



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estrutura Canônica de Teorias de Gauge
via Método de Dirac**

Marcos Cavalcanti de Sousa

Salvador
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Estrutura Canônica de Teorias de Gauge
via Método de Dirac**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Mario Cezar Ferreira
Gomes Bertin

Salvador
2016

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

Sousa, Marcos Cavalcanti de
Estrutura Canônica de Teorias de Gauge via Método de Dirac / Marcos Cavalcanti de Sousa. -- Salvador, 2016.
74 f.

Orientador: Mario Cezar Bertin.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, 2016.

1. Sistemas vinculados. 2. Método de Dirac. 3. Teorias de gauge. 4. Yang-Mills. I. Bertin, Mario Cezar. II. Título.

Agradecimentos

A meus pais, Luciana Sena Cavalcanti e Hermano Francisco de Sousa, e a minha irmã Ana Paula Cavalcanti de Sousa, por todo o apoio ao longo de minha vida.

Ao meu orientador, professor Mario Bertin, pela paciência e disponibilidade durante a construção deste trabalho.

Aos demais professores do Instituto de Física pelas contribuições para a minha formação.

A meus colegas, em especial Arthur e Lucas, pela amizade e pelas discussões nessa jornada mesmo à distância.

A Camila, por todo o carinho e companheirismo.

A CAPES, pelo suporte financeiro integral.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o método desenvolvido por Dirac para teorias vinculadas. Através de exemplos da mecânica clássica, do campo espinorial e da teoria eletromagnética como primeira teoria de gauge, buscamos evidenciar diferentes interpretações que podem ser obtidas a partir da análise da estrutura canônica de sistemas físicos. Então, aplicamos o método à teorias de Yang-Mills e abordamos o problema da fixação de gauge para esses tipos de teorias de gauge não-abelianas. Da discussão que envolve a natureza dos vínculos com a geração de transformações de gauge surgem os diferentes pontos de vista sobre a conjectura de Dirac e suas divergências na literatura.

Palavras-chave: Sistemas vinculados, Método de Dirac, Teorias de gauge, Yang-Mills.

Abstract

In this work, we study the method developed by Dirac for constrained theories. Through examples of classical mechanics, the spinor field and electromagnetic theory as the first gauge theory, we seek to show different interpretations that can be obtained from the analysis of the canonical structure of physical systems. Then, we apply the method to the Yang-Mills theories and study the gauge fixing problem for these types of non abelian gauge theories. From the discussion that involves the nature of the constraints with the generation of gauge transformations arise the different views on the Dirac's conjecture and their divergences in the literature.

Keywords: Constrained systems, Dirac's method, Gauge theories, Yang-Mills.

Sumário

Introdução	9
1 O Método de Dirac	13
1.1 Introdução	13
1.2 O Princípio de Hamilton e a Formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica	14
1.3 A Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica	16
1.4 Sistemas Hamiltonianos Vinculados	18
1.4.1 O Método	18
1.4.2 Vínculos Primários	19
1.4.3 Condições de Consistência	20
1.4.4 O Algoritmo de Dirac-Bergmann	21
1.4.5 Classificação de Vínculos em Primeira e Segunda Classe	21
1.4.6 A Hamiltoniana Total	22
1.4.7 Os Parênteses de Dirac e as Equações de Movimento	22
1.4.8 A Hamiltoniana Estendida	24
1.5 Exemplos de aplicação na mecânica clássica	25
1.5.1 Partícula livre em uma esfera	26
1.5.2 Partícula livre relativística	29
2 Estrutura Canônica da Eletrodinâmica	35
2.1 Introdução	35
2.2 Campo Espinorial de Dirac	36
2.3 Simetria U(1)	38
2.4 Campo Eletromagnético Livre	39
2.5 Estrutura Canônica do Campo Espinorial	40
2.6 Estrutura Canônica do Campo Eletromagnético	42
3 Teorias de Yang-Mills	54
3.1 Introdução	54
3.2 Simetria SU(N)	54
3.3 Covariância de $F_{\mu\nu}$	59

3.4	Equações de Campo	61
3.5	Estrutura Canônica	62
3.6	Gauge de Coulomb Não Abelianos	67
	Considerações Finais	72

Introdução

Os primeiros conceitos em teoria quântica de campos remetem ao eletromagnetismo ainda no século XIX, com a ideia de campos como entes fundamentais que descrevem as interações entre partículas [1]. Com as equações de Maxwell, o eletromagnetismo foi tido como finalizado, porém problemas associados à natureza da matéria, como a estabilidade do átomo e a descoberta de novas partículas, ainda não eram explicados. Apenas no início do século XX começaram a surgir novas ideias que levaram à descrição de fenômenos que escapavam dos conceitos da física clássica. Nesse período inicial, essas ideias não estavam sistematizadas em uma base sólida e apenas com Dirac [2] surge de fato de uma primeira teoria quântica de campo, a eletrodinâmica quântica (QED). Em uma tentativa de estudar a relação entre a QED desenvolvida por Dirac e a relatividade geral, Weyl [3] introduziu o que chamou, pela primeira vez, de simetria de gauge, uma simetria de escala local do espaço-tempo, na esperança de obter uma derivação geométrica da eletricidade e do magnetismo. O objetivo de Weyl, assim como o de outros físicos da época, era o de formular uma teoria eletromagnética consistente com a relatividade geral de Einstein, porém a caminho desse objetivo Weyl acabou por estabelecer a ideia de simetria de gauge, algo imprescindível para a compreensão da teoria quântica de campos como é concebida atualmente [4]. A questão da simetria de gauge foi algo de difícil solidificação na física devido a seu caráter mais abstrato frente as simetrias do espaço-tempo e ao seu desenvolvimento pleno são atribuídos mais de 60 anos desde a publicação de Weyl. Além disso, posteriormente, Yang e Mills [5] estenderam essa simetria para grupos de gauge não abelianos, ou não comutativos, dos quais até mesmo para escrever as equações de movimento em uma forma local é preciso introduzir o potencial de gauge satisfazendo uma simetria de gauge não abeliana, o que gerou a necessidade de novas abordagens para esses tipos de teorias [6]. Mesmo assim, ao longo dos anos seguintes à publicação de Yang e Mills, avanços memoráveis em física de partículas foram atingidos com o desenvolvimento e consolidação da teoria eletrofraca de Glashow-Weinberg-Salam e da cromodinâmica quântica de Gell-Mann.

Entre as abordagens para o problema da quantização de teorias de gauge não abelianas, alguns autores, como Hanson, Sundermeyer e Teitelboim [7, 8, 9], apresentam uma em que teorias de gauge são tratadas sob o ponto de vista de sistemas vinculados a partir de um método desenvolvido por Dirac. Em lições em Yeshiva [10], Dirac apresentou esse método

que trata de sistemas vinculados, suas implicações na visão da teoria de campos e os problemas encontrados. A ideia envolvida no método é que podemos pensar no processo da quantização de campos como algo que possui uma base mecânica de certa forma restrita. Ao ampliar essa base, pensando em sistemas vinculados, podemos descrever campos até então pouco entendidos ou ter uma diferente interpretação dos fenômenos emergentes das interações que ocorrem entre as partículas que caracterizam os campos estudados [10]. O foco da obra de Dirac era aplicar seu método ao eletromagnetismo e proceder à quantização canônica, algo inviável quando não levado em conta o caráter intrinsecamente vinculado da teoria eletromagnética. No trabalho de Dirac, não se encontra uma discussão sobre teorias de gauge não abelianas, visto que essas teorias de ainda passavam por um período de consolidação. Como veremos nesse trabalho, aplicar o método de Dirac a teorias de Yang-Mills não resulta em um formalismo hamiltoniano consistente para a quantização canônica usual por um motivo mais fundamental que a liberdade de gauge da teoria eletromagnética. De fato, em teorias vinculadas a quantização canônica usual não é possível sem que haja uma escolha de gauge que permita esse procedimento.

Vale ressaltar que neste trabalho não são discutidas simetrias espaço-temporais, mas apenas simetrias de gauge. Além disso, mesmo tendo como norte a quantização, vamos nos restringir à estrutura canônica em que se fundamentam as teorias em estudo e deixaremos suas respectivas quantizações para possíveis trabalhos futuros. No primeiro capítulo, introduzimos noções básicas da mecânica clássica que sustentam as ideias que seguem no método desenvolvido por Dirac para sistemas hamiltonianos vinculados, com aplicações em sistemas mecânicos como a partícula livre na esfera e a partícula livre relativística. A apresentação do método é feita seguindo o roteiro de Dirac, aliada principalmente às discussões encontradas nos trabalhos de Hanson, Sundermeyer e Teitelboim [7, 8, 9]. Os exemplos desse capítulo têm como objetivo principal uma compreensão mais didática do método em sistemas físicos. Nesse intuito, também temos um resumo do método na forma de um fluxograma.

No segundo capítulo, apresentamos a estrutura canônica da eletrodinâmica. A ênfase será dada na coerência do surgimento campo eletromagnético como uma consequência natural do processo de acoplamento mínimo a partir da lagrangiana de Dirac sob a simetria de gauge $U(1)$. Além disso, estudamos a estrutura canônica do campo espinorial. Sobre o campo eletromagnético livre, investigamos como, mesmo se tratando de um caso abeliano, temos a necessidade de uma fixação do gauge para que não se apresentem arbitrariedades intrínsecas à teoria sob a óptica hamiltoniana.

O terceiro capítulo concentra as ideias introduzidas nos capítulos anteriores com a apresentação das teorias de Yang-Mills como consequência do processo de acoplamento mínimo de um sistema com N férmions e a estrutura canônica dessas teorias. Então, vemos as limitações da analogia que se faz entre teorias de abelianas e não abelianas no que diz respeito a uma escolha de gauge compatível com a teoria em questão.

Por fim, apresentamos as considerações finais do trabalho divididas em duas partes: considerações sobre questões levantadas ao final do terceiro capítulo, com a impossibilidade de uma escolha de gauge consistente com teorias não abelianas; e considerações sobre a conjectura de Dirac, que relaciona vínculos de primeira classe com transformações canônicas.

Referências Bibliográficas

- [1] BROWN, L.; HODDESON, L. *The Birth of Particle Physics*. Cambridge University Press, 1986.
- [2] DIRAC, P. A. M. The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 114, n. 767, p. 243-265, 1927.
- [3] WEYL, H. Gravitation and the Electron. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 15, n. 4, p. 323-334, 1929.
- [4] O'RAIFEARTAIGH, L. *The Dawning of Gauge Theory*. Princeton University Press, 1997.
- [5] YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, v. 96, n. 1, 1954.
- [6] GROSS, D. Quantum Chromodynamics - The Perfect Yang–Mills Theory. *International Journal of Modern Physics A*, v. 31, n. 08, 2016.
- [7] HANSON A.; REGGE, T.; TEITELBOIM, C. *Constrained Hamiltonian Systems*. Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- [8] SUNDERMEYER, K. *Constrained Dynamics - With Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Springer-Verlag, 1982.
- [9] HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1991.
- [10] DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Publications, Inc., 2001.

Capítulo 1

O Método de Dirac

1.1 Introdução

Neste capítulo seguiremos o método desenvolvido por Dirac em suas obras relacionadas à dinâmica hamiltoniana para sistemas vinculados [1, 2, 3]. Inicialmente apresentaremos uma visão geral da mecânica clássica [4, 5] e o contexto da formulação hamiltoniana em que se desenvolve o método, para podermos então estender sua aplicação para sistemas com infinitos graus de liberdade, como em teoria de campos.

O estudo da mecânica clássica pode ser dividido em duas linhas principais. A primeira é a mecânica vetorial, derivada das leis de Newton. A segunda, conhecida como mecânica analítica, tem como base a introdução de um escalar fundamental, a função lagrangiana, que se mostra suficiente para determinar a dinâmica de alguns sistemas [4]. A lagrangiana deve ter dimensão de energia, porém não possui uma expressão única para todos os sistemas físicos, e.g., $L = \frac{1}{2}mv^2$ para partículas livres não-relativísticas e $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ para o caso relativístico.¹

Sob o ponto de vista da mecânica analítica, uma partícula não deve ser mais vista isoladamente, mas sim como parte de um sistema, como um conjunto de partículas em interação umas com as outras. Isso faz com que o conceito de coordenada assuma um aspecto mais geral e somente quando estabelecemos o sistema estudado especificamos a natureza das coordenadas do mesmo. Essencialmente, o que precisamos para traduzir uma dada situação física é associar pontos do espaço a números. Se tomarmos como exemplo um sistema com n partículas, podemos descrever a posição desse sistema através das coordenadas cartesianas $x_i, y_i, z_i; i = 1, \dots, n$ bem como por outras quantidades q_1, q_2, \dots, q_{3n} associadas às coordenadas originais por uma transformação. A escolha dessas quantidades pode levar a uma descrição mais adequada de um sistema. Nesse sentido, o conceito original de coordenadas de Descartes, dá lugar a essas quantidades, ditas

¹Apenas em primeira ordem de uma expansão para $v \ll c$ na lagrangiana, retornamos ao caso não relativístico quando observamos que o primeiro termo é constante, não interferindo nas equações de movimento, i.e., $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$.

coordenadas generalizadas, que podem igualmente caracterizar a posição do sistema.

Os parâmetros necessários e suficientes para a caracterização única da configuração do sistema são denominados de graus de liberdade. Uma quantidade menor de parâmetros não é suficiente para determinar a posição do sistema, enquanto que uma quantidade maior não é necessária e não pode ser atribuída sem que satisfaça certas condições. Se escolhermos n parâmetros q_1, q_2, \dots, q_n como as coordenadas generalizadas de um ponto em um espaço n -dimensional, construímos o espaço de configuração desse sistema. Assim, o espaço de configuração é um espaço abstrato com tantas dimensões quanto os graus de liberdade do sistema. Equações do tipo $q_1 = q_1(t), \dots, q_n = q_n(t)$ equivalem não somente à solução de um problema dinâmico, mas também, geometricamente, a um ponto que representa completamente o sistema se movendo ao longo de uma curva no espaço de configuração, com respectivas derivadas temporais como velocidades generalizadas [4].

Para ilustrar esse panorama tomemos como exemplo dois átomos idênticos compondo uma molécula diatômica. Do ponto de vista dinâmico podemos tomar x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 como as coordenadas associadas às duas massas dos átomos. Podemos também considerar esses átomos mantidos a uma distância fixa D de um com relação ao outro. Isso implica na condição $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = D^2$. Devido a essa condição, as seis coordenadas associadas não podem ser escolhidas arbitrariamente, contudo pode-se utilizar as coordenadas do centro de massa da molécula x_{cm}, y_{cm}, z_{cm} e adicionar dois ângulos θ e ϕ que caracterizem a direção do eixo da molécula. Assim, seis coordenadas retangulares passam a ser substituídas por cinco coordenadas para a caracterização do sistema. O espaço de configuração desse sistema possui então cinco dimensões com cinco graus de liberdade.

1.2 O Princípio de Hamilton e a Formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica

Com esse quadro estabelecido, temos que para descrevermos a dinâmica de um dado sistema físico, i.e., para determinarmos suas equações de movimento, precisamos conhecer suas coordenadas e as velocidades associadas a essas coordenadas. Isso permite aplicarmos um princípio conhecido como princípio de Hamilton. Consideremos uma lagrangiana que seja função apenas das coordenadas generalizadas q_i e suas respectivas velocidades \dot{q}_i , sem dependência temporal explícita

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Então, introduzimos um funcional chamado ação S , que corresponde a integral tem-

poral da lagrangiana dada uma trajetória C do espaço de configuração,

$$S_{[C]} = \int_C L(q_i, \dot{q}_i) dt. \quad (1.2)$$

O princípio de Hamilton estipula que o movimento do sistema de um tempo t_1 a um tempo t_2 é tal que a integral de linha (ação) tem um valor estacionário para a trajetória real do movimento [3]. De todas as possíveis trajetórias no espaço de configuração, o sistema percorrerá aquela em que a ação possui um valor estacionário. Matematicamente, por valor estacionário entende-se como a integral de ação possuindo um mesmo valor para variações infinitesimais em primeira ordem ao longo da trajetória em relação a todas trajetórias vizinhas no espaço de configuração, ou seja,

$$\delta S = 0. \quad (1.3)$$

Aplicando a variação à integral,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_o}^{t_1} \delta L(q_i, \dot{q}_i) dt \\ &= \int_{t_o}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_o}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt \\ &= \int_{t_o}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \int_{t_o}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

observamos, ao impormos extremos fixos, i.e., $\delta q_i|_{t_o}^{t_1} = 0$, que o segundo termo em (1.4) se anula. Temos então condições para a trajetória real que o sistema percorrerá, ou seja, temos suas equações de movimento, as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1.5)$$

Dessa forma, temos que na formulação lagrangiana um sistema é caracterizado por um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem de acordo com os graus de liberdade do sistema. Esse conjunto de equações, as equações de Euler-Lagrange, descrevem a dinâmica do sistema, sendo necessários $2N$ valores iniciais especificados para determinar soluções de tais equações. Além disso, se o sistema possui N graus de liberdade independentes, temos N equações independentes entre si [5].

1.3 A Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica

O estudo da formulação hamiltoniana da mecânica clássica tem como uma das motivações a redução da ordem das equações de movimento. Queremos um conjunto de equações de primeira ordem para a dinâmica [4]. Além disso, a formulação hamiltoniana é construída sobre o espaço de fase, entre as coordenadas generalizadas e os momentos conjugados [5]. Para isso, a partir das equações de Euler-Lagrange, podemos definir momentos conjugados às velocidades

$$p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.6)$$

Para realizarmos a transição do formalismo lagrangiano para o hamiltoniano deve ser possível escrever as velocidades \dot{q}_i em termos dos momentos conjugados. Essa possibilidade é verificada através da condição Hessiana. Buscamos uma transformação do tipo $(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (q_i, p^i)$. O Jacobiano dessa transformação é determinado por $\frac{\partial p^i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$, pois $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$. Temos então que

$$W^{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (1.7)$$

são as componentes de uma matriz Hessiana W , de modo que

$$p^i = W^{ij} \dot{q}_j. \quad (1.8)$$

Por condição Hessiana entende-se que essa matriz deva possuir determinante não nulo, i.e.,

$$\det W \neq 0, \quad (1.9)$$

para que seja possível escrever

$$\dot{q}_j = (W^{-1})_{ji} p^i, \quad (1.10)$$

onde W^{-1} é a matriz inversa de W , obedecendo a $W^{-1}W = WW^{-1} = I$. Sistemas que satisfazem a essa condição são chamados de sistemas regulares, ou não vinculados.

Das equações de Euler-Lagrange, vemos que $\dot{p}^i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, mas precisamos diferenciar L para evidenciarmos sua dependência nas velocidades, a fim de realizarmos uma transição para o espaço de fase, ou seja,

$$\begin{aligned} L &= L(q, \dot{q}), \\ dL &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ dL &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) - d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i, \\ d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\right) &= d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Fazendo uso da expressão para os momentos conjugados, definimos a função hamiltoniana $H \equiv p^i \dot{q}_i - L$ a partir de (1.11). Assim, temos

$$dH = dp^i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i. \quad (1.12)$$

Comparar as equações para H e dH , com a condição Hessiana satisfeita, implica em considerar a hamiltoniana como $H = H(q_i, p^i)$ [7]. Evidenciando sua diferenciação, temos

$$dH(q_i, p^i) = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p^i} dp^i. \quad (1.13)$$

Então, de (1.11), (1.13) e usando $\dot{p}^i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, temos as equações de Hamilton, que regem a dinâmica de um sistema físico no espaço de fase²

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad (1.14)$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.15)$$

Podemos ver também como uma dada função $F(q_i, p^i)$ evolui no tempo no espaço de fase:

$$\begin{aligned} \dot{F}(q_i, p^i) &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p^i} \dot{p}^i \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

A estrutura que se encontra no lado direito de (1.16), corresponde aos parênteses de Poisson entre F e H . Entre duas variáveis dinâmicas no espaço de fase, $A(q_i, p^i)$ e $B(q_i, p^i)$, os parênteses de Poisson são definidos como

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \quad (1.17)$$

e possuem como principais propriedades:

1. Antissimetria: $\{A, B\} = -\{B, A\}$.
2. Linearidade: $\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\}$, se c_1 e c_2 forem constantes.
3. Elemento neutro: $\{c, A\} = 0$, se c for constante.
4. Identidade de Jacobi: Sendo C também uma variável dinâmica no espaço de fase, $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{A, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$.

²Caso exista na lagrangiana e hamiltoniana dependência temporal explícita, temos também que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Assim, temos a evolução de F escrita com os parênteses de Poisson

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (1.18)$$

1.4 Sistemas Hamiltonianos Vinculados

O estudo do formalismo hamiltoniano para sistemas vinculados é caracterizado por velocidades generalizadas que não podem ser univocamente expressas em termos dos momentos conjugados, como seriam em (1.10). Essa situação pode ser verificada através da condição Hessiana (1.9), na qual para sistemas regulares (ou não vinculados) é satisfeita, porém para sistemas singulares, i.e., nos quais ocorre singularidade na lagrangiana, temos que

$$\det W = 0. \quad (1.19)$$

A teoria eletromagnética de Maxwell, a teoria da gravitação de Einstein e teorias de gauge não-abelianas, e.g., a teoria de Yang-Mills, são exemplos de teorias que apresentam essa característica [6]. Tais teorias são vinculadas, pois violam a condição Hessiana, e seus processos de quantização são um dos problemas chave em teoria quântica de campos [8].

1.4.1 O Método

A construção do método desenvolvido por Dirac tem como base sistemas hamiltonianos vinculados. Seu ponto de partida consiste em tratar as relações de dependência que surgem entre as variáveis canônicas como vínculos, construindo uma hamiltoniana modificada. Esse procedimento nos leva a novas equações de movimento para as variáveis canônicas e classificações de vínculos que levam a distintas interpretações das teorias em estudo.

O determinante da matriz Hessiana nulo (1.19) pode ser resultado de situações distintas que dependem do sistema estudado. A impossibilidade de determinadas inversões do tipo (1.10) pode ter como causa a forma das equações para as velocidades, por exemplo, equações que fornecem mais de uma raiz não estabelecendo de forma unívoca as velocidades em função dos momentos e coordenadas. As situações de interesse são aquelas em que podemos tomar uma submatriz W' , de W , para que tenhamos equações contendo coordenadas e velocidades de modo que as inversões possam ser feitas. A elas vamos atribuir um conjunto R de relações $p^r = W'^{rs} \dot{q}_s$, com $r, s = 1, \dots, R$. As demais equações não terão velocidades no lado direito de (1.8), estando relacionadas a um setor nulo de W . Vamos supor que essas constituam $M \leq N$ equações que terão a forma

$$p^m = \varphi^m(q_i, p^r), \quad (1.20)$$

com $m = R + 1, \dots, N$ para as M equações.

1.4.2 Vínculos Primários

Em sistemas vinculados, temos que dos momentos conjugados (1.6) surgem relações funcionais entre as variáveis canônicas (1.20). A hamiltoniana $H \equiv p^i \dot{q}_i - L$ definida na seção anterior não depende das velocidades não inversíveis \dot{q}_m , pois

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_m} = p^i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = p^m - \varphi^m(q_i, p^r) = 0. \quad (1.21)$$

Com isso temos que a dinâmica do sistema é restrita pelas relações

$$\phi^m(q_i, p^i) = p^m - \varphi^m(q_i, p^r) = 0, \quad (1.22)$$

que são chamadas de vínculos primários. A uma superfície do espaço de fase definida pelo conjunto R de equações em que as velocidades são inversíveis chamaremos de superfície primária. Queremos estabelecer as equações de Hamilton para o espaço de fase total. Com esse intuito, introduzimos a noção de igualdade fraca " \approx ". Se duas funções, F e G são fracamente iguais, $F \approx G$, elas coincidem na superfície definida pelos vínculos. Se F e G são fortemente iguais, $F = G$, a igualdade é válida não somente na superfície definida pelos vínculos, mas em todo o espaço de fase. Assim, temos que os vínculos primários são fracamente nulos,

$$\phi^m \approx 0. \quad (1.23)$$

Pode-se mostrar que uma função fracamente nula equivale fortemente a uma combinação linear dos vínculos que definem a superfície primária. À hamiltoniana H , que é definida na superfície primária e não depende das velocidades não inversíveis \dot{q}_m , pode ser somada uma combinação linear dos vínculos *via* multiplicadores de Lagrange. Com isso, definimos uma segunda hamiltoniana, a hamiltoniana primária H_P [3],

$$H_P = H + \lambda_m \phi^m \approx H, \quad (1.24)$$

onde os λ_m 's são os multiplicadores de Lagrange que podem ser qualquer função dos q 's e p 's. Com essa equação torna-se mais clara a ideia da igualdade fraca, pois $H_P \approx H$ é equivalente a dizer que H_P é igual a H na superfície primária. Então substituímos a hamiltoniana H pela hamiltoniana primária H_P para vermos como fica a dinâmica do sistema vinculado, usando desta vez os parênteses de Poisson:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, H_P\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H_P}{\partial p^j} - \frac{\partial q_i}{\partial p^j} \frac{\partial H_P}{\partial q_j} = \frac{\partial H_P}{\partial p^i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p^i} + \frac{\partial \lambda_m}{\partial p^i} \phi^m + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p^i} \approx \frac{\partial H}{\partial p^i} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p^i}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \{p, H_P\} = \frac{\partial p^i}{\partial q_j} \frac{\partial H_P}{\partial p^j} - \frac{\partial p^i}{\partial p^j} \frac{\partial H_P}{\partial q_j} = -\frac{\partial H_P}{\partial q_i} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial q_i} \phi^m - \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q_i} \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q_i}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

com

$$\phi^m(q, p) \approx 0. \tag{1.27}$$

Como os vínculos também são funções de q e p , temos

$$\dot{\phi}^m(q, p) = \{\phi^m, H_P\} \approx \{\phi^m, H\} + \lambda_n \{\phi^m, \phi^n\}. \tag{1.28}$$

1.4.3 Condições de Consistência

Como a hamiltoniana primária não está completamente determinada, em função dos multiplicadores, não sabemos se os vínculos primários são suficientes para manter a dinâmica do sistema restrita à superfície primária. Diante desse panorama, Dirac introduz as chamadas condições de consistência, que correspondem à conservação dos vínculos ao longo do tempo,

$$\dot{\phi}^m(q, p) \approx \{\phi^m, H\} + \lambda_n \{\phi^m, \phi^n\} \approx 0, \tag{1.29}$$

onde definiremos a matriz P , com componentes $P^{mn} \equiv \{\phi^m, \phi^n\}$. Se não considerarmos uma lagrangiana completamente arbitrária, como alguma inconsistente com as equações de movimento, e.g., $L = q$ que leva a condição $a_1 = 0$, essas condições de consistência podem levar a alguns casos distintos:

- Equações identicamente satisfeitas.
- Multiplicadores determinados.
- Equações independentes dos multiplicadores.

Os dois primeiros casos serão discutidos mais adiante. Do terceiro caso surgem relações entre as coordenadas e os momentos chamadas de vínculos secundários $\phi^{m'}$, tais que

$$\phi^{m'}(q, p) \approx 0, \tag{1.30}$$

onde m' indica o número que assumem M' vínculos gerados. Classificamos os vínculos entre primários e secundários devido a origem distinta entre eles, pois os vínculos primários têm origem na definição do momentos conjugados (1.6), enquanto que para os vínculos secundários se fez necessário o uso das equações de Euler-Lagrange (1.5) para as condições de consistência (1.29).

Outra forma de vermos tais condições é a partir da matriz P . Se P não é singular, sua inversa P^{-1} existe e satisfaz $P^{-1}P = PP^{-1} = I$. Podemos reescrever a equação (1.29) na

forma

$$\lambda_n \approx - (P^{-1})_{nm} \{ \phi^m, H \}, \quad (1.31)$$

onde $(P^{-1})_{nm}$ são as componentes da matriz inversa de P , apenas no caso em que o determinante de P é não nulo, situação na qual teremos as funções λ_n completamente determinadas. Nos demais casos, presentes em $\det P = 0$, devemos analisar os parênteses de Poisson que definem a matriz P separadamente.

1.4.4 O Algoritmo de Dirac-Bergmann

O processo resultante do caso em que temos o surgimento de mais vínculos é conhecido como algoritmo de Dirac-Bergmann, onde impomos novas condições de consistência sobre os vínculos secundários,

$$\dot{\phi}^{m'}(q, p) \approx \{ \phi^{m'}, H \} + \lambda_m \{ \phi^{m'}, \phi^m \} \approx 0 \quad (1.32)$$

e repetimos o processo até que as condições resultem em um dos demais casos. Ao fim do algoritmo, podemos representar as condições com as duas classificações de vínculos,

$$\dot{\phi}^j(q, p) \approx \{ \phi^j, H \} + \lambda_m \{ \phi^j, \phi^m \} \approx 0, \quad (1.33)$$

em que $j = R + 1, \dots, N$ para os J vínculos, tanto primários quanto secundários.

1.4.5 Classificação de Vínculos em Primeira e Segunda Classe

Como resultado do algoritmo teremos um conjunto de vínculos primários e secundários, além de possíveis condições para λ_m . Dessas condições temos que a consistência dos vínculos com as equações de movimento implicam que deva existir uma solução para λ_m como função de q e p ,

$$\lambda_m = \lambda_m(q, p) \quad (1.34)$$

de modo que H_P possa ser expressa em termos de q e p . Tendo como uma das motivações a determinação dos multiplicadores, Dirac introduziu uma nova classificação de funções:

- Uma função de q e p que possui parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os vínculos é uma função de primeira classe,

$$\{ F, \phi^a \} \approx 0. \quad (1.35)$$

- Uma função de q e p que possui parênteses de Poisson não nulos para qualquer a , é uma função de segunda classe,

$$\{ F, \phi^a \} \not\approx 0. \quad (1.36)$$

O conjunto de vínculos primários e secundários pode então ser dividido a partir dessa classificação. Vínculos de primeira classe estarão associados à invariâncias locais de gauge e as escolhas de fixação de gauges como vínculos adicionais à teoria transformarão vínculos de primeira classe em segunda classe [9, 10].

1.4.6 A Hamiltoniana Total

Uma vez determinados todos os vínculos, tanto primários quanto secundários, provenientes das condições de consistência, podemos escrever a Hamiltoniana total com todos os vínculos encontrados sem estabelecer uma distinção na natureza dos mesmos,

$$H_T = H + \lambda_j \phi^j. \quad (1.37)$$

Mesmo tendo-se esgotado as condições de consistência a partir dos vínculos secundários ainda existe o problema da determinação dos multiplicadores. Essa é uma etapa crucial do método e que é restrita a determinados tipos de sistemas, se fazendo necessário o uso de mais uma definição que deve completar a interpretação sobre a classificação dos vínculos. Aqui vale ressaltar que, das condições para os vínculos secundários, temos dois resultados possíveis. Podemos retornar à situação em que temos a condição em questão identicamente satisfeita (tendo um conjunto completo de primeira classe, tanto de vínculos primários quanto secundários), ou podemos ter como resultado equações para os multiplicadores (em que haverá um conjunto completo ou um subconjunto de segunda classe). Em ambos os casos estabelecemos a hamiltoniana total aplicando novas condições de consistência com o conjunto completo de vínculos.

1.4.7 Os Parênteses de Dirac e as Equações de Movimento

Nesse estágio do método, não vamos mais distinguir vínculos primários de secundários de modo que devemos não somente levar em conta para a dinâmica a hamiltoniana total em lugar de apenas a hamiltoniana primária, mas também devemos insistir na consistência dos vínculos agora como relação a um conjunto completo, i.e.,

$$\dot{\phi}^j(q, p) = \{\phi^j, H_T\} \approx \{\phi^j, H\} + \lambda_k \{\phi^j, \phi^k\} \approx 0, \quad (1.38)$$

com $k = R+1, \dots, N$, ou seja, k também se refere a vínculos quaisquer. Como temos novas condições ainda existe a possibilidade de que vínculos sejam gerados e de que na verdade estávamos lidando com um conjunto incompleto, sendo necessário redefinir a hamiltoniana total. Garantido o conjunto completo, podemos definir uma matriz T , com componentes $T^{jk} = \{\phi^j, \phi^k\}$ (como feito em (1.31)) de modo que

$$\lambda_k \approx - (T^{-1})_{kj} \{\phi^j, H\} \quad (1.39)$$

forneem os multiplicadores caso o determinante de T seja não nulo. Nesse caso isso indica que estamos lidando um conjunto de vínculos de segunda classe e podemos tratar as igualdades fracas como fortes. Teremos como equações de movimento

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_T\} = \{q_i, H\} - \{q_i, \phi^k\} (T^{-1})_{kj} \{\phi^j, H\}, \quad (1.40)$$

$$\dot{p}^i = \{p^i, H_T\} = \{p^i, H\} - \{p^i, \phi^k\} (T^{-1})_{kj} \{\phi^j, H\}. \quad (1.41)$$

Definimos então os parênteses de Dirac entre duas variáveis dinâmicas F e G do espaço de fase,

$$\{F, G\}_D \equiv \{F, G\} - \{F, \phi^a\} (M^{-1})_{ab} \{\phi^b, G\}. \quad (1.42)$$

Pode-se mostrar que os parênteses de Dirac satisfazem as mesmas propriedades básicas dos parênteses de Poisson. Assim, podemos escrever as equações de movimento na forma

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_D, \quad (1.43)$$

$$\dot{p}^i = \{p^i, H\}_D. \quad (1.44)$$

Contudo, temos que T pode ser singular. Nesse caso, precisamos saber como as condições (1.38) envolvem vínculos de primeira e segunda classes. Se T é singular, significa que temos vínculos com parênteses de Poisson nulos com os demais, ou seja, que são de primeira classe. Atribuiremos a eles o rótulo p . A princípio podemos identificá-los, mas não teremos uma inversa associada para que possamos determinar seus multiplicadores. Entretanto, podemos tomar o subconjunto restante de vínculos de segunda classe, aos quais atribuiremos o rótulo s . Então, definimos M , uma submatriz de T , com componentes

$$M^{j^s k^s} = \{\phi^{j^s}, \phi^{k^s}\} \quad (1.45)$$

associadas a esses vínculos. Para esse subconjunto, $M^{j^s k^s}$ não será singular. Das condições de consistência isso implica que existe uma inversa tal que

$$\lambda_{k^s} \approx - (M^{-1})_{k^s j^s} \{\phi^{j^s}, H\}. \quad (1.46)$$

Como separamos os vínculos de primeira classe dos de segunda classe, temos a hamiltoniana total como $H_T = H + \lambda_{j^p} \phi^{j^p} + \lambda_{j^s} \phi^{j^s}$, levando às equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H_T\} \approx \{q_i, H\} - \{q_i, \phi^{j^s}\} (M^{-1})_{j^s k^s} \{\phi^{k^s}, H\} + \lambda_{j^p} \{q_i, \phi^{j^p}\} \\ &\approx \{q_i, H\}_{D^s} + \lambda_{j^p} \{q_i, \phi^{j^p}\}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned}\dot{p}^i &= \{p^i, H_T\} \approx \{p^i, H\} - \{p^i, \phi^{js}\} (M^{-1})_{jsk^s} \{\phi^{k^s}, H\} + \lambda_{jp} \{p^i, \phi^{jp}\} \\ &\approx \{p^i, H\}_{D^s} + \lambda_{jp} \{p^i, \phi^{jp}\}\end{aligned}\quad (1.48)$$

Podemos usar as condições (1.38) para esse subconjunto de segunda classe substituindo (1.46), de modo que

$$\dot{\phi}^{js}(q, p) = \{\phi^{js}, H_T\} = \{\phi^{js}, H\} - \{\phi^{js}, \phi^{k^s}\} (M^{-1})_{k^s js} \{\phi^{js}, H\} = 0, \quad (1.49)$$

ou seja, são identicamente nulas. A equação (1.49) pode ser escrita em termos dos parênteses de Dirac,

$$\dot{\phi}^{js}(q, p) = \{\phi^{js}, H\}_D = 0. \quad (1.50)$$

Assim, os parênteses de Dirac de qualquer função de q e p com um vínculo de segunda classe é fortemente nulo. Se todos os parênteses de Poisson forem substituídos por parênteses de Dirac isso significa dizer que efetivamente estamos lidando apenas com os vínculos de primeira classe. Então, equações de movimento podem ser escritas como

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_T\}_D = \{q_i, H + \lambda_{jp} \phi^{jp}\}_D \approx \{q_i, H\}_D + \lambda_{jp} \{q_i, \phi^{jp}\}_D, \quad (1.51)$$

$$\dot{p}^i = \{p^i, H_T\}_D = \{p^i, H + \lambda_{jp} \phi^{jp}\}_D \approx \{p^i, H\}_D + \lambda_{jp} \{p^i, \phi^{jp}\}_D, \quad (1.52)$$

onde vemos que a dinâmica do sistema permanece ainda indeterminada pelos multiplicadores dos vínculos de primeira classe.

1.4.8 A Hamiltoniana Estendida

Para termos a dinâmica do sistema determinada, devemos obter do método um conjunto completo de vínculos de segunda classe. Caso isso não ocorra, devemos trabalhar com o conjunto de primeira classe em questão e realizar o processo de fixação de gauge. Desse processo teremos o acréscimo de vínculos à teoria, mais especificamente seguindo a quantidade de vínculos de primeira classe, para estabelecer o conjunto completo de segunda classe. Tendo esse conjunto, definimos a hamiltoniana estendida, que contém todos os vínculos provenientes das condições de consistência na hamiltoniana total, mais os vínculos propostos na fixação de gauge,

$$H_E = H_T + \lambda_l \phi^l. \quad (1.53)$$

Essa hamiltoniana é equivalente à hamiltoniana total quando já temos um conjunto completo de segunda classe. Como os parênteses de Dirac para vínculos de segunda classe são fortemente nulos, podemos escrever as equações de movimento como (1.43) e (1.44).

Para ilustrar um pouco do método com suas ramificações de um modo cadenciado,

temos um resumo na forma de um fluxograma com uma sequência que pode ser adotada em sua aplicação (Figura 1). Vale ressaltar que se trata apenas de um resumo, pois para cada sistema físico pode-se ter uma interpretação distinta em qualquer etapa do método saindo assim do escopo do resumo.

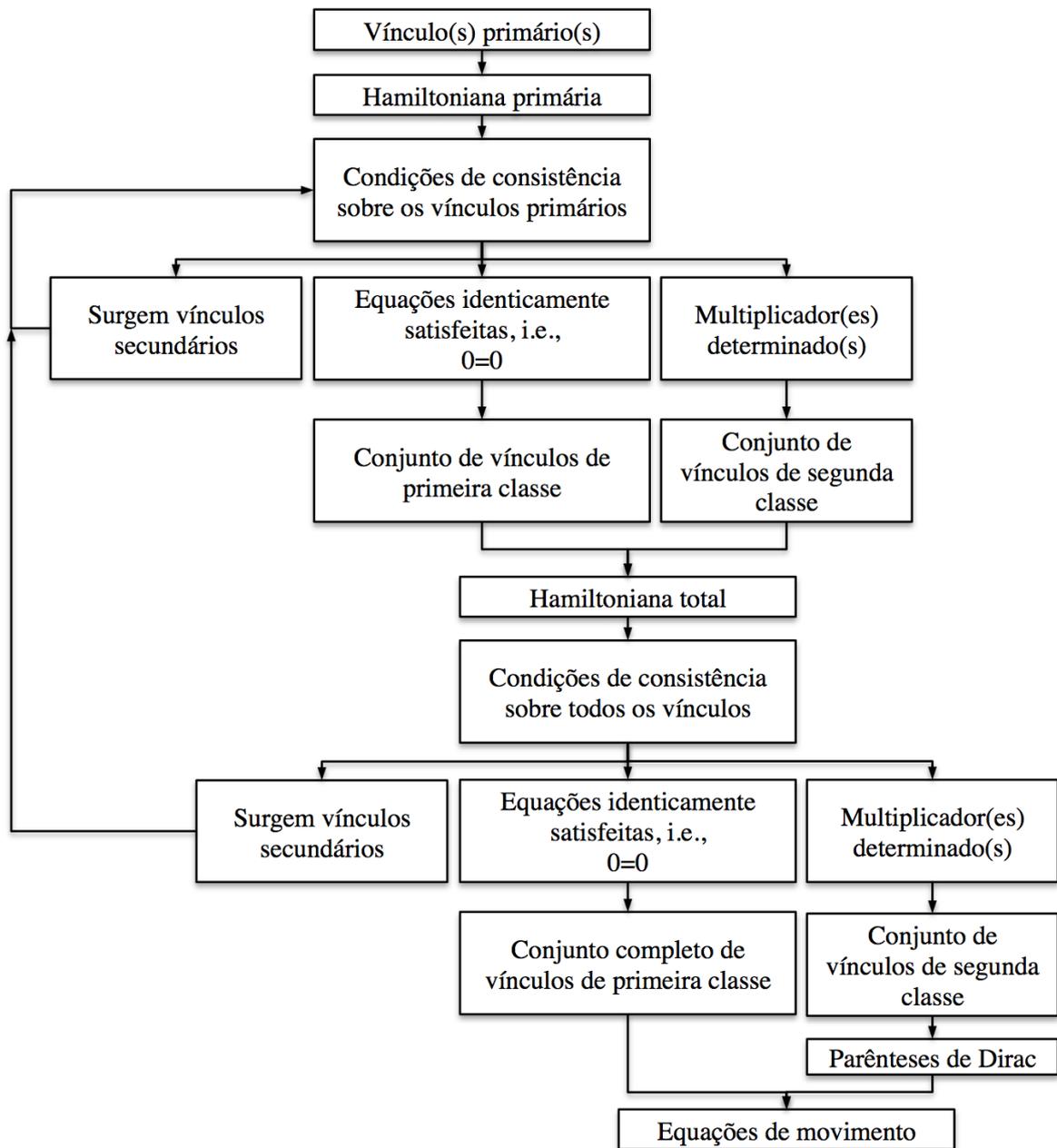


Figura 1: Resumo do método.

1.5 Exemplos de aplicação na mecânica clássica

Nesta seção veremos exemplos de aplicação do método desenvolvido por Dirac em sistemas mecânicos simples. Inicialmente com o exemplo da partícula livre em uma esfera, para depois o caso da partícula livre relativística. Para o primeiro exemplo veremos que

a partir da lagrangiana do sistema, usando multiplicadores de Lagrange, podemos obter um conjunto de vínculos que nos fornecem informações sobre o sistema em questão. Já no segundo exemplo a ênfase está nos diferentes resultados do método para abordagens distintas de um mesmo sistema. Com isso, espera-se ser possível ver a motivação em trabalhar com esse método para diversos sistemas físicos de maior relevância.

1.5.1 Partícula livre em uma esfera

Como ponto de partida desse exemplo tomemos a lagrangiana de uma partícula livre não relativística,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (1.54)$$

Queremos restringir o movimento da partícula à superfície de uma esfera. Definimos então uma nova lagrangiana acrescida da função $\psi(x) = x^2 - r^2 = 0$, com r sendo o raio da esfera, *via* multiplicador de Lagrange,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - u\psi(x). \quad (1.55)$$

Para definirmos uma dinâmica hamiltoniana, devemos efetuar uma transformação de Legendre nas velocidades, de modo que

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, u) \rightarrow H(\vec{x}, \vec{p}, u, \pi), \quad (1.56)$$

onde u também é variável dinâmica com momento conjugado π . Fazemos isso determinando os momentos conjugados às coordenadas da lagrangiana,

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} \implies \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad (1.57)$$

$$\pi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0. \quad (1.58)$$

Com isso, temos a hamiltoniana canônica,

$$H = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - L = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + u\psi(x). \quad (1.59)$$

Como para a variável u não foi possível escrever a respectiva velocidade em função do momento conjugado, temos um vínculo primário,

$$\phi_0 \equiv \pi \approx 0. \quad (1.60)$$

Por consistência, esse vínculo deve ser conservado no tempo. Porém, a nossa hamiltoniana agora deve englobar o vínculo, temos então a hamiltoniana primária,

$$H_P = H + \lambda_0 \phi_0, \quad (1.61)$$

de modo que a evolução temporal de um observável na dinâmica hamiltoniana seja dada por,

$$\dot{F} = \{F, H_P\}. \quad (1.62)$$

Com isso, temos a condição de consistência

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 &= \{\phi_0, H\} + \lambda_0 \{\phi_0, \phi_0\} \approx 0 \\ &= \left\{ \phi_0, \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + u\psi(x) \right\} + \lambda_0 \{\phi_0, \phi_0\} \\ &= \frac{1}{m} \{\pi, \vec{p}\} \cdot \vec{p} + \{\pi, u\} \psi(x) \\ &= -\psi(x) \approx 0, \end{aligned} \quad (1.63)$$

que leva a

$$\phi_1 \equiv \psi(x) \approx 0. \quad (1.64)$$

Como do vínculo primário, através da condição de consistência, surgiu um novo vínculo, damos início ao algoritmo de Dirac-Bergmann. Encontramos na condição de consistência um novo vínculo (1.64), então impomos novamente sua conservação no tempo e fazemos isso repetidamente até que se esgotem as condições de consistência. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \{\phi_1, H\} + \lambda_0 \{\phi_1, \phi_0\} \approx 0 \\ &= \frac{1}{m} \vec{\nabla} \psi(x) \cdot \vec{p} \approx 0. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Como $\psi(x)$ é a função que restringe o movimento da partícula à esfera, de (1.65), temos

$$\phi_2 \equiv \vec{x} \cdot \vec{p} \approx 0 \quad (1.66)$$

como segundo vínculo secundário. Esse vínculo expressa a ortogonalidade entre os vetores posição e velocidade sobre a superfície esférica. Então, aplicamos as condições de consistência sobre ϕ_2 ,

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} + \lambda_0 \{\phi_2, \phi_0\} \approx 0, \quad (1.67)$$

que leva a

$$\phi_3 \equiv \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - u\vec{x}^2 \approx 0, \quad (1.68)$$

como terceiro vínculo secundário. Novamente aplicando as condições de consistência,

$$\dot{\phi}_3 = \{\phi_3, H\} + \lambda_0 \{\phi_3, \phi_0\} \approx 0, \quad (1.69)$$

temos como resultado,

$$\lambda_0 \approx -\frac{4u \vec{x} \cdot \vec{p}}{m \vec{x}^2}. \quad (1.70)$$

Ou seja, não tivemos o surgimento de um quinto vínculo, mas sim uma equação fraca para λ_0 . Definimos assim a hamiltoniana total,

$$H_T = H + \lambda_0 \phi_0 + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \lambda_3 \phi_3 = H + \lambda_a \phi_a, \quad (1.71)$$

$a = 0, 1, 2, 3$. Devemos calcular os parênteses de Poisson entre os vínculos para sabermos de que classe(s) de vínculo(s) o sistema é constituído. Temos

$$\{\phi_0, \phi_3\} = \vec{x}^2, \quad (1.72)$$

$$\{\phi_1, \phi_2\} = 2\vec{x}^2, \quad (1.73)$$

$$\{\phi_2, \phi_3\} = \frac{\vec{p}^2}{m} + 2u\vec{x}^2, \quad (1.74)$$

com os demais parênteses nulos. Por essas relações vemos que todos os vínculos tem parênteses de Poisson não nulos com pelo menos um dos demais vínculos, então temos um conjunto de vínculos de segunda classe.

Definimos a matriz M , com componentes $M_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}$,

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vec{x}^2 \\ 0 & 0 & 2\vec{x}^2 & 0 \\ 0 & -2\vec{x}^2 & 0 & \frac{\vec{p}^2}{m} + 2u\vec{x}^2 \\ -\vec{x}^2 & 0 & -\frac{\vec{p}^2}{m} - 2u\vec{x}^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.75)$$

que contém todos os parênteses calculados. Devemos calcular a matriz inversa de M . Isso é possível para um conjunto de vínculos de segunda classe, como é o caso para esse sistema. Assim, as equações de movimento serão determinadas através dos parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas e a hamiltoniana. A matriz M tem inversa dada por

$$(M^{-1})^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\vec{p}^2 + 2mu\vec{x}^2}{2mr^4} & 0 & -\frac{1}{r^2} \\ \frac{\vec{p}^2 + 2mu\vec{x}^2}{2mr^4} & 0 & -\frac{1}{2r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

De posse da inversa de M , temos equações para os multiplicadores que permitem a cons-

trução dos parênteses de Dirac. Para esse sistema os definimos por

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} + \{F, \phi_a\} (M^{-1})^{ab} \{\phi_b, G\}. \quad (1.77)$$

O próximo passo corresponde à determinação dos parênteses de Dirac fundamentais que surgem no cálculo das equações de movimento. Os não nulos correspondem a

$$\{\vec{p}, \vec{p}\}_D = -\frac{1}{r^2} (\vec{x} \otimes \vec{p} - \vec{p} \otimes \vec{x}) = -\frac{1}{r^2} L, \quad (1.78)$$

$$\{\vec{x}, \vec{p}\}_D = 1 - \frac{1}{r^2} \vec{x} \otimes \vec{x}, \quad (1.79)$$

$$\{u, \vec{x}\}_D = \frac{\vec{p}}{mr^2}, \quad (1.80)$$

$$\{u, \vec{p}\}_D = \frac{2u}{r^2} \vec{x}, \quad (1.81)$$

onde \otimes corresponde ao produto diádico e $\vec{x} \otimes \vec{p} - \vec{p} \otimes \vec{x}$ é a matriz de momento angular L . Por fim, determinamos as equações de movimento,

$$\dot{\vec{x}} = \{\vec{x}, H\}_D = \frac{\vec{p}}{m}, \quad (1.82)$$

$$\dot{\vec{p}} = \{\vec{p}, H\}_D = -\frac{\vec{p}^2}{mr^2} \vec{x}, \quad (1.83)$$

$$\dot{u} = \{u, H\}_D = \frac{2u}{mr^2} \vec{x} \cdot \vec{p} = 0, \quad (1.84)$$

$$\dot{\pi} = \{\pi, H\}_D = 0. \quad (1.85)$$

A equação (1.82) já foi encontrada pela definição dos momentos conjugados em (1.57). A equação (1.83) corresponde à equação harmônica $\ddot{\vec{x}} + \omega^2 \vec{x} = 0$ quando escrevemos a mesma em termos da velocidade angular ω usando a definição do momento cinético para a partícula, estando em acordo com a equação de Euler-Lagrange para \vec{x} . As demais equações resultam nulas, no caso da (1.84) fazendo uso de ϕ_2 e no caso da (1.85) por π ser uma função de segunda classe.

1.5.2 Partícula livre relativística

O estudo do movimento de uma partícula livre relativística sob o ponto de vista Hamiltoniano pode ter duas abordagens. A primeira, com o tempo próprio como uma quantidade com a qual todos os observadores de Lorentz estão de acordo em relação à linha de mundo da partícula, i.e., com a quantidade de tempo passado em um relógio que acompanha a partícula durante o movimento [6, 7].

Como ponto de partida, tomemos a ação relativística,

$$S = -mc \int ds \quad (1.86)$$

e o comprimento infinitesimal entre dois pontos no espaço de Minkowski,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_i dx_i. \quad (1.87)$$

A ação então passa a ser,

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{c^2}} \quad (1.88)$$

De onde tiramos do integrando a Lagrangiana,

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}_i}{c^2}}. \quad (1.89)$$

O momento canônico é definido por

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m \dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_j \dot{x}_j}{c^2}}}, \quad (1.90)$$

como $p_i = \gamma m \dot{x}_i$, temos que os momentos canônicos são equivalentes aos momentos cinéticos. As velocidades podem ser escritas em termos dos momentos,

$$\dot{x}_i = \frac{\pi_i c}{\sqrt{m^2 c^2 + \pi^2}}. \quad (1.91)$$

Assim é possível estabelecer a Hamiltoniana canônica,

$$H = \pi^i \dot{x}_i - L = \sqrt{m^2 c^4 + \pi^2 c^2}, \quad (1.92)$$

equivalente à energia total da partícula $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$. Por fim, as equações de Hamilton podem ser determinadas,

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi^i} = \frac{\dot{\pi}_i}{\sqrt{m^2 + \frac{\pi^2}{c^2}}}, \quad (1.93)$$

$$\dot{\pi}^i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \quad (1.94)$$

Ou seja, tal versão permite escrevermos via transformação de Legendre a Hamiltoniana inteiramente em termos dos momentos (porém neste caso os momentos canônicos são os próprios momentos cinéticos $\pi^i = p^i$, o que não é válido no caso geral, e.g., partícula carregada em um campo magnético).

A segunda abordagem possível é sob uma versão covariante da ação. Vamos supor uma curva descrita por um parâmetro arbitrário (τ) onde $x^\mu = x^\mu(\tau)$, com $x^0 = ct$. São vetores tangentes a essa curva $u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$ e o produto escalar é $u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}$.

Como entre o espaço de Minkowski e seu espaço tangente existe um isomorfismo, o produto escalar construído em $T(M)$ define distâncias iguais em M . Em uma esfera, por exemplo, não podemos definir vetores sobre sua superfície, apenas vetores tangentes ponto a ponto, e isso ocorre apenas pois a superfície é diferenciável em toda sua dimensão. Sendo assim, tomamos o vetor tangente à curva da trajetória da partícula relativística u^μ , que nos permite construir o produto escalar e então temos por isomorfismo, o comprimento entre dois pontos da curva no espaço de Minkowski, mesmo com a escolha de um parâmetro qualquer que defina sua trajetória.

A ação covariante por reparametrizações é então escrita,

$$S = -mc \int d\tau (u^\mu u_\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.95)$$

que nos fornece pelo integrando a Lagrangiana,

$$L = -mc (u^\mu u_\mu)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.96)$$

Os momentos canônicos são então

$$\pi^\mu = -\frac{mc^2}{\sqrt{u^\nu u_\nu}} u^\mu. \quad (1.97)$$

Dessa expressão temos que as velocidades u^μ não podem ser reescritas em termos dos momentos, então através do produto escalar $\pi^\mu \pi_\mu$ estabelecemos um vínculo primário, chamado também de condição de camada de massa,

$$\phi_0 \equiv \pi^\mu \pi_\mu - m^2 c^2 \approx 0. \quad (1.98)$$

A expressão (1.97) leva também a uma Hamiltoniana canônica identicamente nula, caso típico de teorias covariantes por reparametrizações, i.e.,

$$H = \pi^\mu u_\mu - L = 0, \quad (1.99)$$

com isso, a Hamiltoniana primária desse sistema é apenas o produto do vínculo primário e seu multiplicador de Lagrange,

$$H_P = \lambda_0 \phi_0 \approx 0. \quad (1.100)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais são

$$\{x_\mu, x_\nu\} = \{\pi^\mu, \pi^\nu\} = 0, \quad (1.101)$$

$$\{x_\mu, \pi^\nu\} = -\{\pi^\nu, x_\mu\} = \delta_\mu^\nu. \quad (1.102)$$

Dessa forma, vemos que ϕ_0 é de primeira classe, pois $\{\phi_0, \phi_0\} = 0$. As condições de consistência de Dirac, determinam que o vínculo deva ser conservado no tempo, porém temos

$$\dot{\phi}_0 = 0, \quad (1.103)$$

implicando na não existência de vínculos secundários. Ao mesmo tempo também permanece mantida a indeterminação do multiplicador de Lagrange. Uma forma de resolver esse problema é usar as equações de Hamilton no subespaço representado pela igualdade fraca. Temos,

$$u^\mu = \{u^\mu, H_P\} = \frac{\partial H_P}{\partial \pi_\mu} = 2\lambda_0 \pi^\mu, \quad (1.104)$$

$$\dot{\pi}^\mu = \{\pi^\mu, H_P\} = -\frac{\partial H_P}{\partial x_\mu} = 0, \quad (1.105)$$

mas $\pi^\mu = -\frac{mc^2}{\sqrt{u^\nu u_\nu}} u^\mu$, logo

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2m} \frac{\sqrt{u_\nu u^\nu}}{c}. \quad (1.106)$$

Assim, temos a Hamiltoniana primária determinada

$$H_P = -\frac{1}{2m} \frac{\sqrt{u_\nu u^\nu}}{c} (\pi^\mu \pi_\mu - m^2 c^2) \approx 0. \quad (1.107)$$

As velocidades u^μ e o parâmetro τ ainda não foram fixados com relação a x^μ . Tendo isso em vista, tomamos como escolha de gauge a relação

$$\phi_1 \equiv x^0 - \tau \approx 0, \quad (1.108)$$

onde x^0 equivale ao tempo laboratório. A adição desse novo vínculo modifica o tratamento do sistema, de um modo que forma-se um conjunto de vínculos de segunda classe, devido à não-comutatividade entre os vínculos,

$$\{\phi_0, \phi_0\} = \{\phi_1, \phi_1\} = 0, \quad (1.109)$$

$$\{\phi_0, \phi_1\} = -2\pi^0. \quad (1.110)$$

O próximo passo do método é calcularmos os parênteses de Dirac fundamentais do sistema, para enfim determinarmos as equações de Hamilton e verificarmos a consistência do método para esse sistema. Definimos os parênteses de Dirac entre duas funções, F e

G , como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} + \{F, \phi_a\} (M^{-1})^{ab} \{\phi_b, G\}, \quad (1.111)$$

$a, b = 0, 1$. Assim,

$$\{x_\mu, x_\nu\}_D = \{\pi^\mu, \pi^\nu\}_D = 0, \quad (1.112)$$

$$\{x_\mu, \pi^\nu\}_D = \delta_\mu^\nu - \delta^{0\nu} \frac{\pi_\mu}{\pi^0}. \quad (1.113)$$

Com um conjunto de vínculos de segunda classe, sempre temos parênteses de Dirac entre qualquer um dos vínculos e qualquer função do espaço de fase nulos. De fato, se confirma que todos os vínculos possuem parênteses de Dirac nulos entre si. Por fim, temos as equações de Hamilton

$$\dot{x}_\mu \equiv \{x_\mu, H_P\}_D = 2\delta^{0\nu} \frac{\pi_\mu \pi_\nu}{\pi^0}, \quad (1.114)$$

$$\dot{\pi}_\mu \equiv \{\pi_\mu, H_P\}_D = 0, \quad (1.115)$$

que são consistentes com a dinâmica da partícula livre relativística,

$$\ddot{x}_\mu = 0. \quad (1.116)$$

Bibliografia

- [1] DIRAC, P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 2, n. 2, p. 129, 1950.
- [2] DIRAC, P. A. M. The hamiltonian form of field dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 3, n. 1, p. 1-23, 1951.
- [3] DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Dover Publications, Inc., 2001.
- [4] LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. 4th ed. New York: Dover Publications, Inc., 1986.
- [5] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3rd ed. New York: Addison-Wesley, 2001.
- [6] HANSON A.; REGGE, T.; TEITELBOIM, C. *Constrained Hamiltonian Systems*. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- [7] SUNDERMEYER, K. *Constrained Dynamics - With Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- [8] GITMAN, D. M.; TYUTIN, I. V. *Quantization of Fields with Constraints*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [9] BARCELOS-NETO, J.; DAS, A.; SCHERER, W. Canonical quantization of constrained systems. *Acta Physica Polonica*, v. B18, n. 4, p. 269, 1987.
- [10] DAS, A. *Lectures on Quantum Field Theory*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2008.

Capítulo 2

Estrutura Canônica da Eletrodinâmica

2.1 Introdução

Neste capítulo, abordaremos algumas ideias sobre campos de gauge e de como o método de Dirac pode ser aplicado a esses campos, para que possamos interpretar os resultados obtidos através da aplicação do método.

Teorias de gauge têm origem no surgimento gradual da ideia de simetria como uma força motriz da formação de uma teoria física e no princípio de gauge, ideia de que as simetrias da natureza, como as próprias interações, devem ser essencialmente locais. O princípio de gauge estabelece propriedades de invariância sobre leis físicas. Exige que toda simetria contínua seja uma simetria local, implicando em um grau de simetria na natureza muito maior do que é normalmente concebido. Tal princípio significa uma restrição tão forte que existe apenas uma classe muito limitada de teorias que podem atendê-la, de modo que possivelmente não teria sido proposta se não houvessem exemplos já conhecidos onde se verifica a simetria local, como a teoria eletromagnética e a relatividade geral [1].

Uma teoria de gauge pode ser vista como uma teoria na qual as variáveis dinâmicas são especificadas com respeito a um referencial, cuja escolha é arbitrária em cada instante de tempo. Dessa forma, as variáveis fisicamente relevantes são aquelas que são independentes da escolha de um referencial local. Uma transformação das variáveis induzida por uma mudança no referencial (arbitrário) é chamada de transformação de gauge e as variáveis físicas ("observáveis") são então, invariantes de gauge.

Em uma teoria de gauge, não podemos esperar que as equações de movimento determinem todas as variáveis dinâmicas para todos os tempos se condições iniciais são dadas porque sempre se pode mudar o referencial no futuro, enquanto se mantém as mesmas condições iniciais. Assim, uma propriedade chave de uma teoria de gauge é que a solução geral das equações de movimento contenha funções arbitrárias do tempo. Essas são teorias nas quais o sistema físico que está sendo estudado é descrito com mais variáveis que os

graus de liberdade independentes fisicamente. Os graus de liberdade de significado físico emergem como sendo aqueles invariantes sob a transformação que conecta as variáveis (transformação de gauge) [3].

A primeira e mais simples teoria de gauge que pode ser citada é o eletromagnetismo, mas até seu desenvolvimento, a ideia da invariância de gauge era vista apenas como uma característica específica da teoria eletromagnética e não como um princípio fundamental [1][2]. A cromodinâmica quântica, que descreve as interações fortes, e o modelo de Glashow-Weinberg-Salam, que descreve as interações fracas, também são teorias de gauge. Uma característica comum entre essas teorias é a condição de que a lagrangiana seja invariante sob transformações de gauge, o que impõe de modo natural a introdução de campos mediadores na interação fundamental sob consideração. De acordo com o grupo ao qual essas transformações pertencem, temos diferentes modelos para as interações fundamentais: eletromagnetismo ($U(1)$), cromodinâmica quântica ($SU(3)$), teoria eletrofraca ($SU(2) \times U(1)$). Quando o grupo de gauge é um do tipo não-abeliano, temos uma teoria do tipo Yang-Mills ¹[4].

Uma distinção importante existente em física de partículas elementares é a de férmions e bósons. Férmions são partículas que obedecem à estatística de Fermi-Dirac e que possuem spin semi-inteiro, e.g. quarks e léptons. A descrição de suas interações no contexto de teorias de gauge é caracterizada pelo estudo de campos espinoriais, vistos neste trabalho como campos de Dirac. Bósons são partículas que obedecem à estatística de Bose-Einstein e que possuem spin inteiro. São vistos também como bósons de gauge, e são os mediadores das interações fundamentais, como o fóton na interação eletromagnética, os bósons W^+, W^- e Z na interação fraca, e os glúons na interação forte. Do ponto de vista de teorias de gauge, os bósons são os quanta dos campos de gauge de suas respectivas teorias. Nas seções seguintes, faremos uma abordagem preliminar ao que caracteriza essas teorias. Temos um estudo estritamente clássico de como o campo eletromagnético aparece como consequência de um processo de acoplamento mínimo realizado ao se impor sobre a lagrangiana de Dirac para um férmion livre a invariância de gauge do grupo $U(1)$. Em sequência, aplicamos o método de Dirac para ambos, campo espinorial e campo eletromagnético, livres de interação.

2.2 Campo Espinorial de Dirac

Os termos "espinores" foram usados por físicos, primeiramente no campo da mecânica quântica. Em formas matemáticas, foram descobertos, em 1913, por Cartan, em suas investigações sobre representações lineares de grupos simples. Espinores são, como tensores, objetos geométricos incorporados em um espaço e possuem componentes que se transformam linearmente sobre transformações de coordenadas do espaço. Diferem dos

¹Ver Capítulo 3

tensores de modo que mudam de sinal quando se aplica uma completa revolução em torno de um eixo, enquanto tensores permanecem os mesmos. Espinores estão sempre associados à ambiguidade de sinal. Em espaço quadridimensional ocorrem nas famosas equações de Dirac, com os quatro campos ψ sendo as componentes de um espinor [5, 6].

Como ponto de partida para esse estudo, tomemos a lagrangiana de Dirac para um férmion livre,

$$L = \bar{\psi} D \psi, \quad (2.1)$$

onde

$$D \equiv \frac{1}{2} i \gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - \frac{1}{2} i \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m \quad (2.2)$$

é um operador que atua no espinor ψ e em seu dual $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. As notações $\overrightarrow{\partial}_\mu$ e $\overleftarrow{\partial}_\mu$ simbolizam derivadas que atuam à direita e à esquerda de um termo, respectivamente, e.g.,

$$\bar{\psi} \overrightarrow{\partial}_\mu \psi \equiv \bar{\psi} \partial_\mu \psi, \quad (2.3)$$

$$\bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_\mu \psi \equiv \partial_\mu \bar{\psi} \psi. \quad (2.4)$$

γ^μ representa um conjunto de quatro matrizes 4×4 , que satisfazem as condições $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ e $\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger$, i.e., sendo geradores de uma álgebra de Clifford com γ^0 atuando em elementos da base como um operador de paridade.

Do princípio de Hamilton, temos as equações de Euler-Lagrange, para ψ ,

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \psi)} - \frac{\delta L}{\delta \psi} = 0, \quad (2.5)$$

de onde o primeiro e o segundo termo correspondem, respectivamente, a

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu, \quad (2.6)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = -\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu^\dagger - \bar{\psi} m. \quad (2.7)$$

De modo que (2.5) passa a ser

$$\bar{\psi} \left(i \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = 0. \quad (2.8)$$

Para $\bar{\psi}$, temos

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}} = 0, \quad (2.9)$$

com o primeiro e o segundo termo sendo, respectivamente,

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad (2.10)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\psi. \quad (2.11)$$

Tornando (2.9) equivalente a

$$\left(i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi = 0. \quad (2.12)$$

As equações (2.8) e (2.12) são as equações de campo para um férmion livre. São chamadas de equações de Dirac, para o campo espinorial ψ , em (2.12), e para seu dual $\bar{\psi}$, em (2.8).

2.3 Simetria U(1)

Da teoria de grupos temos que U(1) representa o grupo das matrizes complexas e unitárias de dimensão 1. Uma transformação geral desse grupo é dada por

$$U = e^{i\alpha}, \quad (2.13)$$

em que α é um parâmetro inicialmente independente do ponto no espaço. Quando essa transformação é aplicada a um campo, dizemos que estamos verificando a simetria U(1) global, pois a transformação do grupo é a mesma em todo o espaço. Quando o parâmetro α depende do ponto, $\alpha = \alpha(x)$, dizemos que estamos verificando a simetria U(1) local. Voltemos ao campo espinorial ψ de um férmion e seu dual $\bar{\psi}$. ψ e $\bar{\psi}$ se transformam sob ação de U como

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad (2.14)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}U^\dagger, \quad (2.15)$$

de modo que uma aplicação direta da transformação global do grupo sobre a lagrangiana (2.1) resulta em sua invariância, i.e.,

$$L' = (e^{-i\alpha}\bar{\psi}) D(e^{i\alpha}\psi) = L. \quad (2.16)$$

Quando submetemos a lagrangiana a uma transformação local, temos como resultado a lagrangiana original acrescida de um termo com derivadas das matrizes de transformação, uma vez que as mesmas agora têm dependência ponto a ponto no espaço,

$$L' = L + \frac{i}{2} \left(U^\dagger(x) \gamma^\mu \partial_\mu U(x) - \partial_\mu U^\dagger(x) \gamma^\mu U(x) \right). \quad (2.17)$$

Diante disso se faz necessária a aplicação de um processo chamado de acoplamento mínimo, em que definimos uma derivada covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.18)$$

onde e é um parâmetro arbitrário, a princípio, e A_μ um campo de conexão. Então, impomos a condição de que, quando aplicada ao campo de Dirac, a derivada covariante se transforme com a mesma lei de transformação do campo, ou seja,

$$D_\mu \psi \rightarrow U D_\mu \psi. \quad (2.19)$$

Neste caso, o campo de conexão deve se transformar como

$$A_\mu = U^\dagger A'_\mu U + \frac{i}{e} U^\dagger \partial_\mu U. \quad (2.20)$$

Essa expressão pode ser reescrita como

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (2.21)$$

que corresponde à transformação local do quadripotencial que mantém a lagrangiana para o campo eletromagnético livre invariante. Ou seja, o campo eletromagnético aparece aqui como um campo de conexão que permite a invariância local da lagrangiana de Dirac. Temos assim a lagrangiana localmente invariante

$$L = \bar{\psi} \left(i \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi + J^\mu A_\mu, \quad (2.22)$$

onde $J^\mu \equiv e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ é um termo de corrente.² $J^\mu A_\mu$ é então um termo de interação adicionado à lagrangiana de Dirac, quando consideramos o tratamento da invariância local do sistema.

2.4 Campo Eletromagnético Livre

A lagrangiana (2.22) corresponde ao termo de Dirac, associado a um férmion, e a um termo de interação $J^\mu A_\mu$ que relaciona o campo espinorial ao campo eletromagnético. Contudo, nesta seção vamos tomar por conveniência apenas a lagrangiana do campo eletromagnético livre, que corresponde a

$$L = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético, invariante sob a transformação (2.21).

Novamente, do princípio de Hamilton, temos as equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta L}{\delta A_\nu} = 0, \quad (2.24)$$

²Pode ser mostrado pela aplicação do teorema de Noether.

com primeiro e segundo termo, respectivamente,

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu F^{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\delta L}{\delta A^\mu} = 0. \quad (2.26)$$

Resultando nas equações de campo,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.27)$$

que correspondem às equações de Maxwell no vácuo.

2.5 Estrutura Canônica do Campo Espinorial

Nesta seção aplicaremos o método de Dirac para o campo espinorial descrito na seção (2.2). A lagrangiana (2.1) nos leva, via princípio de Weiss, aos momentos canônicos e à hamiltoniana:

$$\pi_\psi = \frac{i}{2} \gamma^0 \bar{\psi}, \quad (2.28)$$

$$\pi_{\bar{\psi}} = -\frac{i}{2} \psi \gamma^0, \quad (2.29)$$

$$H = \frac{i}{2} \int d^3x (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi). \quad (2.30)$$

A fim de construir a formulação hamiltoniana, com equações de movimento em termos das variáveis canônicas, devemos poder reescrever a hamiltoniana em função dos momentos canônicos, mas isto não se mostra possível uma vez que os momentos (2.28) e (2.29) são funções apenas dos campos ψ e $\bar{\psi}$, e não de suas derivadas temporais (presentes na hamiltoniana e necessárias para a transformação entre formulações). Podemos, entretanto, isolar uma porção do espaço de fase em que isso não é possível, tratando tais relações como vínculos primários (originados puramente da lagrangiana) válidos apenas nesse subespaço. A manifestação disso em termos algébricos se dá pela introdução da igualdade fraca, ou seja,

$$\phi_0 \equiv \pi_\psi - \frac{i}{2} \gamma^0 \bar{\psi} \approx 0, \quad (2.31)$$

$$\bar{\phi}_0 \equiv \pi_{\bar{\psi}} + \frac{i}{2} \psi \gamma^0 \approx 0, \quad (2.32)$$

definindo a hamiltoniana primária

$$H_P = H + \int d^3x (u_0 \phi_0 + v_0 \bar{\phi}_0). \quad (2.33)$$

Os vínculos definidos em (2.31) e (2.32) são relações funcionais entre campos, ou seja, na verdade temos dois vínculos para cada ponto do espaço, justificando a forma da hamiltoniana primária. A partir disso usamos as condições de consistência, que indicam que os vínculos devem ser conservados no tempo por consistência física do sistema. Para determinarmos a evolução temporal dessas funções, precisamos antes determinar os parênteses fundamentais da teoria. Para férmions, usamos os parênteses de Grassmann (PG) no lugar dos usuais parênteses de Poisson, uma vez que as matrizes de Dirac formam um conjunto de números de Grassmann. Os PG's entre dois espinores são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_G \equiv & \int d\sigma_z \left(\frac{\partial F(x)}{\partial \psi(z)} \frac{\partial G(y)}{\partial \pi_\psi(z)} + \frac{\partial F(x)}{\partial \pi_\psi(z)} \frac{\partial G(y)}{\partial \psi(z)} \right) \\ & + \int d\sigma_z \left(\frac{\partial F(x)}{\partial \bar{\psi}(z)} \frac{\partial G(y)}{\partial \pi_{\bar{\psi}}(z)} + \frac{\partial F(x)}{\partial \pi_{\bar{\psi}}(z)} \frac{\partial G(y)}{\partial \bar{\psi}(z)} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sendo assim, temos que os únicos PG's não nulos são:

$$\{\psi(x), \pi_\psi(y)\}_G = \delta(x - y), \quad (2.35)$$

$$\{\bar{\psi}(x), \pi_{\bar{\psi}}(y)\}_G = \delta(x - y). \quad (2.36)$$

Como consequência, temos as condições de consistência para os vínculos primários,

$$\dot{\phi}_0(x) = \{\phi_0(x), H\}_G + \int d\sigma_y v_0(y) \{\phi_0(x), \bar{\phi}_0(y)\}_G \approx 0, \quad (2.37)$$

$$\dot{\bar{\phi}}_0(x) = \{\bar{\phi}_0(x), H\}_G + \int d\sigma_y u_0(y) \{\bar{\phi}_0(x), \phi_0(y)\}_G \approx 0. \quad (2.38)$$

Os parênteses dos vínculos com a hamiltoniana são nulos e os parênteses entre os vínculos são:

$$\{\phi_0(x), \bar{\phi}_0(y)\}_G = i\gamma^0 \delta(x - y), \quad (2.39)$$

$$\{\bar{\phi}_0(x), \phi_0(y)\}_G = i\gamma^0 \delta(x - y). \quad (2.40)$$

De modo que as condições de consistência resultam em

$$\dot{\phi}_0(x) = i\gamma^0 v_0(x) \approx 0, \quad (2.41)$$

$$\dot{\bar{\phi}}_0(x) = i\gamma^0 u_0(x) \approx 0. \quad (2.42)$$

Esse resultado nos mostra que não há mais vínculos na teoria. Os vínculos primários são também vínculos de segunda classe, pois tem parênteses de Grassmann não nulos entre si. Isso indica que os parênteses de Dirac que poderiam ser construídos são equivalentes aos parênteses de Grassmann já determinados, o que leva a conclusão de que a lagrangiana de um férmion livre sob o ponto de vista da aplicação do método leva a uma teoria vinculada,

mas que não traz implicações sobre arbitrariedades intrínsecas ao sistema.

2.6 Estrutura Canônica do Campo Eletromagnético

Nesta seção, aplicaremos o método de Dirac ao campo eletromagnético livre. A partir da lagrangiana (2.23), temos o tensor Energia-Momento,

$$H_{\mu\nu} \equiv \int d\sigma \left[\frac{\delta L}{\delta(\partial^\mu A^\lambda)} \partial_\nu A^\lambda - \eta_{\mu\nu} L \right] = \int d\sigma \left[-F_{\mu\lambda} \partial_\nu A^\lambda + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]. \quad (2.43)$$

Para definir os momentos conjugados aos campos usamos a função hamiltoniana H , que corresponde a componente H_{00} do tensor Energia-Momento canônico

$$H = H_{00} = \int d\sigma \left[-F_{0\lambda} \partial_0 A^\lambda + \frac{1}{4} \eta_{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] = \int d\sigma \left[-F_{0\lambda} \dot{A}^\lambda - L \right]. \quad (2.44)$$

A hamiltoniana canônica corresponde a $H = \int d\sigma (\pi_\lambda \dot{A}^\lambda - L)$, de modo que podemos reconhecer as densidades de momento π_λ conjugados a A^λ em (2.44),

$$\pi_\lambda = -F_{0\lambda} = F_{\lambda 0}. \quad (2.45)$$

Temos que $\pi_0 = F_{00} = 0$, o que implica no surgimento de um vínculo primário

$$\phi_0 \equiv \pi_0 \approx 0. \quad (2.46)$$

Além disso, temos para π_i ,

$$\pi_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \partial_i A_0 - \dot{A}_i, \quad (2.47)$$

ou seja, temos expressões para “velocidades” $\dot{A}_i = \partial_i A_0 - \pi_i$. Retomando a hamiltoniana canônica podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} H &= \int d\sigma \left(\pi_\lambda \dot{A}^\lambda + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\ &= \int d\sigma \left(\pi_0 \dot{A}^0 + \pi_i \dot{A}^i + \frac{1}{2} F_{i0} F^{i0} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right) \\ &= \int d\sigma \left(-\frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \pi_i \partial^i A^0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

A hamiltoniana primária H_P do sistema é definida por

$$H_P = H + \int_\Sigma d\sigma \lambda^0(x) \phi_0(x), \quad (2.49)$$

onde $\lambda^0(x)$ é a função multiplicadora de Lagrange associada ao vínculo primário $\phi_0(x)$. Assim, a dinâmica de uma função $F(x)$ do espaço de fase será dada por

$$\dot{F}(x) = \{F(x), H_P\} \approx \{F(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma \lambda^0(y) \{F(x), \phi_0(x)\}, \quad (2.50)$$

com parênteses de Poisson entre duas densidades com relação às variáveis canônicas A_μ e π^μ sendo

$$\{F(x), G(y)\} \equiv \int_{\Sigma} d\sigma_z \left(\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)} \right). \quad (2.51)$$

Vejamos quais os parênteses de Poisson fundamentais do sistema que aparecerão nas condições de consistência. Temos

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = 0, \quad (2.52)$$

$$\{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\} = 0, \quad (2.53)$$

sendo os únicos não nulos

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta(x - y), \quad (2.54)$$

em que $\delta(x - y)$ é a delta de Dirac em três dimensões. Vamos aplicar as condições de consistência para o vínculo primário (2.46). Temos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0(x) &\approx \{\phi_0(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda^0(y) \{\phi_0(x), \phi_0(y)\} \approx 0 \\ &= \{\pi_0(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda^0(y) \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Os parênteses $\{\pi_0(x), \pi_0(y)\}$ em (2.55) são parênteses fundamentais nulos. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0(x) &\approx \{\pi_0(x), H\} \\ &= \int_{\Sigma} d\sigma \pi_i(y) \partial_y^i \{\pi_0(x), A^0(y)\} \\ &= - \int_{\Sigma} d\sigma \pi_i(y) \partial_y^i \delta(y - x) \\ &= \partial_x^i \int_{\Sigma} d\sigma \pi_i(y) \delta(y - x) \\ &= \partial_x^i \pi_i(x) \approx 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

A determinação da evolução temporal de ϕ_0 não sofre influência dos demais termos da hamiltoniana que não contém A^0 , uma vez que constituem parênteses fundamentais nulos. Então, temos que da condição de consistência para o vínculo primário surgiu um

vínculo secundário

$$\phi_1 \equiv \partial^i \pi_i \approx 0. \quad (2.57)$$

Como $\pi_i = F_{i0} = -E_i$, temos $\phi_1 = \partial_i E_i \approx 0$, que é equivalente à lei de Gauss na ausência de fontes $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Da condição de consistência para ϕ_1 segue que

$$\dot{\phi}_1(x) \approx \{\phi_1(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda^0(y) \{\phi_1(x), \phi_0(y)\} \approx 0, \quad (2.58)$$

em que temos $\{\phi_1(x), \phi_0(y)\} = \partial_x^i \{\pi_i(x), \pi_0(y)\} = 0$. Assim,

$$\dot{\phi}_1(x) \approx \{\phi_1(x), H\} \approx 0. \quad (2.59)$$

Os termos da hamiltoniana que resultarão em parênteses não nulos com ϕ_1 devem ser apenas aqueles que contém A^i , logo

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1(x) &\approx \frac{1}{4} \int_{\Sigma} d\sigma_y \{\partial_x^i \pi_i(x), F_{jk}(y) F^{jk}(y)\} \approx 0 \\ &= \frac{1}{2} \partial_x^i \int_{\Sigma} d\sigma_y \{\pi_i(x), F^{jk}(y)\} F_{jk}(y) \\ &= \frac{1}{2} \partial_x^i \int_{\Sigma} d\sigma_y \{\pi_i(x), \partial_y^j A^k(y) - \partial_y^k A^j(y)\} F_{jk}(y) \\ &= \frac{1}{2} \partial_x^i \int_{\Sigma} d\sigma_y [\partial_y^j \{\pi_i(x), A^k(y)\} - \partial_y^k \{\pi_i(x), A^j(y)\}] F_{jk}(y) \\ &= \frac{1}{2} \partial_x^i \int_{\Sigma} d\sigma_y [\partial_y^k F_{ik}(y) - \partial_y^j F_{ji}(y)] \delta(y-x) \\ &= \partial_x^i \int_{\Sigma} d\sigma_y \partial_y^j F_{ij}(y) \delta(y-x) \\ &= \partial_x^i \partial_x^j F_{ji}(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

A equação (2.60) é identicamente nula, o que nos mostra que temos apenas um vínculo secundário e não há mais vínculos surgindo das condições de consistência. Temos dois vínculos, $\phi_0 = \pi_0 \approx 0$ e $\phi_1 = \partial^i \pi_i \approx 0$ encontrados. Esses vínculos são de primeira classe, pois possuem parênteses de Poisson nulos entre si, fato evidenciado na condição para ϕ_1 . A hamiltoniana total para esse sistema é dada por

$$H_T = H + \int_{\Sigma} d\sigma \lambda^a(x) \phi_a(x), \quad (2.61)$$

onde $a = 0, 1$.

Vejamos como fica a dinâmica das variáveis do espaço de fase. Temos para A_μ ,

$$\begin{aligned}\dot{A}_\mu(x) &= \{A_\mu(x), H_T\} = \{A_\mu(x), H\} + \int d\sigma_y \lambda^a(y) \{A_\mu(x), \phi_a(y)\} \\ &= \{A_\mu(x), H\} + \int d\sigma_y [\lambda^0(y) \{A_\mu(x), \phi_0(y)\} + \lambda^1(y) \{A_\mu(x), \phi_1(y)\}].\end{aligned}\quad (2.62)$$

Separadamente, calculamos os parênteses, começando pelos que contém os vínculos

$$\{A_\mu(x), \phi_0(y)\} = \{A_\mu(x), \pi_0(y)\} = \eta_{\mu 0} \delta(x - y), \quad (2.63)$$

$$\{A_\mu(x), \phi_1(y)\} = \{A_\mu(x), \partial_y^i \pi_i(y)\} = \partial_y^i \{A_\mu(x), \pi_i(y)\} = \eta_{\mu i} \partial_y^i \delta(x - y), \quad (2.64)$$

e então com a hamiltoniana

$$\begin{aligned}\{A_\mu(x), H\} &= - \int_\Sigma d\sigma_y [\{A_\mu(x), \pi^i(y)\} \pi_i(y) - \{A_\mu(x), \pi_i(y)\} \partial_y^i A^0(y)] \\ &= - \int_\Sigma d\sigma_y \delta_\mu^i \delta(x - y) \pi_i(y) + \int_\Sigma d\sigma_y \eta_{\mu i} \delta(x - y) \partial_y^i A^0(y) \\ &= -\delta_\mu^i \pi_i(x) - \eta_{\mu i} \partial_x^i A^0(x).\end{aligned}\quad (2.65)$$

Substituindo (2.63), (2.64) e (2.65) em (2.62),

$$\begin{aligned}\dot{A}_\mu(x) &= -\delta_\mu^i \pi_i(x) - \eta_{\mu i} \partial_x^i A^0(x) + \int d\sigma_y [\lambda^0(y) \eta_{\mu 0} \delta(x - y) + \lambda^1(y) \partial_y^i \eta_{\mu i} \delta(x - y)] \\ &= -\delta_\mu^i \pi_i(x) - \eta_{\mu i} \partial_x^i A^0(x) + \eta_{\mu 0} \lambda^0(x) + \eta_{\mu i} \int d\sigma_y \lambda^1(y) \partial_y^i \delta(x - y).\end{aligned}\quad (2.66)$$

O último termo em (2.66) pode ser escrito como $-\eta_{\mu i} \int_\Sigma d\sigma \partial_y^i \lambda^1(y) \delta(x - y)$ somado a um termo de fronteira. Assim,

$$\dot{A}_\mu(x) = -\delta_\mu^i \pi_i(x) - \eta_{\mu i} \partial_x^i A^0(x) + \eta_{\mu 0} \lambda^0(x) + \eta_{\mu i} \partial_x^i \lambda^1(x). \quad (2.67)$$

Para a componente $\mu = 0$, temos

$$\dot{A}_0(x) = \lambda_0(x) \quad (2.68)$$

e para as componentes $\mu = i$,

$$\dot{A}_i(x) = -\delta_i^j \pi_j(x) - \eta_{ij} \partial_x^j A^0(x) + \eta_{ij} \partial_x^j \lambda^1(x),$$

ou seja,

$$\dot{A}_i = \partial_i A_0 - \pi_i - \partial_i \lambda^1. \quad (2.69)$$

Essa expressão mostra a arbitrariedade que se encontra nas velocidades \dot{A}_i devido a indeterminação do multiplicador λ^1 . Vejamos agora a dinâmica para π^μ . Temos

$$\dot{\pi}^\mu(x) = \{\pi^\mu(x), H\} + \int d\sigma_y (\lambda^0(y) \{\pi^\mu(x), \phi_0(y)\} + \lambda^1(y) \{\pi^\mu(x), \phi_1(y)\}). \quad (2.70)$$

Novamente, calculamos os parênteses separadamente,

$$\{\pi^\mu(x), \phi_0(y)\} = \{\pi^\mu(x), \pi_0(y)\} = 0, \quad (2.71)$$

$$\{\pi^\mu(x), \phi_1(y)\} = \{\pi^\mu(x), \partial_y^i \pi_i(y)\} = 0 \quad (2.72)$$

e com a hamiltoniana

$$\begin{aligned} \{\pi^\mu(x), H\} &= \int_\Sigma d\sigma_y \left[\partial_y^i \{\pi^\mu(x), A^0(y)\} \pi_i(y) + \frac{1}{2} \{\pi^\mu(x), F_{ij}(y)\} F^{ij}(y) \right] \\ &= - \int_\Sigma d\sigma_y \partial_y^i \eta^{\mu 0} \delta(y-x) \pi_i(y) - \frac{1}{2} \delta_j^\mu \int_\Sigma d\sigma_y \partial_i^y F^{ij}(y) \delta(y-x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_i^\mu \int_\Sigma d\sigma_y \partial_j^y F^{ij}(y) \delta(y-x) \\ &= \eta^{\mu 0} \partial_x^i \pi_i(x) + \frac{1}{2} \delta_j^\mu \partial_i^x F^{ij}(x) - \frac{1}{2} \delta_i^\mu \partial_j^x F^{ij}(x) \\ &= \eta^{\mu 0} \partial_x^i \pi_i(x) - \delta_i^\mu \partial_j^x F^{ij}(x). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Assim,

$$\dot{\pi}^\mu = \eta^{\mu 0} \partial^i \pi_i - \delta_i^\mu \partial_j F^{ij}. \quad (2.74)$$

Não temos multiplicadores presentes na expressão para $\dot{\pi}^\mu$. Entretanto, podemos escrever π_i a partir da expressão que encontramos para \dot{A}_i em (2.69),

$$\pi_i = \partial_i A_0 - \dot{A}_i - \partial_i \lambda^1 = F_{i0} - \partial_i \lambda^1, \quad (2.75)$$

substituindo em (2.74),

$$\dot{\pi}^\mu = \eta^{\mu 0} \partial^i F_{i0} - \eta^{\mu 0} \partial^i \partial_i \lambda^1(x) - \delta_i^\mu \partial_j F^{ij}. \quad (2.76)$$

Como $\pi^\mu = F^{\mu 0}$, $\dot{\pi}^\mu = \partial_0 F^{\mu 0}$, logo em (2.76) temos

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{\mu 0} &= \delta_0^\mu \partial_i F^{i0} + \delta_i^\mu \partial_j F^{ji} + \eta^{\mu 0} \vec{\nabla}^2 \lambda^1 \\ \partial_0 F^{\mu 0} + \partial_i F^{\mu i} &= \eta^{\mu 0} \vec{\nabla}^2 \lambda^1 \\ \partial_\mu F^{\mu \nu} &= \eta^{\nu 0} \vec{\nabla}^2 \lambda^1. \end{aligned} \quad (2.77)$$

A equação (2.77) mostra que temos o multiplicador λ^1 presente nas equações para o campo eletromagnético livre. O multiplicador λ^0 está associado à componente \dot{A}_0 ,

já indeterminada com respeito ao momento conjugado π^0 . Esse resultado evidencia a relevância que a escolha de gauge exerce na teoria sob o ponto de vista do método de Dirac. Para o campo eletromagnético livre a não fixação de gauge implica na arbitrariedade das equações de campo.

Como visto no exemplo da partícula livre relativística na abordagem covariante por reparametrizações, a escolha de gauge implica em uma adição de vínculos de modo a formar um conjunto de segunda classe, como o existente no exemplo da partícula livre em uma esfera. Além disso, temos também que essa escolha deve seguir certos critérios. O número de vínculos adicionados deve ser igual ao número de vínculos de primeira classe e as condições para a fixação de gauge devem ser atingíveis e consistentes. Isso nem sempre parece possível, como apresentamos no capítulo seguinte, porém no caso eletromagnético podemos seguir essas ideias. Para isso, voltemos às equações de campo

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.78)$$

Para $\nu = 0$, temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_i F^{i0} = \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) \\ &= \partial^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \phi = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi = \frac{1}{\vec{\nabla}^2} \partial^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (2.79)$$

Essa expressão deve ser compreendida como

$$\phi(x) = \int d\sigma_y G(\vec{x}, \vec{y}) \partial^0 \vec{\nabla}_y \cdot \vec{A}(y) = 0, \quad (2.80)$$

em que $G(\vec{x}, \vec{y})$ é a função de Green para o operador Laplaciano, i.e.,

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.81)$$

Para $\nu = i$, temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \partial_0 (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \partial_j (\partial^j A^i - \partial^i A^j) \\ &= \partial_j \partial_j A_i - \partial_0 \partial_0 A_i + \partial_0 \partial_i A_0 - \partial_j \partial_i A_j \\ &= \square A_i + \partial_0 \vec{\nabla} \phi - \partial_i \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \end{aligned} \quad (2.82)$$

em que $\square \equiv -\partial_0 \partial_0 + \partial_i \partial_i$ é o operador d'Alembertiano. Substituindo a solução para ϕ

(2.79) em (2.82),

$$\begin{aligned}
\Box \vec{A} + \partial_0 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\vec{\nabla}^2} \partial^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= 0 \\
\Box \vec{A} + \partial_0 \partial_0 \left(\vec{\nabla} \frac{1}{\vec{\nabla}^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \vec{\nabla}^2 \left(\vec{\nabla} \frac{1}{\vec{\nabla}^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= 0 \\
\Box \vec{A} - \left(\vec{\nabla}^2 - \partial_0 \partial_0 \right) \left(\vec{\nabla} \frac{1}{\vec{\nabla}^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= 0 \\
\Box \left(\vec{A} - \vec{\nabla} \frac{1}{\vec{\nabla}^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

A equação (2.83) consiste em uma equação de onda para um potencial \vec{A}' . Então concluímos que existe um potencial $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda$ que satisfaz a equação de onda $\Box \vec{A}' = 0$ com $\Lambda = \frac{1}{\vec{\nabla}^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Temos também a divergência de \vec{A}'

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' &= \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda \right) \\
&= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\vec{\nabla}^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Ou seja, \vec{A}' é um potencial que satisfaz à condição de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$. Se quisermos que tal condição seja tratada como um vínculo da teoria, devemos impor sua conservação no tempo,

$$\partial_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0, \tag{2.85}$$

que substituindo em (2.79) leva a

$$\phi' = \frac{1}{\vec{\nabla}^2} \partial^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0, \tag{2.86}$$

ou seja,

$$A'_0 = 0. \tag{2.87}$$

Desta forma, temos condições de gauge atingíveis e consistentes, constituindo um conjunto com mesma quantidade de vínculos que os de primeira classe encontrados. Como tais condições são consistentes também com o método, podemos incluí-las de fato como novos vínculos à teoria. Temos então o conjunto:

$$\phi_0 \equiv \pi^0 \approx 0, \tag{2.88}$$

$$\phi_1 \equiv \partial_i \pi_i \approx 0, \tag{2.89}$$

$$\phi_2 \equiv A_0 \approx 0, \tag{2.90}$$

$$\phi_3 \equiv \partial_i A^i \approx 0. \tag{2.91}$$

Vamos agora verificar se esse novo conjunto de vínculos se mantém como de primeira

classe ou não, determinando os parênteses de Poisson entre eles. Temos

$$\{\phi_0, \phi_2\} = \{\pi^0(x), A_0(y)\} = -\delta(y-x), \quad (2.92)$$

$$\{\phi_1, \phi_3\} = \{\partial_i^x \pi_i(x), \partial_j^y A^j(y)\} = \partial_i^x \partial_j^y \{\pi_i(x), A^j(y)\} = -\partial_i^x \partial_i^y \delta(y-x), \quad (2.93)$$

sendo os demais parênteses nulos. Logo, como existe pelo menos um vínculo do conjunto com o qual os demais vínculos tem parênteses de Poisson não nulos, temos um conjunto de vínculos de segunda classe.

A hamiltoniana estendida para esse conjunto de vínculos é definida por

$$H_E = H + \int_{\Sigma} d\sigma_x \lambda^a(x) \phi_a(y), \quad (2.94)$$

com $a = 0, 1, 2, 3$. Como a dinâmica é gerada agora pela hamiltoniana estendida, as condições de consistência devem ser verificadas sobre esse novo conjunto de vínculos. Assim,

$$\dot{\phi}_a(x) = \{\phi_a(x), H_E\} \approx \{\phi_a(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda^b(y) \{\phi_a(x), \phi_b(y)\} \approx 0, \quad (2.95)$$

onde podemos então definir a matriz M , tal que $M_{ab}(x, y) = \{\phi_a(x), \phi_b(y)\}$. Explicitamente,

$$M_{ab}(x, y) = M_{ab}^x \delta(x-y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \quad (2.96)$$

Podemos reescrever (2.95) em termos de M ,

$$\int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda^b(y) M_{ab}(x, y) \approx -\{\phi_a(x), H\}, \quad (2.97)$$

e definimos a inversa de M como G , devendo satisfazer a

$$\int_{\Sigma} d\sigma_z M_{ac}(x, z) G^{cb}(z, y) = \delta_a^b \delta(x, y), \quad (2.98)$$

Como a partir de (2.96) é possível escrever $M_{ac}(x, z) = M_{ac}^x \delta(x-z)$, temos

$$\begin{aligned} M_{ac}^x \int_{\Sigma} d\sigma_z \delta(x-z) G^{cb}(z, y) &= \delta_a^b \delta(x, y) \\ M_{ac}^x G^{cb}(x, y) &= \delta_a^b \delta(x, y), \end{aligned} \quad (2.99)$$

que corresponde a uma condição específica desse sistema para determinarmos a matriz inversa. A disposição das componentes de M em blocos nulos e não nulos nos leva a supor uma inversa com forma

$$G^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{20}(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{31}(x, y) \\ -g_{02}(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{13}(x, y) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Assim, temos que a equação (2.99) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{31} \\ -g_{02} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (2.101)$$

é satisfeita com

$$g_{02}(x, y) = g_{20}(x, y) = \delta(x - y), \quad (2.102)$$

$$\nabla_x^2 g_{13}(x, y) = \nabla_x^2 g_{31}(x, y) = \delta(x - y). \quad (2.103)$$

As componentes $g_{13}(x, y)$ e $g_{31}(x, y)$ correspondem a função de Green do operador Laplaciano,

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.104)$$

onde

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.105)$$

Com isso, temos que $g_{13}(x, y) = g_{31}(x, y) = \frac{1}{4\pi r}$, sendo $r \equiv |\vec{x} - \vec{y}|$. Então temos a inversa de M ,

$$G^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(x - y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi r} \\ -\delta(x - y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi r} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Assim, voltamos aos multiplicadores λ^a

$$\lambda^a(x) \approx - \int d\sigma_y G^{ab}(x, y) \{ \phi_b(y), H \}, \quad (2.107)$$

substituindo sua expressão na dinâmica de uma função $F(x)$ tomando a hamiltoniana estendida como geradora,

$$\dot{F}(x) = \{F(x), H_E\} = \{F(x), H\} + \int d\sigma_y \lambda^a(y) \{F(x), \phi_a(y)\}, \quad (2.108)$$

resultando em

$$\dot{F}(x) = \{F(x), H_E\} = \{F(x), H\} - \int d\sigma_y \int d\sigma_z \{F(x), \phi_a(y)\} G^{ab}(y, z) \{\phi_b(z), H\}. \quad (2.109)$$

A forma de (2.109) nos permite definir os parênteses de Dirac entre duas funções $A(x)$ e $B(y)$,

$$\{A(x), B(y)\}_D \equiv \{A(x), B(y)\} - \int d\sigma_w \int d\sigma_z \{A(x), \phi_a(w)\} G^{ab}(w, z) \{\phi_b(z), B(y)\}, \quad (2.110)$$

com $a, b = 0, 1, 2, 3$. Então, determinamos os parênteses de Dirac fundamentais, que aparecerão na dinâmica das variáveis do espaço de fase. Temos,

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D = 0, \quad (2.111)$$

$$\{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\}_D = 0, \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\}_D &= \{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} \\ &+ \int d\sigma_w \int d\sigma_z \{A_\mu(x), \phi_0(w)\} G^{02}(w, z) \{\phi_2(z), \pi^\nu(y)\} \\ &+ \int d\sigma_w \int d\sigma_z \{A_\mu(x), \phi_1(w)\} G^{13}(w, z) \{\phi_3(z), \pi^\nu(y)\} \\ &= (\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu) \delta(x - y) - \delta_\mu^i \delta_j^\nu \partial_i^x \partial_y^j \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Com isso, concluímos o estudo da estrutura canônica da eletrodinâmica. Os parênteses de Dirac acima são compatíveis com fazer os vínculos (2.88-2.91) fortemente nulos. Além disso, através dessa análise, podemos ver que apenas para as componentes transversais dos campos e momentos A_i^T e π_i^T , respectivamente, os parênteses de Dirac coincidem com os parênteses de Poisson fundamentais. Essas componentes são obtidas com o uso do projetor que seleciona a contribuição transversal dos campos, definido por T , tal que $A_i^T = T_i^k A_k$ e $\pi_i^T = T_i^l \pi_l$. Temos,

$$\{A_i^T(x), \pi_j^T(y)\} = T_i^k(x) T_j^l(y) \{A_k(x), \pi_l(y)\} = \delta_{ij} \delta(x - y), \quad (2.114)$$

$$\{A_i^T(x), \pi_j^T(y)\}_D = T_i^k(x) T_j^l(y) \left[\delta_{kl} \delta(x-y) - \partial_k^x \partial_l^y \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \right] = \delta_{ij} \delta(x-y) \quad (2.115)$$

ou seja, A_i^T e π_i^T são os verdadeiros graus de liberdade da teoria.

Referências Bibliográficas

- [1] MILLS, R. Gauge fields. *American Journal of Physics*, v. 57, n. 6, p. 493-507, 1989.
- [2] HONG-MO, C.; TSUN, T. S. *Some Elementary Gauge Theory Concepts*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1993.
- [3] HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1991.
- [4] BASSETTO, A.; NARDELLI, G.; SOLDATI, R. *Yang-Mills Theories in Algebraic Non-covariant Gauges*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1991.
- [5] CARTAN, E. *The Theory of Spinors*. New York: Dover Publications Inc, 1981.
- [6] DIRAC, P. A. M. *Spinors in Hilbert Space*. New York: Plenum Press, 1974.

Capítulo 3

Teorias de Yang-Mills

3.1 Introdução

Os avanços em teoria quântica de campos ao longo dos anos muito se devem às teorias de Yang-Mills, frequentemente chamadas de teorias de gauge [2]. Essas teorias se desenvolveram a partir da publicação do artigo "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance", por Cheng Ning Yang e Robert L. Mills, em 1954, obra que representa um marco no estudo da teoria das partículas elementares [1, 3].

Uma forma de pensar sobre a teoria de campo desenvolvida por Yang e Mills é vê-la como uma extensão da teoria eletromagnética [3]. A teoria eletromagnética pode ser descrita através das propriedades de simetria do grupo $U(1)$, grupo das matrizes unitárias de dimensão 1, obedecendo a uma álgebra de Lie, em que as transformações que definem o grupo podem ser expandidas em série de Taylor explicitando os geradores do grupo e como eles se relacionam. A teoria de Yang-Mills, em seu formato mais atual, trata das simetrias de um grupo maior, o $SU(N)$, grupo das matrizes complexas unitárias, de dimensão N e determinante 1. Desta forma podemos ver tal teoria como uma generalização da eletromagnética, uma vez que podemos estender os elementos do caso eletromagnético para o grupo $SU(N)$.

3.2 Simetria $SU(N)$

Nesta seção vamos retomar a ideia abordada na seção (2.3), porém com extensão a um grupo de transformações de dimensão maior. Como ponto de partida desse estudo consideremos a densidade lagrangiana de um sistema de N férmions livres e de mesma massa,

$$L = \bar{\psi}^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi_i, \quad (3.1)$$

onde i identifica cada f ermion, e suas respectivas componentes no espaço de Minkowski s ao implícitas. Então, aplicamos aos campos ψ^i uma transforma o geral U , tal que

$$\psi^i \rightarrow U_j^i \psi^j, \quad (3.2)$$

$$\bar{\psi}^i \rightarrow \bar{\psi}^j (U^\dagger)_j^i, \quad (3.3)$$

onde U_j^i s ao as componentes de uma matriz complexa U , de dimensão $N \times N$. A lagrangiana transformada dos campos passa a ser

$$\begin{aligned} L' &= (\bar{\psi}^i)' \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) (\psi_i)' \\ &= \bar{\psi}^j (U^\dagger)_j^i \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) U_i^k \psi_k, \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que se U_i^k possuir componentes constantes,

$$L' = \bar{\psi}^j (U^\dagger)_j^i U_i^k \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi_k. \quad (3.5)$$

Para que tenhamos a invariância lagrangiana, devemos considerar o caso em que a transforma o   unitária, ou seja,

$$(U^\dagger U)_j^i = (U^\dagger)_k^i U_j^k = \delta_j^i. \quad (3.6)$$

Conseqentemente, chegamos a

$$\begin{aligned} L' &= \bar{\psi}^j \delta_j^k \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi_k \\ &= \bar{\psi}^k \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi_k = L. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Logo, temos a invariância global da lagrangiana quando sujeita a uma transforma o geral U com a condi o de ser unitária. O conjunto completo dessas matrizes $N \times N$, formam o grupo $U(N)$. Porém desejamos que um elemento desse grupo possa ser expandido em transforma es infinitesimais, i.e.,

$$U_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij} = \delta_{ij} + i\omega_a T_{ij}^a. \quad (3.8)$$

Isso ocorrerá quando $\det U_{ij} = 1$. As transforma es nas quais isso acontece formam um subgrupo $SU(N)$. $SU(N)$   então um grupo de Lie, cuja forma geral da transforma o corresponde a¹

$$U = \exp(i\omega^a T_a), \quad (3.9)$$

¹Seguiremos a seguinte not o por conveniência: $U_{ij} = U$ e $\psi^i = \psi$, e.g., $\psi \rightarrow U\psi$ para a transforma o de gauge.

onde T_a são os geradores da álgebra $su(n)$. Na forma infinitesimal, essas transformações passam a ser

$$U = I + i\omega_a T^a. \quad (3.10)$$

A álgebra $su(n)$ possui relações de comutação entre seus geradores tais que

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c, \quad (3.11)$$

em que f_{abc} representa o conjunto de coeficientes de estrutura do grupo. Tais relações de comutação entre os geradores do grupo mostram que o $SU(N)$ é um grupo não-abeliano, i.e., não comutativo. O próximo passo é considerarmos transformações locais, i.e., transformações de gauge. Localmente, a transformação assume a forma

$$U(x) = \exp(i\omega^a(x) T_a), \quad (3.12)$$

que devido à dependência ponto a ponto em seus coeficientes $\omega^a(x)$, leva a uma mudança nas derivadas dos campos,

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow U(x) \partial_\mu \psi(x) + \partial_\mu U(x) \psi(x), \quad (3.13)$$

$$\partial_\mu \bar{\psi}(x) \rightarrow \partial_\mu \bar{\psi}(x) U^\dagger(x) + \bar{\psi}(x) \partial_\mu U^\dagger(x). \quad (3.14)$$

Essa mudança se mostra presente na lagrangiana transformada do sistema,

$$L' = \bar{\psi}' \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \psi', \quad (3.15)$$

uma vez que a mesma possui derivadas dos campos, ou seja,

$$\begin{aligned} L' &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (U^\dagger U) \overrightarrow{\partial}_\mu \psi - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu (U^\dagger U) \psi \\ &+ \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger \overrightarrow{\partial}_\mu U \psi - \frac{i}{2} \bar{\psi} U^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu U \psi - \bar{\psi} I m \psi, \end{aligned} \quad (3.16)$$

que pode ser reescrita como

$$L' = L + \frac{1}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu U^\dagger \overrightarrow{\partial}_\mu U \psi - \bar{\psi} U^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu U \psi \right]. \quad (3.17)$$

Mesmo com a lagrangiana L sendo invariante global pelo grupo $SU(N)$, pelo fato das derivadas $\partial_\mu \psi$, $\partial_\mu \bar{\psi}$ não serem covariantes por transformações de gauge, temos como resultado a quebra da invariância da lagrangiana. Entretanto, desejamos que a mesma seja invariante sob transformações locais. Para isso, realizamos o acoplamento mínimo, em que introduzimos um campo de conexão A_μ e assim podemos definir uma derivada

covariante, operador que deve levar à construção da lagrangiana invariante localmente com condições sobre a transformação desse campo de conexão. Definiremos a derivada covariante,

$$D_\mu \equiv I\partial_\mu - igA_\mu, \quad (3.18)$$

em que g é uma constante de acoplamento. Temos então como se transforma a derivada dos campos,

$$\begin{aligned} (D_\mu\psi)' &= (D_\mu)' \psi' = (I\partial_\mu - igA_\mu)' (U\psi) \\ &= \partial_\mu U\psi + U\partial_\mu\psi - igA'_\mu U\psi \\ &= UU^\dagger\partial_\mu U\psi + U\partial_\mu\psi - igUU^\dagger A'_\mu U\psi \\ &= U(I\partial_\mu + U^\dagger\partial_\mu U - igU^\dagger A'_\mu U)\psi \\ &= U\left[I\partial_\mu - ig\left(U^\dagger A'_\mu U + \frac{i}{g}U^\dagger\partial_\mu U\right)\right]\psi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A derivada deve ser covariante com respeito a transformação do grupo, ou seja,

$$D_\mu\psi \rightarrow UD_\mu\psi = U(I\partial_\mu - igA_\mu)\psi. \quad (3.20)$$

Com isso, podemos ver a transformação do campo de conexão A_μ , chamado então de conexão de gauge

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger. \quad (3.21)$$

Também podemos escrever a conexão de gauge na forma infinitesimal da transformação, tal que

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + i\omega^a T_a A_\mu + \omega^a T_a \omega^b A_\mu T_b - i\omega^b A_\mu T_b \\ &\quad - \frac{i}{g}\partial_\mu(i\omega^a T_a) - \frac{i}{g}\partial_\mu(i\omega^a T_a)(i\omega^b T_b). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Devemos considerar apenas os termos em primeira ordem, de modo que

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu(\omega^a T_a) + i\omega^a T_a A_\mu - i\omega^b A_\mu T_b. \quad (3.23)$$

Podemos também determinar a variação da conexão de gauge na representação da álgebra dos geradores do grupo (representação adjunta), uma vez que temos a dependência explícita dos mesmos na representação do grupo (representação fundamental) devido a

forma infinitesimal da transformação de gauge. Desta forma,

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a T_a &= \frac{1}{g} \partial_\mu (\omega^a T_a) + i\omega^a T_a A_\mu^b T_b - i\omega^b A_\mu^a T_a T_b \\ &= \frac{1}{g} \partial_\mu (\omega^a T_a) + i\omega^a A_\mu^b [T_a, T_b],\end{aligned}\quad (3.24)$$

onde usando (3.11) e manipulando os índices mudos,

$$\delta A_\mu^c T_c = \frac{1}{g} \partial_\mu (\omega^c T_c) - \omega^a f_{abc} A_\mu^b T_c. \quad (3.25)$$

Por fim, temos

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} (\delta_c^a \partial_\mu - g f_{abc} A_\mu^b) \omega^c = \frac{1}{g} (D_\mu)_c^a \omega^c, \quad (3.26)$$

em que $(D_\mu)_c^a = \delta_c^a \partial_\mu - g f_{abc} A_\mu^b$ é a derivada covariante na representação adjunta, que também pode ser escrita em forma mais simplificada,

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} (D_\mu)_b^a \omega^b = \frac{1}{g} [D_\mu \omega]^a. \quad (3.27)$$

Assim, temos que a introdução do campo de conexão na definição de uma derivada covariante, deve implicar em uma lagrangiana invariante de gauge. Dessa forma, para determinarmos a nova lagrangiana, vamos fazer a substituição da derivada usual pela derivada covariante,

$$L = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu - m \right) \psi, \quad (3.28)$$

que explicitando os termos assume a forma

$$L = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu \psi \right) - \bar{\psi} m \psi + g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi. \quad (3.29)$$

Temos então que para que a lagrangiana seja invariante localmente, precisamos adicionar um termo de interação entre os campos espinoriais e os campos de gauge. Para evidenciar essa interação, recorreremos novamente à representação adjunta, tal que

$$g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi = g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^a T_a \psi = A_\mu^a g \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi = A_\mu^a J_a^\mu, \quad (3.30)$$

em que $J_a^\mu \equiv g \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi$.

Assim como o campo eletromagnético aparece como um campo de conexão para a invariância local da lagrangiana de Dirac na simetria $U(1)$, os campos de conexão A_μ^a introduzidos no estudo da simetria $SU(N)$ constituem um tipo de teoria que tem como base esse tipo de simetria e, por consequência, elementos da teoria eletromagnética.

A partir deste ponto começamos a ver as particularidades que limitam a analogia com

as primeiras seções do capítulo 3. Para campos tipo Yang-Mills, tomamos como base a teoria eletromagnética de onde podemos escrever a tensor $F_{\mu\nu}$, porém, com as derivadas que o definem agora covariantes por consequência do processo de acoplamento mínimo,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Na representação adjunta, em que os elementos do grupo são representados por matrizes com a dimensão da álgebra, o tensor assume a forma,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.32)$$

Tal quantidade também pode ser construída através do comutador de derivadas covariantes, sendo descrito assim como uma curvatura², ou seja,

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig F_{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

No eletromagnetismo, $F_{\mu\nu}$ é uma quantidade invariante por transformações de gauge, porém, como veremos na seção seguinte, para o caso não abeliano $F_{\mu\nu}$ é uma quantidade covariante, i.e.,

$$F'_{\mu\nu} = U^\dagger F_{\mu\nu} U. \quad (3.34)$$

De posse da covariância $SU(N)$ de $F_{\mu\nu}$ podemos estabelecer a lagrangiana que mantém a ação invariante do campo de Yang-Mills livre,

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (3.35)$$

3.3 Covariância de $F_{\mu\nu}$

Na capítulo anterior, vimos a necessidade da adição de um termo de interação à lagrangiana de Dirac para N férmions, quando sob transformações locais. Como consequência, foi possível ver como se dá a lei de transformação do campo A_μ , responsável pela conexão via derivada covariante. Podemos ver como a forma da transformação de A_μ leva à covariância do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ [5]. Por conveniência fazemos isso na representação fundamental, em que os elementos do grupo tornam-se matrizes de dimensão do próprio grupo e não na representação adjunta usada acima. Começamos com a transformação de $F_{\mu\nu}$ definido com a derivada covariante,

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu - ig [A'_\mu, A'_\nu], \quad (3.36)$$

²Historicamente essa interpretação não foi concebida na publicação do artigo de Yang e Mills. Em 1954, eles buscavam generalizar a teoria de Maxwell, desconhecendo seu significado geométrico [4].

e com a transformação do campo A_μ ,

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger. \quad (3.37)$$

Vamos trabalhar a expressão (3.36) termo a termo. Aplicando a regra do produto para o primeiro termo, temos

$$\partial_\mu A'_\nu = \partial_\mu (UA_\nu) U^\dagger + UA_\nu \partial_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu \partial_\nu U) U^\dagger - \frac{i}{g} \partial_\nu U \partial_\mu U^\dagger, \quad (3.38)$$

onde podemos desprezar o termo de segunda ordem em U e usamos a diferenciação da equação $UU^\dagger = I$,

$$\partial_\mu (UU^\dagger) = 0, \quad (3.39)$$

que pode ser reescrita como

$$\partial_\mu U^\dagger = -U^\dagger \partial_\mu UU^\dagger. \quad (3.40)$$

Substituindo (3.40) em (3.38), temos

$$\partial_\mu A'_\nu = \partial_\mu (UA_\nu) U^\dagger - UA_\nu U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger + \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger. \quad (3.41)$$

Fazemos o mesmo procedimento para o segundo termo em (3.36). De modo que a diferença entre o primeiro e o segundo termo resulta em

$$\begin{aligned} \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu &= \partial_\mu (UA_\nu) U^\dagger - \partial_\nu (UA_\mu) U^\dagger + UA_\mu U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger \\ &\quad - UA_\nu U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger + \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para o terceiro termo de (3.36), temos

$$\begin{aligned} -ig [A'_\mu, A'_\nu] &= -ig UA_\mu A_\nu U^\dagger - UA_\mu U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger - (\partial_\mu U) A_\nu U^\dagger \\ &\quad + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger + ig UA_\nu A_\mu U^\dagger + UA_\nu U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger \\ &\quad + (\partial_\nu U) A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\nu U) U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Substituindo (3.42) e (3.43) em (3.36), temos que os termos com fator $\frac{i}{g}$ se cancelam. Desenvolvendo os termos do tipo $\partial(UA)$ na expressão para $F'_{\mu\nu}$, chegamos a

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= (\partial_\mu U) A_\nu U^\dagger + U \partial_\mu A_\nu U^\dagger - (\partial_\nu U) A_\mu U^\dagger - U \partial_\nu A_\mu U^\dagger \\ &\quad - ig UA_\mu A_\nu U^\dagger - (\partial_\mu U) A_\nu U^\dagger \\ &\quad + ig UA_\nu A_\mu U^\dagger + (\partial_\nu U) A_\mu U^\dagger, \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde os termos com as derivadas de U também se anulam, levando à expressão

$$F'_{\mu\nu} = U\partial_\mu A_\nu U^\dagger - U\partial_\nu A_\mu U^\dagger - igUA_\mu A_\nu U^\dagger + igUA_\nu A_\mu U^\dagger, \quad (3.45)$$

que pode ser reescrita como

$$F'_{\mu\nu} = U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - igA_\mu A_\nu + igA_\nu A_\mu)U^\dagger. \quad (3.46)$$

Assim, chegamos à covariância de $F_{\mu\nu}$,

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger. \quad (3.47)$$

3.4 Equações de Campo

Para as equações de campo, a partir do princípio de Hamilton, consideraremos a lagrangiana com termo de interação

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + g\bar{\psi}\gamma^\mu T_a \psi A_\mu^a, \quad (3.48)$$

porém, sem o termo fermiônico, pois o mesmo não contribui para as equações em A_μ^a que buscamos. Temos as equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu A_\nu^a)} - \frac{\delta L}{\delta A_\nu^a} = 0. \quad (3.49)$$

O primeiro termo em (3.49) corresponde a

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu A_\nu^a)} &= \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta F_{\alpha\beta}^b} \frac{\delta F_{\alpha\beta}^b}{\delta(\partial_\mu A_\nu^a)} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \frac{\delta F_{\sigma\lambda}^c}{\delta F_{\alpha\beta}^b} F_c^{\sigma\lambda} \frac{\delta(\partial_\alpha A_\beta^b - \partial_\beta A_\alpha^b)}{\delta(\partial_\mu A_\nu^a)} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \left(\delta_\sigma^\alpha \delta_\lambda^\beta \delta_b^c \right) F_c^{\sigma\lambda} \delta_a^b (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu F_b^{\alpha\beta} \delta_a^b (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu F_a^{\nu\mu} \\ &= -\partial_\mu F_a^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

O segundo termo em (3.48) corresponde à interação *via* acoplamento mínimo e tem dependência explícita nos campos A_μ^a , entretanto mesmo que não tratássemos da lagrangiana

com esse termo incluso as equações de campo não seriam definidas apenas por (3.50), como no caso das equações do campo eletromagnético livre. Os tensores $F_{\mu\nu}^a$ possuem dependência nos campos A_μ^a fazendo com que o segundo termo em (3.49) tenha contribuição para as equações de campo além da causada pelo termo de interação. Temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta A_\nu^a} &= \frac{\delta L}{\delta F_{\alpha\beta}^b} \frac{\delta F_{\alpha\beta}^b}{\delta A_\nu^a} + g\bar{\psi}\gamma^\mu T_b\psi \frac{\delta A_\mu^b}{\delta A_\nu^a} \\
&= -\frac{1}{2}F_b^{\alpha\beta}gf_{bcd}\frac{\delta(A_\alpha^cA_\beta^d)}{\delta A_\nu^a} + g\bar{\psi}\gamma^\mu T_b\psi\delta_\mu^\nu\delta_a^b \\
&= -\frac{1}{2}gf_{bcd}F_b^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta A_\alpha^c}{\delta A_\nu^a}A_\beta^d + A_\alpha^c\frac{\delta A_\beta^d}{\delta A_\nu^a}\right) + g\bar{\psi}\gamma^\nu T_a\psi \\
&= -\frac{1}{2}gf_{bcd}F_b^{\alpha\beta}(\delta_\alpha^\nu\delta_a^cA_\beta^d + A_\alpha^c\delta_\beta^\nu\delta_a^d) + g\bar{\psi}\gamma^\nu T_a\psi \\
&= -\frac{1}{2}gf_{bad}F_b^{\nu\beta}A_\beta^d - \frac{1}{2}gf_{bca}F_b^{\alpha\nu}A_\alpha^c + J_a^\nu \\
&= gf_{bac}A_\mu^cF_b^{\mu\nu} + J_a^\nu,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

em que J_a^ν é um termo de corrente. Assim, as equações de Euler-Lagrange resultam em

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu} + gf_{bac}A_\mu^cF_b^{\mu\nu} + J_a^\nu = 0, \tag{3.52}$$

que pode ser reescrita como

$$(\delta_b^a\partial_\mu - gf_{acb}A_\mu^c)F_a^{\mu\nu} = -J_b^\nu, \tag{3.53}$$

onde o termo entre parênteses é a derivada covariante $(D_\mu)_b^a$. Portanto,

$$[D_\mu F^{\mu\nu}]_a = -J_a^\nu. \tag{3.54}$$

As equações de campo então possuem dependência explícita nos campos A_μ^a como consequência da forma dos tensores $F_{\mu\nu}^a$, ou mais essencialmente, do caráter não abeliano do grupo $SU(N)$.

3.5 Estrutura Canônica

Nosso ponto de partida para a aplicação do método de Dirac é a construção do tensor energia-momento $H_{\mu\nu}$ para os campos de Yang-Mills, A_μ^a . Fazemos isso pois, a partir de $H_{\mu\nu}$, podemos extrair tanto os momentos quanto a hamiltoniana canônica de sua expressão

$$H_{\mu\nu} \equiv \int_\Sigma d\sigma \left[\frac{\delta L}{\delta(\partial^\mu A_a^\lambda)} \partial_\nu A_a^\lambda - \eta_{\mu\nu} L \right], \tag{3.55}$$

onde o primeiro termo do integrando já foi calculado para a obtenção das equações de campo na seção (3.4), sendo igual a $F_{\lambda\mu}^a$. $H_{\mu\nu}$ então pode ser escrito

$$H_{\mu\nu} = \int_{\Sigma} d\sigma \left[F_{\lambda\mu}^a \partial_{\nu} A_a^{\lambda} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} \right]. \quad (3.56)$$

A função hamiltoniana H corresponde à componente H_{00} do tensor energia-momento, logo

$$H \equiv H_{00} = \int_{\Sigma} d\sigma \left[F_{\lambda 0}^a \dot{A}_a^{\lambda} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} \right], \quad (3.57)$$

de onde vemos que

$$\pi_a^{\lambda} = F_a^{\lambda 0} \quad (3.58)$$

são os momentos conjugados às “velocidades” \dot{A}_{λ}^a . Entretanto, podemos observar que $\pi_a^0 = F_a^{00} = 0$, devido às diagonais nulas na definição do tensor $F_{\mu\nu}^a$, estabelecendo vínculos primários

$$\phi_a^0 \equiv \pi_a^0 \approx 0. \quad (3.59)$$

As demais componentes são inversíveis,

$$\begin{aligned} \pi_a^i &= F_a^{i0} = \partial^i A_a^0 - \dot{A}_a^i + g f_a^{bc} \dot{A}_b A_c^0 \\ &= (\delta_c^i \partial^i - g f_a^{cb} A_b^i) A_c^0 - \dot{A}_a^i \\ &= (D^i)_a^c A_c^0 - \dot{A}_a^i \\ &= [D^i A^0]_a - \dot{A}_a^i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{A}_i^a = [D_i A_0]^a - \pi_i^a. \quad (3.60)$$

Voltemos a (3.57) para construirmos a hamiltoniana canônica. Nela, não teremos velocidades \dot{A}_0^a , de modo que

$$\begin{aligned} H &= \int_{\Sigma} d\sigma \left[F_{i0}^a \dot{A}_a^i + \frac{1}{2} F_{i0}^a F_a^{i0} + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} \right] \\ &= \int_{\Sigma} d\sigma \left[\pi_i^a [D^i A^0]_a - \pi_i^a \pi_a^i + \frac{1}{2} \pi_i^a \pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} \right] \\ &= \int_{\Sigma} d\sigma \left[\pi_i^a [D^i A^0]_a - \frac{1}{2} \pi_i^a \pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

de onde podemos escrever o primeiro termo como

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} d\sigma \pi_i^a [D^i A^0]_a &= \int_{\Sigma} d\sigma (\pi_i^a \partial^i A_a^0 + g f_a^{bc} \pi_i^a A_b^i A_c^0) \\
&= \int_{\Sigma} d\sigma [\partial^i (\pi_i^a A_a^0) - \partial^i \pi_i^a A_a^0 + g f_a^{bc} \pi_i^a A_b^i A_c^0] \\
&= \int_{\Sigma} d\sigma [\partial^i (\pi_i^a A_a^0) - (\delta_a^c \partial^i - g f_a^{bc} A_b^i) \pi_i^a A_c^0] \\
&= \int_{\Sigma} d\sigma [\partial^i (\pi_i^a A_a^0) - [D^i \pi_i]^a A_a^0]. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

A integral $\int_{\Sigma} d\sigma \partial^i (\pi_i^a A_a^0)$ em (3.62) corresponde a um termo de fronteira, com isso,

$$\int_{\Sigma} d\sigma \pi_i^a [D^i A^0]_a = - \int_{\Sigma} d\sigma [D^i \pi_i]^a A_a^0. \tag{3.63}$$

Substituindo (3.63) em (3.61), temos definida de forma conveniente a hamiltoniana canônica

$$H = \int_{\Sigma} d\sigma \left[-\frac{1}{2} \pi_i^a \pi_a^i - [D^i \pi_i]^a A_a^0 + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} \right]. \tag{3.64}$$

De posse da hamiltoniana canônica podemos definir a hamiltoniana primária H_P ,

$$H_P = H + \int_{\Sigma} d\sigma_x \lambda_0^a(x) \phi_a^0(x), \tag{3.65}$$

onde λ_0^a são as funções multiplicadoras de Lagrange. Portanto, para a dinâmica de uma função $F(x)$ do espaço de fase, teremos

$$\dot{F}(x) = \{F(x), H_P\} \approx \{F(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda_0^a(y) \{F(x), \phi_a^0(y)\}. \tag{3.66}$$

Os parênteses de Poisson fundamentais são dados por

$$\{A_{\mu}^a(x), A_{\nu}^b(y)\} = 0, \tag{3.67}$$

$$\{\pi_a^{\mu}(x), \pi_b^{\nu}(y)\} = 0, \tag{3.68}$$

$$\{A_{\mu}^a(x), \pi_b^{\nu}(y)\} = \delta_{\mu}^{\nu} \delta_b^a \delta(x-y), \tag{3.69}$$

em que $\delta(x-y)$ representa a delta de Dirac tridimensional. Então, aplicamos as condições de consistência para ϕ_a^0 ,

$$\dot{\phi}_a^0(x) = \{\phi_a^0(x), H_P\} \approx \{\phi_a^0(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda_0^b(y) \{\phi_a^0(x), \phi_b^0(y)\} \approx 0. \tag{3.70}$$

Podemos observar que $\{\phi_a^0(x), \phi_b^0(y)\} = \{\pi_a^0(x), \pi_b^0(y)\} = 0$ a partir dos parênteses fundamentais. Sendo assim, teremos em (3.70) apenas os parênteses de Poisson entre ϕ_a^0

e a hamiltoniana canônica,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a^0(x) &\approx \{\phi_a^0(x), H\} \\ &\approx \int_{\Sigma} d\sigma_y \left\{ \pi_a^0(x), -\frac{1}{2}\pi_i^b(y)\pi_b^i(y) - [D_y^i\pi_i(y)]^b A_b^0(y) + \frac{1}{4}F_{ij}^b(y)F_b^{ij}(y) \right\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Novamente, como consequência dos parênteses fundamentais, também não temos contribuição tanto do termo $\pi_i^b\pi_b^i$ quanto do termo $F_{ij}^bF_b^{ij}$ da hamiltoniana canônica para a evolução temporal dos vínculos ϕ_a^0 . O primeiro, por ser puramente descrito em termos dos momentos, e o segundo, por possuir dependência apenas espacial nos campos A_i^a . Portanto,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a^0(x) &\approx - \int_{\Sigma} d\sigma_y \left\{ \pi_a^0(x), [D_y^i\pi_i(y)]^b A_b^0(y) \right\} \\ &= - \int_{\Sigma} d\sigma_y [D_y^i\pi_i(y)]^b \left\{ \pi_a^0(x), A_b^0(y) \right\} \\ &= \int_{\Sigma} d\sigma_y [D_y^i\pi_i(y)]^b \eta_{ab}\delta(y-x) \\ &= [D_x^i\pi_i(x)]_a. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Podemos ver que das condições de consistência para os vínculos primários foram gerados vínculos secundários,

$$\phi_a^1 \equiv [D^i\pi_i]_a \approx 0. \quad (3.73)$$

Então, aplicamos novamente as condições, agora sobre $\phi_a^1(x)$,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a^1(x) &\approx \{\phi_a^1(x), H_P\} \\ &= \{\phi_a^1(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda_0^b(y) \{\phi_a^1(x), \phi_b^0(y)\} \\ &= \{[D_x^i\pi_i(x)]_a, H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda_0^b(y) \{[D_x^i\pi_i(x)]_a, \pi_b^0(y)\} \approx 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Mesmo tendo as derivadas covariantes nos parênteses definidos pelos vínculos, eles resultam nulos pelo fato das derivadas covariantes serem constituídas das derivadas usuais e dos próprios campos, apenas em suas componentes espaciais. Entretanto, com a hamiltoniana canônica haverão parênteses não nulos. Separaremos esse cálculo pela regra de produto dos parênteses de Poisson dos vínculos com a hamiltoniana,

$$\dot{\phi}_a^1(x) \approx \left\{ (D_x^i)_a^b, H \right\} \pi_{ib}(x) + (D_x^i)_a^b \left\{ \pi_{ib}(x), H \right\}. \quad (3.75)$$

Por conveniência é possível calcular essas condições omitindo as integrais e pontos sem que haja grande perda de generalidade. Começando por $\{(D^i)_a^b, H\}$, temos

$$\{(D^i)_a^b, H\} = -\{(D^i)_a^b, \pi_j^c\} \pi_c^j - (D^j)_d^c \{(D^i)_a^b, \pi_j^d\} A_c^0, \quad (3.76)$$

na qual as derivadas covariantes têm parênteses não nulos com as componentes dos momentos, porém nulos com a parcela em F_{jk}^c . Para os primeiros parênteses em (3.76), temos que

$$\{(D^i)_a^b, \pi_j^c\} = -gf_a^{bd} \{A_d^i, \pi_j^c\} = -gf_a^{bd} \delta_j^i \delta_d^c = -gf_a^{bc} \delta_j^i, \quad (3.77)$$

de modo que a expressão completa é dada por

$$\{(D^i)_a^b, H\} = gf_a^{bc} \pi_c^i + gf_a^{bd} (D^i)_d^c A_c^0. \quad (3.78)$$

Vamos agora calcular o termo $\{\pi_{ib}, H\}$. Podemos observar que, nesse caso, os parênteses não nulos com a hamiltoniana ocorrerão com as derivadas covariantes e com os tensores F_{jk}^c , que contêm tanto as derivadas usuais quanto as próprias componentes espaciais dos campos. Assim,

$$\{\pi_{ib}, H\} = -\{\pi_{ib}, (D^j)_d^c\} \pi_j^d A_c^0 + \frac{1}{2} \{\pi_{ib}, F_c^{jk}\} F_{jk}^c. \quad (3.79)$$

Novamente vamos separar a expressão, primeiro com $\{\pi_{ib}, (D^j)_d^c\}$,

$$\{\pi_{ib}, (D^j)_d^c\} = -gf_d^{ce} \{\pi_{ib}, A_e^j\} = gf_d^{ce} \delta_i^j \delta_{eb},$$

e, então, com $\{\pi_{ib}, F_c^{jk}\}$, aqui existem parcelas não nulas com todos os elementos de F_c^{jk} ,

$$\begin{aligned} \{\pi_{ib}, F_c^{jk}\} &= \{\pi_{ib}, \partial^j A_c^k - \partial^k A_c^j + gf_c^{de} A_d^j A_e^k\} \\ &= \partial^j \{\pi_{ib}, A_c^k\} - \partial^k \{\pi_{ib}, A_c^j\} + gf_c^{de} \{\pi_{ib}, A_d^j\} A_e^k + gf_c^{de} \{\pi_{ib}, A_e^k\} A_d^j \\ &= -\partial^j \delta_i^k \delta_{cb} + \partial^k \delta_i^j \delta_{cb} - gf_c^{de} \delta_i^j \delta_{db} A_e^k - gf_c^{de} \delta_i^k \delta_{eb} A_d^j \\ &= -(\delta_{cb} \partial^j + gf_{cb}^d A_d^j) \delta_i^k + (\delta_{cb} \partial^k - gf_{cb}^e A_e^k) \delta_i^j \\ &= -(D^j)_{bc} \delta_i^k + (D^k)_{bc} \delta_i^j, \end{aligned} \quad (3.80)$$

com $\{\pi_{ib}, H\}$ resultando em

$$\begin{aligned} \{\pi_{ib}, H\} &= -gf_d^{ce} \delta_i^j \delta_{eb} \pi_j^d A_c^0 - \frac{1}{2} (D^j)_{bc} \delta_i^k F_{jk}^c + \frac{1}{2} (D^k)_{bc} \delta_i^j F_{jk}^c \\ &= -gf_{db}^c \pi_i^d A_c^0 - \frac{1}{2} (D^j)_{bc} F_{ji}^c - \frac{1}{2} (D^k)_{bc} F_{ki}^c \\ &= -gf_{db}^c \pi_i^d A_c^0 - [D^j F_{ji}]_b. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Substituindo os parênteses (3.78) e (3.81) na evolução temporal dos vínculos secundários (3.75), temos

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_a^1 &\approx [gf_a^{bc}\pi_c^i + gf_a^{bd}(D^i)_d A_c^0] \pi_{ib} + (D^i)_a^b [-gf_{db}^c \pi_i^d A_c^0 - [D^j F_{ji}]_b] \\
&= gf_a^{bc}\pi_c^i \pi_{ib} + gf_a^{bd}(D^i)_d A_c^0 \pi_{ib} - gf_{db}^c (D^i)_a^b (\pi_i^d A_c^0) - (D^i)_a^b [D^j F_{ji}]_b \\
&= -[D^i D^j F_{ji}]_a + gf_a^{bc}\pi_c^i \pi_{ib} + gf_a^{bd}(D^i)_d A_c^0 \pi_{ib} - gf_{db}^c (D^i)_a^b (\pi_i^d A_c^0), \quad (3.82)
\end{aligned}$$

em que $[D^i D^j F_{ji}]_a$ é nulo pelas identidades de Bianchi generalizadas bem como $gf_a^{bc}\pi_c^i \pi_{ib}$ pela antissimetria das constantes de estrutura. Ao desenvolver as derivadas covariantes,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_a^1 &\approx gf_a^{bd} (\delta_d^c \partial^i - gf_d^{ce} A_e^i) A_c^0 \pi_{ib} - gf_{db}^c (\delta_a^b \partial^i - gf_a^{be} A_e^i) (\pi_i^d A_c^0) \\
&= gf_a^{bc} \partial^i A_c^0 \pi_{ib} - gf_{da}^c \partial^i \pi_i^d A_c^0 - gf_{da}^c \partial^i A_c^0 \pi_i^d - g^2 f^{bd} f_d^{ce} A_e^i A_c^0 \pi_{ib} + g^2 f_{db}^c f_a^{be} A_e^i \pi_i^d A_c^0 \\
&= -gf_{da}^c \partial^i \pi_i^d A_c^0 - g^2 f_{da}^b f_b^{ce} A_e^i A_c^0 \pi_i^d + g^2 f_{db}^c f_a^{be} A_e^i \pi_i^d A_c^0, \quad (3.83)
\end{aligned}$$

o produto $A_e^i \pi_i^d A_c^0$ aparece em evidência após manipulação devida de índices relacionando as parcelas quadráticas em g ,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_a^1 &\approx -gf_{da}^c \partial^i \pi_i^d A_c^0 - g^2 (f_{da}^b f_b^{ce} - f_{db}^c f_a^{be}) A_e^i \pi_i^d A_c^0 \\
&= -gf_{da}^c \partial^i \pi_i^d A_c^0 + g^2 (f^{bad} f^{cbe} + f^{cbd} f^{bea}) A_e^i \pi_i^d A_c^0 \quad (3.84)
\end{aligned}$$

em que podemos observar a identidade de Jacobi com as constantes de estrutura. Assim,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_a^1 &\approx -gf_{da}^c \partial^i \pi_i^d A_c^0 + g^2 (-f^{cba} f^{bde}) A_e^i \pi_i^d A_c^0 \\
&= gf^{bca} (\delta_d^b \partial^i - gf^{bed} A_e^i) \pi_i^d A_c^0 \\
&= gf_a^{bc} A_c^0 [D^i \pi_i]_b \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que não há mais vínculos gerados e temos apenas dois conjuntos de vínculos, $\phi_a^0 \equiv \pi_a^0 \approx 0$ e $\phi_a^1 \equiv [D^i \pi_i]_a \approx 0$, ambos de primeira classe pois têm parênteses de Poisson nulos entre si.

3.6 Gauge de Coulomb Não Abeliano

Com os vínculos encontrados construímos a hamiltoniana total,

$$H_T = H + \int_{\Sigma} d\sigma_x [\lambda_0^a(x) \phi_a^0(x) + \lambda_1^a(x) \phi_a^1(x)], \quad (3.85)$$

com multiplicadores a determinar. No caso do campo eletromagnético, fizemos uso das equações de campo de modo a atingir as condições de Coulomb. Outra tentativa seria

considerarmos um gauge de Coulomb como atingível de modo a modificarmos o conjunto de vínculos, ou seja, fazemos a fixação de gauge a partir do que conhecemos da teoria eletromagnética, que é uma teoria de Yang-Mills com $f_{abc} = 0$. Para isso, supomos uma condição de Coulomb não abeliana

$$\phi_a^2 \equiv \partial_i A_a^i \approx 0, \quad (3.86)$$

e vemos sua evolução temporal. Essa etapa no caso do eletromagnetismo formava a condição auxiliar $A_0 \approx 0$. Assim,

$$\dot{\phi}_a^2(x) = \{ \partial_i^x A_a^i(x), H \}, \quad (3.87)$$

de onde vemos que são formados parênteses nulos com F_{jk}^c da hamiltoniana canônica,

$$\dot{\phi}_a^2(x) = \int_{\Sigma} d\sigma_y \left(-\partial_i^x \{ A_a^i(x), \pi_j^b(y) \} \pi_b^j(y) - \partial_i^x (D_y^j)_c^b \{ A_a^i(x), \pi_j^c(y) \} A_b^0(y) \right) \quad (3.88)$$

e usando os parênteses fundamentais,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_a^2(x) &= -\partial_i^x \int_{\Sigma} d\sigma_y \delta_j^i \delta_a^b \delta(x-y) \pi_b^j(y) - \partial_i^x \int_{\Sigma} d\sigma_y (D_y^j)_c^b \delta_j^i \delta_a^c \delta(x-y) A_b^0(y) \\ &= -\partial_i^x \left(\pi_a^i(x) - [D^i A^0(x)]_a \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Para que ϕ_a^2 seja de fato um vínculo, sua evolução temporal deve resultar fracamente nula, i.e.,

$$\partial_i D_{ab}^i A_0^b \approx -\partial_i \pi_a^i. \quad (3.90)$$

No caso abeliano temos $\partial_i \pi^i \approx 0$, o que fixa totalmente o gauge com a condição complementar $A_0 \approx 0$ como visto no campo eletromagnético livre. Como estamos interpretando teorias não abelianas, em (3.90) podemos definir uma matriz C , tal que

$$C_{ab} \equiv \partial_i D_{ab}^i, \quad (3.91)$$

onde A_0^b tem solução no caso em que C_{ab} possuir determinante não nulo. Supondo essa possibilidade existe uma matriz inversa, que definimos por H , satisfazendo a

$$C_{ab}(x) H^{bc}(x, y) = \delta_a^c \delta(x-y), \quad (3.92)$$

de modo que podemos determinar uma forma geral de solução para A_a^0 ,

$$A_a^0(x) = [A_a^0(y)]_h - \int_{\Sigma} d\sigma_y H_{ab}(x, y) \partial_y^i \pi_i^b(y), \quad (3.93)$$

onde $[A_a^0(y)]_h$ é a solução da equação homogênea para (3.90), ou seja, $C_{ab}[A_0^a(y)]_h = 0$. A menos dessa solução, a condição complementar à condição de Coulomb é dada por

$$\phi_a^3 \equiv A_a^0 + h_a \approx 0, \quad (3.94)$$

com $h_a \equiv \int_{\Sigma} d\sigma_y H_{ab}(x, y) \partial_y^i \pi_i^b(y)$. Se houvesse solução única para H , o gauge seria completamente fixado, porém em teorias de gauge não abelianas C_{ab} é singular, o que impossibilita a existência da inversa H , e conseqüentemente, h_a . Além disso, supondo a existência da inversa H temos o conjunto de vínculos

$$\begin{aligned} \phi_a^0 &\equiv \pi_a^0 \approx 0 \\ \phi_a^1 &\equiv [D^i \pi_i]_a \approx 0 \\ \phi_a^2 &\equiv \partial_i A_a^i \approx 0 \\ \phi_a^3 &\equiv A_a^0 + h_a \approx 0, \end{aligned} \quad (3.95)$$

que definem a hamiltoniana estendida

$$H_E = H + \int_{\Sigma} d\sigma_x \lambda_r^a(x) \phi_a^r(x), \quad (3.96)$$

com $r = 0, 1, 2, 3$, e condições sobre esse novo conjunto de vínculos,

$$\dot{\phi}_a^r(x) \approx \{\phi_a^r(x), H\} + \int_{\Sigma} d\sigma_y \lambda_s^b(y) \{\phi_a^r(x), \phi_b^s(y)\} \approx 0. \quad (3.97)$$

Então, de acordo com o método, construímos a matriz dos parênteses de Poisson entre os vínculos, $\{\phi_a^r(x), \phi_b^s(y)\}$, no intuito de encontrarmos condições sobre os multiplicadores. Como teríamos a hamiltoniana estendida definida e sendo geradora da dinâmica, isso nos permitiria construir os parênteses de Dirac da teoria. Entretanto temos, por exemplo, os parênteses

$$\begin{aligned} \{\phi_a^1(x), \phi_b^2(y)\} &= \{[D_x^i \pi_i]_a, \partial_j^y A_b^j(y)\} \\ &= \partial_j^y (D_x^i)_a^c \{\pi_c^i(x), A_b^j(y)\} \\ &= \partial_j^y (D_x^i)_a^c \eta^{ij} \eta_{cb} \delta(x - y) \\ &= \partial_i^x (D_y^i)_{ab} \delta(x - y), \end{aligned} \quad (3.98)$$

que correspondem justamente a C_{ab} , que desconhecemos. Portanto, vemos a impossibilidade da determinação da inversa da matriz dos parênteses entre os vínculos, e conseqüentemente, da definição dos parênteses de Dirac para essas teorias.

Uma abordagem para esse problema foi dada por Gribov [6], que para a quantização da teoria adotou o caminho da integração funcional através do procedimento de Faddeev-

Popov [7]. Contudo, esse processo leva às chamadas cópias de Gribov, que correspondem a configurações equivalentes de campos que satisfazem a mesma condição de gauge. Mesma condição porque o funcional de amplitude de transição obtido com a escolha do gauge de Coulomb tem análogo covariante com a escolha do gauge de Lorenz $\partial_\mu A_\mu^\alpha \approx 0$ por exemplo, o que implica em uma ambiguidade na definição do gauge, retratada a partir da singularidade de C_{ab} . Dada a singularidade de C_{ab} , o método de Dirac para teorias não abelianas tem uma limitação estabelecida. Entretanto, esse é um problema ainda em aberto para teorias de Yang-Mills, pois esse quadro se formou ao considerarmos uma condição de Coulomb não abeliana, tomando como base a teoria eletromagnética, porém que não levou a uma condição auxiliar definida e que possui ambiguidade com outras escolhas de gauge.

Referências Bibliográficas

- [1] YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, v. 96, n. 1, 1954.
- [2] FADDEEV, L.D.; SLAVNOV, A. A. *Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory*. Massachusetts: The Benjamin\Cummings Publishing Co., Inc, 1980.
- [3] HOOFT, G.'t. *50 Years of Yang-Mills Theory*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2005.
- [4] YANG, C. N. *Selected Papers (1945-1980) with Commentary*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2005.
- [5] MARATECK, S. L. Yang-Mills and Beyond. *Notices of the AMS*, v. 59, n. 6, 2012.
- [6] GRIBOV, V. N. Quantization of non-abelian gauge theories. *Nuclear Physics B*, v. 139, p. 1-19, 1978.
- [7] FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Physics Letters*, v. 25B, n. 1, p. 29-30, 1967.

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos o método de Dirac para sistemas hamiltonianos vinculados, em particular com o objetivo principal de aplicá-lo em teorias de gauge não abelianas. No primeiro capítulo, mostramos que, mesmo para sistemas mecânicos simples, o método se apresenta como uma ferramenta poderosa para uma melhor compreensão desses sistemas. Além disso, foi possível ver como diferentes abordagens sobre um mesmo problema levam a diferentes resultados sob o ponto de vista hamiltoniano para o caso vinculado, como para a partícula livre relativística.

No segundo capítulo, discutimos a simetria de gauge $U(1)$, que mostra a presença do campo eletromagnético em um termo de interação com o campo espinorial, quando impomos uma lagrangiana invariante localmente e aplicamos o formalismo para ambos os setores lagrangianos. Para o campo espinorial, obtivemos uma equivalência entre os parênteses de Dirac e os parênteses de Grassmann, o que indica que a análise da estrutura canônica não traz maiores implicações para esse estudo. Para o campo eletromagnético livre, tivemos inicialmente um conjunto de vínculos de primeira classe e evidenciamos a liberdade de gauge da teoria. Através da fixação do gauge de Coulomb formamos um novo conjunto, de segunda classe, que revela os verdadeiros graus de liberdade da teoria sendo as componentes transversais dos campos e momentos.

Por fim, estudamos a simetria $SU(N)$ que origina os campos de Yang-Mills e a aplicação do método de Dirac para teorias não abelianas. Novamente, como no caso eletromagnético, tivemos inicialmente um conjunto de vínculos de primeira classe, entretanto, a fixação de gauge não se mostra trivial devido a impossibilidade de obtenção da condição auxiliar do gauge de Coulomb. Isso se manifesta no problema da não inversão da matriz C , que evidencia a escolha do gauge de Coulomb como inviável para essas teorias.

O problema da escolha de gauge, discutido no último capítulo, é um problema em aberto na física há bastante tempo. À Faddeev e Popov são atribuídos os principais avanços iniciais na tentativa de resolução desse problema. Como a quantização canônica usual não é possível devido à indeterminação das funções multiplicadoras e não é possível realizar uma fixação de gauge, o caminho adotado por Faddeev e Popov foi o da quantização via integração funcional com um procedimento que leva o nome dos mesmos. Posteriormente, Gribov abordou o mesmo problema apresentando resultados importantes, porém a questão de gauges incompatíveis no método se manifesta também essencialmente com as

cópias de Gribov. Apesar deste ser o caminho normalmente seguido no estudo da quantização de teorias não abelianas, existe uma alternativa de estudo, ainda no formalismo hamiltoniano, que se refere à conjectura apresentada por Dirac.

Em sua obra "Lectures on Quantum Mechanics" [1], Dirac estabelece que vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações que não alteram o estado físico do sistema. Considera que é possível que algum vínculo secundário exerça o mesmo papel e, mais ainda, que todos os vínculos secundários deveriam ser levados em conta para tais transformações. Essas afirmativas posteriormente passaram a ser tratadas na literatura pelo termo "conjectura de Dirac". Desde então, a maioria dos autores "clássicos" que abordam o método tem apoiado as afirmativas de Dirac. Porém, alguns autores divergem quanto ao seu ponto de vista. Alguns baseiam seus argumentos no próprio formalismo canônico [2], enquanto outros se baseiam em argumentos de consistência com resultados obtidos para exemplos já bem estabelecidos, como na teoria eletromagnética [3]. Em um trabalho recente, Pitts [3] defende a ideia de que, no caso do eletromagnetismo, os vínculos de primeira classe seriam apenas parte do gerador das transformações. Em seu trabalho, ele indica que Anderson e Bergmann [4] já deram indícios de que isso ocorreria e que Pons [2] a tratou como uma interpretação incompleta apresentada. Pitts ainda indica que, tanto os vínculos primários de primeira classe quanto os secundários de primeira classe, além de serem apenas parte do gerador correspondem, no caso do eletromagnetismo, a uma má mudança física (contradizendo a ideia de que não ocorreria uma mudança física e sim uma transformação interna aos campos) no sentido de violar a lei de Gauss (de fato, ao adicionar o gauge de Coulomb a lei de Gauss se apresenta com uma arbitrariedade, e nesse sentido haveria uma mudança física no sistema). Ele também discute situação semelhante na relatividade geral, porém de modo menos trivial na comparação pelo fato da teoria ser de maior complexidade interpretativa.

Assim, mais do que uma grande dificuldade de compreensão a literatura apresenta divergências mesmo quanto à concepção da conjectura. Nesse intuito, destacamos como principais perspectivas futuras a este trabalho o seguimento do roteiro de Gribov para a quantização de teorias não abelianas e uma investigação profunda da discussão na literatura referente a conjectura de Dirac.

Referências Bibliográficas

- [1] DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Dover Publications, Inc., 2001.
- [2] PONS, J. M. On Dirac's incomplete analysis of gauge transformations. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, v. 36, n. 3, p. 491-518, 2005.
- [3] PITTS, J. B. A First Class Constraint Generates not a Gauge Transformation, but a bad Physical Change: The Case of Electromagnetism. *Annals of Physics*, v. 351, p. 382-406, 2014.
- [4] ANDERSON, J. L.; BERGMANN, P. G. Constraints in Covariant Field Theories. *Physical Review*, v. 83, n. 5, p. 1018, 1951.