



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Classificação de Rochas Ígneas e Metamórficas por meio da Dimensão Fractal

Aluno:
Fábio de Oliveira PAIVA

Orientadora:
Dra. Maria do Rosário ZUCCHI
Co-Orientador:
Dr. José Garcia Vivas MIRANDA

Salvador, 15 de abril de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Classificação de Rochas Ígneas e Metamórficas por meio da Dimensão Fractal

Fábio de Oliveira Paiva

Orientadora: Dra. Maria do Rosário Zucchi

Co-Orientador: Dr. José Garcia Vivas Miranda

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia para a obtenção do título de Mestre em Física.

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Paiva, Fábio de Oliveira.
Classificação de rochas ígneas e metamórficas por meio da dimensão fractal / Fábio de
Oliveira Paiva. - 2015.
85 f.: il.

Inclui apêndices.

Orientadora: Profª. Drª. Maria do Rosário Zucchi.

Co-orientador: Prof. Dr. José Garcia Vivas Miranda.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Salvador, 2015.

1. Fractais. 2. Rochas ígneas. 3. Rochas metamórficas. I. Zucchi, Maria do Rosário.
II. Miranda, José Garcia Vivas. III. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física. IV. Título.

CDD - 514.742
CDU - 515.1

*“A mente que se abre a uma nova
idéia jamais voltará ao seu tamanho
original.”*

Albert Einstein.

Agradecimentos

Agradeço aqui a todas aquelas pessoas que, direta ou indiretamente, se envolveram com o desenvolvimento deste trabalho, contribuindo para que mais esse importante passo fosse dado.

A meus pais, Francisco Alves de Paiva e Edina Oliveira Paiva, pelo apoio, carinho, confiança e motivação incondicional.

À minha esposa, Daniela Leite, pelo carinho, pelo apoio, pela paciência e compreensão que teve para comigo ao longo dessa grande jornada.

À minha orientadora, Doutora Maria do Rosário Zucchi, por sua paciência, dedicação e atenção, pelos conselhos valiosos e pelas discussões esclarecedoras, pelo encorajamento constante e, acima de tudo, por acreditar que esse trabalho poderia ser feito.

A meu co-orientador, Doutor José Garcia Vivas Miranda, pelo apoio, pela dedicação, pela confiança que em mim depositou. Por ter sido meu guia pelo caminho das pedras e por ter me apresentado a um novo mundo, onde arte e ciência se encontram.

Ao professor Roberto Max Argolo, que gentilmente disponibilizou as imagens das lâminas petrográficas utilizadas neste trabalho, e sem as quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

A meus professores da pós-graduação em física que, com seu apoio, me ajudaram a trilhar esse caminho.

Aos amigos e colegas do mestrado em física da UFBA, particularmente Renato Santiago,

pelas discussões enriquecedoras, por sua disposição e paciência; e ao amigo Tarcio Henrique pela amizade, apoio e incentivo.

Ninguém realiza nada sozinho. Minha gratidão a todos.

Resumo

A geometria fractal surgiu como uma ferramenta para descrever formas naturais que não podiam ser caracterizadas em termos dos conceitos e elementos da geometria Euclideana. Seus elementos, os fractais, permitem-nos quantificar atributos próprios das formas e processos da natureza, atributos tais como “irregular”, “grosseiro” e “complicado”. Estruturas matemáticas e geométricas com características complexas, para as quais os métodos da geometria tradicional se revelam ineficientes, surgiram já no século XIX, mas durante muito tempo, até a chegada de Benoit Mandelbrot, foram vistos como criaturas matemáticas patológicas.

Mandelbrot cunhou o termo fractal, em referência à característica mais marcante desses objetos matemáticos: o fato de possuírem uma dimensão não-inteira. Muitos fenômenos naturais possuem características fractais (ou aproximadamente fractais), como a disposição de redes fluviais, as formas das linhas costeiras ou a estrutura de flocos de neve. A geometria fractal permite descrever as características intrincadas desses elementos. No campo da Geologia, pode-se citar o estudo da configuração de veios em rochas metamórficas. O objetivo deste estudo é avaliar a possibilidade de aplicar os conceitos da geometria fractal, notoriamente a dimensão fractal, para caracterizar rochas pertencentes a dois grandes grupos: ígneas e metamórficas. Discute-se o conceito de dimensão fractal, como definida pelo método de contagem de caixas (Box-counting), e em seguida o método é usado na análise de imagens de amostras de rochas, obtidas por fotografias de lâminas petrográficas, no intuito de associar a complexidade das estruturas, como revelada pelas imagens, ao grupo do qual a rocha faz parte.

Palavras-chave: Fractais. Rochas ígneas. Rochas Metamórficas. Graus de Metamorfismo. Dimensão Fractal.

Abstract

Fractal geometry has emerged as a tool to describe natural forms that could not be characterized in terms of the concepts and elements of Euclidean geometry. Its elements, fractals, allow us to quantify own attributes of the forms and processes of nature, attributes such as “irregular”, “coarse” and “complex”. Mathematical and geometrical structures with complex characteristics, for which the methods of traditional geometry are revealed inefficient, have emerged in the nineteenth century, but for a long time, until the arrival of Benoit Mandelbrot, were seen as pathological mathematical creatures.

Mandelbrot coined the term fractal, referring to the most striking feature of these mathematical objects: the fact that they possess non-integer dimension. Many natural phenomena have fractal (or nearly fractal) characteristics, such as the arrangement of river networks, coastlines or snowflake structure. Fractal geometry allows us to describe the intricate characteristics of these elements. In the field of geology, one can cite the study of veins setting in metamorphic rocks. The objective of this study is to evaluate the possibility of applying the concepts of fractal geometry, notably the fractal dimension, to characterize rocks belonging to two major groups: igneous and metamorphic. We discuss the concept of fractal dimension as defined by the box-counting method, and then the method is used in the analysis of images of rock samples obtained from petrographic laminae, in order to associate the complexity of the structures, as revealed by the pictures, to the group which the rock is part of.

Keywords: Fractals. Igneous rocks. Metamorphic rocks. Grades of metamorphism. Fractal Dimension.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Fractais | 4 |
| 2.1 | Um Breve Histórico dos Fractais | 5 |
| 2.2 | Fractais na Natureza | 9 |
| 2.3 | Dimensão Fractal | 11 |
| 2.3.1 | A Dimensão de Auto-similaridade | 11 |
| 2.3.2 | A Dimensão de Contagem de Caixas (Box-counting) | 14 |
| 3 | Rochas Ígneas e Metamórficas | 18 |
| 3.1 | As Rochas Ígneas | 18 |
| 3.2 | As Rochas Metamórficas | 19 |
| 3.3 | Metamorfismo Dinâmico-Cataclástico | 21 |
| 3.4 | Metamorfismo Regional e Grau de Metamorfismo | 21 |
| 4 | Coleta e Análise dos Dados | 23 |
| 4.1 | Amostras | 23 |
| 4.2 | Preparação das Imagens das Amostras | 23 |
| 4.3 | Coleta de dados | 23 |
| 4.4 | Resultados | 31 |
| 5 | Conclusão | 36 |
| A | Amostras - Ígneas | 38 |
| A.1 | Resumos de fichas petrográficas | 38 |
| A.2 | Fotos das Amostras | 40 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| B | Amostras - Metamórficas I | 45 |
| B.1 | Resumo de Fichas Petrográficas | 45 |
| B.2 | Fotos das Amostras | 47 |
| C | Amostras - Metamórficas II | 52 |
| C.1 | Resumo de Fichas Petrográficas | 52 |
| C.2 | Fotos das Amostras | 55 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | (a) Antena fractal; (b) dissipador de calor com padrão de ramificação fractal; (c) misturadores de líquidos com padrões de ramificação fractal. (Fonte: [5]) | 2 |
| 2.1 | (a) Conjunto terço-médio de Cantor, após 5 iterações; (b) curva de Koch, após 7 iterações e (c) triângulo de Sierpinski, após 6 iterações. (Fontes: (a) [1], pp. 7; (b) [27], pp. 5; (c) [27], pp.42) | 4 |
| 2.2 | (a) Conjunto de Mandelbrot; (b) Conjunto de Julia. Fonte: software Ultra Fractal ver. 5.04 (2010), software desenvolvido por Frederik Slijkerman. | 5 |
| 2.3 | A função de Weierstrass, $f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k^a x)/\pi k^a$. Gráficos para os 30 primeiros termos da expansão $f_a(x)$ para $a = 2$ (vermelho), $a = 3$ (verde) e $a = 4$ (azul). (Fonte: elaborada no software Maple, ver. 17, pelo autor) | 6 |
| 2.4 | Quatro iterações na construção da curva de Peano. O resultado final, no limite de infinitas iterações, é uma curva que preenche o todo o espaço (no caso, o quadrado unitário).(Fonte: [29]) | 6 |
| 2.5 | Cinco primeiras iterações do conjunto terço-médio de Cantor. (Fonte: [1], pp. 7.) | 7 |
| 2.6 | Quatro primeiras iterações do proceso de geração da curva de Koch. (Fonte: [5], fractivities, Koch) | 7 |
| 2.7 | Os três primeiros estágios da construção do floco de neve de Koch. (Fonte: [1], pp. 7) | 8 |
| 2.8 | Cinco estágios na construção do triângulo de Sierpinski. (Fonte:[2], pp. 77.) . . | 8 |
| 2.9 | Quatro estágios da construção do tapete de Sierpinski. (Fonte: [30]) | 9 |
| 2.10 | Três estágios da construção de dois fractais tridimensionais. (i) Tetraedro de Sierpinski. (ii) Esponja de Menger. (Fonte: (i) [31], (ii) [32]) | 9 |
| 2.11 | Ilustração da lei dos Ramos de Leonardo da Vinci. (Fonte: [5]) | 10 |
| 2.12 | (a) Pedregulhos. (b) Micrografia de um grão de areia, com ampliação 300x. (Fonte: [5]) | 11 |
| 2.13 | O segmento de reta, o quadrado e o cubo, ampliados por um fator 3. | 12 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.14 | (a) Uma possível seqüência de formas obtidas na geração de uma curva aleatória de Koch. (Fonte: [2], pp. 426) | 14 |
| 2.15 | (a) Quadrado original, $s = 1$. As caixas usadas para cobrir o quadrado tem lados de comprimento $1/2$, $1/4$ e $1/8$, respectivamente, nas partes (b), (c) e (d). (Fonte: elaborada no software SmartDraw 2012, pelo autor) | 15 |
| 3.1 | (a) Basalto, uma rocha ígnea extrusiva, onde se percebe claramente a granulação fina. (b) Granito, uma rocha ígnea intrusiva, que mostra granulação média. (Fonte: site Infoescola.) | 19 |
| 3.2 | O gnaisse forma-se por metamorfismo do granito. O processo resulta em uma rocha de alto grau de metamorfismo. (Fonte: [46]) | 22 |
| 3.3 | O mármore forma-se por metamorfismo do calcário. O processo resulta em uma rocha de grau de metamorfismo médio. (Fonte: [46]) | 22 |
| 4.1 | (a) Foto original da amostra SE048LP. (b) Foto redimensionada. | 24 |
| 4.2 | Visualização do método de Box-counting usado pelo software HarFa, mostrando diferentes tamanhos de células na malha. N_B corresponde ao número de células azuis, N_W corresponde ao número de células verdes e N_{BW} corresponde ao número de células que contém parte da imagem, representadas aqui em branco. (a) $N_B = 3$, $N_W = 19,625$, $N_{BW} = 39$. (b) $N_B = 13$, $N_W = 35,5556$, $N_{BW} = 61$. (c) $N_B = 54$, $N_W = 101,5$, $N_{BW} = 91$. (d) $N_B = 326$, $N_W = 466$, $N_{BW} = 194$. (Fonte: imagens criadas com o programa bcmnet, pelo autor) | 25 |
| 4.3 | Espectro fractal de uma amostra típica. (Fonte: printscreen do software HarFA, pelo autor) | 26 |
| 4.4 | Excerto da plinilha com os dados gravados pelo HarFA como resultado da análise fractal. (Fonte: printscreen de arquivo de dados gerado pelo software HarFA, pelo autor) | 27 |
| 4.5 | Determinação da dimensão de borda D_{BW} no caso da amostra PB016LP. (Fonte: criado no software Origin, versão 9.0, pelo autor) | 28 |
| 4.6 | Comparação entre os conjuntos de valores de dimensão de Box-counting para os dados referentes às amostras de rochas ígneas e metamórficas. (Fonte: criado no software Minitab, versão 16, pelo autor) | 33 |
| 4.7 | Comparação entre os conjuntos de dados referentes às amostras de rochas de graus alto e médio de metamorfismo. (Fonte: criado no software Minitab, versão 16, pelo autor) | 34 |

| | | |
|------|------------------|----|
| A.1 | <i>BA008BLP</i> | 40 |
| A.2 | <i>BA163LP</i> | 40 |
| A.3 | <i>BA165LP</i> | 41 |
| A.4 | <i>PB087LP</i> | 41 |
| A.5 | <i>PB218LP</i> | 42 |
| A.6 | <i>PB302LP</i> | 42 |
| A.7 | <i>PE310LP</i> | 43 |
| A.8 | <i>SE148-ALP</i> | 43 |
| A.9 | <i>SE373LP</i> | 44 |
| | | |
| B.1 | <i>SE048LP</i> | 47 |
| B.2 | <i>SE050LP</i> | 47 |
| B.3 | <i>SE083-BLP</i> | 48 |
| B.4 | <i>SE127-ALP</i> | 48 |
| B.5 | <i>SE132LP</i> | 49 |
| B.6 | <i>SE137-BLP</i> | 49 |
| B.7 | <i>SE139LP</i> | 50 |
| B.8 | <i>SE142LP</i> | 50 |
| B.9 | <i>SE147LP</i> | 51 |
| B.10 | <i>SE166-ALP</i> | 51 |
| | | |
| C.1 | <i>BA171LP</i> | 55 |
| C.2 | <i>PB016LP</i> | 55 |
| C.3 | <i>PB054LP</i> | 56 |
| C.4 | <i>PB155LP</i> | 56 |
| C.5 | <i>PB186LP</i> | 57 |
| C.6 | <i>PB196BLP</i> | 57 |
| C.7 | <i>PE063LP</i> | 58 |
| C.8 | <i>PE101LP</i> | 58 |
| C.9 | <i>PE121LP</i> | 59 |
| C.10 | <i>PE131LP</i> | 59 |
| C.11 | <i>PE132LP</i> | 60 |
| C.12 | <i>PE152LP</i> | 60 |
| C.13 | <i>PE189LP</i> | 61 |
| C.14 | <i>PE208LP</i> | 61 |

| | |
|--------------------------------|----|
| C.15 <i>PE222LP</i> | 62 |
| C.16 <i>PE281LP</i> | 62 |
| C.17 <i>PE289LP</i> | 63 |
| C.18 <i>PE335LP</i> | 63 |
| C.19 <i>SE002LP</i> | 64 |
| C.20 <i>SE032ALP</i> | 64 |
| C.21 <i>SE035LP</i> | 65 |
| C.22 <i>SE084BLP</i> | 65 |
| C.23 <i>SE140LP</i> | 66 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | <i>Efeitos da ampliação em diferentes formas.</i> | 12 |
| 4.1 | Dados para amostras de rochas ígneas (LP). | 29 |
| 4.2 | Dados para amostras de grau de metamorfismo alto (LP). | 29 |
| 4.3 | Dados para amostras de grau de metamorfismo médio (LP). | 30 |
| 4.4 | Grupo das ígneas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de biotita. | 31 |
| 4.5 | Grupo das ígneas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de plagioclásio. | 31 |
| 4.6 | Grupo das ígneas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de quartzo. | 31 |
| 4.7 | Grupo das metamórficas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de biotita. | 32 |
| 4.8 | Grupo das metamórficas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de plagioclásio. | 32 |
| 4.9 | Grupo das metamórficas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de quartzo. | 32 |

1

Introdução

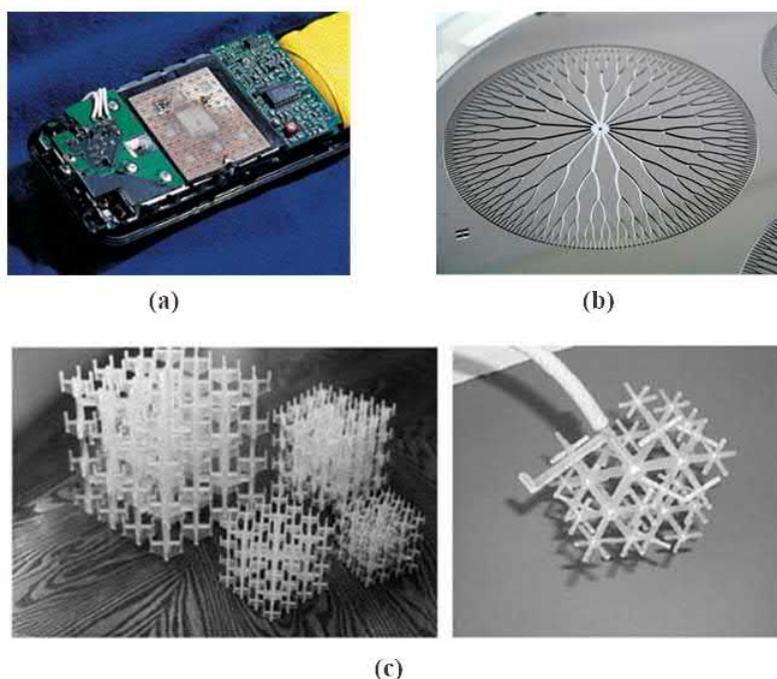
As formas clássicas da geometria (círculos, segmentos de reta, retângulos) são abstrações de formas encontradas no mundo físico: uma roda de bicicleta, uma linha de costura e uma folha de papel. Entretanto, o mundo natural é bem mais complexo do que isso. Existem muitas formas – os galhos de uma árvore, as saliências da encosta de uma montanha, a forma intrincada de uma linha costeira, os meandros de um rio – que não se assemelham àquelas que conhecemos da geometria clássica[1]. Poderíamos tentar descrever um rio sinuoso ou a forma de uma linha costeira como uma coleção de segmentos de reta arranjados de um modo particular, no entanto, não capturaríamos a essência daquela forma que queremos reproduzir. No quadro da geometria clássica, estruturas como uma linha costeira ou as ramificações de uma árvore seriam classificadas como “amorfas”.

A possibilidade de melhor descrever formas tais como árvores e rios sinuosos surgiu quando os matemáticos começaram a se deparar com construções matemáticas classificadas, do ponto de vista da geometria e análise clássicas, como bizarras, ou “patológicas”[2]. Essas construções são chamadas hoje de fractais (do adjetivo latino *fractus*, derivado do verbo *frangere*: quebrar), termo introduzido pelo matemático francês Benoit Mandelbrot em 1975[3] para estruturas geométricas (conjuntos) que possuem uma estrutura detalhada, ou irregularidades, em todas as escalas de ampliação. Com o avanço na capacidade de cálculo dos computadores, evoluiu também a área da computação gráfica e os fractais se popularizaram no meio não científico como uma combinação de matemática e arte, atraindo grande atenção por combinarem beleza e complexidade. A possibilidade de criar algoritmos para objetos fractais e representá-los como imagens, vídeo ou áudio fez com que surgisse, em meados da década de 1980, o que se conhece hoje como “arte fractal”, que inclui desde a criação de cenários para filmes e jogos de computador até a análise[4]

e composição de peças musicais. Paisagens bastante realísticas podem ser geradas por meio de algoritmos projetados para produzir um padrão fractal que imita a aparência de terrenos naturais, usando um processo iterativo composto de regras simples que resultam em padrões complexos. Outro exemplo de arte fractal é a implementação computacional dos sistemas de Lindenmayer[5] (ou Sistemas-L), criados em 1968 pelo biólogo húngaro Aristid Lindenmayer. Os sistemas-L modelam o processo de construção de estruturas vegetais por meio de recursividade, criando objetos complexos a partir de objetos simples usando instruções definidas por um conjunto de regras de reescrita.

Apesar de estruturas com características fractais serem conhecidas já desde o século XIX, não havia ligação entre essas estruturas e o mundo natural. A conexão veio apenas com o trabalho de Mandelbrot, a partir da década de 1960. Nas décadas seguintes, com inspiração no trabalho de Mandelbrot, as técnicas da geometria fractal foram aplicadas a vários campos de conhecimento, inclusive levando à geração de aplicações tecnológicas interessantes, como as antenas fractais, usadas hoje em aparelhos celulares, nas quais se procura maximizar a capacidade de recepção numa configuração de menor espaço possível[6]. Outras aplicações incluem dissipadores de calor[7] e misturadores de líquidos com características de estruturas fractais (Figura 1.1).

Figura 1.1: (a) Antena fractal; (b) dissipador de calor com padrão de ramificação fractal; (c) misturadores de líquidos com padrões de ramificação fractal. (Fonte: [5])



Na Biologia os fractais fizeram sua estréia entre as décadas de 1960 e 1990, especificamente na área da biologia celular. Descobriu-se que a maioria dos elementos biológicos têm estruturas que são autossimilares dentro de um domínio de escala definido, podendo ser caracterizados por meio da dimensão fractal[8]. As idéias e técnicas da geometria fractal foram aplicadas no estudo de neuropatologias como o mal de Alzheimer[9][10], complexidade da estrutura cerebral[11][12], pesquisa do câncer[13], diagnóstico por imagem[14] e análise de ritmos cardíacos[15].

Na Física, essas técnicas foram aplicadas ao estudo da distribuição de galáxias no Universo[17][18], movimento browniano[19], quebra de rigidez dielétrica[21], acústica[20], mecânica dos fluidos, entre outros.

Na área da Geologia encontramos aplicações das técnicas da geometria fractal no estudo dos processos de fragmentação, uma vasta área geral de investigação que inclui, entre outros, os efeitos da tectônica de placas e processos de intemperismo que promovem fragmentação de rochas[22], no estudo de fluxo de materiais porosos[23], na investigação da rugosidade de superfícies[24], modelagem de dinâmica de terremotos[25], geomorfologia, hidráulica de solos[26] e outros.

Desde o surgimento da geometria fractal, com o trabalho de Mandelbrot, a ciência ganhou uma nova ferramenta para modelar a natureza e caracterizar de maneira mais apropriada certas estruturas que antes era descritas de maneira vulgar ou superficial por meio de adjetivos como “complicado” ou “grosseiro”. Assim, formas de nuvens, configurações de sistemas fluviais, sistemas de veios em rochas, fraturas, distribuições de galáxias, complexidades morfológicas de células e tecidos orgânicos, dentre outras estruturas, podem ser melhor compreendidas através dos conceitos da geometria fractal, de um modo quantitativo.

Este trabalho aplica os índices fractais na caracterização e estudo das propriedades topológicas da estrutura irregular de lâminas de rochas pertencentes a dois grupos – ígneas e metamórficas. Inicia-se com uma breve introdução aos fractais, seguida pela discussão do importante conceito de dimensão fractal, caracterização dos grupos de rochas relacionadas ao estudo e finaliza-se com a apresentação dos resultados e conclusões.

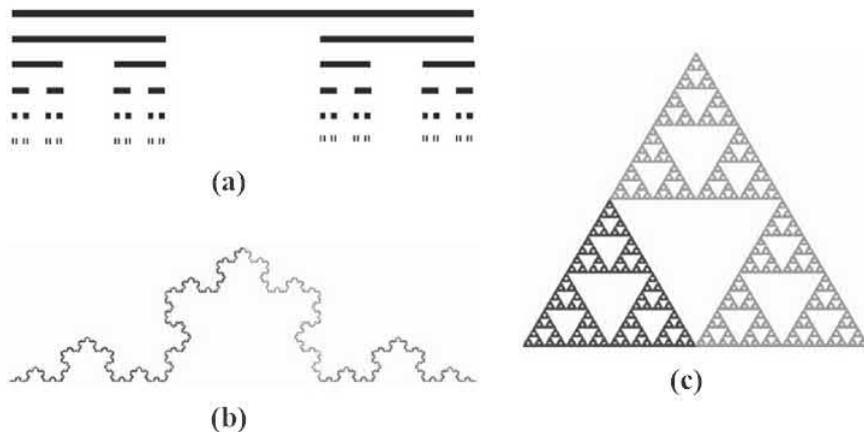
2

Fractais

Fractais são estruturas geométricas complexas que apresentam os mesmos detalhes em escalas diferentes[5]. Essa característica é conhecida como auto-similaridade. Apesar de serem complexos, fractais algébricos e geométricos são formados pela repetição indefinida de um processo simples. Uma estrutura fractal conta a história do processo que a formou.

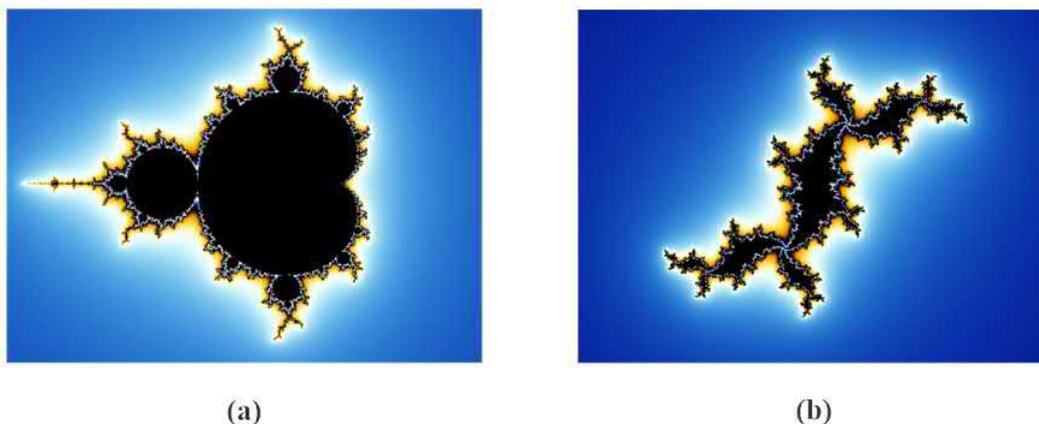
Fractais geométricos repetem padrões auto-similares em todas as escalas, exibindo assim uma propriedade denominada de auto-similaridade infinita[5]. Sua construção envolve um iniciador e um gerador (conjuntos de segmentos de reta arbitrários), sendo aplicado sobre este último o processo iterativo. Como exemplos, temos o conjunto terço médio de Cantor (Figura 2.1(a)), a curva de Koch (Figura 2.1(b)) e o triângulo de Sierpinski (Figura 2.1(c)).

Figura 2.1: (a) Conjunto terço-médio de Cantor, após 5 iterações; (b) curva de Koch, após 7 iterações e (c) triângulo de Sierpinski, após 6 iterações. (Fontes: (a) [1], pp. 7; (b) [27], pp. 5; (c) [27], pp.42)



Fractais algébricos são definidos por meio de relações algébricas recursivas envolvendo números complexos. Os exemplos clássicos são os conjuntos de Julia e o conjunto de Mandelbrot, ilustrados na figura 2.2.

Figura 2.2: (a) *Conjunto de Mandelbrot*; (b) *Conjunto de Julia*. Fonte: software *Ultra Fractal ver. 5.04 (2010)*, software desenvolvido por *Frederik Slijkerman*.



Padrões fractais também podem ser encontrados na natureza, como, por exemplo, nos reinos vegetal e mineral. No entanto, as estruturas naturais não tem propriedades fractais verdadeiras, no sentido de que não exibem auto-similaridade infinita. De fato, a repetição de um padrão que poderia ser identificado como fractal cessa em algum ponto e a estrutura deixa de ser um fractal verdadeiro.

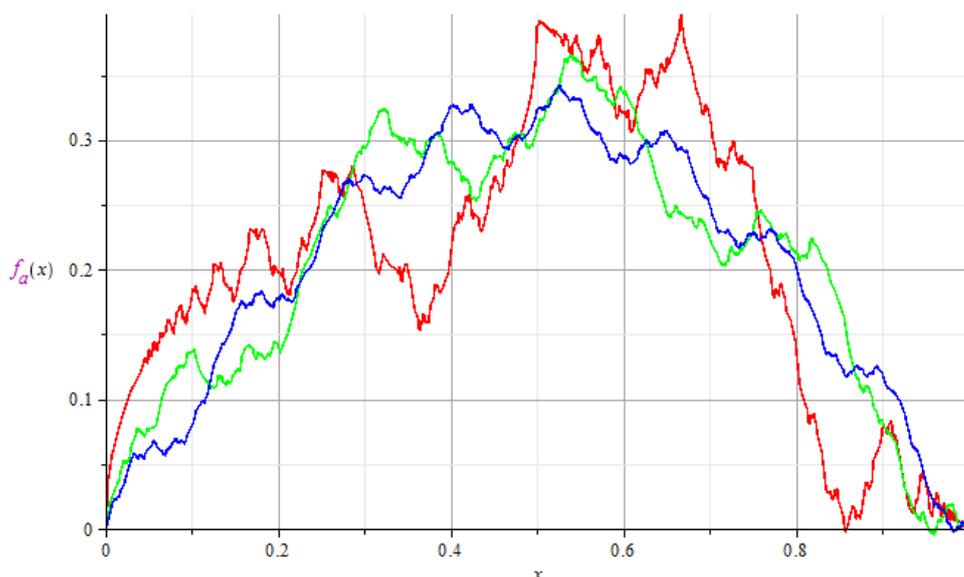
A palavra “fractal” foi introduzida pelo matemático francês Benoit Mandelbrot[34][3] em 1975 para descrever tais estruturas, mas sua história remonta à matemática clássica, no século 19. Já nessa época os matemáticos, que até então haviam lidado com as formas geométricas clássicas de retas, planos, esferas, curvas e superfícies, começaram a imaginar formas geométricas altamente irregulares, que depois passaram a ser vistos como “objetos patológicos”. Fractais fornecem a possibilidade de se quantificar conceitos como “irregular” ou “complicado”, e seriam mais adequados para modelar formas reais da natureza. Nas palavras de Mandelbrot[3], “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta”.

2.1 Um Breve Histórico dos Fractais

O Cálculo de Newton e Leibniz forneceu aos matemáticos do século 19 a segurança para considerar que toda curva contínua deveria possuir uma tangente bem definida, exceto

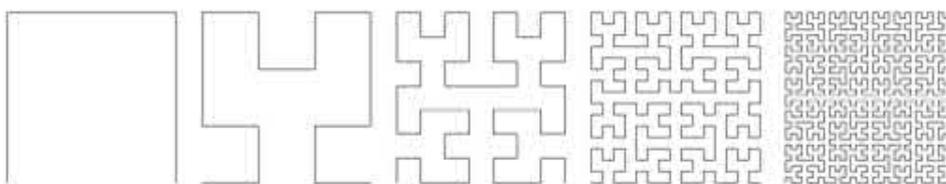
aquelas em que havia uma brusca mudança de direção. No entanto, como demonstra a famosa Função de Weierstrass¹[35] (Figura 2.3), isso não é verdade. Essa função é contínua em cada ponto de seu domínio, mas não é diferenciável em nenhum deles.

Figura 2.3: A função de Weierstrass, $f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k^a x)/\pi k^a$. Gráficos para os 30 primeiros termos da expansão $f_a(x)$ para $a = 2$ (vermelho), $a = 3$ (verde) e $a = 4$ (azul). (Fonte: elaborada no software Maple, ver. 17, pelo autor)



Em 1890, Giuseppe Peano apresentou outro objeto patológico: uma curva que passa por cada ponto no interior de um quadrado unitário, o primeiro exemplo de uma curva que preenche o espaço[28]. Essa curva é gerada por meio de um processo iterativo, em que uma operação é aplicada através de um gerador a um intervalo unitário, chamado de iniciador. A cada passo, aumenta a complexidade do conjunto de pontos (Figura 2.4).

Figura 2.4: Quatro iterações na construção da curva de Peano. O resultado final, no limite de infinitas iterações, é uma curva que preenche o todo o espaço (no caso, o quadrado unitário). (Fonte: [29])



¹Apresentada à Academia de Berlin em 1872; publicada em 1886.

Outros objetos desse tipo surgiram no final do século 19, entre eles o famoso conjunto terço-médio de Cantor, um dos fractais mais fundamentais e mais simples de construir, apresentado em 1883 pelo matemático alemão Georg Cantor. Partindo-se do intervalo unitário $[0, 1]$, retira-se seu terço médio, obtendo-se então dois intervalos: $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Repete-se esse processo para os intervalos obtidos em cada passo.

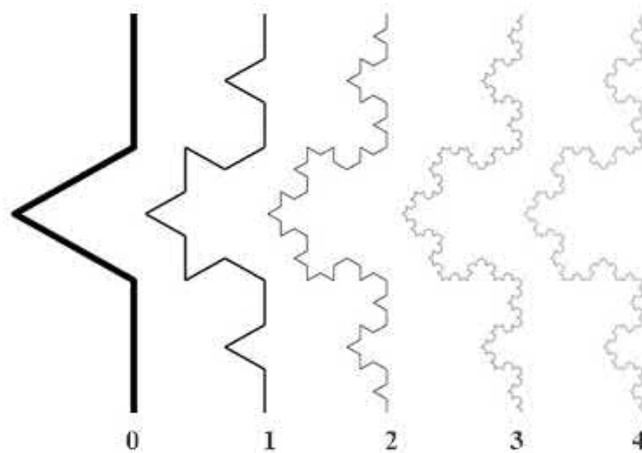
Figura 2.5: *Cinco primeiras iterações do conjunto terço-médio de Cantor. (Fonte: [1], pp. 7.)*



O conjunto terço-médio de Cantor, apresentado na figura 2.5, é definido através de um processo iterativo e é auto-similar, pois cada porção do conjunto é idêntica ao todo, com diferença apenas na escala. Essas características são comuns a muitos fractais geométricos.

Já no início do século 20, surge a chamada curva triádica de von Koch (Figura 2.6), apresentada pelo matemático Helge von Koch[48] em 1904, construída também através de um processo iterativo atuando sobre um segmento de reta. O segmento é dividido em três partes iguais e a parte central é substituída por dois segmentos de mesmo tamanho do segmento suprimido, formando um ângulo entre si.

Figura 2.6: *Quatro primeiras iterações do proceso de geração da curva de Koch. (Fonte: [5], fractivities, Koch)*

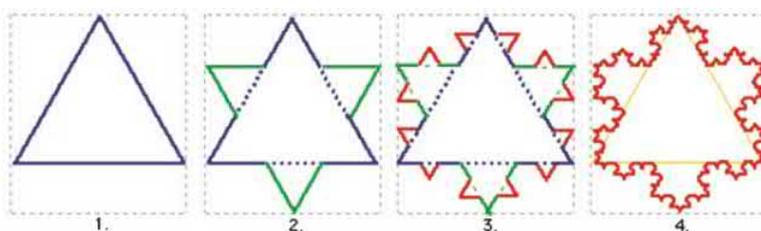


A curva triádica de von Koch é a curva limite obtida pela repetição desse processo

ad infinitum, sendo também exemplo de uma curva contínua que não possui tangente em nenhum de seus pontos. Outra característica marcante dessa curva é que no limite de infinitas iterações ela tem comprimento infinito, apesar de estar imersa em um plano finito.

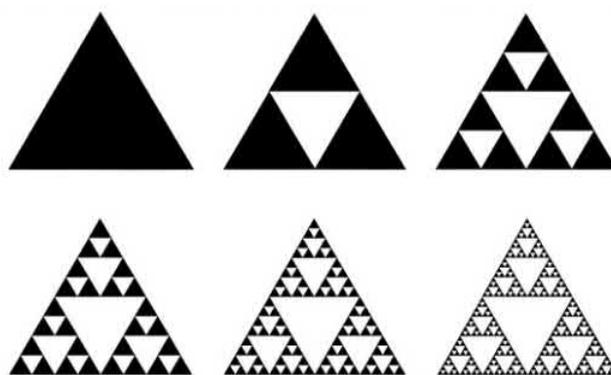
Outra versão, o floco de neve de Koch, ilustrado na figura 2.7, é construída também através de um processo iterativo semelhante, mas dessa vez atuando sobre os lados de um triângulo equilátero, e gera uma curva que tem, no limite de infinitas iterações, comprimento infinito, mas que delimita uma região de área finita.

Figura 2.7: Os três primeiros estágios da construção do floco de neve de Koch. (Fonte: [1], pp. 7)



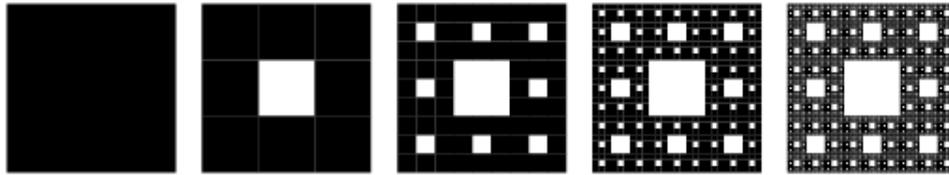
Outro exemplo clássico de um fractal é o triângulo de Sierpinski, descrito em 1915 pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski e mostrado na figura 2.8. Em uma região triangular, toma-se os pontos médios dos lados como vértices de um outro triângulo, que é então retirado do interior da figura. O processo é então repetido com as regiões triangulares restantes *ad infinitum*.

Figura 2.8: Cinco estágios na construção do triângulo de Sierpinski. (Fonte:[2], pp. 77.)



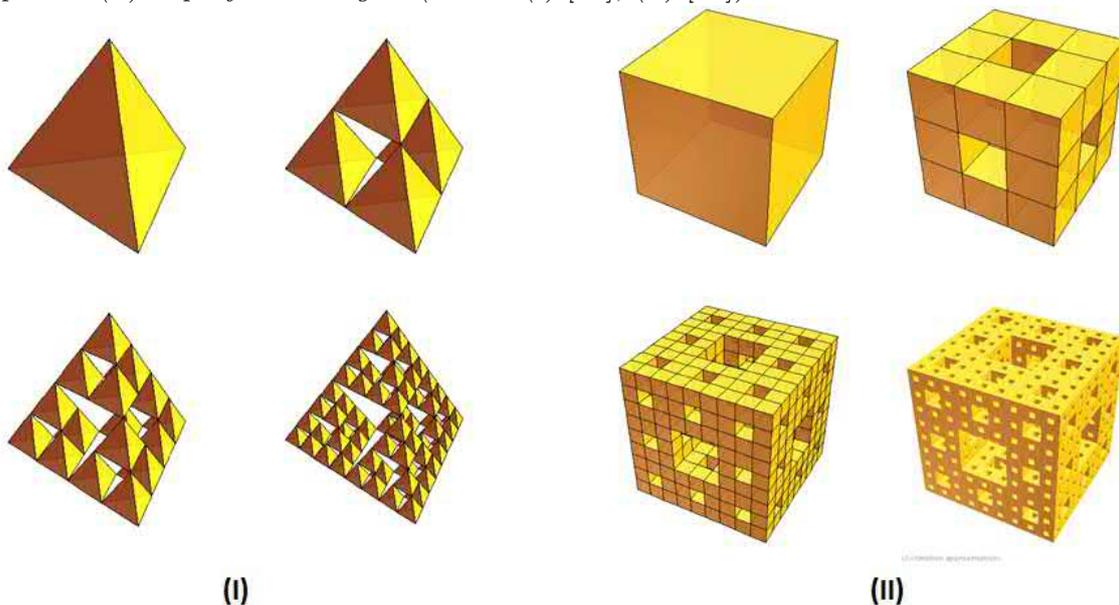
Outro fractal interessante é o chamado tapete de Sierpinski, ilustrado na figura 2.9. É obtido a partir de uma região de forma quadrada, dividindo-a em nove quadrados menores e retirando o quadrado central. O processo é então repetido para as partes restantes, e à medida em que as iterações prosseguem, a área da região restante aproxima-se de zero.

Figura 2.9: Quatro estágios da construção do tapete de Sierpinski. (Fonte: [30])



Fractais geométricos também podem ser construídos no espaço tridimensional. Entre eles, tem-se o análogo tridimensional do triângulo de Sierpinski (Figura 2.10(i)), conhecido como o tetraedro de Sierpinski, e a esponja de Menger (Figura 2.10(ii)), o análogo tridimensional do tapete de Sierpinski.

Figura 2.10: Três estágios da construção de dois fractais tridimensionais. (i) Tetraedro de Sierpinski. (ii) Esponja de Menger. (Fonte: (i) [31], (ii) [32])

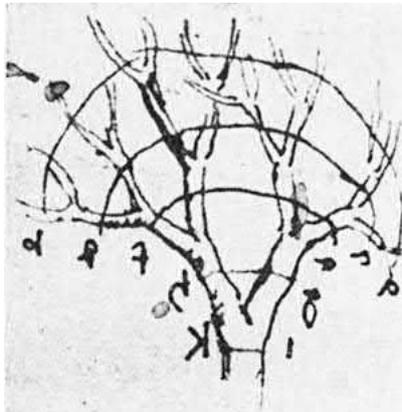


2.2 Fractais na Natureza

É possível identificar vários padrões fractais à nossa volta, especialmente no reino vegetal. Acredita-se que a primeira descrição de um padrão fractal observável na natureza tenha tido como autor o estudioso renascentista Leonardo da Vinci[5], no século 15. Sua observação ficou conhecida como a lei de Leonardo para os Ramos (Figura 2.11):

Todos os ramos de uma árvore, em cada estágio de sua altura, quando postos juntos, são iguais em espessura ao tronco (abaixo deles)[49].

Figura 2.11: *Ilustração da lei dos Ramos de Leonardo da Vinci. (Fonte: [5])*



Ele raciocinou que os ramos da árvore atuassem como canos que transportariam fluidos no interior da planta e, por isso, a área total de seção reta deveria se manter constante ao longo dos vários níveis da árvore. No entanto, hoje se sabe que a regra apresentada por Leonardo da Vinci não é inteiramente correta[50].

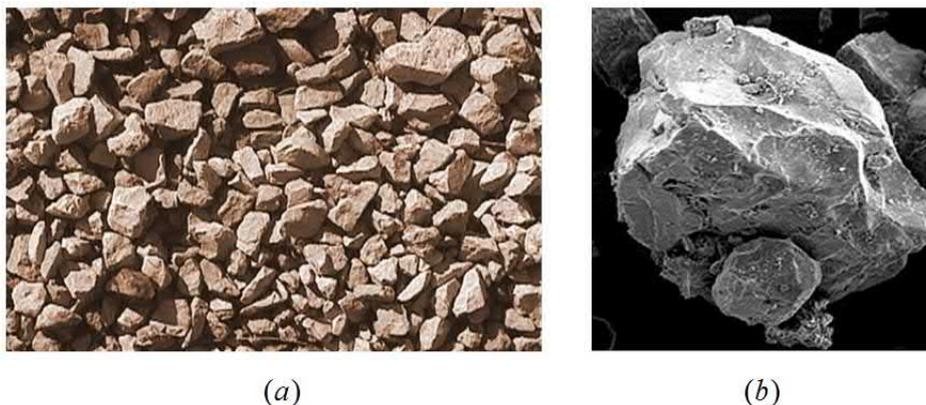
Uma árvore pode ser vista como um fractal de ramificação, do qual outro exemplo é a samambaia, que exibe uma certa auto-similaridade e pode ser encarada como sendo constituída de cópias menores de uma forma geral. Mas há uma diferença fundamental que distingue os fractais geométricos e algébricos dos padrões fractais naturais: a auto-similaridade cessa em algum ponto e a estrutura deixa de ser um fractal. A auto-similaridade em um padrão fractal natural é aproximada.

Padrões fractais de ramificação aproximados também são encontrados no corpo humano, a exemplo dos pulmões, que chegam a exibir até 11 ordens de ramificações, e dos vasos sanguíneos, que se dividem em vasos cada vez menores, até atingir a espessura de um capilar, com cerca de $8\mu\text{m}$ de diâmetro[51]. Tais padrões são também encontrados nos neurônios[52], onde se observa claramente os padrões de ramificação fractal de axônios e dendritos.

Na geologia encontramos também muitos exemplos de padrões fractais. O padrão complexo e auto-similar de uma rede de rios é formado pela repetição de um processo simples: escavação de canais pela erosão das águas da chuva[53]. Outro exemplo relevante de padrão fractal são as formações rochosas. Montanhas são grandes massas de rocha que, por longos períodos de tempo, sofrem ação da erosão e intemperismo, fragmentando-se em corpos ro-

chosos menores que se depositam no sopé da montanha. Esse processo continua até que se chega ao nível de grãos de areia[39]. Fato notável é que a comparação entre rochas e grãos de areia não pode ser feita a menos que se conheça a escala em que as estruturas estão mostradas. A figura 2.12 mostra um exemplo de como a escala é importante em objetos fractais.

Figura 2.12: (a) Pedregulhos. (b) Micrografia de um grão de areia, com ampliação 300x. (Fonte: [5])



2.3 Dimensão Fractal

É possível obter uma caracterização de um fractal por meio do conceito de dimensão. A dimensão pode ser definida em termos das propriedades de escala, e leva a um modo quantitativo de descrever os fractais. Existem várias definições de dimensão. A chamada dimensão topológica corresponde à noção comum de dimensão, pela qual o ponto tem dimensão nula (zero), a reta é unidimensional, o plano é bidimensional e o espaço (euclidiano) é tridimensional. Nesses casos, a dimensão é sempre um número inteiro, mas veremos que fractais são conjuntos que exibem uma dimensão não-inteira, e devem ser considerados com cuidado. Analisaremos primeiro, e de forma resumida, a dimensão de auto-similaridade e em seguida a dimensão de contagem de caixas (Box-counting).

2.3.1 A Dimensão de Auto-similaridade

Consideremos um segmento de reta, que é ampliado por um fator 3. O segmento agora comporta três segmentos de reta iguais ao original. Esse processo de ampliação, como mostra a figura 2.13, pode ser repetido com um quadrado e com um cubo e resulta que o

quadrado agora comporta 9 cópias do quadrado original, enquanto o cubo agora comporta 27 cópias do cubo original. Esses dados são mostrados na Tabela 2.1.

Sejam \mathcal{F} , o fator de ampliação, \mathcal{N} , o número de cópias pequenas e D a dimensão. Os dados da Tabela 2.1 sugerem que se pode relacionar o fator de ampliação, o número de pequenas cópias e a dimensão por meio da relação matemática[1]

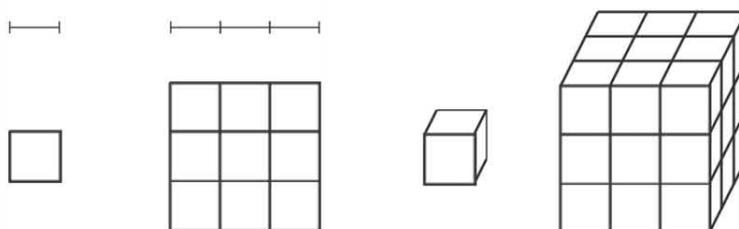
$$\mathcal{N} = \mathcal{F}^D . \tag{2.1}$$

| Forma | Fator de ampliação | Número de cópias |
|----------|--------------------|------------------|
| Reta | 3 | 3 |
| Quadrado | 3 | 9 |
| Cubo | 3 | 27 |

Tabela 2.1: *Efeitos da ampliação em diferentes formas.*

A propriedade de uma forma que determina a quantidade de cópias menores que a forma maior comporta é a dimensão da forma. A definição (operacional) dada acima reproduz o que se espera a respeito da dimensão de uma forma geométrica clássica. Espera-se que um quadrado seja bidimensional, o que se verifica usando os dados da Tabela 2.1 e fazendo-se $D = 2$ na Eq.(2.1).

Figura 2.13: *O segmento de reta, o quadrado e o cubo, ampliados por um fator 3.*



A dimensão, definida desse modo, é conhecida como a dimensão de auto-similaridade, pelo fato de dizer quantas porções auto-similares de um objeto estão contidas no próprio objeto[2].

Tentemos agora aplicar a definição dada pela Eq.(2.1) a alguns objetos fractais, iniciando com o conjunto terço-médio de Cantor, cujos passos de construção estão mostrados na figura 2.5. O fator de ampliação é 3; comparando os dois primeiros passos na construção, temos que cada segmento de reta no segundo passo deve ser ampliado até 3 vezes

seu comprimento para que se torne igual ao segmento de reta do passo anterior, e temos 2 cópias. A cada passo, temos dois pequenos conjuntos de Cantor que podem ser dimensionados para reproduzir o original. Assim, a equação de dimensão para o conjunto de Cantor é

$$3^D = 2 . \quad (2.2)$$

Resolvendo essa equação, encontramos

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309 . \quad (2.3)$$

Um modo de interpretar essa dimensão não-inteira é imaginar que o conjunto terço-médio de Cantor tem aspectos pontuais (dimensão nula) e unidimensionais, pois sua dimensão situa-se entre 0 e 1. O conjunto de Cantor é construído a partir de retas (unidimensionais), mas à medida em que o processo iterativo de sua construção prossegue, o que resta é uma coleção de pontos.

Como segundo exemplo, consideremos o triângulo de Sierpinski. Os passos de construção são mostrados na figura 2.8. O fator de ampliação para esse fractal é 2 e comparando os dois primeiros passos, vemos que no segundo passo há 3 cópias menores do triângulo do primeiro passo. Portanto,

$$2^D = 3 . \quad (2.4)$$

Resolvendo essa equação, encontramos

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585 . \quad (2.5)$$

A exemplo da dimensão determinada para o conjunto de Cantor, podemos interpretar a dimensão do triângulo de Sierpinski como indicando que a forma tem qualidades intermediárias entre as de objetos unidimensionais e bidimensionais.

Lembremos que a dimensão topológica corresponde à noção comum de dimensão. A dimensão topológica de um ponto é 0, a de uma reta é 1, a de um plano é 2, e a de um cubo é 3. O conjunto de Cantor é formado de pontos e assim, sua dimensão topológica, que simbolizaremos por D_T , é zero. Note-se que $D > D_T$. No triângulo de Sierpinski, à medida em que o número de iterações tende a infinito, mais triângulos são removidos e restam segmentos de reta de comprimento muito pequeno. Desse modo, a dimensão topológica do triângulo de Sierpiński é 1. Temos novamente $D > D_T$.

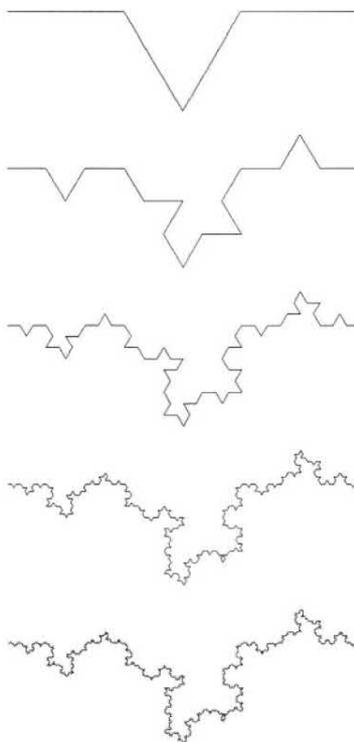
A partir desses resultados, pode-se chegar a um outra definição de fractal[34]: um fractal

é um objeto geométrico cuja dimensão de auto-similaridade é maior que sua dimensão topológica. Essa definição é quase padrão, mas exclui alguns tipos de conjuntos que também seriam fractais[37].

2.3.2 A Dimensão de Contagem de Caixas (Box-counting)

Há muitos fractais que não são exatamente auto-similares. Um exemplo conhecido é a chamada curva de Koch aleatória (Figura 2.14). Ela é construída através de uma modificação do processo iterativo descrito para a curva de Koch, ao qual se adiciona elemento de aleatoriedade. O segmento central suprimido é substituído por dois segmentos formando um ângulo entre si, mas esses segmentos podem ser colocados para cima ou para baixo, com probabilidade, por exemplo, de $\frac{1}{2}$ para cada direção. A regra de geração deixa então de ser determinística, não levando ao mesmo resultado a cada vez em que é aplicada. Pequenas partes da curva de Koch aleatória assemelham-se à curva inteira, no entanto não são réplicas exatas.

Figura 2.14: (a) Uma possível seqüência de formas obtidas na geração de uma curva aleatória de Koch. (Fonte: [2], pp. 426)



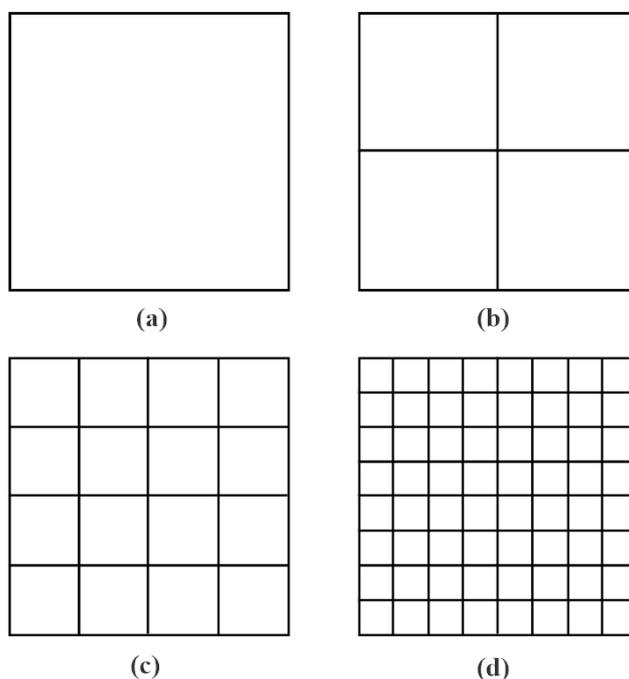
O caso da curva de Koch aleatória ilustra uma auto-similaridade estatística[36], ou apro-

ximada, sendo esse o tipo de auto-similaridade que surge em muitos fractais de ocorrência natural, a exemplo das linhas costeiras.

A Eq.(2.1) é adequada para determinar a dimensão de muitos objetos fractais, mas para sua aplicação é necessários que os objetos em questão possuam a propriedade de auto-similaridade exata. Para objetos que não são exatamente auto-similares, faz-se necessário uma definição diferente, que leva em conta o que ocorre quando se altera as escalas de medida. Essa nova definição resulta do que se conhece como o método de contagem de caixas (Box-counting), sendo a dimensão referida como a dimensão de contagem de caixas.

O método consiste em cobrir o objeto com “caixas” e investigar como varia o número de caixas, denotado por $N(s)$, com o tamanho das caixas usadas na cobertura, denotado por s . Como ponto de partida, consideremos um quadrado de lado unitário. A maneira trivial de se fazer a cobertura seria usando um quadrado de lado também unitário. Se forem usados quadrados de lado $s = \frac{1}{2}$, serão necessários $N(s) = 4$ quadrados desse tipo. Uma cobertura também poderia ser feita utilizando-se $N(s) = 16$ quadrados de lado $s = \frac{1}{4}$, e assim sucessivamente (Figura 2.15).

Figura 2.15: (a) Quadrado original, $s = 1$. As caixas usadas para cobrir o quadrado tem lados de comprimento $1/2$, $1/4$ e $1/8$, respectivamente, nas partes (b), (c) e (d). (Fonte: elaborada no software SmartDraw 2012, pelo autor)



Pode-se perceber facilmente a existência de um padrão: se a cada passo s diminui por

um fator 2, então $N(s)$ é elevado ao quadrado. A razão para esse comportamento é o fato de que o quadrado é bidimensional. À medida que s se torna menor, $N(s)$ se torna maior, e a relação entre s e $N(s)$ pode ser usada para determinar a dimensão. Essa relação pode ser escrita na forma

$$N(s) = k \left(\frac{1}{s} \right)^D, \quad (2.6)$$

onde k é uma constante, não dependendo do tamanho da caixa usada na cobertura, e o expoente D é conhecido como a dimensão de contagem de caixas. O procedimento descrito para o quadrado pode ser estendido a outras formas de maior complexidade. No entanto, é importante reconhecer que o método dará resultados mais precisos à medida em que s se tornar menor. Se o método fosse aplicado para um círculo, por exemplo, obter-se-ia uma contagem mais precisa da área com caixas de tamanho menor. A Eq.(2.6), portanto, é válida no limite em que $s \rightarrow 0$, o que corresponde a $N(s) \rightarrow \infty$.

A dimensão de box-counting é um caso particular da chamada *dimensão de Hausdorff-Besicovitch* (D_H)[37], um conceito mais geral introduzido pelo matemático alemão Felix Hausdorff, baseada também em conceitos métricos. De maneira geral, deseja-se realizar uma medida de um conjunto imerso em um espaço n -dimensional, denominada um “volume generalizado” (por exemplo, o comprimento, no caso de uma reta imersa no espaço Euclideano bidimensional). O conjunto é coberto por uma coleção contável de hipercubos (caixas) com arestas variáveis, mas que não excedem um certo valor, e procura-se um valor de aresta que minimize o volume generalizado. No método de box-counting, tem-se um tipo particular de cobertura, com as caixas tendo todas a mesma aresta em qualquer etapa. Assim, dimensão de box-counting (D) relaciona-se com a dimensão de Hausdorff-Besicovitch por[38]

$$D \geq D_H,$$

devido à condição de mínimo envolvida na definição de D_H .

Na Eq.(2.6) temos duas variáveis a determinar, sendo que nem sempre é possível fazer estimativas diretas dos valores de k e D . Um modo de se determinar valores para essas variáveis que se encaixem em conjuntos de dados de s e $N(s)$ consiste em linearizar a relação entre essas quantidades. Partindo-se da Eq.(2.6) e tomando o logaritmo de ambos os membros, tem-se

$$\log N(s) = \log k + D \cdot \log \left(\frac{1}{s} \right) \quad (2.7)$$

Tem-se então uma relação linear entre $\log N(s)$ e $\log \left(\frac{1}{s} \right)$, ou seja, podemos escrever a

Eq.(2.7) na forma da equação de uma reta,

$$y = k + Dx ,$$

com $y \equiv \log N(s)$ e $x \equiv \log \left(\frac{1}{s}\right)$. Portanto, o problema de determinar a dimensão D pode ser transformado no problema de determinar a inclinação de uma reta, aquela que resulta quando $\log N(s)$ é plotado contra $\log \left(\frac{1}{s}\right)$. Obtidos os pontos $(\log \left(\frac{1}{s}\right), \log N(s))$, pode-se fazer o ajuste linear e tem-se a inclinação D .

Deve-se enfatizar, mais uma vez, a necessidade de se usar caixas de tamanho bastante reduzido para a obtenção de resultados mais precisos. Para realizar isso, é necessário que se disponha de imagens de alta resolução do objeto para o qual se deseja determinar a dimensão de contagem de caixas. A resolução finita das imagens impõe restrições quanto ao tamanho das caixas que podem ser usadas. Ainda assim, a dimensão de contagem de caixas é um método bastante útil para quantificar propriedades de objetos que sejam estatisticamente auto-similares, e este método, com uma variação que será detalhada em seção posterior, foi usado neste estudo.

3

Rochas Ígneas e Metamórficas

Rochas são estruturas compostas de agregados sólidos de minerais, sendo o seu aspecto determinado por sua mineralogia e textura. A mineralogia compreende a proporção relativa dos minerais que compõem a rocha, e a textura compreende os tamanhos dos cristais, sua forma e a maneira como estão unidos[39].

Todas as rochas encontradas na Terra classificam-se em um de três grandes grupos: ígneas, sedimentares e metamórficas. Aquelas formadas pela solidificação de rochas fundidas nas partes profundas da crosta e do manto terrestre são denominadas de rochas ígneas. As que são formadas pelo soterramento de camadas de sedimentos são denominadas rochas sedimentares. As que se formam através de transformações, que envolvem condições de alta temperatura e pressão, sofridas por rochas sólidas anteriormente existentes são denominadas rochas metamórficas.

3.1 As Rochas Ígneas

As rochas ígneas ou magmáticas tem sua origem nas profundezas da Terra, onde rochas fundidas nas partes mais profundas da crosta e no manto (denominadas de magma) encontram caminho para chegar à superfície terrestre[39][42]. Nesse processo de ascensão pode ocorrer um resfriamento antes ou após o magma chegar à superfície. No caso em que tem lugar o resfriamento em superfície, devido a um extravasamento, ocorre solidificação rápida e formação de rochas ígneas denominadas de extrusivas. No resfriamento em profundidade, ocorre solidificação lenta, levando à formação de rochas ígneas denominadas de intrusivas, assim chamadas por forçarem seu caminho através das rochas vizinhas.

A classificação das rochas ígneas toma como parâmetros a textura e a composição

mineralógica e química. A textura refere-se ao tamanho dos cristais numa amostra de rocha, sendo a rocha classificada como de granulação fina (como o basalto) ou grossa (como o granito). Esta característica está relacionada com o tempo de resfriamento do magma: o resfriamento lento no interior da Terra permite que haja tempo suficiente para o crescimento de grandes cristais, enquanto que o resfriamento rápido resulta em uma rocha cristalina fina, onde não se torna possível distinguir cristais (Figura 3.1).

Figura 3.1: (a) Basalto, uma rocha ígnea extrusiva, onde se percebe claramente a granulação fina. (b) Granito, uma rocha ígnea intrusiva, que mostra granulação média. (Fonte: site Infoescola.)



Quanto à sua composição química e mineralógica, a classificação das rochas ígneas as situa em três grupos de acordo com as proporções relativas de ocorrência de minerais silicatados (quartzo, feldspatos, micas, anfibólios, piroxênios e olivinas): rochas ígneas félsicas, máficas e intermediárias. As rochas ígneas félsicas são ricas em minerais com altos teores de sílica, mas pobres em ferro e magnésio. As rochas ígneas máficas são ricas em magnésio e ferro, mas pobres em sílica. Quanto às rochas ígneas intermediárias, estas não são tão ricas em sílica quanto as félsicas nem tão ricas em ferro e magnésio quanto as máficas.

3.2 As Rochas Metamórficas

O termo metamorfismo refere-se ao conjunto de processos de transformações mineralógicas, de textura e de estrutura sofridos pelas rochas que, no interior da crosta terrestre, ficam sujeitas a condições físicas e químicas diferentes daquelas experimentadas pela rocha original quando esta se formou. Rochas metamórficas são aquelas formadas a partir de rochas pré-existentes que passaram por alterações de natureza mineralógica, estrutural e química causadas por variação extrema das condições de pressão e temperatura, além de esforços de tensões no interior da crosta[40]. O processo de metamorfismo tem lugar

em meio essencialmente sólido, ou seja, a rocha não passa por uma fase de fusão durante as transformações. As mudanças resultantes na massa de rocha original, também denominada de protólito[40], constituem uma resposta termodinâmica a um ambiente alterado, com o qual a rocha procura entrar em um novo estado de equilíbrio. Quaisquer tipos de rochas (ígneas, sedimentares e mesmo outras rochas metamórficas) podem passar por esse processo.

Durante o metamorfismo, a ação das altas temperaturas pode fazer com que ocorram reações químicas, com a formação de novos minerais, a exemplo de minerais argilosos, que se transformam em micas, ou pode fazer com que o mineral sofra apenas uma recristalização, isto é, ocorre apenas uma mudança na textura (aumento de tamanho ou modificação na forma) sem alteração na composição química[41]. Exemplo desse último processo ocorre com o calcário (CaCO_3), cujo produto do metamorfismo é o mármore, rocha de granulação média.

A pressão, juntamente com a temperatura, é uma das principais causas do metamorfismo. À medida em que se avança em profundidade na crosta ocorre aumento de pressão sobre as rochas devido à ação do peso da camada de rocha sobreposta[43]. A ação da força gravitacional origina o que se chama de pressão litostática. Em média, essa pressão aumenta de 27 *Mpa* a cada quilômetro de profundidade na crosta[45]. As rochas podem estar sujeitas a pressões confinantes (quando as forças são aplicadas em todas as direções) ou dirigidas (quando a força ocorre numa direção particular, como no caso da região de encontro entre placas tectônicas convergentes)[39].

A água também desempenha um papel importante no processo de metamorfismo, pois pode introduzir ou remover componentes químicos das rochas. A água participa das chamadas soluções hidrotermais. Essas soluções penetram nos veios das rochas e reagem quimicamente com as mesmas, alterando sua composição química sem, no entanto, alterar sua textura[41].

Existem três tipos principais de metamorfismo: (1) o **metamorfismo regional**, no qual extensas áreas são metamorfozadas pelas altas pressões e temperaturas geradas durante os processos de orogênese (mecanismo que conduz à formação de cadeias montanhosas); (2) o **metamorfismo de contato**, onde as rochas encaixantes são metamorfozadas em sua maior parte devido ao calor da massa ígnea que nelas se intrude; e (3) o **metamorfismo de assoalho oceânico**, onde água do mar em alta temperatura percola em centros de expansão de dorsais mesoceânicas e metamorfoziza rochas crustais. Além destes, há ainda o metamorfismo de baixo grau ou de soterramento, os metamorfismos de alta pressão e

de pressão ultra-alta, e o metamorfismo de impacto. Faremos uma breve descrição dos metamorfismos dinâmico-cataclástico e regional, pois são esses os dois tipos de processos relacionados à formação das rochas das quais foram feitas as imagens usadas neste estudo.

3.3 Metamorfismo Dinâmico-Cataclástico

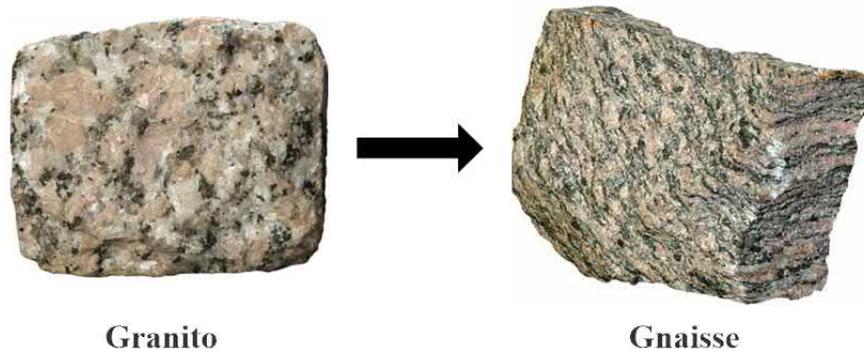
O metamorfismo dinâmico (cataclástico) é aquele resultante de deformação puramente mecânica. A pressão é o fator principal, causando esmagamento e granulação da rocha original[44], sendo a temperatura um fator co-adjuvante. Esse tipo de metamorfismo se desenvolve em estreitas faixas ao longo de zonas de cisalhamento, estando envolvidas pressões de grande intensidade[42], predominantemente dirigidas. O resultado da ação da pressão depende da profundidade em que ocorre o processo. Se próximo à superfície, os minerais sofrem fragmentação ou pulverização. Se em regiões mais profundas da crosta, as condições de pressão e temperatura mais elevadas causam deformação plástica.

3.4 Metamorfismo Regional e Grau de Metamorfismo

O metamorfismo regional é o de ocorrência mais comum. Nesse processo, condições de temperatura e pressão altas promovem alterações em rochas ao longo de regiões que se estendem por muitos quilômetros quadrados. É característico de um ambiente dominado pela tectônica de placas convergentes. Pode ser de soterramento (pressão confinante de camadas de rochas com mais de 10 *km* de espessura e atuação de calor geotermal), dinamotermal (pressão dirigida, em zonas de colisão de placas tectônicas) ou hidrotermal (alteração da rocha pela ação de água em alta temperatura).

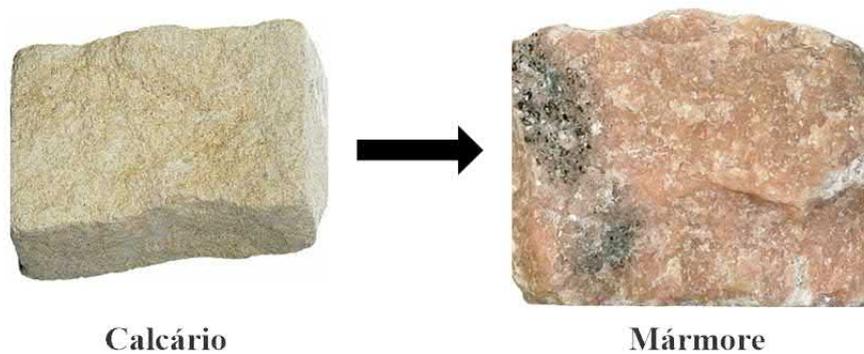
No metamorfismo regional a rocha resultante do processo pode ter características próximas à da rocha original (protólito) ou bastante distintas, o que permite falar em graus diferentes de metamorfismo. O grau de metamorfismo de uma rocha indica o quanto ela mudou em relação à rocha original. Rochas metamórficas formadas em condições de alta pressão e temperatura, características de zonas mais profundas da crosta (especificamente em zonas de subducção, onde uma placa tectônica desliza por baixo de outra), são caracterizadas como rochas com alto grau de metamorfismo. Um exemplo clássico é o gnaiss (Figura 3.2), rocha de alto grau de metamorfismo, gerada a partir do granito (embora deva-se ressaltar que o gnaiss também pode ser formado a partir de rochas sedimentares).

Figura 3.2: O gnaissse forma-se por metamorfismo do granito. O processo resulta em uma rocha de alto grau de metamorfismo. (Fonte: [46])



Em regiões menos profundas da crosta, onde se encontram condições de temperatura e pressão mais baixas, as rochas metamórficas formadas podem caracterizadas como rochas de baixo ou médio grau de metamorfismo. O mármore figura como exemplo de grau de metamorfismo médio, sendo formado a partir do calcário (Figura 3.3).

Figura 3.3: O mármore forma-se por metamorfismo do calcário. O processo resulta em uma rocha de grau de metamorfismo médio. (Fonte: [46])



4

Coleta e Análise dos Dados

4.1 Amostras

As amostras consistem de fotografias de lâminas petrográficas, a partir das quais foram obtidos os dados. Foram escolhidas amostras de rochas metamórficas de graus de metamorfismo alto e médio, e de rochas ígneas. As imagens e fichas petrográficas usadas fazem parte de anexo de dados do projeto GEOTERM-NE “Geração de calor nas bacias de Cumuruxatiba, Jequitinhonha, Sergipe-Alagoas e Pernambuco-Paraíba, e nos embasamentos a elas adjacentes”, coordenado pelo professor Roberto Max Argollo.

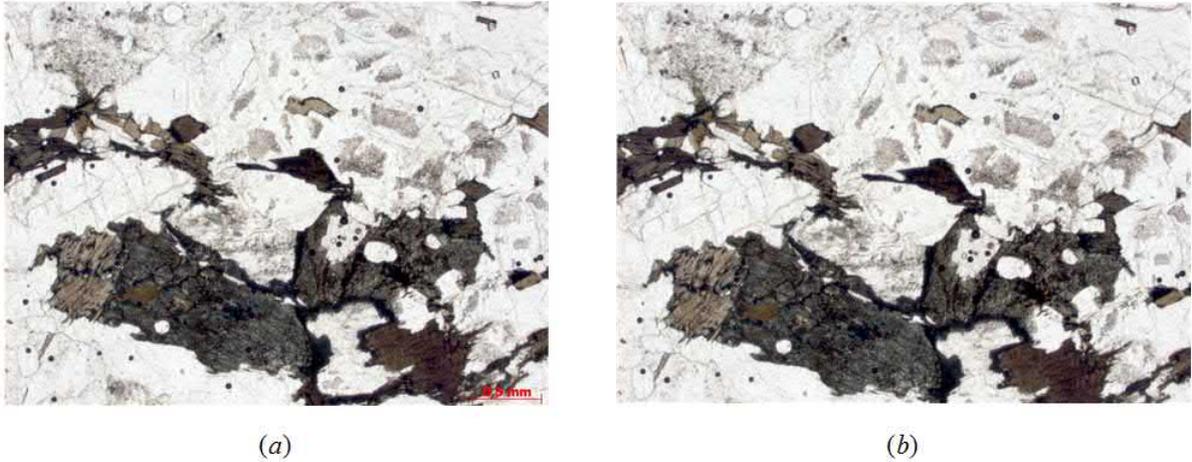
4.2 Preparação das Imagens das Amostras

As imagens originais das amostras foram obtidas no formato *jpg*, com dimensões 1338×1038 pixels e resoluções horizontal e vertical de 150 dpi . Foi necessário efetuar um redimensionamento das imagens para 1338×974 pixels, no qual se usou a versão 6.0 do software Adobe Photoshop, para eliminar legendas na imagem que comprometeriam os resultados obtidos, mantendo-se o formato de arquivo. Na figura 4.1 apresenta-se um exemplo de preparação da imagem. Nesse processo há perda de dados, pois parte da imagem é eliminada.

4.3 Coleta de dados

A dimensão fractal da imagem de uma amostra foi obtida pelo método Box-counting, usando o software HarFa (Harmonic and Fractal Image Analyzer)[56]. O método de Box-

Figura 4.1: (a) Foto original da amostra SE048LP. (b) Foto redimensionada.



counting aplica-se a imagens em preto e branco. Para imagens coloridas, é necessário realizar um processo denominado de thresholding, isto é, a transformação da imagem colorida em preto e branco.

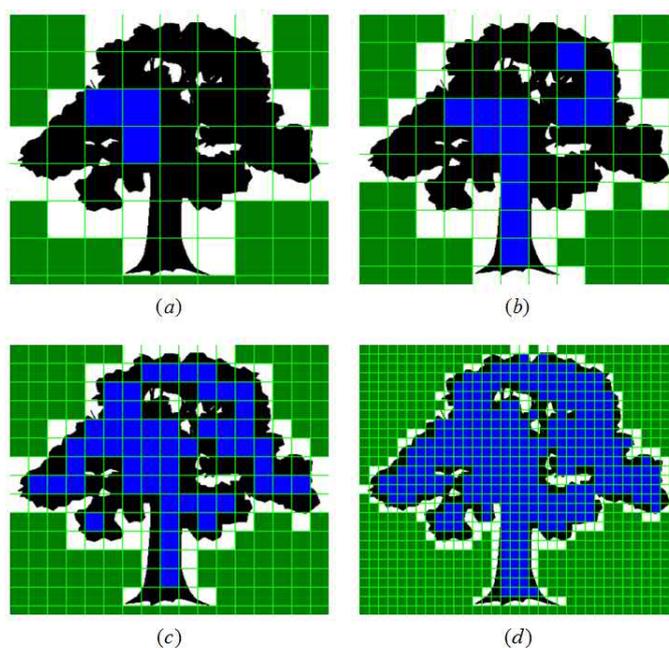
Dependendo do critério que se estabeleça para a transformação dos pixels, tem-se como resultado diferentes conjuntos de pontos para uma mesma imagem. Como não é possível, de início, justificar a escolha de um determinado critério, resta a alternativa de determinar a dimensão fractal da imagem da amostra em todo o intervalo de condições de thresholding (ou seja, de $n = 0$ até $n = 255$). Com isso, obtém-se um espectro fractal, o qual estabelece a dimensão fractal como função da condição de thresholding. Na descrição a seguir, manteve-se a mesma notação usada pelo HarFa para as variáveis que representam as diferentes dimensões de Box-counting que podem ser determinadas.

A dimensão determinada pelo método Box-counting (dimensão de contagem de caixas) e simbolizada por D_{BBW} . Em sua aplicação, uma malha quadrada com células de comprimento $1/\varepsilon$ variável é sobreposta à imagem do objeto. Em seguida, faz-se a contagem do número $N_{BBW}(\varepsilon)$ de células quadradas que contém alguma parte do fractal, ou seja, o número de células completamente preenchidos pelo fractal, simbolizado por N_B , e o número de células que contém apenas parte do fractal, simbolizado por N_{BW} . Esses números são então somados. A inclinação da porção linear de uma função $\ln(N_B + N_{BW}) = \ln N_{BBW} = f(N_{BBW}(\varepsilon))$, onde $\ln N_{BBW}(\varepsilon) = \ln K_{BBW} + D_{BBW} \ln \varepsilon$, dá a dimensão (de caixa) fractal, D_{BBW} .

O método utilizado pelo software HarFa consiste numa modificação do método Box-counting tradicional. Nesta variação faz-se a contagem, separadamente, do número N_B de

células pretas, do número N_W de células brancas e do número N_{BW} de células parcialmente pretas. Isso encontra-se ilustrado na figura 4.2, para diferentes tamanhos de malha. Em decorrência disso, obtém-se três dimensões fractais: D_B , D_W e D_{BW} .

Figura 4.2: Visualização do método de Box-counting usado pelo software HarFa, mostrando diferentes tamanhos de células na malha. N_B corresponde ao número de células azuis, N_W corresponde ao número de células verdes e N_{BW} corresponde ao número de células que contém parte da imagem, representadas aqui em branco. (a) $N_B = 3$, $N_W = 19,625$, $N_{BW} = 39$. (b) $N_B = 13$, $N_W = 35,5556$, $N_{BW} = 61$. (c) $N_B = 54$, $N_W = 101,5$, $N_{BW} = 91$. (d) $N_B = 326$, $N_W = 466$, $N_{BW} = 194$. (Fonte: imagens criadas com o programa bcmct, pelo autor)

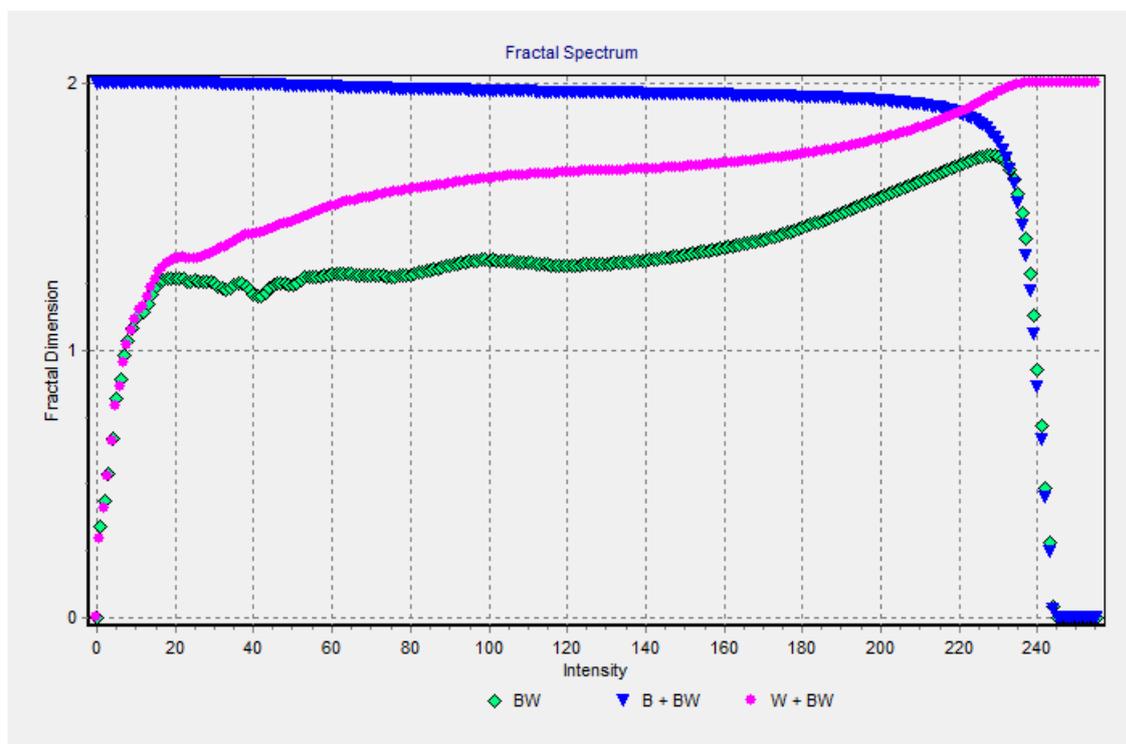


As dimensões D_B e D_W caracterizam propriedades fractais das porções da imagem compostas por pixels pretos e das porções compostas por pixels brancos, enquanto a dimensão D_{BW} caracteriza propriedades de borda, que tanto contém pixels pretos quanto brancos. A dimensão D_{WBW} surge da soma das células N_W que não são preenchidas pelo fractal, e assim permanecem brancas, e das células que contém apenas parte do fractal, N_{BW} . As dimensões são obtidas por meio de uma análise de regressão linear.

As imagens das amostras foram submetidas ao processo denominado **Fractal Analysis – Range**, implementado pelo software HarFa, que determina a dimensão fractal automaticamente para todos os níveis do canal de informação de cor escolhido (vermelho, verde, azul, matiz, saturação, brilho, intensidade). No processo de thresholding, dada uma imagem em cores, é preciso especificar que parte da informação de cor será transformada para gerar o fractal correspondente, isto é, que pixels se tornarão pretos ou brancos. O

resultado do processo de thresholding é o que se conhece como imagem binária, isto é, aquela cujos pixels possuem dois valores de intensidade. Essas imagens são exibidas em preto e branco (ocorre uma segmentação da imagem). Cada pixel de uma imagem tem associado a ele um valor de pixel que descreve seu brilho e sua cor. Esse valor é comparado com um valor de thresholding (n) e o resultado da comparação é usado para definir se esse pixel em particular será branco ou preto. Os valores de thresholding variam de $n = 0$ a $n = 255$. Assim, para $n = 0$, a comparação dos valores dos pixels resulta em uma imagem (conjunto de pontos) à qual é aplicado o método de Box-counting (como implementado pelo HarFA, obtendo três dimensões de Box-counting); o processo é então repetido para $n = 1, 2, \dots, 255$. A cada repetição obtém-se uma imagem diferente, isto é, um conjunto diferente de pontos, para os quais determina-se as três dimensões. Os valores dessas dimensões são então plotados como função de n . O conjunto de todas as dimensões obtidas dessa forma constitui o espectro fractal. A figura 4.3 ilustra um gráfico do espectro fractal para uma determinada amostra, como gerado pelo software HarFa.

Figura 4.3: *Espectro fractal de uma amostra típica. (Fonte: printscreen do software HarFA, pelo autor)*



Os dados resultantes da análise são guardados pelo software em uma tabela gerada automaticamente no formato *xls* (planilha do Microsoft Excel), da qual constam, entre outras

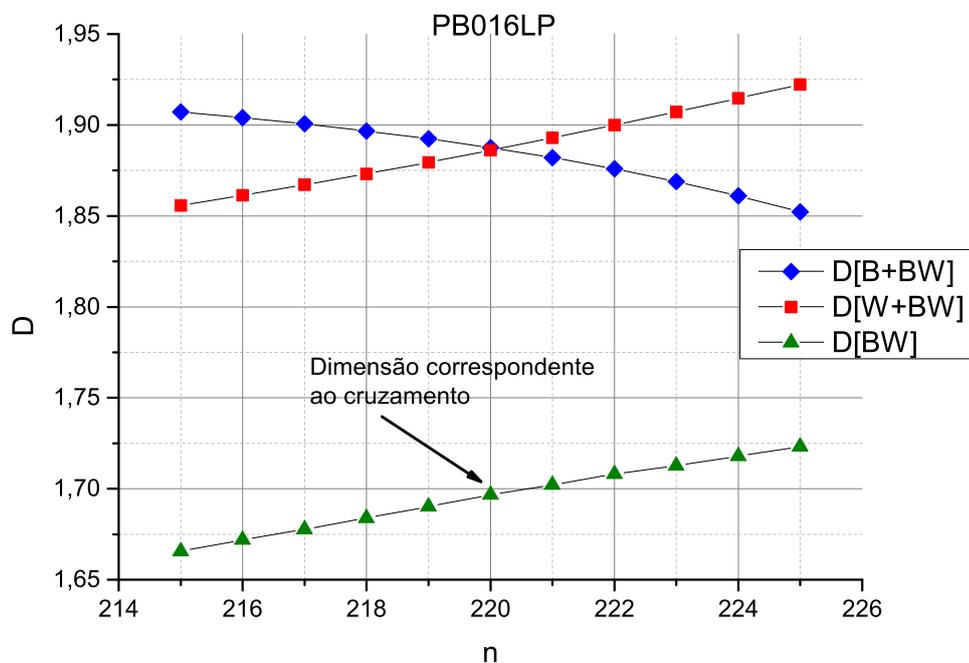
quantidades, os valores de n e das três dimensões (D_{BBW} , D_{WBW} e D_{BW}) correspondentes, conforme mostrado na figura 4.4.

Figura 4.4: *Excerto da planilha com os dados gravados pelo HarFA como resultado da análise fractal. (Fonte: printscreen de arquivo de dados gerado pelo software HarFA, pelo autor)*

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|----------------------------------|--------------------|---------|---------|------------------|---------|-------|
| 5 | Settings: Colorspace = Intensity | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | Dmax = | 2 | Kmax = | 1440744 | Scale = | 1 | |
| 8 | | Fractal Dimensions | | | Fractal Measures | | |
| 9 | n | D[B+BW] | D[W+BW] | D[BW] | K[B+BW] | K[W+BW] | K[BW] |
| 10 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1440744 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 2 | 0,2922 | 0,34055 | 1440742 | 7 | 9 |
| 12 | 2 | 2 | 0,40858 | 0,43497 | 1440733 | 41 | 46 |
| 13 | 3 | 1,99999 | 0,52983 | 0,53853 | 1440703 | 127 | 132 |
| 14 | 4 | 1,99998 | 0,65817 | 0,66901 | 1440647 | 299 | 313 |
| 15 | 5 | 1,99997 | 0,78891 | 0,82257 | 1440531 | 773 | 895 |
| 16 | 6 | 1,99994 | 0,86294 | 0,8912 | 1440349 | 1344 | 1520 |
| 17 | 7 | 1,9999 | 0,95293 | 0,98131 | 1440075 | 2290 | 2591 |
| 18 | 8 | 1,99984 | 1,0167 | 1,03828 | 1439695 | 3366 | 3695 |
| 19 | 9 | 1,99976 | 1,0734 | 1,08544 | 1439237 | 4447 | 4680 |
| 20 | 10 | 1,99968 | 1,1162 | 1,11752 | 1438679 | 5533 | 5553 |

As curvas na figura 4.3 correspondem aos valores das dimensões determinadas para cada valor do nível de máscara. As curvas correspondentes às dimensões D_{BBW} e D_{WBW} tem um ponto de cruzamento, em relação ao qual foi dada a seguinte interpretação: as dimensões D_{BBW} e D_{WBW} no cruzamento parecem sugerir que a complexidade da parte da imagem composta por pixels brancos é de alguma forma do mesmo nível da complexidade da parte da imagem composta por pixels pretos. Em um trabalho recente sobre crescimento de células de levedura[57], sugere-se que o cruzamento das curvas correspondentes às dimensões D_{BBW} e D_{WBW} fornece um valor ótimo de thresholding. Correspondente a esse valor de thresholding há também uma dimensão de borda, D_{BW} . Esse mesmo procedimento foi usado neste trabalho para determinar um valor para a dimensão de borda a partir da condição ótima de thresholding. A obtenção dessa dimensão de borda foi feita analisando-se um intervalo do eixo horizontal, correspondente aos valores de n em torno do ponto de cruzamento para determinar o melhor valor para D_{BW} , a partir dos dados armazenados quando da determinação do espectro fractal. A escolha foi feita de modo que $D_{BW} = \min\{D_{BBW} - D_{WBW}\}$, isto é, a partir do menor valor da diferença entre as dimensões D_{BBW} e D_{WBW} . A figura 4.5 ilustra o intervalo analisado para a determinação da dimensão de borda para a amostra PB016LP.

Figura 4.5: Determinação da dimensão de borda D_{BW} no caso da amostra PB016LP. (Fonte: criado no software Origin, versão 9.0, pelo autor)



A partir das fichas petrográficas das amostras, obtêm-se as proporções relativas dos minerais constituintes de cada amostra. Dentre eles, os mais importantes são o plagioclásio, o quartzo (presente em praticamente todas as rochas da crosta) e a biotita (esta com ocorrência, em porcentagem, bastante baixa em todas as amostras, em comparação com os dois minerais referidos). Esses dados foram tabelados para as amostras de rochas ígneas e metamórficas, juntamente com as informações a respeito do grau de metamorfismo das amostras do segundo grupo, do thresholding correspondente à dimensão de borda para cada amostra e da referida dimensão de borda. Os dados obtidos a partir das imagens de amostras de rochas ígneas são mostrados na tabela 4.1 e aqueles referentes às rochas metamórficas, diferenciados por grau de metamorfismo, nas tabelas 4.2 e 4.3.

| Amostras | D_{BW} | n | Plg(%) | Qtz(%) | Bio(%) |
|-----------------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|
| BA008-B | 1,69625 | 227 | 78 | 15 | 7 |
| BA163 | 1,63662 | 218 | 35 | 21 | 6 |
| BA165 | 1,69011 | 220 | 62 | 20 | 7 |
| PB087 | 1,54103 | 172 | 60 | 18 | 7 |
| PB218 | 1,72338 | 216 | 28 | 23 | 3 |
| PB302 | 1,70701 | 203 | 45 | 18 | 2 |
| PE310 | 1,69177 | 222 | 32 | 21 | 5 |
| SE148-A | 1,70226 | 222 | 44 | 12 | 2 |
| SE373 | 1,68559 | 205 | 61 | 20 | 10 |

Tabela 4.1: Dados para amostras de rochas ígneas (LP).

| Amostras | D_{BW} | n | Plg(%) | Qtz(%) | Bio(%) |
|-----------------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|
| SE048 | 1,5863 | 217 | 51 | 20 | 5 |
| SE050 | 1,68 | 223 | 32 | 25 | 6 |
| SE083-B | 1,7179 | 229 | 50 | 20 | 3 |
| SE127-A | 1,64959 | 194 | 49 | 18 | 1 |
| SE132 | 1,56179 | 199 | 64 | 21 | 3 |
| SE137-B | 1,676 | 174 | 43 | 15 | 1 |
| SE139 | 1,57048 | 193 | 67 | 18 | 1 |
| SE142 | 1,53348 | 162 | 22 | 27 | 5 |
| SE147 | 1,65012 | 180 | 18 | 25 | 1 |
| SE166-A | 1,70486 | 209 | 49 | 30 | 3 |

Tabela 4.2: Dados para amostras de grau de metamorfismo alto (LP).

| Amostras | D_{BW} | n | Plg(%) | Qtz(%) | Bio(%) |
|-----------------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|
| BA171 | 1,50706 | 171 | 56 | 7 | 5 |
| PB016 | 1,69662 | 220 | 40 | 18 | 7 |
| PB054 | 1,61876 | 194 | 32 | 16 | 5 |
| PB155 | 1,65034 | 196 | 35 | 19 | 11 |
| PB186 | 1,66722 | 214 | 46 | 30 | 5 |
| PB196-B | 1,68971 | 234 | 64 | 10 | 7 |
| PE063 | 1,672 | 205 | 54 | 12 | 3 |
| PE101 | 1,74825 | 219 | 25 | 20 | 5 |
| PE121 | 1,60685 | 154 | 41 | 10 | 5 |
| PE131 | 1,6682 | 205 | 25 | 18 | 5 |
| PE132 | 1,60165 | 192 | 27 | 23 | 8 |
| PE152 | 1,73106 | 194 | 22 | 31 | 2 |
| PE189 | 1,70332 | 222 | 30 | 21 | 7 |
| PE208 | 1,67052 | 224 | 69 | 19 | 7 |
| PE222 | 1,67933 | 198 | 25 | 18 | 6 |
| PE281 | 1,69819 | 223 | 15 | 18 | 5 |
| PE289 | 1,72788 | 200 | 30 | 19 | 7 |
| PE335 | 1,6309 | 216 | 30 | 22 | 7 |
| SE002 | 1,67173 | 195 | 56 | 28 | 3 |
| SE032-A | 1,6966 | 229 | 55 | 22 | 5 |
| SE035 | 1,74602 | 234 | 55 | 27 | 5 |
| SE084-B | 1,70205 | 219 | 10 | 22 | 5 |
| SE140 | 1,65046 | 195 | 55 | 20 | 7 |

Tabela 4.3: Dados para amostras de grau de metamorfismo médio (LP).

4.4 Resultados

Na discussão a seguir, usamos o termo *grupo* para distinguir entre rochas ígneas e metamórficas; o termo *tipo* é usado para distinguir rochas metamórficas quanto ao grau de metamorfismo.

Para o grupo das ígneas, as correlações obtidas para os dados tabelados não mostraram correlação entre a dimensão fractal de borda, D_{BW} , associada à imagem da amostra e as porcentagens de quartzo, plagioclásio ou biotita. Os resultados são mostrados nas tabelas 4.4-4.6, onde n representa a condição de thresholding. A análise das correlações foi realizada usando o software de análise estatística PASW Statistics, versão 18. Esses

| | | | | |
|-------------|--|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | D_{BW} | n | (%) Biotita |
| D_{BW} | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 1 | 0,781* 0,013 | -0,380 0,313 |
| n | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,781* 0,013 | 1 | -0,200 0,606 |
| (%) Biotita | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | -0,380 0,313 | -0,200 0,606 | 1 |

Tabela 4.4: Grupo das ígneas. Variáveis: D_{BW} , n e porcentagem de biotita.

| | | | | |
|------------------|--|-----------------|-----------------|------------------|
| | | D_{BW} | n | (%) Plagioclásio |
| D_{BW} | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 1 | 0,781* 0,013 | -0,210 0,587 |
| n | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,781* 0,013 | 1 | -0,149 0,702 |
| (%) Plagioclásio | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | -0,210 0,587 | -0,149 0,702 | 1 |

Tabela 4.5: Grupo das ígneas. Variáveis: D_{BW} , n e porcentagem de plagioclásio.

| | | | | |
|-------------|--|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | D_{BW} | n | (%) Quartzo |
| D_{BW} | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 1 | 0,781* 0,013 | 0,001 0,998 |
| n | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,781* 0,013 | 1 | -0,072 0,854 |
| (%) Quartzo | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,001 0,998 | -0,072 0,854 | 1 |

Tabela 4.6: Grupo das ígneas. Variáveis: D_{BW} , n e porcentagem de quartzo.

resultados sugerem que para o grupo das ígneas os minerais analisados não desempenham papel relevante no que se refere à textura da rocha.

Apresenta-se a seguir (Tabelas 4.7-4.9) as correlações obtidas para os dados tabelados para as amostras de rochas metamórficas.

| | | D_{BW} | n | (%) Biotita |
|-------------|--|------------------|------------------|----------------|
| D_{BW} | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 1 | 0,618** 0,000 | 0,048 0,790 |
| n | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,618** 0,000 | 1 | 0,262 0,141 |
| (%) Biotita | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,048 0,790 | 0,062 0,141 | 1 |

Tabela 4.7: Grupo das metamórficas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de biotita.

| | | D_{BW} | n | (%) Plagioclásio |
|------------------|--|------------------|------------------|------------------|
| D_{BW} | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 1 | 0,618** 0,000 | -0,214 0,231 |
| n | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,618** 0,000 | 1 | 0,135 0,454 |
| (%) Plagioclásio | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | -0,214 0,231 | 0,135 0,454 | 1 |

Tabela 4.8: Grupo das metamórficas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de plagioclásio.

| | | D_{BW} | n | (%) Quartzo |
|-------------|--|------------------|------------------|----------------|
| D_{BW} | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 1 | 0,618** 0,000 | 0,292 0,099 |
| n | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,618** 0,000 | 1 | 0,193 0,281 |
| (%) Quartzo | Correlação de Pearson Sig. (2-tailed) | 0,292 0,099 | 0,193 0,281 | 1 |

Tabela 4.9: Grupo das metamórficas. Variáveis: D_{BW} , n e percentagem de quartzo.

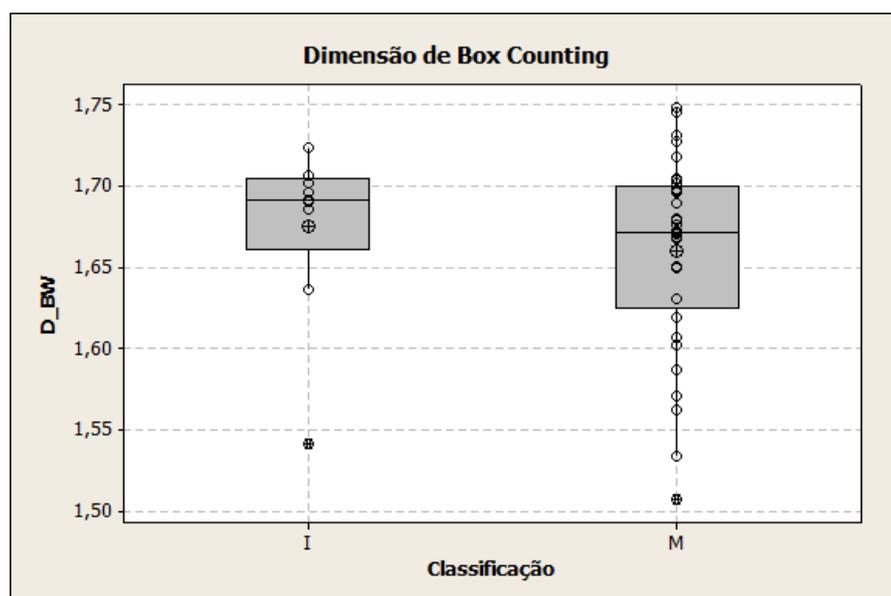
As tabelas 4.7-4.9 indicam que no grupo das metamórficas também não há correlação entre a dimensão de borda (D_{BW}), associada à imagem da amostra, e as porcentagens de quartzo, plagioclásio ou biotita.

Esses resultados sugerem que nenhum dos três minerais desempenha papel relevante no que se refere à mudança de textura no caso do grupo das metamórficas, mesmo em

relação ao grau de metamorfismo. Durante o processo de metamorfismo esses minerais sofrem uma recristalização, alterando sua forma e tamanho, e dado que o plagioclásio e o quartzo compõem em maior porcentagem nas amostras, poderia-se esperar que tivessem influência significativa no que se refere à textura.

A figura 4.6 mostra um gráfico Boxplot para os dados referentes à dimensão de borda D_{BW} das amostras dos dois grupos, usado como ferramenta auxiliar para avaliar visualmente a distribuição empírica desses dados. Esse tipo de representação gráfica é adequada, pois estamos lidando com amostras de pequeno tamanho.

Figura 4.6: Comparação entre os conjuntos de valores de dimensão de Box-counting para os dados referentes às amostras de rochas ígneas e metamórficas. (Fonte: criado no software Minitab, versão 16, pelo autor)



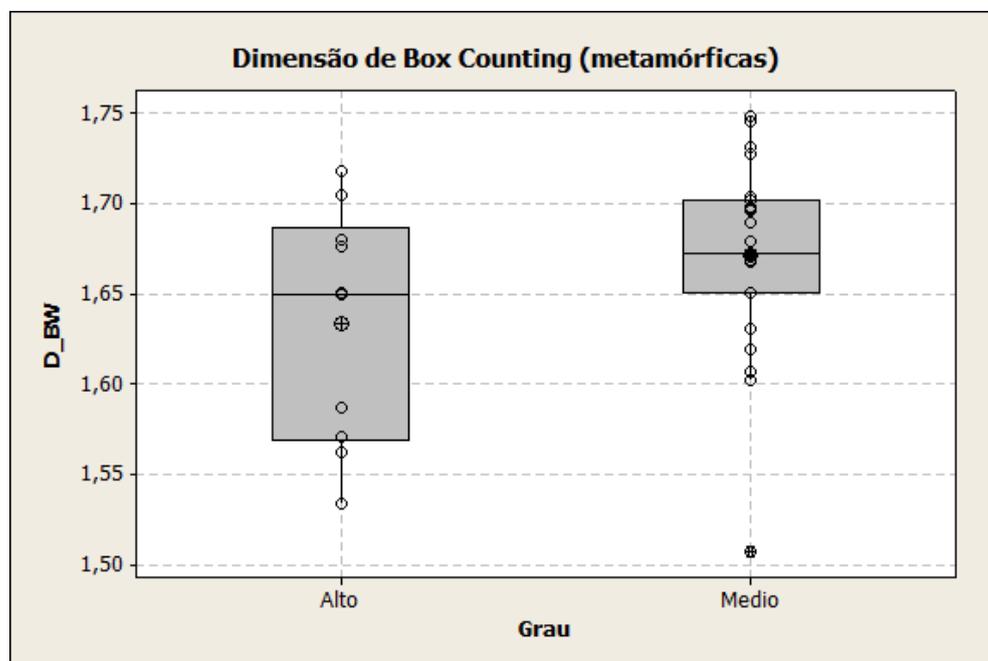
Esse gráfico mostra os valores máximo e mínimo de cada conjunto de dados, o primeiro e o terceiro quartil e a mediana, MD (linha horizontal interior à caixa). As medianas dos dois grupos tem valores próximos: $MD_{\text{ígneas}} = 1,69177$ e $MD_{\text{metamórficas}} = 1,67173$. Comparando os comprimentos das caixas (distância ou amplitude inter-quartil), percebe-se que há uma menor variabilidade nos dados referentes às amostras do grupo das rochas ígneas do que das metamórficas. Isso sugere que a diferenciação é menor no grupo das ígneas, tomando como base as amostras disponíveis para a realização desse estudo. Observa-se também alguns valores atípicos (ou *outliers*) nos dois conjuntos de dados. Em geral, outliers podem ser devidos a erros de medição ou podem indicar uma variabilidade inerente presente nos elementos de uma população ou amostra. No caso do grupo

das metamórficas, trata-se de uma amostra com grau de metamorfismo médio que possui percentagem bastante baixa de quartzo quando comparada às outras do mesmo grupo.

Para o grupo das rochas ígneas, o valor médio da dimensão de borda é $\overline{D_{BW}} = 1,6749$, com desvio padrão de 0,0555; para o grupo das metamórficas, $\overline{D_{BW}} = 1,6596$, com desvio padrão de 0,0592. Das duas distribuições de valores, apenas a referente ao grupo das metamórficas é normal. Para uma comparação adequada entre os dois grupos, usou-se um teste estatístico não-paramétrico, o teste de Mann-Whitney. O teste revelou que as duas distribuições não são significativamente diferentes (p -valor = 0,333 no nível de significância estatística de 0,05). É notório, a partir do exame do gráfico na figura 4.6, que não há a separação das amostras, quanto ao grupo, em intervalos disjuntos de valores da dimensão. Esses resultados levam a concluir que o simples conhecimento do valor da dimensão de Box-counting não permite classificar prontamente uma determinada amostra como sendo participante de um ou outro grupo.

A figura 4.7 mostra um gráfico Boxplot para os dados referentes à dimensão de borda D_{BW} das amostras do grupo das metamórficas, separadas por grau de metamorfismo.

Figura 4.7: Comparação entre os conjuntos de dados referentes às amostras de rochas de graus alto e médio de metamorfismo. (Fonte: criado no software Minitab, versão 16, pelo autor)



Observa-se aqui também um valor atípico (*outlier*) no conjunto de dados referentes às amostras de grau médio de metamorfismo. No caso presente, trata-se de uma mostra que

possui porcentagem bastante baixa de quartzo quando comparada às outras do mesmo tipo. A mediana para os dados referentes à dimensão de borda para as amostras de grau alto é $MD_{\text{alto}} = 1,64986$; para as de grau médio é $MD_{\text{médio}} = 1,67200$. As dimensões médias para as amostras de rochas de graus de metamorfismo médio e alto são bem próximas: $\overline{D_{BW}} = 1,6711$ com desvio padrão de $0,0539$ para amostras de grau de metamorfismo médio, e $\overline{D_{BW}} = 1,6331$ com desvio padrão de $0,0539$ para amostras de grau alto de metamorfismo. O teste não-paramétrico de Mann-Whitney para o caso dessas duas distribuições também revelou que elas não diferem significativamente uma da outra (p -valor = $0,144$ no nível de significância estatística de $0,05$). A inspeção da figura 4.7 mostra que os dois intervalos se sobrepõem consideravelmente. Esses resultados sugerem que as amostras de diferentes graus de metamorfismo não possuem uma dimensão característica que possa ser usada para distingui-las quanto ao grau de metamorfismo. Somos levados à conclusão de que a caracterização de rochas com relação ao grau de metamorfismo não parece ser conseguida de modo satisfatório por meio do uso da dimensão fractal (dimensão de Box-counting).

Observa-se finalmente que comparações entre o grupo das rochas ígneas e os dois tipos (médio e alto grau) de rochas do grupo das metamórficas, novamente feitas pelo teste não-paramétrico de Mann-Whitney, também revelam que não há diferença significativa entre as amostras do grupo das ígneas e aquelas do grupo das metamórficas. Para a comparação feita entre as ígneas e as metamórficas de grau alto, p -valor = $0,133$ no nível de significância estatística de $0,05$; para a comparação entre as ígneas e as metamórficas de grau alto, p -valor = $0,592$ no nível de significância estatística de $0,05$.

5

Conclusão

Neste trabalho foi investigada a possibilidade de aplicar os conceitos da geometria fractal à Geologia. Especificamente, na caracterização de rochas ígneas e metamórficas quanto a mudanças em suas texturas, decorrentes dos processos pelos quais rochas desses dois grandes grupos passam em sua formação.

Os resultados obtidos indicam que há pouca variabilidade nos conjuntos de valores de dimensão fractal associada aos diferentes grupos de rochas. O intervalo de variação dos valores da dimensão fractal para as rochas ígneas é menor que no caso das rochas metamórficas, entretanto vários componentes dos dois grupos distintos possuem dimensões com valores muito próximos entre si, não apresentando diferenças significativas entre os grupos, conforme mostraram os testes não-paramétricos realizados. Temos conjuntos esparsos com sobreposição suficiente de valores para concluir, com base nos dados obtidos para a quantidade de amostras usada aqui, que a dimensão fractal não constitui um parâmetro seguro para a caracterização imediata de rochas de grupos diferentes, indicando que o padrão topológico que caracteriza a estrutura de cores das lâminas de rochas desses grupos é o mesmo.

Apontamos dois fatores que tem influência significativa nos resultados obtidos: a resolução das imagens das amostras e a quantidade de imagens disponíveis para a análise. As imagens das amostras foram obtidas por meio de microscópio óptico, com iluminação por luz polarizada (foi usado um único polarizador); posteriormente, as imagens foram armazenadas no formato jpeg, o que resulta em perda de informações, devido à compressão de dados utilizada. A resolução das imagens pode ser melhorada, por exemplo, através do uso de um microscópio eletrônico de varredura (MEV) que, por apresentar uma maior profundidade de campo, permite obter imagens de maior resolução da superfície de uma amostra.

Uma quantidade maior e com mais variabilidade de representantes dos dois grupos, ígneas e metamórficas, permitiria a obtenção de uma massa maior de dados. Um estudo futuro que leve em conta esses dois fatores poderia revelar alguma diferença significativa entre os dois referidos grupos de rochas que este estudo não detectou.

Apêndice A

Amostras - Ígneas

A.1 Resumos de fichas petrográficas

Abaixo listadas, as identificações das amostras de rochas ígneas usadas, acompanhadas de descrição resumida de suas características.

- BA008-B (Biotita quartzo diorito): Cristais tabulares de plagioclásio (Pl), dispostos aleatoriamente, com quartzo (Qtz) irregular e palhetas de biotita (Bt) castanha preenchendo os interstícios.
- BA163 (Biotita monzogranito): Cristais tabulares de plagioclásio saussuritizado, dispostos aleatoriamente, sendo assimilados por outros de ortoclásio perítico, com quartzo, fino, preenchendo os interstícios, assim como palhetas de biotita.
- BA165 (Biotita granodiorito): Cristais tabulares de plagioclásio, dispostos aleatoriamente, com os interstícios preenchidos por placas irregulares de quartzo e microclina. Palhetas de biotita também ocorrem nos interstícios dos feldspatos.
- PB003 (Hornblenda sienogranito): Cristais tabulares de ortoclásio (Or) e de plagioclásio (Pl), com interstícios preenchidos por placas de quartzo (Qtz). Cristais prismáticos, não orientados, de hornblenda (Hbl), nos interstícios.
- PB087 (Biotita hornblenda ortognaisse [tonalítico]): Cristais irregulares a poligonais de plagioclásio (Pl) e quartzo (Qtz), formando mosaico, com agregados de hornblenda (Hbl), associada à diopsídio (Di) e a palhetas de biotita (Bt), nos interstícios.

- PB218 (Leucogranito): Cristais irregulares a tabulares de plagioclásio (Pl), zonados, parcialmente assimilados por agregado irregular de microclina (Mc) e quartzo (Qtz).
- PB224 (Moscovita tonalito [albitito?]): Cristais tabulares de plagioclásio (Pl), dispostos aleatoriamente, com interstícios preenchidos por cristais irregulares de quartzo (Qtz) e microclina (Mc), além de palhetas, não orientadas, de moscovita (Ms).
- PB302 (Quartzo-monzonito): Cristais irregulares de plagioclásio (Pl) saussuritizado e de quartzo (Qtz), em meio a cristais tabulares a irregulares de microclina (Mc), que os assimila parcialmente. Palhetas de biotita (Bt), nos interstícios.
- PE310 (Moscovita-biotita granito): Cristais tabulares de ortoclásio (Or) pertítico e outros, mais finos, de plagioclásio (Pl) saussuritizado, com placas de quartzo (Qtz), estiradas, preenchendo os interstícios. Palhetas de biotita (Bt) e de moscovita (Ms), dispersas nos interstícios dos feldspatos.
- SE148-A (Quartzo gabronorito): Cristais estirados, lenticulares, de quartzo (Qtz), e segregações de hiperstênio (Hyp), associados à diopsídio (Di) e hornblenda (Hbl), em meio a agregado irregular a poligonal de plagioclásio (Pl) e de microclina (Mc) fortemente pertítica.
- SE373 (Biotita tonalito): Cristais tabulares de plagioclásio (Pl), dispostos aleatoriamente, com interstícios preenchidos por agregados poligonais e placas irregulares de quartzo (Qtz) e de microclina (Mc), além de palhetas, não orientadas, de biotita (Bt).

A.2 Fotos das Amostras

Figura A.1: *BA008BLP*



Figura A.2: *BA163LP*

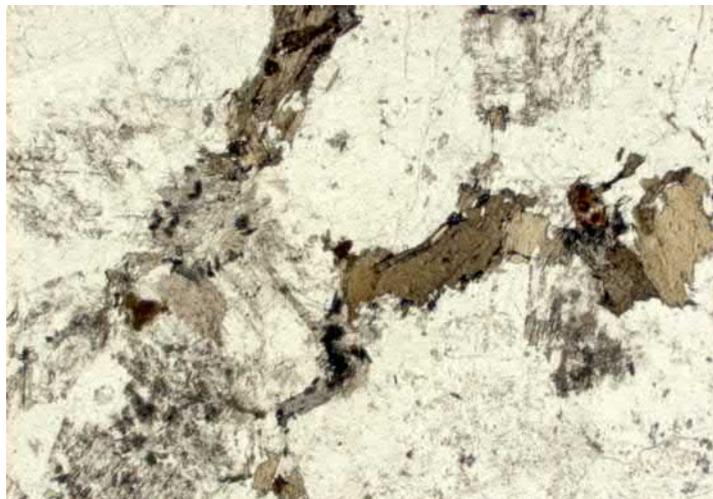


Figura A.3: *BA165LP*



Figura A.4: *PB087LP*

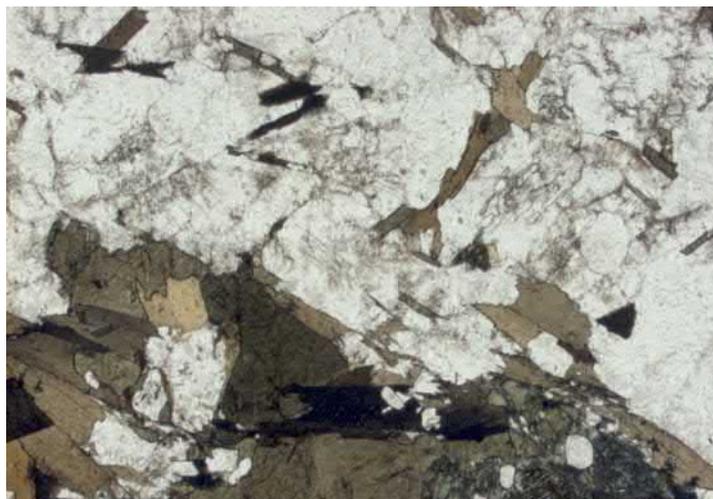


Figura A.5: *PB218LP*

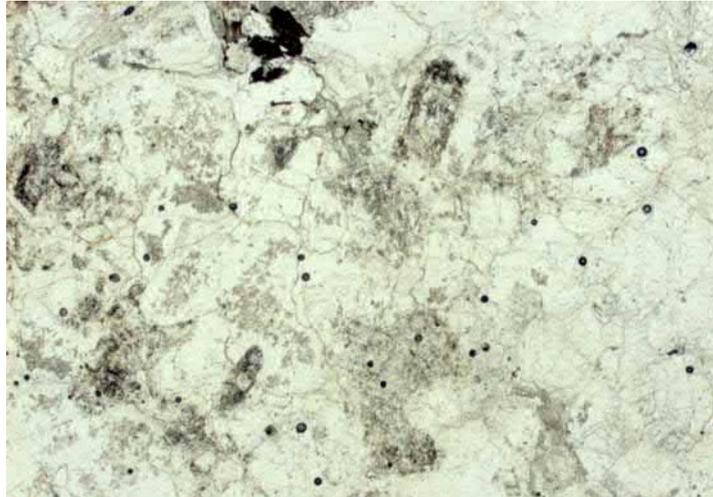


Figura A.6: *PB302LP*



Figura A.7: *PE310LP*



Figura A.8: *SE148-ALP*



Figura A.9: *SE373LP*



Apêndice B

Amostras - Metamórficas I

B.1 Resumo de Fichas Petrográficas

Abaixo listadas, as identificações das amostras de rochas metamórficas de grau de metamorfismo alto usadas nesse trabalho, acompanhadas de descrição resumida de suas características.

- SE048 (Biotita ortognaisse granodiorítico): Cristais irregulares a estirados, de quartzo e plagioclásio, em contatos suturados, orientados, com microclina pertítica, nos interstícios. Agregados de diopsídio, associados à biotita, em permeio.
- SE050 (Biotita granito): Cristais irregulares de ortoclásio pertítico, de quartzo e, outros, menores, de plagioclásio saussuritizado, em contatos curvos entre si, com palhetas de biotita, levemente orientadas, nos interstícios.
- SE083-B (Hornblenda gnaiss [charnoenderbito]): Fenoclastos de plagioclásio e quartzo, em lentes estiradas, em meio a mosaico poligonal, cominuído de feldspatos alcalinos. Agregados de hornblenda verde e de biotita seguem a orientação dos fenoclastos e do quartzo.
- SE127-A (Enderbito a charnoenderbito gnaissoso): Lentes estiradas de quartzo, mais ou menos segregadas, e agregados de hiperstênio (Hyp) e diopsídio (Di), em meio a agregado de cristais irregulares de plagioclásio e microclina fortemente pertítica. Fissuras transversais ao bandamento.
- SE132 (Enderbito gnaissoso): Agregados de cristais estirados de quartzo, mais ou menos segregados, e cristais irregulares de hiperstênio, associados a palhetas orientadas

de biotita, em meio a agregado de cristais irregulares a estirados de plagioclásio.

- SE137-B (Granulito aluminoso [kinzigito]): Cristais prismáticos, orientados, de silimanita, em meio massa de cordierita, totalmente alterada, pinitizada. Fenoblastos de granada e mosaico fino de plagioclásio e quartzo ocorrem em permeio.
- SE139 (Enderbitto gnaissoso): Cristais estrados, de plagioclásio e quartzo, com agregados de hiperstênio, parcialmente substituídos por hornblenda, preenchendo interstícios, assim como minerais opacos (Op).
- SE142 (Granulito aluminoso [kinzigito]): Fenoblastos irregulares de granada, em meio a cristais estirados de microclina pertítica, quartzo e plagioclásio. Palhetas de biotita (Bt) e agregados fibrosos de silimanita (Sil) ocorrem junto á granada.
- SE147 (Granulito aluminoso [kinzigito]): Fenoblastos irregulares de granada, e cristais tabulares de silimanita em matriz muito fina, quartzo feldspática, com quartzo em finas lentes orientadas assim com plaquetas de grafite (opacos).
- SE166-A (Granulito aluminoso [kinzigito]): Fenoblastos irregulares de granada, e cristais tabulares de silimanita, em meio a agregado de quartzo, este em lentes orientadas, em meio a outros, estirados de plagioclásio e microclina pertítica.

B.2 Fotos das Amostras

Figura B.1: *SE048LP*

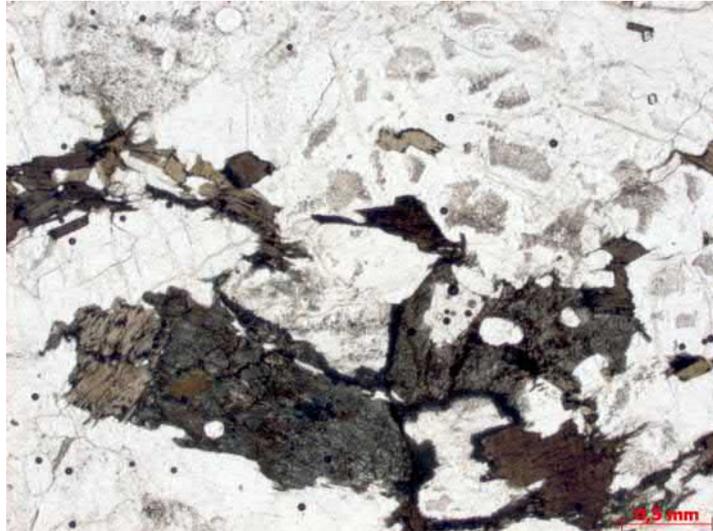


Figura B.2: *SE050LP*

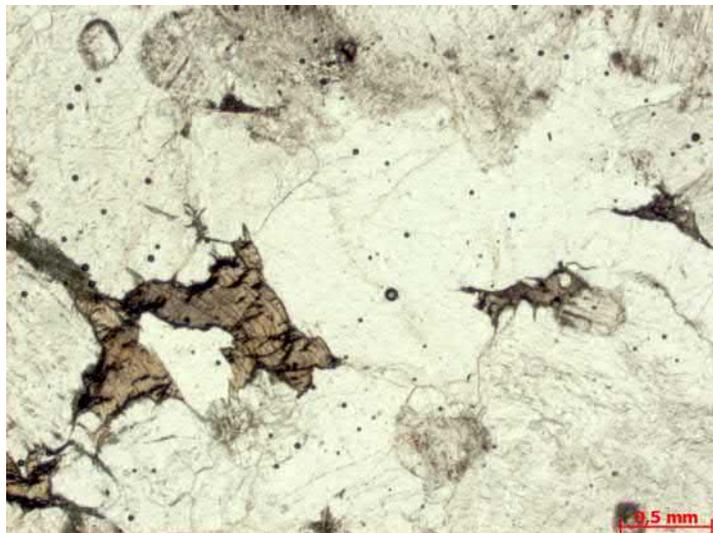


Figura B.3: *SE083-BLP*

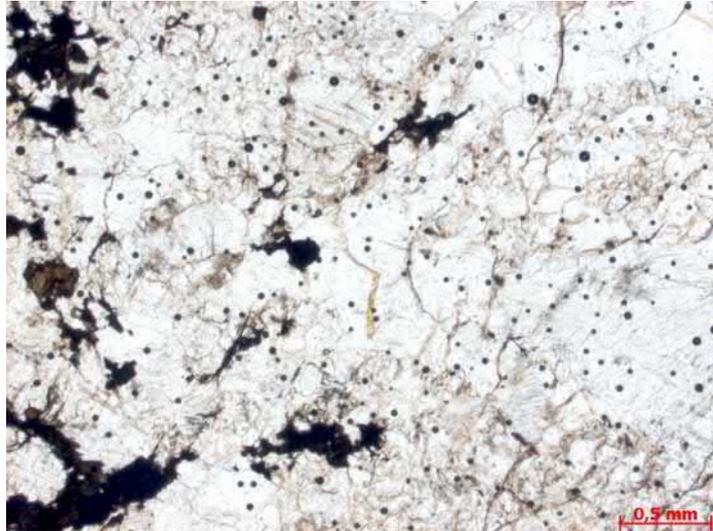


Figura B.4: *SE127-ALP*

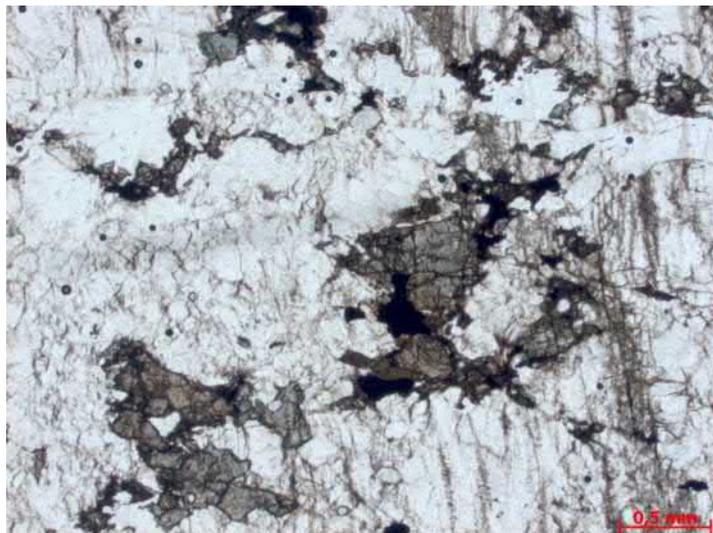


Figura B.5: *SE132LP*

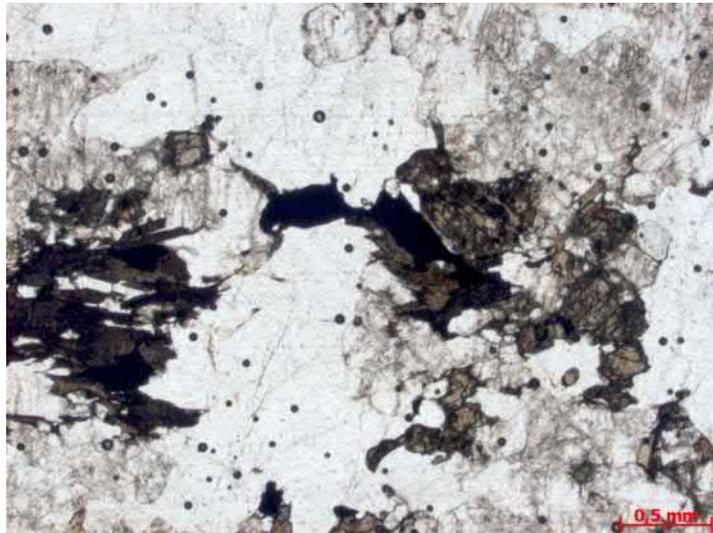


Figura B.6: *SE137-BLP*

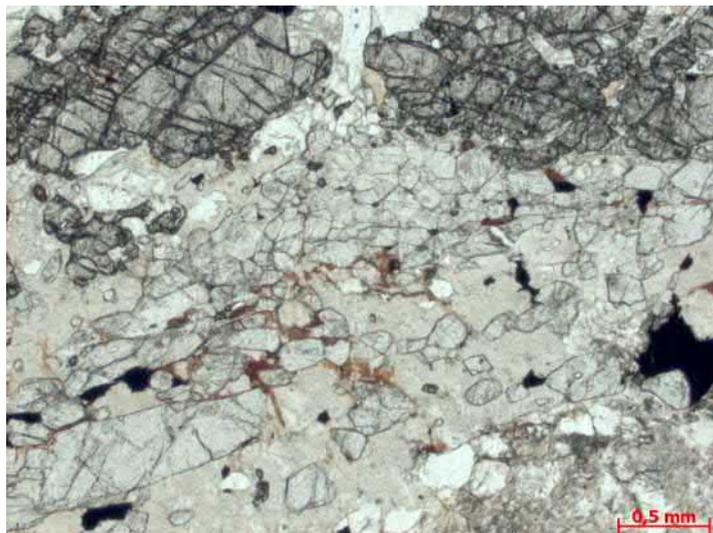


Figura B.7: *SE139LP*



Figura B.8: *SE142LP*



Figura B.9: *SE147LP*

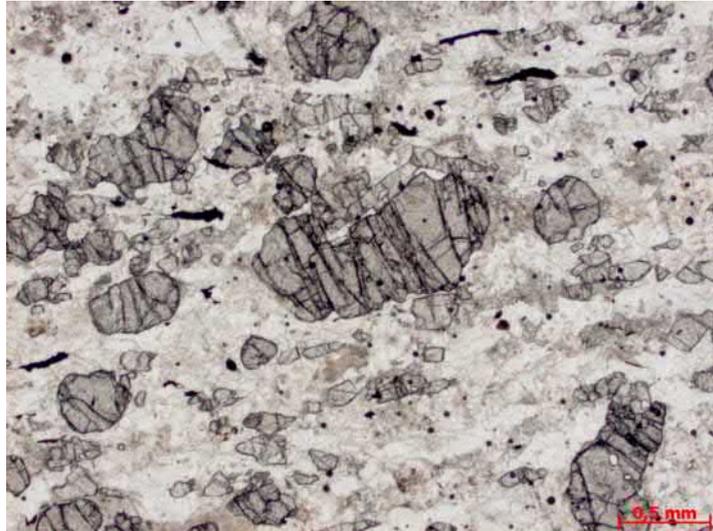


Figura B.10: *SE166-ALP*



Apêndice C

Amostras - Metamórficas II

C.1 Resumo de Fichas Petrográficas

Abaixo listadas, as identificações das amostras de rochas metamórficas de grau de metamorfismo médio usadas nesse trabalho, acompanhadas de descrição resumida de suas características.

- BA171 (Anfibolito): Agregado poligonal de plagioclásio (Pl), formando mosaico, com os interstícios preenchidos por cristais orientados, de hornblenda (Hbl) verde, associados à biotita (Bt) e quartzo (Qtz), este irregular e fino.
- PB016 (Biotita gnaiss (monzogranítico)): Cristais irregulares de plagioclásio com microclina e quartzo, nos interstícios. O quartzo se segrega, ainda, em bandas. Palhetas de biotita, fortemente orientadas, e cristais de granada (Grt) ocorrem nos interstícios do agregado quartzo feldspático.
- PB054 (Biotita augen gnaiss [monzogranítico]): Agregados fusiformes de microclina (Mc), em meio a matriz fina e irregular de plagioclásio e quartzo. Palhetas orientadas de biotita, associadas à hornblenda, imprimem foliação à rocha.
- PB155 (Biotita augen ortognaiss [granítico]): Cristais tabulares de plagioclásio e de microclina peritítica, com quartzo, irregular, e agregados de hornblenda e de biotita, nos interstícios.
- PB186 (Biotita granodiorito gnaiss): Agregado de cristais irregulares de plagioclásio, quartzo e de (rara) microclina, com palhetas, não orientadas, de biotita em permeio.

- PB196-B (Biotita ortognaisse [quartzo-monzodiorítico]): Cristais estirados de plagioclásio e quartzo, em contatos curvos entre si, com microclina preenchendo alguns dos interstícios. Palhetas de biotita seguem o estiramento do plagioclásio e do quartzo.
- PE063 (Biotita ortognaisse quartzo monzodiorítico): Cristais estirados de plagioclásio e de ortoclásio pertítico, orientados, com interstícios preenchidos por agregado fino de quartzo e cristais de hornblenda verde.
- PE101 (Biotita ortognaisse granítico): Cristais estirados de ortoclásio (Or) pertítico e plagioclásio, em contatos curvos entre si e com quartzo. Biotita e moscovita (Ms) encontram-se dispersas nos interstícios dos feldspatos.
- PE121 (Anfibolito (meta quartzo diorito)): Cristais estirados a tabulares de plagioclásio saussuritizado, com agregados de cristais de hornblenda, orientados, em permeio. Quartzo irregular preenche alguns dos interstícios do plagioclásio.
- PE131 (Biotita augen gnaisse granítico): Fenoclastos fusiformes de microclina pertítica e de plagioclásio saussuritizado, em matriz microquebrada (mosaico) de feldspatos alcalinos e quartzo que acompanha a foliação, assim como a biotita, que tende a envolver os fenoclastos.
- PE132 (Biotita augen gnaisse granítico): Fenoclastos fusiformes de ortoclásio pertítico e de plagioclásio, em matriz microquebrada, poligonizada, de feldspatos alcalinos e quartzo que forma ainda bolsões. Biotita, em palhetas orientadas, tende a envolver os fenoclastos.
- PE152 (Augen gnaisse granítico): Fenoclastos fusiformes de microclina pertítica, orientados, imersos em uma matriz esmigalhada de plagioclásio e quartzo, com raras palhetas orientadas de biotita, em permeio.
- PE189 (Biotita augen gnaisse granítico): Fenoclastos fusiformes de ortoclásio pertítico com interstícios preenchidos por mosaico poligonal de plagioclásio saussuritizado, além de quartzo. Feixes de biotita seguem a orientação dos fenoclastos de ortoclásio.
- PE208 (Hornblenda biotita ortognaisse tonalítico): Cristais estirados de plagioclásio em contatos curvos com outros de quartzo, com cristais de hornblenda verde e palhetas de biotita, intimamente associadas, espremidas nos interstícios do plagioclásio.

- PE222 (Biotita augen gnaiss granítico): Fenoclastos fusiformes, orientados, de ortoclásio perítico e de plagioclásio, com interstícios preenchidos por feldspatos alcalino, além de quartzo, ambos em mosaico. Biotita, orientada, ocorre nos interstícios dos feldspatos, tendendo a envolvê-los.
- PE281 (Biotita augen gnaiss granítico): Fenoclastos fusiformes de microclina perítica com interstícios preenchidos por quartzo poligonal, além de plagioclásio fino. Biotita retorcida ocorre espremida nos interstícios da microclina.
- PE289 (Biotita ortognaiss granodiorítico): Fenoclastos fusiformes de plagioclásio saussuritizado e de ortoclásio perítico, tendo nos interstícios matriz, microquebrada, recristalizada, de plagioclásio albitico e microclina, além de quartzo irregular, com biotita orientada, espremida nos interstícios, circundando os fenoclastos.
- PE335 (Biotita gnaiss): Fenoclastos fusiformes, orientados, de microclina perítica, assimilando plagioclásio, tendo os interstícios preenchidos por quartzo irregular e feixes de palhetas orientadas de biotita quem envolvem os fenoclastos.
- SE002 (Ortognaiss tonalítico a granodiorítico): Cristais estirados a fusiformes de plagioclásio, microclina perítica e quartzo com palhetas, orientadas, de biotita castanha avermelhada, cloritizada, nos interstícios.
- SE032-A (Ortognaiss granodiorítico): Agregado de cristais irregulares a tabulares de plagioclásio, orientados, com microclina e quartzo, mais irregulares, nos interstícios. Biotita, em palhetas orientadas, nos interstícios do agregado quartzo feldspático.
- SE035 (Biotita ortognaiss granodiorítico): Cristais irregulares de plagioclásio, com interstícios preenchidos por cristais maiores e irregulares de microclina e quartzo. Palhetas orientadas de biotita, nos interstícios, imprimindo foliação à rocha.
- SE084-B: Gnaiss bandado, com banda félsica (parte superior da foto) constituída de cristais estirados de quartzo e de microclina, em contato com banda mais máfica, com hornblenda, em permeio a cristais finos e estirados de plagioclásio e quartzo.
- SE140 (Biotita gnaiss (Enderbita a charnoenderbita [hidrotermalizado?]): Cristais estrados a irregulares de microclina perítica, de plagioclásio e de quartzo, em contatos curvos, com agregados de biotita avermelhada, orientada, associada à hornblenda, em permeio.

C.2 Fotos das Amostras

Figura C.1: *BA171LP*

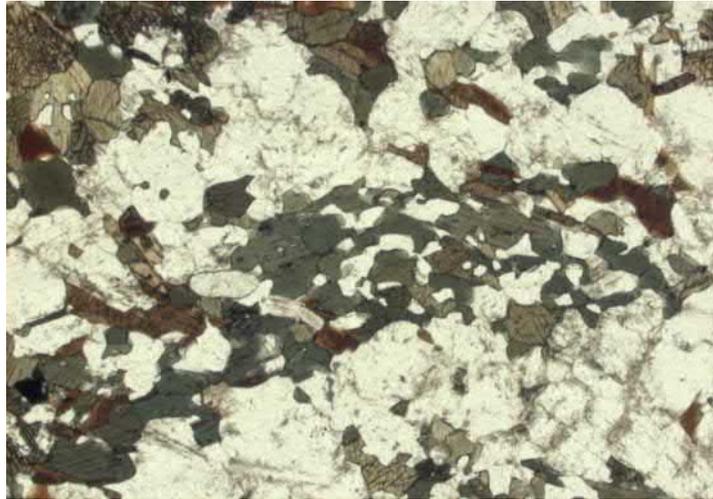


Figura C.2: *PB016LP*

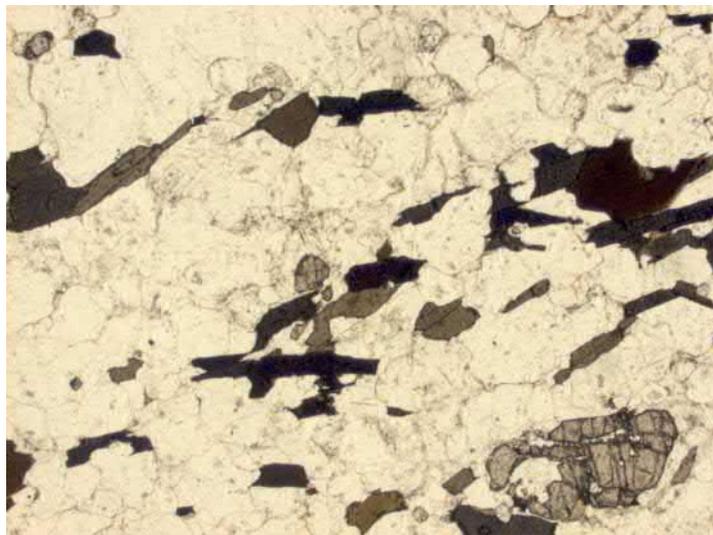


Figura C.3: *PB054LP*



Figura C.4: *PB155LP*



Figura C.5: *PB186LP*

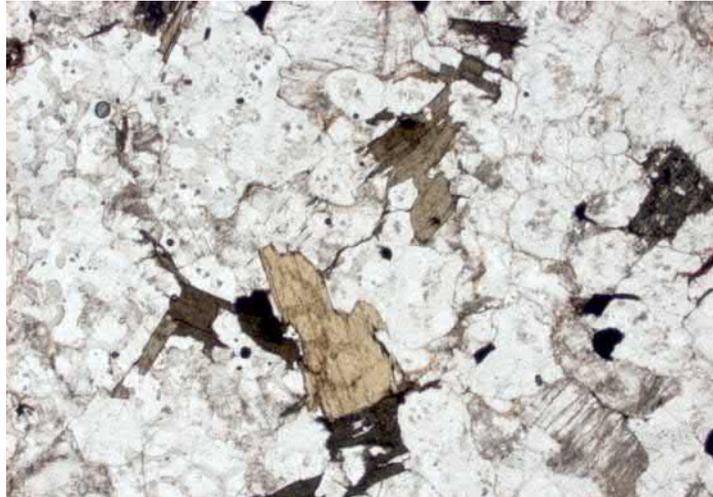


Figura C.6: *PB196BLP*



Figura C.7: *PE063LP*



Figura C.8: *PE101LP*



Figura C.9: *PE121LP*



Figura C.10: *PE131LP*

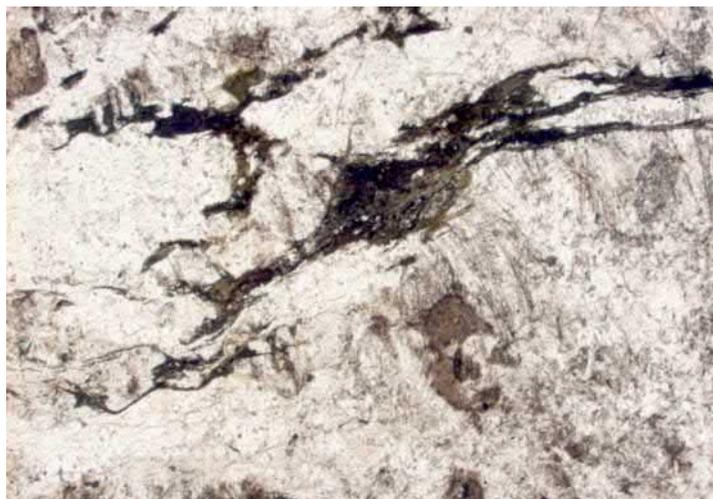


Figura C.11: *PE132LP*

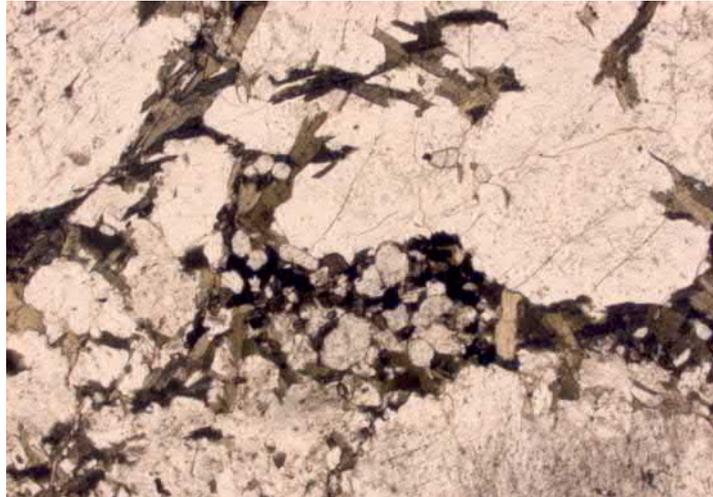


Figura C.12: *PE152LP*



Figura C.13: *PE189LP*

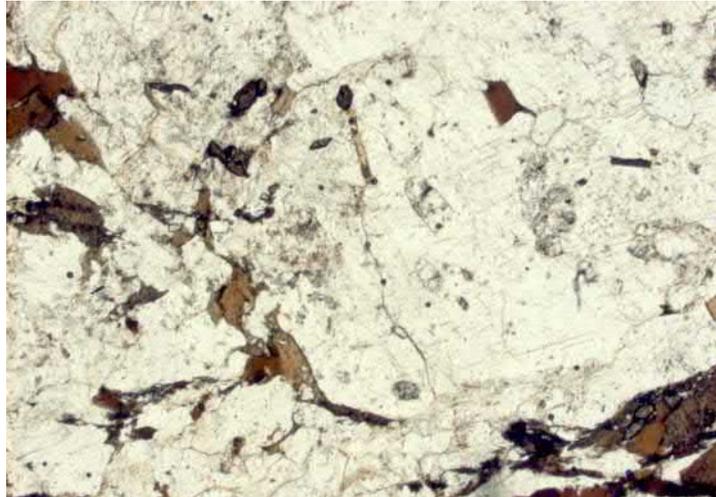


Figura C.14: *PE208LP*

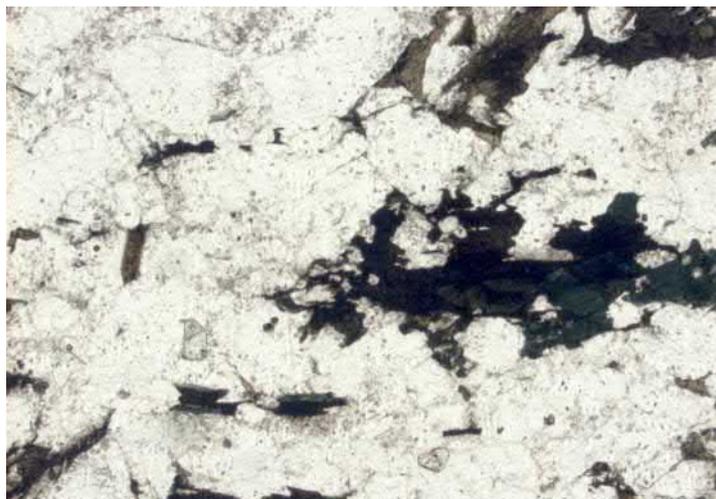


Figura C.15: *PE222LP*



Figura C.16: *PE281LP*

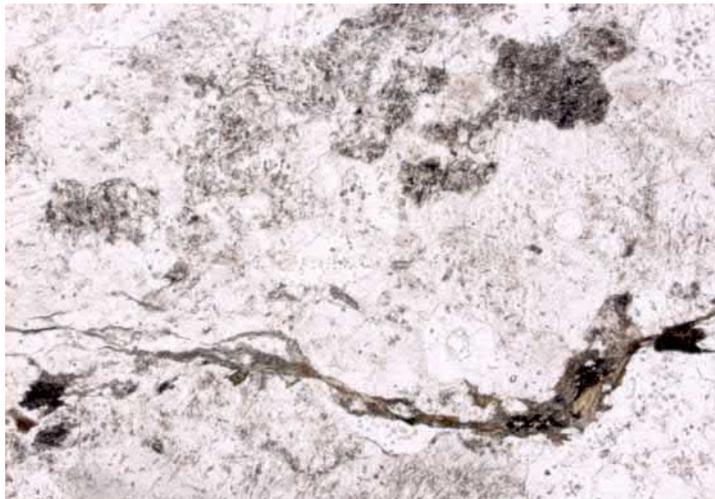


Figura C.17: *PE289LP*



Figura C.18: *PE335LP*



Figura C.19: *SE002LP*

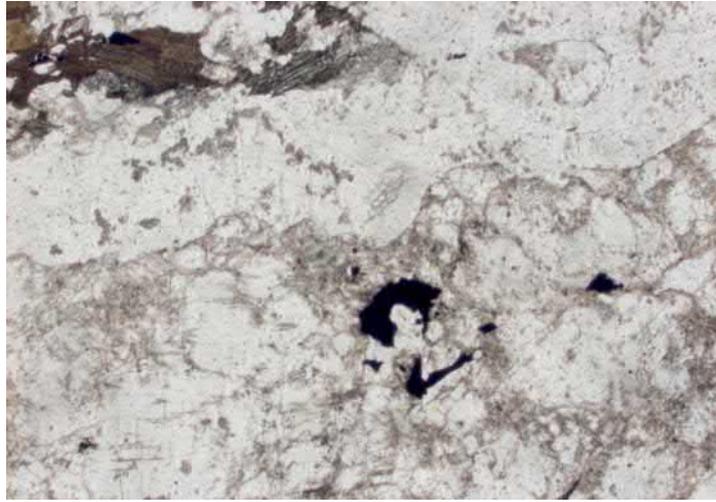


Figura C.20: *SE032ALP*

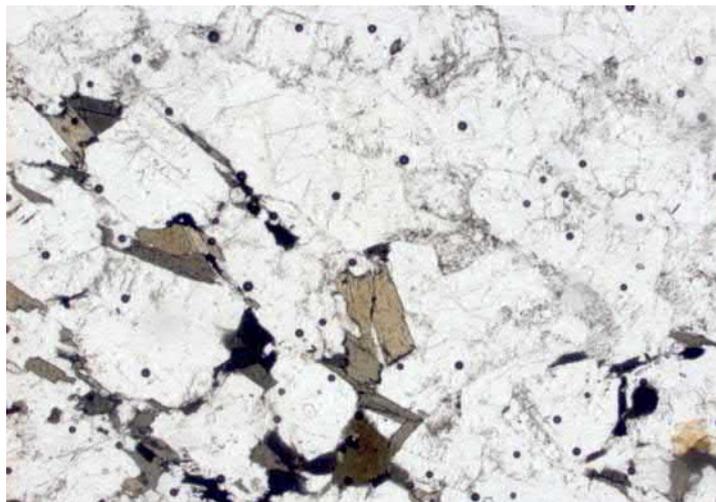


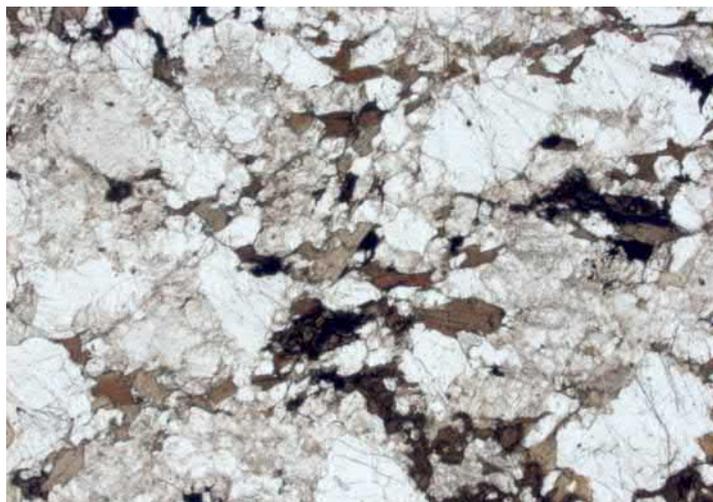
Figura C.21: *SE035LP*



Figura C.22: *SE084BLP*



Figura C.23: *SE140LP*



Referências Bibliográficas

- [1] Lesmoir-Gordon, N., Stewart, I., *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer, 2010.
- [2] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D., *Chaos And Fractals - New Frontiers of Science*. Springer, 2nd Edition, 2004.
- [3] Mandelbrot, B.B., *Fractals: Form, Chance and Dimension*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1977.
- [4] Das, A., Das, P., *Fractal analysis of different eastern and western musical instruments*. Fractals, vol. 14, no. 3, pp. 165-170, 2006
- [5] FRACTAL FOUNDATION, *Online Fractal Course, Chapter 1, Fractals in Nature*. Disponível em <http://fractalfoundation.org/OFC/OFC-index.htm>. Acesso em: 20 de mar. 2014.
- [6] Cohen, N., *Fractal Antennas, Part 1*. Communications Quarterly. Summer 1995.
- [7] Alharbi, A.Y., Pence, D.V. Pence, Cullion, R.N., *Thermal Characteristics of Microscale Fractal-Like Branching Channels*. Journal of Heat Transfer 126(5), 744-752 (Nov 16, 2004)
- [8] Losa G.A., Nonnenmacher T.F., *Self-similarity and fractal irregularity in pathologic tissues*. Mod Pathol., 9:174-182. 1996.
- [9] Karperien, A.L., Jelinek, H.F., Buchan, A.M., *Box-Counting Analysis of Microglia Form in Schizophrenia, Alzheimer's Disease and Affective Disorder*. Fractals 16 (2): 103., 2008.

- [10] Kumar-Singh, S., Broeckhoven, C. Van, Cauwenberghe, C. Van, Pirici, D., *Fractal analysis of amyloid plaques in Alzheimer's disease patients and mouse models*. Neurobiology of Aging 32 (2011) 1579-1587.
- [11] Goñi, J. et al. *Robust estimation of fractal measures for characterizing the structural complexity of the human brain: Optimization and reproducibility*. NeuroImage 83 (2013) 646-657.
- [12] Liu J.Z., Zhang L.D., Yue G.H., *Fractal Dimension in Human Cerebellum Measured by Magnetic Resonance Imaging*. Biophysical Journal. 2003; 85:4041-4046.
- [13] Kam Y., Karperien A., Weidow B., Estrada L., Anderson A.R.A., Quaranta V., *Nest expansion assay: a cancer systems biology approach to in vitro invasion measurements*. BMC Res. Notes 2, 130-139, 2009.
- [14] Karperien, A., Jelinek, H.F., Leandro, J.J.G., Soares, J.V.B., Cesar Jr, R.M., Lucie, A., *Automated detection of proliferative retinopathy in clinical practice*. Clinical ophthalmology (Auckland, N.Z.)(1): 109-122, 2008.
- [15] Tan, C.O.; Cohen, M.A., Eckberg, D.L., Taylor, J.A., *Fractal properties of human heart period variability: Physiological and methodological implications*. The Journal of Physiology 587 (15): 3929, 2009.
- [16] Mandelbrot, B., *Three fractal models in finance: discontinuity, concentration, risk*. Economic Notes (Siena): 26, 139-178, 1997.
- [17] Coleman, P.H., Pietronero, L., *The Fractal Structure of the Universe*. Physics Reports, 213 (May), pp. 311-389, 1992.
- [18] Peebles, P., *The fractal galaxy distribution*. Physica D 38, 273-278, 1989.
- [19] Barlow, M.T., Perkins, E.A., *Brownian motion on the Sierpinski gasket*. Probab. Theory Relat. Fields, 79 (1988), pp. 543-624
- [20] Sapoval, B., *Experimental observation of local modes in fractal drums*. Physica D 38, 296-298, 1989.
- [21] Niemeyer, L., Pietronero, L., Wiesmann, H., *Fractal dimension of dielectric breakdown*. Physical Review Letters 52, 1033-1036, 1984.

- [22] Perfect, E., *Fractal models for the fragmentation of rocks and soils: a review*. Engineering Geology, Volume 48, Issues 3-4, December 1997, p.p. 185-198.
- [23] Manning, C.E., 1994, *Fractal Clustering of Metamorphic Veins*. Geology, v. 22, p. 335-338, April, 1994.
- [24] Brown, S.R., *A note on the description of surface roughness using fractal dimension*. Geophys. Res. Lett. 14 (11) (1987) 1095-1098.
- [25] Abe, K., *Magnitudes of large shallow earthquakes from 1904 to 1980*. Phys. Earth Planet. Intr. 27, 72-92, 1981
- [26] Soto, M.A.A., Kiang, C.H., Vilar, O.M. *Avaliação do escalonamento fractal de alguns solos brasileiros*. Revista Brasileira de Geociências, 38(2): 253-262, junho de 2008.
- [27] Helmborg, G., *Getting Acquainted With Fractals*, Walter de Gruyter, Berlin, 2007.
- [28] Peano, G., *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*. Math. Ann., 36:157-160, 1890.
- [29] Weisstein, E.W. "Hilbert Curve." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/HilbertCurve.html>
- [30] Weisstein, E.W. "Sierpin'ski Carpet." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiCarpet.html>
- [31] Sierpinski tetrahedron. From Wolfram Alpha—Computational Knowledge Engine. Acessado em jun. 2014.
- [32] Menger Sponge. From Wolfram Alpha—Computational Knowledge Engine. Acessado em jun. 2014.
- [33] Koch, H. von, *"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*. Arkiv for Matematik 1, 681-704, 1904.
- [34] Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*. Henry Holt and Company, Massachusetts, 1983.
- [35] Weierstrass, K., *Abhandlungen aus der Functionenlehre*. J. Springer, Berlin, p. 97, 1886.

- [36] Mandelbrot, B.B., *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1977.
- [37] Falconer, K. J., *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2003.
- [38] Argyris, J., Faust, G., Haase, M., *An Exploration of Chaos*. North-Holland, 1994.
- [39] Grotzinger, J., Jordan, T.H., *Understanding Earth*. W. H. Freeman and Company, 2010.
- [40] Education, M.G.H., *Dictionary of Geology & Mineralogy*. McGraw-Hill Education, 2003.
- [41] Wilson, J.R., *Minerals and Rocks*. Bookboon, 2010
- [42] Teixeira, W., Taioli, F., Fairchild, T., Toledo, C., *Decifrando a Terra*. Companhia Editora Nacional, 2ed., 2009.
- [43] Lowrie, W., *Fundamentals of Geophysics*. Cambridge University Press, 2007.
- [44] Bucher, K. and Grapes, R., *Petrogenesis of Metamorphic Rocks*. Springer, 2011.
- [45] Van der Pluijm, B.A., Marshak, S., *Earth Structure: An Introduction to Structural Geology and Tectonics*. W.W. Norton, 2004.
- [46] Geology - Rocks & Minerals. Site hospedado pela Universidade de Auckland, Nova Zelândia. Disponível em: http://flexiblelearning.auckland.ac.nz/rocks_minerals/rocks/index.html. Acesso em: 10 de jan. 2015.
- [47] Gouyet, J.F., *Physics and fractal structures*. SPRINGER VERLAG GMBH, 1996.
- [48] Edgar, G.A., *Classics on Fractals*. Studies in Nonlinearity, Westview Press, 2003.
- [49] Richter, J., *The notebooks of Leonardo da Vinci*. Dover, New York, 1970.
- [50] Aratsu, R., *Leonardo Was Wise - Trees Conserve Cross-Sectional Area Despite Vessel Structure*. Journal of Young Investigators, Issue 1, 1998.
- [51] Whittemore, S., Cooley, D.A., *The Circulatory System - Your Body and How it Works Series*. Facts On File, Incorporated, 2009.

- [52] Jelinek, H.F., Fernandez, E., *Neurons and fractals: how reliable and useful are calculations of fractal dimensions?* Journal of neuroscience methods, v. 81, n. 1, p. 9-18, Elsevier, 1998.
- [53] Tarboton, D.G., Bras, R.L., Rodriguez-Iturbe, I., *The fractal nature of river networks.* Water Resour. Res., 24(8), 1317-1322, doi:10.1029/WR024i008p01317, 1988.
- [54] Barnsley, M.F., Rising, H., *Fractals Everywhere.* Morgan Kaufmann, 2000.
- [55] Assis, T. A. D., Miranda, V., Mota, F. D. B., Fernandes, R., Andrade, S., *Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais.* 2304, 2008.
- [56] HarFA—Harmonic and Fractal Image Analyzer, versão 5.5: software para análise de imagens via análise harmônica e fractal. Desenvolvido por Zmeskal, Bzatek e Nežadal, da Faculdade de Química do Instituto de Física e Química Aplicada, da Universidade Técnica de Brno, República Tcheca. 2009.
- [57] Tomankova, K., Jerabkova, P., Zmeskal, O., Vesela, M., Haderka, J., *Use of Image Analysis to Study Growth and Division of Yeast Cells.* Journal of Imaging Science and Technology 50(6): pp. 583-589(7), 2006.