



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Jorge Ferreira Dantas Junior

**APLICAÇÃO DA ESTATÍSTICA MEDIANA NA
RESTRICÇÃO DE PARÂMETROS
COSMOLÓGICOS**

Salvador-BA

2015

JORGE FERREIRA DANTAS JUNIOR

**APLICAÇÃO DA ESTATÍSTICA MEDIANA NA RESTRIÇÃO DE
PARÂMETROS COSMOLÓGICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pesquisa e Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

SALVADOR-BA
2015

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Dantas Junior, Jorge Ferreira.

Aplicação da estatística mediana na restrição de parâmetros cosmológicos / Jorge Ferreira
Dantas Junior. - 2016.
76 f.: il.

Inclui anexos.

Orientador: Prof. Dr. Cássio Bruno Magalhães Pigozzo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Salvador, 2015.

1. Estatística. 2. Supernovas. 3. Cosmologia. I. Pigozzo, Cássio Bruno Magalhães.
II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física. III. Título.

CDD - 519.5
CDU - 519.22

JORGE FERREIRA DANTAS JUNIOR

**APLICAÇÃO DA ESTATÍSTICA MEDIANA NA
RESTRICÇÃO DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS**

Salvador-BA, 31/08/2015

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva
UFBA

Prof. Dr. Raimundo Muniz Teixeira Filho
UFBA

Prof. Dr. André Luis Batista Ribeiro
UESC

*Aos meus filhos,
a minha mãe, meu pai(em memória),
irmã
e a Mariana, amor da minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que, de forma direta ou indireta, fizeram parte deste processo, que culminou na realização de mais um sonho.

Agradeço a Deus e aos meus guias espirituais, minha mãe Oxum, meu pai Ogum a Cigana e Tranca Rua das Almas. Que sempre estão ao meu lado, orientando e protegendo-me de todo infortúnio.

À minha família, ao meu saudoso e querido pai(em memória) e a minha querida mãe que sempre foi a minha inspiração acadêmica e por suas orações. Aos meus filhos Jorge Dantas Neto e Guilherme Dantas, luzes da minha vida. À minha doce esposa Mariana Fernandes, por proporcionar-me a alegria e felicidade de fazer parte da minha vida, sendo meu alicerce e principal incentivadora para as minhas realizações acadêmicas. A minha sogra Dona Nalva pelo apoio, carinho e principalmente pelas orações feitas, para que eu pudesse terminar o mais rápido possível esta dissertação. Ao meu primo e amigo, Orlando Vicente, pelo apoio, horas de conversa e reflexão sobre diversos assuntos.

Ao meu querido Babalorisá e amigo Luiz Henrique, por me ter apresentado a espiritualidade de forma tão linda e verdadeira; por todo incentivo, apoio, intelectualidade e luz espiritual. Obrigado por fazer parte de nossas vidas.

A Cássio Pigozzo, por aceitar a tarefa de orientar-me, acreditando em meu potencial. Pela confiança, parceria e compreensão. Além disso, do excelente profissional que é.

A professora Maria das Graças pelo apoio em viabilizar a defesa deste trabalho, pois sem o seu empenho e sensibilidade, seria mais difícil a realização deste sonho.

Aos meu amigos e colegas do Instituto de Física, Érico Figueiredo, Leandro Sodré, Lafayette Lins, João Humberto, Carla Sena, Vitor Damião, Alessandro Barros, Harlilton Jonas, Éric Pinto, Antônio Pires(Seu Antônio), Humberto Borges, Daniel Abreu, Jorge Nunes(Bocão), Pedro Teodoro e aos demais colegas do curso de pós-graduação em Física. Ao grande amigo e colega de trabalho Flávio de Jesus pelo o grande apoio que me deu, principalmente no que diz respeito as dificuldades encontradas neste trabalho. Aos colegas professores, funcionários e gestores do IFBA - Campus Eunápolis, por todo o apoio e compreensão, possibilitando a realização desse mestrado. Agradeço em especial, ao colega e amigo, Fabíolo Amaral, pelo apoio e incentivo a mim e a todos que lutam por uma carreira acadêmica.

Ao Colegiado da Pós-Graduação em Física da UFBA por toda a atenção, cuidado e respeito aos alunos.

À CAPES pela bolsa de estudos.

*"Agradeço todas as dificuldades que enfrentei;
não fosse por elas, eu não teria saído do lugar.
As facilidades nos impedem de caminhar.
Mesmo as críticas nos auxiliam muito."
(Chico Xavier)*

RESUMO

A Cosmologia Observacional baseia-se nos dados coletados, na análise estatística e em um modelo cosmológico teórico adotado. No que se refere ao tratamento dos dados observados, a principal ferramenta utilizada é a Inferência Bayesiana. Dos trabalhos citados nesta dissertação, a maioria utiliza o método conhecido como Estatística χ^2 para a obtenção de parâmetros cosmológicos. No entanto, alguns estudos surgiram com propostas paralelas para a análise dos dados, dentre elas, a utilização do método da Estatística Mediana (GOTTIII et al., 2001).

Nesta dissertação, estudamos a eficácia do método proposto (Estatística Mediana) aplicado aos modelos cosmológicos Λ CDM, x CDM e $\Lambda(t)$ CDM, tomando como referência a Análise Estatística χ^2 . Para isso, utilizamos 580 dados de Supernovas Tipo Ia (SNe Ia), extraídos do Union2.1 (SUZUKI et al., 2012). Os ajustes foram feitos na magnitude, aplicando os métodos da estatística mediana e análise χ^2 , para em seguida, compararmos os resultados obtidos. Com o intuito de aprimorar os parâmetros estudados, combinamos os resultados com a SNe Ia aos dados observacionais da oscilação acústica de bárions e a radiação cósmica de fundo.

Para evitarmos resultados discrepantes, utilizamos a sugestão feita por Avelino et al. (2002) e separamos as 580 SNe Ia em grupos menores. Com uma pequena modificação no método feita por nós, verificamos uma melhora sensível na análise dos dados.

Apesar dos nossos estudos indicarem a análise χ^2 como o mais restrito, os resultados obtidos com a estatística mediana mostram-se uma alternativa confiável na restrição de parâmetros cosmológicos. Pois, são necessários menos pressupostos em relação aos dados coletados em comparação com a estatística χ^2 .

Palavras-chave: Supernova Tipo Ia. Estatística Mediana. Estatística χ^2 .

ABSTRACT

The Observational Cosmology is based on data collected in statistical analysis and theoretical cosmological model adopted. As regards the processing of observed data, the main tool used is the Bayesian inference. The work cited in this paper, most use the method known as statistic χ^2 to obtain cosmological parameters. However, some studies have arisen as parallel proposals for data analysis, among them, the use of the statistical method Median (GOTTIII et al., 2001).

As regards the processing of the observed data, Bayesian statistics is used as the main tool. However, the work of Riess et al. (1998), proving the acceleration of the universe, some studies have emerged as parallel proposals for data analysis, among them the use of the Statistical Median method (GOTTIII et al., 2001).

In this dissertation, we study the effectiveness of the proposed method (Statistics Median) applied to cosmological models Λ CDM, x CDM and $\Lambda(t)$ CDM with reference to the Statistical Analysis χ^2 . For this, we use 580 Data Type Ia supernovae (SNe Ia), extracted from Union2.1 (SUZUKI et al., 2012). Adjustments were made in magnitude by applying the methods of statistical median and analysis χ^2 , to then compare the results. In order to improve the parameters studied, we combined the results with the SNe Ia to observational data of the acoustic oscillation of baryons and the cosmic microwave background.

To avoid conflicting results, we use the suggestion made by Avelino et al. (2002) and separate the SNe Ia in 580 minor groups. With a small change in method made by us, we see a significant improvement in data analysis.

Despite our studies indicate the analysis χ^2 as the narrower, the results obtained with the statistical median are shown a reliable alternative in restraining cosmological parameters. Therefore, it takes fewer assumptions regarding the data collected compared with the analysis χ^2 .

Keywords: Type Ia Supernovae. Statistical Median. Statistical χ^2 .

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama apresentado por E. Hubble em 1929. A linha contínua é a melhor reta que corresponde a medidas de velocidade e distância de galáxias individuais (círculos cheios); a linha tracejada corresponde às combinações das galáxias em grupo (círculos vazados). Note que o eixo vertical do gráfico atualmente dado por $cz = v$ ao invés de z – observa-se o erro acidental cometido por Hubble ao colocar "km" e não "km/s".(KIRSHNER, 2004) . .	7
Figura 3.1 – Gráfico que demonstra uma classe de modelos que contém matéria (sem pressão), constante cosmológica e curvatura.	30
Figura 4.1 – Ilustração de pontos acima ou abaixo da curva teórica.	41
Figura 4.2 – Ilustração das possíveis distribuições dos pontos acima ou abaixo da curva teórica.	42
Figura 4.3 – Ilustração da distribuição de pontos acima ou abaixo da curva teórica.	43
Figura 4.4 – Método proposto por Avelino et al. (2002).	43
Figura 4.5 – Método proposto em nosso trabalho.	43
Figura 5.1 – Módulo da distância(μ) em função do redshift(z) para as 580 SNe Ia do catálogo <i>Union 2.1</i>	45
Figura 5.2 – Curvas de nível 1σ , 2σ e 3σ resultante dos ajustes com as Estatísticas Mediana e χ^2 aplicados no modelo Λ CDM plano.	47
Figura 5.3 – Implementando as restrições CMB e BAO junto com os dados da SNe Ia. . .	48
Figura 5.4 – Curvas de nível 1σ , 2σ e 3σ resultante dos ajustes com as Estatísticas Mediana e χ^2 aplicados no modelo Λ CDM $_k$	49
Figura 5.5 – Dados de SNe Ia + CMB utilizando a mediana e χ^2 ao modelo Λ CDM $_k$, respectivamente.	49
Figura 5.6 – Aplicação do dados de SNe Ia + CMB + BAO utilizando a mediana e χ^2 ao modelo Λ CDM $_k$, respectivamente.	50
Figura 5.7 – Superposição da mediana e χ^2 com os dados de SNe Ia, no modelo x CDM plano.	51
Figura 5.8 – Aplicação do dados de SNe Ia + CMB + BAO utilizando, respectivamente, a mediana e χ^2 ao modelo x CDM plano.	52
Figura 5.9 – Graus de confiança resultante dos ajustes com as Estatísticas Mediana e χ^2 aplicado ao modelo $\Lambda(t)$ CDM plano.	53
Figura 5.10–Aplicação do dados de SNe Ia + CMB + BAO utilizando, respectivamente, a mediana e χ^2 ao modelo $\Lambda(t)$ CDM plano.	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Comparação entre as inferências estatísticas por suas definições básicas de probabilidade	33
Tabela 4.2 – Comparação entre os métodos proposto neste trabalho e o de Avelino, aplicado ao modelo ΛCDM_k (padrão com curvatura).	44
Tabela 5.1 – Parâmetros livres em modelos analisados.	46
Tabela 5.2 – Melhor ajuste para os modelos ΛCDM e ΛCDM_k com Union 2.1.	46
Tabela 5.3 – Melhor ajuste para os modelos cosmológicos $x\text{CDM}$ e $\Lambda(t)\text{CDM}$, ambos nos casos planos com o pacote de dados do Union 2.1.	50
Tabela 5.4 – Valores de z_{BAO} extraídos do artigo <i>Planck 2013 results XVI. Cosmological parameters</i> (ADE et al., 2014).	54

SUMÁRIO

Lista de figuras	x
Lista de tabelas	xi
1 – Introdução	1
2 – Princípios Básicos da Cosmologia Moderna	4
2.1 Hubble e a Expansão do Universo	6
2.2 A Métrica Robertson-Walker	8
2.3 Medida de Distância em Cosmologia	9
2.3.1 Redshift Cosmológico	9
2.3.2 Distância Própria	11
2.3.3 Distância de uma Fonte Luminosa	12
2.3.3.1 Distância Luminosidade	12
2.3.3.2 Distância Diâmetro Angular	16
2.4 Supernova Tipo Ia	17
2.5 BAO e CMB	20
3 – Modelo Cosmológico	23
3.1 Equação de Friedmann	23
3.2 Parâmetros Cosmológicos	26
3.2.1 Parâmetro de Densidade Crítica	26
3.2.2 Parâmetro de Densidade	26
3.2.3 Parâmetro de Desaceleração	28
3.3 Λ CDM	30
3.4 $\Lambda(t)$ CDM	31
4 – Métodos Estatísticos	33
4.1 Inferência Bayesiana	33
4.1.1 Marginalização	35
4.1.2 Estimação de Parâmetros	36
4.2 Estatística Mediana	39
5 – Resultados das Análises	45
5.1 Λ CDM Plano	46
5.2 Λ CDM _k	48
5.3 Modelos Cosmológicos Alternativos	50

5.3.1	Modelo $xCDM$	51
5.3.2	Modelo $\Lambda(t)CDM$	52
6	– Conclusão	56
	Referências	58
	Apêndices	64
	APÊNDICE A – Mediana	65

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, temos percebido um aumento rápido do conhecimento sobre nossa vizinhança cósmica e, devido às observações de objetos cada vez mais distantes, somos a primeira geração de seres humanos capazes de perceber muitos detalhes da História Cósmica e das possíveis origens do Universo (VILLELA et al., 2004). A descoberta de novas informações cosmológicas impulsionada pelo surgimento de sensores de baixo custo e avanços no processamento de dados, fez com que a quantidade de dados cosmológicos coletados tivesse um aumento exponencial nos últimos quinze anos.

Com os estudos realizados pelo astrônomo Vesto Slipher em 1917, utilizando técnicas acuradas de observação combinadas com avanços na qualidade dos telescópios, foi possível analisar os espectros de algumas nebulosas constatando que as posições das linhas características de elementos conhecidos, em alguns casos, apareciam deslocadas em respeito as suas posições medidas em laboratório. A causa desse deslocamento espectral foi identificado por W. de Sitter como sendo o efeito Doppler, fenômeno bem conhecido nas ondas sonoras, no qual o deslocamento é devido ao movimento relativo da fonte¹. Dentro dessa interpretação, de Sitter sugere um modelo cosmológico de um universo em expansão, pois as galáxias medidas, estavam em média afastando-se da nossa. As observações feitas por Edwin Hubble confirmam os estudos de W. de Sitter e mostram pela primeira vez a correlação entre velocidade de recessão e a distância estimada às galáxias.

No cenário de um universo em expansão, foram propostos modelos teóricos sobre a sua origem e evolução, dentre os quais, se destacou a teoria do **Big Bang**. Essa teoria possui evidências observacionais significativas, como a descoberta da radiação cósmica de fundo em microondas (**CMB**, do inglês *Cosmic Microwave Background*) em 1964. A existência desta radiação que permeia o universo havia sido prevista por George Gamow e colaboradores no final da década de 40 do século passado. Apesar do modelo teórico do Big Bang explicar com sucesso a nucleossíntese primordial do universo, a existência da CMB e a abundância de bárions observada na forma de galáxias espalhadas pelo Universo Local, ainda assim apresentava alguns problemas. No início de 1980, a proposta da teoria da inflação ofereceu uma solução para alguns enigmas cosmológicos pendentes, fornecendo por exemplo, mecanismos para a origem da estrutura em larga escala o que poderia ser testado por observações de anisotropias na CMB. Com o lançamento do satélite *Cosmic Background Explorador* (**COBE**) em 1989, medidas feitas com seu espectrofotômetro extremamente sensível, foi capaz de demonstrar que a CMB segue com absoluta precisão uma distribuição de corpo negro, apresentando uma temperatura de aproximadamente $2,726 \pm 0,001K$ (LIDDLE, 2003). No final da década de 1990, o uso

¹Em termos de deslocamento espectral por efeito Doppler (redshift) cosmológico, as galáxias não se deslocam a respeito do espaço-tempo, mas este que se expande e as leva junto.

de supernovas do Tipo Ia como velas padrão levou à descoberta de que a taxa de expansão do universo está aumentando, o que implica que a maior parte da energia do universo é uma espécie de energia chamada de *escura*, descrita pelo modelo padrão associada a uma constante cosmológica (WEINBERG, 2008).

Observações cada vez mais precisas das anisotropias da CMB, aliadas a estudos sobre a distribuição de galáxias, forneceram valores cada vez mais precisos dos parâmetros cosmológicos (WEINBERG, 2008). Em julho de 2001, a NASA (sigla em inglês de National Aeronautics and Space Administration) lançou a sonda Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) com o intuito de fazer medições fundamentais para a cosmologia e estudar as propriedades do nosso universo como um todo. Após nove anos colhendo dados, a missão WMAP foi encerrada e a análise completa dos dados foi concluída e publicada em 2013. A equipe do WMAP determinou com elevado grau de exatidão e precisão, não apenas a idade do universo, mas também a densidade de bárions e de outros elementos não-bariônicos. Também mapeou o padrão das pequenas flutuações na CMB, determinou a idade do universo a cerca de 13,77 bilhões de anos e verificou que o universo é composto de apenas 4,6% de matéria bariônica, 24% de matéria escura e 71% de energia escura (BENNETT et al., 2013).

Em maio de 2009, a Agência Espacial Européia (ESA - sigla em inglês) lançou a sonda *Planck* projetada para atingir as mesmas metas que o seu antecessor, a sonda WMAP da NASA. Dos dados coletados pelo *Planck*, determinou-se que o universo contém 4,9% de matéria comum, 26,8% de matéria escura e 68,3% de energia escura. A constante de Hubble foi medida com o valor de $67,80 \pm 0,77 (km/s/Mpc)$. O resultado dos novos mapas de *Planck* revelaram que as primeiras estrelas foram formadas muito mais tarde do que se pensavam, em torno de 550.000 anos após o Big Bang (ADE et al., 2014).

Graças a quantidade de dados coletados cada vez mais precisos por essas sondas, podemos testar os valores observados com os modelos de universo discutidos na literatura. A descrição da evolução de um modelo cosmológico depende, por exemplo, da densidade de energia e matéria, da taxa com que ocorre a expansão, entre outros parâmetros. Testes cosmológicos clássicos examinam esses observáveis na tentativa de estimar os valores desses parâmetros. Na busca para um tratamento mais eficiente dos dados coletados, é utilizada como principal ferramenta estatística a *Inferência Bayesiana*. Este tipo de inferência estatística procura descrever as incertezas sobre certas quantidades, de forma probabilística, após observações de novos dados ou resultados.

Baseado na inferência bayesiana, a distribuição χ^2 é comumente utilizada na cosmologia observacional para realização da *Análise Estatística* χ^2 , que serve para avaliar quantitativamente a relação entre o resultado de um experimento e a distribuição esperada para o fenômeno. Ou seja, nos diz com quanta certeza os valores observados podem ser aceitos como regidos pela teoria em questão. Foi então que GottIII et al. (2001), surgiram com uma alternativa para a análise de dados no lugar da *análise* χ^2 . O método chamado por eles de *Estatística Mediana*

mostrou-se bastante promissor ao ser utilizado em dados observacionais. Uma das qualidades deste método está no fato de fazermos menos pressuposições sobre os dados analisados, o que do ponto de vista estatístico, é uma grande vantagem em relação a análise χ^2 .

Outros autores utilizaram o método da estatística mediana como ferramenta de análise de dados observacionais, como os trabalhos de Avelino et al. (2002) que modificaram o método dando conta do número e da sequências de pontos consecutivos acima ou abaixo da mediana, Chen e Ratra (2011) que utilizou a compilação de Huchra de 533 medições da constante de Hubble para verificar a limitação da estatística mediana sobre H_0 e Barreira e Avelino (2011) que comparou a estatística mediana com χ^2 .

Com base nesses estudos, nos sentimos motivados em investigar a eficácia e limitações da aplicação do método da Estatística Mediana (EM) para restrições dos parâmetros cosmológicos. Neste trabalho, estudamos a EM e propomos modificações comparando a sua eficiência com a análise χ^2 utilizando o modelo Λ CDM. Aplicamos também o método EM nos modelos cosmológicos alternativos x CDM e $\Lambda(t)$ CDM.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: No capítulo, **Princípios Básicos da Cosmologia Moderna**, mostramos os conceitos no âmbito da cosmologia; em **Modelo Cosmológico**, expomos as equações que procuram descrever o modelo de universo considerado padrão, por meio dos parâmetros cosmológicos e dois modelos cosmológicos alternativos; na sequência, em **Métodos Estatísticos**, discutimos a metodologia empregada no tratamento dos dados observacionais e apresentamos o método proposto neste estudo; no capítulo **Resultado das Análises**, aplicamos a Estatística Mediana utilizando dados do supernovas do tipo Ia, bem como a combinação destes com dados de BAO e CMB, nos modelos cosmológicos Λ CDM, $\Lambda(t)$ CDM plano e x CDM; finalizando a escrita, temos a **Conclusão**, onde fazemos uma reflexão sobre o estudo e principalmente sobre os resultados das análises.

2 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA COSMOLOGIA MODERNA

Ao discutirmos os conceitos básicos do estudo da cosmologia moderna, partimos inicialmente da hipótese de que não ocupamos um lugar privilegiado no universo. Esse conceito está associado ao que chamamos de *Princípio Cosmológico*. É importante salientar, que em grande parte da história da humanidade, acreditou-se que o homem ocupava um lugar especial no universo, mais especificamente, no centro de tudo.

A ideia de que o homem esteja no centro do cosmos vem da observação do céu em que a Lua, o Sol e os planetas moviam-se em trajetórias circulares, entorno da Terra, conhecido como *Modelo Geocêntrico*. Na Grécia antiga, Cláudio Ptolomeu de Alexandria foi quem aperfeiçoou este modelo planetário, incluindo dois movimentos independentes para descrever a órbita aparente dos astros mais próximos. A teoria consistia em supor que as órbitas planetárias eram compostas por um círculo principal, o *deferente*, ao qual se sobrepunha um círculo menor, resultando em um movimento de epiciclo. Essa foi uma tentativa de Ptolomeu para explicar o movimento retrógrado dos planetas. No final do Renascimento, Nicolau Copérnico afirmou que se fosse colocado o Sol no centro do sistema planetário, tornaria-se mais fácil e simples justificar o movimento retrógrado dos planetas. Ao retirar a visão antropocêntrica do universo, Copérnico acreditava que o Sol era o centro (SOUZA, 2004).

A teoria heliocêntrica fez mais do que colocar o Sol no centro do sistema solar, inaugurou um período de reavaliação de todas as informações astronômicas disponíveis na época. Muitos pensadores levantaram a ideia de que todas as estrelas fossem semelhantes ao Sol, e que a diminuta magnitude que apresentavam, era devido a distância desses objetos em relação a nós. Gradualmente, o modelo predominante começou a ser de um universo preenchido de estrelas parecidas com o Sol a distâncias crescentes, em relação a magnitude que apresentavam.

Por volta de 200 anos após as ideias de Copérnico, as observações feitas do céu noturno tornaram cada vez mais evidente que as estrelas próximas não estavam distribuídas uniformemente, mas sim, em uma montagem em forma de disco, que chamamos hoje de Via Láctea. Com suas observações, o astrônomo William Herschel, no final do século XVIII, foi capaz de propor que a Via Láctea deveria ter a forma aproximada de um disco elíptico, mas como suas observações eram insuficientes, ele concluiu erroneamente que o sistema solar estivesse em seu centro. Os estudos de Harlow Shapley, no início do século XX, o fez concluir que nós estávamos, na verdade, bem afastados do centro, mas mesmo assim, ele acreditava que a Via Láctea encontrava-se no centro do universo. Contudo, discussões sobre a existência de "*universos-ilhas*"¹ questionavam a ideia da Via Láctea ser o centro do universo. Por volta de 1920 os astrônomos discordavam da forma e tamanho da nossa Galáxia, pois ainda não dispunham

¹Ideia proposta inicialmente pelo filósofo Immanuel Kant, segundo o qual as nebulosas identificadas por Charles Messier seriam sistemas estelares semelhantes à Via Láctea.

de conhecimento para a determinação precisa das distâncias a corpos celestes. HORVATH e ALLEN (2011) comentam que, em abril de 1920, a National Academy of Sciences dos Estados Unidos patrocinou um debate entre os astrônomos, Harlow Shapley e Heber D. Curtis, que eram os mais ardentes defensores de ideias bastante diferentes a respeito da estrutura e limite da Galáxia e a verdadeira natureza das "nebulosas espirais"². Esse encontro entrou para a história da astronomia como o "Debate Shapley-Curtis" ou "O Grande Debate". A questão foi finalmente resolvida com a descoberta em 1923, por Edwin Hubble, que ao utilizar a calibração da relação período-luminosidade de Henrietta Leavitt, estimou a distância de 2,2 milhões de anos-luz da grande nebulosa de Andrômeda (galáxia M31), ou seja, muito além dos limites exteriores da Via Láctea (que é de aproximadamente 100 anos-luz), provando assim que ela não poderia ser um objeto interior a nossa galáxia.

Em meados de 1930, Edward Milne estabelece o *Princípio Cosmológico* (ou Princípio de Copérnico), no qual dois observadores que acompanhem o movimento cosmológico estarão sujeitos às mesmas interpretações dos fenômenos observados, ou seja, as propriedades vistas do universo devem ser idênticas para observadores situados em pontos diferentes. Esse princípio nada mais é do que uma extensão da proposta de Albert Einstein³, que diz que as leis da natureza devem ser as mesmas para todos observadores. Uma grande parte da teoria cosmológica moderna é construída sobre a hipótese do princípio cosmológico, que considera que todas as posições no universo são essencialmente equivalentes. Este pensamento foi motivado pela necessidade de simplificar as equações e descrições teóricas do universo. (HORVATH; ALLEN, 2011).

HORVATH e ALLEN (2011) ressaltam que o princípio cosmológico não é exato. Ao observamos o céu noturno, vemos uma distribuição não-homogênea das estrelas da Via Láctea. Observações astronômicas em uma escala um pouco maior, da ordem de 3Mpc⁴, mostram que nossa galáxia pertence a um pequeno grupo de galáxias denominado Grupo Local. Em uma escala ainda maior, o Grupo Local pertence a um superaglomerado, que é da ordem de 33Mpc de extensão.

Ao observarmos a distribuição de matéria, em pequena escala vemos uma irregularidade, e em escalas maiores, impomos por exemplo que esta distribuição seja homogênea e isotrópica, baseado no princípio cosmológico. Os estudos de Wu et al. (1999), mostram que o princípio cosmológico começa a ser válido para escalas da ordem de 100Mpc, acreditando-se que a partir dessa distância começa a surgir a homogeneidade e isotropia do universo. Essa ideia é apoiada por um certo número de observações, tal como a distribuição de fótons da CMB provenientes de diferentes partes do céu com quase a mesma temperatura, indicando a existência de um universo isotrópico. No que se diz respeito à matéria, devemos observar em todas as direções uma mesma

²Pequenas manchas luminosas elípticas observadas no céu noturno pelos astrônomos no século XVIII, chamadas inicialmente de "estrelas nebulosas".

³Em 1907, Einstein discutiu a importância da gravitação na propagação da luz, apresentando o princípio de equivalência, no qual um observador em um referencial acelerado não seria capaz de distinguir os efeitos medidos nesse referencial daqueles percebidos na presença de um campo gravitacional.

⁴1Mpc = $3,086 \times 10^{22}$ m.

distribuição. Observações realizadas pelo projeto Sloan Sky Digital Survey (SDSS), que tem por objetivo mapear posição, magnitude e velocidade radial de mais de 100 milhões de galáxias, mostraram que em grandes escalas, podemos observar que a distribuição de galáxias apresenta um alto grau de isotropia (HORVATH; ALLEN, 2011).

2.1 Hubble e a Expansão do Universo

Ao detectarmos o fluxo de uma galáxia distante, estamos detectando a luz das estrelas que ela possui. O espectro de luz das galáxias possui um conjunto de linhas de absorção e emissão características com frequências bem determinadas, associadas à composição química de suas estrelas e poeira interestelar. Portanto, ao observarmos o espectro visível de uma determinada galáxia que se aproxima de nós, detectamos um aumento na frequência de suas linhas de emissão ou absorção de seu espectro, em relação a um espectro de referência (galáxias próximas ou espectro medido em laboratório). Como a cor azul está na extremidade do espectro de alta frequência, esse deslocamento para o azul é conhecido como *blueshift*. Se a galáxia está se afastando, haverá um deslocamento das linhas características para a extremidade vermelha do espectro visível. Chamamos este desvio para o vermelho de *redshift*. A análise dos espectros luminosos foi realizada pela primeira vez pelo astrônomo Vesto Slipher, por volta de 1912. Slipher estudou cerca de 40 galáxias, descobrindo que quase todas sofrem o desvio para o vermelho, ou seja, estão aparentemente afastando-se de nós (HORVATH; ALLEN, 2011).

Ao se identificar o padrão de emissão de um elemento químico, espera-se que uma determinada linha ocorra em um comprimento de onda λ_o muito bem conhecido. Se essa mesma linha for observada, em espectro de radiação emitida por uma galáxia, em um outro comprimento de onda λ , podemos definir um parâmetro associado ao desvio relativo do comprimento de onda observado. Quando uma galáxia está aparentemente afastando-se de um observador, dizemos que a galáxia tem um redshift z , dado por

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o}. \quad (2.1)$$

Para valores em que $z < 0$ (aproximando-se aparentemente de um observador), chamamos de *blueshift*.

O astrônomo Edwin Hubble, ao pesquisar as galáxias e seus movimentos, tinha em mãos, dados de redshift suficientes para realizar um estudo sobre a possibilidade de haver dependência do redshift de uma galáxia com a sua distância até nós. A partir de um gráfico de redshift (z) versus distância (\vec{r}), como vemos na figura (2.1), obteve uma relação de linearidade da por

$$z = \frac{H_0}{c} r, \quad (2.2)$$

e hoje sabemos que esta relação linear só é válida para baixos *redshifts*. Essa expressão é conhecida como a **Lei de Hubble**, onde H_0 é uma constante de proporcionalidade chamada

de **Constante de Hubble**. Uma vez que os valores de z , em análise de Hubble foram todos pequenos (com $z < 0,04$), ele foi capaz de usar a relação clássica, não-relativística para o deslocamento de Doppler, $z = v/c$, onde v é a velocidade de recessão da galáxia. Interpretando os redshift como efeito Doppler, a Lei de Hubble toma a forma,

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}. \quad (2.3)$$

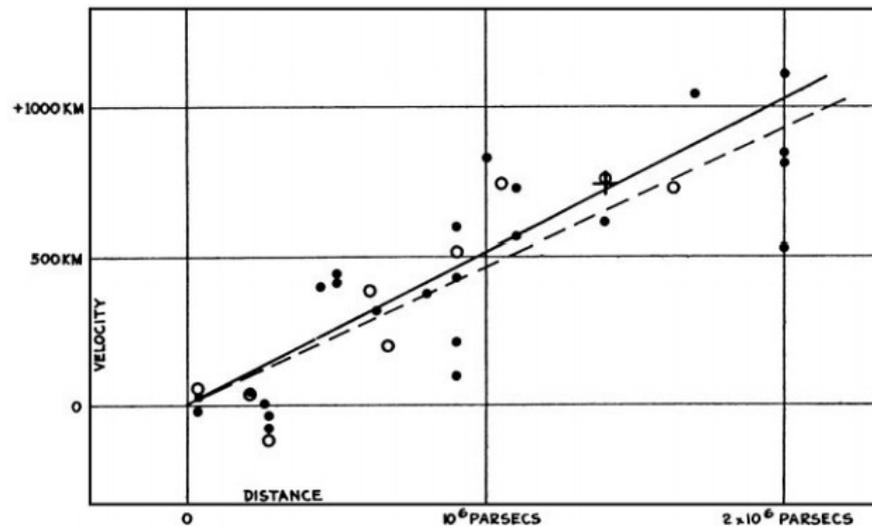


Figura 2.1 – Diagrama apresentado por E. Hubble em 1929. A linha contínua é a melhor reta que corresponde a medidas de velocidade e distância de galáxias individuais (círculos cheios); a linha tracejada corresponde às combinações das galáxias em grupo (círculos vazados). Note que o eixo vertical do gráfico atualmente dado por $cz = v$ ao invés de z – observa-se o erro acidental cometido por Hubble ao colocar "km" e não "km/s". (KIRSHNER, 2004)

A lei de Hubble nos diz que galáxias próximas afastam-se de nós com velocidade de recessão menores das que estão mais distantes. À primeira vista, esta ideia parece violar o princípio cosmológico, pois afirma que, ao observarmos as galáxias se afastando é como se nós estivéssemos no centro do universo. Contudo, observadores, independentes uns dos outros, terão a mesma interpretação do universo: verão todos os objetos afastando-se ao longe com a velocidade proporcional à distância, não violando o princípio cosmológico.

A taxa atual da expansão do universo é determinada pela constante H_0 . No início, o valor estimado por Hubble foi em torno de $\cong 500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. A estimativa desse valor foi bastante contaminada por problemas de calibração da relação período versus luminosidade da amostra de estrelas variáveis Cefeidas⁵. Desde então, as medidas de H_0 têm sido sensivelmente melhoradas. Estudos utilizando Cefeidas e supernovas do tipo Ia estimaram $H_0 = (73, 8 \pm 2, 4) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ (RIESS et al., 2011). Os cosmólogos costumam indicar o valor da constante de Hubble utilizando

⁵Estrelas muito luminosas que apresentam variabilidade no fluxo com períodos de dezenas a centenas de dias. Por isso, são consideradas "velas padrões" na cosmologia, usadas para determinar distâncias de galáxias próximas.

uma normalização, $H_0 = 100h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, onde o valor estimado para h (parametrização da constante H_0) depende da análise dos dados, método e modelo aplicado por cada grupo de pesquisa: $h = 0,738 \pm 0,024$ para Riess et al. (2011); $h = 0,62 \pm 0,013$ para Sandage et al. (2006) e $h = 0,674 \pm 0,014$ para Ade et al. (2014) .

2.2 A Métrica Robertson-Walker

Ao supormos que o universo é homogêneo e isotrópico, devemos elaborar um sistema de coordenadas cuja métrica do espaço-tempo possua uma máxima simetria espacial. Isso significa que sua evolução poderá ser representada como uma sequência temporal de hipersuperfícies do tipo espaço tridimensional. Obtida por Friedmann como uma solução das equações de campo de Einstein, e em seguida, por Robertson e Walker, a cosmologia moderna padrão baseia-se na métrica denominada Robertson-Walker⁶, como uma primeira aproximação. (WEINBERG, 2008) (MUKHANOV, 2005).

A relatividade nos ensina que o espaço e o tempo compõem juntos um espaço quadridimensional. Assim, para especificarmos um determinado ponto neste espaço-tempo, utilizamos as coordenadas (t, x, y, z) . Dessa forma, ao utilizarmos a métrica adequada, podemos encontrar o intervalo no espaço-tempo entre dois eventos. Verifica-se, que com essa métrica, apenas três geometrias espaciais são permitidas: universo espacialmente aberto, fechado ou plano (RYDEN, 2003).

Um espaço quadridimensional, isotrópico, homogêneo e plano, expresso em coordenadas cartesianas, é descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.4)$$

Com o objetivo de facilitar a descrição de um espaço-tempo que possa ser curvo ou plano, faremos a transformação dessas coordenadas para esféricas,

$$\begin{cases} x = r \text{sen} \theta \cos \phi \\ y = r \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad (2.5)$$

obtendo assim,

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.6)$$

Em 1930, os físicos Howard Robertson e Arthur Walker procuravam uma métrica do espaço-tempo que pudesse assumir que o universo fosse espacialmente homogêneo e isotrópico em todos os tempos, e permitisse a possibilidade que o espaço entre dois objetos pudesse se

⁶Conhecida também como métrica Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)

expandir (ou contrair) em função do tempo. A métrica que eles encontraram, independentes um do outro, é chamada de métrica *Robertson-Walker*. É escrita na forma,

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.7)$$

onde $a(t)$ e k , são respectivamente, o fator de escala e a curvatura espacial do universo, sendo que este último pode assumir três valores:

- $k = 0$, universo espacialmente plano (geometria euclidiana)
- $k = 1$, universo espacialmente fechado
- $k = -1$, universo espacialmente aberto.

A variável t na métrica Robertson-Walker é o tempo próprio cosmológico, que é o instante medido por um observador que vê o universo em expansão uniformemente em torno dele. As variáveis espaciais (r, θ, ϕ) são chamadas de *coordenadas comóveis* de um ponto no espaço; se a expansão do universo é perfeitamente homogêneo e isotrópico, as coordenadas de qualquer ponto comóvel permanece constante com o tempo (RYDEN, 2003).

2.3 Medida de Distância em Cosmologia

Ao tentarmos medir a distância entre nós e uma galáxia, por exemplo, sabemos que a luz emitida por ela levou um certo tempo para percorrer esse caminho. Mas devemos levar em conta que o universo possui um dinâmica, portanto, o espaço entre a fonte e o observador muda com o tempo. Nesse cenário, surge a necessidade de definirmos o significado de distância a um determinado objeto.

Para um universo em expansão, a separação entre dois pontos é uma quantidade dinâmica que depende da geometria do espaço-tempo, bem como do conteúdo energético distribuído no espaço. A definição de distância adequada entre o observador e a galáxia pode ser obtida usando a métrica de Robertson-Walker.

2.3.1 Redshift Cosmológico

Retomando o conceito de redshift que culminou na equação (2.1), podemos escrevê-la em termos de parâmetros da métrica de Robertson-Walker. Consideremos a Terra como estando na origem do sistema de coordenadas, que recebe um feixe de luz emitido por uma galáxia distante. O caminho desse fóton por meio do espaço-tempo é uma geodésica⁷ nula, ao longo de

⁷Termo que descreve a trajetória que liga dois pontos sobre uma superfície curva. No caso plano, a geodésica é uma reta.

um percurso radial em direção a origem, com θ e ϕ constantes (devido a simetria espacial em ordem zero de aproximação, despresam-se desvios em θ e ϕ). Assim,

$$ds^2 = 0 = -(c dt)^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right], \quad (2.8)$$

e integrando essa equação ao longo de um caminho radial ($d\theta = d\phi = 0$), a distância percorrida pelo fóton no tempo correspondente é dada por,

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.9)$$

onde t_1 e t_0 são os instantes da emissão do sinal e recepção na Terra, respectivamente.

Consideremos uma crista sucessiva, saindo da fonte em $t_1 + \delta t_1$, e chegando ao observador em $t_0 + \delta t_0$. Como o lado direito da equação (2.9) corresponde as coordenadas comóveis, que não dependem do tempo, obtemos

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.10)$$

que podemos reescrever como

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.11)$$

Sendo assim,

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.12)$$

Ao assumirmos que o intervalo de tempo entre as emissões de um fóton e outro são muito pequenas ($\delta t_0 \sim \delta t_1 \ll 1$) e que o fator de escala é praticamente o mesmo nesse intervalo de tempo, da equação (2.12) podemos escrever,

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.13)$$

Por fim, usando a relação $\delta t = 1/\nu$ e $c = \lambda\nu$ (onde ν é a frequência e c a velocidade da luz), e comparando com (2.1),

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 + z.$$

Temos, dessa forma, a relação do redshift da radiação observada de um objeto distante com o fator de escala, no momento em que a luz foi emitida:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{a_0}{a(t)}. \quad (2.14)$$

Se $a(t) < 0$ significa que teremos um blueshift (a fonte se aproxima do observador), pois haverá um decréscimo no comprimento de onda dada por (2.14), fazendo $z < 0$. Dessa forma, com o aumento ou a diminuição do fator de escala, haverá uma variação no comprimento de onda, e consequentemente, uma variação do valor de z (RYDEN, 2003).

2.3.2 Distância Própria

Para analisarmos distâncias cosmológicas, temos que considerar que, em um espaço-tempo em expansão, a distância entre dois objetos aumentará com o tempo. Sendo assim, vamos considerar um observador na origem de um sistema de coordenadas que receba um sinal hoje (t_0) emitido por uma fonte luminosa que esteja em uma posição de coordenada comóvel (r, θ, ϕ) , onde os valores da posição angular θ e ϕ sejam constantes. Nessas condições e utilizando a equação (2.7), obtemos:

$$ds^2 = a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right]. \quad (2.15)$$

Fazendo a integração temos a *distância própria* como sendo,

$$d_p(r, t) \equiv a(t) \int_0^{r'} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.16)$$

Resolvendo a integral, temos como solução:

$$d_p(r, t) = a(t) \cdot S_k(r) \quad \therefore \quad S_k(r) = \begin{cases} \text{sen}^{-1}r, & \text{se } k = 1 \\ \text{senh}^{-1}r, & \text{se } k = -1. \\ r, & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Vemos que a distância própria $d_p(r, t)$ é definida pelo produto entre o fator de escala e o valor $S_k(r)$ e que a distância própria entre nós e o objeto observado aumenta (ou diminui) com $a(t)$.

A taxa de mudança da distância própria entre o observador e uma galáxia distante é dada por

$$\dot{d}_p = \dot{a}(t)S_k(r) = \dot{a}(t) \frac{d_p}{a(t)} = H(t)d_p \quad \therefore \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.18)$$

$H(t)$ é definido como *parâmetro de Hubble* e \dot{d}_p é chamado de *velocidade de recessão*.

No instante atual ($t = t_0$), a relação linear entre distância própria da galáxia e sua velocidade de recessão, nos leva a Lei de Hubble (2.3),

$$\dot{d}_p(t_0) = v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0), \quad (2.19)$$

onde,

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t_0}. \quad (2.20)$$

Das equações (2.9) e (2.16), podemos verificar que,

$$d_p(t) = c \cdot a(t) \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.21)$$

É importante ressaltar que podemos escrever d_p em função de z . Diferenciando a (2.14) temos,

$$dz = - \left(\frac{a_0}{a} \right) \left(\frac{da/dt}{a} \right) dt = -(1+z)Hdt. \quad (2.22)$$

Aplicando na equação (2.21) e fazendo a mudança de variável t para z , obtemos

$$d_p(t_0) = c \int_{t_1}^{t_0} \frac{a_0}{a(t)} dt = -c \int_z^0 (1+z') \frac{dz'}{(1+z')H(z')}, \quad (2.23)$$

pois a radiação emitida no instante da observação não sofre redshift e sim a radiação emitida em t_1 , nos leva à distância própria em termos de z ,

$$d_p(t_0) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.24)$$

Esta expressão define explicitamente uma relação entre a distância própria hoje e o parâmetro de Hubble $H(z)$.

2.3.3 Distância de uma Fonte Luminosa

Na cosmologia, há dois procedimentos específicos para uma descrição cosmográfica: i) A *distância luminosidade* d_L , mede as distâncias cosmológicas relacionando o fluxo (unidade de energia por unidade de tempo por unidade de área) bolométrico⁸ com a luminosidade (energia total por unidade de tempo) emitido por um objeto; ii) A *distância diâmetro angular* d_A de uma fonte extensa.

2.3.3.1 Distância Luminosidade

Uma forma de tentarmos mensurar distâncias de objetos astronômicos cuja luminosidade seja conhecida é a utilização de uma função chamada *distância luminosidade*. Em um universo estático e euclidiano, é sabido que um sinal emitido por uma fonte pontual se propaga em frentes esféricas, de tal maneira, que podem ser detectadas a uma distância d da fonte ao medimos o seu fluxo (intensidade) ou *luminosidade aparente* (ℓ), por meio da equação,

$$\ell = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.25)$$

⁸"O bolômetro é um termômetro extremamente sensível capaz de detectar a radiação eletromagnética em uma ampla faixa de comprimentos de onda, que foi inventado em 1881 pelo astrônomo Samuel Langley, que a usou para medir a radiação solar"(RYDEN, 2003)

onde L é a *luminosidade absoluta* (potência irradiada) da fonte. Reescrevendo a equação, podemos definir a função *distância luminosidade* como sendo,

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi\ell} \right)^{1/2}. \quad (2.26)$$

A função d_L é chamada de distância por conta da sua dimensionalidade e também, porque se reduziria a distância própria ao considerarmos o espaço-tempo estático e euclidiano. O valor de d_L tenderá a distância própria ao considerarmos baixos reshifts.

Imaginemos que um observador esteja no centro de uma esfera de raio d_p e em um instante $t = t_0$, observa a luz que foi emitida por um corpo luminoso na posição (r, θ, ϕ) em um instante t_1 . Os fótons que foram emitidos no instante t_1 estão distribuídos em uma esfera de raio próprio $d_p(t_0) = a(t_0)r_1$ e uma superfície própria $A_p(t_0)$, ao considerarmos o espaço euclidiano ($k = 0$), teremos, $A_p(t_0) = 4\pi d_p(t_0)^2 = 4\pi a(t_0)^2 r^2$.

No caso geral, temos

$$A_p(t_0) = 4\pi a(t_0)^2 \cdot S_k(r)^2, \quad (2.27)$$

onde $S_k(r)$ vem da equação (2.17).

Um fóton emitido da fonte tem sua energia dada por $E_1 = hc/\lambda_1$, quando o fator de escala era $a(t_1)$. Ao observamos o fóton no instante t_0 , ele apresentará um acréscimo em seu comprimento de onda,

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \lambda_1 = (1+z)\lambda_1. \quad (2.28)$$

Por consequência, sua energia será menor ao ser detectado pelo observador,

$$E_0 = \frac{E_1}{(1+z)} \quad (2.29)$$

Por conta da expansão do universo, se dois fótons emitidos na mesma direção, separados por um intervalo de tempo δt_1 , ao detectarmos no instante t_0 , o intervalo entre eles sofrerá um acréscimo, devido ao fator de escala. Dessa forma, sendo a distância própria entre os fotos $c\delta t_1$, na observação, a distância entre eles será $c\delta t_1(1+z)$ e separados por um intervalo de tempo $\delta t_0 = \delta t_1(1+z)$. Sendo o fluxo dado pela potência detectada dividido a área que a energia está espalhada, temos

$$\ell = \frac{\frac{E_0}{\delta t_0}}{4\pi a(t_0)^2 \cdot S_k(r)^2} = \frac{\frac{E_1}{\delta t_1(1+z)^2}}{4\pi a(t_0)^2 \cdot S_k(r)^2} = \frac{L}{4\pi a(t_0)^2 \cdot S_k(r)^2(1+z)^2} \quad (2.30)$$

Portanto, utilizando a equação (2.17) a distância luminosidade (2.26) fica definida por,

$$d_L(z) = a(t_0)S_k(1+z) = d_p(1+z). \quad (2.31)$$

Para um universo plano, ao substituirmos a equação (2.24) na equação (2.31) teremos a distância luminosidade em termos do parâmetro de Hubble.

$$d_L(z) = d_p(1+z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z)}. \quad (2.32)$$

Generalizando para um universo com curvatura,

$$d_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \begin{cases} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = 1. \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = -1 \end{cases} \quad (2.33)$$

Os termos Ω_k e $E(z)$ são, respectivamente, os parâmetros de densidade associado a curvatura do espaço e o de Hubble adimensional, os quais serão melhor discutidos no próximo capítulo.

A definição de distância luminosidade nos leva à origem do sistema de medida de magnitude utilizado até os dias de hoje. Há mais de 2000 anos, antes dos modernos telescópios e sensores ópticos, o grego Hiparco (160 - 125 a.C.) criou o sistema de magnitude das estrelas. Os trabalhos de Hiparco serviram de base aos estudos de Ptolomeu ($\approx 140d.C.$), onde ele dividiu as estrelas visíveis a olho nu de acordo com o sua magnitude aparente, atribuindo a magnitude 1 para as mais brilhante (visíveis logo após o por-do-sol), e magnitude 6 às mais fracas, no limite do visível. Foi então que, em 1856, o astrônomo Norman Pogson ao utilizar o recém inventado fotômetro, mediu o fluxo luminoso (ℓ) de algumas estrelas e observou que o fluxo que corresponde ao brilho de uma estrela de magnitude $m = 1$, era 100 vezes mais intenso que de uma estrela de magnitude $m = 6$. Propondo uma escala em que a diferença de magnitude seguiria uma escala logarítmica⁹ (FILHO et al., 2000).

Como a magnitude aparente de um astro é o fluxo medido na Terra, a magnitude aparente m , é expressa, por definição,

$$m = A \log_{10} \ell + B, \quad (2.34)$$

e a diferença entre as magnitudes $m_1 = 1$ e $m_6 = 6$, e suas respectivas luminosidades aparentes, ℓ_1 e $\ell_6 = \ell_1/100$, é dada por,

$$m_1 - m_6 = A \log_{10} \frac{\ell_1}{\ell_6}, \quad (2.35)$$

assim, $1 - 6 = A \log_{10} 100$ resultando $A = -2,5$. Dessa forma, define-se *magnitude aparente* de um astro luminoso, aos escolhermos um ponto de referência para a escala

$$m = -2,5 \log_{10} \ell + B \quad (2.36)$$

onde a constante $B = 2,5 \log_{10} \ell_0$ é definição do zero da escala. Normalmente, utiliza-se a magnitude aparente da estrela Vega com $m \equiv 0$. Dessa forma, astros mais brilhantes que ela terão $m < 0$, e astros invisíveis a olho nu terão $m > 6$ (FILHO et al., 2000).

⁹Não por acaso, Fechner-Weber descobriram nesta mesma época, que a sensibilidade dos órgãos sensoriais humanos variavam com o logaritmo de estímulos físicos.

A magnitude de uma estrela mede sua luminosidade aparente, e isso não é suficiente para descrevermos plenamente a fonte luminosa, pois, nada nos informa sobre a distância da fonte. Ao compararmos as magnitudes intrínsecas de duas estrelas, precisamos de uma medida de fluxo que independa da distância da fonte. Introduziremos o conceito de *magnitude absoluta* (M), que é a magnitude aparente de uma determinada fonte, considerando essa a 10pc do observador,

$$M = -2,5 \log_{10} \left[\frac{L}{4\pi(10pc)^2} \right] + const. \quad (2.37)$$

A diferença entre a magnitude aparente e absoluta é dada por

$$m - M = -2,5 \log_{10} \left[\frac{L}{4\pi d_L^2} \right] + 2,5 \log_{10} \left[\frac{L}{4\pi(10pc)^2} \right], \quad (2.38)$$

onde chamamos de *módulo de distância* da fonte

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1Mpc} \right) + 25 \quad (2.39)$$

Por questões de simplicidade, podemos reescrever a equação (2.33) na forma

$$\frac{H_0 d_L(z)}{c} = (1+z) \begin{cases} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = 1. \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = -1 \end{cases} \quad (2.40)$$

Considerando $c = 3 \times 10^5 km/s$ e $H_0 = h \times 100 km/s/Mpc$, reescreveremos a equação (2.39) como

$$\mu = 5 \log_{10} \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) - 5 \log_{10} h + 42,384. \quad (2.41)$$

A equação (2.41) tem como finalidade relacionar a magnitude com a distância, mas devemos encontrar um objeto que possua a magnitude absoluta bem conhecida, de forma a utilizarmos como calibrador de medida de distâncias. Esse objeto é chamado de *vela-padrão*. Uma tentativa foi a utilização de uma classe de estrelas variáveis conhecidas como variáveis *Cefeidas* - estrelas supergigantes e altamente luminosas. Por não serem suficientemente padronizáveis para serem velas-padrão¹⁰, Henrietta Levitt tendo medido as distâncias e luminosidades aparentes de várias Cefeidas em aglomerados abertos e, conseqüentemente, as suas luminosidades absolutas, tornou-se possível calibrar a relação entre período e luminosidade Cefeidas próximas (KIRSHNER, 2010). Se o mesmo período relação luminosidade é válido para todas Cefeidas, em todas as galáxias, então elas podem ser usadas como velas padronizáveis. Contudo, estrelas chamadas de *supernovas* mostraram-se excelentes substitutas como velas-padrão, especialmente as do tipo Ia que são utilizadas em nosso trabalho.

¹⁰ Isso por não conseguirmos enxergar cefeidas a distâncias cosmológicas. Mas são importantes, por exemplo, para calibrar a distância de supernovas próximas.

2.3.3.2 Distância Diâmetro Angular

A *distância diâmetro angular* é definida como sendo a razão entre o tamanho transversal físico de um objeto astronômico l (diâmetro próprio) e o seu tamanho angular $\delta\theta$ (em radianos), com $\delta\theta \ll 1$ (HOGG, 1999). Em um universo estático e euclidiano a distância diâmetro angular é dada por,

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta}. \quad (2.42)$$

Em um universo em expansão, podemos escrever o diâmetro próprio de um objeto astronômico na métrica Robertson-Walker. Estando um observador na origem do sistema comóvel, e considerando que a luz viaja em uma geodésica nula, a distância entre as duas extremidades d_p pode ser escrita como

$$d_p = a(t)S_k(r)\delta\theta = \frac{a(t_0)S_k(r)\delta\theta}{1+z}, \quad (2.43)$$

sendo S_k a função na expressão (2.17).

No entanto, para um ponto de referência padrão cujo diâmetro próprio l é conhecida, pode-se definir $d_p = l$, e assim, ao substituirmos essa expressão na equação (2.42), obtemos

$$d_A(z) = \frac{l}{\delta\theta} = \frac{a(t_0)S_k(r)}{1+z}. \quad (2.44)$$

Ao compararmos as equações (2.44) e (2.31), obtemos a relação entre a distância luminosidade e a diâmetro angular,

$$d_A(z) = \frac{d_L(z)}{(1+z)^2}. \quad (2.45)$$

Para obtermos a distância diâmetro angular em termos do parâmetro de Hubble, basta substituirmos nessa última expressão a equação (2.32),

$$d_A(z) = \frac{c}{(1+z)} \int_0^{z'} \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.46)$$

Novamente generalizando para um universo com curvatura, temos

$$d_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0} \begin{cases} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = 1. \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k = -1 \end{cases} \quad (2.47)$$

Para utilizarmos a distância diâmetro angular, faz-se necessário algumas considerações sobre os objetos astronômicos observados. Para uma certa classe de objetos se o seu comprimento próprio é conhecido, podemos utilizá-lo como *régua-padrão*, desde que suas dimensões se mantenham as mesmas, independente da expansão do universo.

Como pode ser averiguado, há grandes dificuldades observacionais em se encontrar esse tipo de distância. O objeto escolhido como régua-padrão deve ser largo o suficiente para que sua

abertura angular seja medida com boa precisão. Para se medir a grandes distâncias, os objetos devem ser suficientemente grandes, como galáxias e aglomerados, mas suas extremidades são bastante difíceis de se definir. Por conta dessas dificuldades, tem sido mais comum a utilização da distância luminosidade com o uso de velas-padrão.

2.4 Supernova Tipo Ia

As supernovas têm sido observadas desde a antiguidade, devido a sua natureza extraordinariamente incomum. Os primeiros registros da sua observação datam do ano de 185 d.C. que, devido ao seu fluxo intenso, foi possível sua observação mesmo durante o dia. Foram utilizadas por Brahe (1572) e por Kepler (1604) para contrastar a visão aristotélica, na qual todo o universo era imutável. Mas foi somente no século XX que a sua natureza foi compreendida e desde o nascimento da Cosmologia Moderna, elas têm sido pesquisadas de forma a impulsionar aos estudos na construção dos modelos cosmológicos, bem como na indicação da aceleração da expansão do universo.

A explicação física para as supernovas (SNe) foi inicialmente dada por Baade e Zwicky (1934). Eles especularam que a energia das SNe vem do *colapso nuclear* como mecanismo de transição de estrelas de grande massa para estrelas de nêutrons. Foi então que em 1938, Baade mostrou que as luminosidades dessas estrelas as tornavam adequadas como indicadores de distância extragalácticas. Assim, desde o início as supernovas foram pensadas como ferramentas para medir distâncias no universo (KIRSHNER, 2010).

A supernova é o estágio final do ciclo de vida de uma estrela massiva (maior que dez massas solares). A massa é determinante para o surgimento de uma SNe, pois quanto mais massiva for a estrela, mais quente será o núcleo tornando mais rápidas e eficientes as reações termonucleares de fusão mantendo o equilíbrio hidrostático da estrela, impedindo o seu colapso gravitacional. Com o passar do tempo, esse processo cria camadas de elementos mais pesados, com temperaturas e densidades cada vez maiores. Nesse processo, as estrelas queimam hidrogênio (H) em hélio (He), formando um núcleo de He , que com o aumento suficiente desse elemento, começa a fundir o He em carbono e oxigênio. A fusão continua a produzir núclídeos mais pesados até a produção de ferro (Fe). Uma vez iniciada a produção de Fe , a estrela massiva o faz até crescer o núcleo que não consegue sustentar sua própria massa gravitacional, resultando em um colapso do núcleo formando uma estrela de nêutrons ou um buraco negro (FILHO et al., 2000). As características de um colapso dependem da massa e das particularidades de cada estrela, o que resulta em SNe com grande variação na energia total liberada.

Quando ocorre a explosão de uma supernova, a luminosidade é extremamente alta emitindo uma grande quantidade de radiação. As supernovas podem ser classificadas de acordo com as linhas de absorção de elementos químicos. Se o espectro de uma supernova inclui linhas espectrais de hidrogênio, ela é classificada como *Tipo II*. Caso não haja presença de hidrogênio

em seu espectro, é classificada como do *Tipo I* (MINKOWSKI, 1941). Foi definido por Elias et al. (1985), um tipo distinto de supernova, chamada de Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia), pois continha uma linha de absorção de silício isoladamente ionizado. Existem também a do Tipo Ib, que contém uma linha de hélio e do Tipo Ic que não possui linhas de silício nem de hélio (KIRSHNER, 2010).

A explosão do Tipo Ia ocorre quando a massa de uma anã branca em um sistema binário excede o *Limite de Chandrasekhar*¹¹ (CHANDRASEKHAR, 1931) por meio da absorção de gás da outra estrela. Caso exceda esse limite, o núcleo aquece com o aumento da pressão gravitacional, proporcionando a reação dos elementos em seu núcleo; essa reação descontrolada libera dentro de segundos uma enorme quantidade de energia, resultando em uma explosão violenta que é acompanhada por um aumento maciço na luminosidade (BRANCH; TAMMANN, 1992). Como a luminosidade absoluta do Tipo Ia é quase constante no pico da magnitude, a distância da SNe Ia pode ser determinada medindo a sua luminosidade aparente. Dessa forma, as SNe Ia são uma espécie de "vela-padrão" pela qual pode-se medir a distância luminosidade.

Desde a década de 60 do século passado, tinha-se o conhecimento sobre a homogeneidade das SNe Ia, mas faltava saber o quanto. A equação (2.39) mostrou que medir a distância luminosa equivale a medir a magnitude absoluta, uma vez observado o fluxo luminoso do astro. A partir de 1986, observações cuidadosas mostraram que a luminosidade e as formas da curva de luz para SNe Ia não eram uniformes. Em 1991 foram observadas duas supernovas em extremos opostos da escala de luminosidade, surgindo a necessidade de tratamento dos dados de forma a tornar as SNe Ia uma ferramenta eficaz na medição de distância. Foi então que Phillips (1993) demonstrou uma relação entre a magnitudes máximas das SNe Ia e sua taxa inicial de declínio, sendo chamada de *relação de Phillips*. Com essa relação, foi possível diminuir a dispersão das magnitudes máximas das SNe Ia, proporcionando um forma sistemática de corrigi-las (KIRSHNER, 2010).

As curvas de luz (magnitude como função do tempo) apresentadas pelas SNe Ia não são tão semelhantes entre si. Há uma correlação entre o fluxo máximo da emissão e o tempo de decaimento que torna possível "padronizar" as curvas de luz. As SNe Ia mais brilhantes possuem um tempo de decaimento maior e as menos brilhantes, decaem mais rapidamente. Portanto, ao levarmos em conta os erros e fatores que contribuem para a dispersão das curvas de luz de diferentes supernovas, podemos tornar as SNe Ia "padronizáveis, de modo com que elas possam indicar uma mesma magnitude absoluta (mesma potência total emitida), podendo ser usadas como velas padrão (KIRSHNER, 2010).

A expansão acelerada do universo, foi descoberta há mais de 16 anos medindo-se distâncias utilizando dados precisos de SNe Ia (RIESS et al., 1998) (PERLMUTTER et al., 1999). O que causa a aceleração permanece desconhecida, e o termo *energia escura* é usado pra descrever o fenômeno. Compreender a natureza dessa energia é atualmente um dos principais

¹¹Chandrasekhar mostrou que uma estrela não geraria uma anã branca se sua massa fosse maior que 1,44 massas solares. Se uma anã branca exceder essa massa por agregação, entrará em colapso.

objetivos da física fundamental, o que leva a um grande esforço experimental em cosmologia observacional. Ao mapear com precisão a relação distância-redshift com $z \approx 1$ as SNe Ia permanecem, até o momento, uma das sondas mais sensíveis para análise da expansão do universo.

Na última década, grandes grupos de pesquisa buscaram sistematicamente por Supernovas do Tipo Ia para diversos intervalos de redshift. Como exemplo, temos para altos redshifts ($z \sim 1$) os programas Supernova Legacy Survey (SNLS3) (ASTIER et al., 2009) (CONLEY et al., 2011); o projeto ESSENCE (WOOD-VASEY et al., 2007); e a pesquisa Pan-STARRS (SCOLNIC et al., 2014). Para redshift intermediários ($0,05 < z < 0,4$) temos, dentre outros, o SDSS-II (CAMPBELL et al., 2013). Valores para $z < 0,1$, os programas Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics (HICKEN et al., 2009) e Supernova Projeto Carnegie (GANESHALINGAM et al., 2013), entre outros programas. Para supernovas com $z > 1$, os grupos de Riess et al. (2007) e o projeto Supernova Cosmology Project (SCP) (SUZUKI et al., 2012). Temos atualmente, cerca de mil SNe Ia descobertas e confirmadas espectroscopicamente, proporcionando uma precisão estatisticamente alta para a medição da distância luminosidade (BETOULE et al., 2014).

A principal dificuldade para o estudo de SNe Ia está no tratamento das curva de luz de modo a obter um valor verossímil para o fluxo máximo da emissão. Até pouco tempo, os métodos mais utilizados eram o *Multicolor Light-Curve Shape (MLCS2k2)* (JHA et al., 2007) e *Spectral Adaptive Lightcurve 2 (SALT2)* (GUY et al., 2007). Eles se diferem entre os filtros (ou ajustadores), de acordo com o método utilizado na calibração dos dados para obtenção das medidas de distância em escalas cosmológicas.

Estudos recentes (CONLEY et al., 2011) (SUZUKI et al., 2012) (SCOLNIC et al., 2014)) mostram que a precisão das restrições cosmológicas está atualmente limitado por incertezas estatísticas das medições, em particular, a incerteza de calibração de fluxo relativo a diferentes bandas de frequência e conjuntos de estrelas usadas na calibração necessária para a conservação entre magnitude e fluxo em cada filtro. Estudos significativos têm sido tomados pra ultrapassar esta limitação (REGNAULT et al., 2009) (TONRY et al., 2012). A maior preocupação entre os estudiosos está nas técnicas de ajuste da curva de luz e a variação na luminosidade média da SNe Ia com as propriedades das suas galáxias hospedeiras.

Em um esforço de colaboração entre as pesquisas SNLS-SDSS chamada de "*análise da curva de luz conjunta*" (sigla em inglês, JLA), iniciada em 2010, procura melhorar a precisão da calibração fotométrica de ambas as pesquisas. De forma mais rigorosa, procura determinar a incerteza nos modelos da curvas de luz das SNe Ia incluindo a plena amostra espectroscópica do SDSS-II na formação da curva de luz e análise cosmológica (SAKO et al., 2014). De acordo com JLA, as melhorias foram feitas sem levar em conta seus efeitos sobre a derivação de parâmetros cosmológico em relação os dados coletados (BETOULE et al., 2014).

2.5 BAO e CMB

O Universo hoje é formado por uma grande quantidade de estrelas e galáxias. As próprias galáxias não são distribuídas de forma aleatória, mas em vez disso, são organizadas em estruturas maiores, como: aglomerados de galáxias, superaglomerados e espaços vazios. Um dos principais objetivos da cosmologia é entender como as galáxias e as estruturas maiores se formaram.

O modelo teórico do universo primordial (conhecido como *Big Bang*) proposto por George Gamow (1948), previa que em estágio inicial, o universo era composto de um plasma muito denso e quente onde fótons e bárions estavam fortemente acoplados formando um único fluido fóton-bárion. Devido a influência gravitacional da matéria escura sobre o fluido, esse tendia a se aglomerar, mas a pressão exercida pelos fótons fazia oposição ao colapso gravitacional fazendo com que o fluido expandisse novamente. Ao expandir, a gravidade voltava a agir comprimindo o fluido, gerando perturbações em forma ondas esféricas de compressão e rarefação. Esta perturbação se propagava como uma onda sonora no fluido primordial e este fenômeno é conhecido como oscilações acústicas bariônicas (BAO, sigla em inglês).

Conforme o universo se expandia, a temperatura diminuía aumentando o caminho livre dos fótons. Quando o universo tinha por volta de 380000 anos de idade ($z_{ls} \sim 1090$), os elétrons puderam se desacoplar dos fótons, podendo se combinar com núcleos de hidrogênio e hélio, formando os primeiros átomos neutros. Assim os fótons puderam se propagar livremente pelo espaço e os bárions deixaram de ser arrastados. Esse processo é chamado de recombinação, ou seja, a combinação de elétrons com os núcleos e o desacoplamento da matéria e radiação¹². No instante em que houve o desacoplamento, o universo tornou-se transparente, e a informação que registramos hoje desse instante é chamado de radiação cósmica de fundo em microondas (CMB, na sigla em inglês), que permeia todo o espaço e é aproximadamente uniforme e anisotrópico, apresentando pequenas variações por conta das oscilações primordiais, formando uma série de picos no espectro de potência da CMB (picos acústicos).

Sem a interação com os fótons, a pressão de radiação que existia sobre os bárions desaparece um pouco depois do desacoplamento, caracterizando um "congelamento" da sua configuração, ou seja, deixando uma assinatura na distribuição de matéria. A distância característica que a perturbação no fluido fótons-bárions percorreu até o desacoplamento, também chamada horizonte acústico, resultará em uma escala de sobredensidade na distribuição de bárions de $\approx 150 Mpc$. Ao estudar as distribuições de galáxias no universo, podemos detectar essa escala. Portanto, a ideia que houve uma oscilação acústica de bárions teve uma consequência observável. Amostras de galáxias feitas pelo projeto Sloan Digital Sky Survey (SDSS) detectaram a assinatura das oscilações acústicas, favorecendo fortemente a teoria (EISENSTEIN et al., 2005).

Essas informações são utilizadas em conjunto com os dados de SN Ia com o intuito de

¹²"Devido à sucessão rápida recombinação-desacoplamento, normalmente encontra-se na literatura qualquer um dos dois termos para indicar o instante no qual o Universo se tornou transparente à radiação, mas é claro que são dois processos distintos"(HORVATH; ALLEN, 2011).

melhorarmos a análise dos parâmetros estudados. Seguindo o raciocínio de Riess et al. (2007), implementamos os dados observacionais relacionados e consideramos o uso das restrições da CMB e BAO como um *a priori* e não como um observável no sentido estático.

A implementação tem sua origem em duas frentes:

1. Projeto Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP-9 anos) mediu algumas propriedades da superfície de espalhamento encontrando o redshift de desacoplamento $z_{dec} = 1090.97$, a modelagem teórica dessa observação definida por Wang e Mukherjee (2007) para o CMB *shift parameter* R é dada por:

$$R_{th} \equiv \sqrt{\Omega_{m,0}} \frac{H_0}{c} \frac{d_L(z_{dec})}{(1+z_{dec})} = \sqrt{\Omega_{m,0}} \begin{cases} \int_0^{z_{dec}} \frac{dz'}{E(z')}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin \left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^{z_{dec}} \frac{dz'}{E(z')} \right), & k = 1. \\ \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sinh \left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^{z_{dec}} \frac{dz'}{E(z')} \right), & k = -1 \end{cases} \quad (2.48)$$

Seguindo os resultados do WMAP-9 anos (BENNETT et al., 2013) tomamos $R_{obs} = 1.728$ com erro $\sigma_R = 0.016$. A verossimilhança do *shift parameter* é dada por $\mathcal{P}_{CMB} \propto \exp\left(-\frac{\chi_{CMB}^2}{2}\right)$, com

$$\chi_{CMB}^2 = \left(\frac{R_{th} - R_{obs}}{\sigma_R} \right)^2 \quad (2.49)$$

Para a CMB, assumimos que R é gaussianamente distribuído em torno do R_{obs} com desvio padrão σ_R que fornece um resumo eficiente das informações codificadas em todos os dados da CBM (WANG; MUKHERJEE, 2007)

2. Projeto Sloan Digital Sky Survey (SDSS) mediu $z_{BAO} = 0.35$, $A_{obs} = 0.469$ e $\sigma_A = 0.017$ (PERCIVAL et al., 2010), a definição teórica dessa observação foi dada por Eisenstein et al. (2005):

$$A_{th}(z) \equiv \sqrt{\Omega_{m,0}} E(z)^{-\left(\frac{1}{3}\right)} \times \begin{cases} \left[\frac{1}{z_{BAO}} \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz'}{E(z')} \right]^{\frac{2}{3}}, & k = 0 \\ \left[\frac{1}{z_{BAO} \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sin \left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz'}{E(z')} \right) \right]^{\frac{2}{3}}, & k = 1. \\ \left[\frac{1}{z_{BAO} \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} \sinh \left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^{z_{BAO}} \frac{dz'}{E(z')} \right) \right]^{\frac{2}{3}}, & k = -1 \end{cases} \quad (2.50)$$

A verossimilhança é dada por $\mathcal{P}_{BAO} \propto \exp\left(-\frac{\chi_{BAO}^2}{2}\right)$, com

$$\chi_{BAO}^2 = \left(\frac{A_{th} - A_{obs}}{\sigma_A} \right)^2 \quad (2.51)$$

Tal como no caso do CMB, existem correlações espaciais entre os pontos de dados da BAO que impedem a utilização da estatística mediana¹³. No entanto, geralmente é seguro assumir que A é gaussianamente distribuído (BARREIRA; AVELINO, 2011).

¹³Veremos no Capítulo 4 que não é possível utilizar a técnica da Estatística Mediana com apenas um ponto observacional.

3 MODELO COSMOLÓGICO

Da história da cosmologia, muito se fez para tentar compreender como o universo evolui. Mas das ideias que existiam até os primeiros anos do século XX, foi a *Relatividade Geral* (RG) que se mostrou como a mais abrangente e bem sucedida teoria para a descrição dos fenômenos gravitacionais. Assim, procurou-se encontrar equações de forma a associar o fator de escala e outras quantidades físicas a suas fontes, e que pudesse descrever a dinâmica que envolve toda a matéria e energia existente no universo.

A chamada cosmologia padrão baseia-se na ideia de que o material que preenche o universo é modelado como um fluido perfeito desprovido de viscosidade, distribuído de forma homogênea e isotrópica, formado por vários componentes (bárions, matéria escura, radiação e energia escura). As equações de Einstein do campo gravitacional explicam como o espaço-tempo relaciona-se com a matéria (energia), e como a presença dela modifica a geometria do próprio espaço-tempo. As equações de campo de Einstein são dadas por,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde os índices μ e ν variam entre valores 0,1,2,3 (onde o valor 0 corresponde a *coordenada do tipo tempo* e os valores 1,2 e 3 a *coordenadas do tipo espaço*). Do lado esquerdo da equação (3.1), temos a descrição da geometria do espaço-tempo por meio do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura R . À direita, temos a constante gravitacional G , o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ que nos permite obter informações sobre as características do fluido (quais as densidades de energia, a pressão e os componentes que o constituem). Por fim, Λ é a constante cosmológica (anteriormente considerada como termo geométrico) que associada com o tensor métrico ($g_{\mu\nu}$), possui caráter energético conhecida como energia do vácuo (SCHUTZ, 2009).

3.1 Equação de Friedmann

Partindo do *Princípio Cosmológico*, ao considerarmos um elemento de linha Robertson-Walker, que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico 4-dimensional, podemos escrever a equação (2.7) como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (3.2)$$

sendo o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que descreve a geometria do espaço-tempo, onde $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$ e $g_{\mu\nu} \neq 0$ para $\mu = \nu$ (WEINBERG, 2008). Ao compararmos (2.7) com (3.2) e tomando $c = 1$

por conveniência, encontramos os coeficientes não nulos de $g_{\mu\nu}$,

$$\begin{cases} g_{00} = 1 \\ g_{11} = \frac{-a^2}{1-kr^2} \\ g_{22} = -a^2 r^2 \\ g_{33} = -a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta. \end{cases} \quad (3.3)$$

Para o tensor de Ricci, temos

$$\begin{cases} R_{00} = \frac{3\ddot{a}}{a} \\ R_{11} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2kc^2)}{(1-kr^2)} \\ R_{22} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2kc^2)r^2 \\ R_{33} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2kc^2)r^2 \text{sen}^2 \theta \\ R_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu), \end{cases} \quad (3.4)$$

e para o escalar de curvatura,

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (3.5)$$

O tensor momento-energia será caracterizado em termos da densidade (ρ) e pressão (p) do fluido que está relacionado ao conteúdo material do universo (matéria e radiação), do quadri-vetor velocidade u_μ (onde $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $u^\mu u_\mu = 1$) e a métrica do espaço ($g_{\mu\nu}$). Temos assim,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Como estamos considerando um fluido perfeito, a componente T_{00} é a densidade de energia e os elementos da diagonal principal do tensor momento-energia, devem satisfazer a relação $T_{11} = T_{22} = T_{33}$ que representam a pressão isotrópica,

$$T_{\mu\nu} = \text{diag} [\rho, -p, -p, -p]. \quad (3.7)$$

Ao considerarmos o elemento de ordem 00 das equações de Einstein, obtemos

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi G T_{00} + \Lambda g_{00}, \quad (3.8)$$

e conseqüentemente,

$$\frac{3\ddot{a}}{a} - 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi G \rho + \Lambda. \quad (3.9)$$

Temos por fim,

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.10)$$

A (3.10) é conhecida como *Equação de Friedmann*. Ela descreve como a taxa de expansão varia devido ao conteúdo de matéria, a curvatura espacial e a constante cosmológica. A quantidade $H(t)$, já mencionado na equação (2.18) é o parâmetro de Hubble.

Utilizando as outras componentes da diagonal na equação de Einstein, temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.11)$$

conhecida como equação da aceleração.

Derivando a equação (3.10) em relação ao tempo e utilizando a equação (3.11), o resultado que obtemos é chamada *equação de continuidade* (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010),

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + p) = 0. \quad (3.12)$$

Temos, até agora, três equações básicas que descrevem a forma como o universo se expande, das quais, duas são independentes. Podemos observar que a equação (3.11) pode ser derivada das equações (3.10) e (3.12), com as funções $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$. Desta forma, possuindo um sistema com três incógnitas independentes, necessitamos de uma terceira equação que relacione pressão e densidade de energia. Em geral, isso é feito introduzindo uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$, cuja forma é dada por,

$$p_i = w_i \rho_i. \quad (3.13)$$

onde o índice i corresponde aos diferentes componentes do tensor momento-energia e w_i é chamado *parâmetro da equação de estado* que pode ser uma constante ou dependente do tempo (WEINBERG, 2008). Para o caso de matéria sem pressão (matéria bariônica e matéria escura) $w_m = 0$, para radiação $w_r = \frac{1}{3}$ e a pressão de vácuo $w_\Lambda = -1$ que está associada à constante cosmológica.

Desta maneira, como o universo possui componentes distintos, devemos ter uma equação de estado particular que descreva a contribuição que cada componente exerce para a dinâmica do cosmos. Quando nos referimos à pressão e à densidade de energia dos componentes, podemos considerar que o somatório de cada uma dessas quantidades corresponde a pressão e a densidade de energia total do universo. Assim,

$$p_T = \sum_i p_i = \sum_i w_i \rho_i. \quad (3.14)$$

Reescrevendo a equação (3.10) temos,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \quad \therefore \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.15)$$

Considerando ρ como sendo a soma das densidades de matéria bariônica (ρ_b), matéria escura (ρ_{dm}) e radiação (ρ_r), podemos dizer que a densidade total de energia é dada por

$$\rho_T = \rho_b + \rho_{dm} + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (3.16)$$

onde chamamos ρ_Λ de densidade de energia escura.

Assim, podemos escrever,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_b + \rho_{dm} + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.17)$$

3.2 Parâmetros Cosmológicos

Os modelos cosmológicos são representados em termos de seus parâmetros. Abaixo, abordaremos os parâmetros cosmológicos mais relevantes para o nosso estudo.

3.2.1 Parâmetro de Densidade Crítica

A definição de densidade crítica, servirá de base para compararmos o quanto cada componente contribui para a densidade de energia total do universo (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010). O valor é encontrado a partir da equação (3.17) dividida por H^2 ,

$$\frac{8\pi G}{3H^2}\rho + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k}{a^2H^2} = 1. \quad (3.18)$$

O *parâmetro de densidade crítica* é definido como a densidade total de energia em um universo plano ($k = 0$). Assim, temos:

$$\rho_{cr}(t) \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (3.19)$$

para um dado valor de $H(t)$.

Atualmente, o valor da densidade crítica é

$$\rho_{cr,0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (3.20)$$

O índice 0 refere-se a atual estimativa dos parâmetros cosmológicos.

3.2.2 Parâmetro de Densidade

Utilizando a densidade crítica, poderemos determinar um parâmetro adimensional para cada componente do universo. Definimos parâmetro de densidade, como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}. \quad (3.21)$$

O universo contém diferentes tipos de componentes, sendo assim, o índice i serve para identificá-los.

Chamaremos de *parâmetro de densidade total*, a soma de todos os parâmetros de densidade referente a cada componente que constitui um determinado modelo de universo,

$$\Omega(t) \equiv \sum \Omega_i. \quad (3.22)$$

Utilizando a informação da equação (3.16) e dividindo por H^2 a equação (3.15), obtemos:

$$\Omega(t) + \Omega_k = 1, \quad (3.23)$$

onde

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G \rho_T}{3H^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{(aH)^2}. \quad (3.24)$$

Por vezes, nos referimos a valores atuais dos parâmetros de densidade. Assim, temos respectivamente os parâmetros de densidade atuais da radiação (fótons + neutrinos), da matéria bariônica, matéria escura e energia escura (associada a Λ),

$$\Omega_{r,0} = \frac{8\pi G \rho_{r,0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{b,0} = \frac{8\pi G \rho_{b,0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{dm,0} = \frac{8\pi G \rho_{dm,0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{8\pi G \rho_{\Lambda,0}}{3H_0^2} \quad (3.25)$$

e o parâmetro de densidade atual associado à curvatura do espaço

$$\Omega_{k,0} = -\frac{k}{(a_0 H_0)^2}. \quad (3.26)$$

A fim de descrevermos o comportamento de todos os componentes do universo (considerando que não há interação entre eles), devemos achar a solução da equação de continuidade para cada um separadamente. Assim, utilizando a equação (3.14) e supondo w_i constante, integraremos a equação (3.12) para obtermos a densidade de energia em função de w_i e do fator de escala a :

$$\rho_i(a) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w_i)}. \quad (3.27)$$

Portanto, aplicando a equação (3.27) para os tipos de componentes no universo, temos para a matéria não-relativística (bárions e matéria escura), $p_m \approx 0 \implies w_m = 0$:

$$\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (3.28)$$

Para o caso da radiação (relativística), $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$, ou seja, $w_r = \frac{1}{3}$, assim

$$\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (3.29)$$

Para a energia escura, descrita por $w = -1$ pela equação (3.13), ao utilizarmos a equação (3.12), temos a densidade da energia escura (ρ_Λ) independente do tempo, e por consequência, não depende também de a .

Ao dividirmos a equação (3.17) por H_0^2 e utilizando as equações (2.14) e (3.27), conjuntamente com o resultados (3.25) e (3.26), obtemos:

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2} \therefore E(z) = \frac{H(z)}{H_0}. \quad (3.30)$$

Onde chamaremos $E(z)$ de parâmetro de Hubble adimensional,

Ao fazermos $z = 0$, obtemos

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1, \quad (3.31)$$

e chamando $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}$ teremos em simplicidade $\Omega_0 + \Omega_{k,0} = 1$. Dessa maneira, podemos trabalhar de forma prática com a curvatura associando-a a um parâmetro que poderá ser ajustado. Assim,

$$\begin{cases} \Omega_0 = 1 \Rightarrow \Omega_{k,0} = 0 & (k = 0) \\ \Omega_0 > 1 \Rightarrow \Omega_{k,0} < 1 & (k = 1). \\ \Omega_0 < 1 \Rightarrow \Omega_{k,0} > 1 & (k = -1) \end{cases} \quad (3.32)$$

3.2.3 Parâmetro de Desaceleração

A partir das evidências da expansão do nosso universo, surge a necessidade de encontrar uma forma de quantificar a taxa com que ele se expande, ou seja, como $H(t)$ deve variar com o tempo.

Expandindo o fator de escala $a(t)$ por meio da série de Taylor ao redor do instante atual, obtemos

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (3.33)$$

Dividindo a expressão por $a(t_0)$,

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t - t_0)^2 + \dots, \quad (3.34)$$

onde definimos o parâmetro de desaceleração q_0 como

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \quad (3.35)$$

Sendo q_0 o valor do parâmetro de desaceleração para $z = 0$.

Como imaginava-se que o universo estivesse em expansão desacelerada, por conta da presença de matéria, a definição com o sinal negativo proporcionava um valor positivo para q_0 . Em contrapartida, o valor negativo de q_0 sugere expansão acelerada¹.

Podemos escrever o parâmetro de desaceleração em função de z . Escrevendo (3.35) para um tempo arbitrário e analisando \ddot{a} , obtemos

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (3.36)$$

e

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}a}{a} \right) = \frac{d}{dt}(aH) = \dot{a}H + a\frac{dH}{dt}. \quad (3.37)$$

¹A expansão acelerada foi comprovada pelos resultados dos trabalhos de Perlmutter et al. (1999) e Riess et al. (1998), rendendo-lhes o Prêmio Nobel de Física em 2011.

Escrevendo dH/dt ,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{dz}{da} \frac{dH}{dz} = -\frac{\dot{a}}{a}(1+z) \frac{dH}{dz}. \quad (3.38)$$

Logo,

$$\ddot{a} = aH^2 - a(1+z)H \frac{dH}{dz}. \quad (3.39)$$

Finalmente, temos:

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H} \frac{dH}{dz}. \quad (3.40)$$

Consideremos um modelo de universo que contenha *energia escura*, *matéria (bariônica e escura)* e *curvatura*. Para a classe de modelos em questão, derivamos a equação (3.30) e substituindo em (3.40), obtemos o parâmetro de desaceleração para $z = 0$,

$$q_0 = -1 + \frac{1}{2} \left[\frac{3\Omega_{m,0} + 2(1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})}{\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}} \right], \quad (3.41)$$

$$q_0 = \frac{\Omega_{m,0}}{2} - \Omega_{\Lambda,0}. \quad (3.42)$$

Devemos observar que ao considerarmos o modelo acima, uma medida do parâmetro q_0 nos diria algo a respeito dos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$. Como não sabemos tudo que preenche o cosmos, q_0 nos fornece uma nova forma de olhar para o universo. Em princípio, q_0 poderá ser medida diretamente por meio de observações de objetos a grandes distâncias (galáxias distantes, por exemplo). Como foi mostrado no capítulo anterior, estudos utilizando supernovas do tipo Ia forneceram resultados que mostram que o universo parece estar acelerado (LIDDLE, 2003).

A figura (3.1) mostra o plano $\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$ em que a linha cheia (em azul), indica um universo sem aceleração ($q_0 = 0$). Em valores abaixo dessa linha ($q_0 > 0$), o universo está atualmente desacelerado e acima ($q_0 < 0$) acelerado. Pontos sobre a linha tracejada, correspondem a um universo plano ($\Omega_{\Lambda,0} = 0$). Abaixo dessa curva, teremos um universo aberto ($\Omega_{\Lambda,0} < 1$) e acima fechado ($\Omega_{\Lambda,0} > 1$).

Portanto, a descoberta da aceleração do universo destacou-se como um grande avanço da cosmologia observacional. As pesquisas de supernovas do tipo Ia, indicaram a existência da componente "*energia escura*" representada pela constante cosmológica Λ , que se opõem à atração da matéria fazendo com que a expansão do universo seja acelerada. Desde então, a disponibilidade cada vez maior de conjunto de dados, combinado com medidas indiretas, tais como a CMB ou a BAO, confirmam a existência da energia escura, que é responsável atualmente por aproximadamente 73% da densidade de energia do universo. A porcentagem restante está principalmente na forma de matéria fria, sobretudo, sob a forma de matéria escura. (BARREIRA; AVELINO, 2011).

Logo, os dados observacionais apontam para o atual modelo cosmológico, tido como padrão, que considera o universo espacialmente plano, homogêneo e isotrópico, constituído

basicamente por matéria bariônica, matéria fria escura (CDM, do inglês, *Cold Dark Matter*), fótons, neutrinos e energia escura com $w = cte = -1$. Esse modelo é conhecido como Λ CDM (modelo padrão), que também é chamado de *concordância*.

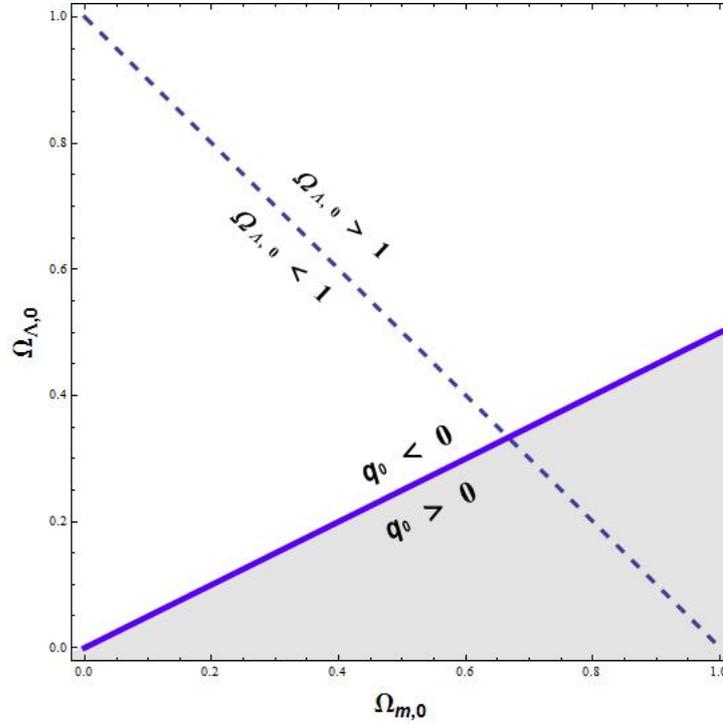


Figura 3.1 – Gráfico que demonstra uma classe de modelos que contém matéria (sem pressão), constante cosmológica e curvatura.

3.3 xCDM

O modelo x CDM² é uma pequena modificação do modelo padrão Λ CDM. Nele, a energia escura é descrita por um fluido homogêneo com o parâmetro da equação de estado,

$$w_x = \frac{p_x}{\rho_x}, \quad (3.43)$$

onde w_x é uma constante livre diferente de -1 . Esse modelo foi introduzido por Turner e White (1997) com o objetivo de testar a consistência dos dados da expansão do universo com a constante cosmológica. Para w_x constante, há dois intervalos de interesse: i) $-1 < w_x < -1/3$, conhecido como x CDM padrão; ii) $w_x < -1$, conhecido como x CDM estendido ou *phantom energy* (CALDWELL; LINDER, 2005).

Utilizando a equação (3.43) na (3.12), obtemos

$$\dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w_x)\rho_x = 0, \quad (3.44)$$

²Também pode ser escrito como w CDM

que tem como resultado

$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3(1+w_x)}, \quad (3.45)$$

onde podemos observar que o fluido x só poderá ter densidade constante se o valor de w_x for igual a -1 .

A equação de Friedmann para esse modelo é escrita como

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{m,0} (1+z)^3 + (1 - \Omega_{m,0}) (1+z)^{3(1+w_x)} \right]^{1/2}, \quad (3.46)$$

sendo $\Omega_{m,0}$ e w os parâmetros livres. Sendo essa a parametrização mais simples, pois há outras que permitem que w_x varie com o tempo.

3.4 $\Lambda(t)$ CDM

Estudos já realizados com Λ apontam uma grande diferença do valor observado da constante cosmológica e o seu valor teórico obtido pelas teorias quânticas de campo, sugerindo como possível solução a variação desse termo cosmológico, ocorrendo um decaimento a partir de um grande valor até um pequeno valor observado hoje, a medida que o universo se expande (BORGES; CARNEIRO, 2005).

A energia escura continua sendo interpretada como a energia de vácuo, mas o valor de Λ deixa de ser constante e passa a obedecer uma lei de evolução, onde sugere que Λ seja proporcional ao parâmetro de Hubble

$$\rho_\Lambda = \Lambda = \sigma H, \quad (3.47)$$

sendo σ uma constante positiva da ordem do cubo da massa do pión e adotamos $8\pi G = c = \hbar = 1$. A equação de estado do vácuo possui $w = -1$ como no modelo de concordância,

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\Lambda. \quad (3.48)$$

Para o nosso trabalho, foi utilizado o modelo $\Lambda(t)$ CDM plano que servirá de apoio ao nosso estudo.

Consideremos um cenário cosmológico preenchido com matéria bariônica, matéria escura e energia escura, onde utilizaremos as equações de Friedmann (3.10) no caso espacialmente plano e da continuidade (3.12),

$$3H^2 = \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (3.49)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = -\dot{\Lambda}. \quad (3.50)$$

Podemos interpretar a equação de continuidade (3.50) como possuindo um termo fonte, que com o decaimento da densidade de energia do vácuo, ocorrerá a produção de partículas de matéria escura.

O desenvolvimento teórico para o caso plano, é discutido de maneira detalhada em Borges e Carneiro (2005), Carneiro et al. (2006) e Pigozzo (2010). Sendo assim, o nosso interesse está na equação de Friedmann para $\Lambda(t)$ CDM - plano,

$$H(z) = H_0 \left[1 - \Omega_m + \Omega_m (1 + z)^{3/2} \right], \quad (3.51)$$

sendo $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ e parâmetros livres Ω_m e h .

4 MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Devido ao grande conjunto de dados de observações cosmológicas coletados nas últimas décadas, o estudo e compreensão do universo mudou, não apenas de forma quantitativa, mas também qualitativamente. Como o objetivo dos cosmólogos é estudar a origem e evolução física do universo, vem sendo um desafio extrair informações significativas dos dados coletados. Mesmo assim, ao longo dos anos, foi possível estruturar um modelo cosmológico padrão (Λ CDM) que torna possível a descrição do universo por meio de um conjunto de parâmetros físicos.

Como a cosmologia tornou-se uma ciência orientada pelos dados, o uso de ferramentas estatísticas cada vez mais sofisticadas fez com que o estudo cosmológico possuísse uma relação intrínseca com a estatística: conhecimento sobre barras de erro e portanto intervalos de confiança de uma medição. Assim, o uso básico de ferramentas estatísticas tornou-se indispensável para a compreensão da literatura cosmológica recente (VERDE, 2010).

Neste capítulo, introduziremos com objetividade as ferramentas estatísticas que darão base ao nosso trabalho. Começaremos com uma breve introdução sobre as técnicas de inferência estatística (método de comparação entre previsão teórica e dados observacionais ou experimentais) baseada na estatística Bayesiana. Como as análises que serão feitas não utilizam a análise bayesiana em toda sua complexidade, abordaremos tópicos introdutórios com a finalidade de nos guiar para as técnicas utilizadas em Cosmologia, incluindo o método proposto neste trabalho: a estatística mediana.

4.1 Inferência Bayesiana

A estatística atual é basicamente dividida em Inferência Frequentista (ou Clássica) e Inferência Bayesiana. Podemos ver a diferença básica entre as duas pela suas definições (GREGORY, 2005):

Inferência	Definição
Frequentista (Clássica)	$\mathcal{P}(a)$ é o número de vezes com que o evento ocorre sobre o número total de ensaios, no limite de uma série infinita de repetições. Sendo a uma variável aleatória.
Bayesiana	$\mathcal{P}(a b)$ é um número real que medirá a plausibilidade de uma proposição/hipótese a , se a proposição representada por b é admitida como verdadeira.

Tabela 4.1 – Comparação entre as inferências estatísticas por suas definições básicas de probabilidade .

A chamada escola frequentista do pensamento define probabilidade como o limite para o número de ensaios independentes que tendem ao infinito, enquanto que os Bayesianos interpretam a probabilidade como grau de crença em uma hipótese. Mas a definição de probabilidade frequentista é no entanto insatisfatório em alguns aspectos. Ao assumir que ensaios repetidos têm a mesma probabilidade de resultados, ela não pode lidar com situações que não são passíveis de repetição, como a probabilidade de uma pessoa ser alvejada por uma bala "perdida". No contexto cosmológico, temos uma pequena amostra do universo, onde precisamos estimar parâmetros que possam descrever o universo como um todo. Questões como essas não podem se quer ser formuladas em uma inferência clássica (GREGORY, 2005).

A nossa variável aleatória (evento) a possui probabilidade $\mathcal{P}(a)$ de assumir um valor específico; chamamos esta função de distribuição de probabilidades. Caso os valores possíveis de a sejam contínuos, possuindo um valor entre a e $a + da$, a expressão $\mathcal{P}(a)$ é chamada de densidade de probabilidades: $\mathcal{P}(a)da$ é a probabilidade de uma variável aleatória a assumir um valor ente a e $a + da$.

Os Frequentistas consideram apenas distribuições de probabilidades de eventos, enquanto Bayesianos consideram hipóteses como eventos. Mas tanto na distribuição de inferência frequentista quanto na Bayesiana, as seguintes regras são aplicáveis:

1. $\mathcal{P}(a) > 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(a)da = 1$. No caso discreto, trocamos a integral por soma.
3. Para eventos mutuamente exclusivos, $\mathcal{P}(a_1 \cup a_2) = \mathcal{P}(a_1) + \mathcal{P}(a_2)$
4. Em geral, $\mathcal{P}(a_1, a_2) = \mathcal{P}(a_1)\mathcal{P}(a_2|a_1)$. A probabilidade de a_1 e a_2 ocorrerem, é o produto da probabilidade de a_1 pela probabilidade de a_2 , condicionada que a_1 tenha ocorrido.

O item 4 deve ser observado com atenção. Caso ocorram eventos independentes, onde $\mathcal{P}(a_2|a_1) = \mathcal{P}(a_2)$ podemos escrever $\mathcal{P}(a_1, a_2) = \mathcal{P}(a_1)\mathcal{P}(a_2|a_1) = \mathcal{P}(a_1) \cdot \mathcal{P}(a_2)$. Como a probabilidade de que dois eventos ocorram pode ser escrita tanto como $\mathcal{P}(a_1, a_2)$ ou $\mathcal{P}(a_2, a_1)$, ao substituir a_1 por D (dados) e a_2 por H_i (hipótese), obtemos o **teorema de Bayes**¹

$$\mathcal{P}(H_i|D) = \frac{\mathcal{P}(H_i)\mathcal{P}(D|H_i)}{\mathcal{P}(D)}, \quad (4.1)$$

onde,

- H_i , proposição afirmando a verdade de uma a hipótese (ou modelo) de interesse;
- D , proposição referente aos dados (ou conjunto de dados observáveis);
- $\mathcal{P}(H_i|D)$, probabilidade **posterior** (*a posteriori*) de H_i ;

¹ $\mathcal{P}(a_1)\mathcal{P}(a_2|a_1) = \mathcal{P}(a_2)\mathcal{P}(a_1|a_2) \Rightarrow \mathcal{P}(a_2|a_1) = \frac{\mathcal{P}(a_2)\mathcal{P}(a_1|a_2)}{\mathcal{P}(a_1)}$

- $\mathcal{P}(D|H_i)$, **verossimilhança** (*likelihood*);
- $\mathcal{P}(H_i)$, probabilidade **a priori** são as informações que temos do modelo;
- $\mathcal{P}(D)$, fator de normalização.

O termo $\mathcal{P}(H_i|D)$ é a probabilidade posterior (*a posteriori*) da hipótese, considerando os dados. Este é proporcional ao produto da probabilidade prévia para a hipótese $\mathcal{P}(H_i)$, pela distribuição amostral dos dados $\mathcal{P}(D|H_i)$ que é a probabilidade do conjunto dos dados que obtemos, caso H_i seja verdadeira (também chamada de função de verossimilhança $\mathcal{L}(H_i) \equiv \mathcal{P}(D|H_i)$). A constante de normalização no denominador é a probabilidade marginal (em cosmologia muitas vezes chamado de "evidência Bayesiana")(TROTTA, 2008) dada por

$$\mathcal{P}(D) \equiv \sum_i \mathcal{P}(D|H_i)\mathcal{P}(H_i), \quad (4.2)$$

em que a soma é executada sobre todos os possíveis resultados para a hipótese H_i . O Teorema de Bayes é uma receita de como se aprende com a experiência, renovando a credibilidade nos modelos à luz dos dados observacionais.

4.1.1 Marginalização

A marginalização é um procedimento com o qual podemos eliminar parâmetros de forma democrática, com o intuito de estudarmos outros parâmetros de forma independente. Consideramos, até o momento, distribuições de probabilidade de uma variável aleatória a , mas poderemos de forma análoga definir distribuições multivariadas, uma distribuição de probabilidade conjunta de duas ou mais variáveis, por exemplos $\mathcal{P}(a, b)$.

Sejam w e A proposições acerca de dois parâmetros distintos, sua probabilidade posteriori será $\mathcal{P}(w, A)$. A regra do produto para dois parâmetros distintos pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(w, A) &= \mathcal{P}(w) \times \mathcal{P}(A|w) \\ &= \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(w|A). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Como desejamos que A seja eliminado, assumiremos que este parâmetro seja discreto. Assim, devemos quantificar todas as possibilidades acerca de A , assumindo qualquer dos valores: A_1 ou A_2 ou A_3 etc. Supondo para cada termo um certo nível de verdade, a operação lógica "ou" representa uma soma $A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$, passando por todos os valores possíveis independentes entre si, teremos a unidade:

$$\mathcal{P}(A_i) = 1. \quad (4.4)$$

O parâmetro w será verdadeiro para cada valor possível de A , ou seja, w, A_i . Considerando a probabilidade $\mathcal{P}(w, A_i)$ verdadeira, aplicando a equação (4.3) que é a regra do produto e

(4.4), teremos,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(w, A_i) &= \mathcal{P}(A_i) \times \mathcal{P}(w|A_i) \\ &= 1 \times \mathcal{P}(w|A_i) \\ &= \mathcal{P}(w).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Como consideramos eventos independentes,

$$\mathcal{P}(w|A_i) = \mathcal{P}(w).\tag{4.6}$$

Referente ao lado esquerdo da equação (4.5), aplicamos a propriedade distributiva do produto lógico:

$$\mathcal{P}(w, A_i) = \mathcal{P}(\{w, A_1\} + \{w, A_2\} + \dots),\tag{4.7}$$

como os A_i são independentes entre si, temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(w) &= \mathcal{P}(w, A_i) \\ &= \mathcal{P}(\{w, A_1\} + \{w, A_2\} + \dots) \\ &= \mathcal{P}(w, A_1) + \mathcal{P}(w, A_2) + \dots \\ &= \sum_i \mathcal{P}(w, A_i).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Estendendo essa ideia para o caso em que A é um parâmetro variável de forma contínua ao invés de um parâmetro discreto, podemos escrever

$$\mathcal{P}(w) = \int dA \mathcal{P}(w, A),\tag{4.9}$$

onde a quantidade $\mathcal{P}(w)$ corresponde à distribuição posterior marginal para w . Para um parâmetro contínuo do tipo w , teremos a função densidade de probabilidade marginal *a posteriori*. (GREGORY, 2005)

Assim, em Cosmologia, podemos restringir simultaneamente os parâmetros de um modelo, como por exemplo, se tivermos dois parâmetros $\theta = \{\Omega_m, w\}$ e quisermos saber a distribuição de probabilidade individual de Ω_m , teremos

$$\mathcal{P}(\Omega_m) = \int dw \mathcal{P}(\Omega_m, w).\tag{4.10}$$

4.1.2 Estimação de Parâmetros

Na tentativa de melhor compreender o universo, formulamos uma classe de modelos descritos por um conjunto de parâmetros θ e, com um conjunto de observações, buscamos ajustar a classe de modelos aos dados coletados. O modelo deverá ser motivado por argumentos físicos e descritos por uma função, para que assim, possamos verificar o quão próximo o modelo deva estar do que se é observado na natureza. O método escolhido para a coleta de dados deve

estar previsto no modelo adotado para que possamos confrontá-los. O modelo utilizado por nós será descrito pelo parâmetro de Hubble em função do redshift e dos parâmetros $H(z_i, \theta)$. Os dados que usaremos no nosso trabalho são obtidos por meio do módulo da distância. Este método calcula, por exemplo, o módulo da distância utilizando a magnitude aparente de um objeto observado que definiremos como $\mu_{obs}(z_i)$ e chamaremos o valor previsto no modelo teórico de $\mu(z_i|\theta)$.

Ao coletarmos alguns dados, gostaríamos de interpretá-los em termos do modelo que assumimos como verdade. Adotando, por exemplo, o modelo cosmológico Λ CDM, as restrições surgem por meio da comparação do módulos teórico da distância²,

$$\mu(z_i|\theta) = 5 \log_{10} \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) - 5 \log_{10} h + 42,384. \quad (4.11)$$

com o módulo da distância observacional $\mu_{obs}(z_i)$, inferido a partir dos dados de redshifts de supernovas. Sendo $d_L(z) = d_L(z|\theta)$ a distância luminosidade, para os parâmetros $\theta = \{\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o\}$ do modelo, dado por (2.33), onde o valor de $E(z)$ será

$$E(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2}, \quad (4.12)$$

com Ω_m , Ω_k e Ω_Λ , sendo respectivamente os parâmetros de densidade atuais da matéria (bariônica e não-bariônica), curvatura do espaço e energia escura. Assumimos que o parâmetro da equação de estado é constante e vale $w = -1$ e o valor do parâmetro de densidade de curvatura será dado por $\Omega_k = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m$.

Utilizando o *Teorema de Bayes*, temos

$$\mathcal{P}(\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o | \mu_{obs}) = \frac{\mathcal{P}(\mu_{obs} | \Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o) \mathcal{P}(\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o)}{\mathcal{P}(\mu_{obs})}, \quad (4.13)$$

como não há vínculos a priori sobre os parâmetros, vamos supor que o prior $\mathcal{P}(\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o)$ seja uniforme, ou seja, não possua informações adicionais sobre o sistema. E como o termo de normalização $\mathcal{P}(\mu_{obs})$ é irrelevante para a estimação de parâmetros (em outras situações, como seleção de modelos, este termo tem um papel crucial), a probabilidade posterior será proporcional à verossimilhança

$$\mathcal{P}(\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o | \mu_{obs}) \propto \mathcal{P}(\mu_{obs} | \Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o) \mathcal{P}(\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o). \quad (4.14)$$

O melhor modelo, nesse caso, é o que maximiza a verossimilhança.

Por se tratar de uma probabilidade, a verossimilhança tem por obrigação ser real e positiva. E sendo um elemento de ligação com os dados medidos, deve necessariamente conter as observações. Basicamente, a verossimilhança tenta quantificar os desvios entre os valores medidos experimentalmente (observáveis) e os valores preditos teoricamente (estimador). A quantificação pode ser feita por meio de qualquer função matemática que descreva esses desvios.

²ver as equações (2.40) e (2.41)

Se soubermos quais são os parâmetros, podemos calcular a distribuição esperada dos dados. As mais comuns são as distribuições Binomiais, de Poisson e Gaussiana (GREGORY, 2005).

Supondo que nossas observações são estatisticamente independentes e que seguem uma distribuição de Gauss, a função matemática que pode descrever os desvios é a função Gaussiana,

$$\mathcal{P}(\mu_{obs}|\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o) = C \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \quad (4.15)$$

onde a constante C será incorporada à normalização da distribuição. O termo χ^2 é a soma quadrática dos resíduos, que é dado por

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu(z_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.16)$$

Assim, ao considerarmos que os erros seguem esse tipo de distribuição, ao maximizarmos a verossimilhança, minimiza-se o χ^2 (HUGHES; HASE, 2010).

Chamamos a equação (4.16) de análise estatística χ^2 , onde N corresponde ao número de supernovas no conjunto de dados $\mu_{obs}(z_i)$ e $\mu(z_i|\theta)$ nos fornece a predição do modelo ao fixarmos os parâmetros representados por $\theta = \{\theta_j\}$. O denominador σ_i^2 está associado aos erros observacionais relacionados as medidas do redshift³ ou módulo de distância ($\sigma_i^2 = \sigma_{z,i}^2 + \sigma_{\mu,i}^2$). Este teste permite dizer se existe diferença significativa entre um conjunto de dados observados e um modelo teórico.

Ao utilizarmos a análise χ^2 , estamos assumindo por hipótese que:

1. Os resultados experimentais são estatisticamente independentes.
2. Não há erros sistemáticos.
3. Os erros experimentais seguem uma distribuição de Gauss.
4. O desvio padrão dos erros estatísticos é igual à incerteza da observação.

Como pretendemos maximizar a probabilidade *a posteriori* $\mathcal{P}(\Omega_m, \Omega_\Lambda, H_o|\mu_{obs})$, ao escolhermos uma distribuição gaussiana para a verossimilhança, queremos obter valores para que os parâmetros θ minimizem o argumento da exponencial χ^2 . Sendo assim, para a estimativa de erro, os intervalos de confiança devem ser considerados. Barras ou elipses de erro, nada mais são que manifestações de intervalos de confiança. Esses são inferidos a partir da função de verossimilhança.

Na análise χ^2 , ao considerarmos que os erros de medição são normalmente distribuídos e que o modelo é linear nos parâmetros, se define que o número de graus de liberdade como $n = N - j$, onde N é o tamanho da amostra e j o número de parâmetros livres de θ . Um modelo

³Geralmente, os erros associados a medida do redshift são desprezados.

teórico ajusta-se bem ao conjunto de dados experimentais, quando o valor mínimo calculado para χ^2 é aproximadamente igual ao número de graus de liberdade (PRESS, 1992).

O nível de confiança em um espaço de j dimensões são determinados por meio do valor $\Delta\chi^2(\theta_j)$ dado por,

$$\Delta\chi^2(\theta_j) \equiv \chi^2(\theta_j) - \chi_{min}^2 \quad (4.17)$$

Por exemplo, se temos dois parâmetros livres, para um valor de $\Delta\chi^2 = 2,30$ teremos um nível de confiança de $1\sigma(68,3\%)$, $\Delta\chi^2 = 6,17$ corresponde a $2\sigma(95,4\%)$ e $\Delta\chi^2 = 11,8$ a $3\sigma(99,73\%)$. Valores de $\Delta\chi^2$ e seus correspondentes níveis de confiança, segundo o número de parâmetros livres, poderão ser encontrados em Press (1992).

4.2 Estatística Mediana

Assim como no χ^2 , em que foi utilizado dados de Supernova Tipo Ia (SNIa), descreveremos agora um método alternativo de análise de dados chamado *Estatística Mediana*⁴(ver apêndice - A), inicialmente proposta por GottIII et al. (2001), em que ele argumenta por meio de exemplos convincentes, que o método proposto por ele é uma alternativa confiável para o χ^2 . Houve uma sugestão de modificação no método por Avelino et al. (2002), com o intuito de melhorar a sua precisão. Em nosso trabalho, iremos também propor uma modificação simples criando condições para estudarmos os parâmetros cosmológicos que podemos obter a partir do método.

A ideia básica da estatística mediana é que o verdadeiro valor de uma quantidade física é a mediana do conjunto de medidas. O método baseia-se no pressuposto de que o conjunto de dados responde apenas a dois requisitos estatísticos: (1) todas as medições são independentes e (2) não há erros sistemáticos para o conjunto de dados como um todo. Ao descartamos as hipóteses (3) e (4) (mencionados anteriormente para o caso χ^2) podemos ainda fazer afirmações bastante consistentes sobre os dados analisados. Portanto, mediana não depende dos erros de medição (GOTTIII et al., 2001), o que é uma vantagem se os erros são suspeitos.

Ao utilizarmos qualquer método estatístico, quanto menos pressupostos precisarmos fazer sobre um determinado conjunto de dados, maior será a confiança nos resultados que dela derivam. Comparando com o χ^2 , a análise mediana mostra-se menos sensível a valores extremos porque requer menos hipóteses estatísticas (GOTTIII et al., 2001).

GottIII et al. (2001) argumentaram que a presença de um ou mais pontos de dados "defeituosos"(muito distante dos valores coletados) poderiam distorcer severamente o χ^2 , enquanto que os resultados da mediana permaneceriam os mesmos. Como exemplo, GottIII et al. (2001)

⁴Na estatística e teoria de probabilidade, chamamos de **mediana** o valor numérico que separa a metade superior dos dados de uma amostra (ou distribuição) ordenada de forma crescente a partir da metade inferior (MURTEIRA; BLACK, 1983).

imaginaram que se alguém medisse o peso de um milhão de pinguins imperador adultos e encontrasse um peso médio de $45kg$, poderia deduzir com base nos dados observados, que os valores seguiriam uma distribuição de Gauss. Supondo que o mais pesado pese $67kg$, a probabilidade de se pesar o pinguim adulto 1000.001 com peso superior a $90kg$ será de $\mathcal{P} = \frac{1}{1000.001}$. Após a pesagem dos 1000.001 pinguins, uma vez que todos os dados são independentes, cada um dos pinguins devem ter chances iguais de ser o mais pesado. Assim, o último pinguim tem a probabilidade $\frac{1}{1000.001}$ de pesar mais que $67kg$. Isso pode ser relevante no caso de supernovas. Usando um conjunto de dados de supernovas, pode-se encontrar aquela que é "estranha" em relação as outras, por apresentar uma magnitude 400 vezes maior que o normal (QUIMBY et al., 2014) (NICHOLL et al., 2013). Se não formos capazes de reconhecê-las como uma classe separada, podemos poluir indevidamente os dados - algo que não ocorre com a mediana estatística, pois como não há suposições sobre a distribuição, há menos influência de valores extremos. Sendo assim, informações suficientes sobre um pinguim (supernova), que devem ser capazes de identificá-las como uma espécie diferente (classe de supernova), podemos evitar as distorções nos resultados. As distribuições χ^2 são particularmente propensas a estes erros, pois a distribuição normal cai rapidamente a grandes valores (tipo $\exp\left[\frac{-\chi^2}{2\sigma}\right]$).

Partindo do princípio de que os resultados experimentais são estatisticamente independentes e que não haverá erros sistemáticos, esperamos que após a realização de um número grande e finito de medições possamos encontrar a mediana verdadeira (MV). Mas para que isso ocorra, por hipótese, o valor da MV será obtida com o número N de medidas tendendo ao infinito. Isso é quase equivalente a hipótese de que *não há erros sistemáticos*, pois se tomarmos um trilhão de medições, e cada uma é uma medida justa, poderíamos esperar que naturalmente metade das medidas estaria acima do valor verdadeiro e metade abaixo. Se observarmos, existem algumas distribuições como a de Cauchy que não possui um valor médio definido no limite de N grande, mas ainda tem muito bem definida valores medianos (GOTTIII et al., 2008). Portanto, com um número muito grande de medições (com N tendendo ao infinito) e supondo que cada medição individual seja estatisticamente independente, cada medição tem a possibilidade de 50% de estar acima ou a abaixo da mediana verdadeira (GOTTIII et al., 2001)(ver figura (4.1)).

Consideremos um conjunto de dados que consiste em N medições para uma quantidade que atenda aos dois requisitos acima. Organiza-se as N medições (M_N) do valor mais baixo para o mais alto, de tal maneira que $M_{k+1} > M_k$, onde $k = 1, 2, 3, \dots, N$, então existe uma probabilidade de 50% de que cada medição esteja acima (ou abaixo) do valor da *mediana verdadeira* (MV) da distribuição, que deve estar situada entre M_k e M_{k+1} (ver figura 4.1). Então, ao executarmos N medições, a probabilidade de uma quantidade k dessas medidas estarem acima (ou abaixo) da MV é simplesmente dada pela distribuição binomial,

$$\mathcal{P}_{binomial}(k, N) = \frac{2^{-N} N!}{k! (N - k)!}. \quad (4.18)$$

onde $M_0 = -\infty$ e $M_{N+1} = +\infty$. Devemos observar que a (4.18) faz o papel da verossimilhança

(GREGORY, 2005).

Notemos que para N grande, o valor esperado da distribuição de largura x , da MV é $\langle x \rangle = 0,5$, com desvio padrão $\langle x - \langle x \rangle^2 \rangle^{1/2} = 1/(4N)^{1/2}$. Com o aumento de N até o infinito, uma distribuição Gaussiana é atingida e a estatística mediana recupera a proporcionalidade usual do desvio padrão para $1/N^{1/2}$ (GOTTIII et al., 2001).

Sendo o conjunto de dados $\mu_{obs}(z_i) (i = 1, 2, \dots, N)$, a verossimilhança dos parâmetros cosmológicos θ é obtida por meio da contagem do número de valores de observações que ficam acima (ou abaixo) da curva dada pela Eq. (4.11).

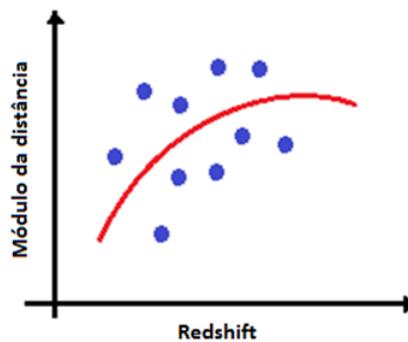


Figura 4.1 – Ilustração de pontos acima ou abaixo da curva teórica.

Devemos ter cuidado com o fato de que ao utilizarmos a probabilidade, a estatística mediana conta apenas o número de pontos experimentais acima ou abaixo da curva teórica. Ela não faz distinção entre as várias maneiras em que esses pontos possam estar distribuídos. A probabilidade de uma sequência de pontos estarem acima e outra sequência abaixo, é a mesma. Por exemplo, em um conjunto de dados em que a primeira terça parte dos pontos esteja acima da curva do modelo, a segunda terça parte abaixo e a terceira acima, tem a mesma probabilidade (quando calculado com a mediana). Como também pode ocorrer que uma sequência de pontos esteja acima da curva, outra sequência abaixo, em seguida novamente acima e assim por diante (figura 4.2). Esses dois casos não devem ser diferentes, uma vez que o primeiro caso pode vir a ser um ajuste ruim para os dados por ter exatamente a dois terços acima dos pontos e um terço abaixo da mediana. O problema de não conseguir "enxergar" a sequência também existe, até certo ponto, para a análise χ^2 (AVELINO et al., 2002). No entanto, a diferença essencial é que, nesse caso, as barras de erro são conhecidas, o que atenua substancialmente o problema.

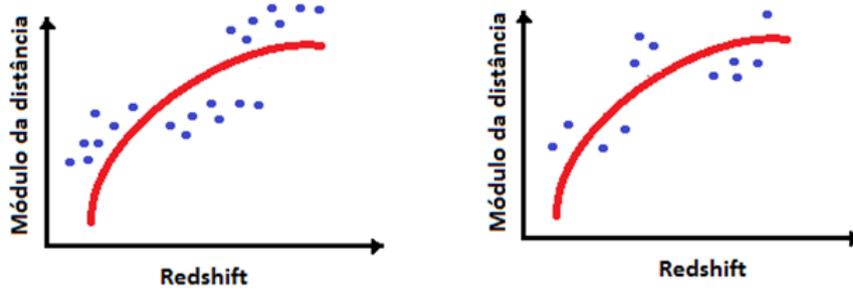


Figura 4.2 – Ilustração das possíveis distribuições dos pontos acima ou abaixo da curva teórica.

Avelino et al. (2002) ao observar esse problema, propõe não somente a contagem do número de pontos acima(ou abaixo) da previsão teórica, mas também leva em consideração o tamanho da maior sequência contínua encontrada ou o número total de sequências contínuas. Para isso, foi feita a ordenação do conjunto de dados de SNIa do menor redshift para o maior e em seguida foi feita a divisão dos dados em n intervalos, com N_j sendo o número de SNIa no intervalo j ($j = 1 \dots n$). Desta maneira, a probabilidade global dos parâmetros θ é dado por,

$$\mathcal{P}_{total} = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}_{binomial}(k_j, N_j), \quad (4.19)$$

onde k_j é o número de pontos que estão no intervalo j abaixo (ou acima) da curva teórica dada pelos parâmetros. Portanto, ao dividirmos o conjunto de dados em grupos de supernovas, evitamos resultados discrepantes.

Para aplicação do método da mediana, ordenamos o conjunto das 580 SNe Ia em função dos redshifts (SUZUKI et al., 2012), do menor valor de z para o maior. Seguimos a sugestão de Avelino et al. (2002), que ao modificar o método proposto por GottIII et al. (2001), verificou melhor eficácia ao dividir os dados em pacotes menores. Sendo assim, após a ordenação dividimos em quatro grupos com 145 supernovas. Outras maneiras de dividi-los são possíveis, no entanto foi verificado por nós, que há um limite ao dividirmos o tamanho de cada grupo. Dividir em seis ou mais grupos, a depender do tamanho do pacote de SNe Ia utilizado, mostrou-se relevante quando a quantidade de medidas de cada pacote for menor ou igual a 20%. Por tentativa, observamos que o valor mais interessante, de acordo com os resultados obtidos, está entorno de 25%.

Partindo dos conceitos até aqui discutidos sobre a estatística mediana, propomos um pequena modificação neste método. Ao invés de contarmos o número de pontos que poderiam estar acima ou abaixo da curva teórica, contaríamos a quantidade de pontos que estão percentualmente mais próximos da curva teórica, dentro do intervalo da barra de erro associada aos dados da SNe Ia, e os pontos que estão acima (ou abaixo) da margem superior (ou inferior) da barra de erro (ver figura (4.3)).

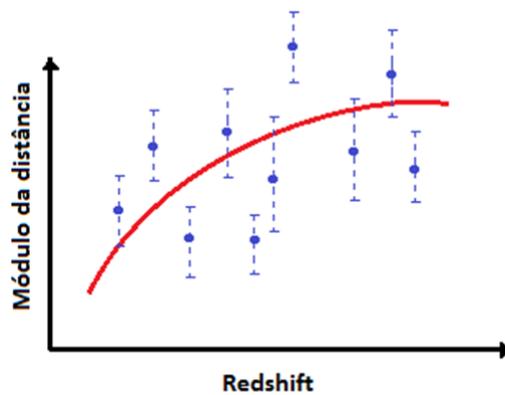


Figura 4.3 – Ilustração da distribuição de pontos acima ou abaixo da curva teórica.

Para garantir que a quantidade total de pontos coletados seja um número inteiro positivo, incluímos no algoritmo uma função de arredondamento. Os resultados dessa mudança mostraram-se bastante significativos ao analisarmos os dados de supernovas, como podemos verificar no gráfico (4.5). O fato de utilizarmos as barra de erros, não viola a hipótese (2) pois apenas as utilizamos para conhecer o quão próximo o ponto está percentualmente acima (ou abaixo) da curva teórica, permitindo também contabilizar os pontos que estão sobre a curva.

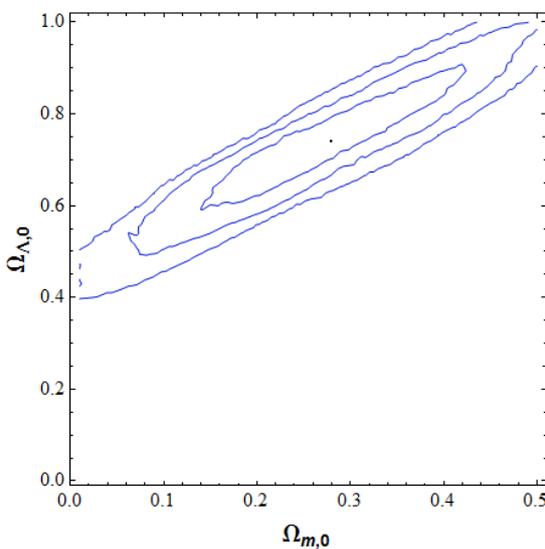


Figura 4.4 – Método proposto por Avelino et al. (2002).

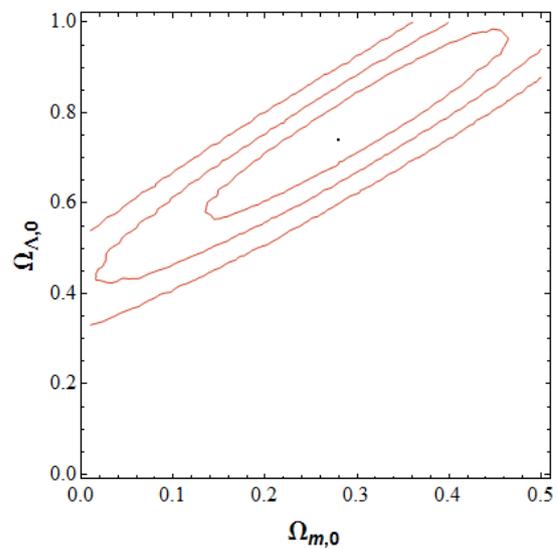


Figura 4.5 – Método proposto em nosso trabalho.

Ao compararmos a proposta do nosso trabalho com a mudança feita por Avelino et al. (2002), podemos notar que o método utilizado no gráfico (4.4) mostra-se mais restritivo do que o método proposto por nós (gráfico 4.5). Porém, ao utilizarmos as barradas de erro, analisamos uma faixa maior de informações dos dados. Assim, apesar dos resultados do nosso trabalho

apresentarem com menor restrição em comparação com Avelino et al. (2002), os valores dos parâmetros entre os métodos são próximos (tabela 4.2).

Ajuste	ΛCDM_k	
	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{\Lambda,0}$
SNe Ia (Método proposto)	$0.270^{+0.409}_{-0.193}$	$0.730^{+0.917}_{-0.645}$
SNe Ia (Método Avelino)	$0.253^{+0.338}_{-0.154}$	$0.690^{+0.790}_{-0.591}$

Tabela 4.2 – Comparação entre os métodos proposto neste trabalho e o de Avelino, aplicado ao modelo ΛCDM_k (padrão com curvatura).

5 RESULTADOS DAS ANÁLISES

Ao aplicarmos o método da Estatística Mediana, utilizamos dados de Supernovas do Tipo Ia, relacionando redshift e a magnitude. Como já foram definidas anteriormente, a primeira grandeza nos dá a informação de que quanto maior for o deslocamento espectral das linhas de emissão ou absorção, maior será a distância da fonte até nós. A magnitude é uma escala logarítmica de medida de fluxo de radiação.

Utilizamos o catálogo de conjunto de dados do *Supernova Cosmology Project* (SCP) intitulado *Union 2.1 SNe Ia Complitation* publicado em 2012 (SUZUKI et al., 2012), que é uma atualização do *Union 2* (AMANULLAH et al., 2010), que reuniu 833 supernova de 19 conjuntos de dados. Destes, 580 SNe Ia no intervalo de $0.015 < z < 1.414$, passaram por "cortes de qualidade"¹ e todas as supernovas foram ajustadas usando um único filtro da curva de luz. O método utilizado pelo SCP para o tratamento das curvas de luz de modo a obter um valor verossímil para o brilho máximo da emissão do pacote de dados com o intuito de estimar o módulo da distância, é o ajustador SALT 2 (Spectral Adaptive Lightcurve Template) (GUY et al., 2007).

Uma vez que as supernovas em altos redshifts não obedecem a relação linear de Hubble, um modelo cosmológico é assumido para estimar o módulo da distância. Geralmente, o modelo padrão (Λ CDM) é o mais utilizado. A figura (5.1) apresenta o gráfico do módulo da distância (μ) em função do redshift (z) para as supernovas presentes na compilação *Union 2.1*.

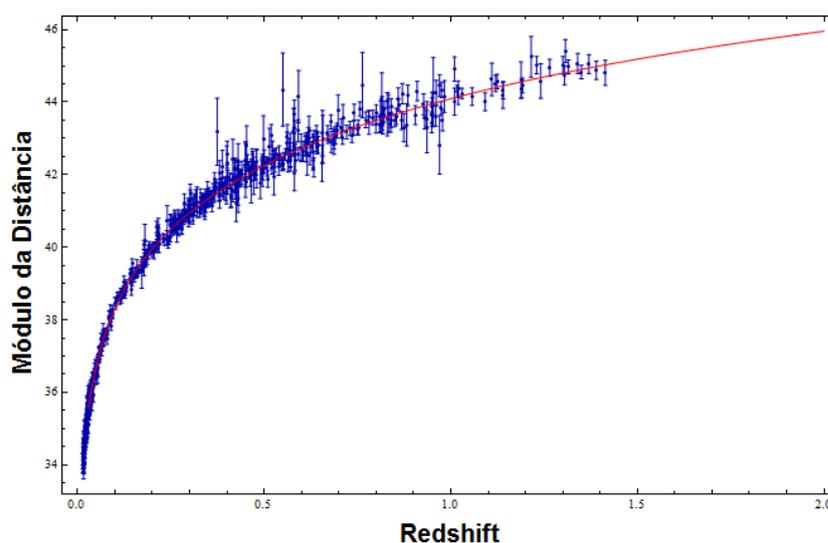


Figura 5.1 – Módulo da distância(μ) em função do redshift(z) para as 580 SNe Ia do catálogo *Union 2.1*.

¹A qualidade dos dados de supernovas pode ser controlada a partir de cortes restritivos aplicados às amostras. Por consequência, há uma redução no tamanho das amostras. Porém, com critérios de seleção bem definidos, resulta em um ganho na qualidade dos dados.

Como havíamos mencionado na sessão 2.4, há pacotes de dados mais modernos de SNe Ia, como SNLS3 (ASTIER et al., 2009) e JLA (BETOULE et al., 2014), porém como o nosso interesse é estudar a aplicação do método estatístico proposto neste trabalho, um pacote com um número considerável de SNe que permita a utilização da estatística mediana já é suficiente.

Modelo	Parâmetros Livres
Λ CDM plano	$\Omega_{m,0}, h$
Λ CDM _k	$\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}$
$x - CDM$ plano	$\Omega_{m,0}, \omega_x$
$\Lambda(t)CDM$ plano	Ω_m, h

Tabela 5.1 – Parâmetros livres em modelos analisados.

Consideramos importante utilizarmos diferentes classes de modelos cosmológicos (ver tabela (5.1)), pois ao mudarmos as classes, outros parâmetros são apresentados, e estes podem ser mais restringidos ou não pelos dados. Assim, ao compararmos o comportamento dos métodos da mediana e χ^2 em relação aos diferentes parâmetros, foi possível obter informações interessantes sobre ambos os métodos.

Neste trabalho, utilizamos os seguintes modelos: Λ CDM e Λ CDM_k que são os modelos padrão espacialmente plano e com curvatura qualquer, respectivamente. $w - CDM$ é uma variação do modelo padrão, onde é permitido que o parâmetro de estado w_x possa assumir valores diferentes de -1 . Por fim, utilizamos o modelo $\Lambda(t)CDM$ que é conhecido como modelo de interação do setor escuro espacialmente plano.

5.1 Λ CDM Plano

O gráfico da figura (5.2), mostra os graus de confiança sobre os parâmetros $\Omega_{m,0}$ e h , que correspondem respectivamente a 68,4% (1σ - curva de nível mais interna), 95,4% (2σ) e 99,7% (3σ - curva de nível mais externa), obtidos pelos dados de SNe Ia do Union 2.1 utilizando a mediana e χ^2 .

Ajuste	Λ CDM Plano		Λ CDM _k	
	$\Omega_{m,0}$	h	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{\Lambda,0}$
SNe Ia (mediana)	$0.267^{+0.306}_{-0.244}$	$0.701^{+0.705}_{-0.694}$	$0.270^{+0.409}_{-0.193}$	$0.730^{+0.917}_{-0.645}$
SNe Ia (χ^2)	$0.278^{+0.317}_{-0.239}$	$0.700^{+0.706}_{-0.692}$	$0.280^{+0.402}_{-0.151}$	$0.730^{+0.884}_{-0.557}$
SNe Ia (mediana) + CMB + BAO	$0.283^{+0.302}_{-0.265}$	$0.699^{+0.703}_{-0.694}$	$0.300^{+0.309}_{-0.264}$	$0.710^{+0.704}_{-0.700}$
SNe Ia (χ^2) + CMB + BAO	$0.284^{+0.312}_{-0.254}$	$0.699^{+0.705}_{-0.693}$	$0.290^{+0.315}_{-0.261}$	$0.720^{+0.742}_{-0.697}$

Tabela 5.2 – Melhor ajuste para os modelos Λ CDM e Λ CDM_k com Union 2.1.

Os valores dos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e h obtidos com os dois métodos são bastante próximos, como vemos na tabela (5.2). Ao fazermos a superposição das curvas de nível para cada conjunto

de dados, observamos que há uma diferença significativa sobre a restrição do χ^2 em comparação com a mediana. Isso se dá pelas hipóteses fortes sobre os dados, mas as restrições obtidas pela mediana, se mostraram interessantes. A direção da degenerescência é aproximadamente recuperada, mas com regiões mais largas. Os intervalos dos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e h obtidos para a mediana no nível 1σ , mostraram-se mais próximos da região 2σ para o χ^2 , caracterizando que o χ^2 se apresenta mais restritivo que a mediana para este modelo cosmológico (ver tabela (5.2)).

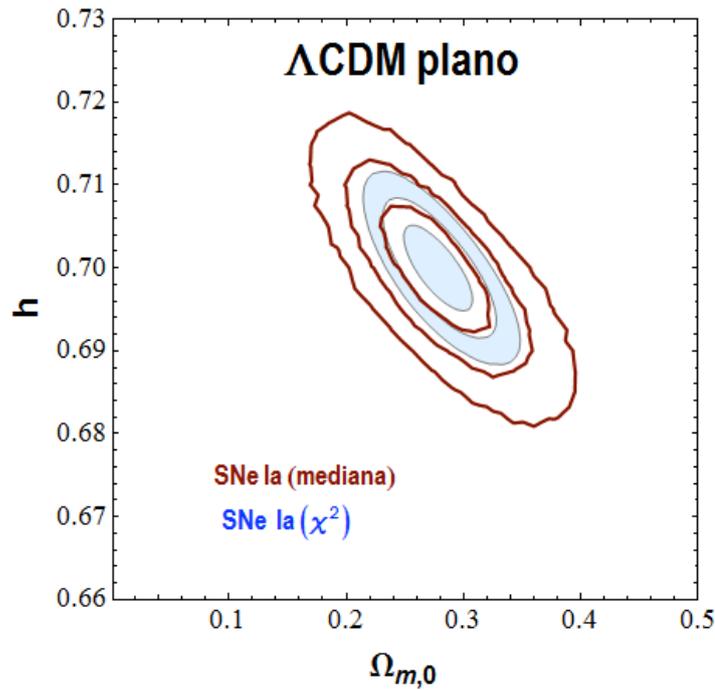


Figura 5.2 – Curvas de nível 1σ , 2σ e 3σ resultante dos ajustes com as Estatísticas Mediana e χ^2 aplicados no modelo Λ CDM plano.

Os dados de SNe resultam em intervalos degenerados em parâmetros como $\Omega_{m,0}$, independente do método aplicado. Para reduzir essa degenerescência, os dados de supernovas são combinados com outras observações: a Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (CMB) e a Oscilação Acústica de Bárions (BAO) (2.49)(2.51).

Para utilizarmos os dados de diferentes observações obtemos, respectivamente, novas distribuições posteriores, incluindo os pontos CMB e BAO como priors gaussianos em ambos os métodos, dado por

$$\mathcal{P}_{total} = \mathcal{P}_{SNeIa} \times \exp\left(-\frac{\chi_{CMB}^2}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{\chi_{BAO}^2}{2}\right) \quad (5.1)$$

$$\chi_{total}^2 = \chi_{SNeIa}^2 + \chi_{CMB}^2 + \chi_{BAO}^2 \quad (5.2)$$

Para as observações utilizando BAO e CMB, não fazia sentido utilizar a mediana devido ao baixo número de pontos (ver capítulo 2.5). Por essa razão eles podem ser interpretados como priors.

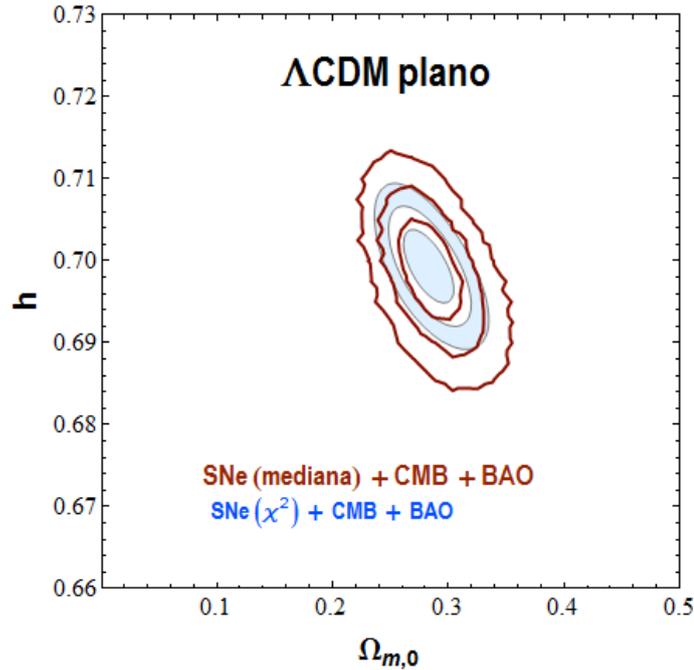


Figura 5.3 – Implementando as restrições CMB e BAO junto com os dados da SNe Ia.

Podemos observar que ao acrescentarmos os valores da *CMB* e de *BAO*, obtemos resultados para os parâmetros cosmológico comparáveis entre os métodos. Vemos também que os intervalos de $\Omega_{m,0}$ e h , continuam no níveis de confiança 1σ para a mediana e na região 2σ para χ^2 (tabela (5.2)).

5.2 ΛCDM_k

Ao aplicarmos os a mediana e o χ^2 ao modelo padrão com curvatura, mantivemos fixo o valor atual do parâmetro de Hubble em $H_0 = (70, 0 \pm 2.2) \text{ km/s/Mpc}$ de acordo com WMAP - 9 anos (BENNETT et al., 2013). Podemos ver no gráfico (figura 5.4) que, assim como foi observado no modelo ΛCDM , ao compararmos os dois métodos, a mediana mostra-se menos restritiva em relação ao χ^2 . Mas apesar da menor restrição, a mediana continua sendo bastante relevante ao tentarmos encontrar os valores de melhor ajuste (ver tabela 5.2), pois os valores dos parâmetros estudados nos dois métodos, são bastante próximos.

Em um universo com curvatura, encontramos para a mediana um nível de confiança de 68,4% e para χ^2 temos uma confiança de 95,4% (ver tabela (5.2)). O intervalo de confiança entre os métodos não se mostraram tão próximos como no caso ΛCDM , mas ainda assim, as regiões 1σ da mediana e 2σ do χ^2 são mais próximas entre si em comparação aos outros níveis de confiança.

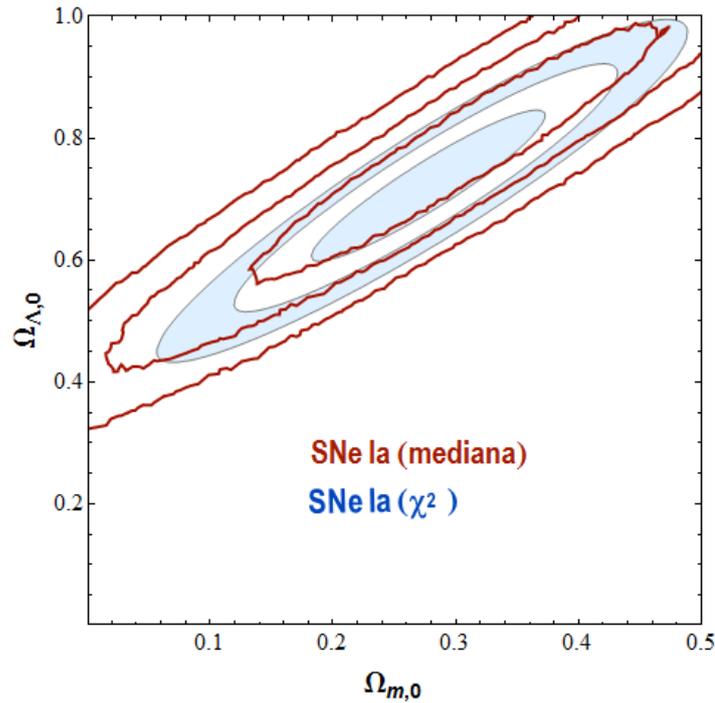


Figura 5.4 – Curvas de nível 1σ , 2σ e 3σ resultante dos ajustes com as Estatísticas Mediana e χ^2 aplicados no modelo ΛCDM_k .

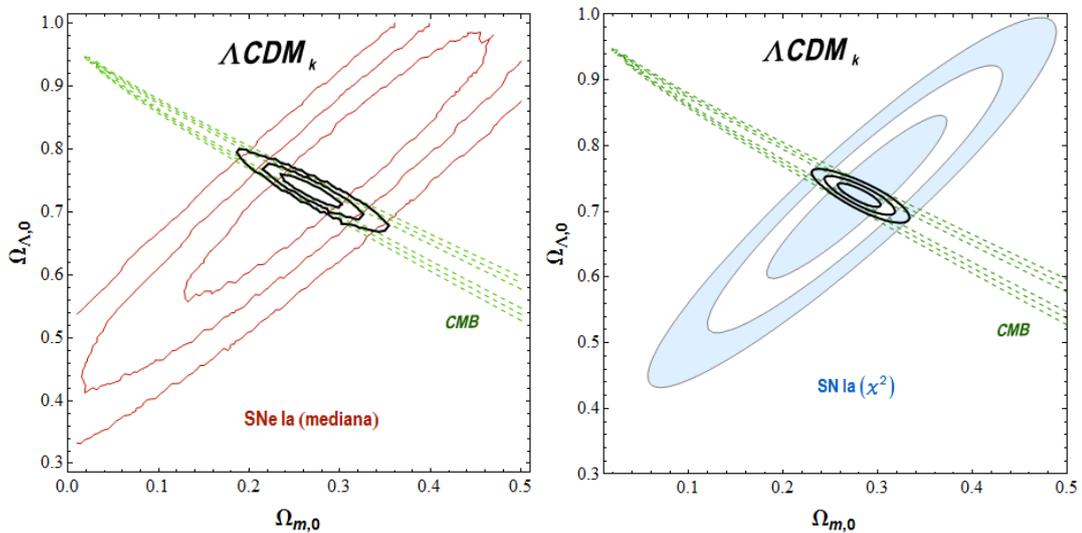


Figura 5.5 – Dados de SNe Ia + CMB utilizando a mediana e χ^2 ao modelo ΛCDM_k , respectivamente.

Assim como foi feito para o modelo ΛCDM , combinamos os dados de SNe Ia com os observáveis *CMB* e *BAO*. Ao cruzarmos os contornos de *CMB* e SNe Ia, as restrições combinadas se mostraram próximas entre o χ^2 e a mediana (figura 5.5).

A redução da diferença entre os métodos está relacionada ao fato dos contornos obtidos entre a mediana e χ^2 serem semelhantes (tabela 5.2). Ao acrescentamos os valores de *BAO* aos

dados, aproxima ainda mais as restrições em ambos os métodos (figura 5.6). Os intervalos e os níveis de confiança para os parâmetros $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ podem ser vistos na tabela (5.2).

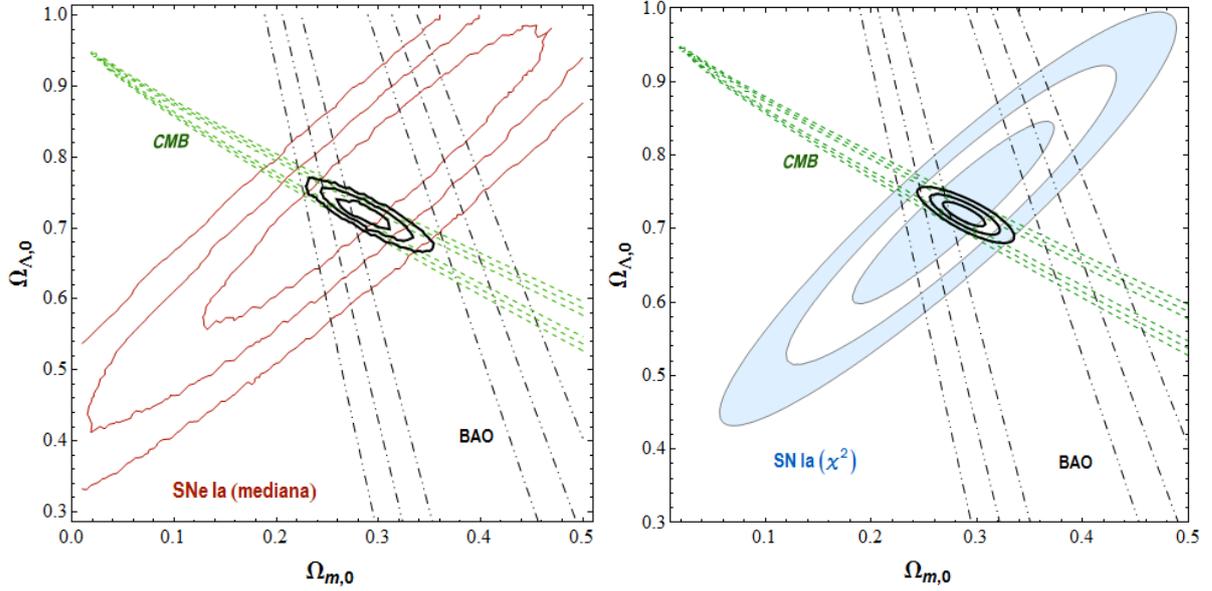


Figura 5.6 – Aplicação do dados de SNe Ia + CMB + BAO utilizando a mediana e χ^2 ao modelo ΛCDM_k , respectivamente.

5.3 Modelos Cosmológicos Alternativos

Como o nosso objetivo é verificar a eficácia do método da Estatística Mediana, não nos restringimos apenas ao modelo cosmológico padrão. Nos preocupamos em aplicá-lo a modelos cosmológicos alternativos como o $x\text{CDM}$ e $\Lambda(t)\text{CDM}$, ambos espacialmente planos.

Ajuste	$x\text{CDM plano}$		$\Lambda(t)\text{CDM plano}$	
	$\Omega_{m,0}$	w_x	$\Omega_{m,0}$	h
SNe Ia (mediana)	$0.285^{+0.395}_{-0.199}$	$-1.045^{+(-0.758)}_{-(-1.213)}$	$0.338^{+0.377}_{-0.308}$	$0.697^{+0.702}_{-0.691}$
SNe Ia (χ^2)	$0.295^{+0.399}_{-0.144}$	$-1.063^{+(-0.734)}_{-(-1.317)}$	$0.346^{+0.391}_{-0.306}$	$0.697^{+0.703}_{-0.689}$
SNe Ia (mediana) + CMB + BAO	$0.281^{+0.316}_{-0.253}$	$-1.024^{+(-0.930)}_{-(-1.112)}$	$0.398^{+0.412}_{-0.380}$	$0.691^{+0.700}_{-0.684}$
SNe Ia (χ^2) + CMB + BAO	$0.281^{+0.314}_{-0.256}$	$-1.028^{+(-0.942)}_{-(-1.095)}$	$0.394^{+0.408}_{-0.381}$	$0.692^{+0.697}_{-0.686}$

Tabela 5.3 – Melhor ajuste para os modelos cosmológicos $x\text{CDM}$ e $\Lambda(t)\text{CDM}$, ambos nos casos planos com o pacote de dados do Union 2.1.

5.3.1 Modelo $xCDM$

Para o modelo $xCDM$ plano, também fixamos o valor atual do parâmetro de Hubble em $H_0 = (70, 0 \pm 2.2) km/s/Mpc$ (BENNETT et al., 2013). Os valores para os parâmetros $\Omega_{m,0}$ e w_x , obtidos com dados de SNe Ia por meio das análises com a mediana e χ^2 , são mostrados na tabela (5.3).

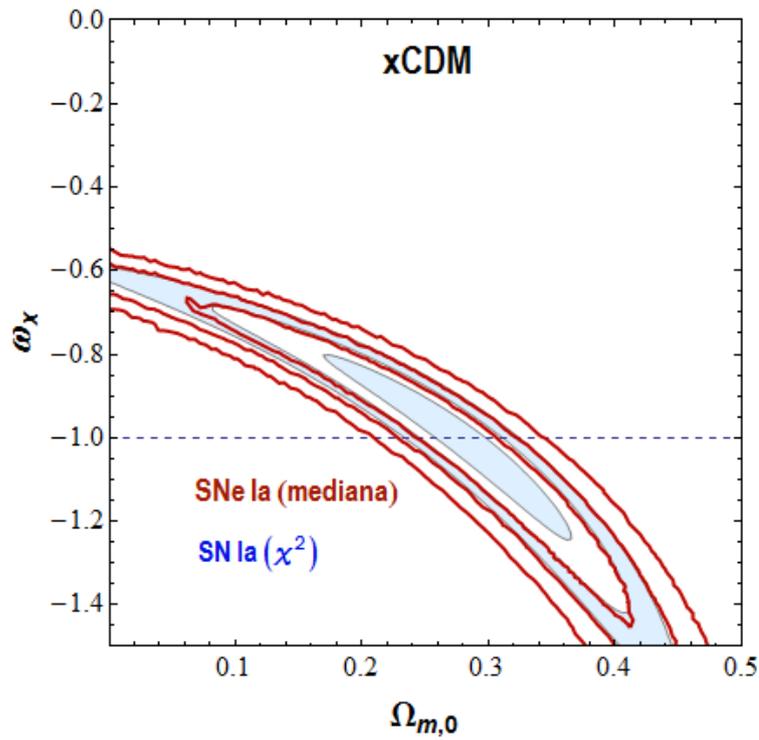


Figura 5.7 – Superposição da mediana e χ^2 com os dados de SNe Ia, no modelo $xCDM$ plano.

Ao superpormos os gráficos da mediana com χ^2 (figura 5.7), encontramos o mesmo comportamento observado nos modelos ΛCDM e ΛCDM_k , mas com uma ressalva, os contornos da curva de nível 1σ da mediana e 2σ do χ^2 aparentam uma maior proximidade. Podemos observar na tabela (5.3) que os intervalos para os parâmetros $\Omega_{m,0}$ e w_x , possuem um nível de confiança 1σ para a mediana e 2σ para o χ^2 .

Assim como fizemos anteriormente, os gráficos da figura (5.8) mostram as restrições combinadas sobre $\Omega_{m,0}$ e w_x obtidos usando os método da mediana e χ^2 , respectivamente, utilizando os dados combinados de SNe Ia com CMB e BAO.

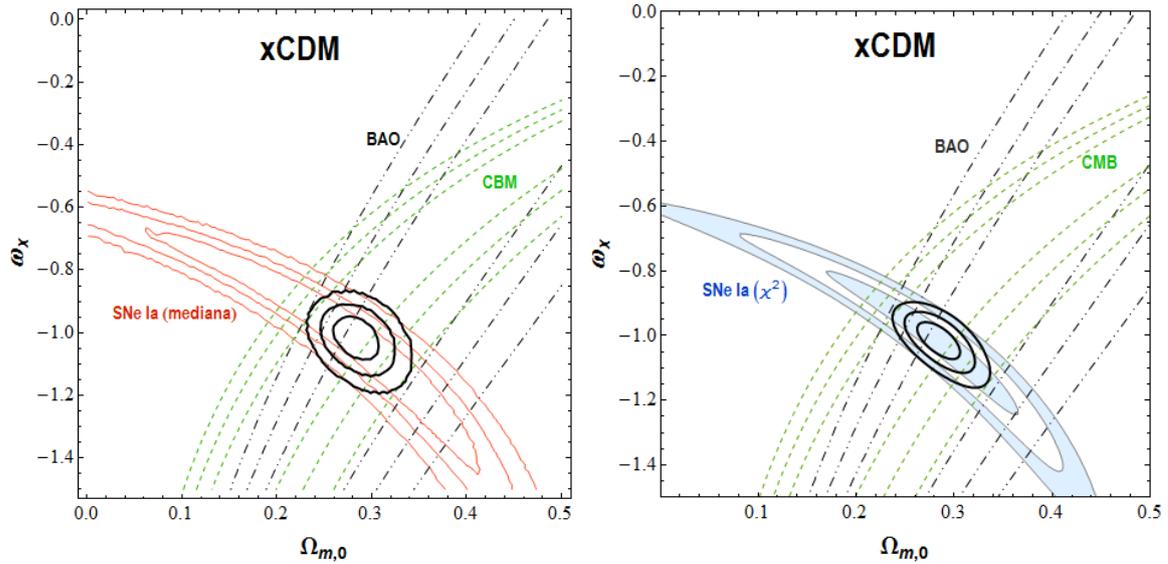


Figura 5.8 – Aplicação do dados de SNe Ia + CMB + BAO utilizando, respectivamente, a mediana e χ^2 ao modelo $xCDM$ plano.

Podemos observar que os valores de $\Omega_{m,0}$ e w_x , encontrados por meio da mediana e do χ^2 não são tão próximos, mas ao acrescentarmos outros observáveis, os valores de $\Omega_{m,0}$ e w_x entre os métodos se aproximam (tabela 5.3), tornando a diferença entre eles menor. Ao acrescentamos o *BAO* e *CMB*, verificamos que os intervalos para $\Omega_{m,0}$ e w_x , possuem uma intersecção a partir da região 2σ para ambos os métodos (ver tabela (5.3)). Algo que não foi observado nos modelos ΛCDM e $\Lambda(t)CDM_k$ analisados anteriormente, onde as regiões 1σ (mediana) e 2σ (χ^2) se aproximavam.

5.3.2 Modelo $\Lambda(t)CDM$

Para finalizarmos o nosso estudo, aplicamos a Estatística Mediana ao modelo $\Lambda(t)CDM$ plano. Os parâmetros encontrados estão listados na tabela (5.3) e o comportamento dos dados podem ser vistos na figura (5.9).

Podemos observar novamente, o comportamento semelhante da mediana visto nos modelos cosmológico anteriores em que as curvas 1σ (mediana) se aproxima da 2σ (χ^2) (ver tabela (5.3)).

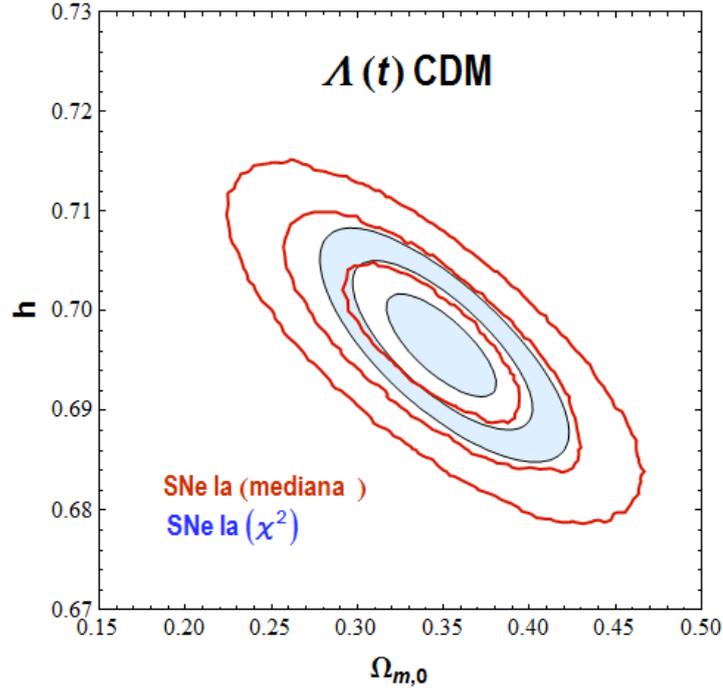


Figura 5.9 – Graus de confiança resultante dos ajustes com as Estatísticas Mediana e χ^2 aplicado ao modelo $\Lambda(t)CDM$ plano.

Devido à peculiaridades do modelo $\Lambda(t)CDM$, não aplicaremos os observáveis CMB e BAO da forma como foi feito nos modelos anteriores. Ao invés disso, utilizaremos o conjunto de dados de supernovas do tipo Ia, juntamente com o valor atual de ℓ_1 (primeiro pico acústico) e a escala de dilatação D_V , assim como foi utilizado por Pigozzo (2010).

A utilização das oscilações acústicas bariônicas para testar modelos de energia escura é geralmente feito por meio do parâmetro $A_{th} = D_V(z)\sqrt{\Omega_m H_0^2}/z_{BAO}$ (EISENSTEIN et al., 2005), sendo z_{BAO} o redshift de uma amostra e D_V a escala de dilatação, definida como

$$D_V(z) = \left[D_M(z)^2 \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (5.3)$$

onde $D_M = (1+z)d_A$ é a distância diâmetro-angular comóvel. Consideramos sete medidas diferentes de BAO, de acordo com a tabela (5.4).

<i>Redshift</i>	$D_V^{obs.}(Mpc)$	<i>Ref.</i>
0.106	424.233 ± 38.758	Beutler et al. (2011)
0.200	748.148 ± 64.226	Percival et al. (2010)
0.350	1300.000 ± 88.000	Percival et al. (2010)
0.440	1555.690 ± 172.531	Blake et al. (2011)
0.600	1962.630 ± 181.802	Blake et al. (2011)
0.600	2029.370 ± 186.481	Blake et al. (2011)
0.730	2409.170 ± 231.497	Blake et al. (2011)

Tabela 5.4 – Valores de z_{BAO} extraídos do artigo *Planck 2013 results XVI. Cosmological parameters* (ADE et al., 2014).

Devemos observar, que o valor de $z \approx 0.35$ foi um dado obtido de galáxias vermelhas luminosas do SDSS indicando um máximo de oscilação para esse valor do redshift, com $D_V(0.35) = 1.300 \pm 0.088 Gpc$ (TEGMARK et al., 2006).

Os outros valores de D_V foram encontrados de forma indireta, assim como foi feito por (PERCIVAL et al., 2010) ao calcular o valor de $z = 0.2$ ao medir $r_s(z_{drag})/D_V(0.2) = 0.1985 \pm 0.0061$ e $r_s(z_{drag})/D_V(0.5) = 0.1097 \pm 0.0036$ ². Tomando a razão entre esses dois resultados e conhecendo $D_V(0.35)$, foi possível encontrar o valor de $D_V(0.2) = 0.748 \pm 0.057 Gpc$.

Utilizando a equação (2.46) temos

$$D_M = (1+z)d_A = c \int_0^{z'} \frac{dz}{H(z)}, \quad (5.4)$$

e assim, podemos reescrever a equação (5.3) como

$$D_V = \frac{c}{H_0} \frac{(z)^{1/3}}{[E(z)^{1/3}]} \left[\int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]^{1/3}. \quad (5.5)$$

É importante ressaltar que nós não podemos utilizar em nossa análise o parâmetro A_{th} , uma vez que no modelo $\Lambda(t)CDM$ a produção de matéria leva a uma dependência diferente do horizonte no momento da igualdade matéria-radiação sobre a densidade de matéria atual (CARNEIRO et al., 2008). Portanto, o χ_{BAO}^2 será dado por

$$\chi_{BAO}^2 = \sum_{i=1}^7 \frac{[D_V^{obs.}(z_i) - D_V(z_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.6)$$

utilizando a expressão (5.5) com os sete pontos listados na tabela (5.4).

Para a radiação cósmica de fundo em microondas, usamos a posição do primeiro pico do espectro de potência da CMB baseado nas observações obtidas pelo WMAP (Wilkinson

²O z_{drag} corresponde ao redshift da radiação emitida logo após efeitos de arraste.

Microwave Anisotropy) (SPERGEL et al., 2007) (HINSHAW et al., 2007), onde o valor do primeiro pico observado é dado por $\ell_1 = 220.8 \pm 0.7$ (para o nível de confiança de 1σ), onde tomaremos como um dado observacional.

O valor de ℓ_1 está relacionado com a escala acústica (HU et al., 2001) pela

$$\ell_1 = \ell_A(1 + \delta_1) \quad \therefore \quad \delta_1 = 0.267 \left(\frac{r}{0.3} \right)^{0.1}, \quad (5.7)$$

onde a expressão $r \equiv \frac{\Omega_r}{\Omega_m^2} z_{ls}$ foi demonstrada por Pigozzo et al. (2011). Sendo z_{ls} o redshift da superfície do último espalhamento (ver capítulo 2.5), $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{m,0}$ são respectivamente as densidades de radiação e de matéria atual.

A expressão teórica para a escala acústica é dada por

$$\ell_A = \pi \frac{\int_0^{z_{ls}} \frac{dz}{H(z)}}{\int_{z_{ls}}^{\infty} \frac{c_s}{c} \frac{dz}{H(z)}} \quad (5.8)$$

sendo a velocidade acústica dada por $c_s = c \left(3 + \frac{9}{4} \frac{\Omega_b}{\Omega_\gamma z} \right)^{-1/2}$, onde Ω_b e Ω_γ são respectivamente os parâmetros de densidades de bárions e fótons.

Utilizando as análises feitas por Pigozzo (2010) e as expressões acima, teremos o χ_{CMB}^2 dado por

$$\chi_{CMB}^2 = \frac{(\ell_1 - 220.8)^2}{0.7^2}. \quad (5.9)$$

Assim, ao combinarmos os dados de SNe Ia com os observáveis BAO e CMB ao modelo $\Lambda(t)CDM$, obtemos o comportamento dos dados demonstrados no gráfico (5.10) e observamos que os valores do par $(\Omega_{m,0}, h)$ encontrados por ambos os métodos são bem próximos entre si (tabela 5.3). O que pode ser visto pelos intervalos da mediana e do χ^2 na tabela (5.3), que apresentam intersecção a partir da região 2σ .

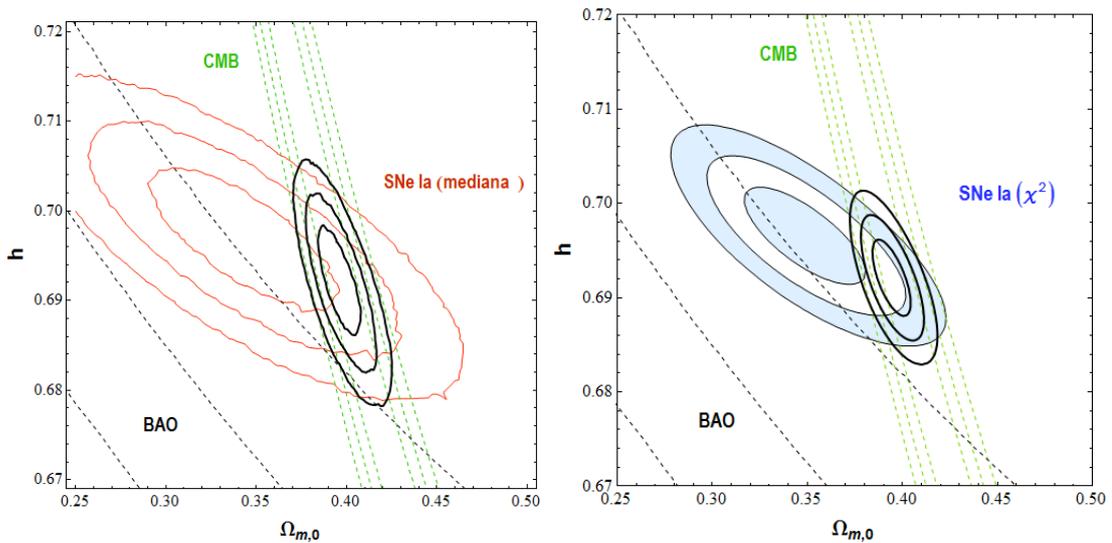


Figura 5.10 – Aplicação do dados de SNe Ia + CMB + BAO utilizando, respectivamente, a mediana e χ^2 ao modelo $\Lambda(t)CDM$ plano.

6 CONCLUSÃO

A utilização de métodos estatísticos Bayesianos para o tratamento de dados observacionais aplicados em cosmologia e astrofísica floresceu ao longo das últimas décadas motivada pelo aumento do conjunto de dados e suas complexidades. Em muitos casos, o método Bayesiano mostrou-se muito superior às ferramentas estatísticas mais tradicionais, devido ao grau de maior eficiência e de uma base conceitual consistente. A forma de coletar, manipular e analisar observações e compará-los com modelos teóricos torna essa ferramenta estatística o instrumento central no estudo da cosmologia moderna.

Nesta dissertação, nos baseamos na Inferência Bayesiana para obtermos parâmetros cosmológicos. Para isso, utilizamos as ideias de GottIII et al. (2001), aplicando o método da Estatística Mediana para a análise dos dados observacionais.

Procuramos mostrar de forma breve a base teórica da Inferência Bayesiana e que do ponto de vista operacional, essa teoria pode calcular qualquer estimativa $\mathcal{P}(H_i|D)$ diretamente, além de contar com diversas ferramentas de investigação muito bem fundamentadas matematicamente. Ferramentas essas que geram não apenas as média, intervalos de confiança e testes de hipóteses, mas também estimam parâmetros dependentes e testes de hipóteses multidimensionais.

Das ferramentas utilizadas pelo método de Bayes, destacamos a análise χ^2 como principal instrumento de estimação de parâmetros, em que pudemos calcular a distribuição esperada dos dados, supondo que os erros possuem uma distribuição gaussiana: $\mathcal{P}(H_i|D) \propto \exp(-\chi^2/2)$.

No caso da Estatística Mediana, foi utilizado a distribuição binomial para encontrarmos a distribuição esperada dos dados (como foi mostrado na equação 4.18). E ao contrário do χ^2 que pertence a um termo que é considerado proporcional a $\mathcal{P}(H_i|D)$, a mediana resulta na própria verossimilhança. Por conta disso, não há a necessidade de considerarmos que os erros experimentais sigam uma distribuição de Gauss. Apesar de haver evidências que comprovem ou descartem que esses erros sigam esse tipo de distribuição (AVELINO et al., 2002).

Utilizamos um amplo conjunto de dados de supernovas do tipo Ia e aplicamos as estatísticas χ^2 e mediana às classes de modelos presentes na literatura, como Λ CDM plano e com curvatura, x CDM plano e $\Lambda(t)$ CDM plano. Em seguida comparamos os resultados dos parâmetros cosmológicos encontrados em ambos os métodos.

Após ordenarmos de forma crescente os *redshifts*, seguimos a sugestão dada por Avelino et al. (2002) ao dividirmos os dados em quatro grupos de 145 SNIa cada, com o intuito de evitarmos resultados discrepantes. Como a teoria da Estatística Mediana diz que há uma probabilidade de 50% de cada medição estar acima (ou abaixo) da mediana verdadeira (MV), resolvemos calcular não apenas quantidade de pontos que estão acima da MV, mas a quantidade de pontos que estão percentualmente próximos a ela.

Ao compararmos os resultados encontrados na classe de modelos utilizados neste trabalho, verificamos por meio da tabulação de dados (gráficos) que as regiões de confiança 2σ (95,4%) do χ^2 coincide com a região 1σ (68,5%) da mediana. Essa coincidência mostra-se evidente em todos os modelos cosmológicos utilizados na ausência das restrições da CMB e BAO. O χ^2 produziu maiores restrições que a mediana, por levar em conta a hipótese da distribuição dos erros da magnitude da SNIa. Mas apesar do χ^2 ser mais restrito, não podemos descartar a Estatística Mediana. Pois, ao acrescentarmos as informações da CMB e BAO, verificamos que o desempenho de ambos os métodos se aproximam significativamente.

Se observarmos os resultados obtidos de acordo com as tabelas (5.2) e (5.3), pudemos verificar que os valores dos parâmetros cosmológicos encontrados pelo método da mediana, não apenas se aproximam dos valores encontrados pela análise χ^2 , mas em muitos casos, os valores são praticamente os mesmos.

Como havíamos mencionado no capítulo 4.2, de acordo com a teoria da mediana, há uma necessidade de que a quantidade de dados seja significativamente grande, para que a Estatística Mediana recupere a proporcionalidade usual do desvio padrão para $1/N^{1/2}$ (GOTTIII et al., 2001). Por conta disso, o método torna-se limitado ao ser utilizado em um conjunto de dados muito pequeno, algo que não é limitador para a análise χ^2 .

Concluimos assim, que ao utilizarmos a análise χ^2 como referência para verificarmos a confiança do método proposto neste trabalho, os resultados encontrados mostraram-se bastante significativos, demonstrando que a análise da Estatística Mediana revelou-se muito promissor como método de estimação de parâmetros cosmológicos, desde que os conjuntos de dados sejam significativamente grandes.

Sobretudo, a pesquisa realizada possibilitou um olhar em relação à funcionalidade do método em questão. O desenvolvimento de novos estudos serão de grande relevância para a melhoria da estatística mediana como importante ferramenta para obtenção de parâmetros cosmológicos.

Pensando nisso, temos algumas perspectivas para futuros estudos sobre a Estatística Mediana: procurar estabelecer um parâmetro que avalie a qualidade do ajuste a depender do método de construção do posterior; por não termos ainda pacotes de dados mais amplos, simular dados de supernovas, com 10^3 , 10^4 ou 10^5 supernovas, por exemplo, e verificar se há diferença entre as curvas obtidas com χ^2 e mediana mantém-se; implementar ambos os métodos na construção de cadeias de Monte Carlo e comparar a eficiência computacional destes métodos, incluindo o tempo necessário para a convergência das cadeias; e desenvolver mecanismo de inclusão de erros estatísticos e sistemáticos na construção das curvas de luz das supernovas e relações distância-redshift no âmbito da estatística mediana.

REFERÊNCIAS

- ADE, P.; AGHANIM, N.; ARMITAGE-CAPLAN, C.; ARNAUD, M.; ASHDOWN, M.; ATRIO-BARANDELA, F.; AUMONT, J.; BACCIGALUPI, C.; BANDAY, A.; BARREIRO, R. et al. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 571, p. A16, 2014.
- AMANULLAH, R.; LIDMAN, C.; RUBIN, D.; ALDERING, G.; ASTIER, P.; BARBARY, K.; BURNS, M.; CONLEY, A.; DAWSON, K.; DEUSTUA, S. et al. Spectra and hubble space telescope light curves of six type ia supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the union2 compilation. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 716, n. 1, p. 712, 2010.
- AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. **Dark energy: theory and observations**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- ASTIER, P.; GUY, J.; REGNAULT, N.; PAIN, R.; AUBOURG, E.; BALAM, D.; BASA, S.; CARLBERG, R.; FABBRO, S.; FOUCHÉZ, D. et al. The supernova legacy survey: measurement of ω_m , ω and w from the first year data set. commentary. **Astronomy and astrophysics**, EDP Sciences, v. 500, n. 1, p. 597–616, 2009.
- AVELINO, P.; MARTINS, C.; PINTO, P. Modified median statistics and type ia supernova data. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 575, n. 2, p. 989, 2002.
- BARREIRA, A.; AVELINO, P. χ^2 versus median statistics in supernova type ia data analysis. **Physical Review D**, APS, v. 84, n. 8, p. 083521, 2011.
- BENNETT, C.; LARSON, D.; WEILAND, J.; JAROSIK, N.; HINSHAW, G.; ODEGARD, N.; SMITH, K.; HILL, R.; GOLD, B.; HALPERN, M. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: final maps and results. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 208, n. 2, p. 20, 2013.
- BETOULE, M.; KESSLER, R.; GUY, J.; MOSHER, J.; HARDIN, D.; BISWAS, R.; ASTIER, P.; EL-HAGE, P.; KONIG, M.; KUHLMANN, S. et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 568, p. A22, 2014.
- BEUTLER, F.; BLAKE, C.; COLLESS, M.; JONES, D. H.; STAVELEY-SMITH, L.; CAMPBELL, L.; PARKER, Q.; SAUNDERS, W.; WATSON, F. The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 416, n. 4, p. 3017–3032, 2011.
- BLAKE, C.; KAZIN, E. A.; BEUTLER, F.; DAVIS, T. M.; PARKINSON, D.; BROUGH, S.; COLLESS, M.; CONTRERAS, C.; COUCH, W.; CROOM, S. et al. The wigglez dark energy survey: mapping the distance–redshift relation with baryon acoustic oscillations. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 418, n. 3, p. 1707–1724, 2011.
- BORGES, H.; CARNEIRO, S. Friedmann cosmology with decaying vacuum density. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 37, n. 8, p. 1385–1394, 2005.

- BRANCH, D.; TAMMANN, G. Type ia supernovae as standard candles. **Annual review of astronomy and astrophysics**, v. 30, p. 359–389, 1992.
- CALDWELL, R.; LINDER, E. V. Limits of quintessence. **Physical review letters**, APS, v. 95, n. 14, p. 141301, 2005.
- CAMPBELL, H.; D'ANDREA, C. B.; NICHOL, R. C.; SAKO, M.; SMITH, M.; LAMPEITL, H.; OLMSTEAD, M. D.; BASSETT, B.; BISWAS, R.; BROWN, P. et al. Cosmology with photometrically classified type ia supernovae from the sdss-ii supernova survey. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 763, n. 2, p. 88, 2013.
- CARNEIRO, S.; DANTAS, M.; PIGOZZO, C.; ALCANIZ, J. Observational constraints on late-time $\lambda(t)$ cosmology. **Physical Review D**, APS, v. 77, n. 8, p. 083504, 2008.
- CARNEIRO, S.; PIGOZZO, C.; BORGES, H.; ALCANIZ, J. Supernova constraints on decaying vacuum cosmology. **Physical Review D**, APS, v. 74, n. 2, p. 023532, 2006.
- CHANDRASEKHAR, S. The maximum mass of ideal white dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 74, p. 81, 1931.
- CHEN, G.; RATRA, B. Median statistics and the hubble constant. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, JSTOR, v. 123, n. 907, p. 1127–1132, 2011.
- CONLEY, A.; GUY, J.; SULLIVAN, M.; REGNAULT, N.; ASTIER, P.; BALLAND, C.; BASA, S.; CARLBERG, R.; FOUCHÉZ, D.; HARDIN, D. et al. Supernova constraints and systematic uncertainties from the first three years of the supernova legacy survey. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 192, n. 1, p. 1, 2011.
- CORREA, S. Probabilidade e estatística. **Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais**, 2003.
- EISENSTEIN, D. J.; ZEHAVI, I.; HOGG, D. W.; SCOCCIMARRO, R.; BLANTON, M. R.; NICHOL, R. C.; SCRANTON, R.; SEO, H.-J.; TEGMARK, M.; ZHENG, Z. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 633, n. 2, p. 560, 2005.
- ELIAS, J.; MATTHEWS, K.; NEUGEBAUER, G.; PERSSON, S. Type i supernovae in the infrared and their use as distance indicators. **The Astrophysical Journal**, v. 296, p. 379–389, 1985.
- FILHO, K. de S. O.; FILHO, K. de S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia e astrofísica**. [S.l.]: Ed. Universidade/UFRGS, 2000.
- FREUD, J. E. **Estatística Aplicada: economia, administração e contabilidade**. [S.l.]: Ed. Porto Alegre - Bookman, 2006.
- GANESHALINGAM, M.; LI, W.; FILIPPENKO, A. V. Constraints on dark energy with the loss sn ia sample. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 433, n. 3, p. 2240–2258, 2013.
- GOTTIII, J. R.; VOGELÉY, M. S.; PODARIU, S.; RATRA, B. Median statistics, h_0 , and the accelerating universe. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 549, n. 1, p. 1, 2001.

- GOTTIII, R.; COLLEY, W. N. et al. Median statistics in polling. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier, v. 48, n. 9, p. 1396–1408, 2008.
- GREGORY, P. **Bayesian logical data analysis for the physical sciences**. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, UK, 2005.
- GUY, J.; ASTIER, P.; BAUMONT, S.; HARDIN, D.; PAIN, R.; REGNAULT, N.; BASA, S.; CARLBERG, R.; CONLEY, A.; FABBRO, S. et al. Salt2: using distant supernovae to improve the use of type ia supernovae as distance indicators. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 466, n. 1, p. 11–21, 2007.
- HICKEN, M.; CHALLIS, P.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P.; MATHESON, T.; MODJAZ, M.; REST, A.; WOOD-VASEY, W. M.; BAKOS, G.; BARTON, E. J. et al. Cfa3: 185 type ia supernova light curves from the cfa. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 700, n. 1, p. 331, 2009.
- HINSHAW, G.; NOLTA, M.; BENNETT, C.; BEAN, R.; DORÉ, O.; GREASON, M.; HALPERN, M.; HILL, R.; JAROSIK, N.; KOGUT, A. et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: temperature analysis. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 170, n. 2, p. 288, 2007.
- HOGG, D. W. Distance measures in cosmology. **arXiv preprint astro-ph/9905116**, 1999.
- HORVATH, J.; ALLEN, M. P. **Cosmologia Física: do micro ao macro cosmos e vice-versa**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011.
- HU, W.; FUKUGITA, M.; ZALDARRIAGA, M.; TEGMARK, M. Cosmic microwave background observables and their cosmological implications. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 549, n. 2, p. 669, 2001.
- HUGHES, I.; HASE, T. **Measurements and their uncertainties: a practical guide to modern error analysis**. [S.l.]: Oxford University Press, 2010.
- JHA, S.; RIESS, A. G.; KIRSHNER, R. P. Improved distances to type ia supernovae with multicolor light-curve shapes: Mlcs2k2. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 659, n. 1, p. 122, 2007.
- KIRSHNER, R. P. Hubble's diagram and cosmic expansion. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 101, n. 1, p. 8–13, 2004.
- KIRSHNER, R. P. Foundations of supernova cosmology. **Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches**, Cambridge University Press, v. 1, p. 151, 2010.
- LIDDLE, A. **An introduction to modern cosmology**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.
- MINKOWSKI, R. Spectra of supernovae. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, v. 53, p. 224, 1941.
- MUKHANOV, V. F. **Physical foundations of cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- MURTEIRA, B.; BLACK, G. H. J. **Estatística descritiva**. [S.l.: s.n.], 1983.

- NICHOLL, M.; SMARTT, S.; JERKSTRAND, A.; INSERRA, C.; MCCRUM, M.; KOTAK, R.; FRASER, M.; WRIGHT, D.; CHEN, T.-W.; SMITH, K. et al. Slowly fading super-luminous supernovae that are not pair-instability explosions. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 502, n. 7471, p. 346–349, 2013.
- PERCIVAL, W. J.; REID, B. A.; EISENSTEIN, D. J.; BAHCALL, N. A.; BUDAVARI, T.; FRIEMAN, J. A.; FUKUGITA, M.; GUNN, J. E.; IVEZIĆ, Ž.; KNAPP, G. R. et al. Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 401, n. 4, p. 2148–2168, 2010.
- PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP, R.; NUGENT, P.; CASTRO, P.; DEUSTUA, S.; FABBRO, S.; GOOBAR, A.; GROOM, D. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- PHILLIPS, M. M. The absolute magnitudes of type ia supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 413, p. L105–L108, 1993.
- PIGOZZO, C. **Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil, 2010.
- PIGOZZO, C.; DANTAS, M.; CARNEIRO, S.; ALCANIZ, J. Observational tests for λ (t) cdm cosmology. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2011, n. 08, p. 022, 2011.
- PRESS, W. H. **FORTRAN Numerical Recipes: Numerical recipes in FORTRAN 77**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992.
- QUIMBY, R. M.; OGURI, M.; MORE, A.; MORE, S.; MORIYA, T. J.; WERNER, M. C.; TANAKA, M.; FOLATELLI, G.; BERSTEN, M. C.; MAEDA, K. et al. Detection of the gravitational lens magnifying a type ia supernova. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 344, n. 6182, p. 396–399, 2014.
- REGNAULT, N.; CONLEY, A.; GUY, J.; SULLIVAN, M.; CUILLANDRE, J.-C.; ASTIER, P.; BALLAND, C.; BASA, S.; CARLBERG, R.; FOUCHEZ, D. et al. Photometric calibration of the supernova legacy survey fields. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 506, n. 2, p. 999–1042, 2009.
- RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M.; GILLILAND, R. L.; HOGAN, C. J.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.
- RIESS, A. G.; MACRI, L.; CASERTANO, S.; LAMPEITL, H.; FERGUSON, H. C.; FILIPPENKO, A. V.; JHA, S. W.; LI, W.; CHORNOCK, R. A 3% solution: determination of the hubble constant with the hubble space telescope and wide field camera 3. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 730, n. 2, p. 119, 2011.
- RIESS, A. G.; STROLGER, L.-G.; CASERTANO, S.; FERGUSON, H. C.; MOBASHER, B.; GOLD, B.; CHALLIS, P. J.; FILIPPENKO, A. V.; JHA, S.; LI, W. et al. New hubble space telescope discoveries of type ia supernovae at $z > 1$: narrowing constraints on the early behavior of dark energy. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 659, n. 1, p. 98, 2007.

- RYDEN, B. S. **Introduction to cosmology**. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, 2003.
- SAKO, M.; BASSETT, B.; BECKER, A. C.; BROWN, P. J.; CAMPBELL, H.; CANE, R.; CINABRO, D.; D'ANDREA, C. B.; DAWSON, K. S.; DEJONGH, F. et al. The data release of the sloan digital sky survey-ii supernova survey. **arXiv preprint arXiv:1401.3317**, 2014.
- SANDAGE, A.; TAMMANN, G.; SAHA, A.; REINDL, B.; MACCHETTO, F.; PANAGIA, N. The hubble constant: a summary of the hubble space telescope program for the luminosity calibration of type ia supernovae by means of cepheids. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 653, n. 2, p. 843, 2006.
- SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- SCOLNIC, D.; REST, A.; RIESS, A.; HUBER, M.; FOLEY, R.; BROUT, D.; CHORNOCK, R.; NARAYAN, G.; TONRY, J.; BERGER, E. et al. Systematic uncertainties associated with the cosmological analysis of the first pan-starrs1 type ia supernova sample. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 795, n. 1, p. 45, 2014.
- SOUZA, R. E. D. **Introdução à cosmologia**. [S.l.]: EdUSP, 2004.
- SPERGEL, D. N.; BEAN, R.; DORÉ, O.; NOLTA, M.; BENNETT, C.; DUNKLEY, J.; HINSHAW, G.; JAROSIK, N.; KOMATSU, E.; PAGE, L. et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: implications for cosmology. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 170, n. 2, p. 377, 2007.
- SUZUKI, N.; RUBIN, D.; LIDMAN, C.; ALDERING, G.; AMANULLAH, R.; BARBARY, K.; BARRIENTOS, L.; BOTYANSZKI, J.; BRODWIN, M.; CONNOLLY, N. et al. The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 746, n. 1, p. 85, 2012.
- TEGMARK, M.; EISENSTEIN, D. J.; STRAUSS, M. A.; WEINBERG, D. H.; BLANTON, M. R.; FRIEMAN, J. A.; FUKUGITA, M.; GUNN, J. E.; HAMILTON, A. J.; KNAPP, G. R. et al. Cosmological constraints from the sdss luminous red galaxies. **Physical Review D**, APS, v. 74, n. 12, p. 123507, 2006.
- TONRY, J.; STUBBS, C.; LYKKE, K.; DOHERTY, P.; SHIVVERS, I.; BURGETT, W.; CHAMBERS, K.; HODAPP, K.; KAISER, N.; KUDRITZKI, R.-P. et al. The pan-starrs1 photometric system. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 750, n. 2, p. 99, 2012.
- TROTTA, R. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. **Contemporary Physics**, Taylor & Francis, v. 49, n. 2, p. 71–104, 2008.
- TURNER, M. S.; WHITE, M. Cdm models with a smooth component. **Physical Review D**, APS, v. 56, n. 8, p. R4439, 1997.
- VERDE, L. Statistical methods in cosmology. In: **Lectures on Cosmology**. [S.l.]: Springer, 2010. p. 147–177.
- VILLELA, T.; FERREIRA, I.; WUENSCHÉ, C. A. Cosmologia observacional: a radiação cósmica de fundo em microondas. **Revista USP**, n. 62, p. 104–115, 2004.
- WANG, Y.; MUKHERJEE, P. Observational constraints on dark energy and cosmic curvature. **Physical Review D**, APS, v. 76, n. 10, p. 103533, 2007.

WEINBERG, S. **Cosmology**. [S.l.: s.n.], 2008.

WOOD-VASEY, W. M.; MIKNAITIS, G.; STUBBS, C.; JHA, S.; RIESS, A.; GARNAVICH, P.; KIRSHNER, R.; AGUILERA, C.; BECKER, A.; BLACKMAN, J. et al. Observational constraints on the nature of dark energy: first cosmological results from the essence supernova survey. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 666, n. 2, p. 694, 2007.

WU, K. K.; LAHAV, O.; REES, M. J. The large-scale smoothness of the universe. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 397, n. 6716, p. 225–230, 1999.

Apêndices

APÊNDICE A – MEDIANA

Ao analisarmos estatisticamente um conjunto de dados, surge a necessidade de escolhermos qual tratamento melhor se adequará aos nossos interesses. A depender da natureza dos dados podemos permitir que se apresentem do jeito que estão para que possam falar por si mesmos, ou podemos agrupá-los e apresentá-los em formato tabular ou por meio de gráficos (FREUD, 2006).

Assim como a média, a **mediana** é uma medida de tendência central de um conjunto de dados por indicar exatamente o valor central de uma amostra de dados. Com o objetivo de evitar que medidas muito pequenas ou grandes possam deturpar a análise dos dados, utilizamos a mediana para indicar o "meio" ou o "centro" de um conjunto de dados. Portanto, a mediana é uma medida de posição que divide o conjunto em duas partes iguais com mesmo número de elementos, ou seja, 50% dos dados são superiores à mediana e 50% são inferiores (CORREA, 2003).

Chamaremos de E_{Md} de elemento mediano (indica a posição da mediana), Md de mediana e $X_{E_{Md}}$ de termo central. Para obtermos a mediana em um conjunto de n valores, requer que primeiro ordenemos os dados de acordo com o seu tamanho.

Para uma série com números ímpares de itens, a mediana corresponde ao valor central:

$$Md = X_{E_{Md}} \quad \therefore \quad E_{Md} = \frac{(n + 1)}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Sendo uma série com números pares, a mediana será a média dos termos centrais:

$$Md = \frac{X_{E_{Md}} + X_{E_{Md}+1}}{2} \quad \therefore \quad E_{Md} = \frac{n}{2} \quad (\text{A.2})$$

Para ilustrarmos, tomemos dois exemplos:

Ex.01 - Em semanas recentes, foi registrado em Salvador 13, 16, 21, 22, 16 acidentes de trânsito. Para encontrarmos a mediana de acidentes, primeiro ordenamos os valores de acordo com o tamanho: 13, 16, 16, 21, 22. Dessa maneira podemos observar que a mediana é o valor 16.

Ex.02 - Em alguns países, as pessoas autuadas por certas infrações leves de tráfego podem frequentar um curso de direção defensiva em lugar de pagar uma multa. Se 12 desses cursos foram frequentados por 37, 32, 28, 40, 35, 38, 40, 24, 30, 37, 32 e 40 pessoas. Para encontrarmos a mediana, devemos ordenar o número de frequentadores por ordem de tamanho: 24, 28, 30, 32, 32, 35, 37, 37, 38, 40, 40, 40. Ao aplicarmos a equação (A.2), vemos que a mediana corresponde a média dos termos centrais: $\frac{35+37}{2} = 36$ (FREUD, 2006).