às arestas.

Outra rede tecnológica muito conhecida é a Internet. A topologia desta rede pode ser estudada por meio de dois níveis diferentes. No primeiro nível, os roteadores equivalem aos vértices e a conexão física entre eles, as arestas. No segundo nível, um conjunto formado por centenas de roteadores e computadores, denominado domínio, representa um único vértice. Caso um roteador promova a conexão entre

⁷ Este tipo de distribuição será discutido na subseção 2.6.3.

dois domínios, esse nível torna-se um *interdomínio* ou *sistemas autônomos*. Os computadores de uma empresa ou universidade exemplificam este tipo de sistema

O crescente interesse no estudo das redes complexas motivou a comunidade científica a desenvolver ferramentas matemáticas, computacionais e estatísticas para analisar, modelar e compreender as redes [1]. A próxima subseção apresenta uma ferramenta importante no estudo das redes dinâmicas, os grafos variantes no tempo.

2.5 Grafos Variantes no Tempo

Devido à característica dinâmica presente em muitas redes, surgiu o conceito de Grafos Variantes no Tempo - GVT. De acordo com Nicosia e Tang [10], os GVT são representados como uma sequência de grafos que possuem tamanho fixo e são ordenados no tempo. De outra forma, os GVT são uma sequência consecutiva de M grafos, isto é $\mathcal{G} = \{G(t_1), G(t_2), G(t_3), \dots, G(t_M)\}$, onde cada um destes grafos contém N vértices. Nesta representação de \mathcal{G} , existe um grafo diferente $G(t_m)$ associado a cada passo de tempo t_m , onde $m = 1, 2, 3, \dots, M$. A Figura 15 ilustra um GVT. Perceba que para cada tempo t_m existe um grafo com 5 vértices que compõe \mathcal{G} , e cada um destes grafos exibe uma configuração diferente das arestas.

Em [25], Casteigts e colaboradores formalizaram diversos conceitos desenvolvidos no estudo das redes dinâmicas. A característica dinâmica das redes permite assumir que os seus componentes, ou seja, os vértices e as arestas, existam em um período de tempo determinado, que pode ser um período finito ou infinito, discreto ou contínuo. Sendo assim, os GVT são definidos como uma quintupla $\mathcal{G} = (V, E, \mathcal{T}, \rho, \varsigma)$, onde:

- V representa o conjunto de vértices de \mathcal{G} ;
- $E \subseteq V \times V$ representa o conjunto de arestas de \mathcal{G} ;
- \mathcal{T} é o tempo de vida do sistema;
- $\rho : E \times \varsigma \longrightarrow \{0, 1\}$ é a função de presença que garante a existência de uma dada aresta em um dado instante de tempo;
- $\varsigma : E \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{N}$ é a função latência que diz respeito ao tempo necessário para estabelecer o relacionamento entre dois vértices em um dado instante.

Há duas considerações importantes a se fazer neste contexto. Primeiro, é que o modo como os GVT são construídos, isto é, cada aresta está associado um instante de tempo, permite que o GVT represente as frequentes mudanças topológicas das redes dinâmicas. Segundo, para cada instante de tempo t_m existe uma matriz de adjacência que representa as conexões do grafo naquele instante. Como discutido anteriormente, por

intermédio das matrizes de adjacência é possível analisar a conectividade dos vértices de uma rede com o auxílio de índices, tais como: o grau médio ou grau ponderado. Com o uso da matriz de adjacência aliada ao formalismo do GVT, torna-se possível analisar a conectividade dos vértices para cada instante de tempo t_m da sequência de redes que compõe o GVT.

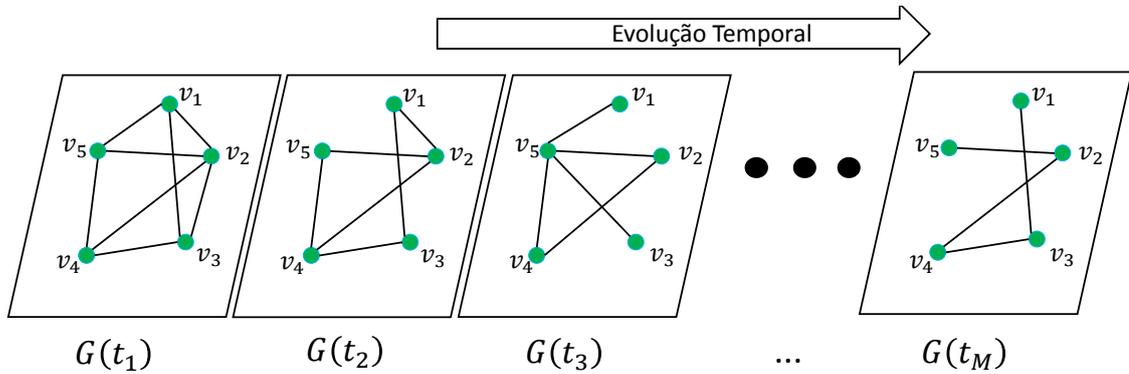


Figura 15 – Grafos Variantes no Tempo

Outro conceito relevante no estudo dos GVT é a Rede Estática Agregada - REA, ver referência [10]. Uma REA é definida como um grafo construído a partir da superposição das conexões de todos os grafos de um GVT. Nesse processo, considera-se todas as conexões existentes no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t)$ como se ocorressem em um único instante t . O que se obtém deste processo é um único grafo ponderado que possui todas as características discutidas anteriormente, tais como: matriz de adjacência, grau ponderado, grau médio. Neste trabalho, é construída a REA de todas as redes geradas em cada iteração de um simulação do modelo de Redes de Interação Preferencial, que será desenvolvido no Capítulo 3.

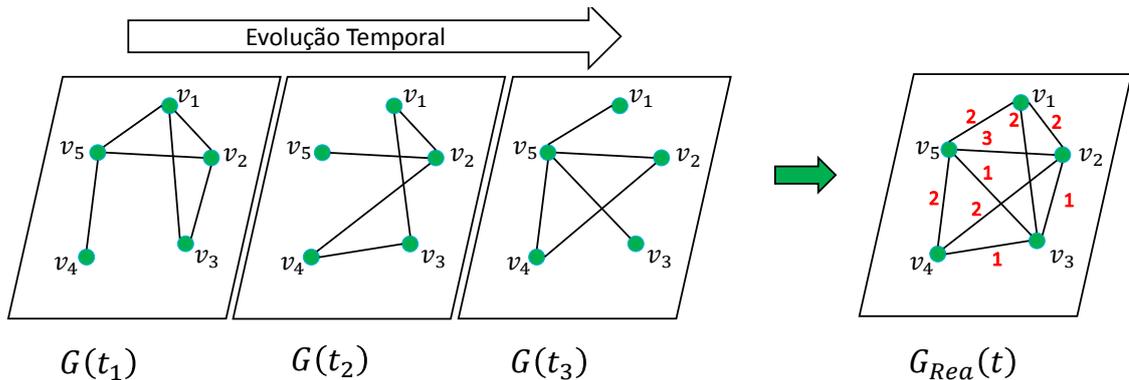


Figura 16 – Construção da Rede Estática Agregada

Os pesos das conexões de uma REA podem ter diversas interpretações que dependem do sistema modelado. Um esquema da construção de uma REA é demonstrado na Figura 16, onde os grafos $G(t_1)$, $G(t_2)$ e $G(t_3)$ são referentes aos tempos t_1 , t_2 e t_3 , respectivamente. O grafo ponderado da Figura 16 representa a REA do intervalo de tempo $(t_1 \leq t \leq t_3)$. A matriz de adjacência da REA é construída de acordo com o equação (2.2), e os índices

grau ponderado k e grau médio $\langle k \rangle$ podem ser calculados por intermédio da matriz de adjacência juntamente com as Equações (2.4) e (2.5), respectivamente.

O formalismo dos GVT é utilizado nas análises de redes de diversas áreas da pesquisa científica. Santoro *et al.* [26] utilizam os GVT para analisar redes sociais. Na Neurociência, este formalismo pode ser utilizado para analisar a conectividade funcional do cérebro humano [27]. Podem ser utilizados ainda no estudo da dinâmica epidêmica, como exemplo, o trabalho desenvolvido por Hugo Saba e colaboradores [28], onde são construídas redes de correlação entre as ocorrências de casos de dengue entre cidades do estado da Bahia. Os detalhes do uso dos GVT, neste trabalho, são discutidos no próximo capítulo. A subseção seguinte traz um resumo de alguns dos principais modelos de redes complexas.

2.6 Modelos de Redes Complexas

Com o objetivo de uma melhor compreensão da estrutura e do comportamento das redes complexas, muitos modelos de redes têm sido propostos. No entanto, entender os mecanismos de uma rede é uma tarefa inerentemente difícil, uma vez que envolve outras complicações como, por exemplo, o padrão como os vértices se conectam pode mudar com o passar do tempo; arestas podem aparecer e desaparecer, assim como podem ter pesos diferentes associados a elas ou orientações diferentes.

Neste capítulo, são apresentados três modelos de redes bem estabelecidos na literatura, são eles: O modelo de redes aleatórias de Erdős e Rényi (subseção 2.6.1), o modelo de redes de mundo pequeno de Watts e Strogatz (subseção 2.6.2) e, o modelo de redes livres de escala de Albert e Barabási (subseção 2.6.3). Além destes modelos, a subseção 2.6.4 traz a descrição de alguns modelos de redes posteriores ao modelo de Albert e Barabási, que são fundamentados no conceito de crescimento, conexão preferencial e redes ponderadas. Entender estes modelos é importante, uma vez que eles são as bases da construção do modelo desenvolvido neste trabalho.

2.6.1 Modelo de Redes Aleatórias

Em 1959, Erdős e Rényi propuseram um modelo que tinha como objetivo descrever todas as redes complexas em um único esquema. Este modelo foi denominado como o modelo de redes aleatórias de Erdős e Rényi. Como o nome sugere, para construir as redes deste modelo, elas foram representadas como sistemas aleatórios. Existem duas variações deste modelo, embora a metodologia seja a mesma: usar probabilidade para construir redes que sejam aleatórias. Os algoritmos destas duas variações estão detalhados na subseção a seguir.

O modelo de redes aleatórias é fundamentado em dois pressupostos simples. O primeiro considera que o tamanho da rede é fixo e permanece imutável ao longo do tempo. E o segundo consiste na predição que todos os vértices, em uma determinada rede, têm aproximadamente a mesma quantidade de conexões ou igualdade nas chances de receber novas arestas [4].

O modelo de redes aleatórias de Erdős e Rényi aborda valores médios, dessa forma considere uma sociedade com 6 bilhões de indivíduos, então de acordo com este modelo, a maioria dos indivíduos deveria possuir aproximadamente o mesmo número de conhecidos; a maioria das empresas negociaria com aproximadamente o mesmo número de outras empresas; a maioria dos sites da Internet deveria ser acessado aproximadamente pelo mesmo número de visitantes. No entanto, é fácil perceber que as previsões baseadas por este modelo diferem do comportamento observado na maioria das redes reais. Embora não seja adequado para descrever muitos sistemas reais, o modelo de Erdős e Rényi é de fundamental importância no estudo das redes, pois antes de sua introdução, este estudo concentrava-se quase exclusivamente em grafos regulares [4].

Algoritmo do modelo de redes aleatórias de Erdős e Rényi

O modelo mais usual de redes aleatórias de Erdős e Rényi é denominado $G(N,P)$, onde N é o número de vértices da rede e P representa a probabilidade de conexão dos vértices. Este modelo parte de um conjunto fixo de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_N\}$ totalmente desconectados, e para cada vértice de V é atribuído uma probabilidade P fixa de haver uma aresta entre quaisquer pares destes vértices. Depois de definidos o conjunto de vértices V e a probabilidade P de conexão, arestas serão adicionadas à rede por meio de um evento aleatório e independente.

Desta forma, suponha uma rede com N vértices e probabilidade $P = 1/2 = 0,5$. A seguir, escolhe-se dois vértices desta rede e uma face qualquer de uma moeda, por exemplo, a face cara. Se ao jogar a moeda: a face obtida for cara, uma aresta é adicionada à rede. Caso contrário, outro par de vértices é escolhido e o procedimento é repetido até que todos os pares de vértices da rede tenham a chance de se conectarem. O valor esperado m para a quantidade total de arestas em uma rede aleatória com N vértices e probabilidade P é dado por:

$$m = Pm_{max}, \quad (2.12)$$

onde

$$m_{max} = \frac{N(N-1)}{2}, \quad (2.13)$$

e m_{max} indica o número máximo de arestas em uma rede simples.

O diagrama da Figura 17 traz outro exemplo de redes aleatórias $G(N,P)$. Neste, uma rede aleatória com 6 vértices é construída para diferentes valores de P . A quantidade de aresta na rede foi calculada por via da Equação (2.12). Assim, para $P = 0$ a rede está

completamente desconectada, como ilustra a Figura 17(a). Com o aumento do valor da probabilidade P mais arestas surgem na rede, compare as Figuras 17(b) e 17(c). Quando a probabilidade P atinge o seu valor máximo, ou seja, quando $P = 1$, todos os vértices estão conectados e a rede se torna regular.

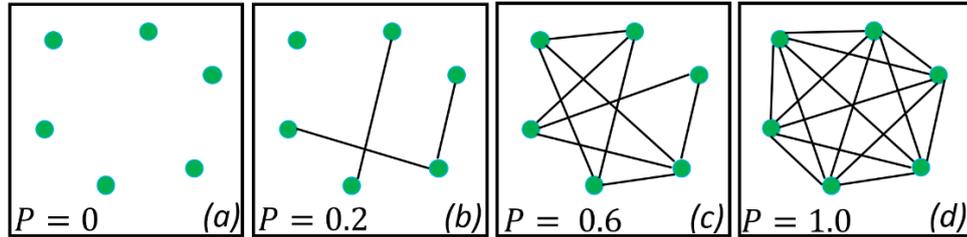


Figura 17 – Construção do modelo de Redes Aleatórias $G(N, P)$

O outro mecanismo para gerar redes aleatórias de Erdős e Rényi é denominado $G(N, M)$, onde N é uma quantidade fixa de vértices e M é um número fixo de arestas. Neste modelo, após serem definidos os valores fixos de N e M , as redes são criadas distribuindo-se aleatoriamente as M arestas entre os N vértices. Neste modelo, os N vértices têm iguais probabilidades de conexão.

Simplificadamente, neste modelo, é selecionado aleatoriamente um grafo $G(N, M)$ dentre o conjunto composto por todos os grafos que possuem um determinado número de vértices e de arestas. Enfatiza-se que todos os grafos deste conjunto são equiprováveis. Por exemplo, para a configuração $N = 3$ e $M = 2$, existem três possibilidades de grafos diferentes, como ilustrado na Figura 18, e cada uma delas possui a mesma probabilidade $P = 1/3$ de ser selecionado. Neste caso, um grafo $G(3, 2)$ é obtido por meio da escolha aleatória de qualquer um dos grafos.

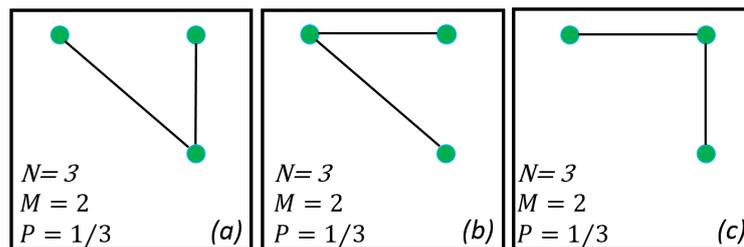


Figura 18 – Construção do modelo de Redes Aleatórias $G(N, M)$

Por fim, os modelos $G(N, P)$ e $G(N, M)$ resultam em uma distribuição de graus que se ajusta a uma distribuição normal. A justificativa deste comportamento está no fato de que no modelo $G(N, P)$, cada possível aresta é incluída de forma independente das outras, e no modelo $G(N, M)$, não existe dependência entre o grafo escolhido e os demais grafos do conjunto. Quando o número de vértices é tal que $N \rightarrow \infty$, a distribuição de graus pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson com grau médio dos vértices dado por $\langle k \rangle = NP$. Nestes modelos de redes aleatórias não existem laços ou multiarestas e o coeficiente de aglomeração C_i é igual a probabilidade P .

2.6.2 Modelo de Redes de Mundo Pequeno

No final da década de 1990, ao estudarem sobre as redes sociais, Duncan Watts e Steven Strogatz desenvolveram um modelo de redes denominado Redes de Mundo Pequeno. Para construir este modelo, foi utilizada a característica de mundo pequeno, descoberta por Stanley Milgram em 1967. Redes que apresentam tal característica possuem caminhos curtos entre seus vértices e alto coeficiente de aglomeração em comparação as redes aleatórias. Como exemplo de uma rede de mundo pequeno, suponha uma rede de amizades. Neste tipo de rede, é fácil encontrar pessoas desconhecidas que tenham amigos em comum, o que implica em um caminho curto entre as pessoas da rede. Além disso, é comum que os amigos de uma pessoa da rede se conheçam entre si, este fato indica a característica de alta aglomeração.

O modelo de redes de mundo pequeno agrega a propriedade de mundo pequeno com o caráter aleatório das redes de Erdős e Rényi, como é possível ser conferido a seguir. Resumidamente, neste modelo a quantidade de vértices da rede é fixa e eles são dispostos em círculo. Cada um destes vértices se conecta ao vizinho seguinte e aos seus vizinhos mais próximos. Para incluir a propriedade de mundo pequeno, reconecta-se algumas destas arestas escolhidas aleatoriamente na rede. A reconexão de poucas arestas não só reduz a distância dos vértices escolhidos - caminho curto - mas também faz com que os seus vizinhos imediatos fiquem mais próximos entre si - alta aglomeração.

Embora o modelo de redes de mundo pequeno disponha de características importantes no estudo de redes complexas, as conexões que são adicionadas neste modelo são feitas de forma inteiramente aleatória. Conseqüentemente, tanto o modelo de redes aleatórias de Erdős e Rényi, quanto o modelo de redes de mundo pequeno de Watts e Strogatz descrevem redes onde todos os vértices têm, aproximadamente, a mesma quantidade de arestas.

Algoritmo do modelo de redes de mundo pequeno

O modelo de redes de mundo pequeno de Watts e Strogatz é construído a partir de uma rede em formato circular, formada por N vértices conectados aos k vizinhos mais próximos. Para inicializar o modelo, adota-se um sentido (horário ou anti-horário) de varredura dos vértices e depois seleciona-se um vértice inicial v_i qualquer. Entre os vizinhos de v_i , é escolhido outro vértice v_j , como é ilustrado na Figura 19(a). Em seguida, acontece o processo de reconexão, isto é, por meio de uma certa probabilidade P , a aresta que conecta o vértice v_i ao vértice v_j é desconectada de v_j e reconectada a outro vértice aleatório v'_j , como retrata a Figura 19(b). Neste modelo não é permitido laços ou multiarestas.

A quantidade total de reconexões que é feita na rede é dada por $n = PkN/2$, onde k representa o grau de cada vértice, calculado por meio da Equação (2.3). Este

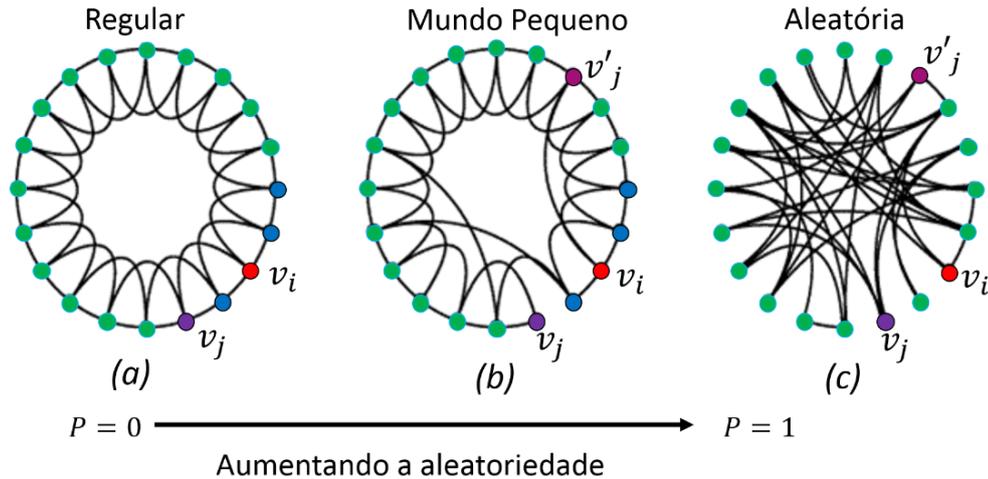


Figura 19 – Modelo de mundo pequeno. (Figura adaptada de [20])

procedimento de reconexão transforma uma rede regular em uma rede aleatória sem modificar a quantidade de vértices e arestas da rede. Visto que, para $P = 0$, o número de reconexões n é igual a 0 e a rede permanece regular, conforme a Figura 19(a). Quando $P = 1$ todas as arestas da rede são conectadas aleatoriamente, ver a Figura 19(c). O modelo de redes de mundo pequeno está situado na região intermediária entre $P = 0$ e $P = 1$. Em redes que apresentam características de mundo pequeno, o caminho mínimo médio entre dois vértices escolhidos aleatoriamente cresce proporcionalmente ao logaritmo do número de vértices que esta rede possui.

2.6.3 Modelo de Redes Livres de Escala

No final da década de 90, Albert e Barabási utilizaram um software para mapear a topologia da rede da *Web* [4]. Com isso, esperava-se encontrar uma rede aleatória onde as páginas (vértices) tivessem, aproximadamente, o mesmo número de links (arestas), isto é, todas as páginas da Web seriam igualmente populares. No entanto, a rede encontrada por Albert e Barabási possuía uma topologia diferente da prevista, uma vez que ela dispõe de muitos vértices com poucas arestas e poucos vértices com um número extraordinariamente grande de arestas. Devido a este comportamento, a distribuição dos graus destes vértices segue uma lei de potência [4].

No modelo de redes aleatórias, discutido anteriormente, a sua distribuição de graus segue uma curva normal e para N grande obedece uma distribuição de Poisson. Nesta distribuição, o pico da curva indica que a maioria dos vértices da rede tem, aproximadamente, o *mesmo* grau, vértices com graus que se desviem da média são raros neste tipo de distribuição (ver Figura 20(a)). Desta forma, a rede possui uma escala característica, representada pelo grau médio dos vértices e indicada pelo pico da distribuição. Contrariamente, a distribuição de graus de redes que segue uma lei de potência não possui pico em sua forma, como ilustra a Figura 20(b) e o desvio padrão desse tipo de distribuição

aumenta com o tamanho da rede. Por este motivo, redes em que a distribuição de graus obedece uma lei de potência são definidas como redes livres de escala ou redes sem escala.

Para explicar a formação de hubs, e conseqüentemente, a lei de potência encontrada nas redes livres de escala, Albert e Barabási propuseram um modelo dinâmico de redes composto por dois processos: crescimento e conexão preferencial. O primeiro processo é definido mediante a adição contínua de novos vértices para o sistema. Por exemplo, em uma rede de atores este mecanismo pode ser observado por meio da adição de novos atores à rede. E o segundo processo, conexão preferencial, é definido como a tendência de que um novo vértice da rede seja conectado a um vértice que possui um grau elevado de conexões. Por exemplo, em uma rede de atores, a probabilidade de um novo ator ser estreado com os já estabelecidos é maior do que a probabilidade deste novo ator ser estreado com atores menos conhecidos.

Para as redes livres de escala, estes processos precisam atuar juntos. O processo de crescimento proporciona aos primeiros vértices da rede um tempo maior para obter mais conexões. Enquanto os últimos vértices dispõem de menos tempo e, conseqüentemente, realizarão menos conexões. Embora os primeiros vértices adicionados à rede tenham mais oportunidades de fazer conexões do que os últimos, apenas esse processo não é suficiente para explicar os hubs. Para isto, se faz necessário a atuação em conjunto da conexão preferencial. A conexão preferencial assegura que os vértices novos devem se conectar, preferencialmente, com os vértices mais conectados da rede. Dessa forma, os primeiros vértices mais conectados realizam cada vez mais novas conexões. Com o passar do tempo, esses vértices adquirem uma quantidade grande de conexões; este processo dá origem aos hubs, e por conseguinte, a distribuição em lei de potência.

Redes livres de escala são observadas em vários sistemas, como, por exemplo, na Internet, nas redes de atores, nas redes de citação de artigos científicos, nas redes econômicas, nas redes linguísticas, entre outras. Uma característica importante das redes livres de escala é que são muito resistentes à *falhas*⁸, pois como existem poucos vértices muito conectados e muitos vértices pouco conectados, as chances de um hub ser escolhido neste processo aleatório é pequena. No entanto, são sensíveis à *ataques*⁹, pois a remoção de um hub pode fazer com que muitos vértices da rede sejam desconectados, e o diâmetro da rede aumente.

Algoritmo do modelo de redes livres de escala

O modelo de redes livres de escala de Albert e Barabási [11] considera os processos de crescimento e conexão preferencial. A construção se inicia com uma rede pequena de m_0 vértices, conectados entre si. Para agregar o mecanismo de crescimento, a cada

⁸ Processo que consiste da remoção aleatória de um vértice.

⁹ Processo de remoção de vértices com alto grau.

passo de tempo t um novo vértice com m arestas é adicionado a rede, onde $m \leq m_0$. O novo vértice deve ser conectado a outros diferentes vértices que constituem a rede, estas novas conexões obedecem a condição de conexão preferencial. Para satisfazer a esta condição, é necessário analisar a probabilidade $\Pi(k_i)$ de conexão de cada vértice v_i da rede. Esta probabilidade é calculada a partir do grau do vértice v_i , por meio da Equação (2.14), e do somatório dos graus de todos os vértices da rede, isto é,

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (2.14)$$

Após o final do processo de crescimento da rede, obtém-se uma rede livre de escala. A Figura 20 traz um diagrama da construção do modelo de redes livres de escala. Para uma maior clareza das etapas que consistem este modelo, considere uma rede com tamanho inicial igual a 3 vértices e quantidade de iterações igual a 5. Além disso, assuma que os vértices adicionados à rede devem possuir somente uma aresta.

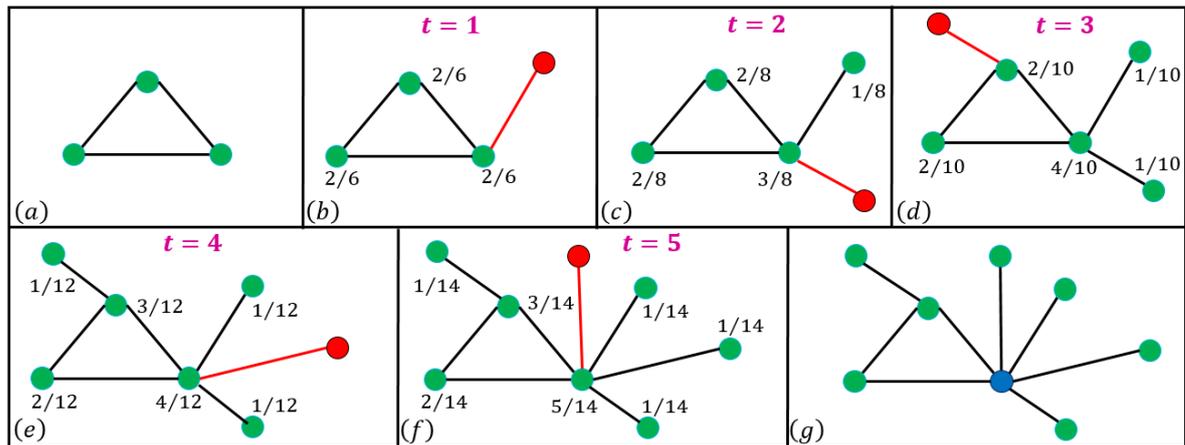


Figura 20 – Modelo de redes livres de escala de Albert e Barabási

O modelo se inicia com uma rede pequena, como ilustra a Figura 20(a). E a cada iteração t são calculadas as probabilidades de conexões de todos os vértices da rede, por meio da Equação (2.14). No diagrama, os valores destas probabilidades estão especificados próximos de seus respectivos vértices. Em seguida, é escolhido um vértice para receber uma nova conexão de acordo com o critério de conexão preferencial. Após essa escolha, o vértice selecionado é conectado com o novo vértice da rede e o processo é repetido t vezes. Neste exemplo, são realizadas 5 iterações. No diagrama, os novos elementos (vértice e aresta) de cada iteração estão especificados por meio da cor vermelha.

Na primeira iteração, as probabilidades de todos os vértices são iguais, o que implica que todos os vértices têm iguais possibilidades de serem selecionados, situação ilustrada na Figura 20(b). Com o decorrer do tempo, as diferenças entre as probabilidades aumentam e, devido à conexão preferencial, os vértices com maiores probabilidades adquirem maiores possibilidades de serem selecionados. Este comportamento é demonstrado na Figura 20(c), (e) e (f). Todavia, não é eliminada a possibilidade de que vértices

com probabilidades pequenas também sejam escolhidos, como o vértice escolhido na Figura 20(d). Esse mecanismo conduz ao aparecimento de poucos vértices muito conectados (hubs) e muitos vértices com poucas conexões. A Figura 20(g) mostra a topologia da rede após as 5 iterações. Por fim, o vértice azul da Figura 20 torna-se o hub da rede.

A combinação destes dois fatores, crescimento e conexão preferencial, proporciona aos hubs uma alta probabilidade de fazer novas conexões. Consequentemente, o comportamento da distribuição de graus de redes livres de escala não sofre variações com o tempo. De outra forma, a topologia destas redes é composta de muitos vértices com poucas conexões e poucos hubs muito conectados, obedecendo a lei de potência $P(k) \sim k^{-\gamma}$, onde $\gamma > 0$. Nessa expressão, k é o número de conexões de um vértice e γ é o expoente da lei de potência, que descreve como a distribuição muda em função do valor de k , na maioria das redes γ varia entre 2 e 3.

A Figura 21 ilustra uma distribuição normal e uma distribuição em lei de potência. Observe que na distribuição normal da Figura 21(a) a curva exibe um decaimento, de forma extremamente rápida, em ambos os lados da média. Esse decaimento acontece de forma muito rápida, e isso sugere que a probabilidade de existir vértices com o número de conexões que se desviam da média é desprezível, ainda que sejam consideradas redes muito grandes. Entretanto, para os modelos de redes livres de escala o decaimento da lei de potência acontece de forma mais lenta, o que implica em uma probabilidade maior de eventos extremos acontecerem, como pode ser observado na Figura 21(b).

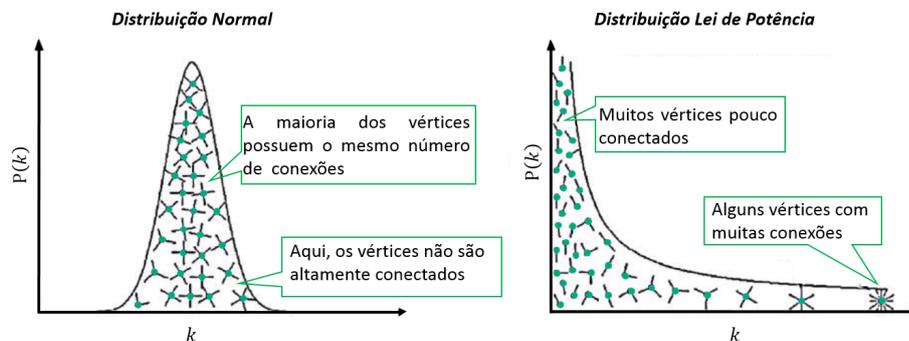


Figura 21 – (a) Distribuição normal e (b) Lei de potência. (Figura adaptada de [4])

2.6.4 Modelos com Redes Ponderadas

A partir de 1999, a vasta quantidade de sistemas reais que podem ser descritos por meio de redes livres de escala proporcionou o desenvolvimento de diversos modelos para este tipo de rede [29]. Geralmente, redes reais exibem uma grande heterogeneidade na intensidade das conexões [7, 9]. No entanto, estas características não são consideradas em redes com estrutura booleana, visto que as conexões são geralmente representadas como estados binários: presente ou ausente. Desta forma, muitos sistemas reais são melhor

representados por meio de redes ponderadas, nas quais o seu crescimento topológico, na maioria das vezes, está relacionado com a evolução dinâmica do peso das arestas [8].

Em uma rede ponderada, o peso de uma aresta é definido como o número de acontecimentos de um evento [30]. Desta maneira, na rede mundial de aeroportos, o peso das arestas representa a quantidade de poltronas disponíveis em vôos entre dois aeroportos [30–32]. Na rede de colaboração científica o peso representa a quantidade de trabalhos que dois autores publicaram em parceria [3, 31, 33].

A seguir é apresentado a descrição de alguns modelos de redes ponderadas posteriores ao modelo de Albert e Barabási.

Exemplos de Modelos com Redes Ponderadas

Interessados em estudar os mecanismos de construção de redes ponderadas e em analisar as propriedades estatísticas deste tipo de rede, Lin e colaboradores [8] propuseram um modelo simples de rede que se inicializa com $N_0 = m$ vértices completamente conectados com arestas de peso w_0 , e a cada passo de tempo, uma das duas seguintes operações é realizada: com probabilidade p , vértices com m arestas de peso w_0 são adicionados à rede, onde as novas conexões são realizadas a partir da probabilidade de conexão de cada vértice existente na rede. Ou com probabilidade $1 - p$, vértices com alta probabilidade de conexão são selecionados para receber arestas. Se dois vértices desconectados são selecionados, uma nova ligação, com peso w_0 , é estabelecida. Todavia, se existe uma aresta entre estes vértices, o peso desta aresta é aumentado em uma unidade. Por fim, este modelo gera uma distribuição de graus que segue uma lei de potência. A forma da lei de potência é controlada pela probabilidade p .

Barrat e colaboradores, em [34], propuseram um modelo de rede em que a adição de novos vértices e arestas perturbam, pelo menos localmente, os pesos existentes. Este modelo se inicializa com N_0 vértices conectados por arestas de peso w_0 , e a cada passo de tempo um novo vértice v_i é adicionado à rede. Os novos vértices são conectados, preferencialmente, aos vértices da rede que possuem alta probabilidade de conexão, por meio de uma aresta de peso w_0 . Este peso induz um aumento de peso δ_i distribuído proporcionalmente entre os pesos das arestas que conectam o novo vértice aos demais vértices da rede. Este modelo gera um comportamento livre de escala para os pesos das arestas, para o grau ponderado dos vértices e para a distribuição de graus dos vértices.

Em [35], Li e colaboradores apresentam um modelo de crescimento de redes ponderadas. Neste modelo, o crescimento está vinculado a adição de vértices à rede, e as conexões que estes novos vértices fazem, consideram os pesos das arestas da rede. Além do mais, cada novo vértice v possui um conjunto composto por M arestas escolhidas aleatoriamente na rede. Para este conjunto de arestas, dá-se o nome de mundo-local. Este

modelo é iniciado com uma rede constituída por n_0 vértices completamente conectados com arestas com o mesmo peso inicial w_0 , no artigo é considerado $w_0 = 1$. A cada passo de tempo, um vértice v com m arestas é adicionado a rede. O processo de crescimento da rede é realizado da seguinte maneira: suponha que um novo vértice v com duas arestas é adicionado a rede, e que sejam escolhidas M arestas desta rede para compor o mundo-local de v . Devido ao mecanismo de conexão preferencial proporcional ao peso de cada aresta, uma dentre as M arestas do mundo-local é escolhida, por exemplo, a aresta e_{ij} , e a ela é adicionado um acréscimo de peso δ . A primeira conexão que o vértice v faz é com uma das extremidades da aresta e_{ij} . Enquanto para a segunda conexão, existem duas possibilidades: com probabilidade p , o vértice v se conecta à outra extremidade da aresta e_{ij} (ou seja, forma-se um triângulo), ou com probabilidade $1 - p$ o vértice v se conecta a extremidade de outra aresta e_{kl} escolhida no mundo-local de v , também de acordo com o mecanismo de conexão preferencial. Neste caso, o peso da aresta e_{kl} recebe um acréscimo de δ . O peso de cada nova aresta é fixado em uma unidade. A distribuição de peso desta rede exhibe uma transição entre a forma exponencial e a forma de lei de potência. Além disso, é possível gerar redes com coeficiente de aglomeração alto, como por exemplo, igual a 0,8, a depender do ajuste do parâmetro p .

Outros modelos de redes livres de escala podem ser encontrados em [9, 29, 30, 35–43]. A descrição do modelo desenvolvido neste trabalho segue no próximo capítulo.

3 Redes de Interação Preferencial

Redes complexas que representam sistemas reais geralmente exibem um comportamento dinâmico, como a adição ou remoção de vértices, e conseqüentemente de arestas. Nos modelos de redes não ponderadas, ou seja, que não consideram o peso w_{ij} das arestas, diz-se que estas assumem uma estrutura binária, onde a aresta representa apenas a presença ou ausência de interações entre os vértices. Enquanto em redes ponderadas, o peso das arestas fornece uma maneira natural para representar a força da interação entre os vértices. Isto é, por meio das redes ponderadas, é possível obter mais informações sobre as conexões estabelecidas [30].

Inspirado no modelo de rede desenvolvido por Barabási e Albert [11], desenvolvemos as Redes de Interação Preferencial–RIP para estudar a evolução de redes ponderadas que consideram a adição de pesos nas arestas e as probabilidades de conexão tanto dos vértices, quanto das arestas. Este modelo é composto por dois processos: crescimento do peso das arestas, isto é, a cada iteração um acréscimo de peso Δw constante é adicionado a uma aresta da rede; interação preferencial, ou seja, quanto maior for o peso de uma aresta, maior é a probabilidade dela receber novos acréscimos de peso.

A construção das RIP é descrita a seguir. Por meio da Figura 22 é possível acompanhar o desenvolvimento desta estrutura:

- **Inicialização:** Definimos uma rede totalmente conectada e regular de grau $N - 1$, onde N é o número de vértices. A cada aresta da rede é atribuído um peso inicial $w_{ij} = 1$. Neste modelo, não existem laços ou mais de uma aresta entre dois vértices. A Figura 22(a) traz um exemplo de uma rede formada por 4 vértices. De acordo com as condições do modelo, essa rede deve ser regular de grau $4 - 1$ e todas as suas arestas possuem peso igual a 1.
- **Evolução dos Pesos:** A cada passo do tempo t ¹ é calculada a probabilidade P_i de conexão de cada vértice v_i em relação a todas as conexões existentes na rede. Para tanto, é necessário considerar o peso w_{ij} das arestas conectadas ao vértice v_i , e a soma de todos os pesos w_{ij} das arestas da rede, de acordo com a equação:

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^N w_{ij}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij}}. \quad (3.1)$$

o índice i deve ser diferente de j , uma vez que não consideramos laços na rede.

No exemplo do diagrama 22(b), o peso da aresta está simbolizado pela espessura; quanto maior for o seu peso, mais espessa será a aresta.

¹ O tempo t é identificado como a quantidade de iterações.

Uma vez calculadas todas as probabilidades P_i , o primeiro vértice v_i é escolhido. Na primeira iteração, todos os vértices possuem as mesmas probabilidades de conexão. Com o passar do tempo, as diferenças entre as probabilidades P_i de conexão dos vértices aumentam. Logo, os vértices com maiores probabilidades têm mais chance de serem selecionados. No exemplo da Figura 22(c), o vértice v_1 é escolhido.

O passo seguinte é escolher o segundo vértice, denominado v_j . Nesta etapa, é realizada uma análise das probabilidades P_{ij} de todas as arestas conectadas com o vértice v_i . No cálculo desta probabilidade, é considerado o peso w_{ij} da aresta que liga os vértices v_i e v_j , e o somatório dos pesos de todas as arestas conectadas ao vértice v_i , de acordo com

$$P_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^N w_{ij}}, \quad (3.2)$$

o índice i deve ser diferente de j , uma vez que não consideramos laços na rede.

Para escolher o vértice v_j , é necessário fazer a seguinte análise: quanto maior P_{ij} , maior é a probabilidade de o vértice v_j ser selecionado como o segundo vértice de uma iteração.

Diante disso, na Figura 22(d) são calculadas todas as probabilidades das arestas conectadas ao vértice v_1 , ou seja, as probabilidades P_{12} , P_{13} e P_{14} referentes às arestas entre os vértices $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$ e $e_3 = (v_1, v_4)$. Em seguida, uma dessas probabilidades é escolhida, preferencialmente aquela que tiver o valor mais alto. Na ilustração da Figura 22(d), após as probabilidades de todas as arestas que estão conectadas a v_1 serem calculadas, o vértice v_4 é sorteado.

Depois de selecionados os vértices v_i e v_j , deve-se aumentar a intensidade da conexão entre estes vértices. Isto é possível por meio da adição de um determinado acréscimo de peso Δw ao peso w_{ij} da aresta entre os vértices v_i e v_j , ou seja, da aresta $e_k = (v_i, v_j)$. Desta forma, é adicionado ao peso w_{14} da aresta $e_3 = (v_1, v_4)$ uma variação Δw , de acordo com a Figura 22(e).

Por fim, o peso w_{ij} da aresta selecionada é atualizado (ver Figura 22(f)), e o processo é repetido t vezes. Dessa forma, a construção das RIP considera três parâmetros, especificamente: a intensidade do acréscimo de peso Δw que é adicionado a uma aresta, a quantidade de iterações t que são realizadas em uma simulação e o número de vértices da rede. No fim da simulação, para construir os GVT basta considerar a rede correspondente a cada instante de tempo t . Depois de construído os GVT é possível gerar a REA, por meio do somatório de todas as conexões realizadas durante o tempo de vida da rede; no entanto, as conexões iniciais devem ser desprezadas.

Para uma maior clareza das etapas que constituem as RIP, construímos três fluxogramas que descrevem o algoritmo proposto. O fluxograma da rotina principal deste modelo está descrito na Figura 23, por meio dele é possível acompanhar todos as

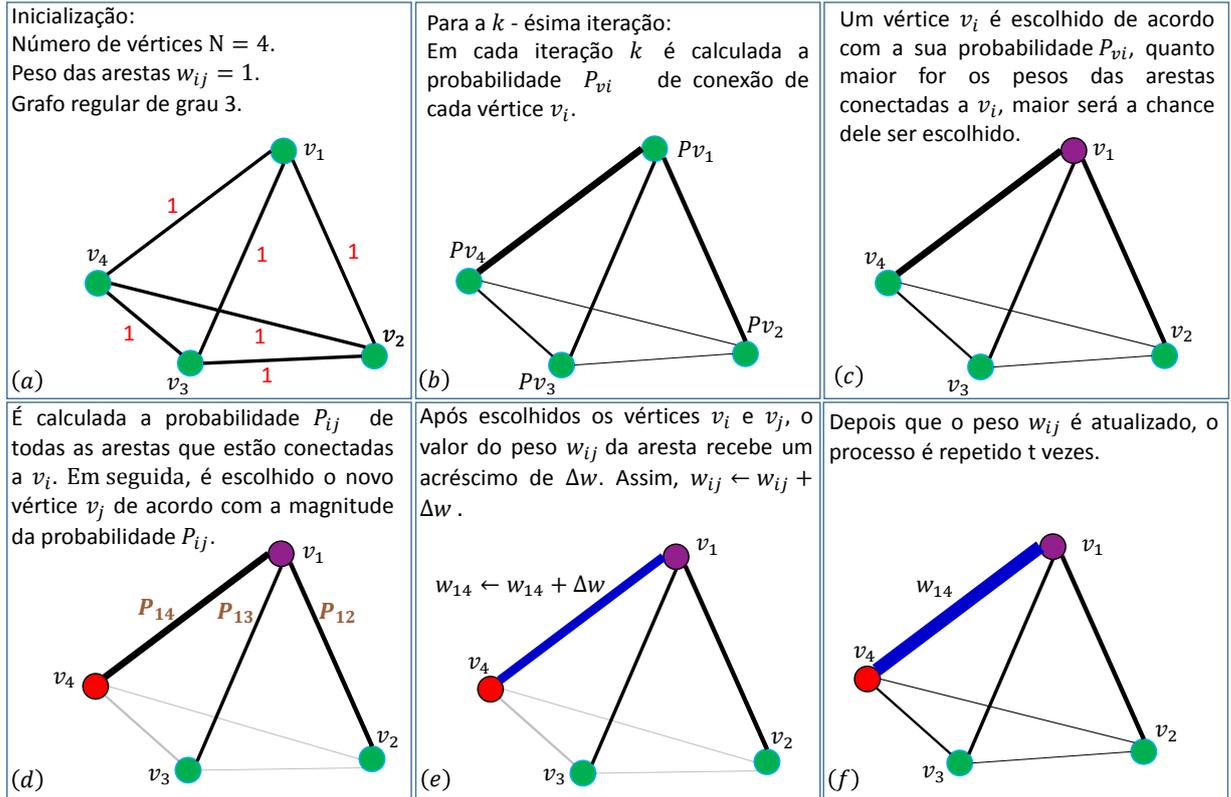


Figura 22 – Redes de Interação Preferencial

etapas da implementação do algoritmo. As ações denominadas "Sub-rotina 1" e "Sub-rotina 2" demandam uma descrição com maiores detalhes; essas ações são referentes ao procedimento utilizado na escolha dos vértices e das arestas com maiores probabilidades. Os detalhes destas implementações são encontrados nos fluxogramas da Figura 24(a) e 24(b), respectivamente. Ainda na Figura 23, a ação definida como "Gera relatório" tem a função de imprimir em um arquivo de texto a distribuição normalizada dos pesos w_{ij} das arestas da REA, construída no término do tempo t .

Após calculada a distribuição dos pesos das arestas, essa distribuição é escalada com valores que variam no intervalo de 0 até 1, por meio da equação abaixo:

$$w_{ij} = \frac{w'_{ij} - w_{ijmin}}{w_{ijmax} - w_{ijmin}}, \quad (3.3)$$

onde w_{ij} é o peso escalado da aresta que conecta o vértice v_i ao vértice v_j , w'_{ij} é o peso dessa mesma aresta antes de ser escalada, w_{ijmax} e w_{ijmin} são os pesos da aresta que possui peso máximo e mínimo da rede, respectivamente. Dessa forma, a aresta com maior peso é reescalada e assume o valor 1 e a com menor peso assume o valor 0. As arestas com pesos intermediários tem seus novos valores compreendidos na faixa de 0 a 1. Por fim, é calculada a probabilidade acumulada complementar dos pesos das arestas.

Como citado anteriormente, as Figuras 24(a) e 24(b) trazem os fluxogramas da construção das sub-rotinas que escolhem os vértices e as arestas. As RIP foram implementadas na

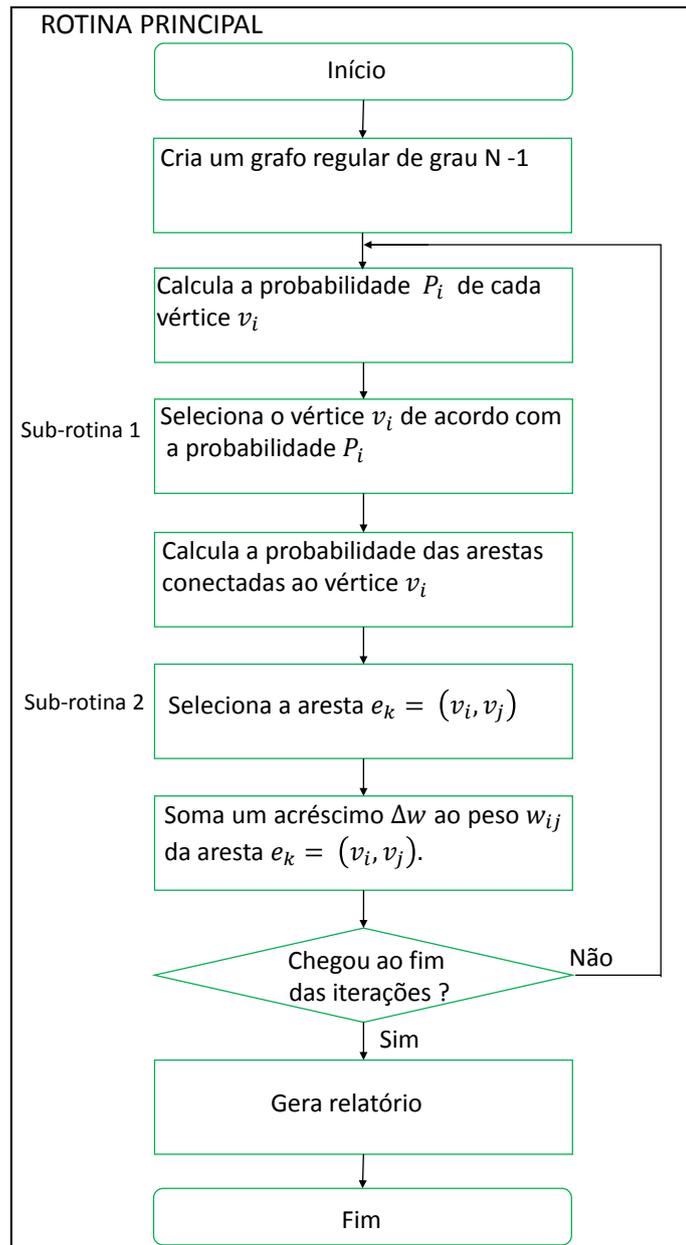


Figura 23 – Rotina Principal

linguagem de programação C++ e foi utilizado o IDE multi-plataforma Qt Creator 5.5.0.

Podemos ver nos fluxogramas da Figura 24 que, para construir estes algoritmos, precisamos de um gerador de números aleatórios. Contudo, devido à impossibilidade computacional de gerar números verdadeiramente aleatórios, utilizamos a Classe *random_device* da biblioteca *random* para gerar números pseudo-aleatórios. A escolha desta Classe se deve ao fato dela possuir um limite grande de números pseudo-aleatórios, ou seja, existe uma faixa extensa de valores que podem ser selecionados, sem que estes números sejam repetidos. A biblioteca *random* é responsável por gerar números pseudo-aleatórios. De acordo com [44], estes números são denominados assim, pois parecem aleatórios, mas são efetivamente pré-determinados. Geradores de números pseudo-aleatórios são algoritmos

que usam fórmulas matemáticas ou tabelas pré-calculadas para produzir seqüências de números que parecem distribuídos aleatoriamente.

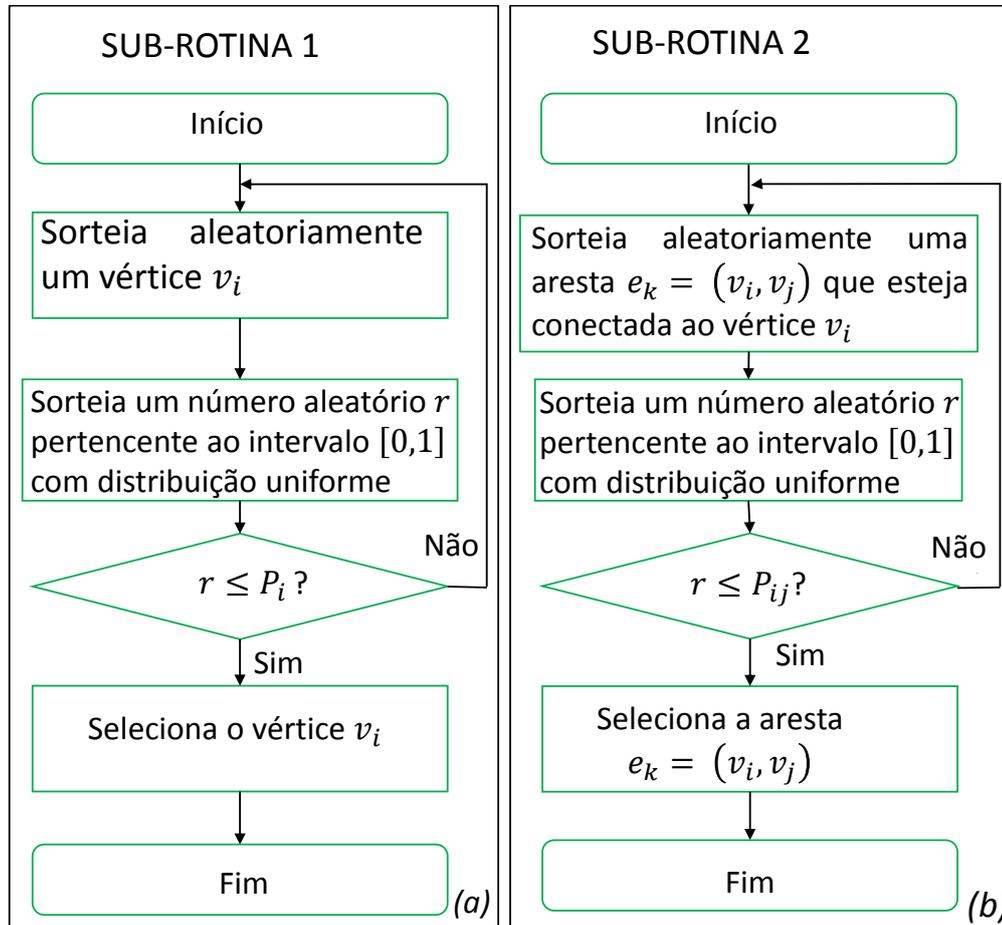


Figura 24 – Sub-rotinas

A sub-rotina 1 é referente à escolha do vértice v_i de acordo com a probabilidade P_i de conexão. Seguindo a Figura 24(a), a sub-rotina 1 se inicia com a escolha aleatória de um vértice v_i com probabilidade P_i . Em seguida, é escolhido um valor pseudo-aleatório r , pertencente ao intervalo entre os números 0 e 1 e distribuído uniformemente. Depois, é feita uma comparação da magnitude entre o número r e o valor da probabilidade P_i . Se a probabilidade P_i for maior ou igual ao valor de r , o vértice v_i é escolhido efetivamente. Caso o valor da probabilidade P_i seja menor do que o valor de r , outro vértice v e número pseudo-aleatório r serão selecionados. A justificativa para o número r pertencer ao intervalo $[0, 1]$ está na condição de que para se fazer a comparação da magnitude entre as medidas de P_i e r , elas devem estar na mesma escala. Sendo assim, como a probabilidade é uma grandeza normalizada, os valores de r devem estar normalizados.

Para entender melhor como a comparação entre o valor da probabilidade P_i de conexão do vértice v_i e o número pseudo-aleatório r permite selecionar os vértices com maiores probabilidades, vamos explorar o seguinte exemplo: escolhamos um vértice v_i qualquer com probabilidade de conexão P_i . Se o vértice escolhido possuir uma probabilidade P_i

relativamente grande, a faixa de valores possíveis para r que satisfaçam a condição $r \leq P_i$ é grande (ver Figura 25(a)), e o vértice v_i provavelmente será escolhido. No entanto, não excluimos a possibilidade de que o valor pseudo-aleatório escolhido para r seja maior que P_i . Portanto, mesmo que o vértice v_i tenha uma probabilidade grande de ser escolhido, um outro vértice pode ser selecionado. Por exemplo: se $P_i = 0,8$, existem infinitos valores possíveis para r que obedeçam a condição $r \leq 0,8$, ou seja, existem muitas chances do vértice v_i ser selecionado. No entanto, r pode assumir um valor maior que $0,8$, a dizer, $0,9$, e outro vértice é escolhido.

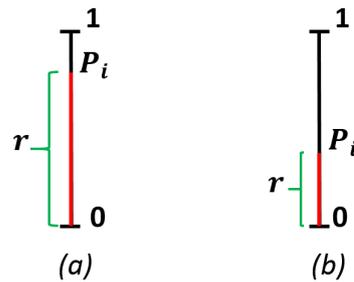


Figura 25 – Probabilidade. (a) P_i grande (b) P_i pequena

Por outro lado, se a probabilidade P_i do vértice v_i for pequena, a faixa de valores em que r pode assumir de forma que cumpram a condição $r \leq P_i$, é menor do que na situação anterior (ver Figura 25 (b)). Assim, quanto menor for P_i , menor é a probabilidade do vértice v_i ser sorteado. Contudo, é possível. Isto ocorre apenas para valores de r que sejam menores do que o valor de P_i . Por exemplo, se o vértice v_i escolhido possuir probabilidade $P_i = 0,2$, o valor que r deverá assumir para que o vértice v_i seja sorteado deve ser menor do que $0,2$. Consequentemente, a probabilidade destes vértices serem escolhidos é pequena. Esta situação favorece, contudo, que vértices com probabilidades grandes sejam selecionados.

Este modelo foi executado diversas vezes, a partir da variação dos parâmetros: número N de vértices, quantidade de iterações t e acréscimo de peso Δw . As discussões referentes a estas variações são apresentadas no próximo capítulo.

4 Resultados

Neste capítulo, analisamos as Redes de Interação Preferencial. Na primeira seção, analisamos os parâmetros deste modelo. Na seção posterior, comparamos as distribuições de pesos geradas por meio do modelo com as distribuições construídas a partir de sinais do EEG. Os softwares que utilizamos para a construção dos gráficos e das redes dispostas neste trabalho foram o OriginPro 9 e o Gephi 0.8.1 *beta*, respectivamente.

4.1 Análise dos parâmetros das RIP

Como discutido anteriormente, o modelo de redes que elaboramos depende de três parâmetros, são eles: o acréscimo de peso Δw de uma aresta, o número de iterações t e o tamanho da rede N . Para analisar a influência de cada um desses parâmetros na construção das nossas redes, nós as simulamos computacionalmente para uma série de valores de cada parâmetro. Depois, construímos os gráficos, em escala logarítmica, da distribuição acumulada complementar dos pesos das arestas de cada rede simulada e, por fim, construímos estas redes visualmente.

Analisamos os parâmetros por meio do seguinte procedimento metodológico: Escolhemos um parâmetro que queremos investigar e depois realizamos simulações para vários valores deste, mantendo os demais fixos. Veremos, posteriormente, que o efeito do acréscimo de peso depende do tamanho da rede. Em vista disso, as análises destes parâmetros foram realizadas em conjunto.

Antes de começar as análises, destacamos alguns pontos: com o gráfico da distribuição acumulada complementar dos pesos das arestas, obtemos a probabilidade de uma aresta escolhida aleatoriamente na rede ter seu peso igual ou maior que um determinado peso w_{ij} . Os pesos w_{ij} estão compreendidos no intervalo de 0 a 1, por meio da Equação (3.3). A distribuição acumulada complementar dos pesos das arestas é feita a partir da REA, discutida no Capítulo 2, especificamente, na Seção 2.5. Como veremos, as redes que representam essas distribuições não são completamente conectadas, como determina a inicialização das RIP (ver Capítulo 3), pois, nestas análises, estamos interessados apenas nos pesos que foram adicionados à rede em algum momento dos GVT. Devido a isso, na representação das nossas redes, para os vértices que não fazem nenhuma conexão, está subentendido que eles possuem apenas as arestas da inicialização. Por fim, é importante notar que nas representações das nossas redes, quanto maior for a espessura das arestas, maior será o seu peso.

4.1.1 Análise do efeito das iterações nas RIP

Para entender como a quantidade de iterações realizadas em uma simulação intervém no comportamento das redes que geramos, construímos uma sequência de redes com tamanho igual a 10, 100 e 1000 vértices, e consideramos que, nessas simulações, todas as redes receberam acréscimos de peso igual a 10 unidades. As simulações foram realizadas para $t = 10^2$ iterações, depois 10^3 iterações, e assim por diante, até $t = 10^7$ iterações, como ilustra os gráficos da Figura 26, com exceção apenas para a rede da Figura 26(c), pois devido à problemas computacionais, especificamente a memória das máquinas utilizadas, não foi possível realizar simulações para t acima de 10^6 iterações.

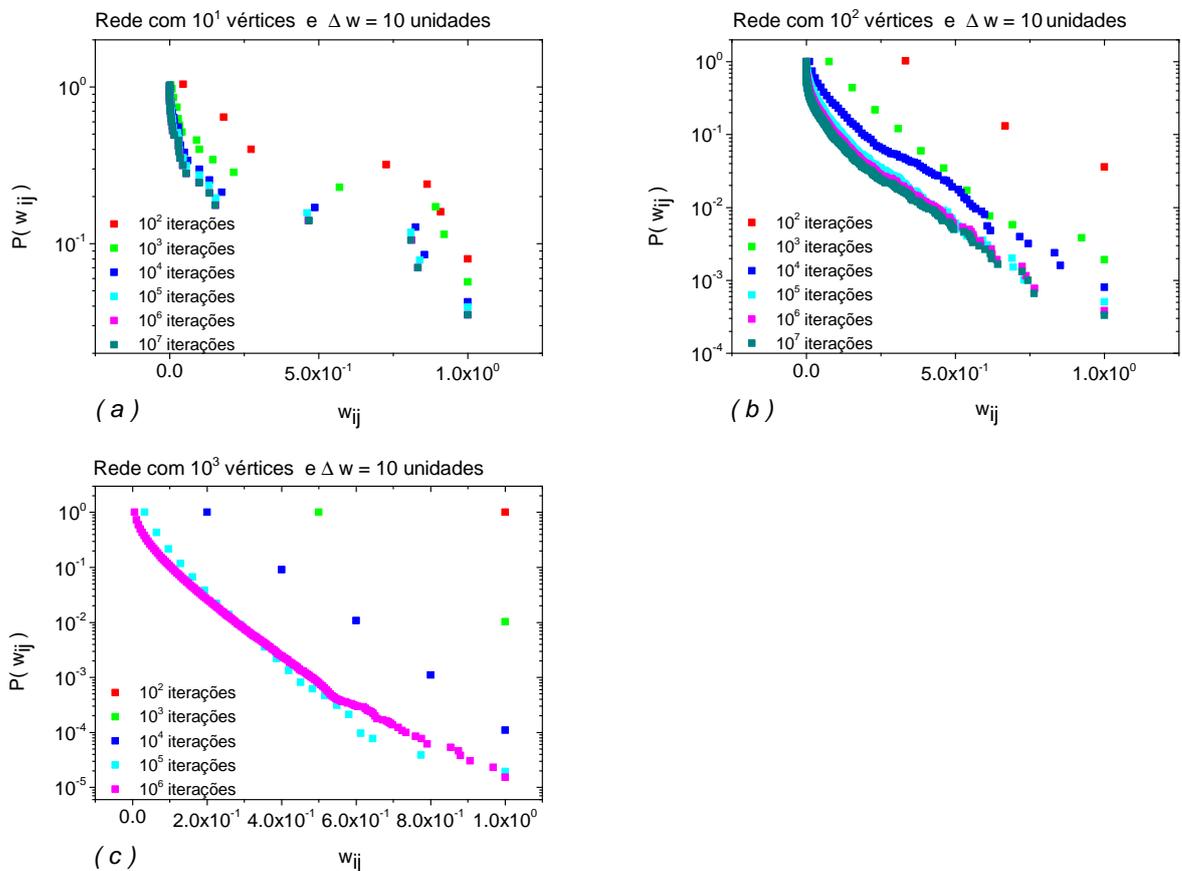


Figura 26 – Efeito do número de iterações nas RIP. (a) 10 vértices; (b) 100 vértices; (c) 1000 vértices.

De acordo com as RIP, independente do tamanho da rede, quando aumentamos o número de iterações, mais acréscimos de pesos são inseridos na rede. Estes acréscimos de pesos modificam a rede de duas formas distintas: podem provocar um aumento no peso das arestas que foram escolhidas em algum momento das iterações, ou, podem aumentar a quantidade de arestas diferentes escolhidas em uma simulação. Ambos processos aumentam o peso das arestas selecionadas. Dessa forma, podemos dizer que, para os gráficos das distribuições de uma série de simulações de redes em que são considerados tamanho e acréscimos de peso fixos, quanto maior for a quantidade de iterações realizadas na

simulação, maior será a quantidade de pontos nas curvas que representam estas redes, ou seja, essas redes possuíram um número maior de arestas com pesos distintos. Isso pode ser conferido por meio dos gráficos da Figura 26. Na seção seguinte, veremos que a depender da intensidade do acréscimo de peso que é adicionado à rede, esse comportamento pode ser modificado.

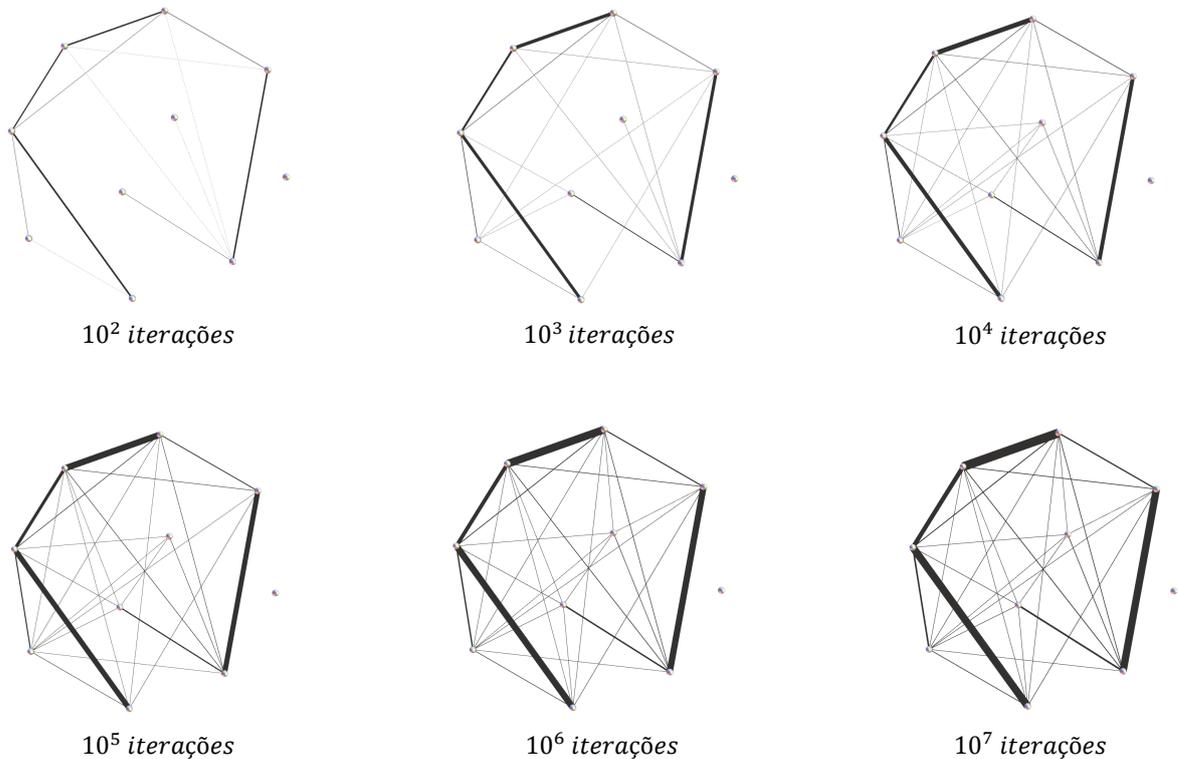


Figura 27 – Redes com 10 vértices e acréscimo de peso igual a 10 unidades

O efeito do número de iterações é o mesmo independente do tamanho da rede. Desta forma, vamos admitir uma rede de tamanho N e verificar detalhadamente como o efeito do número de iterações pode modificar esta rede. Por meio da Figura 26(a), observamos, como esperado, que para uma rede com 10 vértices e acréscimo de peso Δw igual a 10 unidades, quanto maior for o número de iterações, maior será a diversidade de pesos na rede. Basta comparar os pontos vermelhos referentes a 100 iterações com os pontos referentes as demais iterações. Para visualizar de forma mais clara como a quantidade de iterações modifica a rede, a Figura 27 traz as redes correspondentes as distribuições da Figura 26(a) e, novamente, confirmamos que a quantidade de arestas escolhidas em uma rede é maior de acordo com o aumento da quantidade de iterações.

O número máximo de arestas de uma rede simples é calculado por meio da Equação (2.13). Desta forma, para uma rede com 10 vértices, o número máximo de arestas é igual a 45. Vamos considerar uma simulação de uma rede com 100 iterações. Isso implica que, em cada uma das 100 iterações, uma das 45 arestas possíveis de G tem o seu peso modificado, de maneira que, no final das iterações, 100 acréscimos de peso são adicionados à rede. De outra maneira, o número de iterações t especifica a quantidade

de acréscimo de peso Δw que é adicionado à rede. No entanto, a quantidade de arestas diferentes escolhidas em uma simulação, depende da intensidade do acréscimo de peso que é adicionado à rede e também da propriedade de interação preferencial do modelo.

Para este caso, por se tratar de uma rede pequena, trouxemos na Figura 1 a matriz de adjacência da REA construída para a rede da curva em vermelho do gráfico da Figura 26(a) e na Figura 2 é apresentada a matriz de adjacência para a curva verde escuro, correspondente a 10^7 iterações, novamente da Figura 26(a).

Matriz de adjacência										
Vértices	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_0	0	$4,54 \times 10^{-2}$	0	$7,27 \times 10^{-1}$	0	0	$8,64 \times 10^{-1}$	$4,54 \times 10^{-2}$	0	0
v_1	$4,54 \times 10^{-2}$	0	0	0	0	0	$2,73 \times 10^{-1}$	$9,09 \times 10^{-1}$	0	0
v_2	0	0	0	1	0	0	0	0	$4,54 \times 10^{-2}$	0
v_3	$7,27 \times 10^{-1}$	0	1	0	0	0	$1,82 \times 10^{-1}$	0	$1,82 \times 10^{-1}$	0
v_4	0	0	0	0	0	0	0	$1,82 \times 10^{-1}$	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	$4,54 \times 10^{-2}$	0	0
v_6	$8,64 \times 10^{-1}$	$2,73 \times 10^{-1}$	0	$1,82 \times 10^{-1}$	0	0	0	$4,54 \times 10^{-2}$	0	0
v_7	$4,54 \times 10^{-2}$	$9,09 \times 10^{-1}$	0	0	$1,82 \times 10^{-1}$	$4,54 \times 10^{-2}$	$4,54 \times 10^{-2}$	0	0	0
v_8	0	0	$4,54 \times 10^{-2}$	$1,82 \times 10^{-1}$	0	0	0	0	0	0
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 1 – Matriz de adjacência para uma rede com 10 vértices e 100 iterações

Por meio da matriz de adjacência para 100 iterações (ver Figura 1), nota-se que apenas 13 arestas, do total de 45 arestas foram escolhidas ao longo da simulação para ter o seu peso modificado. É importante mencionar que a matriz de adjacência é uma matriz simétrica e como assumimos redes sem laços os elementos da diagonal principal são nulos. Para saber a quantidade de arestas da rede que é representada pela matriz de adjacência, é necessário somar a quantidade de elementos diferentes de zero que estão acima da diagonal principal.

O motivo de apenas 13 arestas, isto é, aproximadamente 29%, das arestas tenham sido escolhidas para ter o seu peso alterado, está relacionado com a característica de interação preferencial do modelo. Essa característica contribui para que sejam escolhidas poucas arestas na rede para ter o peso modificado, posto que, se em uma dada iteração, uma aresta que já tenha sido selecionada em algum momento for selecionada outra vez, o peso desta aresta e, conseqüentemente, a sua probabilidade de ser selecionada mais uma vez, torna a crescer. De forma análoga, uma aresta que é selecionada pela primeira vez tem o seu peso e a sua probabilidade de acontecer novamente aumentadas, conseqüentemente, esta aresta passa a fazer parte do conjunto de arestas que são escolhidas quase sempre nas iterações subsequentes.

Matriz de adjacência										
Vértices	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_0	0	$3,48 \times 10^{-2}$	$1,41 \times 10^{-3}$	$4,68 \times 10^{-1}$	$2,90 \times 10^{-4}$	0	1	$4,36 \times 10^{-2}$	$1,17 \times 10^{-3}$	0
v_1	$3,48 \times 10^{-2}$	0	$1,49 \times 10^{-2}$	0	0	$3,78 \times 10^{-6}$	$9,91 \times 10^{-2}$	$8,10 \times 10^{-1}$	$5,49 \times 10^{-3}$	0
v_2	$1,41 \times 10^{-3}$	$1,49 \times 10^{-2}$	0	$8,33 \times 10^{-1}$	$3,40 \times 10^{-6}$	0	$2,86 \times 10^{-3}$	0	$2,98 \times 10^{-2}$	0
v_3	$4,68 \times 10^{-1}$	0	$8,33 \times 10^{-1}$	0	$1,03 \times 10^{-2}$	$5,02 \times 10^{-4}$	$5,60 \times 10^{-2}$	0	$1,34 \times 10^{-1}$	0
v_4	$2,90 \times 10^{-4}$	0	$3,40 \times 10^{-6}$	$1,03 \times 10^{-2}$	0	$3,62 \times 10^{-3}$	0	$1,53 \times 10^{-1}$	$5,89 \times 10^{-3}$	0
v_5	0	$3,78 \times 10^{-6}$	0	$5,02 \times 10^{-4}$	$3,62 \times 10^{-3}$	0	$1,51 \times 10^{-6}$	$2,98 \times 10^{-2}$	$4,20 \times 10^{-4}$	0
v_6	1	$9,91 \times 10^{-2}$	$2,86 \times 10^{-3}$	$5,60 \times 10^{-2}$	0	$1,51 \times 10^{-6}$	0	$3,17 \times 10^{-2}$	$9,77 \times 10^{-3}$	0
v_7	$4,36 \times 10^{-2}$	$8,10 \times 10^{-1}$	0	0	$1,53 \times 10^{-1}$	$2,98 \times 10^{-2}$	$3,17 \times 10^{-2}$	0	$7,18 \times 10^{-5}$	0
v_8	$1,17 \times 10^{-3}$	$5,49 \times 10^{-3}$	$2,98 \times 10^{-2}$	$1,34 \times 10^{-1}$	$5,89 \times 10^{-3}$	$4,20 \times 10^{-4}$	$9,77 \times 10^{-3}$	$7,18 \times 10^{-5}$	0	0
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2 – Matriz de adjacência para uma rede com 10 vértices e 10^7 iterações

Quando o número de iterações t aumenta, maiores são as chances de novas arestas serem escolhidas para ter o seu peso alterado. Em vista disso, como podemos conferir na Figura 2, para 10^7 iterações, aproximadamente 64.4% das arestas da rede são escolhidas para terem os seus pesos alterados. O aumento do número de iterações proporciona o aparecimento de uma quantidade maior de pesos na rede. O motivo para a diversidade dos pesos das arestas da rede se deve ao fato de que todos os acréscimos de peso são adicionados em apenas uma parcela do conjunto total de arestas, assim as repetidas iterações nessa parcela diversificam o peso destas arestas.

Por último, é importante notar que nas redes da Figura 26, os valores da probabilidade acumulada complementar das arestas de uma rede tendem a diminuir à medida que o número de iterações aumenta. Isso condiz com o esperado, uma vez que a quantidade de pesos diferentes das arestas aumenta. Dessa forma, os valores da probabilidade acumulada complementar dos pesos das arestas é maior na matriz de adjacência da Figura 1 do que na da Figura 2.

Ao se considerar a Equação (3.3), o número de iterações e a interação preferencial, observa-se que, quanto maior for a diferença entre os pesos mínimo e o máximo de uma rede, mais as curvas das distribuições do peso normalizado atingirá pesos menores. Diante disso, para as redes que foram simuladas para um número maior de conexões, como por exemplo 10^7 iterações (ver a Figura 26 (a)), as suas distribuições de pesos das arestas alcançam uma escala de peso menor do que as demais curvas deste gráfico.

Embora tenhamos detalhado apenas o gráfico da Figura 26(a), estas análises satisfazem os demais gráficos da Figura 26.

4.1.2 Análise dos efeitos dos acréscimos de peso e do tamanho da rede

Na subseção anterior, mostramos como a quantidade de iterações modifica as RIP. Constatamos que, em uma sequência de simulações em que são considerados fixos a intensidade do acréscimo de peso e o tamanho da rede, o efeito da quantidade de iterações é aumentar o número de arestas escolhidas para ter o seu peso alterado, assim como aumentar a diversidade dos pesos das arestas da rede. Comentamos, anteriormente, que o número total de arestas escolhidas ao final das iterações de uma simulação depende da intensidade do acréscimo de peso que é adicionado na rede. Nesta subseção, vamos entender como o acréscimo de peso Δw modifica as RIP.

O efeito do acréscimo de peso adicionado a uma aresta depende do tamanho da rede analisada. Desta forma, consideramos três redes com tamanhos distintos, a saber: 10, 100 e 1000 vértices, e então, avaliamos o comportamento de cada uma destas redes para diferentes valores do acréscimo de peso. Nessas simulações, foram realizadas 10^5 iterações, pois, devido à quantidade de pesos diferentes para este número de iterações, é possível ter um melhor entendimento do comportamento destas redes.

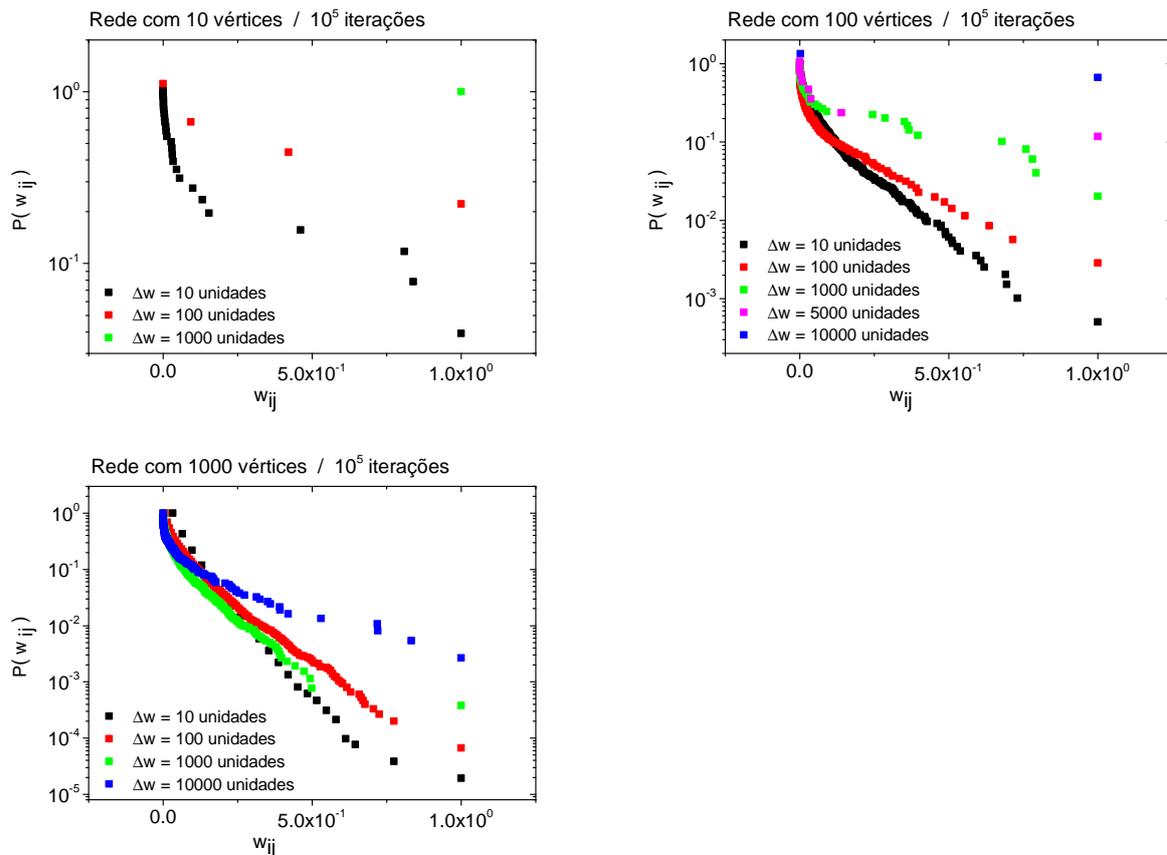


Figura 28 – Efeito dos acréscimos de pesos nas RIP. (a) 10 vértices; (b) 100 vértices; (c) 1000 vértices.

Antes de iniciar as análises individuais dos gráficos da Figura 28, é necessário recapitular algumas considerações sobre o funcionamento do modelo. O peso adicionado

em uma aresta influencia a probabilidade dessa aresta ser selecionada novamente, de acordo com a Equação (3.2). Em vista disso, quanto mais uma aresta for escolhida e quanto maior for o acréscimo de peso que é adicionado a ela, maior é a probabilidade dessa aresta ser selecionada outras vezes. Veremos posteriormente que devido a este processo, quanto maior for o acréscimo de peso adicionado a uma aresta, menor será a quantidade de arestas diferentes escolhidas na rede para ter o peso modificado, uma vez que as arestas escolhidas no início das iterações são repetidas várias vezes durante toda a simulação.

Considere uma rede composta por 10 vértices. Nesta rede, foram adicionados acréscimos de peso igual a 10, 100 e 1000 unidades em cada simulação, como pode ser conferido no gráfico da Figura 28(a). Já sabemos que o número máximo de arestas para uma rede com 10 vértices é igual a 45 arestas. Desta forma, em cada uma das 10^5 iterações, uma das 45 arestas possíveis é escolhida para ter o seu peso modificado.

Por meio da Figura 28(a), percebemos que na rede em que foi considerado um acréscimo de peso igual a 10 unidades a diversidade dos pesos é maior do que nas demais redes. Ou seja, esta rede apresenta mais pontos na curva de distribuição, do que as redes em que foram adicionados valores de Δw maiores. O motivo desse comportamento se deve ao fato de que ao adicionar um acréscimo de peso pequeno à rede, ele não é capaz de intensificar o peso das arestas escolhidas ao ponto que a interação preferencial se tornar evidente o bastante para que apenas as mesmas arestas sejam repetidas. Neste caso, a parcela alta de arestas escolhidas e o número grande de iterações que são realizadas sob essa parcela de arestas viabilizam uma diversidade maior de pesos na rede (ver Figura 29).

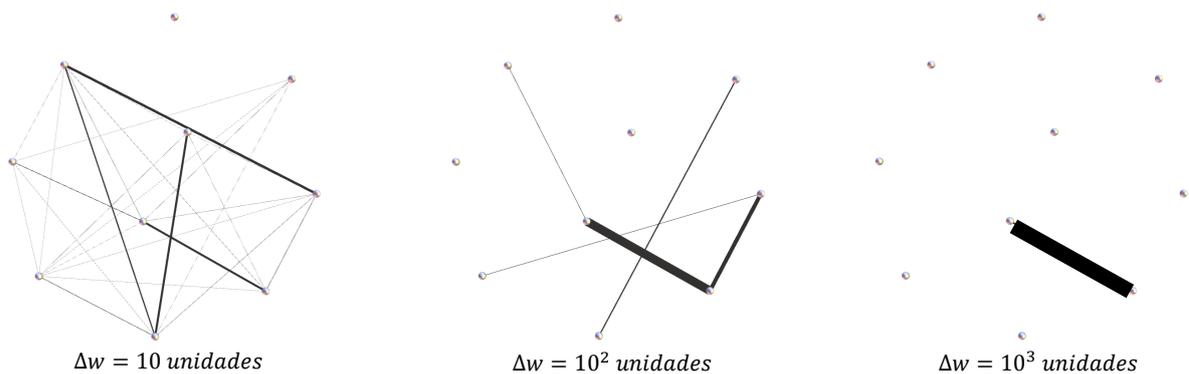


Figura 29 – Redes com 10 vértices e diferentes valores para o acréscimo de peso

De forma análoga, quando o acréscimo de peso for igual a 100 unidades, uma quantidade menor de arestas, se comparado ao caso anterior, for escolhida para ter o peso modificado (ver a curva em vermelho da Figura 28(a)). A justificativa para a redução da quantidade de arestas selecionadas ao fim das simulações está relacionada com a intensidade do acréscimo de peso que é adicionado. Quando o peso de uma aresta é aumentado em 100 unidades, a sua probabilidade de ser selecionada novamente cresce

em relação às demais arestas da rede. Com o decorrer das iterações, poucas arestas são escolhidas para terem os seus pesos modificados, e as escolhidas adquirem probabilidades tão altas que dificilmente uma aresta que nunca tenha sido escolhida seja selecionada pela primeira vez. As arestas com pesos altos, se comparados aos demais, podem ser denominadas arestas hubs. Neste caso, a pouca diversidade de peso está relacionada com a menor quantidade de arestas. Obviamente, devido à interação preferencial, quanto maior for o acréscimo de peso adicionado às arestas, maior será a faixa de pesos que a rede alcança e menor será a diversidade dos pesos das arestas da rede.

Para o ponto verde da Figura 28(a), temos o caso de uma rede pequena, a saber 10 vértices, que recebe um acréscimo de peso grande, se comparado ao seu tamanho. Nesta situação, devido à intensidade do acréscimo de peso, a probabilidade da primeira aresta escolhida assume um valor tão superior às demais, que nenhuma outra aresta é escolhida durante toda a simulação. Como ilustra a Figura 29, a rede gerada por meio desta simulação é composta apenas por uma aresta que recebe um acréscimo de peso de 1000 unidades em cada uma das 10^5 iterações.

Por fim, o processo de escalamento dos pesos permite afirmar que: quanto maior for a diferença entre o valor do peso máximo e do peso mínimo das arestas da rede, mais a curva de distribuição destes pesos alcançará pesos menores na escala compreendida entre 0 e 1. Em simulações em que são considerados acréscimos de pesos grandes se comparados ao tamanho da rede, o mecanismo de interação preferencial provoca uma diferença relevante entre o valor do peso máximo e do peso mínimo da rede. Estas observações justificam a curva em que é considerado $\Delta w = 10^2$ unidades alcançar pesos menores do que a curva para $\Delta w = 10$ unidades. Notadamente, não podemos usar este argumento para a simulação em que o acréscimo de peso é equivalente 10^3 unidades, uma vez que a sua distribuição de pesos se reduz a um ponto, onde se concentram todos os acréscimos de pesos adicionados à rede.

A partir daqui, vamos analisar as distribuições da Figura 28(b), onde são consideradas redes com 100 vértices; estas redes podem ser visualizadas na Figura 30. Por meio da Equação (2.13), sabemos que uma rede com 100 vértices possui 4950 arestas. As análises seguintes são realizadas de forma análoga às situações anteriores, isto é, vamos avaliar o comportamento da rede ao considerar diferentes valores de Δw .

Visto que na metodologia do modelo, o cálculo da probabilidade do vértice considera os pesos de todas as arestas da rede, ver Equação (3.1), na simulação de uma rede composta por 4950 arestas, um acréscimo de peso igual a 10 unidades adicionado a uma aresta não é capaz de elevar substancialmente a sua probabilidade a ponto que ela ocorra com maior frequência do que as demais. Para este caso, a interação preferencial é fraca, visto que a distribuição dos pesos das arestas ilustrada na Figura 30 exibe um comportamento quase contínuo.

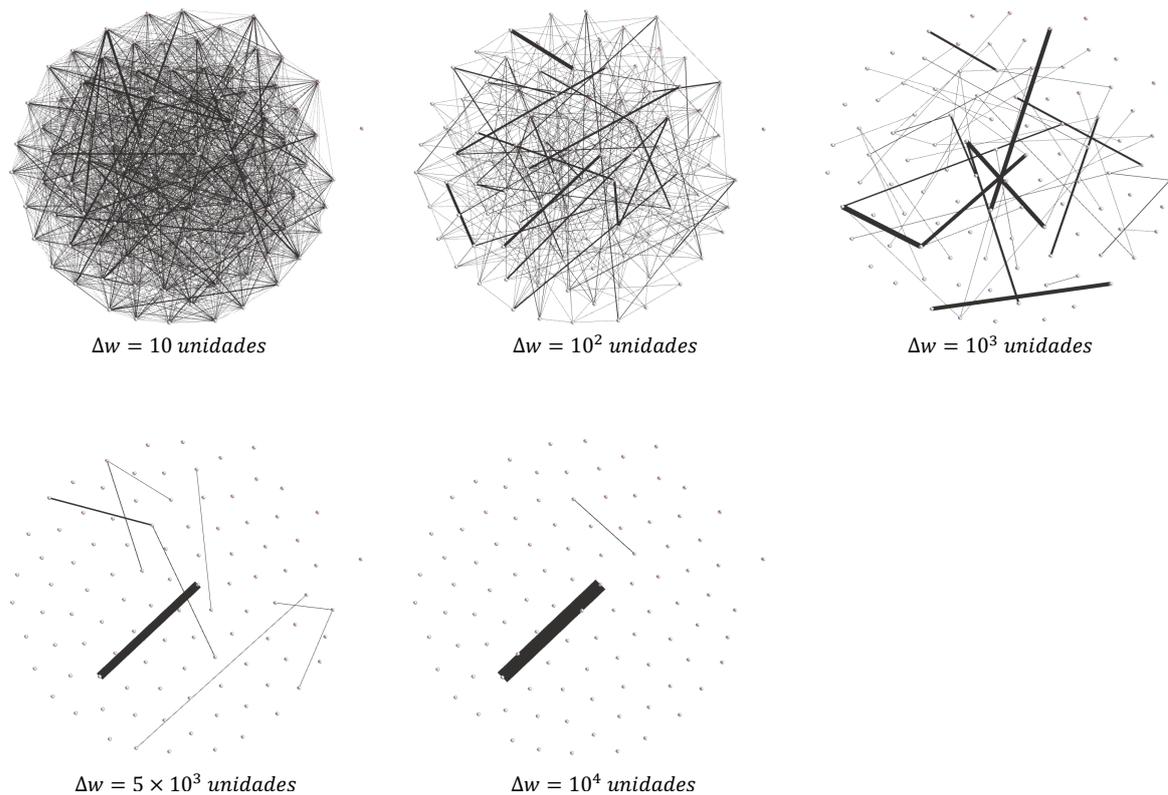


Figura 30 – Redes com 100 vértices e diferentes valores para o acréscimo de peso

Quando Δw equivale a 100 unidades, o aumento da intensidade do acréscimo de peso que é adicionado às arestas viabiliza que o peso máximo alcançado pelas arestas desta rede seja maior do que no caso anterior. Assim, com o processo de escalamento dos pesos das arestas a curva de distribuição desta rede alcança pesos menores, como ilustrado na Figura 28(b)). Nesta simulação, a interação preferencial é fraca, pois os acréscimos de pesos que são adicionados nas iterações são distribuídos de forma quase uniforme entre as arestas da rede.

Quando o acréscimo de peso é igual a 1000 unidades, a característica de interação preferencial se torna perceptível, veja na Figura 28(b). Neste caso, as probabilidades da maioria dos pesos da rede aumentam enquanto outros pesos deixam de existir. Para entender com maior clareza as características desta rede, consideramos simulações para $\Delta w = 5000$ unidades. À medida que aumentamos a intensidade do acréscimo de peso, a interação preferencial se torna mais evidente. Por consequência, com $\Delta w = 5000$ unidades, tem-se uma quantidade menor de arestas selecionadas para sofrerem alterações dos seus pesos, e também uma diversidade reduzida dos pesos destas arestas, acompanhe a Figura 30. Ainda de acordo com a Figura 30, quando Δw atinge 10000 unidades, apenas dois pesos são predominantes na rede. A partir deste valor, a mesma aresta é selecionada em todas as iterações e a distribuição das arestas se reduz a um ponto.

Vamos considerar agora a rede da Figura 28(c) composta por 1000 vértices e

499500 arestas. Para esta rede, o número de arestas é muito grande e os acréscimos de pesos que foram considerados nos casos anteriores não são capazes de alterar significativamente a probabilidade de uma aresta escolhida.

Observe no gráfico da Figura 28(c) que para as simulações em que consideramos acréscimos de peso no intervalo de 10 até 10^4 unidades, as curvas das distribuições dos pesos das arestas exibem um comportamento quase contínuo, visto que existe uma variedade grande de pesos na rede. Para a rede considerada, só é possível perceber as características das RIP para Δw a partir de 10^4 unidades, porém devido às limitações computacionais, especificamente a memória das máquinas utilizadas, não conseguimos gerar estas distribuições.

De acordo com estas análises, concluímos que o efeito do acréscimo de peso Δw depende do tamanho da rede considerada. Quanto maior for uma rede, maior será a faixa de acréscimos de pesos que é permitido adicionar a esta rede até que a sua distribuição de pesos das arestas se reduza a um ponto. Outro efeito do tamanho do acréscimo de peso juntamente com a interação preferencial é o aparecimento de arestas hubs. Por fim, vimos que a depender da intensidade do acréscimo de peso, a interação preferencial se torna tão evidente ao ponto da rede se reduzir a uma única aresta, onde se concentram todos os acréscimos de pesos adicionados durante a simulação.

4.2 Aplicação

Na aplicação das RIP, construímos redes a partir de sinais do eletroencefalograma (EEG) de 4 indivíduos selecionados aleatoriamente no banco de dados referente ao projeto pesquisa: *Estudo da conectividade cortical em estado alterado de consciência: Meditação* [14]. Para participar dessa pesquisa foram considerados indivíduos entre 33 e 73 anos, saudáveis, de ambos os sexos, praticantes de meditação há pelo menos seis anos. O grupo responsável por essa pesquisa é o Núcleo de Inovação Tecnológica em Reabilitação (NITRE), coordenado pelo Professor José Garcia Vivas Miranda. Os procedimentos utilizados neste estudo foram aprovados pelo Comitê de Ética e Pesquisa da Universidade Federal da Bahia do Instituto de Ciências da Saúde sob o número CAAE: 444570.1.0000.5662.

No processo de coleta destes sinais, utilizou-se um aparelho de EEG com 30 eletrodos e montagem baseada no sistema 10 – 20. O sistema 10 – 20 é um padrão universal onde a distância entre os eletrodos correspondem a 10% ou 20% das distâncias entre os pontos usados como referência, que são eles o Nasion¹ e o Inion².

Neste trabalho, utilizamos apenas a primeira fase do protocolo. Nesta fase, são

¹ Localizado no topo do nariz entre as sobrancelhas.

² Localizado na base do crânio atrás da cabeça.

montados os eletrodos na cabeça de um indivíduo e é solicitado ao mesmo olhar para uma cruz durante 1 minuto. Após este tempo, o indivíduo deve fechar os olhos e mentalizar a cruz por 5 minutos. É durante este intervalo de tempo que os registros do EEG são coletados, e é medida a conectividade cerebral do indivíduo. Devido à sensibilidade das medições, o indivíduo é orientado a ficar sentado e imóvel, com o objetivo de evitar alterações externas nos sinais de saída do aparelho.

Após as coletas serem concluídas, a próxima etapa é a construção das redes por meio da utilização destes sinais. Neste sistema, os eletrodos equivalentes aos vértices. O passo seguinte consiste em saber como estes vértices serão conectados, ou seja, determinar um método de correlação que, ao obedecer a certos critérios, define as conexões entre os vértices; do contrário, estes vértices não são conectados. O método de correlação adotado foi o *Sincronização por Motifs (SM)* [12, 13]. A forma como o método Sincronização por Motifs é utilizado para a construção das redes dos sinais do EEG, pode ser encontrada de maneira sintetizada no apêndice A.

Depois de geradas as redes com os sinais do EEG, comparamos as distribuições de pesos provenientes destas redes com as distribuições obtidas por meio das simulações das RIP. Para fazer estas comparações, realizamos simulações do modelo onde foram consideradas redes com 30 vértices referentes aos 30 eletrodos utilizados no procedimento. Contudo, os valores dos parâmetros tamanho da rede N e acréscimo de peso Δw serão definidos de acordo com as redes que pretendemos analisar.

Começamos as análises com um indivíduo, denominado *indivíduo A*. Nos gráficos da Figura 31, a curva rosa é a distribuição dos pesos das arestas da rede deste indivíduo. Esta curva representa a conectividade cerebral do indivíduo A durante 5 minutos. As curvas pretas dos gráficos da Figura 31 são as distribuições geradas por nosso modelo para determinados acréscimo de peso Δw .

A Figura 31 apresenta os gráficos de simulações das RIP para 1000 iterações, uma vez que, com este valor, obtivemos um melhor ajuste para as curvas dos dados do EEG. Nestes gráficos, foram considerados acréscimos de pesos no intervalo de 9 a 14 unidades.

De acordo com os gráficos da Figura 31, podemos perceber que, a depender da intensidade do acréscimo de peso que é adicionado a rede, as curvas para os dados do EEG e para as RIP podem estar próximas ou distantes umas das outras. Por exemplo, para o acréscimo de peso $\Delta w = 14$ unidades as curvas estão distantes, já para o $\Delta w = 11$ unidades as curvas estão praticamente sobrepostas.

A comparação das curvas somente mediante a análise visual pode induzir a uma análise equivocada dos resultados. Por exemplo, poderíamos ser induzidos a afirmar que as curvas da Figura 38(b) estão mais próximas umas das outras do que as curvas da Figura 38(a). Contudo, como veremos adiante, depois de ter usado um método

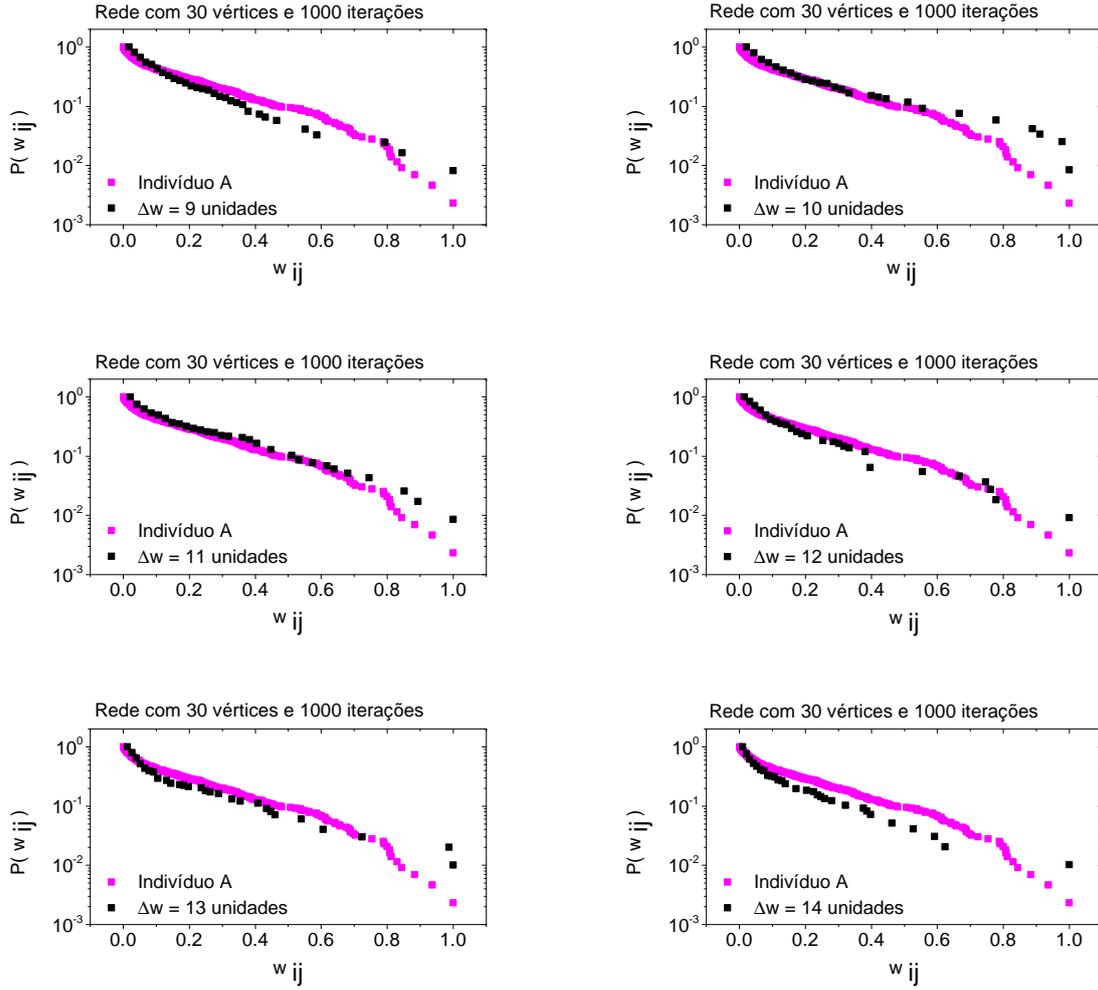


Figura 31 – Gráficos não interpolados do indivíduo A

matemático para calcular a distância entre estas curvas, obtivemos que esta análise não é coerente.

O método que adotamos foi a *Distância Quadrática Média*. Na determinação desta distância, levamos em consideração a distância D_k entre um ponto da curva de distribuição das RIP e um ponto da curva das medidas do EEG, conforme pode ser visto na Figura 32. A distância quadrática média é denotada por D_{RMS} , e obedece a seguinte expressão

$$D_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k^2}, \quad (4.1)$$

onde

$$D_k = P_{mk}(w_{ij}^k) - P_{rk}(w_{ij}^k). \quad (4.2)$$

Nestas equações n é o número total de pesos diferentes nas distribuições, $P_{mk}(w_{ij}^k)$ e $P_{rk}(w_{ij}^k)$ são os valores da probabilidade acumulada complementar do peso w_{ij}^k das arestas do modelo e das medidas do EEG, respectivamente.

Para realizar o cálculo do índice D_{RMS} , é necessário que as curvas do modelo e dos dados do EEG obedeçam a seguinte condição: se existe um determinado peso w_{ij} na

curva de distribuição do modelo (curva que tomamos como referência), deve-se existir este mesmo peso na curva dos dados do EEG.

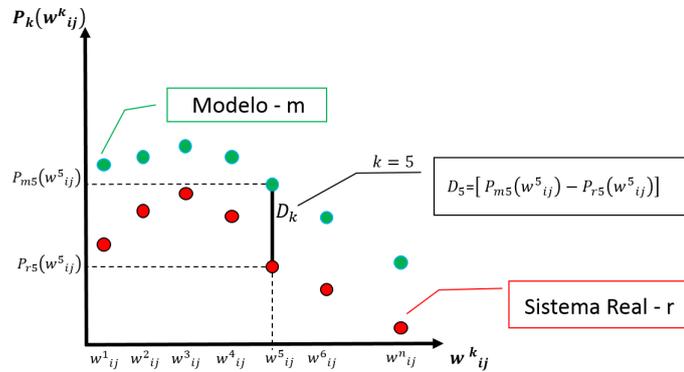


Figura 32 – Ilustração do cálculo do índice D_{RMS}

Desta maneira, considere a Figura 32, se existe o peso denominado w^5_{ij} na curva referente ao modelo (curva verde), deve-se existir este mesmo peso na curva das distribuições dos pesos da rede construída a partir dos sinais do EEG (curva vermelha). A distância D_5 é calculada mediante subtração das probabilidades do modelo e das medidas do EEG para o mesmo peso w^5_{ij} . Após calculadas as distâncias correspondentes a todos os pesos, podemos utilizar a Equação (4.1) para calcular a distância quadrática média entre estas curvas. Com este desenvolvimento, o valor do índice D_{RMS} permite quantificar o quão próximas estão as curvas e assim, posteriormente, podemos afirmar se as RIP se adequam ou não às distribuições geradas a partir dos dados do EEG. Observe que nas Equações (4.1) e (4.2), quanto mais as curvas estão próximas, menor é o valor dos termos de D_k e, conseqüentemente, menor é o valor do índice D_{RMS} , de modo que, se os pontos de $P_{mk}(w^k_{ij})$ estivessem sobre os pontos de $P_{rk}(w^k_{ij})$, o valor do índice D_{RMS} seria igual a zero.

No entanto, como ilustram os gráficos da Figura 31, não é possível calcular o valor do índice D_{RMS} diretamente, pois as curvas das medidas do EEG possuem mais pontos do que as curvas do modelo, e, dessa forma, não obedecem a condição de que todos os pesos têm que coexistir nas duas curvas. Para contornar esta situação, em cada gráfico da Figura 31, realizamos uma *interpolação linear* da curva referente aos dados do EEG e escolhemos nesta distribuição apenas os pontos com os mesmos valores dos pesos da distribuição do modelo que pretendemos fazer as comparações.

Como podemos verificar nos gráficos da Figura 33, após os dados serem interpolados, para cada ponto de $P_{mk}(w^k_{ij})$ existe um ponto em $P_{rk}(w^k_{ij})$ correspondente. Com isso se torna viável calcular a distância entre estes pontos e, conseqüentemente, o D_{RMS} . O processo de interpolação das nossas curvas foi realizado por meio do software OriginPro 9.0. Como a interpolação linear é um método que permite estimar valores a partir de dados previamente conhecidos, em todos os gráficos deste trabalho escolhemos interpolar as curvas dos dados do EEG, uma vez que, elas possuem uma quantidade maior de pontos em relação às curvas das RIP. Caso tivéssemos escolhido interpolar as curvas do modelo, teríamos que estimar

uma quantidade grande de valores e isso aumentaria a imprecisão dos nossos resultados.

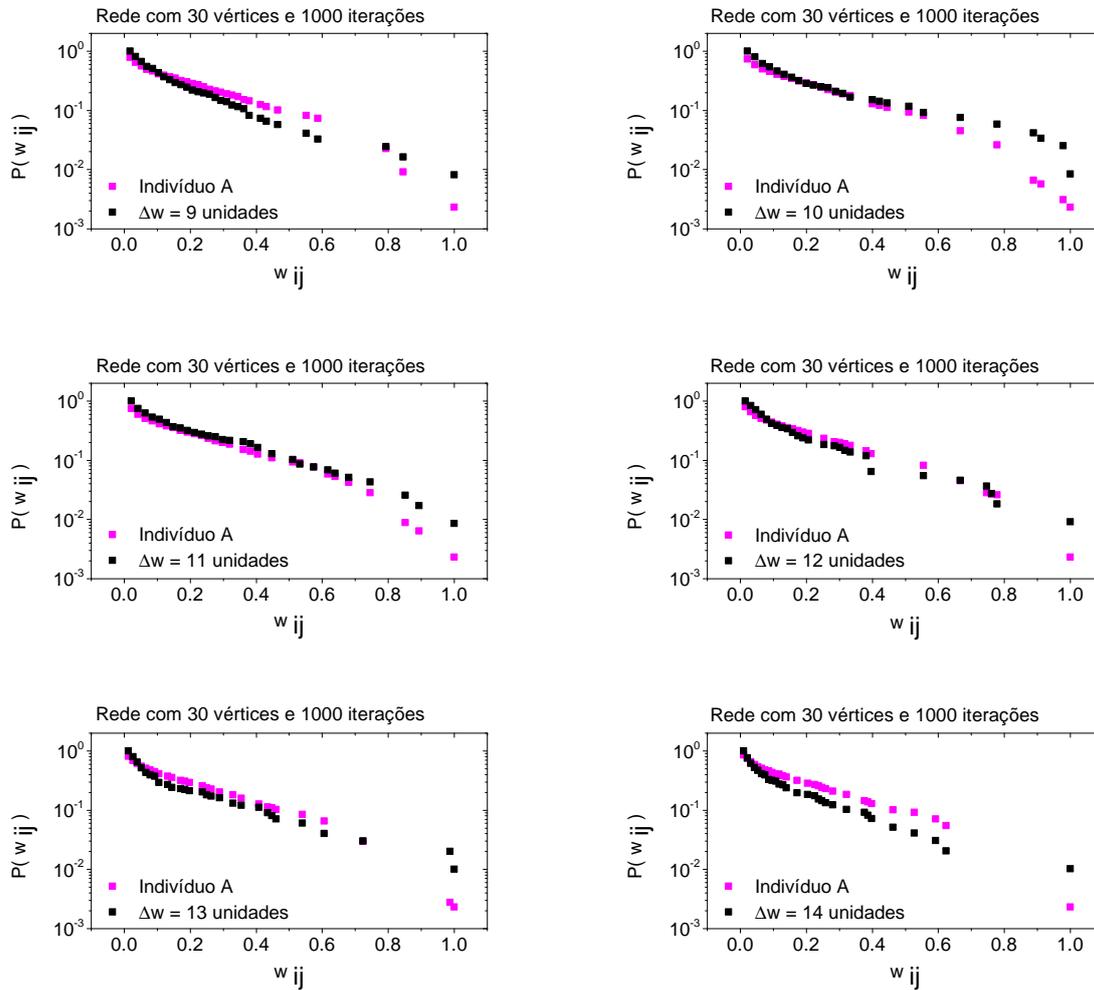


Figura 33 – Gráficos interpolados do indivíduo A

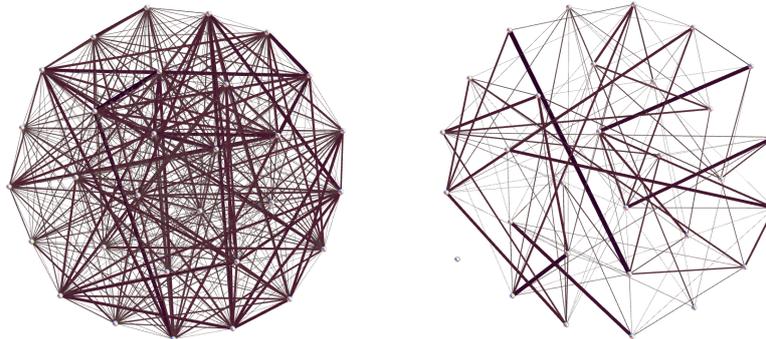
A Tabela 3 traz os valores dos índices D_{RMS} para os acréscimos de peso no intervalo de 9 a 14 unidades. O valor $\Delta w = 11$ unidades possui o menor valor do índice D_{RMS} da tabela, a saber 0,0429. Enquanto para o acréscimo de peso igual a 14 unidades, o índice D_{RMS} é o maior, por meio de uma análise visual dos gráficos das Figuras 31 e 33, é possível prever estes resultados. Diante dessas constatações, podemos afirmar que a curva do modelo em que consideramos uma rede com 30 vértices, 1000 iterações e acréscimo de peso igual a 11 unidades é a curva que mais se ajusta a curva de distribuição dos pesos da rede gerada para o indivíduo A.

Refizemos este processo para outros valores de Δw e vimos que, a partir de $\Delta w = 14$ unidades, o valor do índice D_{RMS} se torna muito grande. Isto nos informa que as curvas se afastam muito umas das outras, ou seja, para estes valores, as RIP não descrevem a distribuição de pesos da rede gerada por meio dos sinais do EEG. Também fizemos simulações para acréscimos de peso abaixo de $\Delta w = 11$ unidades de peso, contudo os valores dos índices D_{RMS} que encontramos não são satisfatórios tanto quanto para $\Delta w = 11$ unidades.

Δw	D_{RMS}
9	0.0982
10	0.0511
11	0.0429
12	0.0999
13	0.1419
14	0.1818

Tabela 3 – D_{RMS} : indivíduo A

Na Figura 34 apresentamos as redes construídas a partir dos dados do EEG do indivíduo A e do modelo para $\Delta w = 11$ unidades, respectivamente. Para estas redes, observamos que apesar das distribuições de pesos das arestas serem próximas, com o índice D_{RMS} igual a 0,0429, topologicamente estas redes são diferentes. Essa diferença é devido ao processo de interpolação que a distribuição dos pesos da rede com os dados do EEG é submetida para calcular o D_{RMS} . No processo de interpolação, são consideradas apenas as arestas da rede construída com os dados do EEG que tenham o mesmo peso que as arestas da rede do modelo, de outra maneira, uma parcela grande das arestas da rede gerada com os dados do EEG são desconsideradas.

Figura 34 – Redes: indivíduo A e modelo para $\Delta w = 11$ unidades

Na construção das redes da Figura 34, todas as arestas da rede gerada a partir dos dados do EEG, inclusive as que foram desprezadas no processo de interpolação, são consideradas, e como consequência, as topologias da rede referente ao modelo e ao indivíduo A são diferentes. Observa-se ainda, que não é possível gerar a rede com os dados interpolados do indivíduo A, pois no processo de interpolação retiramos ou acrescentamos pontos na curva referente a este indivíduo, e estes pontos não especificam quais arestas foram adicionadas ou retiradas da rede. O número diferente de arestas ponderadas faz com que os índices grau, grau ponderado, coeficiente de aglomeração sejam diferentes para estas redes, como pode ser visto na Tabela 4.

Por meio da comparação dos índices da rede com 30 vértices gerada a partir dos sinais do EEG do indivíduo A, com a rede, de mesmo tamanho, simulada por meio do modelo para 1000 iterações e acréscimo de peso igual a $\Delta w = 11$ unidades, podemos

Índices	Grau médio	Grau ponderado	Coefficiente de aglomeração	Número de arestas
Indivíduo A	28,9	4,86	0,998	434
Modelo com $\Delta w = 11$ unidades	7,80	1,42	0,262	117

Tabela 4 – Comparações: indivíduo A e modelo

observar na Tabela 4 que o menor número de arestas ponderadas faz com que os índices grau, grau ponderado e coeficiente de aglomeração sejam menores para a rede do modelo.

Por fim, embora a distribuição de pesos da rede construída com os dados do EEG sejam muito próximas das curvas de distribuição do modelo, a diferença alta do número de arestas ponderadas destas redes faz com que os outros índices de caracterização sejam diferentes.

O gráfico da Figura 35, apresenta a distribuição dos pesos das arestas da rede dos 4 indivíduos considerados nesta pesquisa. Por enquanto, vamos delimitar as nossas análises às distribuições rosa e azul, referentes aos indivíduos A e B, respectivamente. Adiante iremos discorrer sobre os indivíduos C e D.

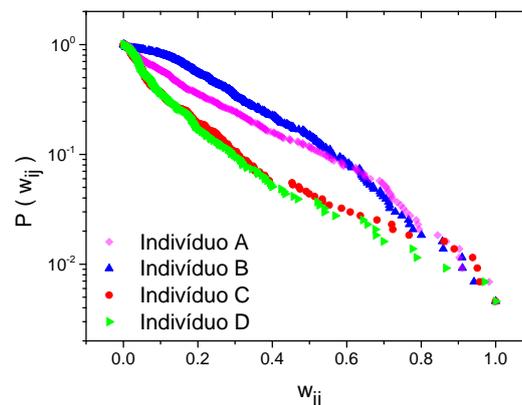


Figura 35 – Comparação entre todos os indivíduos

Vamos considerar agora o *indivíduo B*, a curva azul do gráfico da Figura 35 se refere a distribuição dos pesos das arestas da rede deste indivíduo. Observe que neste gráfico, a *maioria* dos pesos das arestas da rede do indivíduo B alcançam valores da probabilidade acumulada complementar maiores do que os alcançados pelo indivíduo A. Vamos usar este comportamento para sugerir os valores dos parâmetros das RIP que resultem em uma distribuição ajustável à curva de distribuição do indivíduo B.

Neste ponto, é importante retomar as análises da seção 4.1. Nesta seção, vimos que para um conjunto de simulações do modelo, onde são consideradas fixos a intensidade do acréscimo de peso e o tamanho da rede, o aumento da quantidade de iterações provoca uma diminuição dos valores da probabilidade acumulada complementar dos pesos das arestas das redes.

Nas análises a seguir, adotamos os valores dos parâmetros do melhor ajuste para o indivíduo A como referência. A partir destes valores, presumimos que, como para o indivíduo A foram consideradas 1000 iterações, supomos que para o indivíduo B o número de iterações seja menor do que 1000, uma vez que a maioria dos pesos da curva de distribuição das RIP deste indivíduo alcançaram probabilidades maiores do que a curva referente ao indivíduo A. Desta forma, para gerar as distribuições das RIP que melhor se adequam à distribuição para o indivíduo B, realizamos simulações com apenas 100 iterações, e acréscimo de peso igual a 11 unidades, e nas vizinhanças desse valor. Nestas simulações, também consideramos redes com 30 vértices, uma vez que o número de vértices se refere a quantidade de eletrodos usados no procedimento.

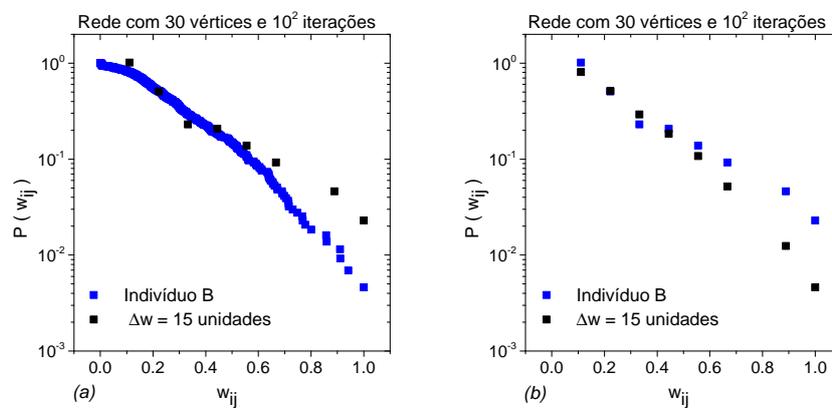


Figura 36 – (a) Gráfico não interpolado do indivíduo B (b) Gráfico interpolado do indivíduo B

O gráfico da Figura 36(a), exibe o melhor ajuste obtido para o indivíduo B. Neste gráfico, a curva azul representa a distribuição de pesos das arestas da rede do indivíduo B e a curva preta se refere a distribuição gerada por meio das RIP. A distribuição do modelo que garante o melhor ajuste para as curvas do indivíduo B ocorreu nas simulações em que consideramos o acréscimo de peso igual a 15 unidades. Na Figura 36(b), exibimos estas curvas após ter sido feito o processo de interpolação. Observemos que alguns pontos destas curvas estão muito próximos e até se sobrepõem, o que sugere que o valor do índice D_{RMS} é baixo.

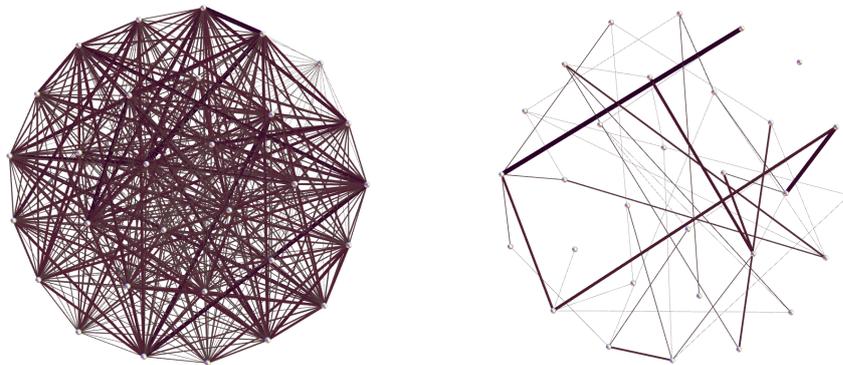
Na Tabela 5 temos os valores dos índices D_{RMS} para os acréscimos de peso igual a 15 unidades e nas proximidades desse valor. De acordo com esta tabela, a curva das RIP para a simulação em que foi considerado $\Delta w = 16$ unidades é a que mais se distancia da curva de distribuição dos pesos da rede do indivíduo B, uma vez que, o seu valor do D_{RMS} é o maior da tabela. Por outro lado, a simulação em que foi considerado $\Delta w = 15$ unidades apresenta o menor valor do D_{RMS} , seguido da simulação com $\Delta w = 10$ unidades. O menor valor do D_{RMS} para $\Delta w = 15$ unidades indica que esta simulação oferece a distribuição que mais se adequa a distribuição de pesos gerada por meio do EEG.

Observemos que o valor para o acréscimo de peso que representa o melhor ajuste

Δw	D_{RMS}
1	0.2255
2	0.1788
3	0.2342
4	0.1844
5	0.1788
6	0.2382
7	0.2224
8	0.1890
9	0.2534
10	0.1132
11	0.1717
12	0.2546
13	0.2754
14	0.3019
15	0.0799
16	0.5044
17	0.5038
18	0.3538
19	0.2886
20	0.1635

Tabela 5 – D_{RMS} : indivíduo B

para o indivíduo A, a saber $\Delta w = 11$ unidades, não é um bom ajuste para o indivíduo B. Com isto, afirmamos que é possível encontrar uma distribuição do modelo que se ajuste a distribuição dos indivíduos, por meio da mudança dos valores dos parâmetros das RIP.

Figura 37 – Redes: indivíduo B e modelo para $\Delta w = 15$ unidades

Embora as distribuições de pesos dos dados do EEG e do modelo para $\Delta w = 15$ unidades sejam muito próximas, estas redes exibem topologias diferentes (ver Figura 37). A justificativa disso, se deve ao fato que para os gráficos da Figura 36 consideramos apenas as arestas da rede do indivíduo B com o peso equivalente às arestas da rede do modelo, enquanto que na construção das redes da Figura 37 todas as arestas da rede do indivíduo B são consideradas.

De acordo com a Tabela 6, na rede do indivíduo B são consideradas 391 arestas

ponderadas a mais do que na rede gerada por meio do modelo. Em virtude desta diferença, os outros índices da Tabela 6 também são diferentes.

Índices	Grau médio	Grau ponderado	Coefficiente de aglomeração	Número de arestas
Indivíduo B	29,0	7,46	1	435
Modelo com $\Delta w = 15$ unidades	2,93	0,74	0,0640	44

Tabela 6 – Comparações: indivíduo B e modelo

Vamos analisar agora os indivíduos C e D ao mesmo tempo, uma vez que, as distribuições dos pesos das arestas das redes destes indivíduos são muito parecidas, como pode ser conferido no gráfico da Figura 35.

De forma análoga a situação anterior, iniciamos as análises a partir do gráfico da Figura 35. De acordo com este gráfico, para gerar distribuições do modelo que se ajustem às curvas de distribuição dos indivíduos C ou D, os valores de entrada dos parâmetros acréscimo de peso e número de iterações, devem gerar distribuições com valores da probabilidade acumulada complementar menores do que as dos indivíduos A e B.

Devido às análises realizadas para o indivíduo A, sabemos que nas simulações em que são consideradas 1000 iterações e acréscimo de peso igual a 11 unidades, a curva de distribuição de pesos resultante alcança valores da probabilidade acumulada complementar maiores do que as queremos encontrar para ajustar com as curvas referentes aos indivíduos C e D. Sabemos também que a quantidade de iterações pode modificar a probabilidade acumulada complementar dos pesos, de forma que em uma sequência de simulações em que são consideradas redes com tamanho e acréscimos de pesos fixos, quando aumentamos a quantidade de iterações, a tendência é que as probabilidades dos pesos das arestas diminuam.

Esta análise não nos informa os valores que devemos considerar para encontrar o melhor ajuste, ela apenas nos sugere que devemos adotar um número de iterações maior do que a quantidade de iterações consideradas para o indivíduo A. Deste modo, por meio do método de tentativa e erro, começamos com simulações para a quantidade de iteração a partir de 1000 iterações, e acréscimo de peso igual ao do indivíduo A, isto é, $\Delta w = 11$ unidades.

Depois de realizadas várias simulações para diversas quantidades de iterações t , observamos que as curvas das RIP que mais se identificam com as curvas de distribuições dos pesos geradas a partir dos sinais do EEG são para as simulações com t equivalente a 10^6 iterações. Nestas simulações, consideramos acréscimos de peso igual a 11 unidades e nas vizinhanças desse valor. No entanto, a curva de distribuição do modelo que melhor se ajustou as curvas das distribuições tanto do indivíduo C, como para o indivíduo D, foi para a simulação em que consideramos $\Delta w = 2$ unidades e 10^6 iterações.

Nos gráficos da Figura 38, as curvas pretas se referem à distribuição dos pesos das arestas para a simulação do modelo em que são realizadas 10^6 iterações e acréscimo de peso equivalente a 2 unidades. A curva vermelha da Figura 38(a) e a verde da Figura 38(b) se referem aos indivíduos C e D, respectivamente. Na Figura 39 temos os gráficos interpolados para estes mesmos indivíduos.

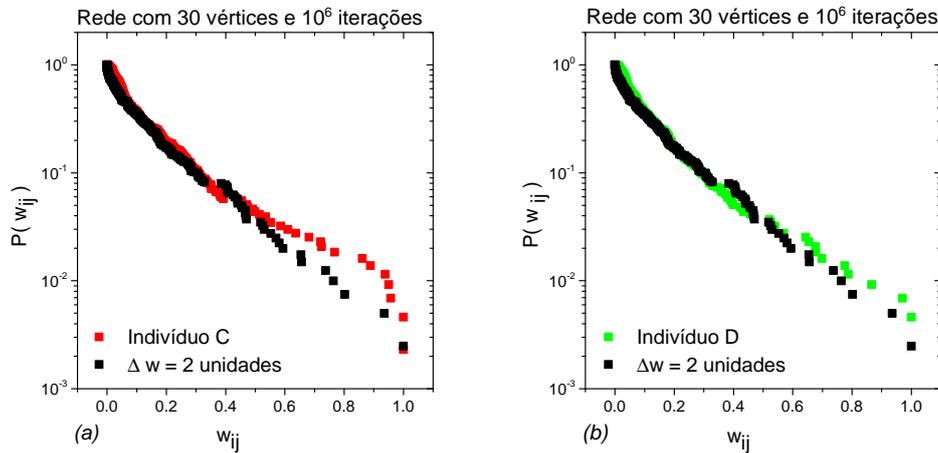


Figura 38 – Gráficos não interpolados dos indivíduos C e D

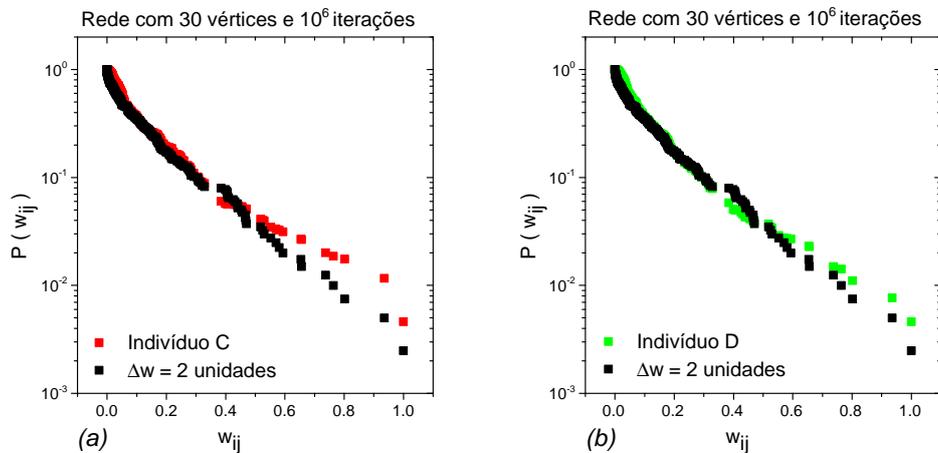


Figura 39 – Gráficos interpolados dos indivíduos C e D

Nas Tabelas 7(a) e (b) apresentamos os valores dos índices D_{RMS} calculados a partir das curvas das simulações para diversos valores de Δw e das curvas referentes aos indivíduos C e D, respectivamente. De acordo com estas tabelas, a curva do modelo para $\Delta w = 2$ unidades se ajusta bem para os dois indivíduos. Sendo que para o indivíduo C o valor do $D_{RMS} = 0,0992$ e para o indivíduo D é igual a $0,1135$.

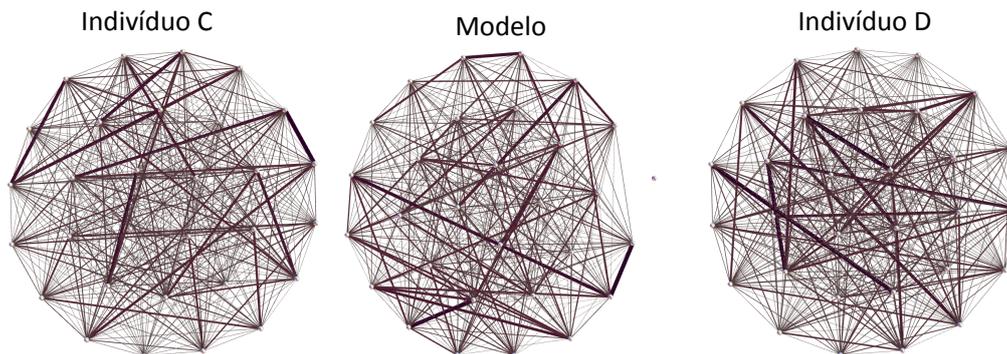
A Figura 40 exhibe as redes construídas a partir das distribuições dos pesos das arestas dos indivíduos C e D e a rede do modelo para a simulação em que consideramos os parâmetros: tamanho da rede equivalente a 30 vértices, 10^6 iterações e acréscimo de peso igual a 2 unidades. Devido a quantidade de iterações e a intensidade relativamente baixa do acréscimo de peso, se comparada ao número de arestas da rede, a rede gerada por meio

Δw	D_{RMS}	Δw	D_{RMS}
1	0.1442	1	0.1404
<u>2</u>	<u>0.0992</u>	<u>2</u>	<u>0.1135</u>
3	0.1971	3	0.2138
4	0.2986	4	0.3155
5	0.2875	5	0.2998
6	0.2763	6	0.2898
7	0.3074	7	0.3211
8	0.3339	8	0.3486
9	0.3331	9	0.3467
10	0.3186	10	0.3339
11	0.3247	11	0.3376

(a) (b)

Tabela 7 – (a) D_{RMS} : indivíduo C (b) D_{RMS} : indivíduo D

do modelo possui uma quantidade maior de arestas (ver na Tabela 8) e uma diversidade maior de pesos do que as redes dos indivíduos A e B. Além disso, a rede do modelo se assemelha mais com as redes dos indivíduos C e D, do que os ajustes encontrados para os indivíduos anteriores, como podemos ver nas redes da Figura 40 e na Tabela 8.

Figura 40 – Redes: indivíduo C, modelo para $\Delta w = 2$ unidades e indivíduo D

Neste caso, a quantidade de arestas da rede gerada por meio do modelo se aproxima muito da quantidade de arestas das redes dos indivíduos C e D. Observemos na Tabela 8 que a diferença entre estes valores não atinge a 50 arestas. Em virtude disso, os índices grau, grau ponderado e coeficiente de aglomeração são muito próximos nestas redes. Ao comparar estes indivíduos, observemos que, de acordo com a Tabela 7, o indivíduo C apresenta o menor valor do D_{RMS} , assim também como os melhores valores das caracterizações da Tabela 8.

Índices	Grau médio	Grau ponderado	Coefficiente de aglomeração	Número de arestas
Modelo com $\Delta w = 2$ unidades	25,6	2,99	0,915	385
Indivíduo C	28,9	2,90	0,998	434
Indivíduo D	28,9	3,40	0,998	434

Tabela 8 – Comparações: modelo e indivíduos C e D

Diante destas análises, entendemos que, a depender dos valores dos parâmetros considerados no modelo de Redes de Interação Preferencial, é possível gerar distribuições de pesos que apresentem um comportamento semelhante aos das distribuições de pesos das redes geradas a partir dos sinais do EEG.

A associação entre as RIP e as redes geradas com os sinais do EEG é estabelecida da seguinte forma: os vértices do modelo se identificam com os eletrodos do aparelho de EEG, já as arestas do modelo representam as conexões entre os eletrodos. Quanto às iterações, temos que cada iteração t do modelo equivale a uma janela do sinal do EEG. Neste caso, foram consideradas janelas compostas por 20 motifs [12, 13]. Como já sabemos, tanto as RIP quanto as redes geradas com os dados do EEG são redes ponderadas, cujos pesos representam a intensidade das conexões entre os vértices/eletrodos. Uma aresta hub do modelo é identificada nas redes geradas com as medidas do EEG, como uma conexão que possui peso/intensidade alta, se comparada com às demais conexões da rede. Quanto ao valor que o acréscimo de peso do modelo deve assumir para representar adequadamente uma determinada medida do EEG, como vimos, depende das características do sinal a ser modelado.

De outra forma, podemos dizer que os pesos nas RIP nos indicam o quanto as conexões entre dadas regiões do cérebro foram reiteradas, ou seja, o quanto as conexões se repetiram. Com relação ao número de iterações que é considerado em cada simulação do modelo, podemos interpretá-lo como o tempo necessário para estabelecer as conexões entre as regiões cerebrais.

As redes construídas a partir dos sinais do EEG descrevem os padrões de conectividade cerebral dos indivíduos, e, uma vez que estes padrões são distintos para cada indivíduo, pode-se dizer que eles possuem variabilidade individual intrínseca [45]. Devido a isso, as redes construídas a partir dos sinais do EEG para cada indivíduo considerado anteriormente apresentam topologias diferentes. A variabilidade individual é uma característica tão evidente que Finn e colaboradores [45] a utilizaram para identificar indivíduos em meio a um conjunto composto por cerca de 126 indivíduos. Nessa pesquisa, eles demonstraram que o padrão de conectividade cerebral de um indivíduo não sofre alterações extremas, ainda que o indivíduo esteja exercendo atividades distintas.

Acredita-se que os padrões únicos de conectividade cerebral se referem às conexões que estão presentes no cérebro de um indivíduo e que foram realizadas desde a sua formação. Ao utilizar as RIP para descrever os dados do EEG, estamos propondo que é possível reproduzir como as conexões cerebrais foram executadas para formar o padrão de conectividade do indivíduo considerado. Assim, sugerimos que os padrões de conectividade cerebral, medidos por meio do EEG, podem ser reproduzidos ao considerar um processo composto por duas características básicas, especificamente: crescimento dos pesos e interação preferencial.

5 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, propomos um modelo computacional de redes complexas que tem como base as mesmas características adotadas no modelo de redes livres de escala desenvolvido por Albert e Barabási [11]. No entanto, as RIP são ponderadas e possuem um número fixo de vértices. A estrutura das RIP segue duas regras: primeira, crescimento do peso das arestas da rede, isto é, em cada iteração alguma aresta da rede irá ter o seu peso modificado. Segunda, a interação preferencial, isto é, quanto maior for o peso de uma aresta, maior é a probabilidade dessa aresta ter o seu peso alterado.

A construção do modelo de Redes de Interação Preferencial considera três parâmetros e são eles: a intensidade do acréscimo de peso Δw que é adicionado a uma aresta, a quantidade de iterações t que são realizadas em uma simulação e o número de vértices da rede. Analisamos as RIP de acordo com a variação dos seus parâmetros, e observamos que nas redes em que consideramos tamanho e acréscimos de pesos fixos, o efeito da quantidade de iterações é aumentar o número de acréscimos de peso que é inserido na rede. Nestas redes, a quantidade de iterações modifica também a probabilidade dos pesos das aresta, de forma que, com o aumento da quantidade de iterações, as probabilidades dos pesos das arestas tendem a diminuir, devido ao maior número de pesos diferentes na rede.

Nas análises em que consideramos redes com tamanho e número de iterações fixos, avaliamos o efeito da interação preferencial por meios da variação do acréscimo de peso adicionado às arestas. Redes que recebem acréscimos de pesos pequenos em relação ao seu tamanho, possuem uma fraca interação preferencial. Contrariamente, redes que recebem acréscimos de peso grande, possuem uma forte interação preferencial.

Nas simulações em que são considerados acréscimos de pesos altos em relação ao tamanho da rede, temos que quanto maior for o acréscimo de peso adicionado às arestas, maiores são as probabilidades destas mesmas arestas receberem novos acréscimos de peso. Este processo faz com que apenas uma parcela da quantidade total de arestas da rede seja escolhida para ter o peso modificado. Com todas as alterações de pesos realizadas sob a mesma parcela de arestas, obtém-se uma diversidade grande de pesos desta parcela. Quando o acréscimo de peso é alto, se comparado ao tamanho da rede, a interação preferencial se sobressai tanto que o tamanho da parcela de arestas escolhidas para ter o peso modificado é reduzido ao ponto que uma única aresta é escolhida em todas as iterações.

Para as simulações em que são adicionados acréscimos de pesos pequenos em comparação ao tamanho da rede, a interação preferencial não é muito evidente. Desta forma, obtivemos distribuições com uma quantidade grande de arestas selecionadas para receber

acréscimos de peso e, entre elas, notam-se muitas arestas com o mesmo peso. Quando a interação preferencial é fraca, em quase todas as iterações uma aresta diferente é selecionada. A consequência disso é que poucas arestas são repetidas muitas vezes, fazendo assim com que as probabilidades de se encontrar arestas na rede com peso alto sejam baixas.

Temos ainda que quanto maior for o tamanho da rede, maior é a intensidade do acréscimo de peso Δw que pode ser adicionado a essa rede, sem que ela alcance um certo acréscimo de peso crítico, capaz de tornar a interação preferencial tão evidente que apenas uma aresta é escolhida na simulação. Vimos também que acréscimos de pesos relativamente grandes, juntamente com a característica de interação preferencial, proporcionam o aparecimento de arestas hubs na rede.

As RIP podem ser aplicadas a sistemas que sofrem variações com o decorrer do tempo e que podem ser modelados por meio de redes ponderadas, desde que obedecem às condições discutidas anteriormente. Neste trabalho, analisamos redes construídas a partir de um estudo voltado para Neurociência, no entanto, as RIP são mais gerais e podem ser aplicadas a sistemas de outras áreas do conhecimento.

Escolhemos modelar o padrão de conectividade cerebral de indivíduos a partir de dados do EEG coletados enquanto os mesmos mentalizavam uma cruz. Para isso, construímos redes que representam esses padrões utilizando o método de Sincronização por Motifs [12, 13]. Após as redes serem construídas, fizemos a comparação entre a distribuição de pesos das arestas de cada uma dessas redes com a distribuição de pesos das arestas de redes geradas por meio do modelo ao considerar determinados valores dos seus parâmetros.

Para calcular a distância entre essas distribuições, definimos o índice D_{RMS} . Este índice nos indica que quanto menor for o valor do D_{RMS} mais as curvas estarão próximas, e obviamente, quanto maior for o seu valor mais as curvas estão afastadas. Para os indivíduos analisados, o menor valor do D_{RMS} encontrado foi 0,0429 para o indivíduo A e o maior foi 0,1135 para o indivíduo B, e isto sugere que o padrão de conectividade cerebral de um indivíduo qualquer, pode ser reproduzido por meio dos processos de crescimento do peso das arestas e interação preferencial, que são os mecanismos que formulamos para a construção do modelo de Redes de Interação Preferencial.

Temos como sugestões futuras descrever outros sistemas fora do escopo da Neurociência, como por exemplo, o tráfego de automóveis nas vias de uma cidade, ou tráfego aéreo. Além disso, como visto anteriormente, a depender da intensidade do acréscimo de peso que é adicionado a uma aresta, a interação preferencial se torna tão evidente que apenas uma aresta é escolhida na rede. Dessa maneira, pretendemos encontrar uma forma geral de prever a intensidade limite do acréscimo de peso para redes de tamanho qualquer. Pretendemos ainda estudar variações das RIP, como por exemplo, retirada de peso das arestas, ou a escolha de mais de uma aresta para ter os seus pesos alterados em cada iteração.

APÊNDICE A – Sincronização por Motifs

O método Sincronização por Motifs [12,13] consiste em decompor as série temporais de um sinal de EEG, como sequências de padrões pré-definidos, denominados *motifs*. Os motifs são classificados como aclives, declives, picos e valas e, a depender do objetivo do estudo, eles podem ser adaptados para representar também padrões constantes, como foi feito em [46].

Os motifs são caracterizados de acordo com o grau e o lag. O grau do motif é o número n de pontos usados para a sua construção, e o lag λ é o intervalo entre estes pontos. A Figura 41 (a) traz um sinal de EEG e alguns tipos de motifs, para lag igual a 1 ou 2. Se $\lambda = 1$ os pontos da construção dos motifs são consecutivos, no entanto, se $\lambda > 1$ é necessário considerar um intervalo de tamanho λ entre os pontos dos motifs. Os diferentes tipos de motifs para um dado n são determinados por meio da permutação de n , isto é, $n!$. Dessa forma, para um motif de grau 3, existem 6 diferentes tipos de motifs possíveis, como ilustra a Figura 41(b).

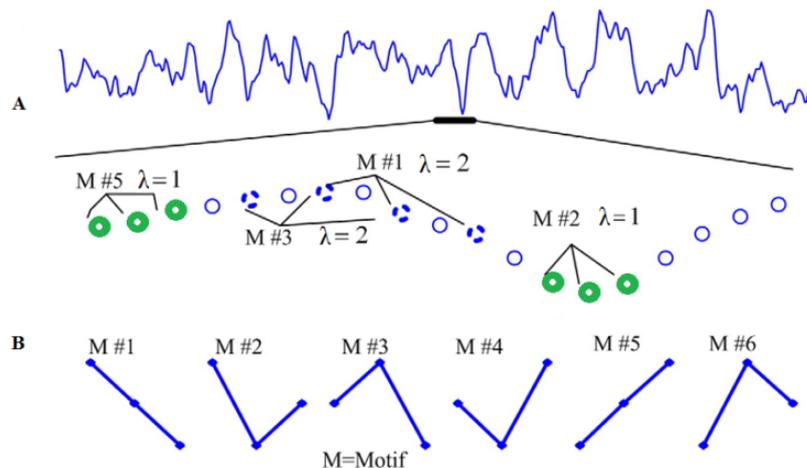


Figura 41 – Motifs, lag e graus. Fonte: [12,13]

Para entender como são realizadas as conexões entre os eletrodos (vértices), vamos descrever detalhadamente como funciona o método Sincronização por Motifs. Para [14], tem-se um sistema formado por 30 eletrodos e cada um deles possui uma série temporal característica que representa a atividade cerebral registrada por aquele eletrodo durante dado intervalo de tempo, a saber, 5 minutos. Os passos da implementação deste método podem ser acompanhados por meio da Figura 42, na qual exibe duas séries temporais X_i e Y_i meramente ilustrativas, ver Figura 42(a). O método funciona da seguinte forma:

1. Reescreve-se a série temporal de cada eletrodo como uma sequência de motifs, de outra forma, um vetor de motifs. Por exemplo, dadas as séries temporais X_i e Y_i é preciso reescrevê-las como uma sequência de motifs M_{x_i} e M_{y_i} , acompanhe na Figura 42(b). O

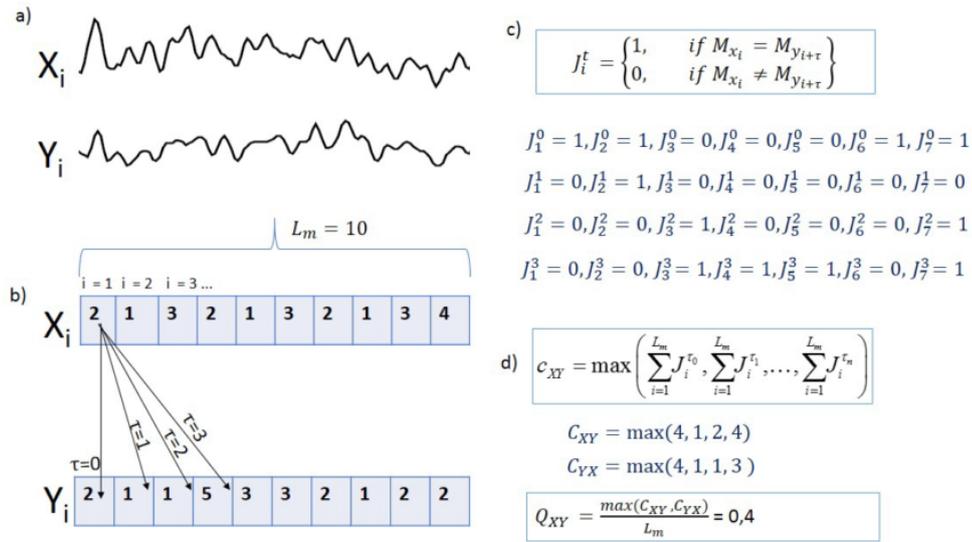


Figura 42 – Método dos Motifs. Fonte: [46]

parâmetro L_m indica o tamanho da sequência de motifs, esta sequência é denominada janela do sinal. O parâmetro τ é o tempo de atraso, e será utilizado na comparação entre as séries.

2. O próximo passo consiste em uma comparação entre todos os pares de eletrodos de uma dada janela para diferentes tempos de atraso τ . A comparação entre duas séries temporais, por exemplo, X_i e Y_i , é realizada a partir da comparação entre os elementos do vetor de motifs de cada série. Dessa forma é comparado o motif M_{x_i} que ocupa a posição i da série X_i com o motif M_{y_i} que ocupa a posição i da série Y_i , este processo é realizado para cada posição i . O tempo de atraso informa como deve ser feita a escolha dos elementos que serão comparados, para entender melhor acompanhe a Figura 42(b).

É definido também um índice de contagem J_i^τ que permite mensurar o quanto as séries são semelhantes. Considere novamente as séries X_i e Y_i , têm-se a relação

$$J_i^\tau = \begin{cases} 1, & \text{se } M_{x_i} = M_{y_{i+\tau}} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde M_{x_i} e M_{y_i} correspondem aos motifs que ocupam a posição i nas sequências X_i e Y_i , para o tempo de atraso τ . Na Figura 42(c) é calculado o valor de J_i^τ para as duas séries da Figura 42(b), para τ de 0 à 3.

3. Define-se C_{xy} como o maior número de vezes que o mesmo motif é encontrado em Y_i imediatamente após ter sido encontrado em X_i .

$$C_{xy} = \max \left(\sum_{i=1}^{L_m} J_i^{\tau_0}, \sum_{i=1}^{L_m} J_i^{\tau_1}, \dots, \sum_{i=1}^{L_m} J_i^{\tau_n} \right). \quad (\text{A.2})$$

No exemplo, o valor máximo de C_{xy} e C_{yx} é igual a 4 (ver Figura 42(d)).

4. E por último, é definido um grau de correlação Q_{xy} dado por

$$Q_{xy} = \frac{\max(C_{xy}, C_{yx})}{L_m}. \quad (\text{A.3})$$

Dessa forma, de acordo com a Figura 42(d), têm-se que $Q_{xy} = \frac{4}{10} = 0.4$.

Após o grau de correlação Q_{xy} ser encontrado para todos os pares de eletrodos da rede é necessário que exista um critério de correlação que permita avaliar se o valor de Q_{xy} representa, de fato, uma medida de correlação devido à atividade cortical entre as regiões em que se encontram os eletrodos x e y , ou se o valor de Q_{xy} representa apenas uma conexão aleatória. Para fazer esta avaliação é adotado o critério abaixo:

- Para cada uma das 30 séries temporais é feito o seguinte procedimento: embaralha-se o vetor de motifs da série com o objetivo de trocar as posições dos motifs.
- Aplica-se o método de sincronização por motifs juntamente com o método GVT. Dessa forma, os coeficientes Q_{xy} são definidos para todos os sinais aleatorizados e depois é construídas as redes sem fazer uso de nenhum teste de significância.
- Cria-se um vetor de arestas composto por todos os valores de Q_{xy} para todas as redes geradas. Estes valores devem ser ordenados em ordem crescente.
- É calculado a posição do vetor que corresponde a 95% do tamanho total do vetor de arestas. O valor de Q_{xy} referente a esta posição é dito como um valor limite, ou *Threshold*.

Após seguir este processo, as redes da pesquisa [14] são construídas de forma que, se o grau de correlação Q_{xy} de uma aresta a_{xy} for maior ou igual ao valor do *threshold*, o elemento a_{xy} da matriz de adjacência dessa rede é equivalente a um, ou seja, $a_{xy} \equiv 1$, caso contrário, $a_{xy} \equiv 0$. A determinação do *threshold* garante que as arestas da rede tenham 95% de chance de não serem frutos do acaso.

Por fim, é construída uma rede que representa o padrão de conectividade cerebral para aquela janela. Quando uma janela é deslocada, todo o processo é repetido novamente. O conjunto de redes que são geradas ao considerar todas as janelas formam um *GVT*. Como foi visto no Capítulo 2, a partir do GVT é simples obter a *REA* e, posteriormente, índices como grau de um vértice ou a distribuição de pesos das arestas. Na construção das redes de [14] a distribuição dos pesos das arestas foram reescaladas de 0 a 1, da mesma forma que no Modelo de Interação Preferencial, consultar o Capítulo 3.

Referências

- [1] NEWMAN, M. E. J. *Networks: an introduction*. 1. ed. New York: OUP Oxford, 2010. v. volume único.
- [2] DE ANGELIS, A. F. *Redes complexas. Tutorial. Universidade de São Paulo. Instituto de Física de São Carlos, São Paulo, 2005.*
- [3] NEWMAN, M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, v. 45, n. 2, p. 167, 2003.
- [4] BARABÁSI, A.-L. *Linked (conectado): a nova ciência dos networks*. 1. ed. São Paulo: Leopardo, 2009. v. volume único.
- [5] NUSSENZVEIG, H. M. *Complexidade e caos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ/COPEA, 1999. v. volume único.
- [6] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v. 74, p. 47, 2002.
- [7] BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, v. 424, n. 4-5, p. 175, 2006.
- [8] LIN, Y.; XIONG, H.; CHEN, M.; SUN, X.; FENG, E.; LIU, J.; WANG, B. Evolving weighted networks with edge weight dynamical growth. *Kybernetes*, v. 41, n. 9, p. 1244, 2012.
- [9] BARTHÉLEMY, M.; BARRAT, A.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. Characterization and modeling of weighted networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 346, n. 1, p. 34, 2005.
- [10] NICOSIA, V.; TANG, J.; MUSOLESI, M.; RUSSO, G.; MASCOLO, C.; LATORA, V. Components in time-varying graphs. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 22, n. 2, p. 023101, 2012.
- [11] BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*. v. 286, n. 5439, p. 509, 1999.
- [12] ROSÁRIO, R.; CARDOSO, P.; MUÑOZ, M.; MONTOYA, P.; MIRANDA, J. Motif-synchronization: A new method for analysis of dynamic brain networks with eeg. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 439, p. 7, 2015.

- [13] ROSÁRIO, R. S. *Sincronização por motivos uma proposta para análise de redes cerebrais*. 2013. p. 73. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.
- [14] Estudo da conectividade cortical em estado alterado de consciência: Meditação. Disponível em <http://aplicacao.saude.gov.br/plataformabrasil/login.jsf>.
- [15] HARARY, F. *Graph theory*. 1. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1969. v. volume único.
- [16] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e algoritmos computacionais*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda, 1984. v. volume único.
- [17] NETTO, P. O. B. *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. v. volume único.
- [18] GERSTING, J. L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004. v. volume único.
- [19] AMARAL, LAN, O. J. Complex networks - augmenting the framework for the study of complex systems. *The European Physical Journal B*, Les Ulis, v. 38, p. 147, 2004.
- [20] WATTS, D. J. *Seis graus de separação: a evolução da ciência de redes em uma era conectada*. 1. ed. São Paulo: Leopardo, 2009. v. volume único.
- [21] BORBA, E. M. *Medidas de centralidade em grafos e aplicações em redes de dados*. 2013. p. 61. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.
- [22] PIMM, S. L. *The balance of nature?: ecological issues in the conservation of species and communities*. 1. ed. Chicago: University of Chicago Press, 1991. v. volume único.
- [23] SOLE, R. V.; MONTROYA, M. Complexity and fragility in ecological networks. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, v. 268, n. 1480, p. 2039, 2001.
- [24] CAMACHO, J.; GUIMERA, R.; AMARAL, L. A. N. Analytical solution of a model for complex food webs. *Physical Review E*, v. 65, n. 3, p. 030901, 2002.
- [25] CASTEIGTS, A.; FLOCCINI, P.; QUATTROCIOCCI, W.; SANTORO, N. Time-varying graphs and dynamic networks. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, v. 27, n. 5, p. 387, 2012.

- [26] SANTORO, N.; QUATTROCIOCCHI, W.; FLOCCHINI, P.; CASTEIGTS, A.; AMBLARD, F. Time-varying graphs and social network analysis: Temporal indicators and metrics. *CoRR*, 2011.
- [27] MUTLU, A. Y.; BERNAT, E.; AVIYENTE, S. A signal-processing-based approach to time-varying graph analysis for dynamic brain network identification. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, v. 2012, n. 451516, p. 1, 2012.
- [28] SABA, H.; VALE, V. C.; MORET, M. A.; MIRANDA, J. G. V. Spatio-temporal correlation networks of dengue in the state of bahia. *BMC Public Health*, v. 14, n. 1, p. 1085, 2014.
- [29] FU, C.-J.; OU, Q.; CHEN, W.; WANG, B.-H.; JIN, Y.-D.; NIU, Y.-W.; ZHOU, T. A weighted evolving network model more approach to reality. *arXiv preprint cond-mat/0408155*, 2004.
- [30] LI, M.; WU, J.; WANG, D.; ZHOU, T.; DI, Z.; FAN, Y. Evolving model of weighted networks inspired by scientific collaboration networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 375, n. 1, p. 355, 2007.
- [31] BARRAT, A.; BARTHELEMY, M.; PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Washington, v. 101, n. 11, p. 3747, 2004.
- [32] BAGLER, G. Analysis of the airport network of india as a complex weighted network. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 387, n. 12, p. 2972, 2008.
- [33] BARABÁSI, A.-L.; JEONG, H.; NÉDA, Z.; RAVASZ, E.; SCHUBERT, A.; VICSEK, T. Evolution of the social network of scientific collaborations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 311, n. 3, p. 590, 2002.
- [34] BARRAT, A.; BARTHÉLEMY, M.; VESPIGNANI, A. Modeling the evolution of weighted networks. *Physical Review E*, v. 70, n. 6, p. 066149, 2004.
- [35] LI, P.; ZHAO, Q.; WANG, H. A weighted local-world evolving network model based on the edge weights preferential selection. *International Journal of Modern Physics B*, v. 27, n. 12, p. 1350039, 2013.
- [36] DOROGOVTSEV, S.; MENDES, J. Minimal models of weighted scale-free networks. *arXiv preprint cond-mat/0408343*, 2004.
- [37] LIU, J.-G.; DANG, Y.-Z.; WANG, W.-X.; WANG, Z.-T.; ZHOU, T.; WANG, B.-H.; GUO, Q.; XUAN, Z.-G.; JIANG, S.-H.; ZHAO, M.-W. Self-learning mutual selection model for weighted networks. *arXiv preprint physics/0512270*, 2005.

- [38] YOON, S.-H.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L.; TU, Y. Weighted evolving networks. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 86, n. 25, p. 5835, 2001.
- [39] ZHENG, D.; TRIMPER, S.; ZHENG, B.; HUI, P. Weighted scale-free networks with stochastic weight assignments. *Physical Review E*, v. 67, n. 4, p. 040102, 2003.
- [40] BARRAT, A.; BARTHÉLEMY, M.; VESPIGNANI, A. Weighted evolving networks: coupling topology and weight dynamics. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 92, n. 22, p. 228701, 2004.
- [41] LI, C.; CHEN, G. A comprehensive weighted evolving network model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 343, p. 288, 2004.
- [42] LI, C.; CHEN, G. Modelling of weighted evolving networks with community structures. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 370, n. 2, p. 869, 2006.
- [43] GENG, X.; WEN, G. Weighted evolving networks with intrinsic strength. *International Journal of Modern Physics C*, v. 18, n. 09, p. 1435, 2007.
- [44] Introduction to randomness and random numbers. Disponível em <https://www.random.org/randomness/>.
- [45] FINN, E. S.; SHEN, X.; SCHEINOST, D.; ROSENBERG, M. D.; HUANG, J.; CHUN, M. M.; PAPADEMETRIS, X.; CONSTABLE, R. T. Functional connectome fingerprinting: identifying individuals using patterns of brain connectivity. *Nature Neuroscience*, v. 18, p. 1664, 2015.
- [46] BARRETO, C. D. S. F. *Uso dos grafos variantes no tempo no estudo do efeito da estimulação transcraniana de corrente contínua em redes funcionais corticais*. 2015. p. 55. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.