



Universidade Federal da Bahia
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Dinâmica de Campos Térmicos:
uma análise da superposição de
estados coerentes e estados de Fock usando
função de Wigner**

Vinícius Nonato Alves Lula Rocha

Outubro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Dinâmica de Campos Térmicos:
uma análise da superposição de
estados coerentes e estados de Fock usando
função de Wigner**

Vinícius Nonato Alves Lula Rocha

Orientador: Prof. Dr. José David Manguiera Vianna

Co-orientador: Prof. Dr. Lourival Manoel da Silva Filho

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador, outubro de 2013

Aos meus Pais

"Ars Totum Requirit Hominem"

Agradecimentos

Houve momentos em que estava certo que destinaria este espaço unicamente para agradecer aos meus pais, Raimundo Nonato Lula Rocha e Vilma Alves Lula: pessoas que me apoiaram desde os meus primeiros fôlegos até esta caminhada que é a formação de um cientista na área de Física. Apoiaram-me mesmo tendo eles Albert Einstein, com aquela famosa foto em que, descabelado, colocara sua língua para fora da boca, como a única referência de um cientista na área de Física. *Quem mandou escolher esta coisa de loucos?*, indagam, mas mesmo assim dão-me todo o suporte necessário para que este e muitos outros trabalhos sejam concretizados.

Entretanto, com o decorrer dos últimos meses, fui forçado a perceber que este espaço é pequeno em vista das pessoas que merecem ser citadas aqui. Começo com ninguém mais senão o meu orientador, José David M. Vianna. Admiração é uma palavra que pouco traduz o sentimento que tenho por ele. Desde o início da minha graduação que acompanho grupos de estudo em que ele é o mentor, tornando para mim a maior referência de comprometimento de um físico. Brilhante professor, faz com que assuntos como a Mecânica Quântica façam sentido no intelecto de seus alunos. Sente-se incomodado com o menor sinal de não entendimento por parte de seu alunado, de forma que faz questão de reservar um tempo para desnublar nosso entendimento. Tenho e espero ter sempre o prazer de trabalhar com ele.

Lourival Manoel da Silva Filho, caatingueiro das terras de Poções-BA, quase meu conterrâneo, é o nome daquele que obtive coorientação. Irreverente, em sua essência, se torna uma figura única dentre o nosso grupo. Ele foi o responsável por me dar o prazer de trabalhar com este estado, que apesar de passado meses acreditando que nada iria dar certo, acabou por se tornar um trabalho bonito pelo qual sinto orgulho de tê-lo feito. Agradeço a ele por me dar esta oportunidade e me guiar em algumas penumbras que encontrei no caminho.

Agradeço a Maria das Graças Reis Martins, por ter me acompanhado desde os tempos da iniciação científica, me dando sempre grandes lições de vida.

A minha irmã, Priscilla Alves Lula Rocha, por ser minha família em Salvador e pelos deliciosos macarrões em sua casa.

Prefiro usar nada ao software privativo, pois do nada posso construir um software-livre é um ensinamento de Richard Stallmann, que hoje se reflete em meu posicionamento político

em relação aos *softwares* privados. Não teria acesso a este ensinamento se não fosse por meio de meu mentor em causas diversas, Wallas Santos Nascimento. Ele, junto ao velho colega dos meus tempos de Engenharia no CEFET-BA, Luiz Paulo Colombiano, me fizeram perceber que a Física, Engenharia e a Ciência da Computação são mais ciências humanas do que ciências exatas.

Agradeço a Thiago *Paf* Antônio Rodrigues, que neste período de mestrado me ensinou (dentre tantos ensinamentos), com seu método altamente não ortodoxo, a não me envergonhar pelo que sou e, principalmente, sorrir nos momentos de desespero.

A Marcelo *speed* do Vale Cunha pela parceria.

A Marquinhos Venicio Sales, ironicamente, pela chatice.

A Kim Pedro Bittencourt, mais irronicamente ainda, não pela chatice hoje, mas por confiar em mim e a quem posso contar. E claro, pela chatice de outrora.

Sérgio Sales Floquet, amigo, matemático e *multiúso*, enxergou erros onde ninguém mais encontraria. Sua presença foi vital para o desenvolvimento deste trabalho, de maneira que são poucas as palavras que traduz este agradecimento.

Agradeço aos colegas da pós-graduação João Cláudio, Leandro Cerqueira, Eric Pinto, ao grande Seu Antônio, Antônio Lafayette, velho Iuri Boaventura e tantos outros que marcam presença no Instituto de Física e me fazem sentir em casa.

À escola de teatro Outr'Eu da qual participei por oito meses. Estas aulas, ministradas por Fábio Tavares, me ajudaram a ter uma maior conexão comigo mesmo, de forma que foi muito importante na minha formação como pessoa.

Ao sorriso sempre alegre de Dalva e Gilmar.

Aos meus "fís" Reiner Maria Rilke Gatto e Erwin Schrödinger Gatto, por serem minha gostosa, agradável – e por que não divertida? – companhia, e por me ensinarem a cuidar de algo. Agradeço também a minha "fia" adotiva, que encontrei quase morta na praia, Lis de Moraes Sena Gatta pelas brincadeiras fervorosas e momentos de distrações. E não poderia faltar o meu irmão gato, que eu peguei na feira num sábado de Agosto 2012, Harry Potter Alves Lula Rocha Gatto. Ontem uma bola de pulga anêmica, hoje um menino mudinho traquino.

Finalizando a série de agradecimentos a seres não humanos, agradeço àquele que, por dezesete anos, reconheceu meus passos desde a entrada da casa: meu velho amigo Kiko – *in memoriam*.

À Salvador, que ainda mantenho uma relação de amor e ódio, mas que depois de ser meu

lar por onze anos aprendi a gostar.

À Mayra Abelha de Sá por me apresentar Caraíva e por aguentar as minhas prosas.

À Galera de Conquista que é minha família extra oficial.

À Luciana de Moraes Sena, guardiã de meu coração. Primeiro, por fazer um bom trabalho quando se trata de cuidar do meu coração. Segundo, por estar presente nos momentos mais desesperadores desta minha caminhada, criando um cenário propício onde pude ficar atento, vigiando minha própria sorte e trabalhando de forma tranquila. E por último, e não menos importante, por tornar minha vida mais interessante.

A todo aquele que não se sente representado aqui, peço: sinta-se!

Antes de finalizar os agradecimentos, gostaria de mandar um recado intergalático para o velho Raulzito: Não foi tão fácil assim, largue de onda!

E contrariando todos aqueles que acreditam que cientistas têm que ser ateus, agradeço a Deus.

Resumo

Neste trabalho, utilizamos o formalismo da dinâmica de campos térmicos para introduzir a temperatura em um estado composto pela superposição do estado número de Fock $|n\rangle$ com o estado coerente $|\alpha\rangle$, sob duas perspectivas em relação à duplicação de seus graus de liberdade: *i*) considerando o produto tensorial por $|\tilde{n}\rangle$, e, *ii*) considerando o produto tensorial por $|\tilde{\alpha}\rangle$. A análise dos efeitos da temperatura é realizada considerando a matriz densidade e a função de Wigner levando em conta ambos os processos de duplicação.

Abstract

In this work we have used the thermofield dynamics to introduce the temperature in a state composed by a superposition of a Fock's number $|n\rangle$ state and a coherent state $|\alpha\rangle$. The freedom's degree duplication is realised by considering the tensor product by $|\tilde{n}\rangle$, and the tensor product by $|\tilde{\alpha}\rangle$. In order to analyse the temperature effects, we have determined the density matrix and the Wigner's function taking into count both process of duplication.

Sumário

Lista de Figuras

| | |
|--|-------|
| Introdução | p. 18 |
| 1 Dinâmica de Campos Térmicos | p. 21 |
| 1.1 Introdução à Dinâmica de Campos Térmicos | p. 21 |
| 1.2 O oscilador bosônico descrito pela DCT | p. 25 |
| 1.2.1 Transformação de Bogoliubov – Bósons | p. 26 |
| 1.3 Operadores de criação e destruição termalizados – Bósons | p. 28 |
| 1.4 O oscilador fermiônico descrito pela DCT | p. 31 |
| 1.4.1 Transformação de Bogoliubov – Férmions | p. 34 |
| 1.4.2 Operadores de criação e destruição termalizados – Férmions | p. 35 |
| 1.5 O operador densidade | p. 36 |
| 2 A Função de Wigner | p. 38 |
| 2.1 Definição da Função de Wigner | p. 38 |
| 2.2 Função de Wigner: Oscilador harmônico | p. 38 |
| 3 Quantização do campo eletromagnético e suas descrições | p. 44 |
| 3.1 Quantização do campo eletromagnético | p. 44 |
| 3.2 Estado número de Fock | p. 47 |
| 3.3 Estados coerentes | p. 49 |
| 4 Dinâmica de Campos Térmicos aplicada ao estado $\alpha_n\rangle = \alpha\rangle + n\rangle$ | p. 56 |

| | | |
|----------|--|--------|
| 4.1 | Superposição de Estados Coerentes e Estados Número | p. 56 |
| 4.2 | Duplicação do espaço de Hilbert | p. 57 |
| 4.2.1 | Duplicação do espaço de Hilbert através de $ \alpha_n\rangle \otimes \tilde{n}\rangle$ | p. 57 |
| 4.2.2 | Inserção da temperatura no estado $ \alpha_n\rangle_n$ | p. 58 |
| 4.3 | Cálculo do operador densidade associado ao estado $ \alpha_n(\beta)\rangle_n$ | p. 58 |
| 4.3.1 | A média de um operador \mathcal{A} usando o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle_n$ | p. 58 |
| 4.3.2 | A base de $ \alpha_n(\beta)\rangle_n$ descrita através de operadores de criação não térmicos | p. 59 |
| 4.3.3 | Cálculo do operador densidade associado ao estado $ \alpha_n(\beta)\rangle_n$ | p. 63 |
| 4.4 | Cálculo da matriz densidade associada ao estado $ \alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ | p. 73 |
| 4.4.1 | Duplicação do espaço de Hilbert através de $ \alpha_n\rangle \otimes \tilde{\alpha}\rangle$ | p. 73 |
| 4.4.2 | Inserção de temperatura em $ \alpha_n\rangle_\alpha$ | p. 73 |
| 4.4.3 | A base de $ \alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ como aplicações sucessivas dos operadores de criação não-térmicos | p. 74 |
| 4.4.4 | A média do operador \mathcal{A} usando o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ | p. 79 |
| 5 | Função de Wigner para estados de superposição | p. 92 |
| 5.1 | Função de Wigner para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle_n$ | p. 92 |
| 5.2 | Função de Wigner para o estado $ \alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ | p. 107 |
| 6 | Análise dos resultados | p. 125 |
| 6.1 | Valores dos parâmetros | p. 125 |
| 6.2 | Função de Wigner para o estado $ \alpha_3(\beta)\rangle_3$ e $ \alpha_3(\beta)\rangle_\alpha$ | p. 127 |
| 6.3 | $W_3(p, q)$ para $T = 1K$ | p. 127 |
| 6.4 | $W_\alpha(p, q)$ para $T = 1K$ | p. 131 |
| 6.5 | $W_{\alpha+3}(p, q)$ para $T = 1K$ | p. 135 |
| 6.6 | $W_3(p, q)$ para $T = 30K$ | p. 138 |
| 6.7 | $W_\alpha(p, q)$ para $n = 3$ e $T = 30K$ | p. 141 |

| | | |
|----------|--|--------|
| 6.8 | $W_{\alpha+3}(p, q)$ para $T = 30K$ | p. 144 |
| 6.9 | $W_3(p, q)$ para $T = 300K$ | p. 147 |
| 6.10 | $W_{\alpha}(p, q)$ para $T = 300K$ | p. 150 |
| 6.11 | $W_{\alpha+3}(p, q)$ para $T = 300K$ | p. 153 |
| 7 | Conclusão e Perspectivas | p. 156 |
| | Apêndice A - Cálculo do comutador do tipo $[A^n, B^m]$ | p. 158 |
| | Referências Bibliográficas | p. 163 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|--------|
| 2.1 | Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{h}\right)$ para $n = 0$ | p. 41 |
| 2.2 | Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{h}\right)$ para $n = 1$ | p. 41 |
| 2.3 | Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{h}\right)$ para $n = 2$ | p. 42 |
| 2.4 | Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{h}\right)$ para $n = 3$ | p. 42 |
| 2.5 | Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{h}\right)$ para $n = 4$ | p. 43 |
| 2.6 | Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{h}\right)$ para $n = 5$ | p. 43 |
| 6.1 | Gráfico de $W_3(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 128 |
| 6.2 | Gráfico de $W_3^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 129 |
| 6.3 | Gráfico de $W_3^{3, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 129 |
| 6.4 | Gráfico de $W_3^{\alpha, 3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 130 |
| 6.5 | Gráfico de $W_3^{3, 3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 130 |
| 6.6 | Gráfico de $W_\alpha(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 131 |
| 6.7 | Gráfico de $W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 132 |
| 6.8 | Gráfico de $W_\alpha^{3, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 133 |
| 6.9 | Gráfico de $W_\alpha^{\alpha, 3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 133 |
| 6.10 | Gráfico de $W_\alpha^{3, 3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 134 |
| 6.11 | Gráfico de $W_{\alpha+3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 135 |
| 6.12 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 136 |
| 6.13 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 136 |
| 6.14 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha, 3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 137 |
| 6.15 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3, 3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K. | p. 137 |
| 6.16 | Gráfico de $W_3(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 138 |

| | | |
|------|---|--------|
| 6.17 | Gráfico de $W_3^{\alpha,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 139 |
| 6.18 | Gráfico de $W_3^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 139 |
| 6.19 | Gráfico de $W_3^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 140 |
| 6.20 | Gráfico de $W_3^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 140 |
| 6.21 | Gráfico de $W_\alpha(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 141 |
| 6.22 | Gráfico de $W_\alpha^{\alpha,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 142 |
| 6.23 | Gráfico de $W_\alpha^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 142 |
| 6.24 | Gráfico de $W_\alpha^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 143 |
| 6.25 | Gráfico de $W_\alpha^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 143 |
| 6.26 | Gráfico de $W_{\alpha+3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 144 |
| 6.27 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 145 |
| 6.28 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 145 |
| 6.29 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 146 |
| 6.30 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K. | p. 146 |
| 6.31 | Gráfico de $W_3(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 147 |
| 6.32 | Gráfico de $W_3^{\alpha,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 148 |
| 6.33 | Gráfico de $W_3^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 148 |
| 6.34 | Gráfico de $W_3^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 149 |
| 6.35 | Gráfico de $W_3^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 149 |
| 6.36 | Gráfico de $W_\alpha(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 150 |
| 6.37 | Gráfico de $W_\alpha^{\alpha,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 151 |
| 6.38 | Gráfico de $W_\alpha^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 151 |
| 6.39 | Gráfico de $W_\alpha^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 152 |
| 6.40 | Gráfico de $W_\alpha^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 152 |
| 6.41 | Gráfico de $W_{\alpha+3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 153 |
| 6.42 | Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. | p. 154 |

- 6.43 Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. p. 154
- 6.44 Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. p. 155
- 6.45 Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K. p. 155

Introdução

Uma das áreas importantes no desenvolvimento da compreensão e fundamentação da mecânica quântica é a óptica quântica. Um dos fatores que contribuem para essa importância é a simplicidade dos experimentos ópticos quando comparados a outros experimentos que revelam peculiaridades da mecânica quântica. Por outro lado, áreas de pesquisa como a Informação Quântica, Criptografia Quântica e a Computação Quântica, vêm sendo construídas tendo a Óptica Quântica como um dos principais veículos de desenvolvimento [1–6]. Fazer um tratamento quântico da óptica, implica em estudar representações do campo eletromagnético em um caráter quântico, ou seja, considerando as variáveis dinâmicas do campo como operadores que obedecem às regras de comutação canônicas.

Pode-se representar o campo eletromagnético de diversas maneiras; dentre elas temos, particularmente, o estado número de Fock e o estado coerente, que são estados quânticos muito usados na Óptica Quântica. [7]. Neste contexto, outro estado que vem se tornando interessante, devido a sua experimentabilidade, é o estado que é composto pela superposição do estado número com o estado coerente. Este estado foi estudado pela primeira vez por Mizrahi e Dodonov [8] no ano de 2002, para o caso em que se considera o estado número com $n = 0$, ou seja, o vácuo. Na ocasião, esses autores estudaram a assimetria entre os operadores de criação e de destruição, tendo sido possível mostrar que o operador de destruição, aplicado ao estado superposição, gera quantas neste estado.

Uma das características do mundo físico, no qual acontecem os vários processos de interesse, é a presença da temperatura. Então, é natural que se procure estudar teoricamente os efeitos térmicos não só nos processos macroscópicos, mas também nos microscópicos. Sabe-se, por exemplo, que algumas propriedades quânticas, como o emaranhamento quântico e a coerência, são modificadas com o aumento da temperatura. Desta forma, quando se quer desenvolver uma tecnologia baseada em alguma propriedade quântica, como ocorre com a Computação Quântica, torna-se importante a análise do comportamento do estado utilizado com a variação da temperatura.

Entre os métodos para inserção da temperatura em estados quânticos, há o formalismo desenvolvido por Takahashi e Umezawa, denominado DCT – *Dinâmica de Campos Térmicos*

[9, 10]. Com a DCT, diferentemente dos demais formalismos, pode-se trabalhar num cenário de vetores de espaços de Hilbert já que nessa formulação surge naturalmente o conceito de espaço de Hilbert térmico onde se encontram os estados quânticos termalizados. De fato, o espaço de Hilbert térmico é um espaço de Hilbert duplicado composto pelo produto direto entre espaço de Hilbert original, que carrega informações dos estados físicos, e o espaço de Hilbert dual ligado a um sistema fictício. Faz-se, então, necessário definir a álgebra e os operadores que atuam neste espaço onde encontram-se os estados térmicos gerados a partir de uma transformação canônica, chamada de *transformação de Bogoliubov*, aplicada a um estado de vácuo duplicado.

Trabalhos com a DCT vêm sendo realizados desde alguns anos em vários centros [11–15]. No que se refere a fundamentos da mecânica quântica e computação quântica, tem-se procurado termalizar estados quânticos de interesse e investigar os efeitos da temperatura por meio *i)* do fator de Mandel, que investiga a sua estatística, *ii)* da fidelidade, que analisa o quanto o estado termalizado se afasta do não termalizado, e por fim, *iii)* da função de Wigner, que é capaz de inferir sobre a classicalidade ou a não classicalidade do estado para determinada temperatura. Nesta linha de pesquisa, pode-se estudar, por exemplo, critérios [16] dentro do formalismo da DCT para analisar a perda de emaranhamento para estados tipo Bell, analisar os efeitos da temperatura em estados tipo Bell usando diversas representações [17], bem como analisar efeitos da temperatura em estados compostos pela superposição do estado número de Fock com o estado coerente [7, 11, 18, 19]. Em particular, neste último caso é possível realizar o estudo considerando a duplicação de graus de liberdade a partir do produto tensorial do estado superposição *i)* pelo estado de vácuo, *ii)* pelo estado coerente, *iii)* pelo estado número de Fock e, no caso completo, *iv)* usando o produto tensorial pelo estado superposição. O presente trabalho considera os casos *ii)* e *iii)* como etapas que contribuirão para uma melhor compreensão dos resultados ao considerar o caso *iv)*, sendo a função de Wigner determinada e analisada tanto para o caso *ii)* como para o caso *iii)*.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: No Capítulo 1 iremos introduzir o formalismo da DCT com aplicações para os bósons e os férmions, e iremos mostrar como se escreve o operador densidade para estados termalizados na base de Fock do espaço de Hilbert usual. No Capítulo 2, iremos definir a função de Wigner e aplicar ao oscilador harmônico. Para uma melhor compreensão dos estados envolvidos neste trabalho, desenvolvemos no Capítulo 3 a quantização do campo eletromagnético e duas de suas representações: *I)* o estado número de Fock e *II)* o estado coerente. O Capítulo 4 está destinado aos cálculos do operador densidade para ambas as formas de duplicação dos graus de liberdade usados neste trabalho. Já o Capítulo 5 se destina aos cálculos das funções de Wigner também para as duas formas de duplicação. A análise de gráficos relativos aos resultados do Capítulo 5 se encontram no Capítulo 6.

Por fim, as conclusões e perspectivas estão escritas no Capítulo 7. No Apêndice, desenvolvemos um tipo de comutador de importância para o trabalho.

1 *Dinâmica de Campos Térmicos*

Neste capítulo, faremos uma breve introdução à Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), desenvolvida por Umezawa e Takahashi [9, 10, 20]; um dos aspectos desta teoria é que a temperatura é introduzida através de uma transformação unitária, chamada de transformação de Bogoliubov, aplicada ao vácuo. Seguiremos em linhas gerais as referências [15, 16, 21–23].

1.1 Introdução à Dinâmica de Campos Térmicos

Partiremos de um sistema em equilíbrio térmico e consideraremos o ensemble canônico. Para tal sistema, um observável arbitrário \mathcal{A} tem a sua média definida como

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \text{Tr} [e^{-\beta H} \mathcal{A}], \quad (1.1)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\kappa_b T} \quad (1.2)$$

e Tr , κ_b , T , $z(\beta)$ e H indicam, respectivamente, o traço de uma matriz, a constante de Boltzmann, temperatura, função partição e o Hamiltoniano do sistema. É possível obter a média de \mathcal{A} usando a base formada pelos autoestados $|n\rangle$ do hamiltoniano H , ou seja, a base que respeita as seguintes relações:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (1.3)$$

$$\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}, \quad (1.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad (1.5)$$

onde E_n é a energia associada ao estado $|n\rangle$ e $\delta_{i,j}$ é a função delta de Kronecker, que tem seu valor dado por

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{para } i = j \\ 0 & , \text{para } i \neq j. \end{cases} \quad (1.6)$$

Portanto, podemos escrever (1.1) usando essa base que chamamos de base de Fock, o que dá para o traço:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \sum_n \langle n | e^{-\beta H} \mathcal{A} | n \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | \mathcal{A} | n \rangle. \quad (1.7)$$

Estamos desenvolvendo um formalismo onde se quer obter a média de um observável, não a partir do valor esperado deste operador em um estado não dependente da temperatura $|n\rangle$, mas em um estado termalizado $|0(\beta)\rangle$, definido em um espaço de Hilbert apropriado. Então, temos que impor a média do observável \mathcal{A} , no nosso formalismo, como aquela encontrada pelo ensemble canônico afim de preservarmos seu valor numérico. Portanto, devemos ter

$$\langle \mathcal{A} \rangle \equiv \langle 0(\beta) | \mathcal{A} | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | \mathcal{A} | n \rangle. \quad (1.8)$$

Vamos agora aplicar a relação de completeza (1.5) no estado termalizado

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | 0(\beta) \rangle = \sum_n g_n(\beta) |n\rangle, \quad (1.9)$$

onde $g_n(\beta) \equiv \langle n | 0(\beta) \rangle$ é uma função escalar. Desta maneira, podemos escrever a média de \mathcal{A} como

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \mathcal{A} | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} \langle 0(\beta) | n \rangle \langle n | \mathcal{A} | m \rangle \langle m | 0(\beta) \rangle \\ &= g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n | \mathcal{A} | m \rangle. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Para que a relação acima satisfaça (1.8), o produto das funções escalares deve assumir o valor

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{1}{z(\beta)} e^{\beta E_n} \delta_{n,m}. \quad (1.11)$$

Mas, como salientamos, $g_n(\beta)$ é uma função escalar! Deste modo, não poderia obter o resultado acima, em que aparece uma função delta de Kronecker. Entretanto, por haver esta função, a expressão (1.11) sugere algo que se assemelha a um produto escalar de vetores provenientes de algum espaço vetorial. Para solucionar este problema, vamos supor que estamos trabalhando com um ente que carrega informações de dois espaços vetoriais diferentes, o es-

paço de Hilbert original e outro espaço a determinar. Investigando as propriedades da base de Fock (1.3)–(1.5), propõe-se [22] que este outro espaço seja idêntico ao primeiro. Uma forma de conseguir tal ente que carrega informações de dois espaços vetoriais é obtendo-se um vetor (estado) de um espaço formado pelo produto tensorial da base de Fock $\{|n\rangle\}$ por uma base do outro espaço vetorial. Para garantirmos que estes espaços sejam idênticos, teremos de observar que as propriedades sejam as mesmas em ambos os espaços. Para tanto, vamos escrever a base deste outro espaço como $\{|\tilde{n}\rangle\}$ e garantir que as seguintes relações sejam válidas:

$$\tilde{H}|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle, \quad (1.12)$$

$$\langle \tilde{m} | \tilde{n} \rangle = \delta_{m,n} \quad (1.13)$$

$$e \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| = 1, \quad (1.14)$$

onde \tilde{H} é o Hamiltoniano de um sistema fictício, chamado sistema Til, ou dual, que tem como autovetores os elementos da base $\{|\tilde{n}\rangle\}$ e como autovalor E_n , idêntico ao autovalor de (1.3). Temos então a formação de outro espaço vetorial idêntico ao espaço de Hilbert de base $\{|n\rangle\}$. Chamaremos de espaço (de Hilbert) Til, ou Dual. Por sua vez, o espaço de Hilbert do nosso ente matemático $|0(\beta)\rangle$ será formado pelo produto tensorial dos elementos da base $\{|n\rangle\}$ pelos elementos de $\{|\tilde{n}\rangle\}$. Portanto, o elemento da base do espaço duplicado será

$$|n, \tilde{m}\rangle \equiv |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle, \quad (1.15)$$

onde $|\tilde{m}\rangle$ é um elemento da base $\{|\tilde{n}\rangle\}$.

Assim, escrevendo

$$g_m(\beta) = f_m(\beta)|\tilde{m}\rangle \quad (1.16)$$

temos de (1.9)

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n |n\rangle \otimes f_n(\beta)|\tilde{n}\rangle = \sum_n f_n(\beta)|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \\ &= \sum_n f_n(\beta)|n, \tilde{n}\rangle. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A} \rangle &= \langle 0(\beta) | \mathcal{A} | 0(\beta) \rangle = \sum_{n, \tilde{n}} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n} | \mathcal{A} | n, \tilde{m} \rangle \\
&= \sum_{n, \tilde{n}} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \delta_{n, \tilde{m}} \langle n | \mathcal{A} | n \rangle \\
&= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n | \mathcal{A} | n \rangle,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

onde assumimos que o operador \mathcal{A} age apenas no espaço vetorial de Hilbert original (sem til). Para que a equação acima seja igual a (1.7), temos que considerar a relação abaixo como verdadeira:

$$f_n^*(\beta) f_n(\beta) = \frac{1}{z(\beta)} e^{-\beta E_n}. \tag{1.19}$$

Em consequência o estado $|0(\beta)\rangle$, chamado de vácuo termalizado, é escrito como

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta \frac{E_n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle. \tag{1.20}$$

Desta forma, encontramos um estado de vácuo termalizado, pertencente ao espaço de Hilbert duplicado, que podemos utilizar para determinar a média de um observável \mathcal{A} , obtendo resultados fisicamente corretos. É importante notar que este estado, apesar de se chamar "vácuo", é formado por quanta que são evidentes em $|n, \tilde{n}\rangle$. Este fato, que não é tão incomum em física, se torna claro quando pensamos que a temperatura mede o nível de agitação das partículas. O estado de "vácuo termalizado" ou "vácuo térmico", no entanto, tem propriedades que assim o caracterizam: por exemplo, se lhe aplicarmos um operador destruição térmico, o resultado será nulo. Veremos isso com mais detalhes adiante, quando termalizarmos os operadores de criação e destruição usuais e mostrarmos sua álgebra.

Para concluir esta seção, apresentaremos a relação entre os observáveis do sistema original e do sistema til, também, como dissemos, chamado de sistema dual, é dada por [13, 22]

$$(\widetilde{\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}) = (\tilde{\mathcal{A}}_i \tilde{\mathcal{A}}_j), \tag{1.21}$$

$$(c\widetilde{\mathcal{A}_i} + \widetilde{\mathcal{A}_j}) = c^* \tilde{\mathcal{A}}_i + \tilde{\mathcal{A}}_j, \tag{1.22}$$

$$(\widetilde{\mathcal{A}_i^\dagger}) = (\tilde{\mathcal{A}}_i)^\dagger, \tag{1.23}$$

$$(\widetilde{\mathcal{A}_i}) = \mathcal{A}_i, \tag{1.24}$$

$$[\mathcal{A}_i, \tilde{\mathcal{A}}_j] = 0. \tag{1.25}$$

1.2 O oscilador bosônico descrito pela DCT

Nesta seção, vamos mostrar como desenvolver a DCT no caso de um oscilador bosônico. Se negligenciarmos a energia de ponto zero e fizermos $\hbar = 1$, o Hamiltoniano do oscilador unidimensional é

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (1.26)$$

e os operadores de criação e destruição obedecem a seguinte álgebra:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (1.27)$$

$$[a, a] = 0, \quad (1.28)$$

$$[a^\dagger a^\dagger] = 0, \quad (1.29)$$

onde $[A, B]$ é o comutador definido por

$$[A, B] = AB - BA,$$

com A e B operadores. Aplicando o Hamiltoniano num estado número de Fock, temos:

$$H|n\rangle = \omega a^\dagger a|n\rangle = n\omega|n\rangle, \quad (1.30)$$

ou seja, $E_n = n\omega$, e usamos que $|n\rangle$ é autovetor do operador número $N = a^\dagger a$ com autovalor n .

Para determinar o vácuo térmico para os bósons, apliquemos as regras de conjugação til em (1.27)–(1.29) e teremos uma álgebra semelhante para os operadores de criação e destruição til, ou seja,

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad (1.31)$$

$$[\tilde{a}, \tilde{a}] = 0, \quad (1.32)$$

$$[\tilde{a}^\dagger \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (1.33)$$

Em consequência, como

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} [a^\dagger]^n |0\rangle$$

e

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} [\tilde{a}^\dagger]^n |\tilde{0}\rangle,$$

segue de (1.20) que

$$\begin{aligned}
 |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} \frac{[a^\dagger]^n}{\sqrt{n!}} \frac{[\tilde{a}^\dagger]^n}{\sqrt{n!}} |0, \tilde{0}\rangle.
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Temos, portanto, a forma do vácuo termalizado para partículas bosônicas. Como (1.34) é um estado normalizado, podemos achar o valor de $z(\beta)$. De fato, considerando que

$$\begin{aligned}
 \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_{n,m} \langle m, \tilde{m} | e^{-\beta \frac{\omega}{2}(m+n)} |n, \tilde{n}\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_{n,m} e^{-\beta \frac{\omega}{2}(m+n)} \delta_{n,m} \delta_{m,n} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta \omega n} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} \sum_n \left(\frac{1}{e^{\beta \omega}} \right)^n = 1,
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

e que a equação (1.35) é uma série geométrica, obtemos que

$$z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega}}. \tag{1.36}$$

Dessa forma, (1.34) fica

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta \omega}} \sum_n \frac{e^{-\frac{n}{2}\beta \omega}}{n!} [a^\dagger]^n [\tilde{a}^\dagger]^n |0, \tilde{0}\rangle. \tag{1.37}$$

Pode-se mostrar que o vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ pode ser obtido aplicando uma transformação unitária ao estado $|0, \tilde{0}\rangle$ [22]. Vamos desenvolver essa transformação na próxima seção.

1.2.1 Transformação de Bogoliubov – Bósons

A transformação de Bogoliubov [22] é uma transformação canônica que leva o estado de vácuo não térmico ao estado de vácuo térmico. Para determiná-la, observemos que a soma na expressão (1.37) é a exponencial do operador $e^{-\frac{1}{2}\beta \omega a^\dagger \tilde{a}^\dagger}$. Assim, podemos reescrever a expressão (1.37) como

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta \omega}} e^{-\frac{1}{2}\beta \omega a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle. \tag{1.38}$$

É de bastante valia definir as seguintes funções de β :

$$u(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv \cosh \theta(\beta), \quad (1.39)$$

e

$$v(\beta) = \frac{e^{-\beta\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \equiv \sinh \theta(\beta), \quad (1.40)$$

uma vez que elas satisfazem a relação

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1, \quad (1.41)$$

característica das funções hiperbólicas. Ocorre que por essa definição

$$\tanh \theta(\beta) = e^{-\beta\frac{\omega}{2}}. \quad (1.42)$$

Dessa forma, usando (1.39) e (1.42) em (1.38), temos

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= [\cosh \theta(\beta)]^{-1} e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh[\theta(\beta)] a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln[\cosh \theta(\beta)]} e^{-\ln[\cosh \theta(\beta)] \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} e^{-\ln[\cosh \theta(\beta)] a^\dagger a} e^{-\tanh[\theta(\beta)] \tilde{a}^\dagger a} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh[\theta(\beta)] a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln[\cosh \theta(\beta)] (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a + 1)} e^{-\tanh[\theta(\beta)] \tilde{a}^\dagger a} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh[\theta(\beta)] a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln[\cosh \theta(\beta)] (\tilde{a} \tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{-\tanh[\theta(\beta)] \tilde{a}^\dagger a} |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde usamos que

$$e^{f(\beta; a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger) a} |0, \tilde{0}\rangle = e^0 |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle$$

e

$$e^{f(\beta; a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger) \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle = e^0 |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle,$$

em que $f(\beta; a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$ é uma função arbitrária; também usamos a relação de comutação

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1. \quad (1.44)$$

Para prosseguir devemos usar a identidade

$$e^{\tau[A+B]} = e^{\tanh[\tau]B} e^{\ln[\cosh \tau]C} e^{\tanh[\tau]A}, \quad (1.45)$$

e fazendo a associação

$$\begin{aligned}
 A &= -\tilde{a}a \\
 B &= a^\dagger\tilde{a}^\dagger \\
 C &= [A, B] = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a \\
 \tau &= \theta(\beta)
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

podemos escrever (1.43) como

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle, \tag{1.47}$$

onde

$$G(\beta) = -i\theta(\beta)[\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger]. \tag{1.48}$$

A relação (1.47) possibilita introduzir uma transformação unitária $U(\beta)$ que transforma $|0, \tilde{0}\rangle$ em $|0(\beta)\rangle$, ou seja,

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)}, \tag{1.49}$$

que é chamada de transformação de Bogoliubov.

1.3 Operadores de criação e destruição termalizados – Bósons

Vamos usar a transformação $U(\beta)$ para introduzir, em ambos os sistemas real e fictício, a temperatura nos operadores de criação e destruição. Como o estado de vácuo térmico é obtido do vácuo duplicado por (1.47), segue que os operadores de destruição e criação sofrem a transformação

$$a(\beta) \equiv U(\beta)aU^\dagger(\beta), \tag{1.50}$$

$$a^\dagger(\beta) \equiv U(\beta)a^\dagger U^\dagger(\beta), \tag{1.51}$$

$$\tilde{a}(\beta) \equiv U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta), \tag{1.52}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) \equiv U(\beta)\tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta). \tag{1.53}$$

Aplicando o operador destruição termalizado ao vácuo térmico, temos

$$\begin{aligned} a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)aU^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)a|0, \tilde{0}\rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

que pode ser interpretado como a declaração que no vácuo térmico não há "partículas térmicas".

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta)\tilde{a}|0, \tilde{0}\rangle = 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde se usa que $U(\beta)U^\dagger(\beta) = U^\dagger(\beta)U(\beta) = 1$, pois a transformação de Bogoliubov é uma transformação unitária. No entanto, $|0(\beta)\rangle$ não é vácuo para os operadores a e a^\dagger . Aplicando a em (1.34), temos

$$\begin{aligned} a|0(\beta)\rangle &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} e^{-\beta\frac{1}{2}n\omega} a|n, \tilde{n}\rangle \\ &= \sum_n \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} e^{-\beta\frac{1}{2}n\omega} |n-1, \tilde{n}\rangle. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Da mesma forma, quando aplicamos \tilde{a} em $|0(\beta)\rangle$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{a}|0(\beta)\rangle &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} e^{-\beta\frac{1}{2}n\omega} \tilde{a}|n, \tilde{n}\rangle \\ &= \sum_n \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} e^{-\beta\frac{1}{2}n\omega} |n, \tilde{n}-1\rangle. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Este resultado nos mostra que o vácuo termalizado é composto por partículas não termalizadas, de modo que se pode interpretar serem elas responsáveis pelo caráter físico da temperatura, que mede a energia cinética das partículas. Pode-se dizer, considerando a relação (1.37), que é o fator $\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum_n \frac{e^{-\frac{n}{2}\beta\omega}}{n!}$ que carrega toda a informação acerca da quantidade de energia embutida no estado $|0(\beta)\rangle$, através das variáveis ω e $\beta = 1/\kappa_b T$, bem como o número n de partículas.

Como $U(\beta)$ é uma transformação unitária, a álgebra envolvendo os operadores $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$ permanece a mesma, isto é,

$$\begin{aligned} [a(\beta), a^\dagger(\beta)] &= a(\beta)a^\dagger(\beta) - a^\dagger(\beta)a(\beta) \\ &= U(\beta)a \underbrace{U^\dagger(\beta)U(\beta)}_{=1} a^\dagger U^\dagger(\beta) - U(\beta)a^\dagger \underbrace{U^\dagger(\beta)U(\beta)}_{=1} a U^\dagger(\beta) \\ &= U(\beta) (aa^\dagger - a^\dagger a) U^\dagger(\beta) = U(\beta) [a, a^\dagger] U^\dagger(\beta) \\ &= U(\beta)U^\dagger(\beta) = 1. \end{aligned} \quad (1.58)$$

De forma análoga podemos mostrar que as outras relações de comutação também se mantem invariantes. Portanto, ficamos com as seguintes relações de comutação para os operadores termalizados:

$$[a(\beta), a^\dagger(\beta)] = 1, \quad (1.59)$$

$$[\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] = 1, \quad (1.60)$$

e com todas outras relações de comutação envolvendo os operadores termalizados til e não-til iguais a zero.

A relação (1.49) permite escrever o operador $a(\beta)$ como

$$a(\beta) = U(\beta)aU^\dagger(\beta) = e^{-iG(\beta)}ae^{iG(\beta)}. \quad (1.61)$$

Podemos desenvolver (1.61), utilizando a expansão

$$e^{-iB}Ae^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] \dots, \quad (1.62)$$

fazendo as associações $A = a$ e $B = G(\beta)$, dado por (1.48). Procedendo dessa forma, chegaremos ao resultado:

$$\begin{aligned} e^{-iG(\beta)}ae^{iG(\beta)} &= \left[1 + \frac{\theta^2(\beta)}{2!} + \frac{\theta^4(\beta)}{4!} + \dots \right] a \\ &\quad - \left[\theta + \frac{\theta^3(\beta)}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right] \tilde{a}^\dagger \\ &= \cosh[\theta(\beta)]a - \sinh[\theta(\beta)]\tilde{a}^\dagger, \end{aligned} \quad (1.63)$$

que por (1.39)–(1.40), fica:

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger. \quad (1.64)$$

Procedendo de maneira análoga, os outros operadores térmicos podem ser escritos de forma similar. Em suma, temos

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger. \quad (1.65)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \quad (1.66)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger, \quad (1.67)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a. \quad (1.68)$$

Somando (1.65) multiplicado por $u(\beta)$ com (1.66) multiplicado por $v(\beta)$, e com a ajuda de

(1.41), temos

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \quad (1.69)$$

Da mesma maneira, podemos obter os outros operadores não térmicos em função dos térmicos.

Sumariamente, temos

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (1.70)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (1.71)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta), \quad (1.72)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \quad (1.73)$$

Para concluir, consideremos um exemplo simples. Calculemos o valor médio do operador número $N = a^\dagger a$ no vácuo térmico. Com a ajuda de (1.70)–(1.71), temos

$$\begin{aligned} N(\beta) &\equiv \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle = \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] \\ &= \langle 0(\beta) | \underbrace{u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta)}_1 + \underbrace{v(\beta)u(\beta)\tilde{a}(\beta)a(\beta)}_2 \\ &\quad + \underbrace{u(\beta)v(\beta)a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)}_3 + \underbrace{v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)}_4 | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle = v^2(\beta)\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

onde as parcelas 1, 2 e 3 se anulam quando aplicadas a $|0(\beta)\rangle$ ou $\langle 0(\beta)|$. Este resultado nos diz que a média do operador número N , quando tomada em termos do vácuo termalizado, nos dá a distribuição de Bose-Einstein para um sistema em equilíbrio térmico.

1.4 O oscilador fermiônico descrito pela DCT

Nesta seção vamos discutir o oscilador harmônico considerando o caso fermiônico. O hamiltoniano deste sistema é descrito por

$$H = \omega a^\dagger a, \quad \text{com} \quad \hbar = 1, \quad (1.75)$$

em que a álgebra que rege os operadores a^\dagger e a é:

$$\{a^\dagger, a\} = 1 \quad (1.76)$$

$$\{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad (1.77)$$

$$\{a, a\} = 0, \quad (1.78)$$

onde $\{, \}$ é o anticomutador e é definido por

$$\{A, B\} = AB + BA, \quad (1.79)$$

para A e B operadores.

O operador número é dado por:

$$N = a^\dagger a, \quad (1.80)$$

e satisfaz a relação

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (1.81)$$

Usando (1.76–1.78) e o fato do estado $|n\rangle$ ser normalizado, podemos mostrar que $n = 0, 1$, de forma que valem as relações

$$a|0\rangle = 0 \quad (1.82)$$

$$a|1\rangle = |0\rangle \quad (1.83)$$

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad (1.84)$$

$$a^\dagger|1\rangle = 0 \quad (1.85)$$

Aplicamos, agora o Hamiltoniano em $|n\rangle$,

$$H|n\rangle = \omega N|n\rangle = n\omega|n\rangle = \epsilon_n|n\rangle. \quad (1.86)$$

Os resultados (1.82–1.85) nos garantem que os autovalores de energia serão dados apenas por

$$\epsilon_0 = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_1 = \omega, \quad (1.87)$$

onde ϵ_n representa o autovalor de energia para o Hamiltoniano H .

Para incluir a temperatura de acordo com a DCT, devemos dobrar os graus de liberdade. Para isso, utilizaremos as regras de conjugação til na álgebra descrita por (1.76–1.78), obtendo uma álgebra idêntica para os operadores til, ou seja,

$$\{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}\} = 1 \quad (1.88)$$

$$\{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger\} = 0 \quad (1.89)$$

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}\} = 0, \quad (1.90)$$

com todos outros anticomutadores envolvendo os operadores til e não-til iguais a zero. A base para o espaço duplicado terá apenas quatro elementos, sendo eles:

$$|0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.91)$$

$$|1, \tilde{0}\rangle = a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.92)$$

$$|0, \tilde{1}\rangle = \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.93)$$

$$|1, \tilde{1}\rangle = a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.94)$$

Podemos então efetuar o somatório em (1.20), já que temos somente dois valores para a energia ϵ_n , ϵ_0 e ϵ_1 . Dessa forma, temos

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{z(\beta)}} [1 + e^{-\beta\frac{\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger] |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.95)$$

e usando o fato de que $|0(\beta)\rangle$ é normalizado, obtemos

$$z(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega}, \quad (1.96)$$

tendo o vácuo térmico a forma:

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} [1 + e^{-\beta\frac{\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger] |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.97)$$

O valor médio do operador N , tomado em termos de (1.97), será

$$N(\beta) \equiv \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta\omega}}, \quad (1.98)$$

que é a função distribuição de Fermi-Dirac.

1.4.1 Transformação de Bogoliubov – Férmions

Podemos também encontrar uma transformação unitária que leva o vácuo duplicado no vácuo termalizado. De forma semelhante ao caso bosônico, temos

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (1.99)$$

onde $G(\beta)$ é dado por (1.48) com os operadores de criação e destruição satisfazendo a (1.76)–(1.78) e (1.88)–(1.90). Expandindo a exponencial em (1.99), ficamos com

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[-i\theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) \right]^m |0, \tilde{0}\rangle. \quad (1.100)$$

Como os operadores de criação a^\dagger e \tilde{a}^\dagger aplicados mais de uma vez ao vácuo duplicado será nulo, e valendo-nos das propriedades:

$$[\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger]^{2n} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^n |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.101)$$

$$[\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger]^{2n+1} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^{n+1} a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.102)$$

podemos reescrever (1.100), como expansões de seno e cosseno

$$|0(\beta)\rangle = (\cos\theta + \sin\theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle, \quad (1.103)$$

onde

$$\cos[\theta(\beta)] = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} \equiv u(\beta), \quad (1.104)$$

e

$$\sin[\theta(\beta)] = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega}}} \equiv v(\beta). \quad (1.105)$$

Dessa forma, a expressão (1.103) é equivalente à expressão (1.97). Além disto, note que

$$u^2(\beta) + v^2(\beta) = 1. \quad (1.106)$$

1.4.2 Operadores de criação e destruição termalizados – Férmions

Os operadores térmicos são introduzidos aplicando a transformação de Bogoliubov nos operadores não-térmicos. Logo,

$$a(\beta) \equiv U(\beta)aU^\dagger(\beta), \quad (1.107)$$

$$a^\dagger(\beta) \equiv U(\beta)a^\dagger U^\dagger(\beta), \quad (1.108)$$

$$\tilde{a}(\beta) \equiv U(\beta)\tilde{a}U^\dagger(\beta), \quad (1.109)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) \equiv U(\beta)\tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta). \quad (1.110)$$

Seguindo os passos da seção anterior, usar a expansão (1.62) sendo A o operador a ser transformado e $B = G(\beta)$; assim, obteremos os operadores térmicos em função dos não-térmicos, ou seja,

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \quad (1.111)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}, \quad (1.112)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger, \quad (1.113)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger + v(\beta)a. \quad (1.114)$$

As relações inversas, por sua vez, são dadas por

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta), \quad (1.115)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \quad (1.116)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) - v(\beta)a^\dagger(\beta), \quad (1.117)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - v(\beta)a(\beta). \quad (1.118)$$

Concluindo esta seção, notemos que, para os férmions, devemos ter nas regras de conjugação til

$$\tilde{\tilde{A}} = -A, \quad (1.119)$$

para que possamos, por exemplo, encontrar \tilde{a} fazendo a conjugação til de a [22].

Veremos agora qual a relação entre o operador densidade e o vácuo térmico.

1.5 O operador densidade

Nesta seção, vamos discutir a ligação entre o vácuo térmico e a matriz densidade. Para isto, vamos obter a média térmica de um observável arbitrário \mathcal{A} que atua no espaço de Hilbert não-til. Antes desta tarefa, entretanto, vamos reescrever (1.34) como

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{\rho_\beta} \sum_n |n, \tilde{n}\rangle, \quad (1.120)$$

onde

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{z(\beta)} \quad (1.121)$$

é a matriz densidade associada ao vácuo térmico. Desta forma, a média de \mathcal{A} fica

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \mathcal{A} | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} \langle n, \tilde{n} | [\rho_\beta]^{\frac{1}{2}} \mathcal{A} [\rho_\beta]^{\frac{1}{2}} | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle n | \rho_\beta \mathcal{A} | m \rangle \delta_{n,m} \\ &= \sum_n \langle n | \rho_\beta \mathcal{A} | n \rangle \\ &= Tr [\rho_\beta \mathcal{A}]. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Vamos considerar agora um estado térmico qualquer

$$|\psi(\beta)\rangle = f(a(\beta), a^\dagger(\beta)) |0(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger; \beta) |0(\beta)\rangle. \quad (1.123)$$

Temos que a média de um observável neste estado térmico será dada em termos do traço da matriz densidade associada a esse estado, ou seja,

$$\langle \psi(\beta) | \mathcal{A} | \psi(\beta) \rangle = Tr [\rho_{|\psi(\beta)\rangle} \mathcal{A}]. \quad (1.124)$$

Por outro lado, podemos obter a matriz densidade associada a $|\psi(\beta)\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \psi(\beta) | \mathcal{A} | \psi(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) \mathcal{A} f(a, a^\dagger; \beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= Tr [\rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) \mathcal{A} f(a, a^\dagger; \beta)] \\ &= Tr [f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) \rho_\beta f(a, a^\dagger; \beta) \mathcal{A}], \end{aligned} \quad (1.125)$$

onde no último passo utilizamos a propriedade cíclica do traço, isto é,

$$Tr [ABC] = Tr [BCA] = Tr [CAB]. \quad (1.126)$$

Portanto,

$$\rho_{|\psi(\beta)\rangle} = f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) \rho_\beta f(a, a^\dagger; \beta). \quad (1.127)$$

Para uso de (1.127), é de extrema importância escrevermos ρ_β em termos da base número $\{|n\rangle\}$. Usaremos como exemplo o oscilador harmônico bosônico, de forma que utilizaremos a relação de completude (1.5), com o índice n trocado convenientemente para r . Assim, temos para a matriz densidade

$$\begin{aligned} \rho_\beta &= \frac{e^{-\beta H}}{z(\beta)} = (1 - e^{-\beta\omega}) \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\beta\omega r} |r\rangle\langle r| \\ &= \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r |r\rangle\langle r|, \end{aligned} \quad (1.128)$$

onde

$$\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (1.129)$$

O resultado (1.128), é a ponte que conecta, em termos da matriz densidade, um estado de interesse e o vácuo térmico e será amplamente usado no capítulo que trataremos da matriz densidade para os sistema que estudaremos adiante.

No próximo capítulo, iremos introduzir uma função no espaço de fase chamada função de Wigner, que é capaz de nos dar informações acerca do caráter quântico de um estado. Em especial, será útil para especificarmos em quais temperaturas um sistema apresenta propriedades clássicas e não-clássicas. E, para ilustrar, iremos aplicá-la ao oscilador harmônico.

2 A Função de Wigner

Neste capítulo, trataremos de uma função de distribuição real definida no espaço de fase. Essa distribuição chamada *Quasi-Probabilidade de Wigner* foi introduzida por *Eugene Paul Wigner*, em 1932 [24–26], e nós ilustraremos sua utilização usando o oscilador harmônico. Nos capítulos seguintes, a aplicaremos para análise do operador densidade do estado que é a soma do estado coerente com o estado número de Fock. Nossa apresentação tem como base as referências [24, 27–31].

2.1 Definição da Função de Wigner

A função de Wigner é definida como a transformada de Weyl para o operador densidade [27]. O resultado dessa transformação é uma quasi-probabilidade e está associado ao caráter clássico ou quântico do sistema estudado; resultados positivos indicam que o sistema possui características clássicas, enquanto os negativos, características quânticas. A função de Wigner é definida pela relação

$$W(p, q) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^L} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | \rho | q - Q/2 \rangle e^{-i\frac{Qp}{\hbar}} dQ, \quad (2.1)$$

onde L representa o número de dimensões em que se faz a integração, ρ , p e q são respectivamente o operador densidade, o momento e a coordenada espacial do sistema.

Trataremos da função de Wigner considerando o exemplo simples, e muito útil, do oscilador harmônico.

2.2 Função de Wigner: Oscilador harmônico

Calcularemos a função de Wigner para o n -ésimo estado de um oscilador harmônico unidimensional de frequência ω , massa m , e cujo operador densidade é $\rho = |n\rangle\langle n|$. Os seus autoes-

tados descritos pelos polinômios de Hermite $H_n(x)$ [32] são

$$\phi_n(q) = \langle q|n\rangle = \frac{1}{[\pi b^2]^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{[2^n n!]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{q^2}{2b^2}} H_n \left[\frac{q}{b} \right], \quad (2.2)$$

onde

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (2.3)$$

A função de Wigner $W_h(p, q)$ para este sistema é dada por

$$W_h(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2|n\rangle \langle n|q - Q/2\rangle e^{-i\frac{Qp}{\hbar}} dQ. \quad (2.4)$$

Será conveniente calcular inicialmente o termo

$$\begin{aligned} \langle q - y|n\rangle \langle n|q + y\rangle &= \langle q - y|n\rangle \langle q + y|n\rangle^* \\ &= \frac{1}{[\pi b^2]^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{[2^n n!]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_n \left[\frac{q-y}{b} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{[\pi b^2]^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{[2^n n!]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_n \left[\frac{q+y}{b} \right] \\ &= \frac{1}{[\pi b^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2^n n!} e^{-\frac{(q^2+y^2)}{b^2}} H_n \left[\frac{q-y}{b} \right] H_n \left[\frac{q+y}{b} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Então, usando a mudança de variável

$$y = -\frac{Q}{2} \quad (2.6)$$

em (2.4), temos:

$$W_h(p, q) = \frac{1}{(2\pi\hbar)} \frac{-2}{[\pi b^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2^n n!} e^{-\frac{q^2}{b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2} + 2i\frac{py}{\hbar}} H_n \left[\frac{q-y}{b} \right] H_n \left[\frac{q+y}{b} \right] dy. \quad (2.7)$$

Observando que

$$\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{ipy}{\hbar} = \frac{1}{b^2} \left[y - \frac{ipb^2}{\hbar} \right]^2 + \frac{p^2 b^2}{\hbar^2}, \quad (2.8)$$

obtemos de (2.7)

$$W_h(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{[\pi b^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2^n n!} e^{-\frac{q^2}{b^2} - \frac{p^2 b^2}{\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{b^2} \left[y - \frac{ipb^2}{\hbar} \right]^2} H_n \left[\frac{q-y}{b} \right] H_n \left[\frac{q+y}{b} \right] dy. \quad (2.9)$$

Com mais duas mudanças de variáveis, podemos escrever (2.9) como

$$W_h(p, q) = \frac{1}{[\pi]^{3/2} \hbar} \frac{1}{2^n n!} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} H_n \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_n \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] d\mu, \quad (2.10)$$

onde

$$\mu = \frac{1}{b} \left[y - \frac{ipb^2}{\hbar} \right], \quad (2.11)$$

$$\tau = \frac{ipb}{\hbar}, \quad (2.12)$$

e foi usado a propriedade dos polinômios de Hermite [33],

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \quad (2.13)$$

Com a ajuda do resultado [34]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) dx = \begin{cases} \sqrt{\pi} 2^n m! z^{n-m} L_m^{(n-m)}[-2yz], & \text{para } n \geq m \\ \sqrt{\pi} 2^m n! y^{m-n} L_n^{(m-n)}[-2yz], & \text{para } n < m \end{cases} \quad (2.14)$$

onde $L_n^k(x)$ são os polinômios associados de Laguerre, definidos por [33]

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!} x^m, \quad k > -1. \quad (2.15)$$

Podemos então escrever (2.10) como

$$W_h(p, q) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} L_n \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right]. \quad (2.16)$$

Usando (2.3) e (2.12), temos

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{b^2} - \tau^2 &= \frac{m\omega q^2}{\hbar} + \frac{p^2}{m\omega} = \frac{2}{\hbar\omega} \left[\frac{m\omega^2 q}{2} + \frac{p^2}{2m} \right] \\ &= \frac{2E_n}{\hbar\omega}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

o que possibilita escrever (2.16) como

$$W_h(p, q) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\frac{2E_n}{\hbar\omega}} L_n \left[4 \frac{E_n}{\hbar\omega} \right]. \quad (2.18)$$

Contudo, veremos que é conveniente escrever a quantidade $\frac{q^2}{b^2} - \tau$ como o módulo quadrado de um número complexo γ dado por

$$\gamma = \frac{q}{b} + i \frac{pb}{\hbar} = \frac{q}{b} + \tau \quad (2.19)$$

de forma que

$$|\gamma|^2 = \frac{q^2}{b^2} + \frac{p^2 b^2}{\hbar^2} = \frac{q^2}{b^2} - \tau^2. \quad (2.20)$$

A função de Wigner (2.16) assume, assim, a forma

$$W_h(p, q) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-|\gamma|^2} L_n [2|\gamma|^2], \quad (2.21)$$

onde foi usado, nos resultados acima, a definição dos polinômios de Laguerre L_n , dados por [33]:

$$L_n[x] = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \frac{n!}{(n-s)!(n-s)!s!} x^{n-s}. \quad (2.22)$$

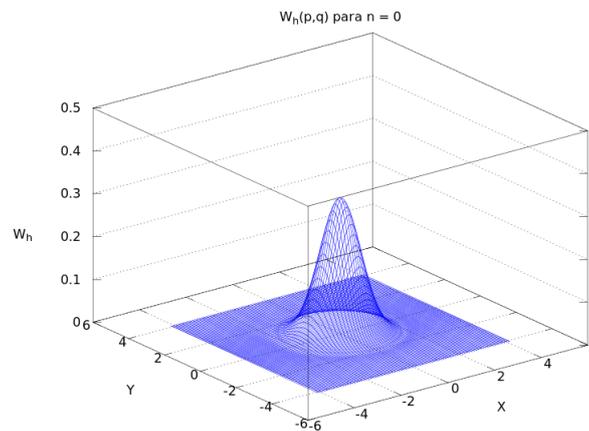


Figura 2.1: Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{\hbar})$ para $n = 0$.

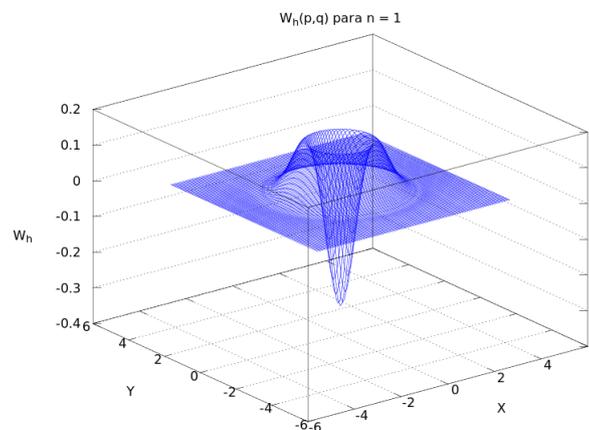


Figura 2.2: Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{\hbar})$ para $n = 1$.

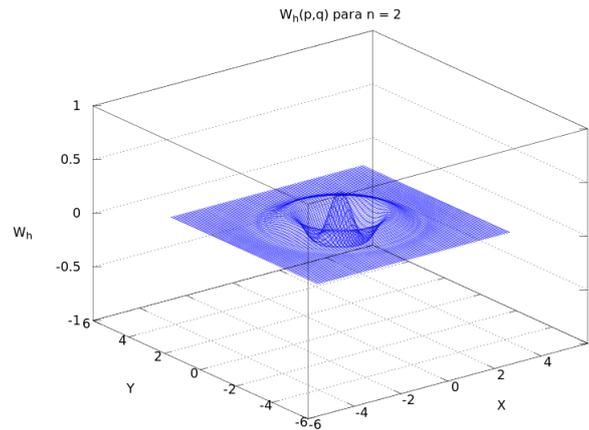


Figura 2.3: Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{\hbar}\right)$ para $n = 2$.

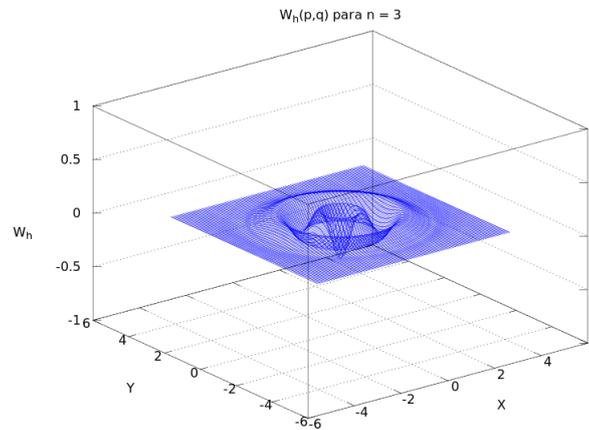


Figura 2.4: Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{\hbar}\right)$ para $n = 3$.

Na figura 2.1, está o gráfico para a função de Wigner versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{bp}{\hbar}\right)$ do oscilador harmônico unidimensional para o estado fundamental $n = 0$, e nas figuras 2.2–2.6 estão os gráficos para a função de Wigner versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{bp}{\hbar}\right)$ dos estados excitados $n = 1, \dots, 5$. Os valores da função de Wigner estão compreendidos no intervalo $-\frac{1}{\pi\hbar} \leq W_h(p, q) \leq \frac{1}{\pi\hbar}$. Comportamentos clássicos da função de Wigner estão associados à positividade desta função, de forma que podemos afirmar que para valores positivos de $W_h(p, q)$, o estado $|n\rangle$ possui um comportamento clássico. Em contrapartida, a interpretação dos valores negativos da função de Wigner estão associados a um comportamento que foge aos padrões de um comportamento clássico. Dizemos, assim, que o estado possui características não clássicas. Podemos ir além nesta interpretação. Sendo o comportamento quântico de um estado algo que não tem correspondência na física clássica, podemos associar esta não classicalidade da função de Wigner ao caráter quântico deste estado. Para este exemplo, dizemos que para valores negativos de $W_h(p, q)$ o estado

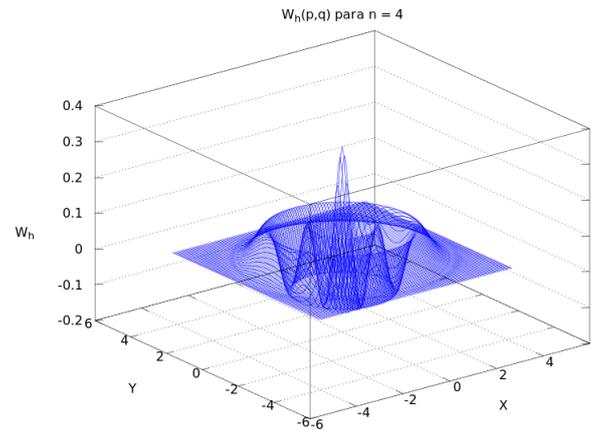


Figura 2.5: Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{\hbar}\right)$ para $n = 4$.

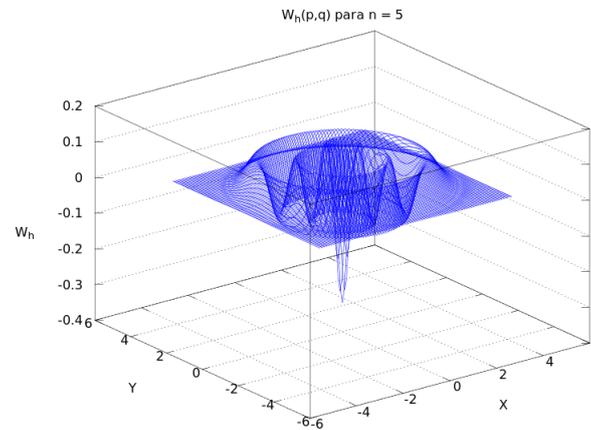


Figura 2.6: Gráfico de $W_h(p, q)$ versus $\left(X = \frac{q}{b}, Y = \frac{pb}{\hbar}\right)$ para $n = 5$.

$|n\rangle$ possui um caráter quântico.

Nos próximos capítulos, estudaremos um estado mais complexo formado por uma superposição de um estado coerente com um estado número de Fock. Usaremos a teoria desenvolvida no capítulo 1 para inserir a temperatura neste estado sob duas perspectivas diferentes, e obtemos o operador densidade dependente da temperatura para os casos em estudo. O exemplo da função de Wigner aqui desenvolvido para o oscilador harmônico será de bastante utilidade para os capítulos subsequentes, sendo os seus passos seguidos para determinar as funções de Wigner para o nosso estado termalizado.

3 *Quantização do campo eletromagnético e suas descrições*

Neste capítulo, iremos desenvolver a quantização do campo eletromagnético e também introduzir dois estados do campo eletromagnético amplamente usados na Óptica Quântica: o *estado número de Fock* e o *estado coerente*. O estado número corresponde a ter um número definido de fótons, o que torna difícil sua reprodução experimental; contudo, é possível gerar estados com um número reduzido de fótons [35]. O estado coerente, por sua vez, é mais usado na Óptica Quântica [36]; este estado corresponde a uma superposição linear coerente dos estados número e tem a característica de ter os valores médios da posição e momento com o mínimo de incerteza [37]. Iniciaremos com a quantização do campo eletromagnético.

3.1 *Quantização do campo eletromagnético*

Para a quantização do campo eletromagnético consideremos as equações de campo clássicas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

onde

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (3.5)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.6)$$

μ_0 e ϵ_0 são as permeabilidades magnética e elétrica para o espaço livre, respectivamente, de forma que $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, sendo c a velocidade da luz no vácuo. O campo elétrico e o magnético

podem ser expressos por uma função vetorial arbitrária dependente das coordenadas espaciais e da coordenada temporal chamada de potencial vetor. Designaremos o potencial vetor como $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Segue que [36]

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.7)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Para problemas da óptica quântica, é conveniente usar o *gauge* de Coulomb, dado por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) em (3.4), temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \mu_0^{-1} \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Fazendo a substituição de (3.7) e (3.8) em (3.10), teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{\mu_0} [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{A} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou seja, usando (3.9),

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.12)$$

que é a equação de onda para o potencial vetor. Vamos separar $\vec{A}(\vec{r}, t)$ em dois termos complexos:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t), \quad (3.13)$$

onde, na expressão de Fourier, $\vec{A}^{+}(\vec{r}, t)$ contém amplitudes que variam como $e^{-i\omega t}$ e $\vec{A}^{-}(\vec{r}, t)$ contém amplitudes que variam como $e^{i\omega t}$, para $\omega > 0$ e

$$\vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t) = \left(\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) \right)^*. \quad (3.14)$$

De fato, expandindo $\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t)$ em uma série de Fourier, temos:

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_k c_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t}, \quad (3.15)$$

$$\vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t) = \sum_k c_k^* \vec{u}_k(\vec{r}) e^{i\omega_k t}, \quad (3.16)$$

onde c_k são os coeficientes de Fourier e são constantes para o campo livre. A função vetorial $\vec{u}_k(\vec{r})$ corresponde à frequência ω_k e deve satisfazer a equação de onda

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2}\right)\vec{u}_k(\vec{r}) = 0, \quad (3.17)$$

ou seja, expandimos (3.13) em uma série infinita em termos de um conjunto de funções vetoriais base $\vec{u}_k(r)$ que contém informações sobre o espaço e são soluções da equação de onda para cada frequência ω_k . Podemos dizer então que (3.17) é uma equação de onda resultante da superposição de um conjunto infinito de funções de onda que dependem da frequência e "viajam" na velocidade da luz. Estas funções formam um conjunto ortonormal completo, ou seja, em um volume V que não contém nenhum material refrativo, é válida a relação

$$\int_V \vec{u}_k^*(\vec{r}) \vec{u}_{k'}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{k,k'}. \quad (3.18)$$

Também é válida a condição de transversalidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_k(\vec{r}) = 0. \quad (3.19)$$

Estas funções dependem das condições de contorno impostas sobre volume considerado, ou seja, condições periódicas de contorno que correspondem a ondas viajantes, ou apropriadas paredes refletoras que levam a ondas estacionárias, isto é, a ondas planas inseridas em um cubo de volume L^3 . Podemos escrever

$$\vec{u}_k(r) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{e}^{(\lambda)}, \quad (3.20)$$

onde $\hat{e}^{(\lambda)}$ é o versor que determina a polarização de $\vec{u}_k(\vec{r})$ e $\lambda = 1, 2$. A direção de propagação da onda é perpendicular a $\hat{e}^{(\lambda)}$ e é definida por \vec{k} dado por:

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi}{L}n_x, \frac{2\pi}{L}n_y, \frac{2\pi}{L}n_z\right), \quad (3.21)$$

com

$$n_x; n_y; n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.22)$$

Definindo a constante adimensional a_k como

$$a_k = \sqrt{\frac{2\omega_k \epsilon_0}{\hbar}} c_k, \quad (3.23)$$

o potencial vetor pode ser escrito como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right], \quad (3.24)$$

e o campo elétrico, por sua vez, é

$$\vec{E} = i \sum_k \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right]. \quad (3.25)$$

Na interpretação da eletrodinâmica clássica, os coeficientes de Fourier, a_k e a_k^\dagger são números complexos. Já na eletrodinâmica quântica, estes coeficientes são elevados à categoria de operadores, dando o caráter de operador aos observáveis campo elétrico E e campo magnético B . Como os fótons são bósons, a_k e a_k^\dagger devem respeitar a álgebra bosônica, ou seja,

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3.26)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}. \quad (3.27)$$

O Hamiltoniano do campo eletromagnético é dado por [32]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int [\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2] d\vec{r}, \quad (3.28)$$

de forma que, substituindo (3.25) na expressão equivalente para \vec{H} em (3.28), e utilizando as condições de transversalidade e de ortonormalidade do conjunto de função $\vec{u}_k(\vec{r})$, o Hamiltoniano toma a forma [36]

$$\mathcal{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left[a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right]. \quad (3.29)$$

O Hamiltoniano (3.29) deixa evidente que estamos tratando de um sistema, o campo eletromagnético, cuja energia é a de infinitos osciladores harmônicos com diversos modos de vibração; a interpretação física é que a energia é a soma de $\hbar\omega_k$ multiplicado pelo número de fótons em cada modo, mais a energia das flutuações do vácuo, dado por $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ em cada modo.

3.2 Estado número de Fock

O Hamiltoniano (3.29), para cada k , tem como autovalor $\hbar\omega_k \left[n_k + \frac{1}{2} \right]$, onde n_k é um inteiro. Os autovetores, denotados por $|n_k\rangle$, são conhecidos como *estado número* ou *estado de Fock* e são autovetores do operador $N_k = a_k^\dagger a_k$, sendo o autovalor o número de fótons no estado

$|n_k\rangle$, ou seja,

$$N_k|n_k\rangle = a_k^\dagger a_k|n_k\rangle = n_k|n_k\rangle. \quad (3.30)$$

O estado de vácuo do campo é definido como o estado que não pode ter seu número de fótons reduzido através de uma aplicação do operador destruição, isto é, o estado a zero fótons:

$$a_k|0\rangle = 0. \quad (3.31)$$

O valor médio do Hamiltoniano (3.29) no vácuo é:

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{H}|0\rangle &= \langle 0|\sum_k \hbar\omega_k \left[a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right] |0\rangle \\ &= \sum_k \hbar\omega_k \langle 0|a_k^\dagger a_k|0\rangle + \sum_k \frac{1}{2} \hbar\omega_k \langle 0|0\rangle \\ &= \sum_k \frac{1}{2} \hbar\omega_k. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como não há limite para os modos do campo, a soma em (3.32) é infinita, representando que a energia de ponto zero do campo eletromagnético é infinita. Como muitas experiências detetam somente diferenças de energia e não valores absolutos, uma sugestão usada para ultrapassar a questão da energia de ponto zero é simplesmente omiti-la [38] do Hamiltoniano (3.29).

Os operadores a_k^\dagger e a_k são os operadores de criação e destruição, respectivamente, e obedecem as seguintes relações:

$$a_k|n_k\rangle = \sqrt{n_k}|n_k - 1\rangle, \quad (3.33)$$

$$a_k^\dagger|n_k\rangle = \sqrt{(n_k + 1)}|n_k + 1\rangle. \quad (3.34)$$

Desta forma, podemos escrever um estado excitado como uma aplicação sucessiva de operadores de criação ao estado de vácuo:

$$|n_k\rangle = \frac{a_k^\dagger \cdots a_k^\dagger}{\sqrt{n_k!}}|0\rangle; \quad n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Os estados número são ortogonais

$$\langle n_k|m_k\rangle = \delta_{n,m}, \quad (3.36)$$

e formam um conjunto completo

$$\sum_{n_k} |n_k\rangle \langle n_k| = 1, \quad (3.37)$$

de forma que, para escrevermos um estado arbitrário $|\psi\rangle$ na base de Fock, basta usarmos a expressão [32]

$$|\psi\rangle = \sum_{n_k} |n_k\rangle \langle n_k|\psi\rangle = \sum_{n_k} \langle n_k|\psi\rangle |n_k\rangle. \quad (3.38)$$

3.3 Estados coerentes

As equações de movimento clássicas do oscilador harmônico em uma dimensão são escritas como:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{m}\pi(t), \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt}\pi(t) = -m\omega^2x(t), \quad (3.40)$$

onde x representa a coordenada espacial e π o momento. A massa e a frequência são denotadas por m e ω , respectivamente. É conveniente definir as seguintes quantidades adimensionais:

$$q(t) = bx(t), \quad (3.41)$$

$$p(t) = \frac{1}{\hbar b}\pi(t), \quad (3.42)$$

em que,

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \quad (3.43)$$

Desta forma, as equações (3.39)–(3.40) podem ser escritas como:

$$\frac{d}{dt}q(t) = \omega p(t), \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dt}p(t) = -\omega q(t). \quad (3.45)$$

Podemos definir uma quantidade complexa que carrega as informações tanto da posição quanto do momento. Chamando esta quantidade de $\alpha(t)$, podemos escrevê-la como:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[q(t) + ip(t)]. \quad (3.46)$$

Dessa forma, as equações (3.44)–(3.45) podem ser reduzidas a uma só equação:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) + i\omega\alpha(t) = 0, \quad (3.47)$$

cuja solução é bem conhecida e dada por

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.48)$$

em que α_0 é dado por

$$\alpha_0 \equiv \alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [q(0) + ip(0)]. \quad (3.49)$$

Podemos escrever $q(t)$ e $p(t)$ em função de $\alpha(t)$, ou seja,

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(t) + \alpha^\dagger(t)], \quad (3.50)$$

$$p(t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} [\alpha(t) - \alpha^\dagger(t)], \quad (3.51)$$

ou utilizando (3.48),

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^\dagger e^{i\omega t}], \quad (3.52)$$

$$p(t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} [\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^\dagger e^{i\omega t}]. \quad (3.53)$$

A energia \mathcal{H} do sistema é constante no tempo e igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} \pi^2(0) + \frac{m\omega^2}{2} x^2(0) \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega [q^2(0) + p^2(0)] \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega |\alpha_0|^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para um sistema de dimensões macroscópicas, a constante complexa α_0 , assume valores muito maiores que a unidade e como consequência, a energia \mathcal{H} assume valores muito maiores que $\hbar\omega$.

Estamos procurando um estado quantum-mecânico, tal que para todos os instantes os valores médios dos observáveis posição X , momento Π , e energia H , $\langle X \rangle$, $\langle \Pi \rangle$, $\langle H \rangle$, respectivamente, coincidam com os valores de posição x , momento π e energia \mathcal{H} correspondentes ao movimento clássico. Em analogia ao sistema clássico, definamos novos operadores proporcionais aos operadores de posição e momento como [32]:

$$Q = bX = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger), \quad (3.55)$$

$$P = \frac{1}{\hbar b} \Pi = \frac{-i}{\sqrt{2}} (a - a^\dagger). \quad (3.56)$$

e o Hamiltoniano do sistema é dado por

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\Pi^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2 = \frac{\hbar^2 b^2}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2} \frac{1}{b^2}Q^2 \\
 &= \frac{\hbar\omega}{2} (P^2 + Q^2) = \frac{\hbar\omega}{2} \left[\frac{1}{2} (a + a^\dagger)^2 - (a - a^\dagger)^2 \right] \\
 &= \frac{\hbar\omega}{4} [2a^\dagger a + 2aa^\dagger] = \frac{\hbar\omega}{2} [a^\dagger a + a^\dagger a + 1] \\
 &= \hbar\omega \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right]. \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

Para um estado arbitrário $|\psi(t)\rangle$, a evolução temporal do elemento de matriz $\bar{a}(t) = \langle \psi(t) | a | \psi(t) \rangle$ é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{a}(t) = \langle [a, H] \rangle(t), \tag{3.58}$$

onde o comutador em (3.58) pode ser facilmente calculado:

$$\begin{aligned}
 [a, H] &= \left[a, \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega}{2} \right] = \hbar\omega [a, a^\dagger a] \\
 &= \hbar\omega [aa^\dagger a - a^\dagger aa] = \hbar\omega [(a^\dagger a + 1)a - a^\dagger aa] \\
 &= \hbar\omega [a^\dagger aa + a - a^\dagger aa] \\
 &= \hbar\omega a. \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

Com este resultado, a equação (3.58) fica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{a}(t) = \hbar\omega \bar{a}(t), \tag{3.60}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{a}(t) + i\omega \bar{a}(t) = 0, \tag{3.61}$$

que tem como solução

$$\bar{a}(t) = \bar{a}(0)e^{-i\omega t}. \tag{3.62}$$

E para o elemento de matriz $\bar{a}^\dagger(t) = \langle \psi(t) | a^\dagger | \psi(t) \rangle$, de forma semelhante a $\bar{a}(t)$, temos:

$$\bar{a}^\dagger(t) = \bar{a}^\dagger(0)e^{i\omega t} = [\bar{a}(0)]^* e^{i\omega t}. \tag{3.63}$$

Substituindo (3.62)–(3.63) em (3.55)–(3.56), teremos

$$\langle Q \rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\bar{a}(0)e^{-i\omega t} + (\bar{a}(0))^* e^{i\omega t} \right], \quad (3.64)$$

$$\langle P \rangle(t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[\bar{a}(0)e^{-i\omega t} - (\bar{a}(0))^* e^{i\omega t} \right]. \quad (3.65)$$

Não podemos deixar de notar a semelhança das equações (3.47–3.48) e (3.61–3.62), de maneira que, se fizermos

$$\bar{a}(0) = \alpha_0, \quad (3.66)$$

as equações (3.64–3.65) serão exatamente iguais. Neste momento, é bom termos em mente que $\alpha_0 = [q(0) + ip(0)]$ é um parâmetro complexo que carrega informações sobre a posição e sobre o momento inicial de um movimento clássico. O que fizemos foi igualar o valor do elemento de matriz $\langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle$, que é originalmente de natureza quântica, com o valor de um parâmetro complexo α_0 de natureza puramente clássica. Como consequência deste fato, teremos

$$\langle Q \rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha_0 e^{-i\omega t} + (\alpha_0)^* e^{i\omega t} \right], \quad (3.67)$$

$$\langle P \rangle(t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[\alpha_0 e^{-i\omega t} - (\alpha_0)^* e^{i\omega t} \right], \quad (3.68)$$

ou seja,

$$\langle Q \rangle(t) = q(t), \quad (3.69)$$

$$\langle P \rangle(t) = p(t). \quad (3.70)$$

Devemos agora fazer com que o valor médio do operador energia:

$$\langle H \rangle = \hbar\omega \langle a^\dagger a \rangle(0) + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3.71)$$

seja igual a \mathcal{H} , dado por (3.54). Como, para o oscilador harmônico clássico, $|\alpha_0|$ é muito maior que zero, vamos desprezar o termo $\frac{\hbar\omega}{2}$, que tem sua origem puramente quântica. Desta forma, para que (3.71) se iguale à energia clássica (3.54), devemos impor que

$$\langle a^\dagger a \rangle(0) = |\alpha_0|^2, \quad (3.72)$$

o que quer dizer:

$$\langle \psi(0) | a^\dagger a | \psi(0) \rangle = |\alpha_0|^2. \quad (3.73)$$

A relação (3.73) juntamente com (3.66), que se traduz em $\langle \psi(0)|a|\psi(0)\rangle = \alpha_0$, são peças fundamentais para que possamos determinar estado $|\psi(0)\rangle$.

Na sequência, definamos um operador $b(\alpha_0)$ como

$$b(\alpha_0) \equiv a - \alpha_0 \quad (3.74)$$

de forma que

$$\begin{aligned} b^\dagger(\alpha_0)b(\alpha_0) &= (a - \alpha_0)^\dagger(a - \alpha_0) = (a^\dagger - \alpha_0^*)(a - \alpha_0) \\ &= a^\dagger a - a^\dagger \alpha_0 - a \alpha_0^* + |\alpha_0|^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Com o resultado (3.75), podemos escrever a norma quadrada do vetor $b(\alpha_0)|\psi(0)\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \psi(0)|b^\dagger(\alpha_0)b(\alpha_0)|\psi(0)\rangle &= \langle \psi(0)|a^\dagger a|\psi(0)\rangle - \alpha_0 \langle \psi(0)|a^\dagger|\psi(0)\rangle - \alpha_0^* \langle \psi(0)|a|\psi(0)\rangle + |\alpha_0|^2 \\ &= |\alpha_0|^2 - \alpha_0 \alpha_0^* - \alpha_0^* \alpha_0 + |\alpha_0|^2 \\ &= |\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^2 + |\alpha_0|^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

ou seja, o vetor $b(\alpha_0)|\psi(0)\rangle$, cuja norma é nula, é um vetor nulo. Dessa forma, pela definição de (3.74), temos

$$b(\alpha_0)|\psi(0)\rangle = (a - \alpha_0)|\psi(0)\rangle = 0. \quad (3.77)$$

Escrevendo este resultado de outra maneira, temos

$$a|\psi(0)\rangle = \alpha_0|\psi(0)\rangle. \quad (3.78)$$

Sendo $|\psi(0)\rangle$ um vetor normalizado, se satisfizer a relação (3.78), as igualdades (3.66) e (3.73) são automaticamente satisfeitas.

O estado quântico que permite reproduzir em todos os instantes o valor médio da posição, momento e energia de um movimento clássico – estado quasi-clássico –, é autovetor do operador a com autovalor α_0 . Denotaremos este autovetor de a pelo seu autovalor α , ou seja, $|\alpha\rangle$, isto é,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.79)$$

O estado $|\alpha\rangle$ é chamado de *estado coerente* e pode ser escrito na base de Fock através da aplicação da relação de completeza $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$. Assim, temos:

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle |n\rangle. \quad (3.80)$$

Aplicando o operador a à esquerda de (3.80), segue que:

$$\begin{aligned}
 a|\alpha\rangle &= a \sum_n \langle n|\alpha\rangle |n\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle a|n\rangle \\
 &= \sum_n \langle n|\alpha\rangle \sqrt{n} |n-1\rangle \\
 &= \alpha \sum_n \langle n|\alpha\rangle |n\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

de onde tiramos a conclusão que

$$\left[\sum_n \langle n+1|\alpha\rangle \sqrt{n+1} - \sum_n \alpha \langle n|\alpha\rangle \right] |n\rangle = 0, \tag{3.82}$$

ou seja,

$$\langle n+1|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} \langle n|\alpha\rangle. \tag{3.83}$$

A relação de recorrência (3.83) possibilita determinar o coeficiente de ordem n , $\langle n|\alpha\rangle$, proporcional ao coeficiente de ordem zero $\langle 0|\alpha\rangle$. Assim, temos que

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle. \tag{3.84}$$

Notemos que se o coeficiente $\langle 0|\alpha\rangle$ for fixado, todos os coeficientes $\langle n|\alpha\rangle$ serão determinados, fazendo assim com que o vetor $|\alpha\rangle$ seja único a menos de um fator multiplicativo. Consideremos então que $\langle n|\alpha\rangle$ seja um número real e positivo, e o estado $|\alpha\rangle$ normalizado; segue assim que:

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha|\alpha\rangle &= \langle n|\sum_n \langle n|\alpha\rangle^* \sum_m \langle m|\alpha\rangle |m\rangle \\
 &= \sum_n \sum_m \langle n|\alpha\rangle^* \langle m|\alpha\rangle \delta_{n,m} \\
 &= \sum_n |\langle n|\alpha\rangle|^2 = 1.
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

E usando o resultado (3.84), podemos determinar o módulo de $\langle 0|\alpha\rangle$. De fato, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_n |\langle n|\alpha\rangle|^2 &= \sum_n \left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle \right|^2 \\
 &= |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha^n|^2}{n!} \\
 &= |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1.
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Lembrando que fixamos $\langle 0|\alpha\rangle$ como um número real e positivo, temos da relação (3.86) que

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}, \tag{3.87}$$

o que permite, finalmente, escrever o *estado coerente* projetado na base de Fock, isto é,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle. \quad (3.88)$$

O resultado (3.88) é muito importante e será amplamente usado nos capítulos seguintes.

4 *Dinâmica de Campos Térmicos aplicada ao estado $|\alpha_n\rangle = |\alpha\rangle + |n\rangle$*

Uma das formas de inserir temperatura em estados bosônicos ou fermiônicos é através da *Dinâmica de Campos Térmicos*, resumida no Capítulo 1. Neste capítulo, iremos estudar o estado $|\alpha_n\rangle = |\alpha\rangle + |n\rangle$, que é um estado bosônico formado pela superposição de outros dois estados de interesse em óptica quântica [7, 35, 39]: o estado coerente $|\alpha\rangle$ e o estado número de Fock $|n\rangle$. Nosso objetivo é estudar os efeitos da temperatura neste estado sob duas perspectivas diferentes no que se diz a respeito à duplicação do espaço de Hilbert; o estado será duplicado não através do produto tensorial deste estado por ele mesmo, e sim considerando cada uma de suas parcelas separadamente. Dedicaremos, portanto, este capítulo para o cálculo das matrizes densidades dependentes da temperatura para cada forma de duplicação dos graus de liberdade do sistema.

4.1 Superposição de Estados Coerentes e Estados Número

Seja um estado que é a superposição do estado coerente $|\alpha\rangle$ com o estado número de Fock $|n\rangle$:

$$|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}}[\sigma|\alpha\rangle + \delta|n\rangle], \quad (4.1)$$

em que, por simplicidade, escolhemos α , σ e δ reais. Usando o fato que $|\alpha_n\rangle$ é um estado normalizado, podemos achar o seu fator de normalização, que é dado por [18]

$$\eta = \sigma^2 + 2\sigma\delta e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} + \delta^2, \quad (4.2)$$

onde escrevemos o estado coerente como uma superposição dos estados de Fock, ou seja,

$$|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \quad (4.3)$$

Para investigarmos a ação da temperatura em $|\alpha_n\rangle$ usando a DCT, será necessária a duplicação do espaço de Hilbert, que se dá, no caso geral, através do produto tensorial

$$|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}_n\rangle. \quad (4.4)$$

Neste trabalho, no entanto, vamos trabalhar, como etapas para o tratamento geral, com subespaços do espaço de Hilbert formado pelo produto tensorial (4.4). Especificamente, trataremos de dois casos: (i) $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$ e (ii) $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}\rangle$. Desta forma, pretendemos compreender como cada um dos casos contribui numa formulação geral.

4.2 Duplicação do espaço de Hilbert

Como explicado na seção 4.1, iremos analisar a influência da temperatura em $|\alpha_n\rangle$ considerando os produtos tensoriais de $|\alpha_n\rangle$ por $|\tilde{\alpha}\rangle$ e de $|\alpha_n\rangle$ por $|\tilde{n}\rangle$, separadamente. Em seguida calcularemos suas respectivas matrizes densidade e funções de Wigner. Iniciaremos o estudo com o caso $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$.

4.2.1 Duplicação do espaço de Hilbert através de $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$

Expandindo o estado coerente na base de Fock, o estado (4.1) é descrito como:

$$\begin{aligned} |\alpha_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\eta}} [\sigma|\alpha\rangle + \delta|n\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle + \delta|n\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Considerando o produto $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$, temos:

$$\begin{aligned} |\alpha_n, \tilde{n}\rangle &\equiv |\alpha_n\rangle_n = |\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}} [\sigma|\alpha\rangle + \delta|n\rangle] \otimes |\tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\eta}} [\sigma|\alpha, \tilde{n}\rangle + \delta|n, \tilde{n}\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m, \tilde{n}\rangle + \delta|n, \tilde{n}\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizaremos a notação $|\alpha_n\rangle_n$, onde o subíndice do ket indica a duplicação com o dual $|\tilde{n}\rangle$.

Feita a duplicação do estado $|\alpha_n\rangle$ como descrito acima, teremos um espaço vetorial em que os elementos de sua base são parte da base do espaço de Hilbert, quando duplicado com seu estado dual completo.

Para inserir a temperatura em (4.6), como visto no primeiro capítulo, é preciso aplicar a transformação unitária chamada transformação de Bogoliubov a $|\alpha_n\rangle_n$.

4.2.2 Inserção da temperatura no estado $|\alpha_n\rangle_n$

Seja $U(\beta)$ a transformação de Bogoliubov. Então, de (4.6), segue que

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\beta)\rangle_n &\equiv U(\beta)|\alpha_n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m, \tilde{n}; \beta\rangle + \delta |n, \tilde{n}; \beta\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Reescrevendo os vetores da base de (4.7) a partir do estado de vácuo térmico, temos

$$|m, \tilde{n}; \beta\rangle = \frac{[a^\dagger(\beta)]^m [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle, \quad (4.8)$$

$$|n, \tilde{n}; \beta\rangle = \frac{[a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!} \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle. \quad (4.9)$$

Assim, o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$ toma a forma

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\beta)\rangle_n &= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{[a^\dagger(\beta)]^m [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \right. \\ &\quad \left. + \delta \frac{[a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!} \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Desta maneira, temos o estado (4.7) descrito em termos do vácuo termalizado.

Na seção seguinte, a partir da média de um operador \mathcal{A} , $\text{Tr}[\rho_\beta \mathcal{A}]$, calcularemos a matriz densidade associada ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$. Para tanto, os operadores de criação térmicos serão escritos em termos dos operadores de criação não-térmicos.

4.3 Cálculo do operador densidade associado ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$

4.3.1 A média de um operador \mathcal{A} usando o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$

Consideremos um operador \mathcal{A} . Sua média será expressa por ${}_n\langle\alpha_n(\beta)|\mathcal{A}|\alpha_n(\beta)\rangle_n$. Então:

$$\begin{aligned}
{}_n\langle\alpha_n(\beta)|\mathcal{A}|\alpha_n(\beta)\rangle_n &= \frac{1}{\eta} [\sigma\langle\alpha, \tilde{n}; \beta| + \delta\langle n, \tilde{n}; \beta|] \mathcal{A} [\sigma|\alpha, \tilde{n}; \beta\rangle + \delta|n, \tilde{n}; \beta\rangle] \\
&= \frac{1}{\eta} \left[\sigma^2\langle\alpha, \tilde{n}; \beta|\mathcal{A}|\alpha, \tilde{n}; \beta\rangle + \sigma\delta\langle n, \tilde{n}; \beta|\mathcal{A}|\alpha, \tilde{n}; \beta\rangle \right. \\
&\quad \left. + \sigma\delta\langle\alpha, \tilde{n}; \beta|\mathcal{A}|n, \tilde{n}; \beta\rangle + \delta^2\langle n, \tilde{n}; \beta|\mathcal{A}|n, \tilde{n}; \beta\rangle \right], \tag{4.11}
\end{aligned}$$

ou, se definirmos $\bar{\mathcal{A}}_n \equiv {}_n\langle\alpha_n(\beta)|\mathcal{A}|\alpha_n(\beta)\rangle_n$, podemos escrever (4.11) como

$$\bar{\mathcal{A}}_n = \frac{1}{\eta} \left[\sigma^2 \bar{\mathcal{A}}_n^{\alpha, \alpha} + \sigma\delta \bar{\mathcal{A}}_n^{n, \alpha} + \sigma\delta \bar{\mathcal{A}}_n^{\alpha, n} + \delta^2 \bar{\mathcal{A}}_n^{n, n} \right], \tag{4.12}$$

onde $\bar{A}_n^{\mu, \nu} \equiv {}_n\langle\mu, \tilde{n}; \beta|\mathcal{A}|\nu, \tilde{n}; \beta\rangle_n$.

Antes, porém, de escrevermos a média do operador \mathcal{A} como $\text{Tr}[\rho_\beta \mathcal{A}]$, onde ρ_β é o operador densidade associado ao estado de vácuo, é conveniente expressarmos a base de $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$ como uma aplicação sucessiva dos operadores criação não térmicos.

4.3.2 A base de $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$ descrita através de operadores de criação não térmicos

Vamos escrever os estados $|m, \tilde{n}; \beta\rangle$ e $|n, \tilde{n}; \beta\rangle$, considerando os operadores termalizados $a^\dagger(\beta)$ e $\tilde{a}^\dagger(\beta)$ em termos dos não-termalizados, a e a^\dagger . Pode-se mostrar que [22]

$$[a^\dagger(\beta)]^n |0(\beta)\rangle = \frac{[a^\dagger]^n}{[u(\beta)]^n} |0(\beta)\rangle, \tag{4.13}$$

$$[\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n |0(\beta)\rangle = \frac{[a]^n}{[v(\beta)]^n} |0(\beta)\rangle. \tag{4.14}$$

temos,

$$\begin{aligned}
|m, \tilde{n}; \beta\rangle &= \frac{[a^\dagger(\beta)]^m [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \\
&= \frac{[a^\dagger(\beta)]^m a^n}{\sqrt{m!} [v(\beta)]^n \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \\
&= \frac{1}{[v(\beta)]^n} \frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} a^{n-i} [a^\dagger(\beta)]^{m-i} [u(\beta)]^i |0(\beta)\rangle \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{[u(\beta)]^i a^{n-i} [a^\dagger(\beta)]^{m-i}}{[v(\beta)]^n \sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0(\beta)\rangle \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{[u(\beta)]^i a^{n-i}}{[v(\beta)]^n \sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{[a^\dagger]^{m-i}}{[u(\beta)]^{m-i}} |0(\beta)\rangle \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{m-i}}{\sqrt{m!}} |0(\beta)\rangle, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

onde usamos que, conforme o Apêndice A, se temos a relação de comutação $[a, a^\dagger(\beta)] = -u(\beta)$, podemos escrever

$$[a^\dagger]^m [a^\dagger(\beta)]^n = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} a^{n-i} [a^\dagger(\beta)]^{m-i} [u(\beta)]^i,$$

com

$$\mathcal{C}_i^{\mu,\nu} = (-1)^i \frac{\mu!}{(\mu-i)! i!} \frac{\nu!}{(\nu-i)!} = (-1)^i \binom{\mu}{i} \frac{\nu!}{(\nu-i)!}. \quad (4.16)$$

É importante observarmos que temos que respeitar a ordem dos sobreíndices μ e ν de $\mathcal{C}_i^{\mu,\nu}$ em (4.16), de forma que o primeiro está ligado ao termo binomial e o segundo está ligado ao termo $\frac{\nu!}{(\nu-i)!}$.

Repetindo o processo para $|n, \tilde{n}; \beta\rangle$, temos

$$\begin{aligned} |n, \tilde{n}; \beta\rangle &= \frac{[a^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} \frac{[\tilde{a}^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{[a^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} \frac{a^n}{[v(\beta)]^n \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{[v(\beta)]^n} \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} a^{n-i} [a^\dagger(\beta)]^{n-i} [u(\beta)]^i |0(\beta)\rangle \\ &= \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{[u(\beta)]^i}{[v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{[u(\beta)]^{n-i}} |0(\beta)\rangle \\ &= \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle, \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são operadores, então o adjunto de \mathcal{AB} será dado por $(\mathcal{AB})^\dagger = \mathcal{B}^\dagger \mathcal{A}^\dagger$; assim,

podemos expressar os estados duais (4.15) e (4.17) como

$$\langle m, \tilde{n}; \beta | = \langle 0(\beta) | \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{m-i}}{\sqrt{m!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}},$$

$$\langle n, \tilde{n}; \beta | = \langle 0(\beta) | \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}}. \quad (4.18)$$

É conveniente que tenhamos explicitamente a forma de $|\alpha, \tilde{n}; \beta\rangle$, $|n, \tilde{n}; \beta\rangle$, $\langle \alpha, \tilde{n}; \beta|$ e $\langle n, \tilde{n}; \beta|$ em termos de (4.15), (4.16) e (4.17). Segue que

$$|\alpha, \tilde{n}; \beta\rangle = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{m-i}}{\sqrt{m!}} |0(\beta)\rangle$$

$$|n, \tilde{n}; \beta\rangle = \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle, \quad (4.19)$$

$$\langle \alpha, \tilde{n}; \beta | = \langle 0(\beta) | e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{m-i}}{\sqrt{m!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}},$$

$$\langle n, \tilde{n}; \beta | = \langle 0(\beta) | \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}}. \quad (4.20)$$

Com esses resultados, determinaremos o operador densidade associado ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$ considerando as equações (4.16) e (4.19)–(4.20).

4.3.3 Cálculo do operador densidade associado ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,\alpha}$

Calculemos (4.11) por partes. Iniciemos com o termo $\sigma^2 \langle \alpha, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{n}; \beta \rangle$. Usando (4.19) e (4.20) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\eta} \bar{\mathcal{A}}_n^{\alpha,\alpha} &= \frac{\sigma^2}{\eta} \langle 0(\beta) | e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{m-i} [a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} \mathcal{A} \\
&\times e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,m'}}^{m' \geq n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m'} \mathcal{C}_j^{m',n}}_{m' < n} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m'-2j} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-j} [a^\dagger]^{m'-j}}{\sqrt{n!} \sqrt{m'!}} |0(\beta)\rangle \\
&= Tr \left[\rho_\beta \left(\frac{\sigma^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', n; \beta)_n a^{m-i} a^{\dagger n-i} \mathcal{A} a^{n-j} a^{\dagger m'-j} \right) \right], \\
&= Tr \left[\left(\frac{\sigma^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', n; \beta)_n a^{n-j} a^{\dagger m'-j} \rho_\beta a^{m-i} a^{\dagger n-i} \right) \mathcal{A} \right], \quad (4.21)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', n; \beta)_n \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,m'}}^{m' \geq n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m'} \mathcal{C}_j^{m',n}}_{m' < n} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m+m'}}{m! m'! n!} \frac{1}{[u(\beta)]^{m+m'-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}}, \quad (4.22)$$

e foi utilizado a propriedade cíclica do traço, ou seja,

$$Tr[\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}] = Tr[\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{A}] = Tr[\mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}],$$

em que \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} são operadores.

De (4.21), concluímos que, como o operador densidade ρ_β é dado por

$$\rho_\beta = \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right)^r |r\rangle\langle r|, \quad (4.23)$$

podemos expressar $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,\alpha}$ ¹ relativo ao termo $\sigma^2 \langle \alpha, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{n}; \beta \rangle$, como

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,\alpha} &= \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', n; \beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \\ &\quad \times a^{n-j} a^{\dagger m'-j} |r\rangle\langle r| a^{m-i} a^{\dagger n-i} \\ &= \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', n; \beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \\ &\quad \times \frac{(r + m' - j)!}{\sqrt{r!(r + m' - n)!}} |r + m' - n\rangle\langle r + m - n| \frac{(r + m - i)!}{\sqrt{r!(r + m - n)!}}; \quad \begin{cases} r \geq n - m \\ r \geq n - m' \end{cases} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $a^{n-j} a^{\dagger m'-j} |r\rangle\langle r| a^{m-i} a^{\dagger n-i}$ foi calculado utilizando as relações (3.33–3.34) e suas respectivas relações conjugadas.

Como os coeficientes $\mathcal{C}_\kappa^{\mu,\nu}$ e $\mathcal{C}_\kappa^{\nu,\mu}$ são iguais, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\kappa^{\mu,\nu} &= (-1)^\kappa \frac{\mu!}{\kappa!(\mu - \kappa)!} \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!} \\ &= (-1)^\kappa \frac{\mu!}{(\mu - \kappa)!} \frac{\nu!}{\kappa!(\nu - \kappa)!} \\ &= (-1)^\kappa \frac{\nu!}{\kappa!(\nu - \kappa)!} \frac{\mu!}{(\mu - \kappa)!} = \mathcal{C}_\kappa^{\nu,\mu}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

¹ Neste ponto é importante esclarecermos a notação. Tendo em vista a equação (4.12), e que o traço de uma soma de matrizes é igual à soma dos traços de cada matriz, ou seja, $Tr[\mathcal{A} + \mathcal{B}] = Tr[\mathcal{A}] + Tr[\mathcal{B}]$, onde \mathcal{A} e \mathcal{B} são matrizes, podemos concluir que a matriz densidade associada ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$ é desmembrada em quatro parcelas, cada uma associada aos termos $\bar{\mathcal{A}}_n^{\mu,\nu} = {}_n \langle \mu, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \nu, \tilde{n}; \beta \rangle_n = Tr[\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\mu,\nu} \mathcal{A}]$, onde $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\mu,\nu}$, na nossa notação, é a matriz densidade associada ao termo $\bar{\mathcal{A}}_n^{\mu,\nu}$, a menos de suas constantes multiplicativas, conforme a equação (4.12).

podemos escrever (4.22) como

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m,m',n;\beta)_n \equiv \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n} \\ n} \\ \sum_{i=0}^m \\ \underbrace{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m' \geq n} \\ n} \\ \sum_{j=0}^{m'} \\ \underbrace{m' < n} \end{array} \right\} C_i^{m,n} C_j^{m',n} \frac{\alpha^{m+m'}}{m!m'!n!} \frac{1}{[u(\beta)]^{m+m'-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}}, \quad (4.26)$$

Se usarmos os valores de (4.16) e (4.26) em (4.24), encontraremos a forma final para $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,\alpha}$, dada por

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,\alpha} &= \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n} \\ n} \\ \sum_{i=0}^m \\ \underbrace{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m' \geq n} \\ n} \\ \sum_{j=0}^{m'} \\ \underbrace{m' < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'}}{r!i!j!} \\ &\times \frac{n!(r+m'-j)!(r+m-i)!}{(m-i)!(m'-j)!(n-i)!(n-j)!} \frac{1}{\sqrt{(r+m'-n)!(r+m-n)!}} \\ &\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+m'-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r |r+m'-n\rangle \langle r+m-n|; \quad \begin{cases} r \geq n-m \\ r \geq n-m' \end{cases} \quad (4.27) \end{aligned}$$

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,\alpha}$

Repiremos o processo para o termo $\frac{\sigma\delta}{\eta}\langle n, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{n}; \beta \rangle$. Com a ajuda de (4.19) e (4.20) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma\delta}{\eta}\bar{\mathcal{A}}_n^{n,\alpha} &= \frac{\sigma\delta}{\eta}\langle 0(\beta) | \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i}[v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}} \mathcal{A} \\
&\quad \times e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m \mathcal{C}_j^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2j}[v(\beta)]^n} \frac{a^{n-j}}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{m-j}}{\sqrt{m!}} |0(\beta)\rangle \\
&= Tr \left[\rho_\beta \left(\frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(n, m; \beta)_n a^{n-i} a^{\dagger n-i} \mathcal{A} a^{n-j} a^{\dagger m-j} \right) \right] \\
&= Tr \left[\left(\frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(n, m; \beta)_n a^{n-j} a^{\dagger m-j} \rho_\beta a^{n-i} a^{\dagger n-i} \right) \mathcal{A} \right], \quad (4.28)
\end{aligned}$$

onde foi definido

$$\mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(n, m; \beta)_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m \mathcal{C}_j^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{\alpha^m}{n! \sqrt{n!} m!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}}, \quad (4.29)$$

ou usando a propriedade (4.25), temos:

$$\mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(n, m; \beta)_n = \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,m}}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m \mathcal{C}_j^{m,n}}_{m < n} \end{array} \right\} \mathcal{C}_i^{n,n} \mathcal{C}_j^{m,n} \frac{\alpha^m}{n! \sqrt{n!} m!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}}, \quad (4.30)$$

segue então que:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,\alpha} = \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(n,m;\beta)_n a^{n-j} a^{\dagger m-j} \rho_{\beta} a^{n-i} a^{\dagger n-i}. \quad (4.31)$$

Se usarmos (4.23), temos

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,\alpha} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(n,m;\beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r a^{n-j} a^{\dagger m-j} |r\rangle \langle r| a^{n-i} a^{\dagger n-i} \\ &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(n,m;\beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{(r+m-j)!}{\sqrt{r!(r+m-n)!}} \\ &\quad \times \frac{(r+n-i)!}{\sqrt{r!(r+n-n)!}} |r+m-n\rangle \langle r| \quad ; \quad r \geq n-m. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Substituindo os valores (4.16) e (4.30) em (4.32), temos então

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,\alpha} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\sum_{j=0}^n}^{m \geq n} \\ \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < n} \end{matrix} \right\} (-1)^{i+j} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{r! i! j! \sqrt{r!(r+m-n)!}} \\ &\quad \times \frac{(r+m-j)!(r+n-i)!}{[(n-i)!]^2 (n-j)!(m-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \\ &\quad \times |r+m-n\rangle \langle r| \quad ; \quad r \geq n-m. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,n}$

Seguiremos o cálculo com o termo $\frac{\sigma\delta}{\eta}\langle\alpha,\tilde{n};\beta|\mathcal{A}|n,\tilde{n};\beta\rangle$. Recorrendo a (4.19) e (4.20), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma\delta}{\eta}\bar{\mathcal{A}}^{\alpha,n} &= \frac{\sigma\delta}{\eta}\langle 0(\beta)|e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m\geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m<n} \end{array}\right\}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i}[v(\beta)]^n}\frac{a^{m-i}}{\sqrt{m!}}\frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}}\mathcal{A} \\
&\times\sum_{j=0}^n\mathcal{C}_j^{n,n}\frac{1}{[u(\beta)]^{n-2j}[v(\beta)]^n}\frac{a^{n-j}}{\sqrt{n!}}\frac{[a^\dagger]^{n-j}}{\sqrt{n!}}|0(\beta)\rangle \\
&= Tr\left[\rho_\beta\left(\frac{\sigma\delta}{\eta}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,n;\beta)_n a^{m-i}a^{\dagger n-i}\mathcal{A}a^{n-j}a^{\dagger n-j}\right)\right] \\
&= Tr\left[\left(\frac{\sigma\delta}{\eta}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,n;\beta)_n a^{n-j}a^{\dagger n-j}\rho_\beta a^{m-i}a^{\dagger n-i}\right)\mathcal{A}\right], \quad (4.34)
\end{aligned}$$

onde foi definido

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,n;\beta)_n \equiv \sum_{j=0}^n\left\{\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m\geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m<n} \end{array}\right\}\mathcal{C}_j^{n,n}\frac{\alpha^m}{m!n!\sqrt{n!}}\frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)}[v(\beta)]^{2n}}, \quad (4.35)$$

ou usando (4.25)

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,n;\beta)_n = \sum_{j=0}^n\left\{\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,m}}^{m\geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,n}}_{m<n} \end{array}\right\}\mathcal{C}_i^{m,n}\mathcal{C}_j^{n,n}\frac{\alpha^m}{m!n!\sqrt{n!}}\frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)}[v(\beta)]^{2n}}. \quad (4.36)$$

De (4.34) encontramos que

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,n} = \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,n;\beta)_n a^{n-j} a^{\dagger n-j} \rho_{\beta} a^{m-i} a^{\dagger n-i}, \quad (4.37)$$

ou, com ajuda de (4.23)

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,n} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,n;\beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{(r+n-j)!}{\sqrt{r!(r+n-n)!}} \\ &\times \frac{(r+m-i)!}{\sqrt{r!(r+m-n)!}} |r+n-n\rangle \langle r+m-n| \quad ; \quad r \geq n-m. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Substituindo (4.16) e (4.36) em (4.38), temos

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,n} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^m}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{r! i! j!} \frac{1}{\sqrt{r!(r+m-n)!}} \\ &\times \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{(n-i)![(n-j)!]^2(m-i)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \\ &\times |r\rangle \langle r+m-n| \quad ; \quad r \geq n-m \end{aligned} \quad (4.39)$$

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,n}$

Finalmente, calcularemos o termo $\frac{\delta^2}{\eta} \langle n, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{n}; \beta \rangle$. Com ajuda de (4.19) e (4.20), temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\eta} \bar{\mathcal{A}}^{n,n} &= \frac{\delta^2}{\eta} \langle 0(\beta) | \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-i} [a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!} \sqrt{n!}} \mathcal{A} \\ &\times \sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,n} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2j} [v(\beta)]^n} \frac{a^{n-j} [a^\dagger]^{n-j}}{\sqrt{n!} \sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \\ &= Tr \left[\rho_{\beta} \left(\frac{\delta^2}{\eta} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(n;\beta)_n a^{n-i} a^{\dagger n-i} \mathcal{A} a^{n-j} a^{\dagger n-j} \right) \right] \\ &= Tr \left[\left(\frac{\delta^2}{\eta} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(n;\beta)_n a^{n-j} a^{\dagger n-j} \rho_{\beta} a^{n-i} a^{\dagger n-i} \right) \mathcal{A} \right], \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde definimos

$$\mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(n;\beta)_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathcal{C}_i^{n,n} \mathcal{C}_j^{n,n} \frac{1}{[n!]^2} \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{2n}}, \quad (4.41)$$

de forma que:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,n} = \frac{\delta^2}{\eta} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(n;\beta)_n a^{n-j} a^{\dagger n-j} \rho_{\beta} a^{n-i} a^{\dagger n-i}, \quad (4.42)$$

ou, usando (4.23):

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,n} &= \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(n;\beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r a^{n-j} a^{\dagger n-j} |r\rangle \langle r| a^{n-i} a^{\dagger n-i} \\ &= \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(n;\beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{(r+n-j)!}{\sqrt{r!(r+n-n)!}} \frac{(r+n-i)!}{\sqrt{r!(r+n-n)!}} |r\rangle \langle r| \\ &= \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(n;\beta)_n \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{(r+n-j)!(r+n-i)!}{[r!]^2} |r\rangle \langle r|. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Usando (4.16) e (4.41), finalmente teremos:

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,n} &= \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{i!j!} \\ &\quad \times \left[\frac{n!}{r!(n-i)!(n-j)!} \right]^2 \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r |r\rangle \langle r|. \end{aligned} \quad (4.44)$$

O operador densidade associado ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$ é a soma das parcelas (4.24), (4.33), (4.39) e (4.44) calculadas acima, isto é,

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n} = \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,\alpha} + \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,\alpha} + \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,n} + \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,n}, \quad (4.45)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n} &= \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n}^n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{m' \geq n}^n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m'}_{m' < n}} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'}}{r!i!j!} \\
&\times \frac{n!(r+m'-j)!(r+m-i)!}{(m-i)!(m'-j)!(n-i)!(n-j)!} \frac{1}{\sqrt{(r+m'-n)!(r+m-n)!}} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+m'-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r |r+m'-n\rangle \langle r+m-n| \\
&+ \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{m \geq n}^n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{r!i!j! \sqrt{r!(r+m-n)!}} \\
&\times \frac{(r+m-j)!(r+n-i)!}{[(n-i)!]^2 (n-j)!(m-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \\
&\times |r+m-n\rangle \langle r|
\end{aligned}$$

(4.46)

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^n}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{r! i! j!} \frac{1}{\sqrt{r!(r+m-n)!}} \\
& \times \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{(n-i)![(n-j)!]^2(m-i)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \\
& \times |r\rangle \langle r+m-n| \\
& + \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{i! j!} \\
& \times \left[\frac{n!}{r!(n-i)!(n-j)!} \right]^2 \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r |r\rangle \langle r|. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

onde o resultado acima vale para $r \geq n - m$ e $r \geq n - m'$ para a primeira parcela, $r \geq n - m$ para a segunda e terceira parcelas, e para todo r para a última parcela.

Na próxima seção, iremos calcular o operador densidade para a forma de duplicação dos graus de liberdade que considera o produto tensorial por $|\alpha_n\rangle$.

4.4 Cálculo da matriz densidade associada ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$

Nesta seção, consideremos o estado resultante do produto tensorial $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}\rangle$.

4.4.1 Duplicação do espaço de Hilbert através de $|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}\rangle$

Para calcularmos a matriz densidade associada ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ devemos seguir os mesmos passos usados para o cálculo da matriz densidade associada ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$, apresentados na seção anterior. Neste caso, no entanto, a duplicação do espaço de Hilbert é feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
|\alpha_n\rangle_\alpha &= |\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}} [\sigma|\alpha\rangle + \delta|n\rangle] \otimes |\tilde{\alpha}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta}} [\sigma|\alpha, \tilde{\alpha}\rangle + \delta|n, \tilde{\alpha}\rangle] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m'}}{\sqrt{m'!}} |m, \tilde{m}'\rangle + \delta e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} |n, \tilde{\nu}\rangle \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'!}} |m, \tilde{m}'\rangle + \delta e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} |n, \tilde{\nu}\rangle \right], \quad (4.48)
\end{aligned}$$

onde a notação $|\alpha_n\rangle_\alpha$ indica que a duplicação dos graus de liberdade de (4.1) foi feita através do produto tensorial de $|\alpha_n\rangle$ com o dual $|\tilde{\alpha}\rangle$.

Assim como na seção anterior, utilizaremos a transformação de Bogoliubov para inserir a temperatura em (4.48).

4.4.2 Inserção de temperatura em $|\alpha_n\rangle_\alpha$

Aplicaremos $U(\beta)$ a (4.48), de modo que

$$\begin{aligned}
U(\beta)|\alpha_n\rangle_\alpha &\equiv |\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'!}} U(\beta)|m, \tilde{m}'\rangle + \delta e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} U(\beta)|n, \tilde{\nu}\rangle \right], \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'!}} |m, \tilde{m}'; \beta\rangle + \delta e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} |n, \tilde{\nu}; \beta\rangle \right], \quad (4.49)
\end{aligned}$$

onde os estados $|m, \tilde{m}'; \beta\rangle$ e $|n, \tilde{\nu}; \beta\rangle$ podem ser escritos como

$$|m, \tilde{m}'; \beta\rangle = \frac{[a^\dagger(\beta)]^m [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^{m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} |0(\beta)\rangle, \quad (4.50)$$

e

$$|n, \tilde{\nu}; \beta\rangle = \frac{[a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^\nu}{\sqrt{n!} \sqrt{\nu!}} |0(\beta)\rangle, \quad (4.51)$$

de tal forma que podemos escrever $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ como

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha = & \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\sigma e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'!}} \frac{[a^\dagger(\beta)]^m [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^{m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} |0(\beta)\rangle \right. \\ & \left. + \delta e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} \frac{[a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^\nu}{\sqrt{n!} \sqrt{\nu!}} |0(\beta)\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Da mesma maneira que foi feito para $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$, escreveremos os operadores de criação térmicos em função dos não térmicos em (4.50) e (4.51).

4.4.3 A base de $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ como aplicações sucessivas dos operadores de criação não-térmicos

Vamos expressar os estados $|m, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$ e $|n, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$, levando em conta os operadores $a^\dagger(\beta)$ e $\tilde{a}^\dagger(\beta)$ em termos dos não-termalizados a^\dagger e \tilde{a}^\dagger . Usando (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{aligned} |m, \tilde{m}'; \beta\rangle &= \frac{[a^\dagger(\beta)]^m [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^{m'}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}} |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{[a^\dagger(\beta)]^m}{\sqrt{m!}} \frac{a^{m'}}{[v(\beta)]^{m'} \sqrt{m'!}} |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{[v(\beta)]^{m'}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{1}{\sqrt{m'!}} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \mathcal{C}_i^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} a^{m'-i} [a^\dagger(\beta)]^{m-i} [u(\beta)]^i |0(\beta)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \mathcal{C}_i^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right) \left\{ \frac{[u(\beta)]^i a^{m'-i} [a^\dagger(\beta)]^{m-i}}{[v(\beta)]^{m'} \sqrt{m'}! \sqrt{m!}} |0(\beta)\rangle \right. \\
&= \left(\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \mathcal{C}_i^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right) \left\{ \frac{[u(\beta)]^i a^{m'-i} 1 [a^\dagger]^{m-i}}{[v(\beta)]^{m'} \sqrt{m'}! \sqrt{m!} [u(\beta)]^{m-i}} |0(\beta)\rangle \right. \\
&= \left(\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \mathcal{C}_i^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right) \left\{ \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^{m'}} \frac{a^{m'-i} [a^\dagger]^{m-i}}{\sqrt{m'}! \sqrt{m!}} |0(\beta)\rangle, \right. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

onde foi usada a relação (4.16).

Para o estado $|n, \nu; \beta\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
|n, \tilde{\nu}; \beta\rangle &= \frac{[a^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} \frac{[\tilde{a}^\dagger(\beta)]^\nu}{\sqrt{\nu!}} |0(\beta)\rangle \\
&= \frac{[a^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} \frac{a^\nu}{[v(\beta)]^\nu \sqrt{\nu!}} |0(\beta)\rangle \\
&= \frac{1}{[v(\beta)]^\nu} \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{\nu!}} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu, n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n, \nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} a^{\nu-i} [a^\dagger(\beta)]^{n-i} [u(\beta)]^i |0(\beta)\rangle \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu, n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n, \nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \frac{[u(\beta)]^i}{[v(\beta)]^\nu} \frac{a^{\nu-i}}{\sqrt{\nu!}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{[u(\beta)]^{n-i}} |0(\beta)\rangle \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu, n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n, \nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^\nu} \frac{a^{\nu-i}}{\sqrt{\nu!}} \frac{[a^\dagger]^{n-i}}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle \right\}. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, seus respectivos estados duais são escritos como

$$\langle n, \tilde{\nu}; \beta | = \langle 0(\beta) | \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} C_i^{\nu, n}}^{n \geq \nu} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n C_i^{n, \nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^{\nu}} \frac{a^{n-i} [a^{\dagger}]^{\nu-i}}{\sqrt{n!} \sqrt{\nu!}}, \quad (4.55)$$

$$\langle m, \tilde{m}'; \beta | = \langle 0(\beta) | \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} C_i^{m', m}}^{m \geq m'} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m C_i^{m, m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^{m'}} \frac{a^{m-i} [a^{\dagger}]^{m'-i}}{\sqrt{m!} \sqrt{m'!}}. \quad (4.56)$$

Definindo $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$, $|n, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$, $\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta|$, e $\langle n, \tilde{\alpha}; \beta|$ em termos de (4.53)–(4.56), temos

$$\begin{aligned} |\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle &\equiv e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'!}} |m, \tilde{m}'; \beta\rangle \\ &= e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} C_i^{m', m}}^{m \geq m'} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m C_i^{m, m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m+m'}}{m!m'!} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^{m'}} a^{m'-i} [a^{\dagger}]^{m-i} |0(\beta)\rangle, \quad (4.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|n, \tilde{\alpha}; \beta\rangle &\equiv e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} |n, \tilde{\nu}; \beta\rangle \\
&= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu, n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n, \nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \frac{\alpha^\nu}{\nu! \sqrt{n!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^\nu} a^{\nu-i} [a^\dagger]^{n-i} |0(\beta)\rangle, \quad (4.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | &\equiv \langle m, \tilde{m}'; \beta | e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+m'}}{\sqrt{m!m'}} \\
&= \langle 0(\beta) | e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \mathcal{C}_i^{m', m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m, m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m+m'}}{m!m'} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^{m'}} a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i}, \quad (4.59)
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle n, \tilde{\alpha}; \beta | &\equiv \langle n, \tilde{\nu}; \beta | e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} \\
&= \langle 0(\beta) | e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu, n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n, \nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \frac{\alpha^\nu}{\nu! \sqrt{n!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^\nu} a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i}. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

4.4.4 A média do operador \mathcal{A} usando o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$

A média do operador \mathcal{A} no estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ é expressa como:

$$\begin{aligned} {}_\alpha\langle\alpha_n(\beta)|\mathcal{A}|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha &= \frac{1}{\eta} [\sigma\langle\alpha, \tilde{\alpha}; \beta| + \delta\langle n, \tilde{\alpha}; \beta|] \mathcal{A} [\sigma|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle + \delta|n, \tilde{\alpha}; \beta\rangle] \\ &= \frac{1}{\eta} [\sigma^2\langle\alpha, \tilde{\alpha}; \beta|\mathcal{A}|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle + \sigma\delta\langle\alpha, \tilde{\alpha}; \beta|\mathcal{A}|n, \tilde{\alpha}; \beta\rangle \\ &\quad + \sigma\delta\langle n, \tilde{\alpha}; \beta|\mathcal{A}|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle + \delta^2\langle n, \tilde{\alpha}; \beta|\mathcal{A}|n, \tilde{\alpha}; \beta\rangle], \end{aligned} \quad (4.61)$$

ou se definirmos $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ como $\bar{\mathcal{A}}_\alpha \equiv {}_\alpha\langle\alpha_n(\beta)|\mathcal{A}|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$, podemos simplificar a notação escrevendo (4.61) como

$$\bar{\mathcal{A}}_\alpha = \frac{1}{\eta} [\sigma^2\bar{\mathcal{A}}_\alpha^{\alpha,\alpha} + \sigma\delta\bar{\mathcal{A}}_\alpha^{\alpha,n} + \sigma\delta\bar{\mathcal{A}}_\alpha^{n,\alpha} + \delta^2\bar{\mathcal{A}}_\alpha^{n,n}], \quad (4.62)$$

onde $\bar{\mathcal{A}}_\alpha^{\nu,\mu} = {}_\alpha\langle\nu, \tilde{\alpha}; \beta|\mathcal{A}|\mu, \tilde{\alpha}; \beta\rangle_\alpha$.

Desenvolvendo o cálculo necessário para determinar as parcelas de $\rho_{|\alpha(\beta)\rangle_\alpha}$, obtemos:

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,\alpha}$

Recorrendo às equações (4.57) e (4.59), temos

$$\frac{\sigma^2}{\eta} \bar{\mathcal{A}}_\alpha^{\alpha,\alpha} = \frac{\sigma^2}{\eta} \langle 0(\beta) | e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \mathcal{C}_i^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m+m'}}{m!m'!} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i} [v(\beta)]^{m'}} a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i} \mathcal{A} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{k'} \mathcal{C}_j^{k',\kappa}}^{\kappa \geq k'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{\kappa} \mathcal{C}_j^{\kappa, k'}}_{\kappa < k'} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{k+k'}}{k!k'} \frac{1}{[u(\beta)]^{k-2j} [v(\beta)]^{k'}} a^{k'-j} [a^\dagger]^{k-j} |0(\beta)\rangle \\
& = \text{Tr} \left[\rho_\beta \left(\frac{\sigma^2}{\eta} e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', k, k'; \beta)_\alpha a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \mathcal{A} a^{k'-j} [a^\dagger]^{k-j} \right) \right], \tag{4.64}
\end{aligned}$$

e utilizando a propriedade cíclica do traço, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\eta} \bar{\mathcal{A}}_\alpha^{\alpha,\alpha} & = \text{Tr} \left[\left(\frac{\sigma^2}{\eta} e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', k, k'; \beta)_\alpha a^{k'-j} [a^\dagger]^{k-j} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \rho_\beta a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i} \right) \mathcal{A} \right], \tag{4.65}
\end{aligned}$$

onde foi definido

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', k, k'; \beta)_\alpha & \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \mathcal{C}_i^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{k'} \mathcal{C}_j^{k',\kappa}}^{\kappa \geq k'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{\kappa} \mathcal{C}_j^{\kappa, k'}}_{\kappa < k'} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m+m'+k+k'}}{m!m'!k!k'} \\
& \times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+k-2(i+j)} [v(\beta)]^{m'+k'}}. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

ou usando (4.25),

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m,m',k,k';\beta)_\alpha \equiv \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'} \\ m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \\ m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa \geq \kappa'} \\ \kappa'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^\kappa \\ \kappa < \kappa'} \end{array} \right\} \mathcal{C}_i^{m,m'} \mathcal{C}_j^{\kappa,\kappa'} \frac{\alpha^{m+m'+k+k'}}{m!m'!k!k'!} \\ \times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+k-2(i+j)} [v(\beta)]^{m'+k'}}. \quad (4.67)$$

Da equação (4.65) podemos determinar a parcela da matriz densidade correspondente ao termo $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,\alpha}$, ou seja,

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,\alpha} = \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-2\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m,m',k,k';\beta)_\alpha a^{k'-j} [a^\dagger]^{k-j} \rho_\beta a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i}. \quad (4.68)$$

E usando (4.23), segue que

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,\alpha} = \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-2\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m,m',k,k';\beta)_\alpha \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \\ \times a^{k'-j} [a^\dagger]^{k-j} |r\rangle \langle r| a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i} \\ = \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-2\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m,m',k,k';\beta)_\alpha \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \\ \times \frac{(r+m-i)!(r+k-j)!}{r! \sqrt{(r+m-m')!(r+k-k')!}} |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'|. \quad (4.69)$$

Segue que a expressão acima assume valores não nulos apenas para

$$\begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa - \kappa'. \end{cases}$$

Considerando então o valor de (4.16) e (4.66), obteremos a forma final de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,\alpha}$, dada por

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,\alpha} = \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-2\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \\ m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \\ m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa'} \\ \kappa \geq \kappa'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{\kappa} \\ \kappa < \kappa'} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+k+k'}}{r!i!j!}$$

$$\times \frac{(r+m-i)!(r+k-j)!}{\sqrt{(r+m-m')!(r+k-k')!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m+k-2(i+j)} [v(\beta)]^{m'-k'}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!}$$

$$\left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'| \quad ; \quad \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa - \kappa' \end{cases} \quad (4.70)$$

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,n}$

De (4.58) e (4.59), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma\delta}{\eta}\bar{\mathcal{A}}_\alpha^{\alpha,n} &= \frac{\sigma\delta}{\eta}\langle 0(\beta)|e^{-\alpha^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'}\mathcal{C}_i^{m',m}}^{m\geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m\mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m<m'} \end{array}\right\}\frac{\alpha^{m+m'}}{m!m'!}\frac{1}{[u(\beta)]^{m-2i}[v(\beta)]^{m'}}a^{m-i}[a^\dagger]^{m'-i}\mathcal{A} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}\left\{\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{\nu}\mathcal{C}_j^{\nu,n}}^{n\geq\nu} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n\mathcal{C}_j^{n,\nu}}_{n<\nu} \end{array}\right\}\frac{\alpha^\nu}{\nu!\sqrt{n!}}\frac{1}{[u(\beta)]^{n-2j}[v(\beta)]^\nu}a^{\nu-j}[a^\dagger]^{n-j}|0(\beta)\rangle \\
&= Tr\left[\rho_\beta\left(\frac{\sigma\delta}{\eta}e^{-\frac{3}{2}\alpha^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha a^{m-i}[a^\dagger]^{m'-i}\mathcal{A}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\times a^{\nu-j}[a^\dagger]^{n-j}\right)\right] \\
&= Tr\left[\left(\frac{\sigma\delta}{\eta}e^{-\frac{3}{2}\alpha^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha a^{\nu-j}[a^\dagger]^{n-j}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\times\rho_\beta a^{m-i}[a^\dagger]^{m'-i}\right)\mathcal{A}\right], \tag{4.71}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha \equiv \left\{\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'}\mathcal{C}_i^{m',m}}^{m\geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m\mathcal{C}_i^{m,m'}}_{m<m'} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{\nu}\mathcal{C}_j^{\nu,n}}^{n\geq\nu} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n\mathcal{C}_j^{n,\nu}}_{n<\nu} \end{array}\right\}\frac{\alpha^{m+m'+\nu}}{m!m'!\nu!\sqrt{n!}}\frac{1}{[u(\beta)]^{m+n-2(i+j)}[v(\beta)]^{\nu+m'}},$$

ou usando (4.25),

$$\mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha \equiv \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} m \geq m' \\ \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \\ m < m'} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} n \geq \nu \\ \overbrace{\sum_{j=0}^{\nu} \\ n < \nu} \end{array} \right) \end{array} \right\} \mathcal{C}_i^{m,m'} \mathcal{C}_j^{n,\nu} \frac{\alpha^{m+m'+\nu}}{m!m'!\nu!\sqrt{n!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m+n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}}.$$

Obtemos então de (4.71) que

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,n} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha \\ &\quad \times a^{\nu-j} [a^\dagger]^{n-j} \rho_\beta a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

E com a ajuda de (4.23), temos

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,n} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{\alpha,n}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha \\ &\quad \times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r a^{\nu-j} [a^\dagger]^{n-j} |r\rangle \langle r| a^{m-i} [a^\dagger]^{m'-i}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Usando as relações (4.16) e (4.72), teremos

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,n} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} m \geq m' \\ \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \\ m < m'} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} n \geq \nu \\ \overbrace{\sum_{j=0}^{\nu} \\ n < \nu} \end{array} \right) \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \\ &\quad \times \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{\sqrt{(r+m-m')!(r+n-\nu)!}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(\nu-j)!} \\ &\quad \times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r |r+n-\nu\rangle \langle r+m-m'|, \end{aligned} \quad (4.74)$$

com

$$\begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n \end{cases}$$

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,\alpha}$

De (4.57) e (4.60), temos

$$\begin{aligned} \frac{\sigma\delta}{\eta} \bar{\mathcal{A}}_\alpha^{n,\alpha} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} \langle 0(\beta) | e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu,n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,\nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \frac{\alpha^\nu}{\nu! \sqrt{n!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^\nu} a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \mathcal{A} \\ &\times e^{-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m'} \mathcal{C}_j^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m \mathcal{C}_j^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m+m'}}{m! m'!} \frac{1}{[u(\beta)]^{m-2j} [v(\beta)]^{m'}} a^{m'-j} [a^\dagger]^{m-j} |0(\beta)\rangle \\ &= Tr \left[\rho_\beta \left(\frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(m, m', \nu, n; \beta)_\alpha a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \mathcal{A}^{m'-j} [a^\dagger]^{m-j} \right) \right] \\ &= Tr \left[\left(\frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(m, m', \nu, n; \beta)_\alpha a^{m'-j} [a^\dagger]^{m-j} \rho_\beta a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \right) \mathcal{A} \right], \quad (4.75) \end{aligned}$$

onde foi definido

$$\mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(m, m', \nu, n; \beta)_\alpha \equiv \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu,n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,\nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m'} \mathcal{C}_j^{m',m}}^{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m \mathcal{C}_j^{m,m'}}_{m < m'} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{m+m'+\nu}}{m! m'! \nu!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}}, \quad (4.76)$$

ou, usando (4.25)

$$\mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha \equiv \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{\overbrace{n \geq \nu}^{\nu}} \\ \sum_{i=0}^n \\ \underbrace{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{\overbrace{m \geq m'}^{m'}} \\ \sum_{j=0}^m \\ \underbrace{m < m'} \end{array} \right\} \mathcal{C}_i^{n,\nu} \mathcal{C}_j^{m,m'} \frac{\alpha^{m+m'+\nu}}{m!m'!\nu!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}},$$

De (4.75), obtemos

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,\alpha} = \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha a^{m'-j} [a^\dagger]^{m-j} \rho_\beta a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \quad (4.77)$$

e usando (4.23),

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,\alpha} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha \\ &\quad \times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r a^{m'-j} [a^\dagger]^{m-j} |r\rangle \langle r| a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \\ &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,\alpha}(m,m',\nu,n;\beta)_\alpha \\ &\quad \times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{(r+n-i)!(r+m-j)!}{r! \sqrt{(r+n-\nu)!(r+m-m')!}} |r+m-m'\rangle \langle r+n-\nu|. \end{aligned} \quad (4.78)$$

com

$$\begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n \end{cases} \quad (4.79)$$

Substituindo as relações (4.16) e (4.76) em (4.78), temos, finalmente, que

$$\begin{aligned}
 \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,\alpha} &= \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ n \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\sum_{j=0}^{m \geq m'} m'} \\ m \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < m'} \end{matrix} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \\
 &\times \frac{(r+n-i)!(r+m-j)!}{\sqrt{(r+n-\nu)!(r+m-m')!}} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(m-j)!(m'-j)!} \\
 &\times \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r |r+m-m'\rangle \langle r+n-\nu|, \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n \end{cases} \tag{4.81}$$

Cálculo de $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,n}$

De (4.58) e (4.60), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2}{\eta} \bar{\mathcal{A}}_\alpha^{n,n} &= \frac{\delta^2}{\eta} \langle 0(\beta) | e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu,n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,\nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \frac{\alpha^\nu}{\nu! \sqrt{n!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2i} [v(\beta)]^\nu} a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \mathcal{A} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa} \mathcal{C}_j^{\kappa,n}}^{n \geq \kappa} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,\kappa}}_{n < \kappa} \end{array} \right\} \frac{\alpha^\kappa}{\kappa! \sqrt{n!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2j} [v(\beta)]^\kappa} a^{\kappa-j} [a^\dagger]^{n-j} |0(\beta)\rangle \\
&= Tr \left[\rho_\beta \left(\frac{\delta^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(\kappa, \nu, n; \beta)_\alpha a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \mathcal{A} a^{\kappa-j} [a^\dagger]^{n-j} \right) \right] \\
&= Tr \left[\left(\frac{\delta^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(\kappa, \nu, n; \beta)_\alpha a^{\kappa-j} [a^\dagger]^{n-j} \rho_\beta a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \right) \mathcal{A} \right], \quad (4.82)
\end{aligned}$$

onde foi definido

$$\mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(\kappa, \nu, n; \beta)_\alpha \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{C}_i^{\nu,n}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i^{n,\nu}}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa} \mathcal{C}_j^{\kappa,n}}^{n \geq \kappa} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{C}_j^{n,\kappa}}_{n < \kappa} \end{array} \right\} \frac{\alpha^{\nu+\kappa}}{\nu! \kappa! n!} \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{\kappa+\nu}}, \quad (4.83)$$

ou usando (4.25),

$$\mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(\kappa, \nu, n; \beta)_\alpha \equiv \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \sum_{i=0}^n \\ \underbrace{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \kappa} \kappa} \\ \sum_{j=0}^n \\ \underbrace{n < \kappa} \end{array} \right\} \mathcal{C}_i^{n,\nu} \mathcal{C}_j^{n,\kappa} \frac{\alpha^{\nu+k}}{\nu! \kappa! n!} \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{\kappa+\nu}}. \quad (4.84)$$

De (74), concluímos que

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,n} &= \frac{\delta^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(\kappa, \nu, n; \beta)_\alpha a^{\kappa-j} [a^\dagger]^{n-j} \rho_\beta a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \\ &= \frac{\delta^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(\kappa, \nu, n; \beta)_\alpha \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \\ &\quad \times a^{k-j} [a^\dagger]^{n-j} |r\rangle \langle r| a^{n-i} [a^\dagger]^{\nu-i} \\ &= \frac{\delta^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,j}^{n,n}(\kappa, \nu, n; \beta)_\alpha a^{\kappa-j} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \\ &\quad \times \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{r! \sqrt{(r+n-\nu)!(r+n-\kappa)!}} |r+n-\kappa\rangle \langle r+n-\nu| \quad ; \quad \begin{cases} r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Usando as relações (4.16) e (4.83) em (4.85), temos

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,n} &= \frac{\delta^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \sum_{i=0}^n \\ \underbrace{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \kappa} \kappa} \\ \sum_{j=0}^n \\ \underbrace{n < \kappa} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{\nu+\kappa} n!}{r! i! j!} \\ &\quad \times \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{\sqrt{(r+n-\nu)!(r+n-\kappa)!}} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(n-j)!(\kappa-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+\kappa}} \\ &\quad \times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r |r+n-k\rangle \langle r+n-\nu| \quad ; \quad \begin{cases} r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Finalmente temos que o operador densidade associado ao estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ é a soma das parcelas encontradas nas equações (4.70), (4.74), (4.81) e (4.86), ou seja,

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha} = \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,\alpha} + \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha,n} + \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,\alpha} + \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,n}, \quad (4.87)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha} = & \frac{\sigma^2}{\eta} e^{-2\alpha^2} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}}^{m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa \geq \kappa'}}^{\kappa'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{\kappa}}_{\kappa < \kappa'} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+k+k'}}{r!i!j!} \\ & \times \frac{(r+m-i)!(r+k-j)!}{\sqrt{(r+m-m')!(r+k-k')!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m+k-2(i+j)} [v(\beta)]^{m'-k'}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(k-j)!(k'-j)!} \\ & \times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r |r+k-k'\rangle \langle r+m-m'| \\ & + \frac{\sigma\delta}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}}^{m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \nu}}^{\nu} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \\ & \times \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{\sqrt{(r+m-m')!(r+n-\nu)!}} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(\nu-j)!} \\ & \times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r |r+n-\nu\rangle \langle r+m-m'| \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m \geq m'} m'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \\
& \times \frac{(r+n-i)!(r+m-j)!}{\sqrt{(r+n-\nu)!(r+m-m')!}} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(m-j)!(m'-j)!} \\
& \times \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r |r+m-m'\rangle \langle r+n-\nu| \\
& + \frac{\delta^2}{\eta} e^{-\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \kappa} \kappa} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \kappa} \end{array} \right\} (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{\nu+\kappa} n!}{r!i!j!} \\
& \times \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{\sqrt{(r+n-\nu)!(r+n-\kappa)!}} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(n-j)!(\kappa-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+\kappa}} \\
& \times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r |r+n-k\rangle \langle r+n-\nu| \tag{4.89}
\end{aligned}$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa' - \kappa \\ r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n \end{array} \right.$$

Tendo os operadores densidade $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}$ e $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}$, o passo seguinte é a determinação das funções de Wigner correspondentes, o que desenvolveremos no capítulo seguinte.

5 *Função de Wigner para estados de superposição*

No capítulo anterior, desenvolvemos o cálculo para os operadores densidades do estado $|\alpha_n\rangle$ termalizado. Tal estado vem sendo estudado sob duas formas de termalização. A primeira forma é obtida considerando o produto tensorial por $|\tilde{n}\rangle$, $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$, e a segunda considerando o produto tensorial por $|\tilde{\alpha}\rangle$, $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$. No presente capítulo, iremos realizar o cálculo das funções de Wigner para ambos operadores densidade.

5.1 *Função de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_n$*

Para um operador densidade $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}$, a função de Wigner, assim como foi definida no Capítulo 2, é dada pela integral

$$W_n(p, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n} | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ, \quad (5.1)$$

onde, se compararmos (5.1) com (2.1), temos $L = 1$. Lembrando que a matriz densidade em (5.1) é dada por (4.45), vamos calcular $W_n(p, q)$ em quatro parcelas aditivas, ou seja,

$$W_n(p, q) = W_n^{\alpha, \alpha}(p, q) + W_n^{n, \alpha}(p, q) + W_n^{\alpha, n}(p, q) + W_n^{n, n}(p, q), \quad (5.2)$$

onde definimos

$$W_n^{\mu, \nu}(p, q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\mu, \nu} | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ. \quad (5.3)$$

Desenvolvendo cada uma das parcelas, temos:

i) Cálculo de $W_n^{\alpha, \alpha}(p, q)$

Vamos, primeiramente, escrever (4.27) da seguinte maneira:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,\alpha} = \frac{\sigma^2 e^{-\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^m}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m'}}^{m' \geq n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m'}}_{m' < n} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', r; \beta)_n |r + m' - n\rangle \langle r + m - n|$$

; para $\begin{cases} r \geq n - m \\ r \geq n - m' \end{cases}$ (5.4)

onde definimos

$$\rho_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', r; \beta)_n \equiv (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'}}{r! i! j!} \frac{n!(r+m'-j)!(r+m-i)!}{(m-i)!(m'-j)!(n-i)!(n-j)!} \frac{1}{\sqrt{(r+m'-n)!(r+m-n)!}}$$

$$\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+m'-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r ; \text{ para } \begin{cases} r \geq n - m \\ r \geq n - m' \end{cases} \quad (5.5)$$

Dessa forma podemos escrever $W_n^{\alpha,\alpha}(p, q)$ como:

$$W_n^{\alpha,\alpha}(p, q) = \frac{\sigma^2 e^{-\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^m}^{m \geq n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m'}}^{m' \geq n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m'}}_{m' < n} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha,\alpha}(m, m', r; \beta)_n \Omega_n^{\alpha,\alpha}(p, q), \quad (5.6)$$

onde também foi definido

$$\Omega_n^{\alpha,\alpha}(p, q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | r + m' - n \rangle \langle r + m - n | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} p Q} dQ; \quad \begin{cases} r \geq n - m \\ r \geq n - m' \end{cases} \quad (5.7)$$

que é a integral de interesse. Antes, porém, de integrarmos (5.7), é necessário desenvolvermos

o integrando segundo a relação (2.2), o que nos dá

$$\begin{aligned}
\langle q-y \mid r+m'-n \rangle \langle r+m-n \mid q+y \rangle &= \langle q-y \mid r+m'-n \rangle \langle q+y \mid r+m-n \rangle^* \\
&= \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \frac{1}{[2^{r+m'-n}(r+m'-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q-y)^2}{2b^2}} H_{r+m'-n} \left(\frac{q-y}{b} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \frac{1}{[2^{r+m-n}(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{(q+y)^2}{2b^2}} H_{r+m-n} \left(\frac{q+y}{b} \right) \\
&= \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \frac{1}{[2^{2r+m+m'-2n}(r+m'-n)!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{1}{b^2}[(q^2+y^2)]} \\
&\quad \times H_{r+m'-n} \left(\frac{q-y}{b} \right) H_{r+m-n} \left(\frac{q+y}{b} \right). \\
&= \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \frac{(-1)^{r+m'-n}}{[2^{2r+m+m'-2n}(r+m'-n)!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{1}{b^2}[(q^2+y^2)]} \\
&\quad \times H_{r+m'-n} \left(\frac{y-q}{b} \right) H_{r+m-n} \left(\frac{y+q}{b} \right) \quad ; \quad \text{para} \quad \begin{cases} r \geq n-m \\ r \geq n-m' \end{cases} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade dos polinômios de Hermite:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \quad (5.9)$$

Fazendo a troca de variável

$$y = -\frac{Q}{2} \quad (5.10)$$

e substituindo (5.8) em (2.7), temos:

$$\begin{aligned}
\Omega_n^{\alpha,\alpha}(p, q) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \frac{(-1)^{r+m'-n}}{[2^{2r+m+m'-2n}(r+m'-n)!(r+m-n)!]^{1/2}} \\
&\times \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{1}{b^2}[q^2+y^2]+2i\frac{py}{\hbar}} H_{r+m'-n}\left(\frac{y-q}{b}\right) H_{r+m-n}\left(\frac{y+q}{b}\right) d(-2y) \\
&= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \frac{(-1)^{r+m'-n}}{[2^{2r+m+m'-2n}(r+m'-n)!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{q^2}{b^2}} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}+2i\frac{py}{\hbar}} H_{r+m'-n}\left(\frac{y-q}{b}\right) H_{r+m-n}\left(\frac{y+q}{b}\right) dy \quad (5.11) \\
&\quad ; \quad \text{para} \quad \begin{cases} r \geq n-m \\ r \geq n-m'. \end{cases}
\end{aligned}$$

Podemos rearrumar o argumento da exponencial como

$$-\frac{y^2}{b^2} + 2i\frac{py}{\hbar} = -\frac{1}{b^2} \left(y - \frac{ipb^2}{\hbar} \right)^2 - \frac{p^2 b^2}{\hbar^2}. \quad (5.12)$$

E se acrescentarmos novas mudanças de variáveis

$$\mu = \frac{1}{b} \left(y - \frac{ipb^2}{\hbar} \right) \quad (5.13)$$

e

$$\tau = \frac{ipb}{\hbar}, \quad (5.14)$$

podemos escrever (5.10) como:

$$\begin{aligned}
\Omega_n^{\alpha,\alpha}(p, q) &= \frac{1}{(\pi)^{3/2}\hbar} \frac{(-1)^{r+m'-n}}{[2^{2r+m+m'-2n}(r+m'-n)!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right]} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_{r+m'-n}\left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b}\right)\right] H_{r+m-n}\left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b}\right)\right] d\mu \quad (5.15) \\
&\quad ; \quad \text{para} \quad \begin{cases} r \geq n-m \\ r \geq n-m'. \end{cases}
\end{aligned}$$

Se recorremos à integral (2.14), teremos para o resultado da (5.16):

$$\Omega_n^{\alpha,\alpha}(p,q) = \frac{1}{\pi\hbar} \frac{(-1)^{r+m'-n}}{[2^{2r+m+m'-2n}(r+m'-n)!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right]}$$

$$\times \begin{cases} 2^{r+m-n}(r+m'-n)!(\tau+\frac{q}{b})^{m-m'} L_{r+m'-n}^{m-m'} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] & \text{para } m \geq n \\ 2^{r+m'-n}(r+m-n)!(\tau^*-\frac{q}{b})^{m'-m} L_{r+m-n}^{m'-m} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right] & \text{para } m < n \end{cases} \quad (5.16)$$

$$; \quad \text{para } \begin{cases} r \geq n-m \\ r \geq n-m' \end{cases}$$

É conveniente escrevermos a quantidade $\frac{q^2}{b^2} - \tau^2$ como o módulo quadrado de um número complexo γ , assim como foi feito em (2.20), ou seja,

$$\gamma = \frac{q}{b} + i\frac{pb}{\hbar} = \frac{q}{b} + \tau \quad (5.17)$$

de forma que

$$|\gamma|^2 = \frac{q^2}{b^2} + \frac{p^2 b^2}{\hbar^2} = \frac{q^2}{b^2} - \tau^2. \quad (5.18)$$

Tendo o resultado de (5.16), podemos escrever (5.6) explicitamente, ou seja, com a ajuda de (5.5), temos a parcela função de Wigner para $r \geq n - m$ e $r \geq n - m$:

$$\begin{aligned}
W_n^{\alpha,\alpha}(p,q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\sigma^2 e^{-\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n}^n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{m' \geq n}^n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m'}_{m' < n}} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+m'-n} \frac{\alpha^{m+m'}}{r!i!j!} \\
&\times \frac{n!(r+m'-j)!(r+m-i)!}{(m-i)!(m'-j)!(n-i)!(n-j)!(r+m'-n)!(r+m-n)!} \frac{1}{(r+m'-n)!(r+m-n)!} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+m'-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{1}{2^{r+\frac{m+m'}{2}-n}} e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \begin{cases} 2^{r+m-n} (r+m'-n)! (\gamma)^{m-m'} L_{r+m'-n}^{m-m'} [2|\gamma|^2] & \text{para } m \geq n \\ 2^{r+m'-n} (r+m-n)! (-\gamma)^{m'-m} L_{r+m-n}^{m'-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } m < n \end{cases} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

ii) Cálculo de $W_n^{n,\alpha}(p,q)$

Para calcular a função de Wigner referente a parcela do operador densidade (4.45), $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,\alpha}$, escreveremos (4.33) de maneira semelhante a (5.4); então

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,\alpha} = \frac{\sigma \delta e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{m \geq n}^n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{n,\alpha}(n,m,r;\beta)_n |r+m-n\rangle \langle r|; \quad (5.20)$$

para $r \geq n - m$,

onde definimos

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{n,\alpha}(n,m,r;\beta)_n &\equiv (-1)^{i+j} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{r! i! j!} \frac{1}{\sqrt{r!(r+m-n)! (n-j)! [(n-i)!]^2 (m-j)!}} (r+m-j)! (r+n-i)! \\ &\times \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r; \end{aligned} \quad (5.21)$$

para $r \geq n - m$.

Desta forma, podemos escrever, para $\mu = n$ e $\nu = \alpha$, a integral (5.3) como

$$W_n^{n,\alpha}(p,q) = \frac{\sigma \delta e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{\overbrace{m \geq n}^n} \\ \sum_{j=0}^m \\ \underbrace{m < n} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{n,\alpha}(n,m,r;\beta)_n \Omega_n^{n,\alpha}(p,q), \quad (5.22)$$

onde definimos também

$$\Omega_n^{n,\alpha}(p,q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q+Q/2 | r+m-n \rangle \langle r | q-Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} p Q} dQ; \quad (5.23)$$

para $r \geq n - m$.

Fazendo a mudança de variável (5.10) e usando a propriedade (5.9), podemos escrever o termo que multiplica a exponencial em (5.24) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle q-y | r+m-n \rangle \langle r | q+y \rangle &= \frac{1}{(\pi b^2)^{1/2}} \frac{(-1)^{r+m-n}}{[2^{2r+m-n} r! (r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{1}{b^2} [(q^2+y^2)]} \\ &\times H_{r+m-n} \left(\frac{y-q}{b} \right) H_r \left(\frac{y+q}{b} \right); \end{aligned} \quad (5.24)$$

para $r \geq n - m$.

Substituindo (5.25) na integral (5.24), ficamos com

$$\begin{aligned} \Omega_n^{n,\alpha}(p,q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{(\pi b^2)^{1/2}} \frac{(-1)^{r+m-n}}{[2^{2r+m-n} r!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{q^2}{b^2}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2} + 2i\frac{py}{\hbar}} H_{r+m-n}\left(\frac{y-q}{b}\right) H_r\left(\frac{y+q}{b}\right) dy; \end{aligned} \quad (5.25)$$

para $r \geq n - m$.

Podemos escrever o argumento da exponencial como em (5.12), e fazendo as trocas de variáveis (5.13) e (5.14) em (5.25), segue que

$$\begin{aligned} \Omega_n^{n,\alpha}(p,q) &= \frac{1}{(\pi)^{3/2} \hbar} \frac{(-1)^{r+m-n}}{[2^{2r+m-n} r!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_{r+m-n}\left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b}\right)\right] H_r\left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b}\right)\right] d\mu; \end{aligned} \quad (5.26)$$

para $r \geq n - m$.

Resolvendo a integral acima com o auxílio de (2.14) obtemos para $r \geq n - m$:

$$\begin{aligned} \Omega_n^{n,\alpha}(p,q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{(-1)^{r+m-n}}{2^{r+\frac{m-n}{2}} [r!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \\ &\times \begin{cases} 2^r (r+m-n)! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{n-m} L_{r+m-n}^{n-m} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right], & \text{para } n \geq m \\ 2^{r+m-n} r! \left(\tau - \frac{q}{b}\right)^{m-n} L_r^{m-n} \left[2\left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right], & \text{para } n < m. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Substituindo o resultado acima em (5.22) e considerando (5.17) e (5.21), teremos então a

parcela da função de Wigner referente à $W_n^{n,\alpha}(p, q)$, para $r \geq n - m$, dada por

$$\begin{aligned}
W_n^{n,\alpha}(p, q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\sigma\delta e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m \geq n} \\ n} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m \\ m < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+m-n} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{[r!]^2 i! j!} \\
&\times \frac{(r+m-j)!(r+n-i)!}{(n-j)![(n-i)!]^2 (m-j)!} \frac{1}{(r+m-n)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \\
&\times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{1}{2^{r+\frac{m-n}{2}}} e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \begin{cases} 2^r (r+m-n)! (\gamma)^{n-m} L_{r+m-n}^{n-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } n \geq m \\ 2^{r+m-n} r! (-\gamma)^{m-n} L_r^{m-n} [2|\gamma|^2] & \text{para } n < m. \end{cases} \quad (5.28)
\end{aligned}$$

iii) Cálculo de $W_n^{\alpha,n}(p, q)$

No caso da parcela $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,n}$ do operador densidade (4.45), podemos escrever (4.39) como

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{\alpha,n} = \frac{\delta\sigma e^{-\alpha^2}}{\eta^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n} \\ n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \\ m < n} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha,n}(n, m, r; \beta)_n |r\rangle \langle r+m-n|; \quad (5.29)$$

para $r \geq n - m$,

onde

$$\begin{aligned}
\rho_{i,j}^{\alpha,n}(n, m, r; \beta)_n &\equiv (-1)^{i+j} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{r! i! j!} \frac{1}{\sqrt{r!(r+m-n)!}} \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{(n-i)![(n-j)!]^2 (m-i)!} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r; \quad (5.30)
\end{aligned}$$

para $r \geq n - m$.

Então para $\mu = \alpha$ e $\nu = n$, a parcela correspondente da função de Wigner, ou seja, a integral (5.3), é

$$W_n^{\alpha,n}(p,q) = \frac{\delta\sigma e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}}{\eta^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m'} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n} \\ n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \\ m < n} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha,n}(n,m,r;\beta)_n \Omega_n^{\alpha,n}(p,q), \quad (5.31)$$

onde definimos

$$\Omega_n^{\alpha,n}(p,q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q+Q/2|r \rangle \langle r+m-n|q-Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ; \quad (5.32)$$

para $r \geq n-m$.

Escrevendo o integrando (5.33) em termos dos polinômios de Hermite, e utilizando a propriedade (5.9) e a mudança de variável (5.10), temos

$$\begin{aligned} \langle q-y|r \rangle \langle r+m-n|q+y \rangle &= \frac{1}{(\pi b^2)^{1/2}} \frac{(-1)^r}{[2^{2r+m-n}(r+m-n)!r!]^{1/2}} e^{-\frac{1}{b^2}[(q^2+y^2)]} \\ &\times H_r\left(\frac{q+y}{b}\right) H_{r+m-n}\left(\frac{q+y}{b}\right); \end{aligned} \quad (5.33)$$

para $r \geq n-m$.

Substituindo (5.34) em (5.33), segue que

$$\begin{aligned} \Omega_n^{\alpha,n}(p,q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{(\pi b^2)^{1/2}} \frac{(-1)^r}{[2^{2r+m-n}r!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\frac{q^2}{b^2}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2} + 2i\frac{py}{\hbar}} H_r\left(\frac{q+y}{b}\right) H_{r+m-n}\left(\frac{q+y}{b}\right) dy; \end{aligned} \quad (5.34)$$

para $r \geq n-m$.

Daí, recorrendo a (5.12)–(5.14), temos

$$\begin{aligned} \Omega_n^{\alpha,n}(p,q) &= \frac{1}{(\pi)^{3/2} \hbar} \frac{(-1)^r}{[2^{2r+m-n} r!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_r \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{r+m-n} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] d\mu. \end{aligned} \quad (5.35)$$

para $r \geq n - m$.

Com a ajuda de (2.14), temos o resultado da integral em (5.36), o que nos dá, para $r \geq n - m$,

$$\begin{aligned} \Omega_n^{\alpha,n}(p,q) &= \frac{1}{\pi \hbar} \frac{(-1)^r}{2^{r+\frac{m-n}{2}} [r!(r+m-n)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \\ &\quad \times \begin{cases} 2^{r+m-n} r! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{m-n} L_r^{m-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right], & \text{para } m \geq n \\ 2^r (r+m-n)! \left(\tau - \frac{q}{b}\right)^{n-m} L_{r+m-n}^{m-n} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right], & \text{para } m < n. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Substituindo a relação (5.36) em (5.31) e considerando (5.17), finalmente teremos a parcela da função de Wigner referente à $W_n^{\alpha,n}(p,q)$, para $r \geq n - m$, dada por

$$\begin{aligned} W_n^{\alpha,n}(p,q) &= \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma \delta e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \begin{pmatrix} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n}^n} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{pmatrix} (-1)^{i+j+r} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{[r!]^2 i! j!} \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{(n-i)! [(n-j)!]^2 (m-i)!} \\ &\quad \times \frac{1}{(r+m-n)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{1}{2^{r+\frac{m-n}{2}}} e^{-|\gamma|^2} \\ &\quad \times \begin{cases} 2^{r+m-n} r! (\gamma)^{m-n} L_r^{m-n} [2|\gamma|^2], & \text{para } m \geq n \\ 2^r (r+m-n)! (-\gamma)^{n-m} L_{r+m-n}^{m-n} [2|\gamma|^2], & \text{para } m < n. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.37)$$

iv) Cálculo de $W_n^{\alpha,n}(p,q)$

Considerando $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,n}$ dada por (4.44), podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}^{n,n} = \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \rho_{i,j}^{n,n}(n, r; \beta)_n |r\rangle \langle r|, \quad (5.38)$$

onde definimos

$$\rho_{i,j}^{n,n}(n, r; \beta)_n \equiv (-1)^{i+j} \frac{[n!]^2}{[r!]^2 i! j!} \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{[(n-i)!(n-j)!]^2} \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r. \quad (5.39)$$

Então $W_n^{n,n}(p, q)$ será

$$W_n^{n,n}(p, q) = \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \rho_{i,j}^{n,n}(n, r; \beta)_n \Omega_n^{n,n}(p, q), \quad (5.40)$$

onde foi definido

$$\Omega_n^{n,n}(p, q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | r \rangle \langle r | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} p Q} dQ, \quad (5.41)$$

que é justamente a função de Wigner desenvolvida, no capítulo 2, tendo o valor de

$$\Omega_n^{n,n}(p, q) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-|\gamma|^2} L_n [2|\gamma|^2]. \quad (5.42)$$

Substituindo esse resultado em (5.40) e considerando (5.17), temos o termo $W_n^{n,n}(p, q)$ da função de Wigner para $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}$:

$$\begin{aligned} W_n^{n,n}(p, q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j+n} \frac{[n!]^2}{[r!]^2 i! j!} \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{[(n-i)!(n-j)!]^2} \\ &\quad \times \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} L_n [2|\gamma|^2]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

A função de Wigner para $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_n}$ é assim a superposição de todas as parcelas calculadas

nessa seção, como descrito em (5.2), ou seja,

$$\begin{aligned}
W_n(p, q) &= \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma^2 e^{-\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq n} \binom{n}{i}} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m' \geq n} \binom{n}{j}} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{m'} }_{m' < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+m'-n} \frac{\alpha^{m+m'}}{r!i!j!} \\
&\times \frac{n!(r+m'-j)!(r+m-i)!}{(m-i)!(m'-j)!(n-i)!(n-j)!} \frac{1}{(r+m'-n)!(r+m-n)!} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+m'-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{1}{2^{r + \frac{m+m'}{2} - n}} e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \begin{cases} 2^{r+m-n} (r+m'-n)! (\gamma)^{m-m'} L_{r+m'-n}^{m-m'} [2|\gamma|^2] & \text{para } m \geq n \\ 2^{r+m'-n} (r+m-n)! (-\gamma)^{m'-m} L_{r+m-n}^{m'-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } m < n \end{cases}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma \delta e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^n}^{m \geq n} \\ \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+m-n} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{[r!]^2 i! j!}$$

$$\times \frac{(r+m-j)!(r+n-i)!}{(n-j)![(n-i)!]^2 (m-j)!} \frac{1}{(r+m-n)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}}$$

$$\times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{1}{2^{r+\frac{m-n}{2}}} e^{-|\gamma|^2}$$

$$\times \begin{cases} 2^r (r+m-n)! (\gamma)^{n-m} L_{r+m-n}^{n-m} [2|\gamma|^2] & \text{para } n \geq m \\ 2^{r+m-n} r! (-\gamma)^{m-n} L_r^{m-n} [2|\gamma|^2] & \text{para } n < m. \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma \delta e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^n}^{m \geq n} \\ \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < n} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r} \frac{n! \sqrt{n!} \alpha^m}{[r!]^2 i! j!} \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{(n-i)![(n-j)!]^2 (m-i)!}$$

$$\times \frac{1}{(r+m-n)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r \frac{1}{2^{r+\frac{m-n}{2}}} e^{-|\gamma|^2}$$

$$\times \begin{cases} 2^{r+m-n} r! (\gamma)^{m-n} L_r^{m-n} [2|\gamma|^2], & \text{para } m \geq n \\ 2^r (r+m-n)! (-\gamma)^{n-m} L_{r+m-n}^{n-m} [2|\gamma|^2], & \text{para } m < n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j+n} \frac{[n!]^2}{[r!]^2 i! j!} \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{[(n-i)!(n-j)!]^2} \\
& \times \frac{1}{[u(\beta)]^{2(n-i-j)} [v(\beta)]^{2n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} L_n [2|\gamma|^2]. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

5.2 Função de Wigner para o estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$

Nesta seção iremos calcular a função de Wigner para o operador densidade (4.87). Para tal operador, a função de Wigner pode ser escrita como:

$$W_\alpha(p, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha} | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ. \quad (5.45)$$

o que possibilita separá-la em termos aditivos, como segue abaixo:

$$W_\alpha(p, q) = W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q) + W_\alpha^{n, \alpha}(p, q) + W_\alpha^{\alpha, n}(p, q) + W_\alpha^{n, n}(p, q), \quad (5.46)$$

onde

$$W_\alpha^{\mu, \nu}(p, q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | \rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\mu, \nu} | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ. \quad (5.47)$$

Desenvolvendo o cálculo de cada parcela, temos:

I) Cálculo de $W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q)$

Escrevamos (4.70) da seguinte maneira:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{\alpha, \alpha} = \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} m \geq m' \\ \sum_{i=0}^{m'} \\ m \\ \sum_{i=0}^m \\ m < m' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \kappa \geq \kappa' \\ \sum_{j=0}^{\kappa'} \\ \kappa \\ \sum_{j=0}^{\kappa} \\ \kappa < \kappa' \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha, \alpha}(r, m, m', \kappa, \kappa'; \beta)_\alpha \times |r + \kappa - \kappa'\rangle \langle r + m - m'|; \quad (5.48)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa' - \kappa, \end{cases}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{\alpha,\alpha}(r,m,m',\kappa,\kappa';\beta)_\alpha &\equiv (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+\kappa+\kappa'}}{r!i!j!} \frac{(r+m-i)!(r+\kappa-j)!}{(m-i)!(m'-j)!(\kappa-i)!(\kappa'-j)!} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(r+m-m')!(r+\kappa-\kappa')!}} \frac{1}{[u(\beta)]^{m+\kappa-2(i+j)}[v(\beta)]^{m'+\kappa'}} \\ &\times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r. \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\text{para} \quad \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa' - \kappa. \end{cases}$$

Dessa forma, podemos escrever $W_\alpha^{\alpha,\alpha}(p,q)$ como:

$$\begin{aligned} W_\alpha^{\alpha,\alpha}(p,q) &= \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m'} \\ m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m \\ m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa'} \\ \kappa \geq \kappa'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{\kappa} \\ \kappa < \kappa'} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha,\alpha}(r,m,m',\kappa,\kappa';\beta)_\alpha \\ &\times \Omega_\alpha^{\alpha,\alpha}(p,q), \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde $\Omega_\alpha^{\alpha,\alpha}(p,q)$ é definido como:

$$\Omega_\alpha^{\alpha,\alpha}(p,q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q+Q/2|r+\kappa-\kappa' \rangle \langle r+m-m'|q-Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ; \quad (5.51)$$

$$\text{para} \quad \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa' - \kappa. \end{cases}$$

Desenvolvendo as autofunções do oscilador harmônico no integrando da equação (5.51) e usando as trocas de variáveis necessárias, assim como foi feito na seção anterior, podemos

reescrever a integral acima como

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}^{\alpha,\alpha}(p, q) &= \frac{1}{(\pi)^{3/2} \hbar} \frac{(-1)^{r+\kappa-\kappa'}}{\left[2^{2r+\kappa-\kappa'+m-m'} (r+m-m')! (r+\kappa-\kappa')!\right]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right]} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_{r+\kappa-\kappa'} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b}\right)\right] H_{r+m-m'} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b}\right)\right] d\mu; \quad (5.52) \\ \text{para} \quad &\begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa' - \kappa. \end{cases} \end{aligned}$$

Usando a integral (2.14), obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}^{\alpha,\alpha}(p, q) &= \frac{1}{\pi \hbar} \frac{(-1)^{r+\kappa-\kappa'}}{2^{r+\frac{\kappa-\kappa'}{2}+\frac{m-m'}{2}} \left[(r+m-m')! (r+\kappa-\kappa')!\right]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right]} \\ &\times \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &2^{2r+m-m'} (r+\kappa-\kappa')! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{m-m'-(\kappa-\kappa')} \\ &\times L_{r+\kappa-\kappa'}^{m-m'-(\kappa-\kappa')} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right], \quad m-m' \geq \kappa-\kappa' \end{aligned} \right. \\ \\ \left\{ \begin{aligned} &2^{r+\kappa-\kappa'} (r+m-m')! \left(\tau - \frac{q}{b}\right)^{\kappa-\kappa'-(m-m')} \\ &\times L_{r+m-m'}^{\kappa-\kappa'-(m-m')} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right)\right], \quad m-m' < \kappa-\kappa' \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (5.53) \\ \text{para} \quad &\begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa' - \kappa. \end{cases} \end{aligned}$$

Desta forma, tendo em vista a mudança de variável (5.17), podemos encontrar a parcela $W_{\alpha}^{\alpha,\alpha}(p, q)$ correspondente para $r \geq m' - m$ e $r \geq \kappa - \kappa'$:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}^{\alpha,\alpha}(p,q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \\
&\times \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}}^{m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa \geq \kappa'}}^{\kappa'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{\kappa}}_{\kappa < \kappa'} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+\kappa-\kappa'} \frac{\alpha^{m+m'+\kappa+\kappa'}}{r!i!j!} \\
&\times \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(\kappa-j)!(\kappa'-j)!} \frac{(r+m-i)!(r+\kappa-j)!}{(r+m-m')!(r+\kappa-\kappa')!} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+\kappa-2(i+j)} [v(\beta)]^{m'+\kappa'}} \frac{1}{2^{r+\frac{m-m'}{2}+\frac{\kappa-\kappa'}{2}}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+m-m'} (r+\kappa-\kappa')! (\gamma)^{m-m'-(\kappa-\kappa')} \\ \times L_{r+\kappa-\kappa'}^{m-m'-(\kappa-\kappa')} [2|\gamma|^2], \quad m-m' \geq \kappa-\kappa' \\ \\ 2^{r+\kappa-\kappa'} (r+m-m')! (-\gamma)^{\kappa-\kappa'-(m-m')} \\ \times L_{r+m-m'}^{\kappa-\kappa'-(m-m')} [2|\gamma|^2], \quad m-m' < \kappa-\kappa' \end{array} \right. \quad (5.54)
\end{aligned}$$

Devemos notar que, por envolver apenas o estado coerente durante o desenvolvimento do seu cálculo, a parcela da função de Wigner $W_{\alpha}^{\alpha,\alpha}(p,q)$ independe do número de fótons do estado de Fock. Isto refletirá nos gráficos para esta parcela, sendo iguais para qualquer número de fótons no estado $|n\rangle$, apesar de ser notável a diferença para valores diferentes de temperatura.

II) Cálculo de $W_\alpha^{\alpha,n}(p, q)$

Podemos escrever (4.74) da seguinte maneira:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\alpha}^{\alpha,n} = \frac{\sigma\delta}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}}^{m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \nu}}^{\nu} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha,n}(r, m, m', \nu; \beta)_\alpha$$

$$\times |r + n - \nu\rangle \langle r + m - m'|; \quad (5.55)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n, \end{cases}$$

onde definimos

$$\rho_{i,j}^{\alpha,n}(r, m, m', \nu; \beta)_\alpha \equiv (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{\sqrt{(r+m-m')!(r+n-\nu)!}}$$

$$\times \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(\nu-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{m+n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}}$$

$$\times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r; \quad (5.56)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n, \end{cases}$$

de maneira que podemos escrever,

$$W_\alpha^{\alpha,n}(p, q) = \frac{\sigma\delta}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}}^{m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \nu}}^{\nu} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{\alpha,n}(r, m, m', \nu; \beta)_\alpha$$

$$\times \Omega_\alpha^{\alpha,n}(p, q), \quad (5.57)$$

em que também foi definido,

$$\Omega_{\alpha}^{\alpha,n}(p, q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | r + n - \nu \rangle \langle r + m - m' | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} p Q} dQ; \quad (5.58)$$

$$\text{para} \quad \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n. \end{cases}$$

Seguindo os passos da seção anterior no que tange o desenvolvimento das autofunções do oscilador harmônico e mudanças de variáveis, a equação (5.58) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}^{\alpha,n}(p, q) &= \frac{1}{(\pi)^{3/2} \hbar} \frac{(-1)^{r+n-\nu}}{[2^{2r+n-\nu+m-m'} (r+n-\nu)! (r+m-m')!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_{r+n-\nu} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{r+m-m'} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] d\mu; \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\text{para} \quad \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n. \end{cases}$$

Com a ajuda de (2.14), resolvemos a integral acima, tendo como resultado:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}^{\alpha,n}(p, q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{(-1)^{r+n-\nu}}{2^{r+\frac{n-\nu}{2}+\frac{m-m'}{2}} [(r+n-\nu)! (r+m-m')!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \\ &\times \begin{cases} \begin{aligned} &2^{r+m-m'} (r+n-\nu)! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{m-m'-(n-\nu)} \\ &\times L_{r+n-\nu}^{m-m'-(n-\nu)} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right], \end{aligned} & \text{para } m - m' \geq n - \nu \\ \\ \begin{aligned} &2^{r+n-\nu} (r+m-m')! \left(\tau - \frac{q}{b}\right)^{n-\nu-(m-m')} \\ &\times L_{r+m-m'}^{n-\nu-(m-m')} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right], \end{aligned} & \text{para } m - m' < n - \nu \end{cases} \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\text{para} \quad \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n; \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variável (5.17), podemos escrever $W_{\alpha}^{\alpha,n}(p, q)$ para $r \geq m' - m$ e

$r \geq \nu - n$ como:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}^{\alpha,n}(p,q) &= \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma \delta}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}^{m'}} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \nu}^{\nu}} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+n-\nu} \\
&\times \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{(r+m-m')!(r+n-\nu)!} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(\nu-j)!} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \frac{1}{2^{r+\frac{n-\nu}{2}+\frac{m-m'}{2}}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+m-m'} (r+n-\nu)! (\gamma)^{m-m'-(n-\nu)} \\ \times L_{r+n-\nu}^{m-m'-(n-\nu)} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } m-m' \geq n-\nu \\ \\ 2^{r+n-\nu} (r+m-m')! (-\gamma)^{n-\nu-(m-m')} \\ \times L_{r+m-m'}^{n-\nu-(m-m')} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } m-m' < n-\nu \end{array} \right. \quad (5.61)
\end{aligned}$$

III) Cálculo de $W_\alpha^{n,\alpha}(p, q)$

Reescrevendo (4.81) como:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha}^{n,\alpha} = \frac{\sigma\delta}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{m \geq m'} m'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{n,\alpha}(r, m, m', \nu; \beta)_\alpha$$

$$\times |r+m-m'\rangle \langle r+n-\nu|; \quad (5.62)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n, \end{cases}$$

onde,

$$\rho_{i,j}^{n,\alpha}(r, m, m', \nu; \beta)_\alpha \equiv (-1)^{i+j} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \frac{(r+n-i)!(r+m-j)!}{\sqrt{(r+n-\nu)!(r+m-m')!}}$$

$$\times \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(m-j)!(m'-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}}$$

$$\times \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r; \quad (5.63)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n, \end{cases}$$

de forma que podemos escrever $W_\alpha^{n,\alpha}(p, q)$ como:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}^{n,\alpha}(p,q) &= \frac{\sigma\delta}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{m \geq m'} m'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{n,\alpha}(r,m,m',\nu;\beta)_{\alpha} \\
&\times \Omega_{\alpha}^{n,\alpha}(p,q), \tag{5.64}
\end{aligned}$$

em que,

$$\Omega_{\alpha}^{n,\alpha}(p,q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q+Q/2|r+m-m' \rangle \langle r+n-\nu|q-Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}pQ} dQ; \tag{5.65}$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n. \end{cases}$$

Procedendo os passos da seção anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\alpha}^{n,\alpha}(p,q) &= \frac{1}{(\pi)^{3/2} \hbar} \frac{(-1)^{r+m-m'}}{\left[2^{2r+m-m'+n-\nu} (r+m-m')! (r+n-\nu)!\right]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right]} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_{r+m-m'} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b}\right)\right] H_{r+n-\nu} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b}\right)\right] d\mu \tag{5.66} \\
&\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Solucinando a integral, temos:

$$\Omega_{\alpha}^{n,\alpha}(p, q) = \frac{1}{\pi \hbar} \frac{(-1)^{r+m-m'}}{2^{r+\frac{m-m'}{2}+\frac{n-\nu}{2}} [(r+m-m')!(r+n-\nu)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right]}$$

$$\times \begin{cases} 2^{r+n-\nu} (r+m-m')! \left(\tau + \frac{q}{b}\right)^{n-\nu-(m-m')} \\ \times L_{r+m-m'}^{n-\nu-(m-m')} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right], & \text{para } n-\nu \geq m-m' \\ \\ 2^{r+m-m'} (r+n-\nu)! \left(\tau^* - \frac{q}{b}\right)^{m-m'-(n-\nu)} \\ \times L_{r+n-\nu}^{m-m'-(n-\nu)} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2\right)\right], & \text{para } n-\nu < m-m' \end{cases} \quad (5.67)$$

(5.68)

$$\text{para } \begin{cases} r \geq m' - m \\ r \geq \nu - n, \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variável (5.17), é possível escrever $W_{\alpha}^{n,\alpha}(p, q)$ para $r \geq m' - m$ e $r \geq \nu - n$ como

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}^{n,\alpha}(p,q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\sigma\delta}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2}\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu}}_{\nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{j=0}^{m \geq m'}}_{m'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+m-m'} \\
&\times \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r!i!j!} \frac{(r+n-i)!(r+m-j)!}{(r+n-\nu)!(r+m-m')!} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(m-j)!(m'-j)!} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \frac{1}{2^{r+\frac{m-m'}{2}+\frac{n-\nu}{2}}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+n-\nu} (r+m-m')! (\gamma)^{n-\nu-(m-m')} \\ \times L_{r+m-m'}^{n-\nu-(m-m')} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } n-\nu \geq m-m' \\ \\ 2^{r+m-m'} (r+n-\nu)! (-\gamma)^{m-m'-(n-\nu)} \\ \times L_{r+n-\nu}^{m-m'-(n-\nu)} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } n-\nu < m-m' \end{array} \right. \quad (5.69)
\end{aligned}$$

IV) Cálculo de $W_{\alpha}^{n,n}(p,q)$

Finalmente, iremos iniciar o cálculo da última parcela da função de Wigner para o operador densidade (4.87), ou seja, para $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_{\alpha}}^{n,n}$. Podemos escrevê-lo como:

$$\rho_{|\alpha_n(\beta)\alpha}^{n,n} = \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \kappa} \kappa} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \kappa} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{n,n}(r, n, \nu, \kappa; \beta)_\alpha |r + n - \kappa\rangle \langle r + n - \nu|; \quad (5.70)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n, \end{cases}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{n,n}(r, n, \nu, \kappa; \beta)_\alpha &\equiv (-1)^{i+j} \frac{n! \alpha^{\nu+\kappa}}{r! i! j!} \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{\sqrt{(r+n-\nu)!(r+n-\kappa)!}} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(n-j)!(\kappa-j)!} \\ &\times \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\kappa+\nu}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1 + \bar{n}(\beta)} \right]^r; \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n. \end{cases}$$

Sendo assim, a função de Wigner para (5.70) é:

$$W_\alpha^{n,n}(p, q) = \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \kappa} \kappa} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \kappa} \end{array} \right\} \rho_{i,j}^{n,n}(r, n, \nu, \kappa; \beta)_\alpha \Omega_\alpha^{n,n}(p, q). \quad (5.72)$$

Onde definimos

$$\Omega_\alpha^{n,n}(p, q) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + Q/2 | r + n - \kappa \rangle \langle r + n - \nu | q - Q/2 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} p Q} dQ; \quad (5.73)$$

$$\text{para } \begin{cases} r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n, \end{cases}$$

Desenvolvendo a equação (4.30) no que se refere às autofunções do oscilador harmônico e às

mudanças de de variáveis necessárias, respeitando os passos seguidos na seção anterior, temos:

$$\Omega_{\alpha}^{n,n}(p,q) = \frac{1}{(\pi)^{3/2} \hbar} \frac{(-1)^{r+n-\kappa}}{[2^{2r+2n-k-\nu}(r+n-\kappa)!(r+n-\nu)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right]}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} H_{r+n-\kappa} \left[\mu + \left(\tau - \frac{q}{b} \right) \right] H_{r+n-\nu} \left[\mu + \left(\tau + \frac{q}{b} \right) \right] d\mu; \quad (5.74)$$

para $\begin{cases} r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n. \end{cases}$

Solucionando a integral, temos como resultado:

$$\Omega_{\alpha}^{n,n}(p,q) = \frac{1}{(\pi)^{3/2} \hbar} \frac{(-1)^{r+n-\kappa}}{[2^{2r+2n-k-\nu}(r+n-\kappa)!(r+n-\nu)!]^{1/2}} e^{-\left[\frac{q^2}{b^2}-\tau^2\right]}$$

$$\times \begin{cases} 2^{n-\nu}(r+n-\kappa)!(\tau + \frac{q}{b})^{\kappa-\nu} \\ \times L_{r+n-\kappa}^{\kappa-\nu} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right], & \text{para } \kappa \geq \nu \\ \\ 2^{n-\kappa}(r+n-\nu)!(\tau - \frac{q}{b})^{\nu-\kappa} \\ \times L_{r+n-\nu}^{\nu-\kappa} \left[2 \left(\frac{q^2}{b^2} - \tau^2 \right) \right], & \text{para } \kappa < \nu \end{cases} \quad (5.75)$$

para $\begin{cases} r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n, \end{cases}$

Fazendo a mudança de variável (5.17), temos a função de Wigner para o operador (5.70) para $r \geq \nu - n$ e $r \geq \kappa - n$:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha}^{n,n}(p,q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1+\bar{n}(\beta)} e^{-\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu}}^{\nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \kappa}}^{\kappa} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \kappa} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+n-\kappa} \frac{n! \alpha^{\nu+\kappa}}{r! i! j!} \\
&\times \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{(r+n-\nu)!(r+n-\kappa)!} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(n-j)!(\kappa-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\kappa+\nu}} \\
&\times \frac{1}{2^{r-\frac{\kappa+\nu}{2}+n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+n-\nu} (r+n-\kappa)! (\gamma)^{\kappa-\nu} L_{r+n-\kappa}^{\kappa-\nu} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } \kappa \geq \nu \\ 2^{r+n-\kappa} (r+n-\nu)! (-\gamma)^{\nu-\kappa} L_{r+n-\nu}^{\nu-\kappa} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } \kappa < \nu \end{array} \right. \quad (5.76)
\end{aligned}$$

Importante lembrar que o resultado da função de Wigner para $\rho_{|\alpha_n(\beta)\rangle_{\alpha}}$ é dado por:

$$W_{\alpha}(p,q) = W_{\alpha}^{\alpha,\alpha}(p,q) + W_{\alpha}^{n,\alpha}(p,q) + W_{\alpha}^{\alpha,n}(p,q) + W_{\alpha}^{n,n}(p,q),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
W_\alpha(p, q) &= \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha^2}}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} \\
&\times \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}}^{m'} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa \geq \kappa'}}^{\kappa'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^{\kappa}}_{\kappa < \kappa'} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+\kappa-\kappa'} \frac{\alpha^{m+m'+\kappa+\kappa'}}{r!i!j!} \\
&\times \frac{1}{(m-i)!(m'-j)!(\kappa-i)!(\kappa'-j)!} \frac{(r+m-i)!(r+\kappa-j)!}{(r+m-m')!(r+\kappa-\kappa')!} \\
&\times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+\kappa-2(i+j)} [v(\beta)]^{m'+\kappa'}} \frac{1}{2^{r+\frac{m-m'}{2}+\frac{\kappa-\kappa'}{2}}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+m-m'} (r+\kappa-\kappa')! (\gamma)^{m-m'-(\kappa-\kappa')} \\ \times L_{r+\kappa-\kappa'}^{m-m'+\kappa-\kappa'} [2|\gamma|^2], \quad m-m' \geq \kappa-\kappa' \\ 2^{r+\kappa-\kappa'} (r+m-m')! (-\gamma)^{\kappa-\kappa'-(m-m')} \\ \times L_{r+m-m'}^{\kappa-\kappa'-(m-m')} [2|\gamma|^2], \quad m-m' < \kappa-\kappa' \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma \delta}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2} \alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^{m \geq m'}^{m'}} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{j=0}^{n \geq \nu}^{\nu}} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+n-\nu} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r! i! j!} \\
& \times \frac{(r+m-i)!(r+n-j)!}{(r+m-m')!(r+n-\nu)!} \frac{1}{(m-i)!(m'-i)!(n-j)!(\nu-j)!} \\
& \times \frac{1}{[u(\beta)]^{m+n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \frac{1}{2^{r+\frac{n-\nu}{2}+\frac{m-m'}{2}}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+m-m'} (r+n-\nu)! (\gamma)^{m-m'-(n-\nu)} \\ \times L_{r+n-\nu}^{m-m'-(n-\nu)} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } m-m' \geq n-\nu \\ \\ 2^{r+n-\nu} (r+m-m')! (-\gamma)^{n-\nu-(m-m')} \\ \times L_{r+m-m'}^{n-\nu-(m-m')} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } m-m' < n-\nu \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\sigma \delta}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\frac{3}{2} \alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{i=0}^{n \geq \nu} \nu}_{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{j=0}^{m \geq m'} m'}_{m \geq m'} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^m}_{m < m'} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+m-m'} \frac{\alpha^{m+m'+\nu} \sqrt{n!}}{r! i! j!} \\
& \times \frac{(r+n-i)!(r+m-j)!}{(r+n-\nu)!(r+m-m')!} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(m-j)!(m'-j)!} \\
& \times \frac{1}{[u(\beta)]^{n+m-2(i+j)} [v(\beta)]^{\nu+m'}} \frac{1}{2^{r+\frac{m-m'}{2}+\frac{n-\nu}{2}}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+n-\nu} (r+m-m')! (\gamma)^{n-\nu-(m-m')} \\ \times L_{r+m-m'}^{n-\nu-(m-m')} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } n-\nu \geq m-m' \\ \\ 2^{r+m-m'} (r+n-\nu)! (-\gamma)^{m-m'-(n-\nu)} \\ \times L_{r+n-\nu}^{m-m'-(n-\nu)} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } n-\nu < m-m' \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\delta^2}{\eta} \frac{1}{1 + \bar{n}(\beta)} e^{-\alpha^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{i=0}^{\nu}}^{n \geq \nu} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n}_{n < \nu} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\sum_{j=0}^{\kappa}}^{n \geq \kappa} \\ \underbrace{\sum_{j=0}^n}_{n < \kappa} \end{array} \right\} (-1)^{i+j+r+n-\kappa} \frac{n! \alpha^{\nu+\kappa}}{r! i! j!} \\
& \times \frac{(r+n-i)!(r+n-j)!}{(r+n-\nu)!(r+n-\kappa)!} \frac{1}{(n-i)!(\nu-i)!(n-j)!(\kappa-j)!} \frac{1}{[u(\beta)]^{n-2(i+j)} [v(\beta)]^{\kappa+\nu}} \\
& \times \frac{1}{2^{r-\frac{\kappa+\nu}{2}+n}} \left[\frac{\bar{n}(\beta)}{1+\bar{n}(\beta)} \right]^r e^{-|\gamma|^2} \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} 2^{r+n-\nu} (r+n-\kappa)! (\gamma)^{\kappa-\nu} L_{r+n-\kappa}^{\kappa-\nu} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } \kappa \geq \nu \\ 2^{r+n-\kappa} (r+n-\nu)! (-\gamma)^{\nu-\kappa} L_{r+n-\nu}^{\nu-\kappa} [2|\gamma|^2], \quad \text{para } \kappa < \nu \end{array} \right. \\
& \text{para } \left\{ \begin{array}{l} r \geq m' - m \\ r \geq \kappa' - \kappa \\ r \geq \nu - n \\ r \geq \kappa - n. \end{array} \right. \tag{5.77}
\end{aligned}$$

No próximo capítulo, iremos apresentar os gráficos de ambas as funções de Wigner estudadas no capítulo presente para diversas situações e fazer um estudo comparando as formas de duplicação do espaço de Hilbert envolvidas em cada função de Wigner.

6 *Análise dos resultados*

Neste capítulo, iremos utilizar um programa de computador por nós desenvolvido na linguagem de programação Fortran 90 para fazer os cálculos relativos à função de Wigner para ambas as formas de duplicação. Faremos uma varredura nas variáveis $\frac{q}{b}$ e $\frac{pb}{\hbar}$, que correspondem às partes real e imaginária de $\gamma = \frac{q}{b} + i\frac{pb}{\hbar}$, com a finalidade de obtermos gráficos em três dimensões para as temperaturas 1K, 30K e 300K. A primeira foi escolhida para que fosse possível analisar o comportamento das funções de Wigner a uma temperatura próxima do zero. A segunda, por ser uma temperatura baixa, que pode ser obtida em laboratório [40], e a última por ser próxima à temperatura ambiente. Analisamos, neste texto, a situação em que $n = 3$.

6.1 Valores dos parâmetros

Os gráficos que são apresentados nas próximas seções, foram obtidos usando os seguintes parâmetros:

- $\alpha = 1$.
- $\sigma = \delta = 1$.
- $\frac{\hbar\omega}{K_b} = 3,5\text{K}$, onde K_b é a constante de Boltzmann, correspondente a faixa de microondas do espectro eletromagnético.
- Os valores de $\frac{q}{b}$ e $\frac{pb}{\hbar}$ foram usados como coordenadas x e y, respectivamente, variando de -6 a 6 em intervalos de $0,3$.
- Todos somatórios referentes ao estado coerente têm como limite 10, ou seja, escrevemos o estado coerente da seguinte forma:

$$|\alpha\rangle = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{0!}}|0\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1!}}|1\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2!}}|2\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3!}}|3\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4!}}|4\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{5!}}|5\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6!}}|6\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{7!}}|7\rangle \\ + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{8!}}|8\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{9!}}|9\rangle + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{10!}}|10\rangle.$$

É importante notar que o fator $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{10!}}$ correspondente ao estado de Fock para $n = 10$, está na ordem de 10^{-4} . Isto indica que as parcelas correspondente aos estados de Fock superior a $n = 10$ terão uma contribuição pequena para o resultado final.

- O somatório referente à matriz densidade, associada ao estado de vácuo térmico, tem como limite 20. Para o caso em que a temperatura é de 30K, por exemplo, escrevemos

$$\begin{aligned}
 \rho_\beta = & 0,33524|0\rangle\langle 0| + 0,22286|1\rangle\langle 1| + 0,14814|2\rangle\langle 2| + 0,098480|3\rangle\langle 3| \\
 & + 0,065465|4\rangle\langle 4| + 0,043519|5\rangle\langle 5| + 0,028929|6\rangle\langle 6| \\
 & + 0,019231|7\rangle\langle 7| + 0,012784|8\rangle\langle 8| + 0,0084982|9\rangle\langle 9| \\
 & + 0,0056492|10\rangle\langle 10| + 0,0037554|11\rangle\langle 11| + 0,0024964|12\rangle\langle 12| \\
 & + 0,0016595|13\rangle\langle 13| + 0,0011032|14\rangle\langle 14| + 7,3334 \times 10^{-04}|15\rangle\langle 15| \\
 & + 4,8749 \times 10^{-04}|16\rangle\langle 16| + 3,2406 \times 10^{-04}|17\rangle\langle 17| \\
 & + 2,1542 \times 10^{-04}|18\rangle\langle 18| + 1,4320 \times 10^{-04}|19\rangle\langle 19| \\
 & + 9,5197 \times 10^{-05}|20\rangle\langle 20|. \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

Observe que parcela $|20\rangle\langle 20|$ também é da ordem de 10^{-4} , indicando novamente que as parcelas correspondentes a $|n\rangle\langle n|$, para $n > 20$, contribuirão pouco para o resultado final.

- A notação $a \gtrsim b$ indica que a é aproximadamente maior que b e a notação $a \lesssim S \lesssim b$ indica que S se situa aproximadamente entre a e b .

A análise dos gráficos se baseia na observação da figura de contorno exibida em projeção no plano do x - y das figuras que serão analisadas, sendo $x = \frac{p}{b}$ e $y = \frac{pb}{h}$; na ordenada z encontram-se os valores de $W(p, q)$ para os casos indicados na legenda de cada figura. Os valores positivos e negativos correspondem aos tons de cinza da figura projetada. Tons mais claros representam valores maiores e tons escuros representam valores menores, conforme a legenda de correspondência de "cor-valor" situada à direita de cada gráfico.

6.2 Função de Wigner para o estado $|\alpha_3(\beta)\rangle_3$ e $|\alpha_3(\beta)\rangle_\alpha$

As seções seguintes destinam-se às análises da função de Wigner associada ao estado $|\alpha_3(\beta)\rangle_\xi$, ou seja,

$$|\alpha_3(\beta)\rangle_\xi = \frac{1}{\sqrt{\eta}} [\sigma|\alpha(\beta)\rangle_\xi + \delta|n\rangle_\xi], \quad (6.2)$$

onde

$$\xi = 3, \alpha$$

representa a forma de duplicação do estado $|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta}}[\sigma|\alpha\rangle + \delta|n\rangle]$. Visando uma análise futura da função de Wigner para o estado completo, também serão gerados os gráficos da função de Wigner $W_{\alpha+n}(p, q)$ – representando oito dos dezesseis termos do estado completo –, definida como

$$W_{\alpha+n}(p, q) \equiv W_\alpha(p, q) + W_n(p, q), \quad (6.3)$$

para o caso de $n = 3$.

Serão analisadas as quatro parcelas de (5.44) e (5.77) separadamente, e indicadas as regiões de classicalidade e não classicalidade da parcela em questão, bem como a superposição das quatro parcelas da função de Wigner $W_\xi(p, q)$. Também será analisada a função de Wigner $W_{\alpha+n}(p, q)$ e suas parcelas correspondentes à soma das parcelas definidas por

$$W_{\alpha+n}^{\mu, \nu} = W_\alpha^{\mu, \nu}(p, q) + W_n^{\mu, \nu}(p, q), \quad (6.4)$$

onde μ e ν podem assumir os valores $\mu, \nu = \alpha, n$.

Para uma melhor análise dos gráficos, tomemos o módulo de γ , dado por

$$|\gamma| = \left[\frac{q^2}{b^2} + \frac{p^2 b^2}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.5)$$

6.3 $W_3(p, q)$ para $T = 1\text{K}$

Iniciaremos a análise para a temperatura de 1K. Abaixo seguem as figuras 6.1–6.5 representando a função de Wigner $W_3(p, q)$ e suas respectivas parcelas versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{\hbar}\right)$, para a temperatura de 1K.

Notemos na figura 6.4, que a parcela $W_3^{\alpha, 3}(p, q)$ é a menos expressiva. Mesmo apresentando valores negativos e positivos, eles alcançam somente a ordem de 10^{-11} podendo ser con-

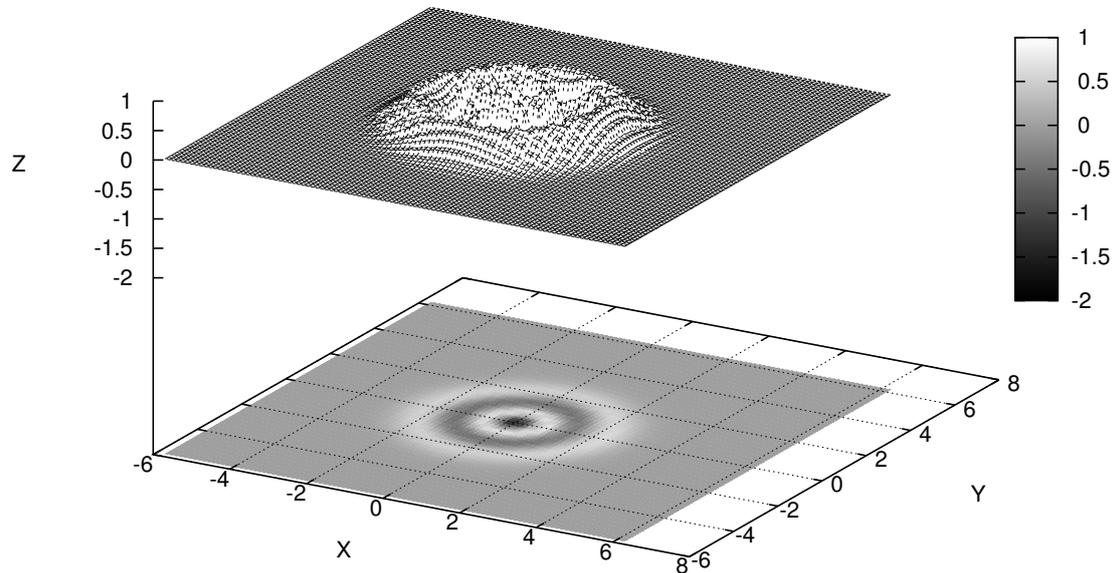


Figura 6.1: Gráfico de $W_3(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{\hbar}\right)$ para temperatura de 1K.

siderada desprezível em relação as outras parcelas. A parcela mais expressiva é a $W_3^{3,3}(p, q)$, em que os números variam entre 1 e -2 , de forma que a função de Wigner total, $W_3(p, q)$, é aproximadamente igual à parcela $W_3^{3,3}(p, q)$. Nesta parcela, os valores negativos mais significativos se encontram em torno dos pontos onde o momento e a posição se aproximam de zero. As demais parcelas alcançam somente a ordem de 10^{-2} .

Verificamos que existe uma simetria radial. Além disto, encontramos outra região onde os valores são negativos, expressando a não classicalidade do estado. Esta região é aquela em que $R \approx 1$. Para valores em que $\frac{q}{b}$ e $\frac{pb}{\hbar}$ sejam maiores que 3, vemos que a função de Wigner é nula.

Fazendo uma análise das figuras 6.3–6.4, observamos que apesar de apresentarem valores de ordens diferentes, $W_n^{3,\alpha}(p, q)$ e $W_n^{\alpha,3}(p, q)$ têm valores positivos e negativos praticamente nas mesmas regiões, evidenciando assim uma simetria (na forma do gráfico) entre os dois termos.

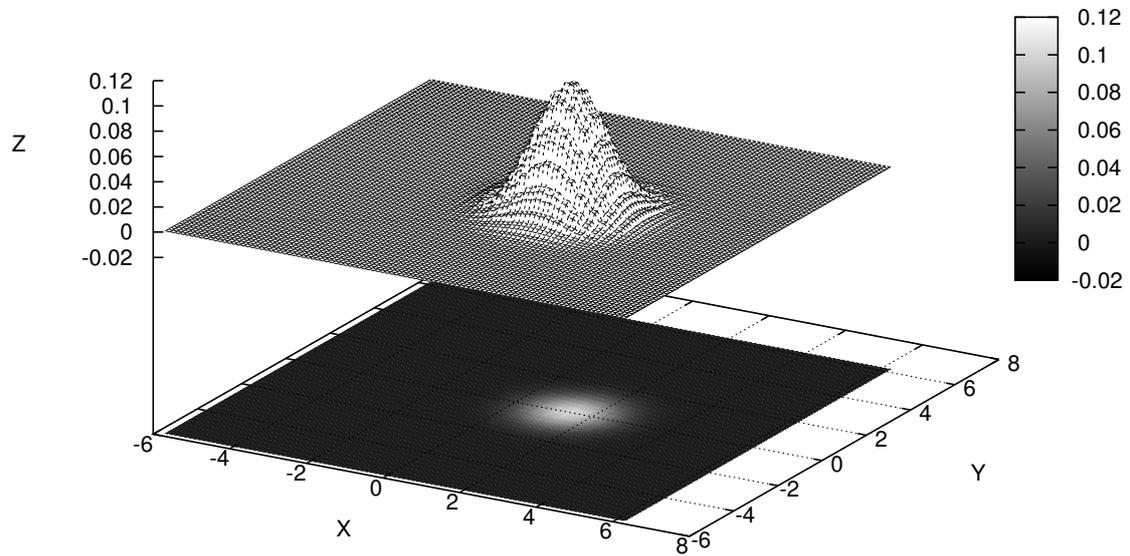


Figura 6.2: Gráfico de $W_3^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 1K.

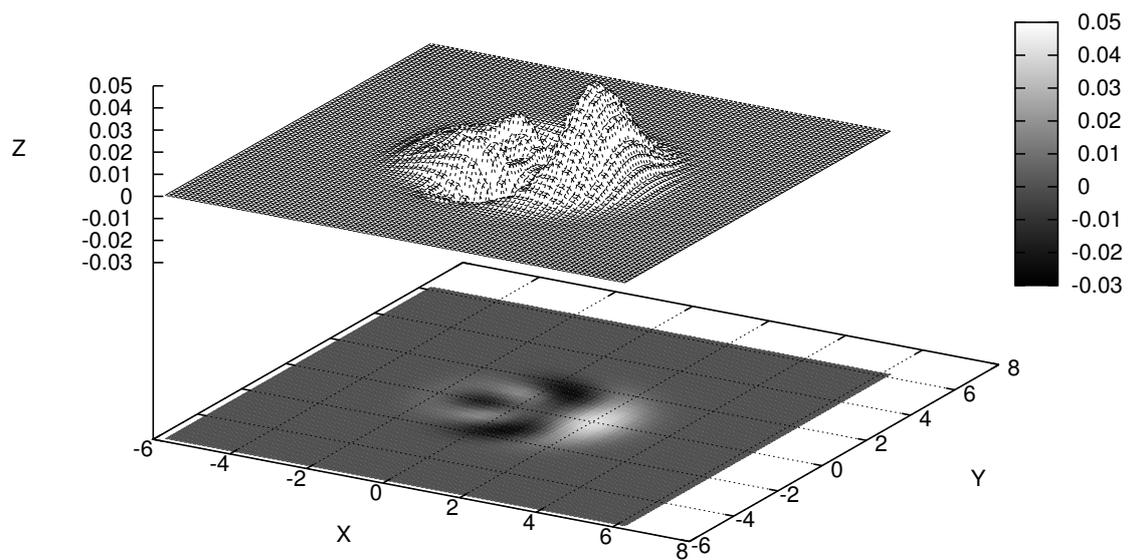


Figura 6.3: Gráfico de $W_3^{3, \alpha}(p, q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 1K.

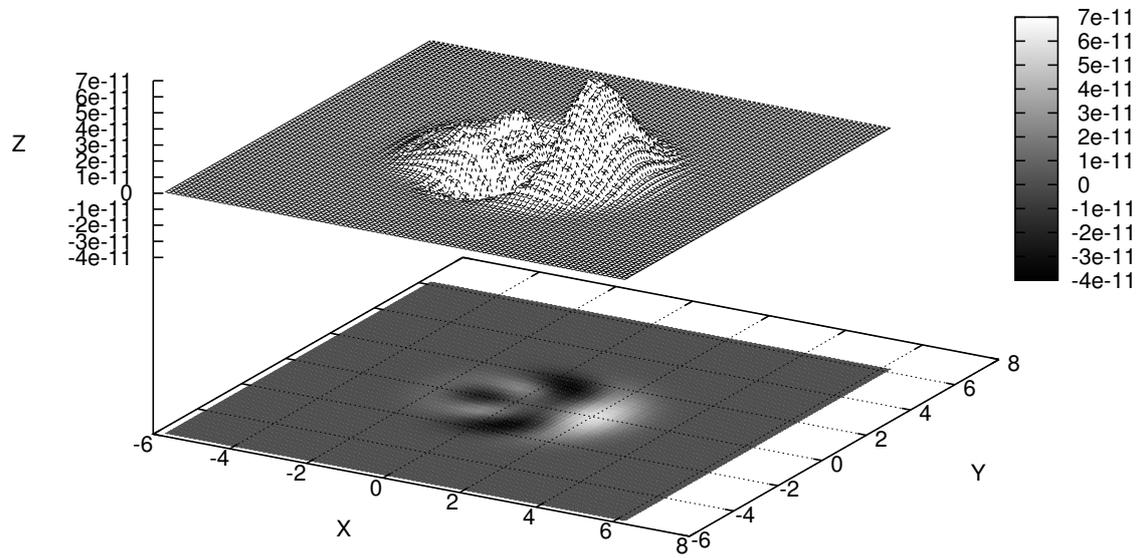


Figura 6.4: Gráfico de $W_3^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

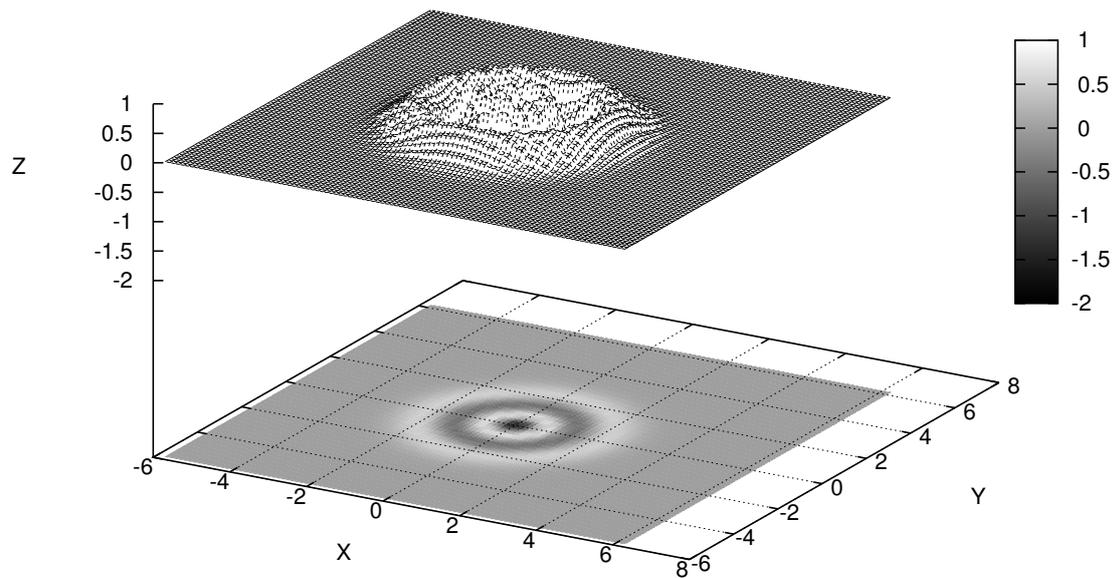


Figura 6.5: Gráfico de $W_3^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

6.4 $W_\alpha(p, q)$ para $T = 1\text{K}$

Analisaremos agora os gráficos referentes à função de Wigner $W_\alpha(p, q)$, assim como de suas parcelas representadas pelos eixos verticais das figuras 6.6–6.10 versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{\hbar}\right)$, representados pelos eixos horizontais.

Inicialmente, devemos ressaltar que a parcela $W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q)$, expressa aqui pela figura 6.7, é totalmente independente do número de fótons, já que somente o estado $|\alpha, \tilde{\alpha}; \beta\rangle$ e seu dual participam da construção da matriz densidade que dá origem a este termo.

Esta parcela, junto com $W_\alpha^{n, \alpha}(p, q)$ e $W_\alpha^{\alpha, n}(p, q)$ (figuras 6.8–6.9), alcançam valores positivos da ordem de 10^{-6} até valores negativos da ordem de 10^{-7} . Contudo, estas três parcelas contribuem pouco para a função de Wigner total (figura 6.6), que alcança valores positivos e negativos da ordem de 10^{-4} . A parcela $W_\alpha^{n, n}(p, q)$ (figura 6.10) é a que mais contribui para $W_\alpha(p, q)$, sendo a de maior relevância.

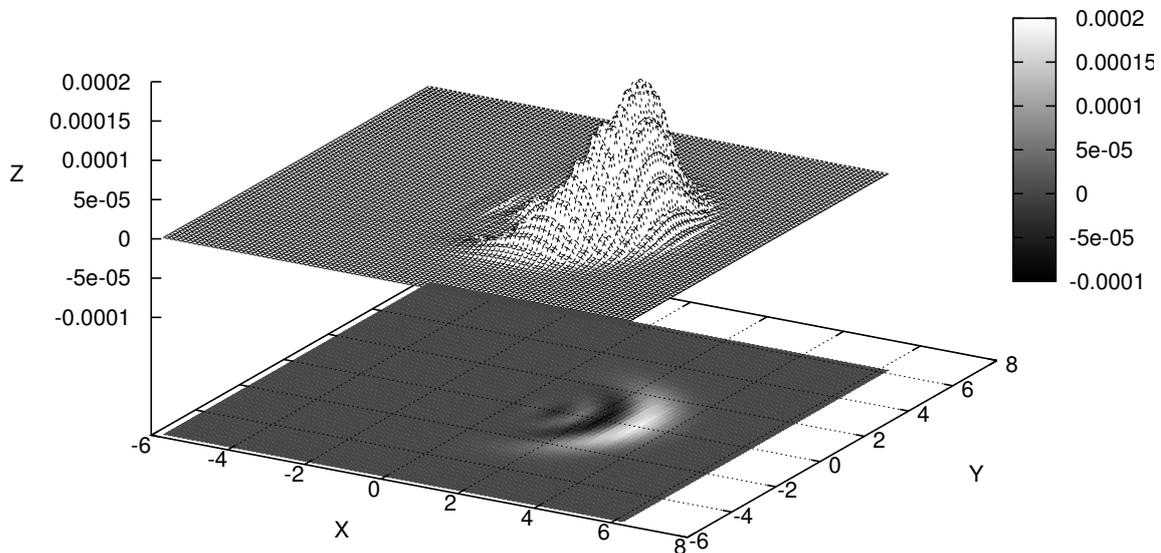


Figura 6.6: Gráfico de $W_\alpha(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{\hbar}\right)$ para temperatura de 1K.

Para todas as parcelas, os valores expressivos da função de Wigner aparecem sempre para posições q positivas. Observando as figuras de contorno em cada gráfico, nota-se uma simetria radial, em que os valores negativos mais expressivos (não-classicalidade do estado), encontram-se na região onde $\frac{q}{b}$ está aproximadamente no intervalo $(2, 3)$ e $\frac{pb}{\hbar}$ aproximadamente no intervalo

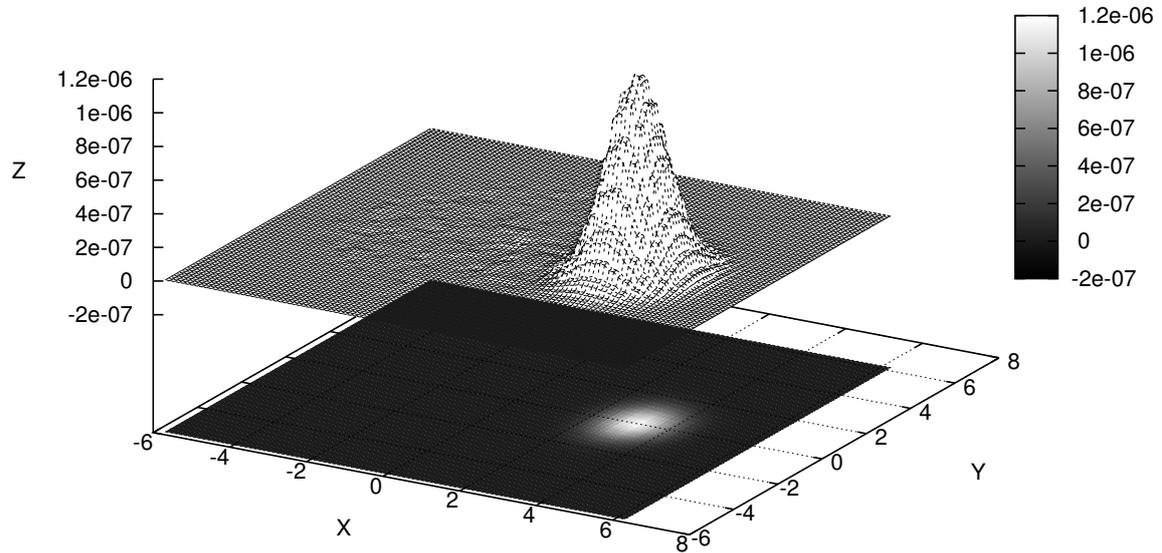


Figura 6.7: Gráfico de $W_{\alpha}^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

$(-2, 2)$. Os valores positivos mais expressivos se encontram em uma região em que os valores de $\frac{q}{b}$ estão aproximadamente no intervalo $(3, 4)$ e os valores de $\frac{pb}{h}$ aproximadamente no intervalo $(-2, 2)$.

Verifica-se também que os valores das parcelas $W_{\alpha}^{n, \alpha}(p, q)$ e $W_{\alpha}^{\alpha, n}(p, q)$ são semelhantes. Isto pode ser explicado com a análise das suas expressões matemáticas que são simétricas.

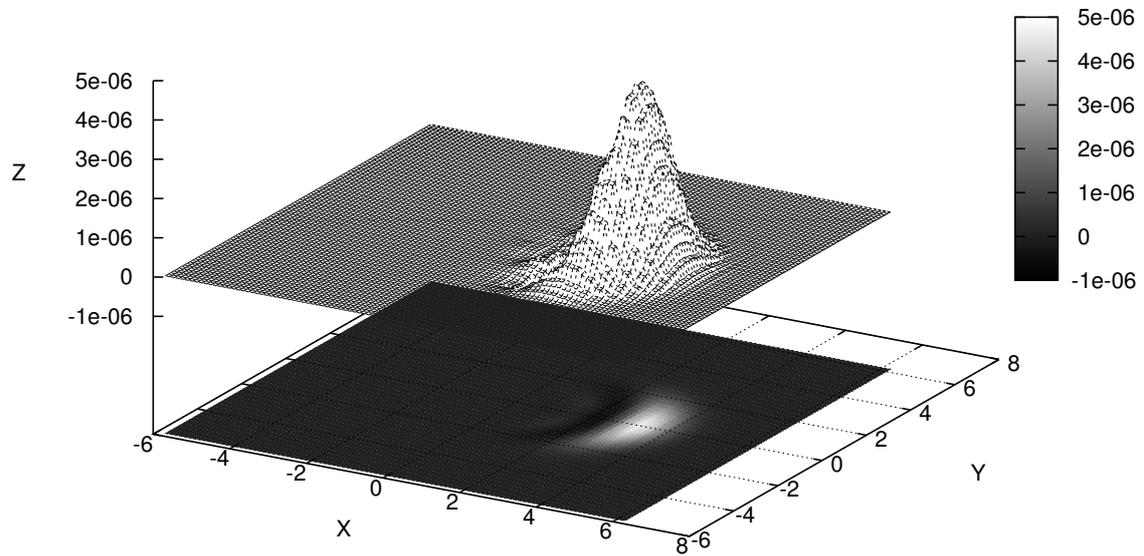


Figura 6.8: Gráfico de $W_\alpha^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

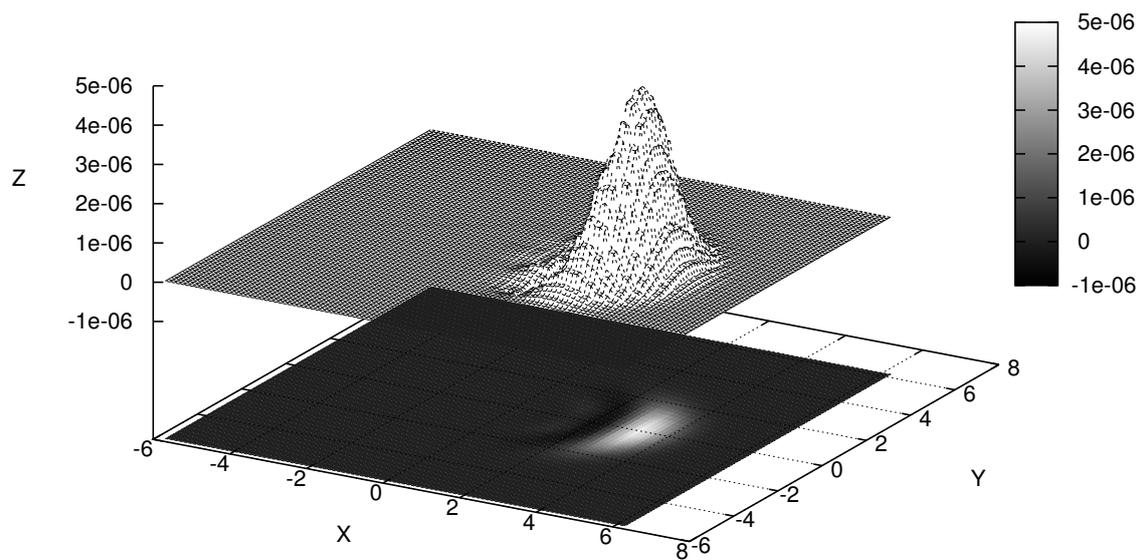


Figura 6.9: Gráfico de $W_\alpha^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

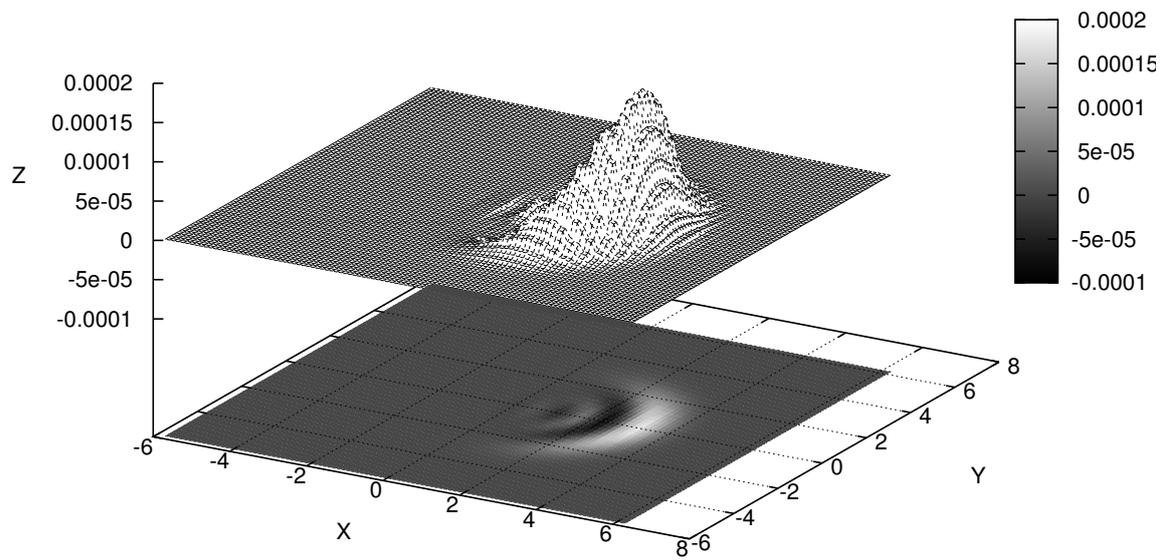


Figura 6.10: Gráfico de $W_{\alpha}^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

6.5 $W_{\alpha+3}(p, q)$ para $T = 1K$

Vamos agora, como um primeiro passo para o entendimento do estado geral, analisar a superposição de todas as parcelas envolvidas em $W_3(p, q)$ e $W_\alpha(p, q)$, denotada por $W_{\alpha+3}(p, q)$.

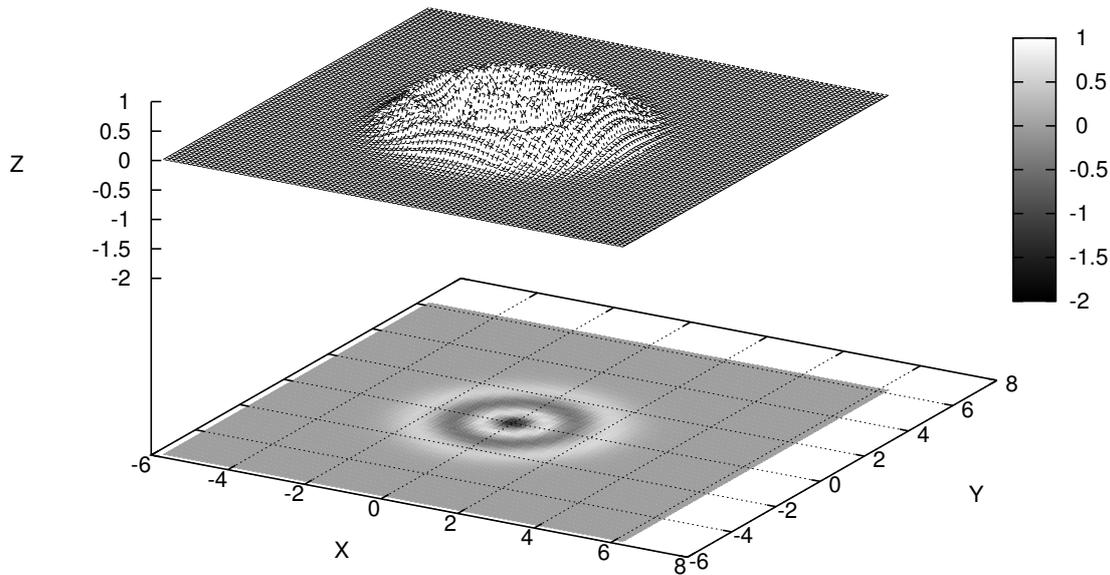


Figura 6.11: Gráfico de $W_{\alpha+3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{\hbar}\right)$ para temperatura de 1K.

Notamos que as parcelas $W_{\alpha+3}^{\alpha, \alpha}(p, q)$, $W_{\alpha+3}^{3, \alpha}(p, q)$ e $W_{\alpha+3}^{3, 3}(p, q)$ são contribuições da função de Wigner $W_3(p, q)$. Constataremos isto se fizermos uma comparação entre figuras 6.2 e 6.12, 6.3 e 6.13, 6.5 e 6.15. Ao passo que, se compararmos as figuras 6.9 e 6.14, veremos que somente a parcela $W_{\alpha+3}^{\alpha, n}(p, q)$ é contribuição da função de Wigner $W_\alpha(p, q)$.

Além disto, temos que a parcela maior de influência para a superposição $W_{\alpha+3}(p, q)$ é o termo $W_3^{3, 3}(p, q)$. Isto fica evidente ao compararmos as figuras 6.5 e 6.15. Ao analisarmos as expressões de $W_n^{n, n}(p, q)$ (equação (5.43)), e as expressões das demais parcelas envolvidas em $W_{\alpha+3}(p, q)$, observamos que (5.43) contém apenas um somatório cujo limite é infinito. As demais parcelas, têm em suas expressões uma quantidade maior de somas infinitas. Tal fato pode ser determinante para que $W_n^{n, n}(p, q)$ seja a parcela dominante na superposição $W_{\alpha+3}(p, q)$.

Para chegarmos a outras conclusões, analisaremos também como estas mesmas parcelas se comportam em outras temperaturas, a citar 30K e 300K, o que será realizada nas seções seguintes.

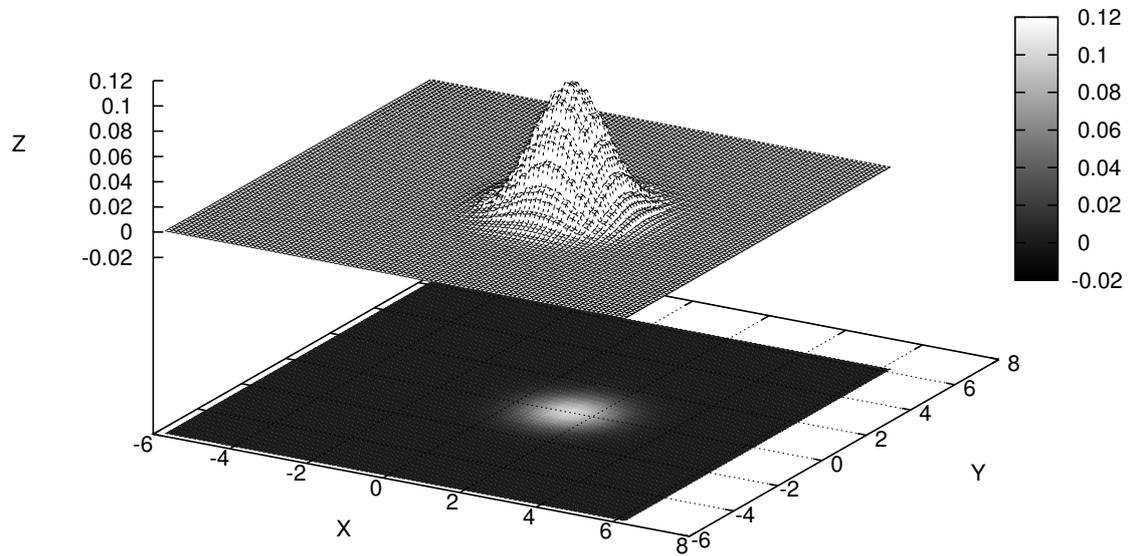


Figura 6.12: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,\alpha}(p,q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 1K.

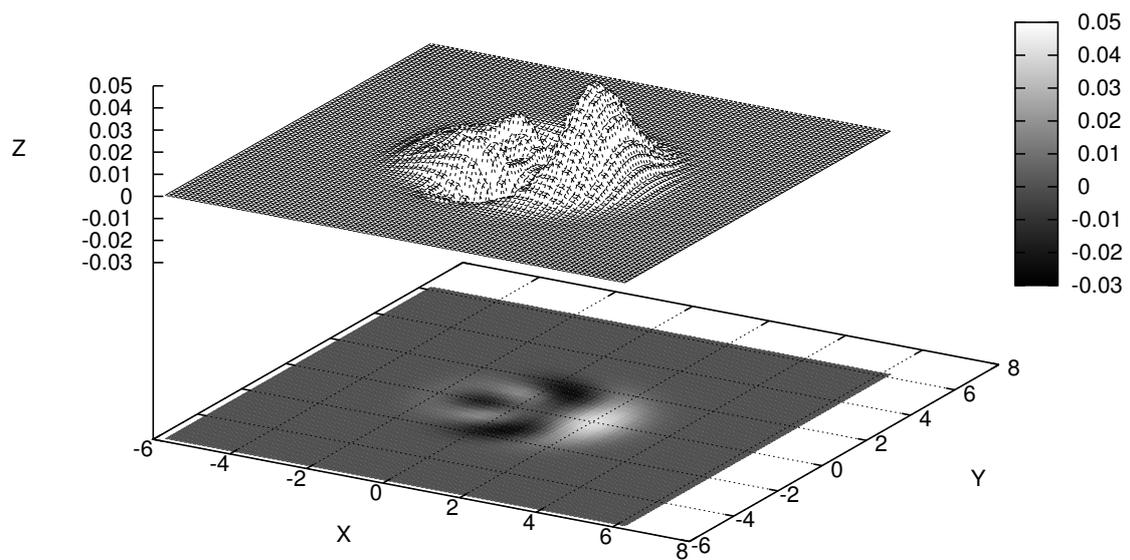


Figura 6.13: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,\alpha}(p,q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 1K.

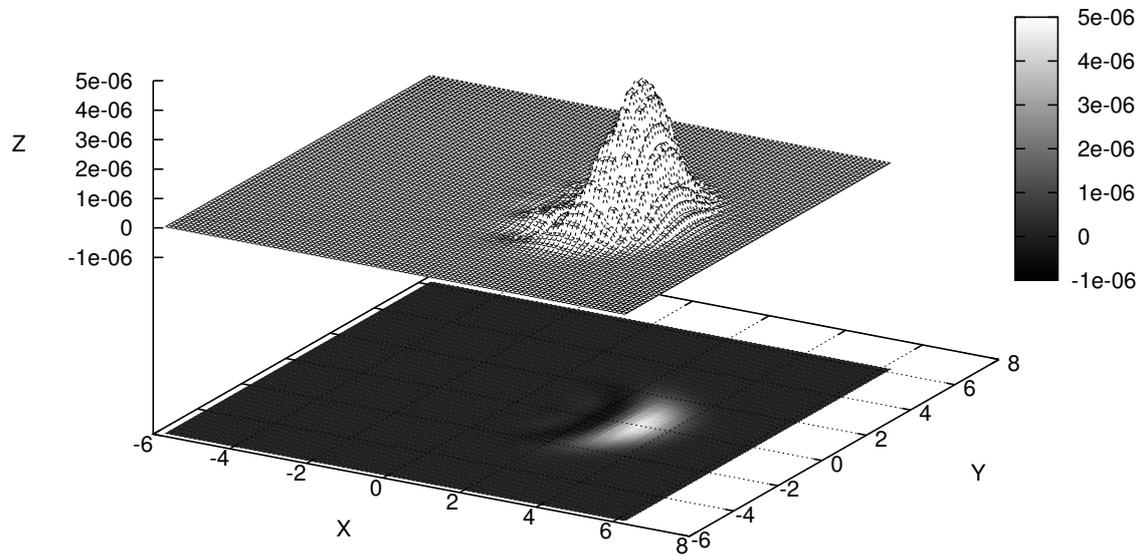


Figura 6.14: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

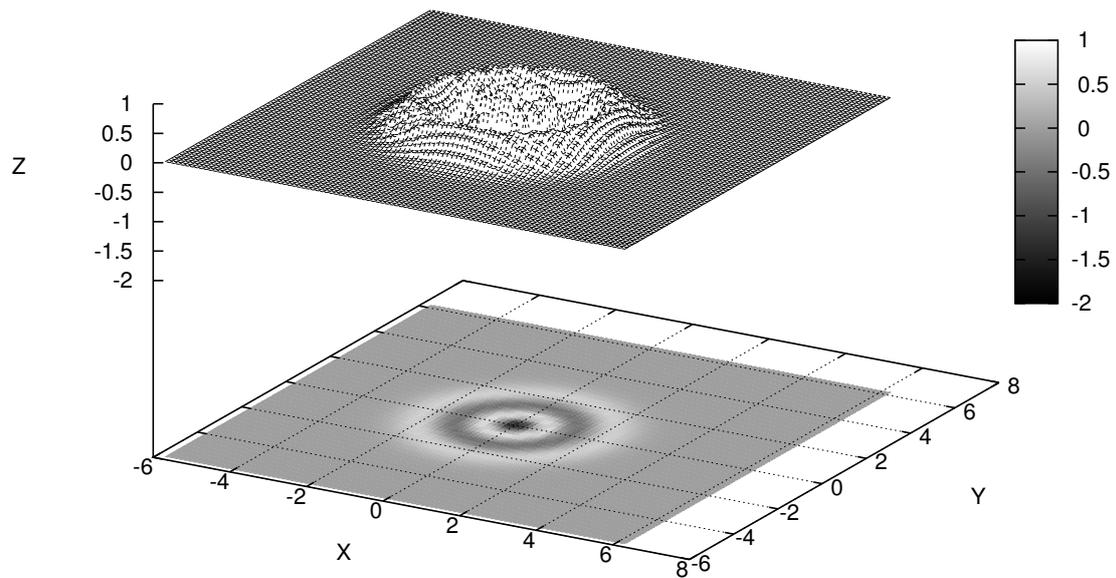


Figura 6.15: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 1K.

6.6 $W_3(p, q)$ para $T = 30\text{K}$

Iremos analisar agora os gráficos referentes a função de Wigner $W_3(p, q)$ para temperatura de 30K.

Apesar das parcelas $W_3^{\alpha, \alpha}(p, q)$, $W_3^{3, \alpha}(p, q)$, $W_3^{\alpha, 3}(p, q)$ (figuras 6.17–6.19) ganharem mais expressividade quando comparadas às mesmas parcelas para 1K (figuras 6.2–6.4), ainda são irrelevantes quando comparadas a parcela $W_3^{3, 3}(p, q)$ (figura 6.20), que domina a função de Wigner $W_3(p, q)$ (figura 6.16).

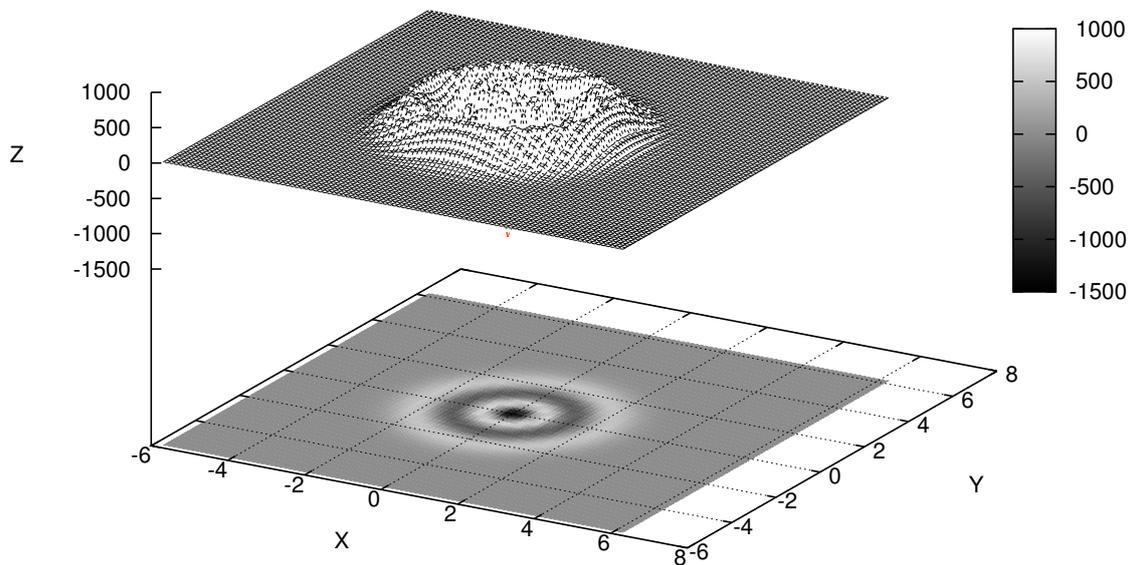


Figura 6.16: Gráfico de $W_3(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

Para temperaturas de 1K e 30K, as funções de Wigner $W_3(p, q)$ exibem a mesma forma, como é possível observar comparando as figuras 6.1 e 6.16. No entanto, para 30K, $W_3(p, q)$ alcança valores mais expressivos.

Observamos que para regiões do gráfico da figura 6.16, onde a posição q e o momento p se aproximam do zero, a função é negativa, alcançando a ordem de 10^3 . Para regiões onde $|\gamma| \approx 1$, a função também se encontra em regiões negativas. Estas duas regiões são responsáveis pelo caráter quântico do estado $|\alpha_3(\beta)\rangle_3$. Regiões onde $|\gamma| > 3$, a função retoma um valor nulo. As demais, representadas pelas áreas mais claras da figura, são positivas, expressando a classicalidade do estado.

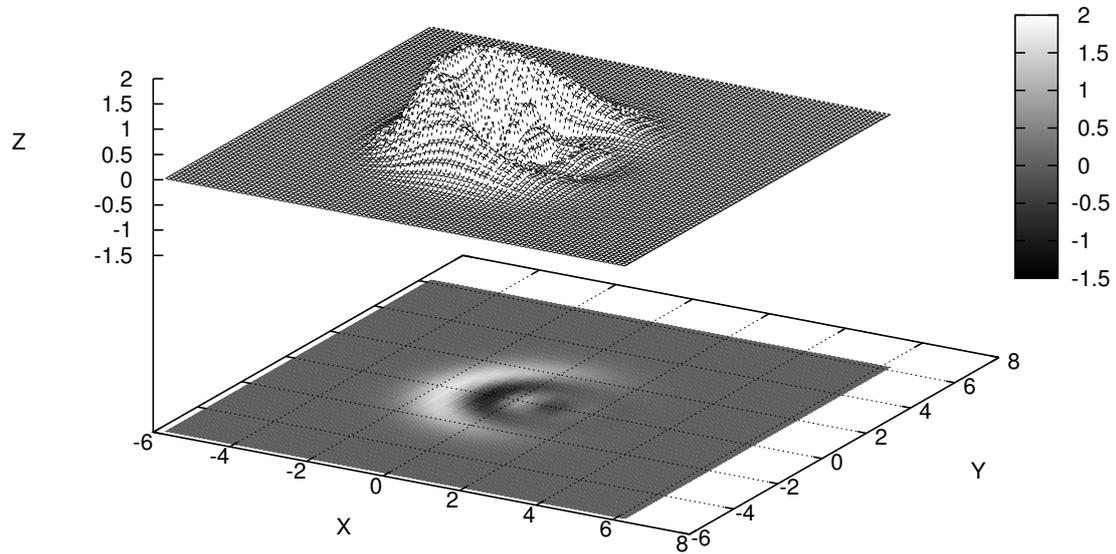


Figura 6.17: Gráfico de $W_3^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 30K.

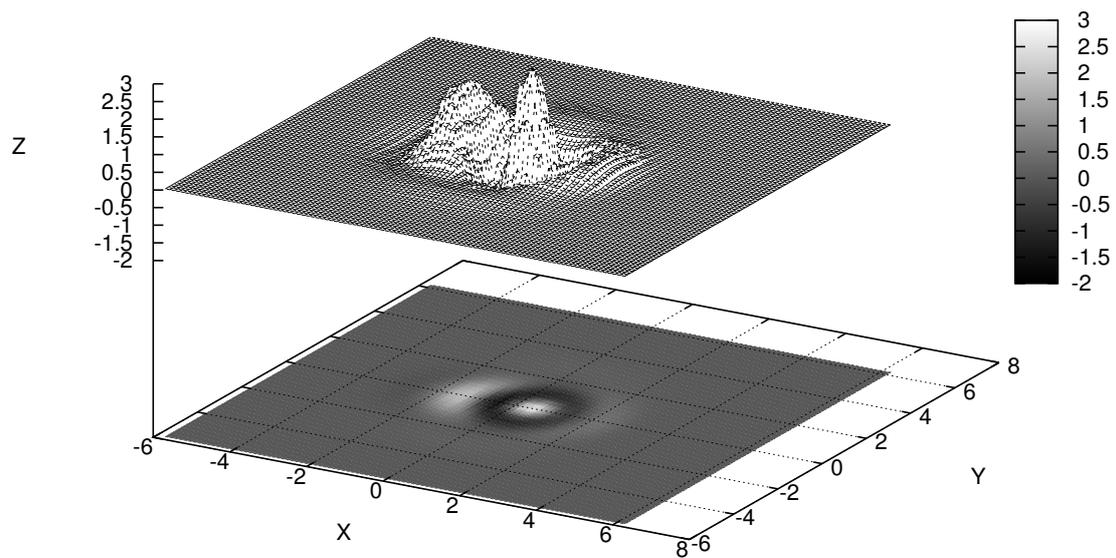


Figura 6.18: Gráfico de $W_3^{3, \alpha}(p, q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 30K.

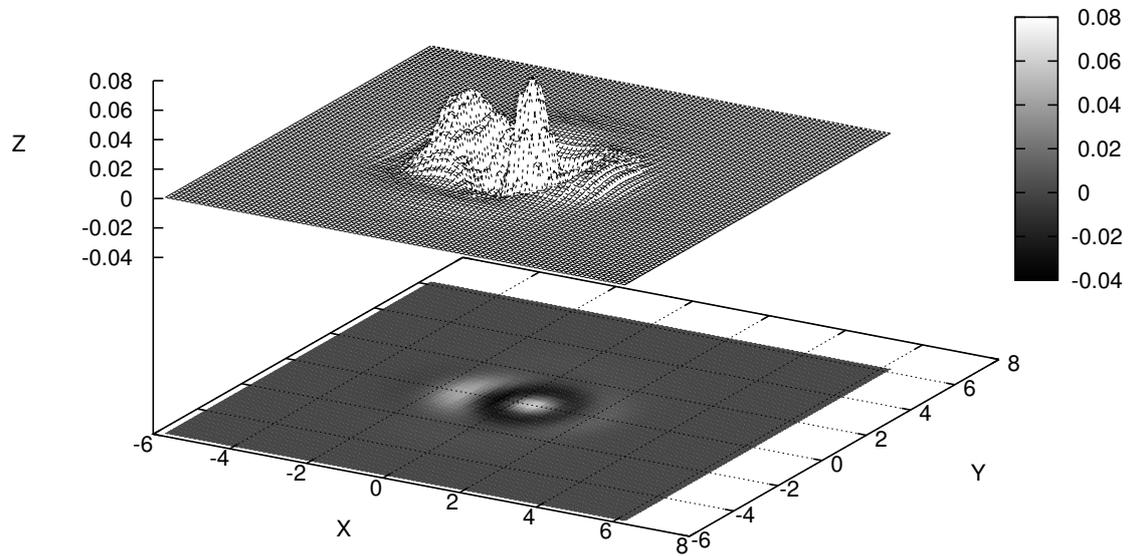


Figura 6.19: Gráfico de $W_3^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

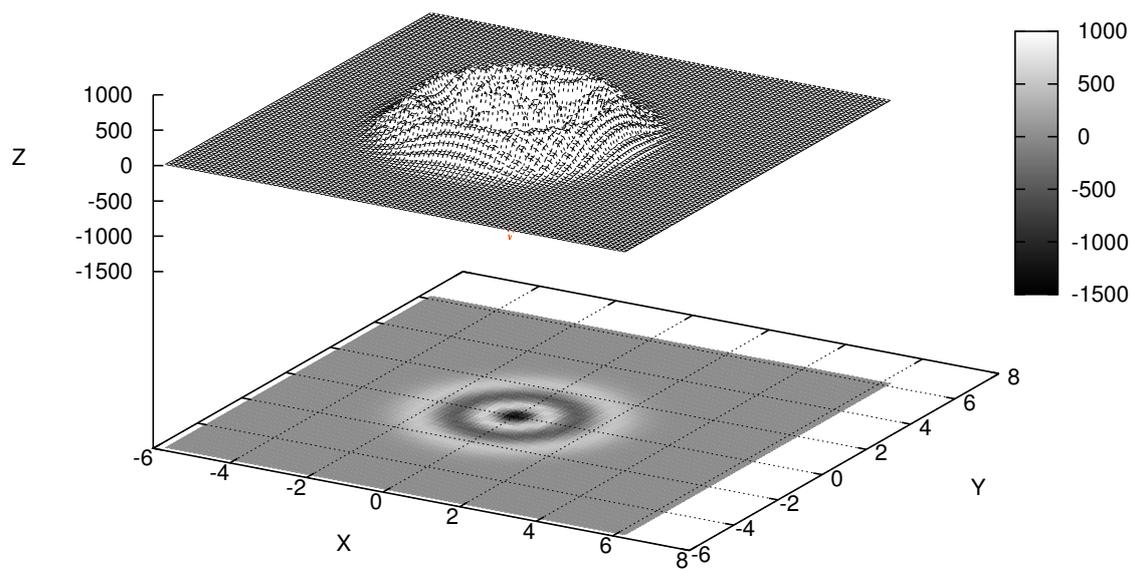


Figura 6.20: Gráfico de $W_3^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

6.7 $W_\alpha(p, q)$ para $n = 3$ e $T = 30\text{K}$

Analisaremos agora a função de Wigner $W_\alpha(p, q)$ para $n = 3$ e $T = 30\text{K}$.

Ao compararmos as parcelas $W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q)$, $W_\alpha^{3, \alpha}(p, q)$, $W_\alpha^{\alpha, 3}(p, q)$ (figuras 6.7–6.9) com as mesmas parcelas para a temperatura de 30K (figuras 6.22–6.24) notamos, que da mesma forma que na seção anterior, as parcelas referentes a temperatura de 30K obtiveram valores mais expressivos, alcançando valores até a ordem 10^{-3} . Porém estes valores se tornam desprezíveis se comparados à parcela $W_\alpha^{3, 3}(p, q)$ (ordem de 10^{-1}), o que a torna praticamente igual a $W_\alpha(p, q)$.

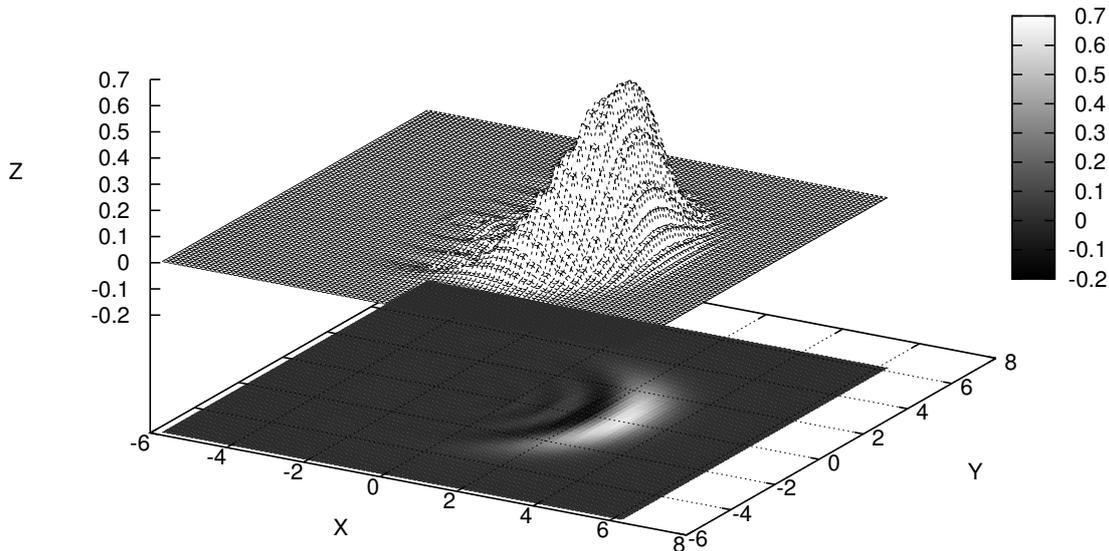


Figura 6.21: Gráfico de $W_\alpha(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

Fazendo uma comparação entre as funções de Wigner $W_\alpha(p, q)$ para 1K e 30K (figuras 6.6 e 6.21), notamos que a parcela referente a 30K continua mantendo os valores mais expressivos para posição q positivas. Notamos também que a forma do gráfico, dado pela 6.21, revela com mais clareza a simetria radial e possui dois picos negativos. Estes picos representam a não-classicalidade do sistema, e se situam nas regiões onde $|\gamma| \approx \frac{1}{2}$ e $1 \lesssim |\gamma| \lesssim 2$. Para valores de $|\gamma| \gtrsim 4$, temos $W_\alpha(p, q)$ praticamente nulos. A classicalidade do estado $|\alpha_n(\beta)\rangle_\alpha$ se encontra nas regiões mais claras da projeção do gráfico. Observamos, além disto, que as regiões de classicalidade e de não-classicalidade são as mesmas em $W_\alpha(p, q)$ para as temperaturas de 1K e 30K.

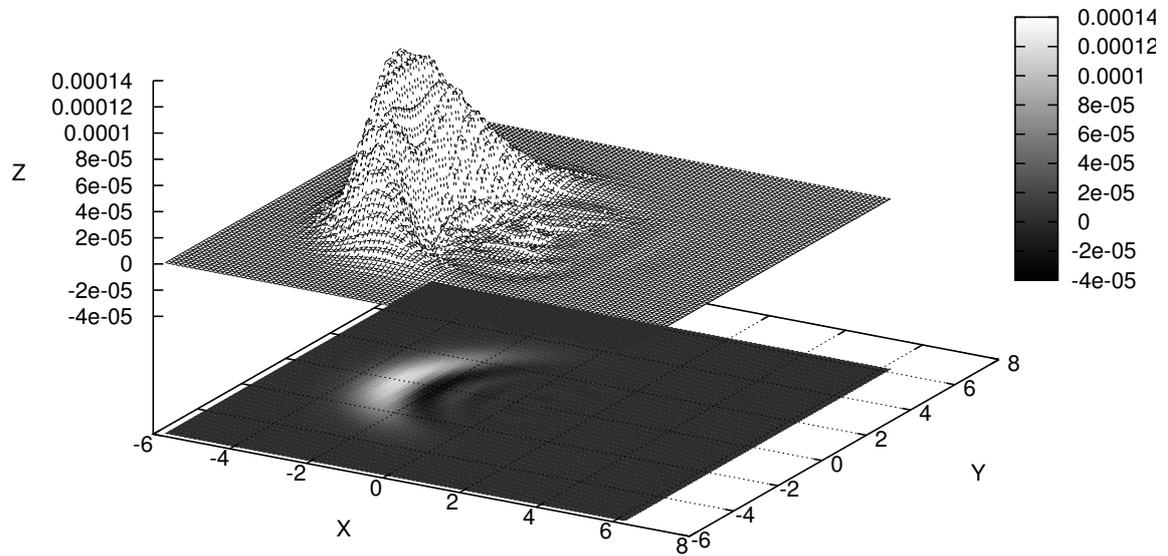


Figura 6.22: Gráfico de $W_{\alpha}^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

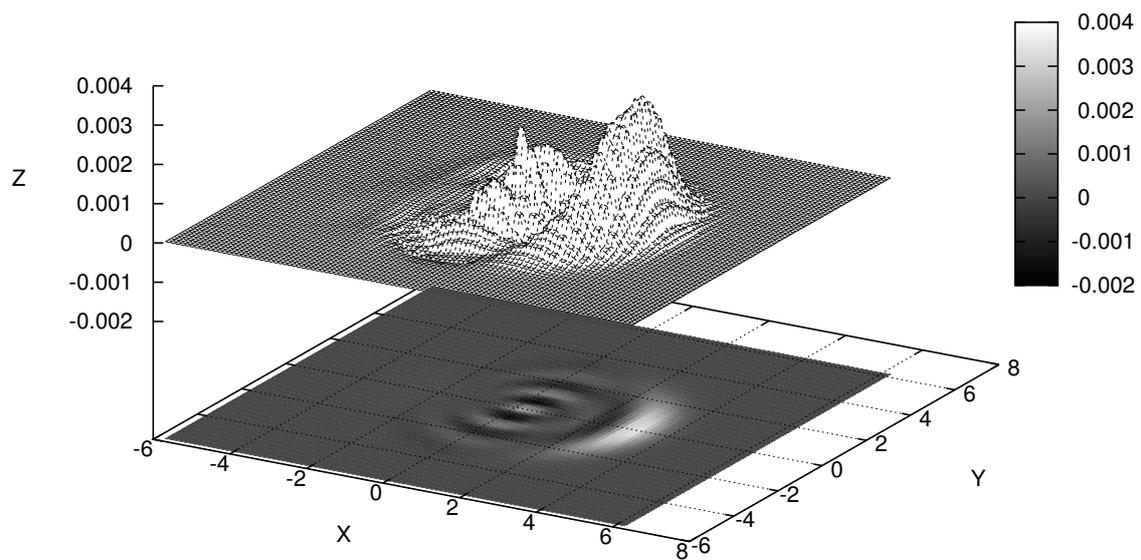


Figura 6.23: Gráfico de $W_{\alpha}^{3, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

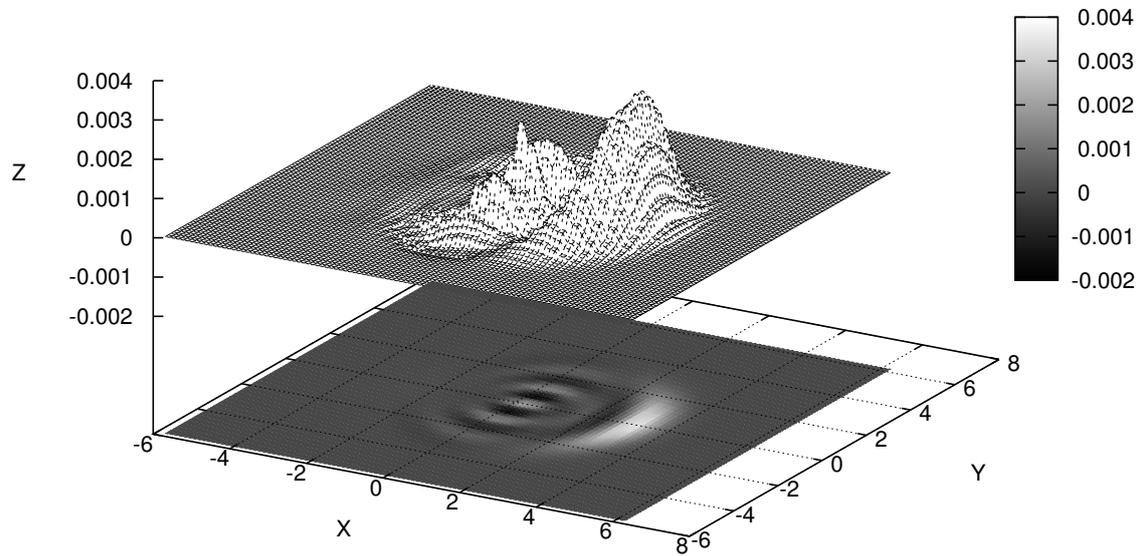


Figura 6.24: Gráfico de $W_{\alpha}^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

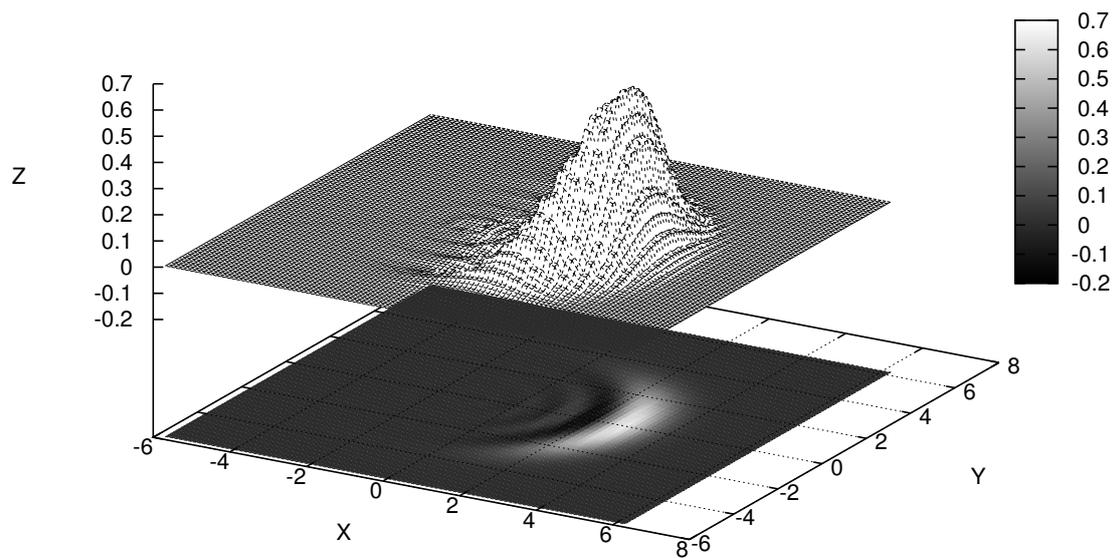


Figura 6.25: Gráfico de $W_{\alpha}^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

6.8 $W_{\alpha+3}(p, q)$ para $T = 30\text{K}$

Vamos estudar agora a superposição $W_{\alpha+3}(p, q)$ para a temperatura de 30K.

Notamos que, mesmo com uma rápida análise, existe uma correspondência direta entre as parcelas de $W_{\alpha+3}(p, q)$ (figuras 6.27–6.30) e as parcelas de $W_3(p, q)$ (figuras 6.17–6.20). Ou seja, nenhuma das parcelas de $W_\alpha(p, q)$ é relevante para a superposição $W_{\alpha+3}(p, q)$. Resulta que a superposição completa, assim como no caso da temperatura $T = 1\text{K}$, é igual praticamente ao termo $W_3^{3,3}(p, q)$.

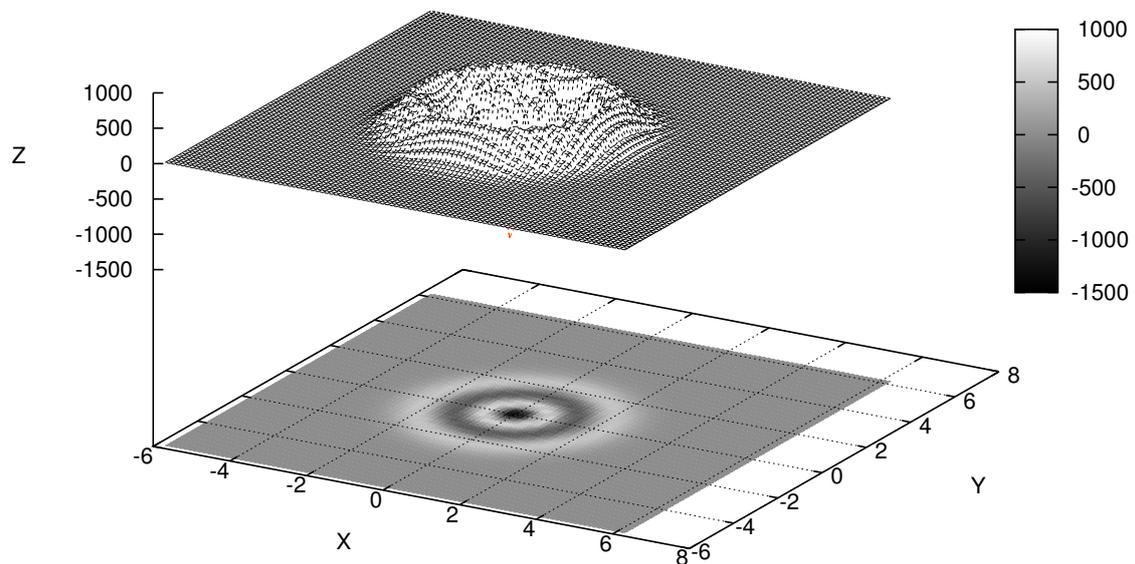


Figura 6.26: Gráfico de $W_{\alpha+3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 30K.

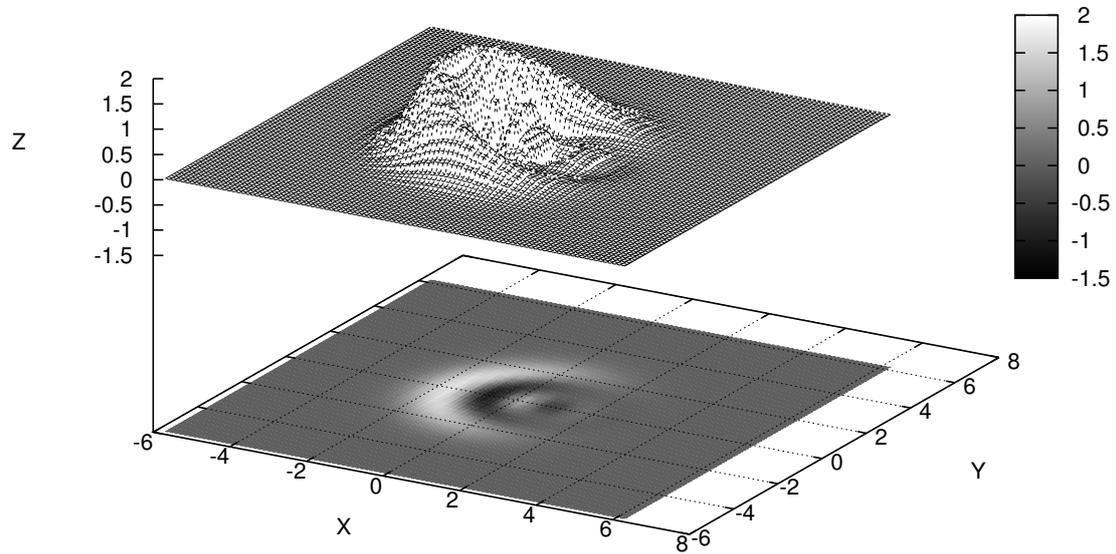


Figura 6.27: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,\alpha}(p,q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 30K.

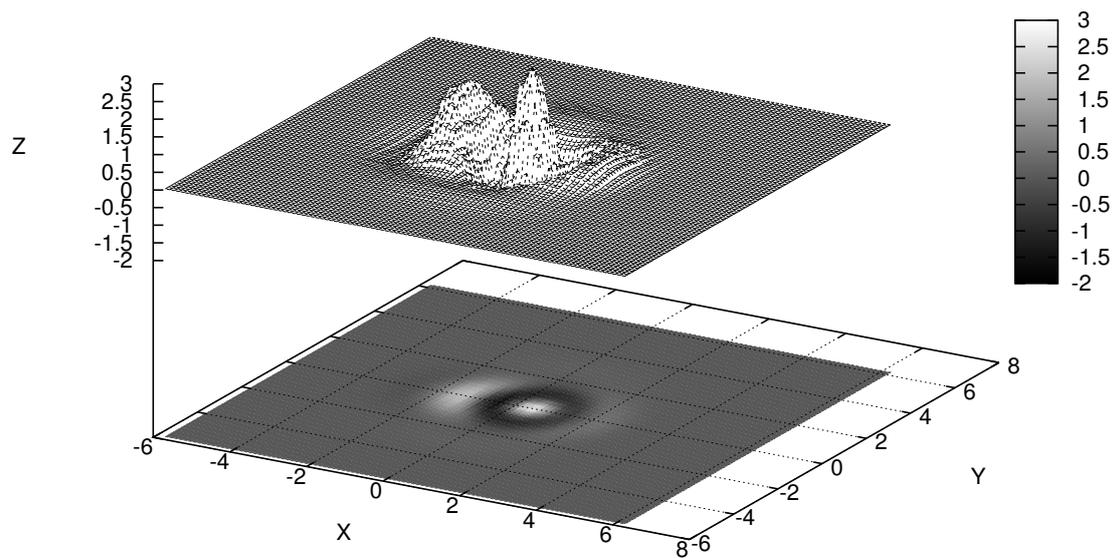


Figura 6.28: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,\alpha}(p,q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 30K.

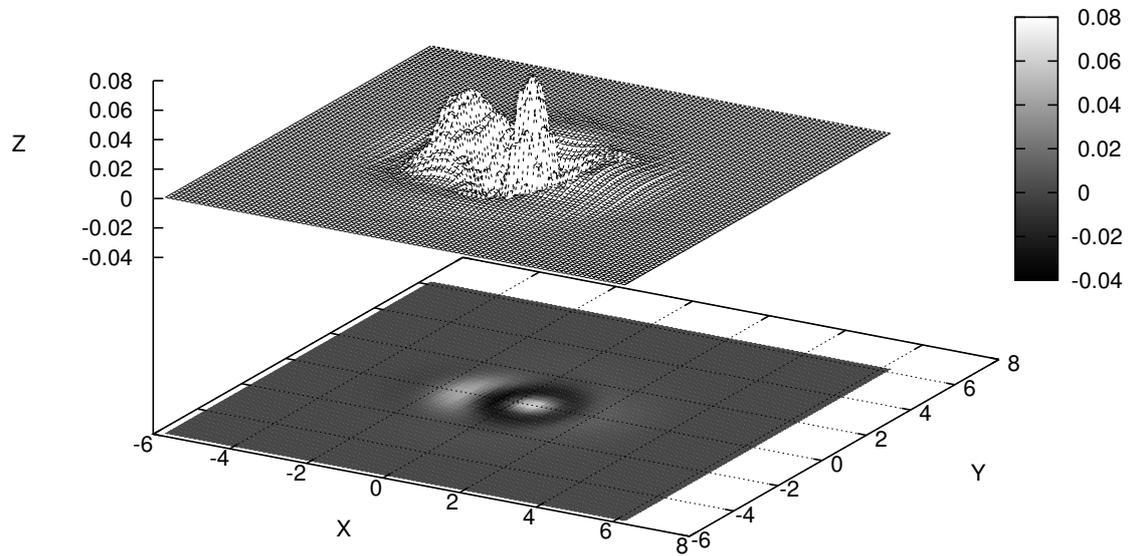


Figura 6.29: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,3}(p, q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 30K.

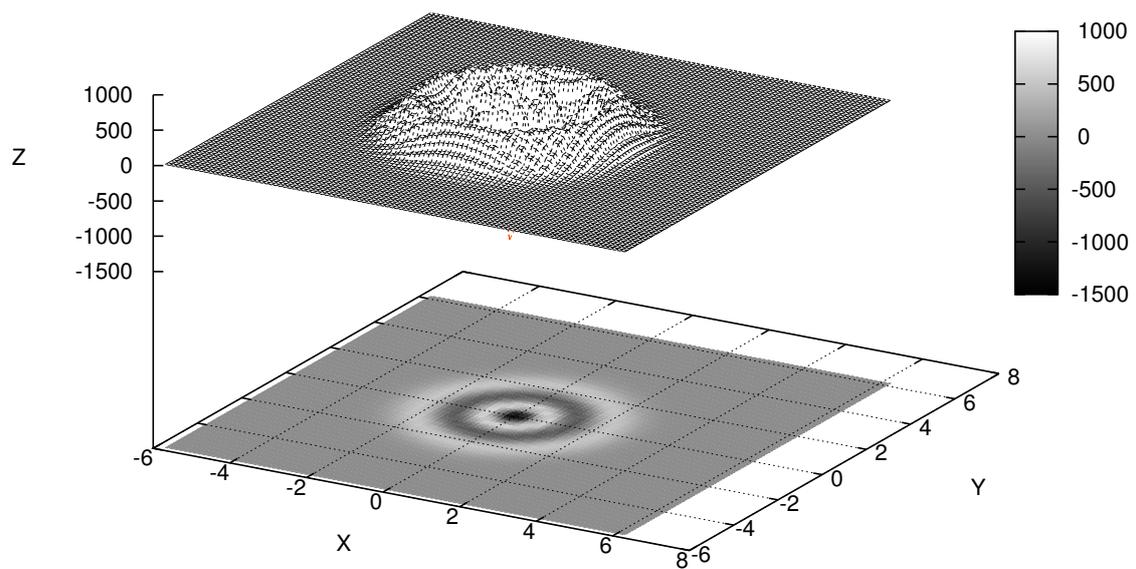


Figura 6.30: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,3}(p, q)$ versus $(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h})$ para temperatura de 30K.

6.9 $W_3(p, q)$ para $T = 300\text{K}$

Nesta seção, iremos estudar o comportamento da função de Wigner $W_3(p, q)$ para a temperatura de $T = 300\text{K}$.

Novamente, se repete aqui o que ocorreu nas seções anteriores destinadas ao estudo das parcelas $W_3(p, q)$: mesmo com considerável expressividade das parcelas $W_n^{\alpha, \alpha}(p, q)$, $W_n^{3, \alpha}(p, q)$ e $W_n^{\alpha, 3}(p, q)$ (figuras 6.32–6.34), alcançando essas parcelas valores na ordem de 10^2 até 10^4 , não foram elas suficientes para concorrer com a parcela $W_3^{3, 3}(p, q)$ (figura 6.35), que alcança valores da ordem de 10^6 . Esta parcela domina a função de Wigner $W_3(p, q)$ (figuras 6.31 e 6.35). Também observamos que as regiões de classicalidade e não-classicalidade do estado $|\alpha_3(\beta)\rangle_3$ são as mesmas observadas nas seções anteriores.

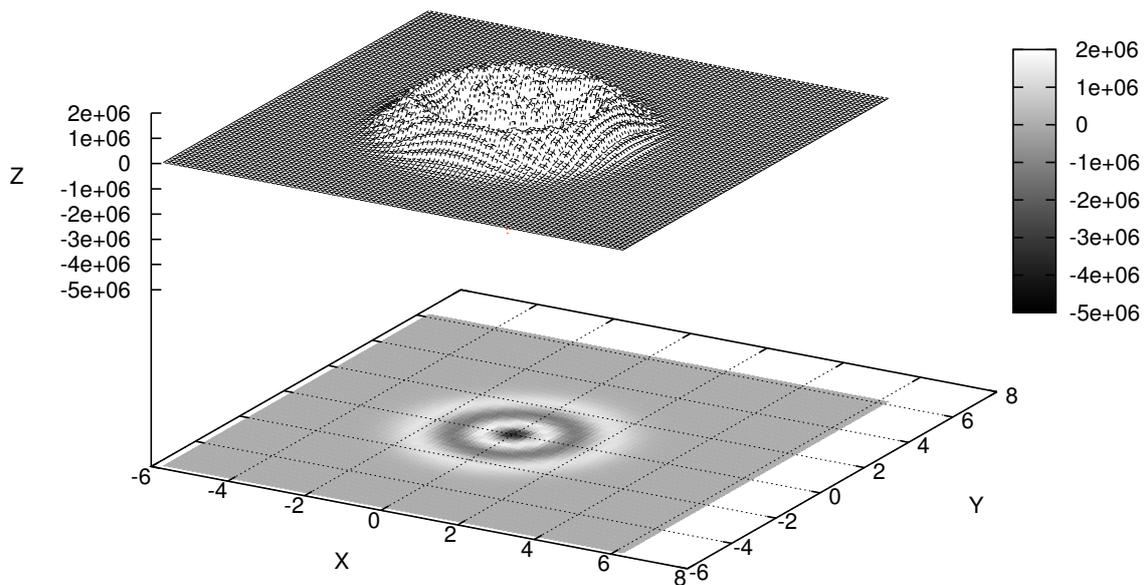


Figura 6.31: Gráfico de $W_3(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

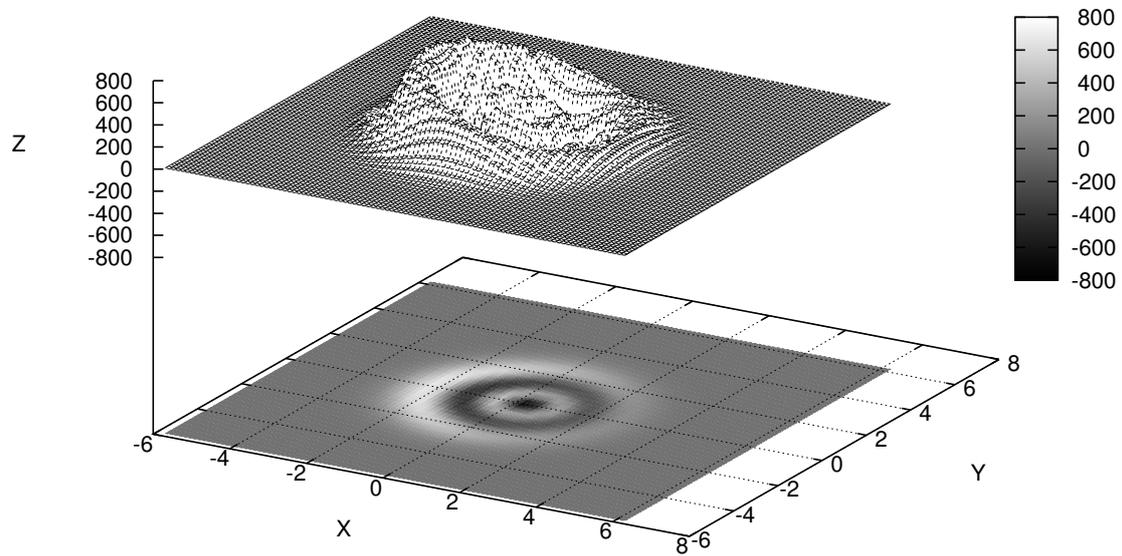


Figura 6.32: Gráfico de $W_3^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

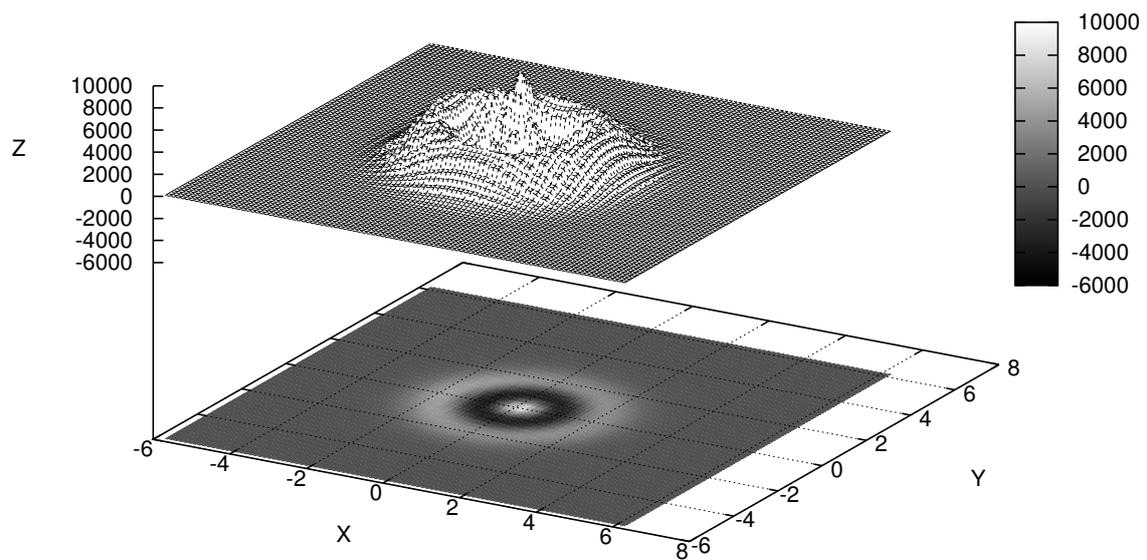


Figura 6.33: Gráfico de $W_3^{3, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

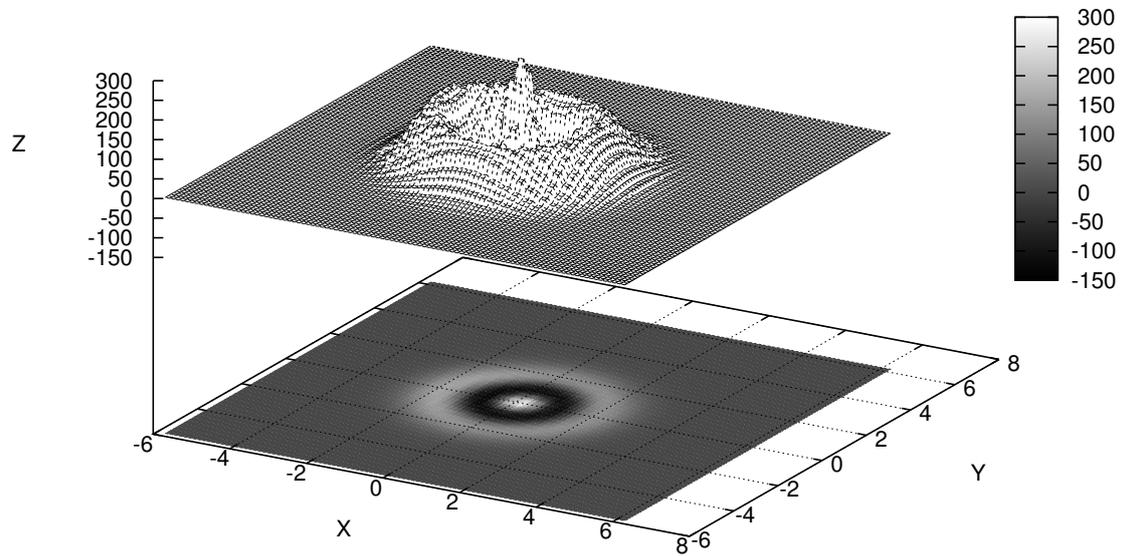


Figura 6.34: Gráfico de $W_3^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

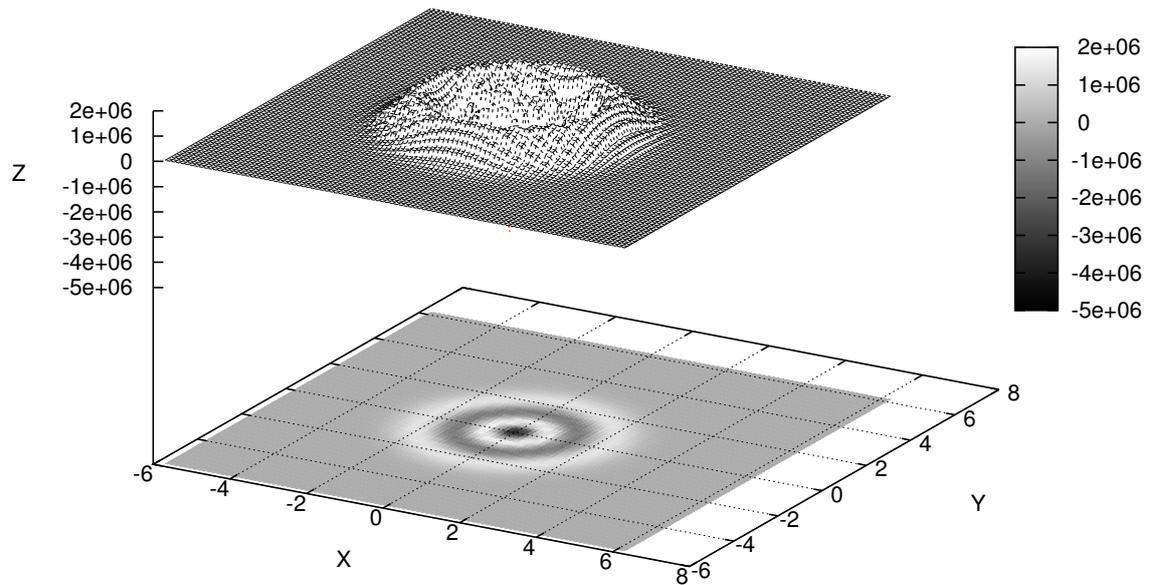


Figura 6.35: Gráfico de $W_3^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

6.10 $W_\alpha(p, q)$ para $T = 300\text{K}$

Vamos analisar agora os gráficos da função de Wigner $W_\alpha(p, q)$ para temperatura de 300K.

Ao contrário do que ocorreu nas seções destinadas à análise da função de Wigner $W_\alpha(p, q)$ para outras temperaturas, esta recebe contribuições de todos os seus quatros termos. Observando a parcela $W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q)$ (figura 6.36), notamos que é uma mistura das parcelas $W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q)$, $W_\alpha^{3, \alpha}(p, q)$, $W_\alpha^{\alpha, 3}(p, q)$ e $W_\alpha^{3, 3}(p, q)$ (figuras 6.37–6.40). As parcelas $W_\alpha^{3, \alpha}(p, q)$ e $W_\alpha^{\alpha, 3}(p, q)$ são idênticas e se somam ganhando expressividade para $-1 \lesssim \frac{q}{b} \lesssim 1$ e $-2 \lesssim \frac{pb}{\hbar} \lesssim 2$. A parcela $W_\alpha^{\alpha, \alpha}(p, q)$ domina a parte em que o valor da posição é negativa. Este fato é interessante, visto que para as análises de outras temperaturas, os valores de posição negativos correspondiam à função de Wigner nula. Finalmente, o termo $W_\alpha^{3, 3}(p, q)$ aparece contribuindo com valores de posição positivos.

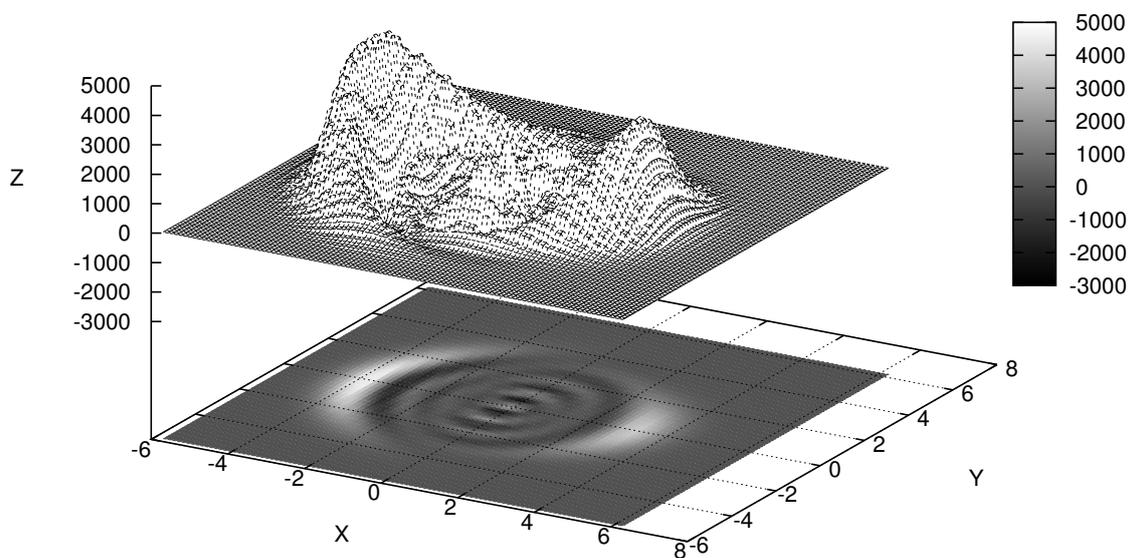


Figura 6.36: Gráfico de $W_\alpha(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{\hbar}\right)$ para temperatura de 300K.

A função de Wigner $W_\alpha(p, q)$, como um todo, apresenta simetria radial para todo o seu domínio, ocorrendo seus máximos e mínimos em diversos valores de $|\gamma|$. O seu valor negativo mais expressivo (não-classicalidade do sistema), é encontrado na região de momento negativo e $-2 \lesssim \frac{pb}{\hbar} \lesssim 2$ e $\frac{5}{2} \lesssim |\gamma| \lesssim 3$. Já os valores positivos mais expressivos (classicalidade do sistema), se localizam também em valores de posição negativas onde $|\gamma| \approx 4$ e $-2 \lesssim \frac{pb}{\hbar} \lesssim 2$.

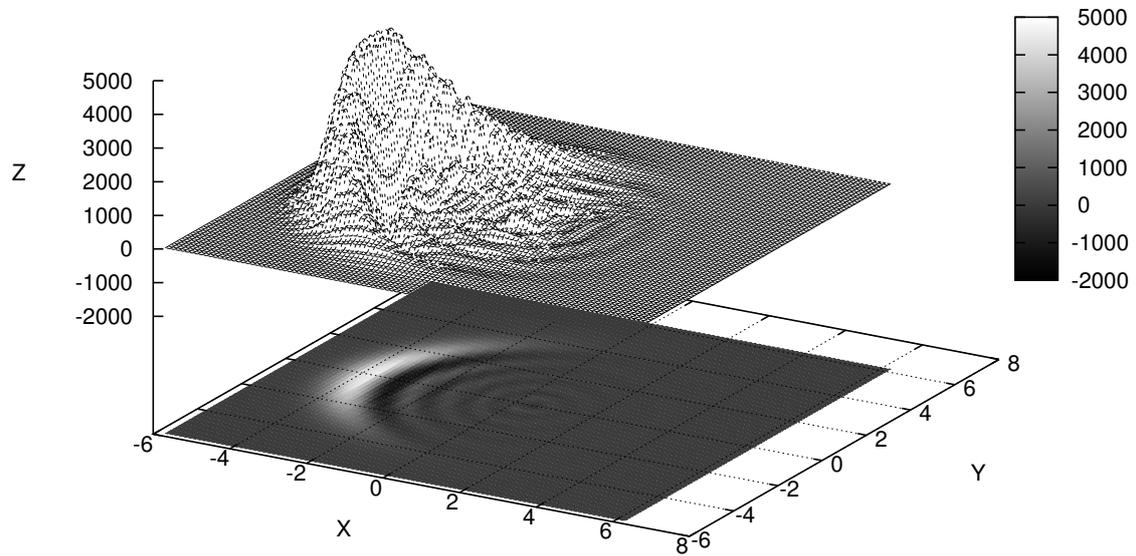


Figura 6.37: Gráfico de $W_{\alpha}^{\alpha, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

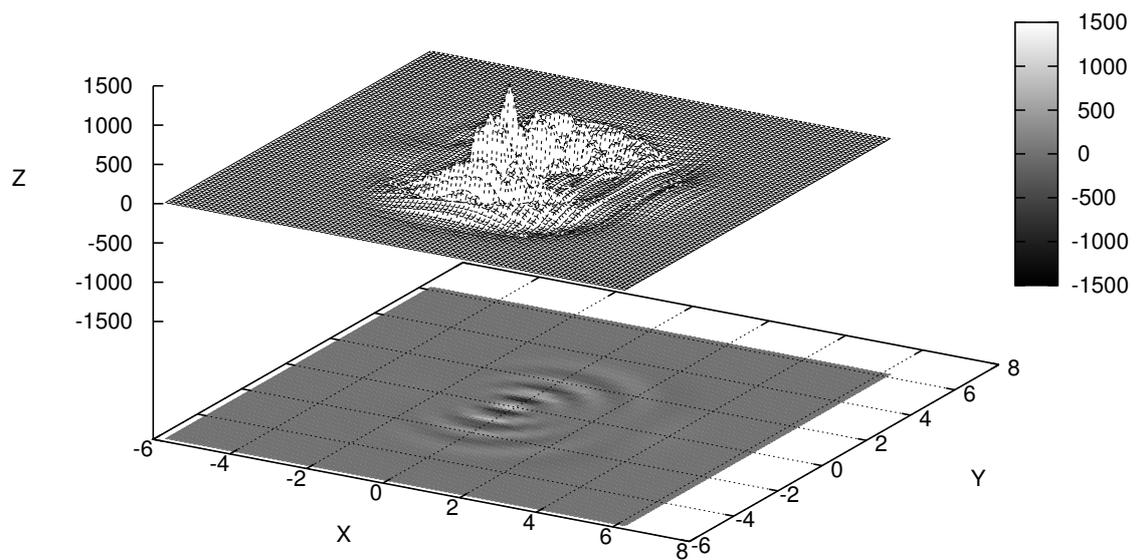


Figura 6.38: Gráfico de $W_{\alpha}^{3, \alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

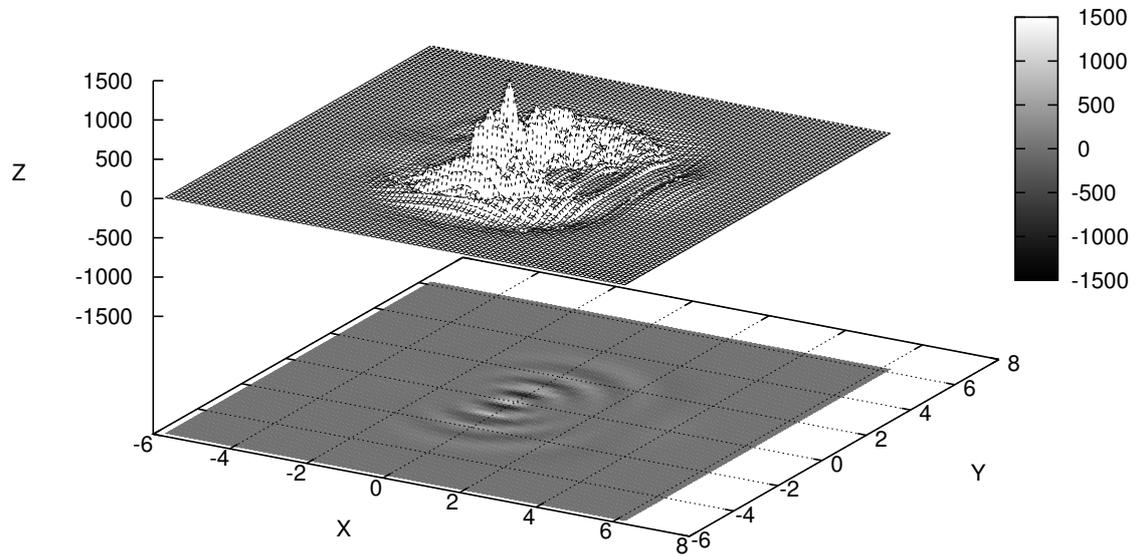


Figura 6.39: Gráfico de $W_{\alpha}^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

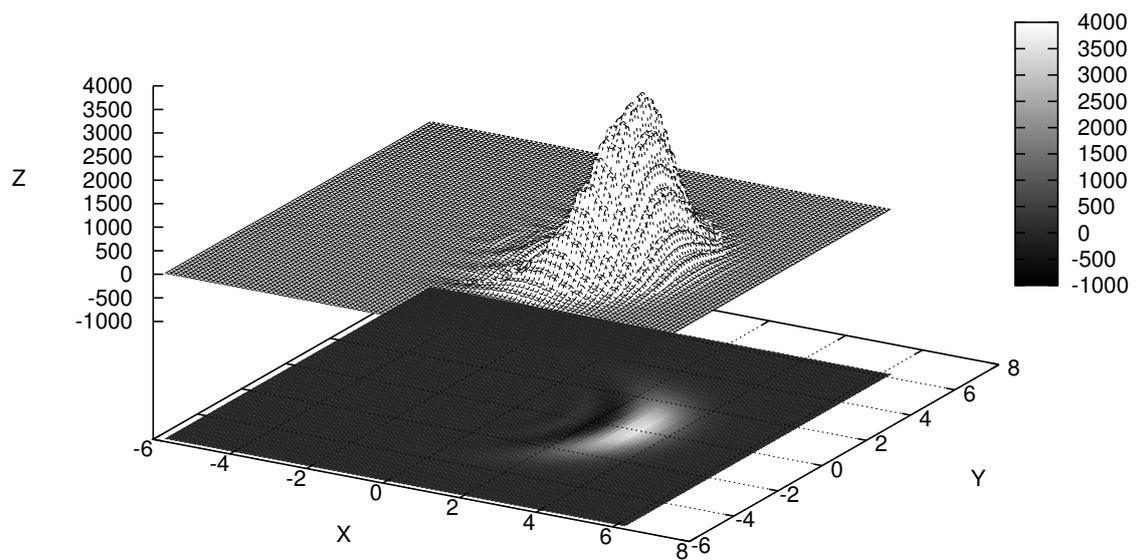


Figura 6.40: Gráfico de $W_{\alpha}^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

6.11 $W_{\alpha+3}(p, q)$ para $T = 300\text{K}$

Vamos analisar os gráficos da superposição $W_{\alpha+3}(p, q)$ para a temperatura de 300K.

Observamos que as parcelas $W_{\alpha+3}^{3,\alpha}(p, q)$ e $W_{\alpha+3}^{3,3}$, (figuras 6.43 e 6.45), são domínio das parcelas correspondentes da função de Wigner $W_3(p, q)$, enquanto $W_{\alpha+3}^{\alpha,3}(p, q)$ (figura 6.44) é dominada pela parcela correspondente da função de Wigner $W_\alpha(p, q)$. A parcela $W_{\alpha+3}^{\alpha,\alpha}(p, q)$ (figura 6.42), apresenta uma pequena diferença quando a comparamos com $W_\alpha^{\alpha,\alpha}(p, q)$ (figura 6.37). Esta diferença ocorre devido a parcela $W_3^{\alpha,\alpha}(p, q)$ (figura 6.32) dominar $W_{\alpha+3}^{\alpha,\alpha}(p, q)$ na região onde $-2 \lesssim \left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right) \lesssim 2$.

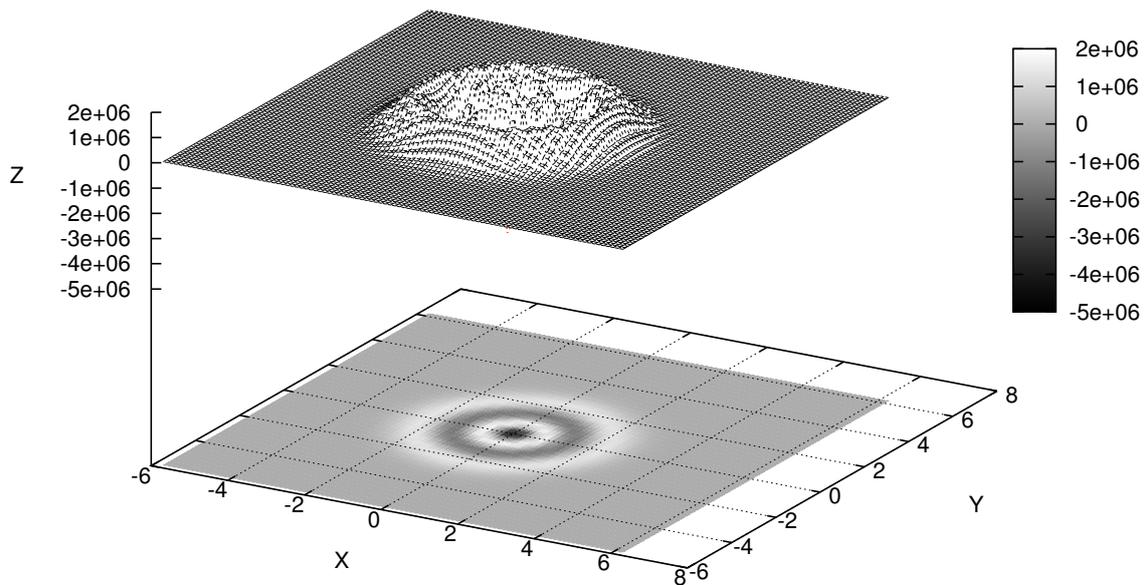


Figura 6.41: Gráfico de $W_{\alpha+3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

Entretanto, ainda temos que $W_{\alpha+3}(p, q)$ (figura 6.41) é inteiramente dominada pela parcela $W_3^{3,3}(p, q)$, que chega a alcançar valores da ordem de 10^6 . Este resultado indica que, para o estado geral, a parcela relevante pode ser $W_n^{n,n}(p, q)$.

No próximo capítulo, serão apresentadas as conclusões e perspectivas deste trabalho.

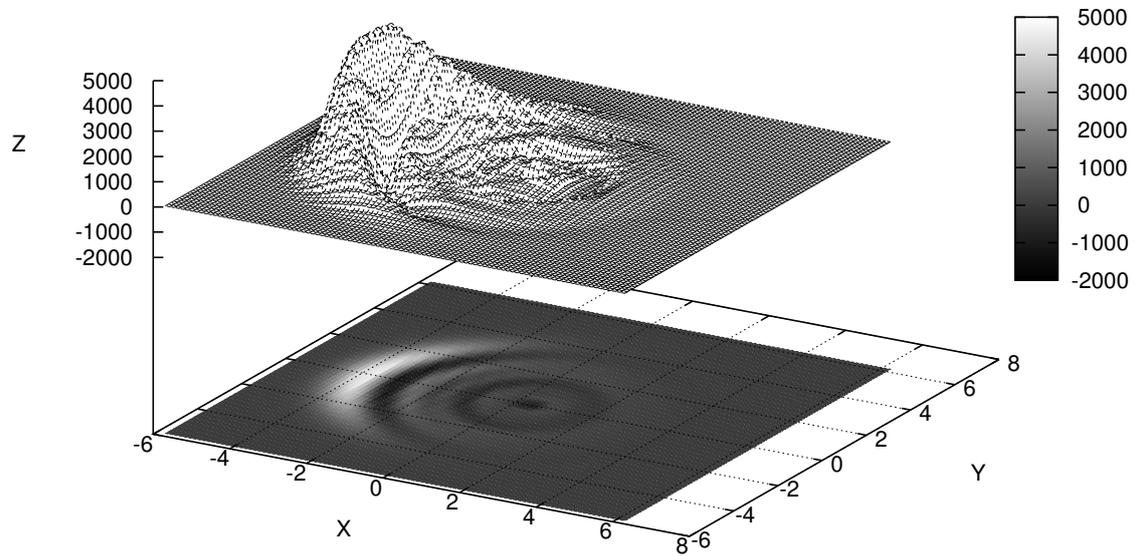


Figura 6.42: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

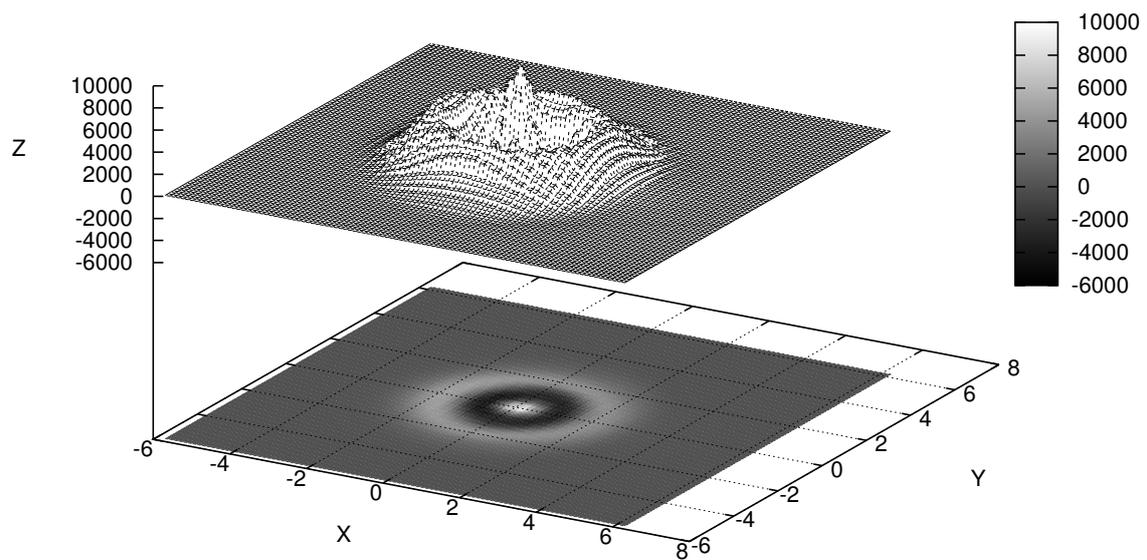


Figura 6.43: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,\alpha}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

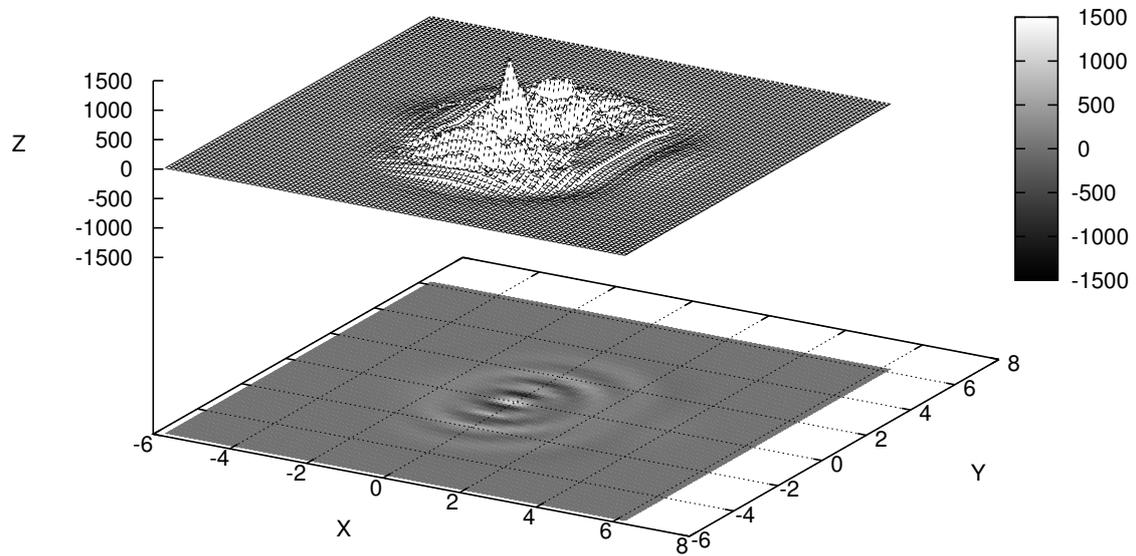


Figura 6.44: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{\alpha,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

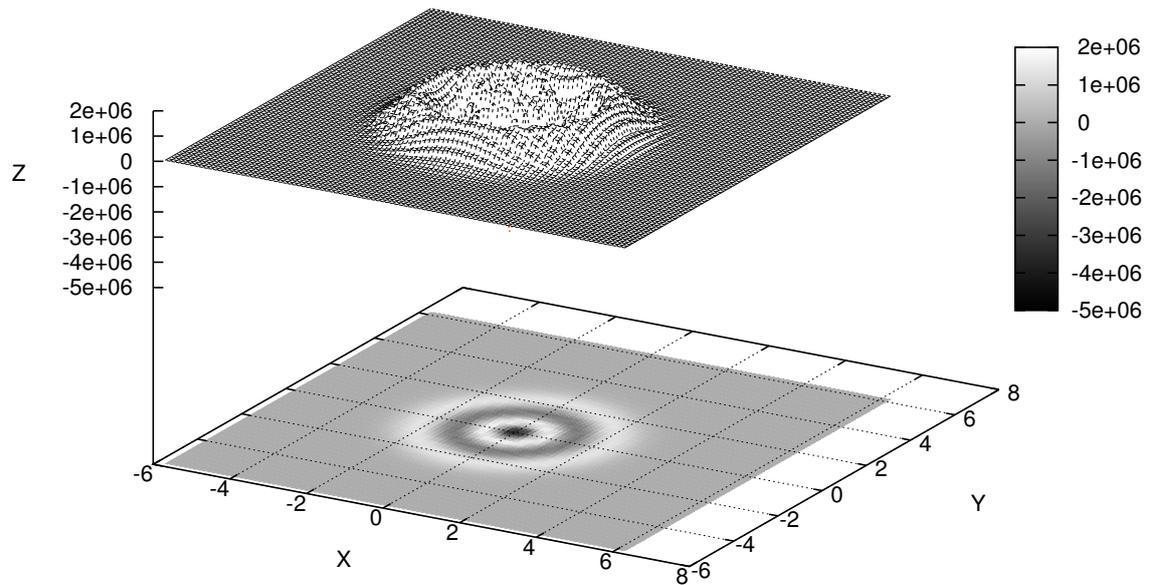


Figura 6.45: Gráfico de $W_{\alpha+3}^{3,3}(p, q)$ versus $\left(\frac{q}{b}, \frac{pb}{h}\right)$ para temperatura de 300K.

7 *Conclusão e Perspectivas*

Neste trabalho, utilizamos o método da DCT para a inclusão da temperatura no estudo do estado $|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\eta} [\sigma|\alpha\rangle + \delta|n\rangle]$ sob duas perspectivas: *i*) com a duplicação dos graus de liberdade feita através do produto tensorial por $|\tilde{n}\rangle$, e, *ii*) com a duplicação dos graus de liberdade através do produto tensorial por $|\tilde{\alpha}\rangle$. Para cada forma de duplicação do estado, calculamos o operador densidade, sendo este necessário para o cálculo da função de Wigner, também realizado para ambos os casos. Para obter pontos necessários para a geração de gráficos referentes a estas funções de Wigner, desenvolvemos e implementamos um programa de computador na sintaxe Fortran 90. Os gráficos foram obtidos para 3 fótons na faixa de microondas do espectro eletromagnético, nas temperaturas de 1K, 30K e 300K, entretanto o desenvolvimento é suficientemente geral para possibilitar a análise de outros valores de n e outras temperaturas.

Este trabalho se insere em um projeto que visa o estudo do estado geral, onde os graus de liberdade do estado $|\alpha_n\rangle$ são duplicados considerando um produto tensorial por ele mesmo, ou seja,

$$|\alpha_n(\beta)\rangle = U(\beta) [|\alpha_n\rangle \otimes |\tilde{\alpha}_n\rangle]. \quad (7.1)$$

Em termos do espaço de Hilbert, temos que o estado (7.1) pertence a um espaço de Hilbert térmico (\mathcal{H}_T), dado por

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\beta)\rangle \in \mathcal{H}_T &= [\mathcal{H}_\alpha \oplus \mathcal{H}_n] \otimes [\tilde{\mathcal{H}}_\alpha \oplus \tilde{\mathcal{H}}_n] \\ &= [\mathcal{H}_\alpha \otimes \tilde{\mathcal{H}}_\alpha] \oplus [\mathcal{H}_\alpha \otimes \tilde{\mathcal{H}}_n] \oplus [\mathcal{H}_n \otimes \tilde{\mathcal{H}}_\alpha] \oplus [\mathcal{H}_n \otimes \tilde{\mathcal{H}}_n], \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde \mathcal{H}_λ é o espaço de Hilbert gerado pelo estado $|\lambda\rangle$ e $\tilde{\mathcal{H}}_\lambda$ é o espaço de Hilbert (Til) gerado pelo estado $|\tilde{\lambda}\rangle$, em que $\lambda = n$ ou α . Nesta forma de duplicação, teremos a média de um

operador qualquer \mathcal{A} será dada por

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A} \rangle = & \underbrace{\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } \alpha} + \underbrace{\langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{\alpha}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } \alpha} + \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{n}; \beta \rangle + \langle \alpha, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{n}; \beta \rangle \\
& + \underbrace{\langle n, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } \alpha} + \underbrace{\langle n, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{\alpha}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } \alpha} + \langle n, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{n}; \beta \rangle + \langle n, \tilde{\alpha}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{n}; \beta \rangle \\
& + \langle \alpha, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle + \langle \alpha, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{\alpha}; \beta \rangle + \underbrace{\langle \alpha, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{n}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } n} + \underbrace{\langle \alpha, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{n}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } n} \\
& + \langle n, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{\alpha}; \beta \rangle + \langle n, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{\alpha}; \beta \rangle + \underbrace{\langle n, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | \alpha, \tilde{n}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } n} + \underbrace{\langle n, \tilde{n}; \beta | \mathcal{A} | n, \tilde{n}; \beta \rangle}_{\text{Duplicação } n}, \quad (7.3)
\end{aligned}$$

de forma que cada uma das parcelas de (7.3) corresponde a uma parcela da matriz densidade associada ao estado (7.1), totalizando uma soma de dezesseis parcelas.

Visando a análise global, consideramos a soma das parcelas de $W_n(p, q)$, que correspondem às parcelas indicadas na equação (7.3) por "Duplicação n ", com as parcelas de $W_\alpha(p, q)$, que correspondem às parcelas indicadas na mesma equação por "Duplicação α ", e obtivemos os seus respectivos gráficos. Temos, portanto, oito destas dezesseis parcelas da função de Wigner para o estado geral. Nossos resultados mostram que nos casos analisados, a parcela mais relevante é a $W_n^{n,n}(p, q)$. Esta parcela indica que, para valores de momento e posição próximos a zero, o estado possui características quânticas, apresentando valores negativos. Outra região onde o estado possui características quânticas, é $1 \lesssim |\gamma| \lesssim 2$, onde $|\gamma| = \left[\frac{q^2}{b^2} + \frac{p^2 b^2}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}}$; tal fato é observado para as temperaturas e o número de fótons citados acima.

Temos como perspectiva imediata o cálculo da função de Wigner para o estado geral, visando a verificação da tese de que a parcela $W_n^{n,n}(p, q)$ é a parcela dominante da função para o estado geral. Em um momento posterior, iremos estudar a superposição de outra representação do campo eletromagnético, o estado comprimido [14, 30, 41], com o estado de Fock, obtendo sua respectiva função de Wigner e correspondente análise para diferentes números de fótons e temperaturas.

APÊNDICE A – Cálculo do comutador do tipo

$[A^n, B^m]$

Seja \mathcal{A} e \mathcal{B} operadores, e a regra de comutação

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = -\gamma. \quad (\text{A.1})$$

Desejamos encontrar o valor de

$$[\mathcal{A}^n, \mathcal{B}^m], \quad (\text{A.2})$$

tendo em vista a validade da relação

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{C}] = \mathcal{B}[\mathcal{A}, \mathcal{C}] + [\mathcal{A}, \mathcal{B}]\mathcal{C}. \quad (\text{A.3})$$

Calculemos, inicialmente, os comutadores comutador de $[\mathcal{A}, \mathcal{B}^2]$, $[\mathcal{A}, \mathcal{B}^3]$, $[\mathcal{A}, \mathcal{B}^4]$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}, \mathcal{B}^2] &= [\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{B}] = \mathcal{B}[\mathcal{A}, \mathcal{B}] + [\mathcal{A}, \mathcal{B}]\mathcal{B} \\ &= \mathcal{B}(-\gamma) + (-\gamma)\mathcal{B} \\ &= -2\mathcal{B}\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Usando (A.4), podemos calcular o segundo comutador com facilidade:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}, \mathcal{B}^3] &= [\mathcal{A}, \mathcal{B}^2\mathcal{B}] \\ &= \mathcal{B}^2[\mathcal{A}, \mathcal{B}] + [\mathcal{A}, \mathcal{B}^2]\mathcal{B} \\ &= \mathcal{B}^2(-\gamma) + (-2\mathcal{B}\gamma)\mathcal{B} \\ &= -3\mathcal{B}^2\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Da mesma forma, mas usando agora (A.5), calculemos o comutador para a quarta potência em \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}, \mathcal{B}^4] &= [\mathcal{A}, \mathcal{B}^3 \mathcal{B}] = \mathcal{B}^3 [\mathcal{A}, \mathcal{B}] + [\mathcal{A}, \mathcal{B}^3] \\ &= \mathcal{B}^3(-\gamma) + (-3\mathcal{B}^2\gamma)\mathcal{B} \\ &= -4\mathcal{B}^3\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

de (A.1) e (A.4)–(A.6), podemos intuir que

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}^m] = -m\mathcal{B}^{m-1}\gamma = -\frac{m!}{(m-1)!}\mathcal{B}^{m-1}\mathcal{A}^0\gamma; \quad m \geq 1 \quad (\text{A.7})$$

Para o comutador com \mathcal{B} elevado a $(m+1)$ -ésima potência, temos:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}, \mathcal{B}^{m+1}] &= [\mathcal{A}, \mathcal{B}^m \mathcal{B}] \\ &= \mathcal{B}^m [\mathcal{A}, \mathcal{B}] + [\mathcal{A}, \mathcal{B}^m] \mathcal{B} \\ &= \mathcal{B}^m(-\gamma) + (-m\mathcal{B}^{m-1}\gamma)\mathcal{B} \\ &= -(m+1)\mathcal{B}^m\gamma = -\frac{(m+1)!}{m!}\mathcal{B}^m\mathcal{A}^0\gamma; \quad m+1 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

O resultado acima é a prova por indução de (A.7), e vamos usá-lo para podermos aumentar as potências de \mathcal{A} . Antes de prosseguirmos, é conveniente escrevermos (A.8) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B}^m &= \mathcal{B}^m \mathcal{A} - m\mathcal{B}^{m-1}\gamma \\ &= \mathcal{B}^m \mathcal{A} - \frac{m!}{(m-1)!}\mathcal{B}^{m-1}\gamma; \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Calculemos agora os comutadores $[\mathcal{A}^1, \mathcal{B}^m]$, $[\mathcal{A}^2, \mathcal{B}^m]$, $[\mathcal{A}^3, \mathcal{B}^m]$, $[\mathcal{A}^3, \mathcal{B}^m]$, e $[\mathcal{A}^5, \mathcal{B}^m]$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^2, \mathcal{B}^m] &= [\mathcal{A}\mathcal{A}, \mathcal{B}^m] = \mathcal{A}[\mathcal{A}, \mathcal{B}^m] + [\mathcal{A}, \mathcal{B}^m]\mathcal{A} \\ &= \mathcal{A}(-m\mathcal{B}^{m-1}\gamma) + (-m\mathcal{B}^{m-1}\gamma)\mathcal{A} \\ &= -m\mathcal{A}\mathcal{B}^{m-1}\gamma - m\mathcal{B}^{m-1}\mathcal{A}\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Mas de (A.9), temos que

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^{m-1} = \mathcal{B}^{m-1}\mathcal{A} - (m-1)\mathcal{B}^{m-2}\gamma; \quad m \geq 2, \quad (\text{A.11})$$

se substituído em (A.10), temos:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}^2, \mathcal{B}^m] &= -m [\mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} - (m-1) \mathcal{B}^{m-2} \gamma] \gamma - m \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} \gamma \\
&= -2m \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} \gamma - m(m-1) \mathcal{B}^{m-2} \gamma^2 \\
&= -2 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} \gamma + \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{B}^{m-2} \gamma^2; \quad m \geq 2. \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Dessa forma podemos escrever

$$\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^m = \mathcal{B}^m \mathcal{A}^2 \gamma^0 - 2 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} \gamma + \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{B}^{m-2} \mathcal{A}^0 \gamma^2; \quad m \geq 2. \quad (\text{A.13})$$

Já para \mathcal{A}^3 , lembrando de (A.9), temos para $m \geq 3$:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}^3, \mathcal{B}^m] &= [\mathcal{A} \mathcal{A}^2, \mathcal{B}^m] = \mathcal{A} [\mathcal{A}^2, \mathcal{B}^m] + [\mathcal{A}, \mathcal{B}^m] \mathcal{A}^2 \\
&= \mathcal{A} \left[-2 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} \gamma + \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{B}^{m-2} \gamma^2 \right] + (-m \mathcal{B}^m \gamma) \mathcal{A}^2 \\
&= -2 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{A} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} \gamma + \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{A} \mathcal{B}^{m-2} \gamma^2 - m \mathcal{B}^m \mathcal{A}^2 \gamma \\
&= -2 \frac{m!}{(m-1)!} [\mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A} - (m-1) \mathcal{B}^{m-2} \gamma] \mathcal{A} \gamma + \frac{m!}{(m-2)!} [\mathcal{B}^{m-2} \mathcal{A} \\
&\quad - (m-2) \mathcal{B}^3 \gamma] \gamma^2 + (-m \mathcal{B}^{m-1} \gamma) \mathcal{A}^2 \\
&= -3 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A}^2 \gamma + 3 \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{B}^{m-2} \mathcal{A}^1 \gamma^2 - \frac{m!}{(m-3)!} \mathcal{B}^{m-3} \gamma^3. \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Podemos reescrever a relação acima, para $m \geq 3$, como:

$$\mathcal{A}^3 \mathcal{B}^m = \mathcal{B}^m \mathcal{A}^3 \gamma^0 - 3 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A}^2 \gamma + 3 \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{B}^{m-2} \mathcal{A} \gamma^2 - \frac{m!}{(m-3)!} \mathcal{B}^{m-3} \mathcal{A}^0 \gamma^3. \quad (\text{A.15})$$

Seguindo o mesmo raciocínio para os outros comutadores, iremos encontrar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^4 \mathcal{B}^m &= \mathcal{B}^m \mathcal{A}^4 \gamma^0 - 4 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A}^3 \gamma + 6 \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{B}^{m-2} \mathcal{A}^2 \gamma^2 - 4 \frac{m!}{(m-3)!} \mathcal{B}^{m-3} \mathcal{A} \gamma^3 \\
&\quad + \frac{m!}{(m-4)!} \mathcal{B}^{m-4} \mathcal{A}^0 \gamma^4; \quad m \geq 4, \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^5 \mathcal{B}^m &= \mathcal{B}^m \mathcal{A}^5 \gamma^0 - 5 \frac{m!}{(m-1)!} \mathcal{B}^{m-1} \mathcal{A}^4 \gamma + 10 \frac{m!}{(m-2)!} \mathcal{B}^{m-2} \mathcal{A}^3 \gamma^2 - 10 \frac{m!}{(m-3)!} \mathcal{B}^{m-3} \mathcal{A}^2 \gamma^3 \\
&\quad + 5 \frac{m!}{(m-4)!} \mathcal{B}^{m-4} \mathcal{A} \gamma^4 - \frac{m!}{(m-5)!} \mathcal{B}^{m-5} \gamma^5; \quad m \geq 5. \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Se observarmos (A.9), (A.13) e (A.15)–(A.17), verificaremos que os módulos dos coeficientes numéricos seguem a ordem dos coeficientes binomiais, sendo estes,

$$C_N = \frac{n!}{N!(n-N)!}. \quad (\text{A.18})$$

Sendo assim, de forma geral, podemos escrever o operador $\mathcal{A}^n \mathcal{B}^m$ como:

$$\mathcal{A}^n \mathcal{B}^m = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{m!}{(m-i)!} \mathcal{B}^{m-i} \mathcal{A}^{n-i} \gamma^i; \quad m \geq n \quad (\text{A.19})$$

ou de uma forma mais compacta,

$$\mathcal{A}^n \mathcal{B}^m = \sum_{i=0}^n C_i^{n,m} \mathcal{B}^{m-i} \mathcal{A}^{n-i} \gamma^i; \quad m \geq n \quad (\text{A.20})$$

onde

$$C_i^{n,m} = (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{m!}{(m-i)!}. \quad (\text{A.21})$$

Devemos observar que nesta notação, os coeficientes $C_i^{n,m}$ e $C_i^{m,n}$ não são iguais, portanto devemos respeitar a ordem dos índices m e n , sendo n o indicador do termo binomial e m referente ao termo $\frac{m!}{(m-i)!}$. Para escrevermos o comutador $[\mathcal{A}^n, \mathcal{B}^m]$, devemos passar a parcela do somatório referente ao índice $i = 0$ para o lado esquerdo da equação, desta forma, o somatório iniciar-se-á com o índice $i = 1$, ou seja,

$$[\mathcal{A}^n, \mathcal{B}^m] = \sum_{i=1}^n C_i^{n,m} \mathcal{B}^{m-i} \mathcal{A}^{n-i} \gamma^i, \quad m \geq n. \quad (\text{A.22})$$

Para contemplarmos o caso em que $m \leq n$, devemos refazer os cálculos de maneira similar, porém ao invés de iniciarmos aumentando as potências de \mathcal{B} , iremos aumentar a potência do operador \mathcal{A} , de forma que encontramos

$$[\mathcal{A}^n, \mathcal{B}] = -n \mathcal{A}^{n-1} \gamma, \quad n \geq 1, \quad (\text{A.23})$$

ou

$$\mathcal{A}^n \mathcal{B} = \mathcal{B} \mathcal{A}^n - n \mathcal{A}^{n-1} \gamma, \quad n \geq 1. \quad (\text{A.24})$$

Aumentando as potências em \mathcal{B} , vamos encontrar com ajuda de (A.24),

$$\mathcal{A}^n \mathcal{B}^2 = \mathcal{B} \mathcal{A}^n \gamma^0 - 2 \frac{n!}{(n-1)!} \mathcal{B} \mathcal{A}^{n-1} \gamma + \frac{n!}{(n-2)!} \mathcal{B}^0 \mathcal{A}^{n-2} \gamma^2; \quad n \geq 2, \quad (\text{A.25})$$

e

$$\mathcal{A}^n \mathcal{B}^3 = \mathcal{B}^3 \mathcal{A}^n \gamma^0 - 3 \frac{n!}{(n-1)!} \mathcal{B}^2 \mathcal{A}^{n-1} \gamma + 3 \frac{n!}{(n-2)!} \mathcal{B} \mathcal{A}^{n-2} \gamma^2 - \frac{n!}{(n-3)!} \mathcal{B}^0 \mathcal{A}^{n-3} \gamma^3; \quad n \geq 3. \quad (\text{A.26})$$

Desde já podemos concluir que o módulo dos coeficientes numéricos de (A.24)–(A.26) são

iguais aos coeficientes binomiais. Desta forma, podemos concluir que

$$\mathcal{A}^n \mathcal{B}^m = \sum_{i=0}^m C_i^{m,n} \mathcal{B}^{m-i} \mathcal{A}^{n-i}; \quad n \geq m, \quad (\text{A.27})$$

ou, em forma de comutador;

$$[\mathcal{A}^n, \mathcal{B}^m] = \sum_{i=1}^m C_i^{m,n} \mathcal{B}^{m-i} \mathcal{A}^{n-i}; \quad n \geq m. \quad (\text{A.28})$$

Notamos o limite do somatório, para o caso $m \leq n$, é igual a m , evitando assim de encontrarmos operadores elevado a expoentes negativos e fatoriais de números negativos. Notamos também que para este caso, o coeficiente binomial também está vinculado ao índice m . Para o caso geral, onde n e m podem assumir quaisquer valores, temos

$$\mathcal{A}^n \mathcal{B}^m = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=0}^m C_i^{m,n}}^{n \geq m} \\ \underbrace{\sum_{i=0}^n C_i^{n,m}}_{n < m} \end{array} \right\} \mathcal{B}^{m-i} \mathcal{A}^{n-i} \gamma^i, \quad (\text{A.29})$$

ou em forma de comutador,

$$[\mathcal{A}^n, \mathcal{B}^m] = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\sum_{i=1}^m C_i^{m,n}}^{n \geq m} \\ \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i^{n,m}}_{n < m} \end{array} \right\} \mathcal{B}^{m-i} \mathcal{A}^{n-i} \gamma^i, \quad (\text{A.30})$$

Chegando na expressão geral do comutador que propomos para este apêndice.

Referências Bibliográficas

- 1 Dusek, N. Lükenhaus, M. Hendrych, *Quantum Cryptography*, arxiv:quant-ph/0601207v3 (2006).
- 2 M-L. Duan, M.D. Lukin, J.L. Cirac, P. Zoller, *Long distance quantum communication with atomic and linear optics*, Nature **414** 413 (2001).
- 3 A. Kuzmich, W.P. Bowen, A.D. Boozer, A. Boca, C.W. Chou, L-M. Duan, H.J. Kimble, *Generation of non classical photon pairs for scalable quantum communication with atomic ensembles*, Nature **423** 731 (2003).
- 4 T. Chanelière, D.N. Matsukevich, S.D. Jenkins, S-Y. Lan, T.A.B. Kennedy, A. Kuzmich, *Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories*, Nature **438** 833 (2005).
- 5 I.L. Chuang, Y. Yamamoto, *Single quantum computer*, Phys. Rev. A **52** 3489 (1995).
- 6 Q.A. Turchette, C.J. Hood, H. Mabuchi, H.J. Kimble, *Measurement of conditional phase shifts for quantum logic* Phys. Rev. Lett. **75** 4710 (1995).
- 7 A. Windhager, M. Suda, C. Pacher, M. Peev, A. Poppe, *Quantum interference between a single-photon Fock state and a coherent state*, Optics Communications, **284**, 1907 (2011).
- 8 S.S. Mizrahi, V.V. Dodonov *Creating quanta with an 'annihilation' operator*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 8847, (2002).
- 9 Y. Takahashi, H. Umezawa , *Thermo Field Dynamics*. Collec. Phen., **2** 55 (1975).
- 10 Y. Takahashi, H. Umezawa , *Thermo Field Dynamics*. Int. J. Phys. B, **10** 1755 (1996).
- 11 Wen-Fa Lu, *A general type of a coherent state with thermal effects*, Phys. Rev. **130**, 2529 (2008).
- 12 M. Cherkerker, M. Ladrem, F.C. Khanna, A.E. Santana, *Thermofield Dynamics and $e^+ e^-$ reactions*, Int. J. M. Phys. A, **26** (17), 2881 (2011).
- 13 M. Leineker, A.R. Queiroz, A.E. Santana, C.A. Sirqueira, *Thermofield Dynamics for twisted Poincare-invariant field theories: Wick theorem and S-matrix*, Int. J. M. Phys. A, **26** (15), 2569 (2011).
- 14 H. Ezawa , A. Mann , K. Nakamura, M. Revzen *Characterization of thermal coherent and thermal coherent squeezed states*, Ann. Phys., **209**, 216, (1991).

- 15 A. Mann, M. Revzen, H. Umezawa, Y. Yamanaka, *Relation between quantum and thermal fluctuations*, Phys. Lett. A, **140** (9), 475 (1989).
- 16 S.S. Floquet, *Informação Quântica: efeitos da temperatura utilizando a Dinâmica de Campos Térmicos*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia (2011).
- 17 O. L. V. Rocha, *Estados Quânticos do Tipo Bell na Representação Duplo-Trilho e Efeitos de Temperatura: Uma Análise Usando a Dinâmica de Campos Térmicos*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia (2011).
- 18 N.S. Pereira, *Dinâmica de Campos Térmicos aplicada à análise de distribuições de estados de Fock*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade de Brasília (2006).
- 19 P.E.R. Weber, V.N.A Lula-Rocha, J.C.C. Pereira, L.M. Silva, A.E. Santana, J.D.M. Vianna *Non-classical properties of superposition thermal quantum states*, Separata, Instituto de Física, Universidade de Brasília (2013).
- 20 L. Laplae, F. Mancini, H. Umezawa, *Derivation and application of the boson method in superconductivity*. Phys. Rep., **10 C** 151 (1974).
- 21 B. Baseia, S.B. Duarte, J.M.C. Malbouisson, *Interpolation from number states to chaotic states of the electromagnetic field*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **3**, 152 (2001).
- 22 F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, *Thermal quantum Field theory: algebraic aspects and applications*, World Scientific, Singapore (2009).
- 23 I. Ojima, *Gauge fields at finite temperatures – “Thermo Field Dynamics ” and the KMS condition and their extension to gauge theories*. Ann. Phys., **1** (1981).
- 24 E. P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- 25 M. Hillery, R.F. O’Connell, M.O. Scully, E.P. Wigner *Distribution functions in physics: Fundamentals*. Physics Reports, **106**, 121 (1984).
- 26 W.P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH, Berlin (2001), p. 35.
- 27 M.A. Marchioli, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase: I. Formulação de Weyl-Wigner*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **24** (2002).
- 28 K. Si, N.L. Zhu, H.Y. Jia, *Time evolution of the nonclassicality for the Fock states and their superposition states by the Wigner function*, M. Phys. Lett. B, **26** (16), 1401 (2011).
- 29 J. Zhou, S. Wang, J. Song, H.Y. Fan, *Photon-Number distribution and Wigner function of generalized photon-modulated coherent state*, M. Phys. Lett. A, **27** (6), 1250013 (2012).
- 30 J. Zhou, S. Wang, J. Song, H.Y. Fan, *Photon-number distribution and Wigner function of generalized squeezed thermal state*, Int. J. Theor. Phys., **51** (6), 2681 (2012).

- 31 R.J. Glauber, *Density operators and quasiprobability distributions*, Phys. Rev, **177**, 1882 (1968).
- 32 Cohen-Tannoudji, C. *Quantum Mechanics, Vol.1*, John Wiley Professio (1991).
- 33 G. B. Arfken, H. J. Weber, F. Harris, *Essential mathematical methods for physicists*, Academic Press, New York (1985).
- 34 I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, San Diego (1980).
- 35 M. Hofheinz , E. M. Weig, M. Ansmann, R.C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A.D. O'Connell, H. Wang, J.M. Martinis, A.N. Cleland, *Generation of Fock states in a superconducting quantum circuit*, Nature, **454**, 310 (2008).
- 36 D.F. Walls, G.J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, Berlin (1994).
- 37 R.J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
- 38 E.A. Power, *Introductory Quantum Eletrodynamics*, Longmans, London, (1964).
- 39 Y.L. Dong, X.B. Zou., G.C. Guo, *Generation of pair coherent state using weak cross-Kerr media*, Phys. Lett. A, **372** (35), 5677 (2008).
- 40 A.F. Wang, J.J. Ying, Y.J. Yan, R.H. Liu, X.G. Luo, Z.Y. Li, X.F. Wang, M. Zhang, G.J. Ye, P. Cheng, Z.J. Xiang, X.H. Chen, *Superconductivity at 32 K in single-crystalline $Rb_xFe_{2-y}Se_2$* , Phys. Rev. B, **83**, 060512 (2011).
- 41 V.V. Dodonov *'Nonclassical' states in quantum optics: a 'squeezed' review of the first 75 years* , J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt, **4**, R1 (2002).