



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo de Interações na Teoria
Duffin-Kemmer-Petiau Não-relativística**

Eduardo Alves Reis

Salvador, Outubro de 2013.

Estudo de Interações na Teoria Duffin-Kemmer-Petiau Não-relativística

Eduardo Alves Reis

Orientador: Prof. Dr. Esdras Santana dos Santos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/03/2013. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Esdras Santana dos Santos (orientador) - IF-UFBA
- Prof. Dr. Luciano Melo Abreu - IF-UFBA
- Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo - CETEC-UFRB

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq.

In memoriam
A Clarinda Angélica da Silva Brito,
vó Clara, minha *Citrullus lanatus*,
falecida em 4 de Julho de 2012.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, meu Senhor. Ao meu orientador, Prof. Dr. Esdras Santana dos Santos, pela paciência. A minha família sempre presente: meu pai Armando pelos conselhos maduros, a minha mãe Margareth pelo cuidado, a minha avó Eduardina por está sempre presente, a minha Rai pela dedicação diária e aos meus irmãos Patrícia e Felipe por me apoiarem nos meus passos. Ao meus amigos Isabel, Maíra, Edward, Elenilson, Vítor e outros da pós-graduação pelos dias de construção e descontração que tivemos. Ao grupo de Campos pelas discussões acirradas, em especial aos professores Luciano e Gadelha, que sempre buscaram um pouco mais de física das minhas falas. A minha amiga e companheira Tamila pelo amor e apoio nos momentos mais difíceis. A minha tia Edinha, minha madrinha Manu, ao Hugo e Celina pela acolhimento e incentivo na minha estadia em São Paulo. E por fim a todos do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia.

Resumo

No contexto da Covariância Galileana, propomos soluções para equação Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) não relativística, que descreve partículas massivas de spin 0 e spin 1. Buscamos apresentar a Teoria DKP não relativística e as diversas formas de introduzir uma determinada interação. Resolvemos a equação de movimento DKP não relativística, para um potencial tipo Coulombiano, com duas formas de acoplamentos. Testamos um potencial tipo Hulthén assimétrico, acoplado minimamente para estados ligados e de espalhamento, no setor vetorial da teoria. Por fim, apresentamos sempre a forma final do espinor DKP não relativístico, tanto nos casos escalares como nos vetoriais.

Palavras Chaves: Duffin-Kemmer-Petiau, Covariância Galileana, Potencial Coulombiano.

Abstract

In the context of Galilean Covariance, we propose solutions for the non-relativistic Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) equation, which describes massive particles of spin 0 and spin 1. We present the non-relativistic theory DKP and several ways to enter a specific physical interaction. We solved the DKP equation for a type Coulomb potential with two forms of couplings. We also used the type Hulthén asymmetric potential which was minimally coupled and studied the bound states and scattering in the context of the vector sector of the theory. Finally, we present the final shape of DKP spinor in scalar and vector sectors.

Keywords: Duffin-Kemmer-Petiau, Covariance Galilean, Coulomb potencial.

Sumário

Lista de Abreviaturas	xi
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
1 Introdução	1
2 Teoria DKPNR	5
2.1 Covariância Galileana	5
2.2 A Equação DKPNR	8
2.3 Condição de Normalização	10
2.3.1 Setor Escalar	11
2.3.2 Setor Vetorial	11
2.4 Projetores	12
2.4.1 Setor Escalar	12
2.4.2 Setor Vetorial	13
2.5 O Espinor Ψ	16
2.6 Interações	19
2.6.1 Acoplamento Mínimo	19
2.6.2 Acoplamento Não-Mínimo	22
2.6.3 Acoplamento Escalar	26
3 Potencial Coulombiano	29
3.1 Potencial tipo Coulombiano através do acoplamento Escalar	29
3.1.1 A Equação de Schrödinger	29
3.1.2 A Equação Radial	32
3.2 Potencial tipo Coulombiano através dos acoplamentos Escalar e Mínimo	35
3.2.1 A Equação de Schrödinger	35
3.2.2 A Equação Radial	35
3.2.3 Normalização	41

4	Potencial Hulthén Assimétrico	45
4.1	A equação DKP e o Potencial de Hulthén	45
4.1.1	Setor Escalar	45
4.1.2	Setor Vetorial	46
4.2	Estados de espalhamento	52
4.3	Estados Ligados	54
4.4	Espinor Ψ	56
5	Conclusões	57
A	Matrizes Beta	59
A.1	Setor Escalar	59
A.2	Setor Vetorial	60
B	Projetores	65
B.1	Setor Escalar	65
B.2	Setor Vetorial	65
C	Demonstrações	79
C.1	A e B	79
C.2	C e D	81
D	Funções Hipergeométricas	85
D.1	Equação Diferencial	85
D.2	Derivadas	86
	Referências Bibliográficas	89

Lista de Abreviaturas

- DKP Duffin-Kemmer-Petiau
DKPNR Duffin-Kemmer-Petiau não relativística

Lista de Símbolos

Ψ Espinor DKP

Lista de Figuras

3.1	Valor de N para diferentes r_{max} , com $\alpha = 1$, $l = 0$ e $k_0 = 1$	34
3.2	$Nj_{\delta}^2(\alpha r)$, para um $r_{max} = 100$	34
3.3	$N\frac{J_{\beta}(\alpha r)}{r}$, para um $r_{max} = 100$	34
3.4	$E_{n,l}$, para $l = 0$, com $\gamma = m = 1$	39
3.5	$E_{n,l}$, para $l = 1$, com $\gamma = m = 1$	40
3.6	$E_{n,l}$, para $l = 2$, com $\gamma = m = 1$	40
3.7	$U_{ef}(r)$, para $l = 0$, com $\alpha = \lambda = m = k = 1$	41
3.8	$U_{ef}(r)$, para $l = 0$, com $\alpha = 2$ e $\lambda = m = k = 1$	42
3.9	$U_{ef}(r)$, para $l = 0$, com $\alpha = m = k = 1$ e $\lambda = 100$	42
4.1	$V(x) = V_0 \left[\theta(-x)\frac{1}{e^{-ax}-q} + \theta(x)\frac{1}{e^{bx}-\tilde{q}} \right]$, para $V_0 = 1$, $a = 3$, $b = 1$ e $q = \tilde{q} = 0,4$	52
4.2	$V(x) = -V_0 \left[\theta(-x)\frac{1}{e^{-ax}-q} + \theta(x)\frac{1}{e^{bx}-\tilde{q}} \right]$, para $V_0 = 1$, $a = 3$, $b = 1$ e $q = \tilde{q} = 0,4$	55

Lista de Tabelas

2.1 Relação das componentes do espinor Ψ , selecionadas pelo projetor $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ ao atuar em Ψ	16
--	----

Capítulo 1

Introdução

Após o sucesso da equação de Dirac [1], se buscou equações igualmente lineares nas derivadas que descrevessem partículas de outros spins. Utilizando os avanços adquiridos por Petiau [2] na álgebra, Duffin [3] e Kemmer [4] construíram uma equação, linear nas derivadas, que descreve partículas relativísticas massivas de spin 0 e 1, a chamada equação DKP. A teoria se mostrou uma boa alternativa para análise de interações de hádrons com núcleos, como uma opção ao, então, usado formalismo de segunda ordem de Klein-Gordon-Fock e Proca. A versão não relativística da teoria DKP [5, 6] somente pôde ser construída após a criação de uma estrutura tensorial associada às simetrias Galileanas por Lévy-Leblond [7, 8, 9] entre outros [10, 11, 12, 13, 14, 15], e, logo após, Takahashi [16, 17, 18] desenvolver uma teoria de campo não relativística, onde a equação de Schrödinger assume uma forma similar à de Klein-Gordon-Fock e Proca. Outras contribuições tem sido dadas ao formalismo Duffin-Kemmer-Petiau Não-relativístico (DKPNR); a exemplo do estudo da estrutura simplética da teoria [19], em seguida usando a formulação através dos operadores de projeção [20], a quantização do campo DKPNR [21] e o estudo do oscilador num espaço de fase não-comutativo [22].

A equação DKPNR na presença de uma interação representada por U é dada por

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k + U)\Psi = 0. \quad (1.1)$$

onde k é uma constante, Ψ um espinor, cuja dimensão depende do setor da teoria que está representando. O espinor Ψ contém a função de onda da partícula e as matrizes β^μ respondem à álgebra DKP

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\rho + g^{\rho\nu} \beta^\mu, \quad (1.2)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o elemento da matriz métrica do penta-espaço Galileano.

A interação U na eq. (1.1) pode ser inserida através dos acoplamentos escalares, vetoriais e tensoriais como descrito por Guertin e Wilson [23], a saber:

$$U = U_E + \beta^\mu A_\mu + \sigma^\mu B_\mu + \beta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Neste contexto, U_E , A_μ , B_μ , $T_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$ são campos externos reais, sendo o primeiro escalar, os dois seguintes vetoriais e os dois últimos tensoriais, que podem ser acoplados minimamente ou não minimamente. Escolhendo o acoplamento escalar U_E , não estamos vinculando o potencial a nenhuma das matrizes β^μ . O acoplamento vetorial mínimo é inserido através da mudança $\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$, usando o potencial vetorial do tipo A_μ . Todos esses acoplamentos no entanto, devem estar de acordo com a condição: $\eta U^\dagger \eta = U$, onde $\eta = (\beta^4 + \beta^5)^2 + \mathbf{1}$, em termos das matrizes β^μ . Esta condição garante que a penta-corrente j^μ seja conservada, (ver seção 2.2). Para os acoplamentos tensoriais $T_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$, esta condição pode não ser satisfeita provocando efeitos não causais, e, por isso, este tipo de acoplamento é evitado.

Nossa principal preocupação neste trabalho, está em entender quais potenciais podem ser inseridos diretamente na equação DKPNR e como determinar as possíveis soluções da mesma. Para isso, buscamos potenciais que foram, de certa forma, testados no regime relativístico, tais como: "Cusp Potential" [24, 25], potencial linear [26], potencial de Hulthén assimétrico para o setor vetorial [27, 28], potencial suave com a massa dependente da posição [29], espalhamento de mésons [30, 31], potencial coulombiano [32, 33, 34] e usando uma mistura de acoplamentos mínimo com não mínimo [35, 36]. Escolhemos em nosso trabalho dois desses potenciais: o coulombiano no setor escalar e o Hulthén assimétrico no setor vetorial, entendendo que poderiam apresentar alguns resultados aplicáveis à física de baixas energias. A motivação para o estudo de potenciais através de acoplamentos diferentes é uma tentativa de se ter um outro olhar da interação física via uma equação de primeira ordem.

Testamos inicialmente o potencial coulombiano inserido via acoplamento escalar, devido a sua importância em aplicações físicas e também por entender que seria o mais simples de implementar. Os resultados se mostraram interessantes por não apresentar estados ligados nem quantização da energia, diferentemente da sua solução usual ao ser inserido diretamente na equação de Schrödinger. Com o objetivo de trabalhar com a interação coulombiana, acrescentamos um acoplamento escalar e um outro vetorial mínimo, conjuntamente, de forma a obter estados ligados normalizados com suas respectivas energias, em termos de funções hipergeométricas ${}_2F_1(a, b; c; z)$ [37, 38, 39]. Em seguida buscamos uma solução para o setor vetorial da teoria de um potencial tipo Hulthén assimétrico, por se mostrar um bom candidato para o espalhamento de bósons e contém na sua estrutura potenciais igualmente importantes, tais como: "Cusp potential", coulombiano e Wood-Saxon. Os resultados foram determinados também em termos de funções hipergeométricas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: a partir do capítulo 2 apresentamos os principais fundamentos da teoria DKPNR para resolução da equação de movimento com diferentes interações. Neste mesmo capítulo também mostramos os procedimentos para introdução de interações através dos acoplamentos mínimo, não-mínimo e escalar na equação DKPNR. Em seguida, no capítulo 3, resolvemos a equação DKP-NR para o potencial tipo coulombiano acoplado minimamente e escalarmente, determinando os estados ligados normalizados e as energias de quantização. Ainda como resultado, no capítulo 4 testamos um potencial tipo Hulthén assimétrico para o setor vetorial da teoria e obtivemos os estados de

espalhamento bem como os estados ligados. Ainda neste capítulo, chegamos a uma expressão para a condição de transmissão total, no caso dos estados de espalhamento, e de energias características para os estados ligados. Por fim, discutimos os resultados e apontamos possíveis trabalhos a serem desenvolvidos no capítulo de conclusão 5.

Capítulo 2

Teoria DKPNR

Neste capítulo discutiremos alguns conceitos importantes para o desenvolvimento e compreensão do formalismo penta-dimensional chamado, Covariância Galileana. Para isto utilizamos tanto a equação de movimento em segunda ordem, a equação de Schrödinger, como em primeira ordem, a versão não relativística da equação de Duffin-Kemmer-Petiau para bósons escalares (spin 0) e vetoriais (spin 1), para se chegar a forma final do espinor Ψ , solução da equação DKPNR.

Neste sentido apresentamos na seção 2.1 o grupo de Galilei, sua extensão central dando origem a quinta coordenada bem como a estrutura do espaço penta-dimensional com métrica e produto escalar definidos. Na seção 2.2 descrevemos a equação DKPNR, suas representações, álgebra e setores associados. As expressões para a normalização da função de onda associada a cada setor da teoria são apresentadas na seção 2.3. Os operadores que projetam a função de onda nos setores escalar e vetorial da teoria são apresentados na seção 2.4. Na seção 2.5 mostramos a construção do espinor usando os operadores de projeção de cada setor. Finalmente, discutimos na seção 2.6 as particularidades dos acoplamentos: mínimo, não-mínimo e escalar.

2.1 Covariância Galileana

O grupo de simetria da física não relativística, o grupo de Galilei (G), consiste das translações no espaço e no tempo, das rotações espaciais e das chamadas transformações puras de Galilei. Os elementos do grupo descrevem as transformações de coordenadas de um evento no espaço e no tempo, da seguinte forma

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \\ t' = t + b \end{cases} \quad (2.1)$$

Um elemento geral de G será denotado por:

$$G = (b, \vec{a}, \vec{v}, R),$$

assim

$$(\vec{x}', t') = G(\vec{x}, t)(\vec{x}, t) = (b, \vec{a}, \vec{v}, R)(\vec{x}, t),$$

onde R é uma matrix constante 3×3 da rotação na qual responde a $R^t R = I_3$ e \vec{a} , \vec{v} e b são parâmetros associados às translações espaciais, temporais e \vec{v} à transformação pura de Galilei. Outras características do grupo são encontradas em [41].

Consideremos uma partícula livre de massa m cuja Lagrangiana associada é expressa por:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2. \quad (2.2)$$

A equação de movimento $\ddot{\vec{x}} = 0$ é invariante frente a (2.1), mas a Lagrangiana se transforma por

$$L \rightarrow L' \equiv \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}'^2 \right) = L + \frac{df}{dt},$$

com

$$f \equiv +m(R\vec{x}) \cdot \vec{v} + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 t + const. \quad (2.3)$$

Assim, podemos dizer que para (2.2) ser invariante devemos estendê-la para

$$L \rightarrow L - m\dot{s}, \quad (2.4)$$

com s transformando-se como

$$s \rightarrow s - (R\vec{x}) \cdot \vec{v} + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 t + const. \quad (2.5)$$

Neste contexto, às transformações de Galilei no espaço e no tempo são incorporadas a transformação da quinta coordenada s resultando no grupo de transformações para as coordenadas (x, y, z, t, s) :

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \\ t' = t + b \\ s' = s - (R\vec{x}) \cdot \vec{v} + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 t + const. \end{cases} \quad (2.6)$$

As transformações acima (sem translações) deixam invariante a estrutura $\vec{x}^2 - 2ts$ [41]. Desta invariância pode-se, portanto, inferir um espaço penta-dimensional G cujas coordenadas de um ponto qualquer são expressas por $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\vec{x}, t, s)$ e o produto escalar é definido por:

$$\begin{aligned}
(x|y) &= g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu \\
&= \sum_{i=1}^3 x_i y_i - x_4 y_5 - x_5 y_4
\end{aligned} \tag{2.7}$$

com métrica especificada por

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Deste modo a relação entre as componentes covariantes e contravariantes de um vetor no espaço \mathbf{G} , fica

$$\begin{cases} x^i = x_i \\ x^4 = -x_5 \\ x^5 = -x_4 \end{cases}$$

Podemos ainda introduzir a operação de subir e baixar índices por

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu,$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu,$$

onde $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$, mais detalhes podem ser encontrados em [42]. A equação de Schrödinger pode ser obtida no contexto da Covariância Galileana através dos invariantes do grupo de Galilei construídos a partir dos operadores derivadas: $\partial_\mu \partial^\mu$ e ∂_5 . Pelo Lema de Schur podemos escrever

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \Psi = k^2 \Psi \\ \partial_5 \Psi = -im \Psi \end{cases} \tag{2.9}$$

onde k e m são constantes e $\Psi(x)$, a função de onda da partícula. Fazendo μ variar $1, \dots, 5$ acima, temos

$$(\nabla^2 - 2\partial_4 \partial_5 - k^2) \Psi = 0,$$

e usando $\Psi = \exp(-imx_5)\varphi(\vec{x}, t)$, obtemos

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\varphi(\vec{x}, t) = \left(i\partial_t + \frac{k^2}{2m}\right)\varphi(\vec{x}, t).$$

Se consideramos uma solução estacionária para Ψ , com $\varphi(\vec{x}, t) = \exp(-iEt)\phi(\vec{x})$, escrevemos

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\phi(\vec{x}) = \left(E + \frac{k^2}{2m}\right)\phi(\vec{x}),$$

que é a equação de Schrödinger de uma partícula livre de massa m e energia $E + k^2/2m$. Observamos que a energia E , usual da partícula livre, sofre um acréscimo constante $k^2/2m$ que não interfere nas medidas físicas.

2.2 A Equação DKPNR

A equação Duffin-Kemmer-Petiau na sua versão não relativística, DKPNR, foi proposta através dos trabalhos [5], onde se estudou o oscilador harmônico de bósons escalares massivos e [6] que estudou o oscilador harmônico de bósons vetoriais. A equação DKPNR é expressa por:

$$(\beta^\mu\partial_\mu + k)\Psi = 0 \quad (2.10)$$

onde k é a constante discutida anteriormente e β^μ cinco matrizes que obedecem a álgebra DKPNR

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho + \beta^\rho\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\rho + g^{\rho\nu}\beta^\mu. \quad (2.11)$$

A forma da álgebra bem como a dimensão das matrizes presentes numa equação em primeira ordem está associada ao spin da partícula que esta descreve. Assim, para o setor escalar da teoria as matrizes apresentam dimensão 6×6 e são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^1 = e_{1,6} + e_{6,1} \\ \beta^2 = e_{2,6} + e_{6,2} \\ \beta^3 = e_{3,6} + e_{6,3} \\ \beta^4 = e_{4,6} - e_{6,5} \\ \beta^5 = e_{5,6} - e_{6,4} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

onde $e_{i,j} = 1$, para i, j indicando a linha e coluna do elemento de matriz respectivamente que são diferentes de zero. Para o setor vetorial da teoria, as matrizes β^μ apresentam dimensão 15×15 e são expressas na forma

$$\begin{cases} \beta^1 = e_{13,1} + e_{14,4} + e_{12,8} - e_{11,9} - e_{9,11} + e_{8,12} + e_{1,13} + e_{4,14} \\ \beta^2 = e_{13,2} + e_{14,5} - e_{12,7} + e_{10,9} + e_{9,10} - e_{7,12} + e_{2,13} + e_{5,14} \\ \beta^3 = e_{13,3} + e_{14,6} + e_{11,7} - e_{10,8} - e_{8,10} + e_{7,11} + e_{3,13} + e_{6,14} \\ \beta^4 = -e_{10,4} - e_{11,5} - e_{12,6} + e_{1,10} + e_{2,11} + e_{3,12} + e_{15,14} + e_{13,15} \\ \beta^5 = -e_{10,1} - e_{11,2} - e_{12,3} + e_{4,10} + e_{5,11} + e_{6,12} - e_{15,13} - e_{14,15} \end{cases} \quad (2.13)$$

A forma explícita para as matrizes β^μ do setor escalar e do setor vetorial pode ser vista no apêndice A.

Pode-se mostrar que (2.10) é preservada pelas transformações

$$\begin{cases} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \Psi'(x) = Q(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x) \\ Q^{-1}(\Lambda)\beta^\mu Q(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \beta^\nu \end{cases} \quad (2.14)$$

onde $\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$ representa as transformações infinitesimais nas coordenadas (2.6), sem translações com $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$, e $Q(\Lambda)$ as transformações nos campos dada, na forma

$$Q = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

com $S_{\mu\nu} = [\beta_\mu, \beta_\nu]$. A equação adjunta para o espinor Ψ , pode ser obtida a partir de

$$[(\beta^\mu \partial_\mu + k)\Psi]^\dagger = 0, \longrightarrow \partial_\mu \Psi^\dagger \beta^{\dagger\mu} + k\Psi^\dagger = 0. \quad (2.16)$$

Escolhendo uma representação tal que

$$\begin{cases} \beta^{\dagger i} = \beta^i \\ \beta^{\dagger 4} = -\beta^5 \\ \beta^{\dagger 5} = -\beta^4 \end{cases}$$

ou, de uma forma mais compacta,

$$\beta^{\dagger\mu} = g^{\mu\nu} \beta^\nu,$$

com estas propriedades podemos obter a identidade

$$\beta^\mu \eta = -\eta \beta^{\dagger\mu},$$

com $\eta = (\beta^4 + \beta^5)^2 + \mathbf{1}$. Usando também $\eta^2 = 1$ obtemos

$$\beta^{\dagger\mu} = -\eta\beta^{\mu}\eta, \quad (2.17)$$

Definindo o espinor adjunto como $\bar{\Psi} \equiv \Psi^{\dagger}\eta$, a equação (2.16) é reescrita da forma

$$-\partial_{\mu}\Psi^{\dagger}\eta\beta^{\mu}\eta + k\Psi^{\dagger} = 0.$$

Multiplicando-se esta equação por η à direita obtém-se

$$\bar{\Psi}(\beta^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} - k) = 0. \quad (2.18)$$

Se agora multiplicarmos (2.10) à esquerda por $\bar{\Psi}$, (2.18) à direita por Ψ e as somarmos, temos

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \quad (2.19)$$

onde $j^{\mu} = \bar{\Psi}\beta^{\mu}\Psi$ é a penta-corrente conservada.

Adicionando uma interação U na equação DKP (2.10), obtemos

$$(\beta^{\mu}\partial_{\mu} + k + U)\Psi = 0 \quad (2.20)$$

Em [23] encontramos algumas possibilidades de acoplamentos para U que podem ser exploradas

$$U = U_E + \beta^{\mu}A_{\mu} + \sigma^{\mu}B_{\mu} + \beta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

no entanto, devemos ter atenção com os acoplamentos tensoriais que podem apresentar comportamentos não causais. Para a equação adjunta obtemos

$$\bar{\Psi}(\overleftarrow{\partial}_{\mu}\beta^{\mu} - k - \eta U^{\dagger}\eta) = 0. \quad (2.22)$$

Multiplicando (2.20) à esquerda por $\bar{\Psi}$ e (2.22) à direita por Ψ , temos

$$\partial_{\mu}j^{\mu} + \bar{\Psi}(U - \eta U^{\dagger}\eta)\Psi = 0. \quad (2.23)$$

Assim, se U for hermitiano em relação a matriz η , teremos a conservação da penta corrente j^{μ} . Dessa forma, a condição $\eta U^{\dagger}\eta = U$ que o potencial U precisa obedecer é um meio de selecionarmos os tipos de interações a serem inseridas na equação DKPNR.

2.3 Condição de Normalização

Vimos na seção 2.2 que a penta corrente, dada por

$$j^\mu = \bar{\Psi}\beta^\mu\Psi \quad (2.24)$$

é efetiva mesmo na presença de uma interação U . A condição de normalização para o espinor Ψ é dada por

$$\int j^4 dV = \pm 1, \quad (2.25)$$

onde ± 1 , é devido a duas possibilidades de sinal de carga elétrica, ficando

$$\int \bar{\Psi}\beta^4\Psi dV = \pm 1. \quad (2.26)$$

Nas seções seguintes obteremos a expressão (2.26) em termos das componentes do espinor Ψ , ao escolher um setor específico da teoria.

2.3.1 Setor Escalar

Devemos primeiramente calcular $\bar{\Psi}$, ou seja,

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta = \left[\Psi_1^\dagger \quad \Psi_2^\dagger \quad \Psi_3^\dagger \quad \Psi_4^\dagger \quad \Psi_5^\dagger \quad \Psi_6^\dagger \right] \cdot \eta \quad (2.27)$$

Assim, usando a representação 6×6 para as matrizes β^μ , obtemos

$$\bar{\Psi} = \left[\Psi_1^\dagger \quad \Psi_2^\dagger \quad \Psi_3^\dagger \quad -\Psi_5^\dagger \quad -\Psi_4^\dagger \quad -\Psi_6^\dagger \right].$$

Logo, a expressão para a componente j^4 da penta-corrente é dada por

$$j^4 = \bar{\Psi}\beta^4\Psi = \Psi_6^\dagger\Psi_5 - \Psi_5^\dagger\Psi_6.$$

A condição de normalização para o setor escalar pode, então, ser dada por

$$\int [\Psi_6^\dagger\Psi_5 - \Psi_5^\dagger\Psi_6] dV = \pm 1. \quad (2.28)$$

2.3.2 Setor Vetorial

Similarmente, usando a representação 15×15 já citada para o setor vetorial da teoria, o espinor Ψ^\dagger é dado por

$$\Psi^\dagger = \left[\Psi_1^\dagger \quad \Psi_2^\dagger \quad \dots \quad \Psi_{15}^\dagger \right], \quad (2.29)$$

com $\eta = (\beta^4 + \beta^5)^2 + \mathbf{1}$, dado por (A.12), calculamos $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta$ obtendo

$$\bar{\Psi} = \left[-\Psi_4^\dagger \quad -\Psi_5^\dagger \quad -\Psi_6^\dagger \quad -\Psi_1^\dagger \quad -\Psi_2^\dagger \quad -\Psi_3^\dagger \quad \Psi_7^\dagger \quad \Psi_8^\dagger \quad \Psi_9^\dagger \quad -\Psi_{10}^\dagger \quad -\Psi_{11}^\dagger \quad -\Psi_{12}^\dagger \quad \Psi_{14}^\dagger \quad \Psi_{13}^\dagger \quad -\Psi_{15}^\dagger \right].$$

Agora

$$\bar{\Psi}\beta^4 = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \Psi_{10}^\dagger \quad \Psi_{11}^\dagger \quad \Psi_{12}^\dagger \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\Psi_4^\dagger \quad -\Psi_5^\dagger \quad -\Psi_6^\dagger \quad 0 \quad -\Psi_{15}^\dagger \quad \Psi_{14}^\dagger \right].$$

em que obtemos

$$\bar{\Psi}\beta^4\Psi = \Psi_{10}^\dagger\Psi_4 + \Psi_{11}^\dagger\Psi_5 + \Psi_{12}^\dagger\Psi_6 - \Psi_4^\dagger\Psi_{10} - \Psi_5^\dagger\Psi_{11} - \Psi_6^\dagger\Psi_{12} - \Psi_{15}^\dagger\Psi_{14} + \Psi_{14}^\dagger\Psi_{15}. \quad (2.30)$$

De posse da forma do espinor Ψ , poderemos encontrar uma expressão mais compacta para a expressão acima.

2.4 Projetores

Apresentaremos nesta seção alguns aspectos da formulação DKPNR através de operadores de projeção encontrados em [20, 35]. Esta formulação nos possibilitará acessar os setores da teoria que desejemos trabalhar sem usar diretamente uma representação das matrizes β^μ .

2.4.1 Setor Escalar

Os projetores podem ser construídos usando a representação geral e a álgebra das matrizes β^μ . O projetor do setor escalar é dado por

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2}(\beta^4 + \beta^5)^2 \prod_{i=1}^3 (\beta^i)^2. \quad (2.31)$$

Desta definição se chega às seguintes propriedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \\ \mathcal{P}^\mu \beta^\nu = \mathcal{P} g^{\mu\nu} \end{array} \right. \quad (2.32)$$

com $\mathcal{P}^\mu = \mathcal{P}\beta^\mu$.

As consequências da ação destes operadores nas transformações do espinor Ψ são

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}Q\Psi = \mathcal{P}\Psi \\ \mathcal{P}^\mu Q\Psi = \mathcal{P}^\mu\Psi + \omega^\mu{}_\nu \mathcal{P}^\nu\Psi \end{array} \right. \quad (2.33)$$

com Q dado por (2.15). Destas relações percebe-se que $\mathcal{P}Q\Psi$ transforma-se como um escalar

e $\mathcal{P}^\mu Q\Psi$, como um vetor.

Para as matrizes do setor escalar dadas pelas equações contidas no apêndice A, com \mathcal{P} dado por (2.31), obtemos

$$\mathcal{P}\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi_6 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Pode-se, então, concluir que o projetor \mathcal{P} seleciona apenas a componente Ψ_6 do espinor Ψ . Atuando o projetor \mathcal{P} na equação DKP-NR (2.10), temos

$$(\mathcal{P}^\mu \partial_\mu + k\mathcal{P})\Psi = 0, \quad (2.35)$$

com \mathcal{P}^ν atuando à esquerda em (2.10) e usando a propriedade em (2.32), obtemos

$$(\mathcal{P}\partial^\nu + k\mathcal{P}^\nu)\Psi = 0,$$

que substituindo em (2.35), temos

$$(\partial^\mu \partial_\mu - k^2)\mathcal{P}\Psi = 0. \quad (2.36)$$

Assim, como $\mathcal{P}\Psi$ seleciona a sexta componente do espinor Ψ , (2.36) é a equação de Schrödinger covariante para a função de onda $\mathcal{P}\Psi$.

2.4.2 Setor Vetorial

O operador, que seleciona o setor vetorial da teoria DKPNR é expresso por

$$\mathcal{R}^\mu = \prod_{i=1}^3 (\beta^i)^2 [\beta^\mu (\beta^4 + \beta^5) - g^{\mu 4} - g^{\mu 5}], \quad (2.37)$$

com $\mu = 1, \dots, 5$. A forma matricial para os projetores \mathcal{R}^μ , obtida a partir da representação (2.13), é encontrada em B.2.

Define-se também o operador

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{R}^\mu \beta^\nu, \quad (2.38)$$

e, com isso, as seguintes propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}^{\mu\nu} = -\mathcal{R}^{\nu\mu}, \\ \mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha = g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu, \\ \mathcal{R}^\mu S^{\nu\alpha} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}^\alpha - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu, \\ \mathcal{R}^{\mu\nu} S^{\alpha\rho} = g^{\mu\rho} \mathcal{R}^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^{\nu\rho} + g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^{\mu\rho} - g^{\nu\rho} \mathcal{R}^{\mu\alpha}. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Aplicando-se os operadores \mathcal{R}^μ e $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ na equação DKPNR (2.10), obtemos

$$(\mathcal{R}^{\mu\nu} \partial_\nu + k \mathcal{R}^\mu) \Psi = 0, \quad (2.40)$$

$$(\mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha \partial_\alpha + k \mathcal{R}^{\mu\nu}) \Psi = 0. \quad (2.41)$$

Usando-se a identidade da segunda linha de (2.39), a equação acima é reescrita da forma

$$(D^{\nu\mu} + k \mathcal{R}^{\mu\nu}) \Psi = 0,$$

onde $D^{\nu\mu} = \partial^\nu \mathcal{R}^\mu - \partial^\mu \mathcal{R}^\nu$. Aplicando-se ∂_ν à esquerda obtemos

$$(\partial_\nu D^{\nu\mu} + k \partial_\nu \mathcal{R}^{\mu\nu}) \Psi = 0,$$

que usando (2.40), resulta

$$(\partial_\nu D^{\nu\mu} - k^2 \mathcal{R}^\mu) \Psi = 0, \quad (2.42)$$

e, por fim,

$$(\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \mathcal{R}^\mu \Psi - \partial_\nu \partial^\mu \mathcal{R}^\nu \Psi = 0. \quad (2.43)$$

A equação acima, é a equação de Schrödinger manifestamente covariante, que descreve um campo vetorial não relativístico. Ao se derivar a equação (2.42), percebe-se que $\partial_\nu \partial^\mu \mathcal{R}^\nu \Psi = 0$, assim, obtemos

$$(\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \mathcal{R}^\mu \Psi = 0 \quad (2.44)$$

O espinor Ψ no setor vetorial tem 15 componentes,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{15} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

que poderam ser selecionadas com aplicação dos projetores (2.37) e (2.38). Neste sentido, os operadores \mathcal{R}^i , com $i = 1, 2, 3$, selecionam as componentes Ψ_{9+i} , \mathcal{R}^4 a componente Ψ_{14} e \mathcal{R}^5 a componente Ψ_{13} . Assim, podemos resumir da seguinte forma

$$\begin{cases} \mathcal{R}^i \Psi = \Psi_{9+i} \\ \mathcal{R}^4 \Psi = \Psi_{14} \\ \mathcal{R}^5 \Psi = \Psi_{13} \end{cases} \quad (2.46)$$

É interessante salientar que os operadores \mathcal{R}^μ e $\mathcal{R}^{\mu\nu}$, não são propriamente projetores, pois $(\mathcal{R}^\mu)^2 \neq \mathcal{R}^\mu$. Ao aplicarmos \mathcal{R}^i em Ψ , temos

$$\mathcal{R}^i \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{9+i} \\ \Psi_{9+i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

para $i = 1, 2, 3$. Vemos que apesar de selecionar as componenetes Ψ_{9+i} , as aloca nas posições $\Psi_{13,14}$, nos dando duas equações equivalentes. Se, por exemplo, tomarmos (2.44), com $\mu = i$, temos

$$(\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \mathcal{R}^i \Psi = (\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \Psi_{9+i} = 0. \quad (2.48)$$

Para $\mu = 4$, de maneira similar chegamos em

$$(\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \mathcal{R}^4 \Psi = (\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \Psi_{14} = 0. \quad (2.49)$$

e, para $\mu = 5$:

$$(\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \mathcal{R}^5 \Psi = (\partial_\nu \partial^\nu - k^2) \Psi_{13} = 0. \quad (2.50)$$

Para seleção das outras componentes do espinor Ψ , devemos usar o operador $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ expresso em (2.38) e que pode ser encontrado na sua forma matricial em B.2. O operador $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ atua no

$\mu \setminus \nu$	1	2	3	4	5
1	0	Ψ_9	$-\Psi_8$	$-\Psi_4$	$-\Psi_1$
2	$-\Psi_9$	0	Ψ_7	$-\Psi_5$	$-\Psi_2$
3	Ψ_8	$-\Psi_7$	0	$-\Psi_6$	$-\Psi_3$
4	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	0	$-\Psi_{15}$
5	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_{15}	0

Tabela 2.1: Relação das componentes do espinor Ψ , selecionadas pelo projetor $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ ao atuar em Ψ .

espinor Ψ , e na medida que variamos os índices $\mu\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ selecionamos as componentes do espinor Ψ . A Tabela 2.1 relaciona as componentes do espinor Ψ selecionadas pelo operador $\mathcal{R}^{\mu\nu}$.

Em outras palavras, quando $\mathcal{R}^{12}\Psi$, ficamos com

$$\mathcal{R}^{12}\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_9 \\ \Psi_9 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Assim, $\mathcal{R}^{12}\Psi = \Psi_9$, se invertermos $\mu \rightarrow \nu$, temos $\mathcal{R}^{21}\Psi = -\Psi_9$, o que está de acordo com a igualdade em (2.39).

2.5 O Espinor Ψ

Considerando a representação 6×6 já mostrada para o setor escalar da teoria pode-se mostrar que as seis componentes do espinor Ψ estão relacionadas na forma

$$\Psi = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi \\ \partial_2\varphi \\ \partial_3\varphi \\ \partial_4\varphi \\ \partial_5\varphi \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

assim, através da equação DKPNR (2.10) podemos chegar na equação de Schrödinger livre (2.36). O espinor Ψ para o setor vetorial da teoria é dado por (2.45). A seleção de suas componentes, podem ser feitas através do uso dos projetores \mathcal{R}^μ e $\mathcal{R}^{\mu\nu}$, descritos na seção 2.4.2. As componentes Ψ_{10} a Ψ_{14} , podem ser selecionadas através da aplicação de \mathcal{R}^μ , com $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$, como é mostrado em (2.46). Vamos definir $(\Psi_{10}, \dots, \Psi_{14}) = (\vec{C}, \varphi, \phi)$, para

efeito de simplificação nos cálculos a seguir. As componentes de Ψ_1 a Ψ_9 e Ψ_{15} , são obtidas através da ação do projetor $\mathcal{R}^{\mu\nu}$, com $\nu, \mu = 1, 2, 3, 4, 5$, como mostrado na Tabela 2.1.

De (2.42), temos

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}\Psi = \frac{1}{k}(\partial^\mu \mathcal{R}^\nu - \partial^\nu \mathcal{R}^\mu)\Psi, \quad (2.53)$$

com $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5$.

- Para $\mu = 5$ e $\nu = 1, 2, 3 = i$, temos

$$\mathcal{R}^{5i}\Psi = \Psi_i = \frac{1}{k}(\partial^5 \Psi_{9+i} - \partial^i \Psi_{13}), \quad (2.54)$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{1}{k}(\partial^5 \Psi_{10} - \partial^1 \Psi_{13}) \\ \Psi_2 = \frac{1}{k}(\partial^5 \Psi_{11} - \partial^2 \Psi_{13}) \\ \Psi_3 = \frac{1}{k}(\partial^5 \Psi_{12} - \partial^3 \Psi_{13}) \end{cases} \quad (2.55)$$

Podemos chamar $\vec{F} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ para as três primeiras componentes do espinor Ψ , assim,

$$\vec{F} = \frac{1}{k}(\partial^5 \vec{C} - \nabla \varphi). \quad (2.56)$$

- Para $\mu = 4$ e $\nu = 1, 2, 3 = i$, temos

$$\mathcal{R}^{4i}\Psi = \Psi_{3+i} = \frac{1}{k}(\partial^4 \Psi_{9+i} - \partial^i \Psi_{14}). \quad (2.57)$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} \Psi_4 = \frac{1}{k}(\partial^4 \Psi_{10} - \partial^1 \Psi_{14}) \\ \Psi_5 = \frac{1}{k}(\partial^4 \Psi_{11} - \partial^2 \Psi_{14}) \\ \Psi_6 = \frac{1}{k}(\partial^4 \Psi_{12} - \partial^3 \Psi_{14}) \end{cases} \quad (2.58)$$

Podemos chamar $\vec{H} = (\Psi_4, \Psi_5, \Psi_6)$ e, assim,

$$\vec{H} = \frac{1}{k}(\partial^4 \vec{C} - \nabla \phi) \quad (2.59)$$

- Para $\mu = 2$ e $\nu = 3$, temos

$$\mathcal{R}^{23}\Psi = \Psi_7 = \frac{1}{k}(\partial^2 \Psi_{12} - \partial^3 \Psi_{11}), \quad (2.60)$$

ficando

$$\Psi_7 = \frac{1}{k}(\partial^2 C_3 - \partial^3 C_2). \quad (2.61)$$

Para $\mu = 3$ e $\nu = 1$, temos

$$\mathcal{R}^{31}\Psi = \Psi_8 = \frac{1}{k}(\partial^3\Psi_{10} - \partial^1\Psi_{12}), \quad (2.62)$$

ficando

$$\Psi_8 = \frac{1}{k}(\partial^3C_1 - \partial^1C_3). \quad (2.63)$$

Para $\mu = 1$ e $\nu = 2$, temos

$$\mathcal{R}^{12}\Psi = \Psi_9 = \frac{1}{k}(\partial^1\Psi_{11} - \partial^2\Psi_{10}), \quad (2.64)$$

ficando

$$\Psi_9 = \frac{1}{k}(\partial^1C_2 - \partial^2C_1). \quad (2.65)$$

Dessa forma, temos

$$\begin{cases} \Psi_7 = \frac{1}{k}(\partial^2C_3 - \partial^3C_2) \\ \Psi_8 = \frac{1}{k}(\partial^3C_1 - \partial^1C_3) \\ \Psi_9 = \frac{1}{k}(\partial^1C_2 - \partial^2C_1) \end{cases} \quad (2.66)$$

Podemos chamar $\vec{M} = (\Psi_7, \Psi_8, \Psi_9)$, e, assim,

$$\vec{M} = \frac{1}{k}\nabla \times \vec{C} \quad (2.67)$$

- Para $\mu = 5$ e $\nu = 4$, temos

$$\mathcal{R}^{54}\Psi = \Psi_{15} = \frac{1}{k}(\partial^5\Psi_{14} - \partial^4\Psi_{13}), \quad (2.68)$$

ficando

$$\Psi_{15} = \frac{1}{k}(\partial^5\phi - \partial^4\varphi). \quad (2.69)$$

Por fim, chegamos ao espinor Ψ , para o setor vetorial livre da forma

$$\Psi = \begin{bmatrix} \vec{F} = \frac{1}{k}(\partial^5\vec{C} - \nabla\varphi) \\ \vec{H} = \frac{1}{k}(\partial^4\vec{C} - \nabla\phi) \\ \vec{M} = \frac{1}{k}\nabla \times \vec{C} \\ \vec{C} \\ \varphi \\ \phi \\ \frac{1}{k}(\partial^5\phi - \partial^4\varphi) \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

2.6 Interações

Destacamos anteriormente na seção 2.2 os diversos tipos de acoplamentos que podem ser usados para simular um sistema físico qualquer. A expressão apresentada em [23] mostrada em (2.21) nos permite introduzir uma determinada interação acoplada de três formas basicamente: escalar, vetorial e tensorial, sendo que esta última pode apresentar problemas relacionados com a casualidade.

Trabalharemos a seguir com as interações diretamente na equação DKPNR. Primeiro discutiremos o acoplamento mínimo, em seguida, uma forma especial de acoplamento não-mínimo e por fim, o acoplamento escalar, que não está vinculado às matrizes β^μ . Lembrando que para relação $\eta U^\dagger \eta = U$, mostrada na seção 2.2, encontramos uma condição que deve ser satisfeita para qualquer interação U que venhamos inserir, de modo a manter a conservação da penta corrente j^μ .

2.6.1 Acoplamento Mínimo

Começaremos introduzindo uma interação na equação DKPNR através do acoplamento mínimo, isto é,

$$U_M = -ei\beta^\mu A_\mu. \quad (2.71)$$

Assim, temos

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k - ei\beta^\mu A_\mu)\Psi = 0,$$

que pode ser reescrita da forma

$$(\beta^\mu D_\mu + k)\Psi = 0, \quad (2.72)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - eiA_\mu$ representa um acoplamento mínimo com o campo não relativístico A_μ , sendo e sua constante de acoplamento.

Setor Escalar

Partindo da equação (2.72) usando o projetor \mathcal{P} para selecionar o setor escalar da teoria:

$$(\mathcal{P}^\mu D_\mu + k\mathcal{P})\Psi = 0, \quad (2.73)$$

onde usamos a propriedade (2.32). Podemos ainda aplicar o projetor \mathcal{P}^α à equação (2.72), e usar a propriedade (2.32), chegando a

$$\mathcal{P} D^\alpha \Psi = -k\mathcal{P}^\alpha \Psi, \quad (2.74)$$

Se multiplicarmos (2.73) por k , temos

$$D_\mu k \mathcal{P}^\mu \Psi = -k^2 \mathcal{P} \Psi. \quad (2.75)$$

Substituindo (2.74) em (2.75), chegamos em

$$(D^\mu D_\mu - k^2) \mathcal{P} \Psi = 0. \quad (2.76)$$

A equação acima é a equação de Schrödinger covariante, com o acoplamento mínimo. A introdução de uma interação mínima nos possibilita obter a equação de Schrödinger na forma acoplada usual, através da componente A_4 do campo A_μ . Partindo da equação (2.76)

$$[\partial_\mu \partial^\mu - e^2 A_\mu A^\mu - ei(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) - k^2] \mathcal{P} \Psi = 0. \quad (2.77)$$

Tomando agora $\mu = i, 4, 5$ com $i = 1, 2, 3$, obtemos

$$\begin{cases} A_\mu A^\mu \mathcal{P} \Psi = (A_i^2 - A_4 A_5 - A_5 A_4) \mathcal{P} \Psi \\ \partial_\mu A^\mu \mathcal{P} \Psi = (\partial_i A_i - \partial_4 A_5 - \partial_5 A_4) \mathcal{P} \Psi \\ A_\mu \partial^\mu \mathcal{P} \Psi = (A_i \partial_i - A_4 \partial_5 - A_5 \partial_4) \mathcal{P} \Psi \end{cases}$$

Podemos supor uma função $\mathcal{P} \Psi(x_\mu)$ na forma

$$\mathcal{P} \Psi(x_\mu) = e^{-imx_5} e^{-iEt} \varphi(\vec{r}), \quad (2.78)$$

e $A_\mu = (0, 0, 0, A_4, 0)$ assim chegamos a

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) + 2mE \varphi(\vec{r}) - 2meA_4 \varphi(\vec{r}) + k^2 \varphi(\vec{r}) = 0,$$

então,

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) + (eA_4) \varphi(\vec{r}) = \left(E + \frac{k^2}{2m} \right) \varphi(\vec{r}). \quad (2.79)$$

A equação de Schrödinger acima obtida a partir da DKPNR é exatamente a mesma apresentada em [43, 44], a menos da constante k .

Setor Vetorial

De maneira similar, podemos tratar o setor vetorial da teoria e buscar a forma da equação de segunda ordem resultante. Assim, aplicando o projetor \mathcal{R}^ν à equação (2.72)

$$(\mathcal{R}^{\nu\mu} D_\mu + k\mathcal{R}^\nu)\Psi = 0, \quad (2.80)$$

onde usamos a propriedade (2.38). Agora, aplicando o projetor $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ na equação (2.72), chegamos em

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}(\beta^\alpha D_\alpha + k)\Psi = 0,$$

ou

$$[(g^{\nu\alpha}\mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha}\mathcal{R}^\nu)D_\alpha + k\mathcal{R}^{\mu\nu}]\Psi = 0,$$

onde usamos as propriedades dos projetores $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ descritas em (2.39); lembrando que $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço penta-dimensional no qual estamos trabalhando. Assim, movendo a derivada covariante para o interior do parêntesis, temos

$$[(D^\nu\mathcal{R}^\mu - D^\mu\mathcal{R}^\nu) + k\mathcal{R}^{\mu\nu}]\Psi = 0,$$

ou,

$$(U^{\mu\nu} + k\mathcal{R}^{\mu\nu})\Psi = 0, \quad (2.81)$$

onde $D^\nu\mathcal{R}^\mu - D^\mu\mathcal{R}^\nu = U^{\mu\nu}$. Da equação (2.81) vemos que

$$k\mathcal{R}^{\mu\nu}\Psi = -U^{\mu\nu}\Psi,$$

que usando a propriedade $\mathcal{R}^{\mu\nu} = -\mathcal{R}^{\nu\mu}$, resulta:

$$k\mathcal{R}^{\nu\mu}\Psi = U^{\mu\nu}\Psi, \quad (2.82)$$

Substituindo este resultado em (2.80), segue

$$(D_\mu U^{\mu\nu} + k^2\mathcal{R}^\nu)\Psi = 0,$$

ou

$$[D_\mu(D^\nu \mathcal{R}^\mu - D^\mu \mathcal{R}^\nu) + k^2 \mathcal{R}^\nu] \Psi = 0,$$

Esta relação pode ser ainda escrita na forma

$$(D^\mu D_\mu - k^2) \mathcal{R}^\nu \Psi - D^\nu D_\mu \mathcal{R}^\mu \Psi - [D_\mu, D^\nu] \mathcal{R}^\mu \Psi = 0.$$

Calculando $[D_\mu, D^\nu] \mathcal{R}^\mu \Psi$, temos

$$\begin{aligned} [D_\mu, D^\nu] \mathcal{R}^\mu \Psi &= [(\partial_\mu - eiA_\mu)(\partial^\nu - eiA^\nu) - (\partial^\nu - eiA^\nu)(\partial_\mu - eiA_\mu)] \mathcal{R}^\mu \Psi \\ &= -ei[(\partial^\nu A_\mu) - (\partial_\mu A^\nu)] \mathcal{R}^\mu \Psi, \end{aligned}$$

Assim, chegamos em

$$(D^\mu D_\mu - k^2) \mathcal{R}^\nu \Psi - D^\nu D_\mu \mathcal{R}^\mu \Psi + ei[(\partial^\nu A_\mu) - (\partial_\mu A^\nu)] \mathcal{R}^\mu \Psi = 0. \quad (2.83)$$

Os dois termos adicionais na equação de Schrödinger (2.83) revelam a influência do potencial vetorial representado por A_μ . Em [35], encontramos um exemplo de aplicação destes termos para o caso relativístico.

2.6.2 Acoplamento Não-Mínimo

Nesta seção buscaremos testar um acoplamento não-mínimo do tipo, $-ei[\chi, \beta^\mu]A_\mu$, onde χ é uma matriz a ser escolhida, e $[\chi, \beta^\mu]$, o comutador entre χ e β^μ . Este tipo de acoplamento foi usado na teoria DKP relativística [35, 36, 24, 26]. Para que a condição $\eta U^\dagger \eta = U$ que garante que a penta-corrente j^μ se conserve, seja satisfeita, a matriz χ deve responder positivamente à seguinte igualdade, $\eta \chi^\dagger = \chi \eta$.

A equação DKPNR com a introdução do potencial via acoplamento não-mínimo fica

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k - ei[\chi, \beta^\mu]A_\mu) \Psi = 0. \quad (2.84)$$

A seguir, analisaremos cada setor da teoria sugerindo uma forma para a matriz χ .

Setor Escalar

Para o setor escalar da teoria, vamos fazer o procedimento similar ao realizado na seção 2.6.1. Tomaremos a matriz χ discutida anteriormente como sendo exatamente igual ao projetor \mathcal{P} do setor escalar, dado por (2.31) e que está de acordo com a condição $\eta \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P} \eta$, descrita acima. Aplicando o projetor \mathcal{P} na equação DKPNR (2.84) temos

$$(\mathcal{P}^\mu \partial_\mu + k\mathcal{P} - ei\mathcal{P}[\mathcal{P}, \beta^\mu]A_\mu)\Psi = 0,$$

ou

$$(\mathcal{P}^\mu \partial_\mu - ei\mathcal{P}^2 \beta^\mu A_\mu + ei\mathcal{P}^\mu \mathcal{P} A_\mu + k\mathcal{P})\Psi = 0,$$

resultando em

$$(\mathcal{P}^\mu D_\mu^- + k\mathcal{P})\Psi = 0, \quad (2.85)$$

onde chamamos de derivada covariante: $D_\mu^- = \partial_\mu - eiA_\mu$. De forma similar ao acoplamento mínimo aplicaremos o projetor \mathcal{P}^μ na equação (2.84), obtendo

$$\mathcal{P}^\mu (\beta^\alpha \partial_\alpha + k - ei[\mathcal{P}, \beta^\alpha]A_\alpha)\Psi = 0,$$

ou

$$[\mathcal{P}^\mu \beta^\alpha (\partial_\alpha + ei\mathcal{P} A_\alpha) + k\mathcal{P}^\mu]\Psi = 0,$$

de forma que

$$[\mathcal{P} g^{\mu\alpha} (\partial_\alpha + eiA_\alpha) + k\mathcal{P}^\mu]\Psi = 0,$$

resultando

$$(\mathcal{P} D_+^\mu + k\mathcal{P}^\mu)\Psi = 0, \quad (2.86)$$

onde chamamos $D_+^\mu = \partial^\mu + eiA^\mu$. Finalmente, substituindo a equação (2.86) em (2.85) podemos obter

$$(D_+^\mu D_\mu^- - k^2)\mathcal{P}\Psi = 0. \quad (2.87)$$

A equação acima é a equação de Schrödinger covariante, com o acoplamento não mínimo,

do tipo $-ei[\chi, \beta^\mu]A_\mu$, com, neste caso, $\chi = \mathcal{P}$. Percebemos uma grande semelhança com o resultado (2.76) do acoplamento mínimo para o mesmo setor da teoria. Lembrando ainda que, a condição $\eta U^\dagger \eta = U$ para o potencial continua válida, e conseqüentemente está garantida a conservação da penta-corrente j^μ .

Setor Vetorial

Para o caso vetorial vamos proceder de maneira análoga. Partindo de (2.84) e aplicando o projetor \mathcal{R}^ν , temos

$$(\mathcal{R}^{\nu\mu}\partial_\mu - \mathcal{R}^\nu ei[\chi, \beta^\mu]A_\mu + k\mathcal{R}^\nu)\Psi = 0, \quad (2.88)$$

para o caso vetorial, assumiremos a matriz χ da forma

$$\chi = -\frac{1}{2}(\beta^\sigma\beta_\sigma - 2), \quad (2.89)$$

novamente χ responde perfeitamente a condição de conservação da penta-corrente j^μ , descrita no início da seção 2.6.2. Assim (2.88), fica

$$(\mathcal{R}^{\nu\mu}\partial_\mu + \frac{ei}{2}\mathcal{R}^\nu(\beta^\sigma\beta_\sigma - 2)\beta^\mu A_\mu - \frac{ei}{2}\mathcal{R}^{\nu\mu}(\beta^\sigma\beta_\sigma - 2)A_\mu + k\mathcal{R}^\nu)\Psi = 0. \quad (2.90)$$

Substituindo os resultados da seção C.1, em (2.90), temos

$$(\mathcal{R}^{\nu\mu}\partial_\mu + ei\mathcal{R}^{\nu\mu}A_\mu + k\mathcal{R}^\nu)\Psi = 0,$$

$$(\mathcal{R}^{\nu\mu}D_\mu^+ + k\mathcal{R}^\nu)\Psi = 0. \quad (2.91)$$

Agora, vamos aplicar o projetor $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ em (2.84), de forma que

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}(\beta^\alpha\partial_\alpha + k - ei[\chi, \beta^\alpha]A_\alpha)\Psi = 0,$$

$$(\mathcal{R}^{\mu\nu}\beta^\alpha\partial_\alpha - \mathcal{R}^{\mu\nu}ei[\chi, \beta^\alpha]A_\alpha + k\mathcal{R}^{\mu\nu})\Psi = 0,$$

substituindo (2.89), temos

$$[\mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha \partial_\alpha + \frac{ei}{2} \mathcal{R}^{\mu\nu} (\beta^\sigma \beta_\sigma - 2) \beta^\alpha A_\alpha - \frac{ei}{2} \mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha (\beta^\sigma \beta_\sigma - 2) A_\alpha + k \mathcal{R}^{\mu\nu}] \Psi = 0. \quad (2.92)$$

Substituindo os resultados da seção C.2, em (2.92), chegamos em

$$[(\mathcal{R}^\mu \partial^\nu - \mathcal{R}^\nu \partial^\mu) - ei(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu) + k \mathcal{R}^{\mu\nu}] \Psi = 0,$$

ou

$$[(\mathcal{R}^\mu D_-^\nu - \mathcal{R}^\nu D_-^\mu) + k \mathcal{R}^{\mu\nu}] \Psi = 0,$$

Onde obtemos uma equação similar a (2.81) com $U_-^{\mu\nu} = \mathcal{R}^\mu D_-^\nu - \mathcal{R}^\nu D_-^\mu$

$$(U_-^{\mu\nu} + k \mathcal{R}^{\mu\nu}) \Psi = 0. \quad (2.93)$$

Da equação (2.93) acima, vemos que

$$k \mathcal{R}^{\mu\nu} \Psi = -U_-^{\mu\nu} \Psi,$$

substituindo em (2.91) fica

$$(D_\mu^+ U_-^{\mu\nu} + k^2 \mathcal{R}^\nu) \Psi = 0,$$

$$[D_\mu^+ (\mathcal{R}^\mu D_-^\nu - \mathcal{R}^\nu D_-^\mu) + k^2 \mathcal{R}^\nu] \Psi = 0,$$

que, por fim, obtemos

$$(D_\mu^+ D_-^\mu - k^2) \mathcal{R}^\nu \Psi - D_\mu^+ D_-^\nu \mathcal{R}^\mu \Psi = 0. \quad (2.94)$$

Usando a relação de comutação $[D_\mu^+, D_-^\nu] \mathcal{R}^\mu \Psi$, temos

$$(D_\mu^+ D_-^\mu - k^2) \mathcal{R}^\nu \Psi - D_-^\nu D_\mu^+ \mathcal{R}^\mu \Psi - [D_\mu^+, D_-^\nu] \mathcal{R}^\mu \Psi = 0,$$

assim, obtemos

$$(D_\mu^+ D_\mu^- - k^2) \mathcal{R}^\nu \Psi - D_\mu^- D_\mu^+ \mathcal{R}^\mu \Psi + ei[(\partial^\nu A_\mu) + (\partial_\mu A^\nu)] \mathcal{R}^\mu \Psi = 0. \quad (2.95)$$

2.6.3 Acoplamento Escalar

Discutiremos ao longo desta seção o caminho percorrido do potencial inserido escalarmente na equação DKPNR até a equação de Schrödinger de maneira similar às seções anteriores. O potencial escalar não tem nenhum vínculo com as matrizes β^μ , podendo ser visto como um acoplamento na massa no caso da teoria DKP relativística, mas para DKPNR é como se estivéssemos dando uma dependência das coordenadas à constante k . Dessa forma, a equação DKPNR, fica

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k + U_E) \Psi = 0. \quad (2.96)$$

Setor Escalar

Para o setor escalar da teoria, temos

$$[\mathcal{P}^\mu \partial_\mu + (k + U_E) \mathcal{P}] \Psi = 0, \quad (2.97)$$

onde usamos o projetor \mathcal{P} com suas propriedades (2.32). Aplicando o projetor \mathcal{P}^α à esquerda em (2.96), ficamos com

$$\mathcal{P}^\alpha (\beta^\mu \partial_\mu + k + U_E) \Psi = 0, \quad (2.98)$$

ou

$$\mathcal{P} \partial^\alpha \Psi = -(k + U_E) \mathcal{P}^\alpha \Psi. \quad (2.99)$$

Aplicando ∂_α à esquerda desta equação, temos

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \mathcal{P} \Psi = -\partial_\alpha [(k + U_E) \mathcal{P}^\alpha \Psi], \quad (2.100)$$

ou

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \mathcal{P} \Psi = -[\partial_\alpha (k + U_E)] \mathcal{P}^\alpha \Psi - (k + U_E) \partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha \Psi. \quad (2.101)$$

Mas, por (2.97), temos

$$[\partial_\mu \partial^\mu - (k + U_E)^2] \mathcal{P} \Psi - \frac{[\partial_\mu (k + U_E)]}{(k + U_E)} \cdot \partial^\mu (\mathcal{P} \Psi) = 0. \quad (2.102)$$

A equação (2.102) demonstra a forma que o potencial acoplado escalarmente tem na equação de Schrödinger covariante. Percebemos a diferença em relação ao acoplamento mínimo, onde reproduzimos os potenciais tipicamente encontrados na literatura, nos livros

de Mecânica Quântica [43, 44].

Fazendo os índices variarem de 1 a 5, definindo $U_E = U_E(\vec{r})$, ou seja, apenas dependente das coordenadas espaciais, chegaremos em

$$(\nabla^2 + 2mE - [U(\vec{r}) + k]^2)\varphi(\vec{r}) - \frac{\nabla U(\vec{r}) \cdot \nabla \varphi(\vec{r})}{k + U(\vec{r})} = 0, \quad (2.103)$$

onde foi usada (2.78) para o formato da função $\mathcal{P}\Psi(x_\mu)$.

Setor Vetorial

Para o setor vetorial da teoria devemos seguir o procedimento usando os projetores já apresentados em seções anteriores. Desta forma, a equação DKPNR com um potencial escalar (2.96), fica

$$\mathcal{R}^\nu(\beta^\mu \partial_\mu + k + U_E)\Psi = 0, \quad (2.104)$$

$$[\mathcal{R}^{\nu\mu} \partial_\mu + (k + U_E)\mathcal{R}^\nu]\Psi = 0. \quad (2.105)$$

Agora aplicando o projetor $\mathcal{R}^{\nu\mu}$ em (2.96)

$$\mathcal{R}^{\nu\mu}(\beta^\alpha \partial_\alpha + k + U_E)\Psi = 0, \quad (2.106)$$

$$[\mathcal{R}^{\nu\mu} \beta^\alpha \partial_\alpha + (k + U_E)\mathcal{R}^{\nu\mu}]\Psi = 0, \quad (2.107)$$

e usando a propriedade (2.39), temos

$$[(g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu - g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu) \partial_\alpha + (k + U_E)\mathcal{R}^{\nu\mu}]\Psi = 0, \quad (2.108)$$

$$[(\partial^\mu \mathcal{R}^\nu - \partial^\nu \mathcal{R}^\mu) + (k + U_E)\mathcal{R}^{\nu\mu}]\Psi = 0. \quad (2.109)$$

Se multiplicarmos ∂_μ à esquerda, obtemos

$$[(\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{R}^\nu - \partial_\mu \partial^\nu \mathcal{R}^\mu)]\Psi + \partial_\mu [(k + U_E)\mathcal{R}^{\nu\mu}]\Psi = 0, \quad (2.110)$$

ou

$$[(\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{R}^\nu - \partial_\mu \partial^\nu \mathcal{R}^\mu)]\Psi + \partial_\mu [(k + U_E)]\mathcal{R}^{\nu\mu}\Psi + (k + U_E)\partial_\mu \mathcal{R}^{\nu\mu}\Psi = 0, \quad (2.111)$$

mas, por (2.105)

$$\partial_\mu \mathcal{R}^{\nu\mu}\Psi = -(k + U_E)\mathcal{R}^\nu\Psi \quad (2.112)$$

assim, (2.111) fica

$$[\partial_\mu \partial^\mu - (k + U_E)^2] \mathcal{R}^\nu \Psi - \partial_\mu \partial^\nu \mathcal{R}^\mu \Psi + \partial_\mu [(k + U_E)] \mathcal{R}^{\nu\mu} \Psi = 0, \quad (2.113)$$

e com (2.109)

$$[\partial_\mu \partial^\mu - (k + U_E)^2] \mathcal{R}^\nu \Psi - \partial_\mu \partial^\nu \mathcal{R}^\mu \Psi + \frac{[\partial_\mu (k + U_E)] \cdot [(\partial^\nu \mathcal{R}^\mu - \partial^\mu \mathcal{R}^\nu) \Psi]}{(k + U_E)} = 0, \quad (2.114)$$

podemos chegar na forma

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu - (k + U_E)^2 - \frac{[\partial_\mu (k + U_E)] \partial^\mu}{(k + U_E)} \right] \mathcal{R}^\nu \Psi - \partial_\mu \partial^\nu \mathcal{R}^\mu \Psi + \frac{[\partial_\mu (k + U_E)] \partial^\nu \mathcal{R}^\mu \Psi}{(k + U_E)} = 0. \quad (2.115)$$

Se usarmos a condição $\partial_\mu \mathcal{R}^\mu \Psi = 0$, obtemos

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu - (k + U_E)^2 - \frac{[\partial_\mu (k + U_E)]}{(k + U_E)} \cdot \partial^\mu \right] \mathcal{R}^\nu \Psi + \frac{[\partial_\mu (k + U_E)]}{(k + U_E)} \cdot \partial^\nu (\mathcal{R}^\mu \Psi) = 0. \quad (2.116)$$

Assim, para determinarmos o papel de cada termo da equação acima, devemos testar alguns potenciais conhecidos.

Capítulo 3

Potencial Coulombiano

Nosso objetivo, neste capítulo, é resolver a equação DKPNR para um potencial do tipo coulombiano, ou seja, $1/|\vec{r}|$. Numa revisão da literatura, encontramos alguns trabalhos que exploram esse tipo de potencial inserido na equação DKP relativística, como em [32] para o setor escalar, como também em [33] para o setor vetorial, usando o acoplamento mínimo. Uma outra forma de acoplamento que pode ser explorada é o chamado acoplamento escalar, usado recentemente em DKP relativística [34].

Neste capítulo, resolvemos a equação DKPNR para um potencial do tipo coulombiano inserido escalarmente, seção 3.1. Contudo, para este tipo de acoplamento o resultado foi apenas funções de Bessel sem estados ligados. Em seguida, na seção 3.2, uma interação escalar do tipo coulombiano e um coulombiano na forma mínima, são inseridos conjuntamente. Os resultados foram funções hipergeométricas, onde determinamos as auto energias de estados ligados.

3.1 Potencial tipo Coulombiano através do acoplamento Escalar

O potencial escalar é inserido na equação DKPNR, conforme (3.1):

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k + U_E)\Psi = 0. \quad (3.1)$$

onde U_E é uma função qualquer de x_μ que está de acordo com a condição de conservação da penta-corrente j^μ , $\eta U^\dagger \eta = U$, mostrada na seção 2.2. Trabalharemos em seguida através dos projetores, mostrados na seção 2.4, para chegar na equação de Schrödinger.

3.1.1 A Equação de Schrödinger

Selecionando o setor escalar da teoria na equação (3.1), obtemos

$$[\partial_\mu \partial^\mu - (k + U_E)^2] \mathcal{P}\Psi - \frac{[\partial_\mu (k + U_E)]}{(k + U_E)} \cdot \partial^\mu (\mathcal{P}\Psi) = 0. \quad (3.2)$$

com $P\Psi$ selecionando a sexta componente do espinor Ψ , dessa forma,

$$\mathcal{P}\Psi = \mathcal{P} \begin{bmatrix} \partial_1\varphi \\ \partial_2\varphi \\ \partial_3\varphi \\ \partial_4\varphi \\ \partial_5\varphi \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

com $\varphi(x_\mu)$, dado por

$$\varphi(x_\mu) = e^{-imx_5} e^{-iEt} \phi(\vec{r}). \quad (3.4)$$

Usando a forma de $\varphi(x_\mu)$, dado acima, podemos chegar em

$$[\nabla^2 + 2mE - (k + U_E)^2]\phi(\vec{r}) - \frac{\nabla U_E \cdot \nabla \phi(\vec{r})}{k + U_E} = 0, \quad (3.5)$$

que rearrumando os termos, temos

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{(k + U_E)^2}{2m} \right] \phi(\vec{r}) + \left[\frac{\nabla U_E}{2m(k + U_E)} \right] \cdot \nabla \phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r}). \quad (3.6)$$

Propomos a função $\phi(\vec{r}) = f_l(r) \cdot Y_{lm}(\Omega)$ em coordenadas esféricas, devido a simetria esférica do problema. Com $f_l(r)$ representando a parte radial e $Y_{lm}(\Omega)$, os harmônicos esféricos, a parte angular. Sabemos que a parte radial do laplaciano em coordenadas esféricas segundo [43], é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2}, \quad (3.7)$$

com L sendo o operador momento angular, que é dado por:

$$L^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Então, o primeiro termo de (3.5), fica,

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right] \phi(\vec{r}). \quad (3.9)$$

Fazendo $f_l(r) = \frac{F_l(r)}{r}$, a equação acima, (3.9), é reescrita da forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{r}) &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right] \frac{F_l(r)}{r} \cdot Y_{lm}(\Omega), \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} l(l+1) \right] F_l(r) \cdot Y_{lm}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde usamos o fato de que os harmônicos esféricos são auto-funções do operador momento

angular, ou seja, $L^2 Y_{lm}(\Omega) = l(l+1)Y_{lm}(\Omega)$, sendo l o valor do momento angular orbital.

O último termo de (3.5) é o produto de dois gradientes. Usando a propriedade vetorial do laplaciano de duas funções escalares e tomando U_E , apenas dependente do $|\vec{r}| = r$, ou seja $U_E = U(r)$

$$\frac{\nabla U(r) \cdot \nabla \phi(\vec{r})}{U(r)} = \frac{1}{2U(r)} (\nabla^2[U(r)\phi(\vec{r})] - [\nabla^2 U(r)]\phi(\vec{r}) - U(r)[\nabla^2 \phi(\vec{r})]), \quad (3.11)$$

onde designaremos os termos por,

$$\begin{aligned} A &= \nabla^2[U(r)\phi(\vec{r})], \\ B &= [\nabla^2 U(r)]\phi(\vec{r}), \\ C &= U(r)[\nabla^2 \phi(\vec{r})]. \end{aligned}$$

Começaremos pelo termo A. Nessas condições podemos ver que, de maneira similar a (3.9), chegamos a:

$$\begin{aligned} A = \nabla^2[U(r)\phi(\vec{r})] &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right] U(r) \frac{F_l(r)}{r} \cdot Y_{lm}(\Omega), \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} l(l+1) \right] U(r) F_l(r) \cdot Y_{lm}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Já para o termo B, temos

$$\begin{aligned} B = [\nabla^2 U(r)]\phi(\vec{r}) &= \left(\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right] U(r) \right) \frac{F_l(r)}{r} \cdot Y_{lm}(\Omega), \\ &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right) \right] \frac{F_l(r)}{r} \cdot Y_{lm}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.13)$$

e para o termo C

$$\begin{aligned} C = U(r)[\nabla^2 \phi(\vec{r})] &= U(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right] \frac{F_l(r)}{r} \cdot Y_{lm}(\Omega), \\ &= \frac{U(r)}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} l(l+1) \right] F_l(r) \cdot Y_{lm}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.14)$$

De posse das expressões para A, B e C, podemos reescrever a equação (3.5), como

$$\frac{3}{2r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} l(l+1) \right] F_l(r) \cdot Y_{lm}(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2mE - [k + U(r)]^2 + \frac{1}{2[k + U(r)]} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right) \right] \right) \frac{F_l(r)}{r} \cdot Y_{lm}(\Omega) \\
& - \frac{1}{2[k + U(r)]} \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} l(l+1) \right] U(r) F_l(r) \cdot Y_{lm}(\Omega) \right) = 0. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

A equação (3.15) acima é a equação de Schrödinger, construída a partir da equação DKP no setor escalar da teoria, por introdução de um potencial tipo escalar, dependente apenas do módulo de um vetor \vec{r} . Como podemos perceber, há uma diferença acentuada se o mesmo potencial fosse introduzido através do acoplamento mínimo, como é usualmente feito [43].

3.1.2 A Equação Radial

Agora precisamos escolher a forma do potencial $U(r)$. Vamos tomar um potencial do tipo coulombiano, ou seja, $U(r) = -\frac{k_0}{r}$, onde k_0 é um número real. Dessa forma, (3.15) fica

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dr^2} F_l(r) + \frac{d}{dr} F_l(r) \left(\frac{k_0/r^2}{k - k_0/r} \right) + \\
& F_l(r) \left(-\frac{l(l+1)}{r^2} - k_0 \left[\frac{1}{r^3(k - k_0/r)} \right] - [k - k_0/r]^2 + 2mE \right) = 0. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

A constante k , pode ser nula, não interferindo nas medidas físicas. Assim fazendo $k = 0$ em (3.16), chegamos na seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dr^2} F_l(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} F_l(r) + \left(-\frac{1}{r^2} [l(l+1) + 1 + k_0^2] + 2mE \right) F_l(r) = 0. \quad (3.17)$$

Chamando de $\delta^2 = l(l+1) + 1 + k_0^2$ e $\alpha^2 = 2mE$, ficamos com

$$\frac{d^2}{dr^2} F_l(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} F_l(r) + \left(\alpha^2 - \frac{\delta^2}{r^2} \right) F_l(r) = 0. \quad (3.18)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $\xi = \alpha r$, temos

$$\frac{d^2}{d\xi^2} F_l(\xi) + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} F_l(\xi) + \left(1 - \frac{\delta^2}{\xi^2} \right) F_l(\xi) = 0. \quad (3.19)$$

A equação acima (3.19), possui duas soluções independentes que podem ser expressas em termos de funções de Bessel, definida pela série

$$j_\delta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \delta + 1)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\delta + 2n}. \quad (3.20)$$

Se δ não for inteiro, as duas soluções $j_\delta(\xi)$ e $j_{-\delta}(\xi)$ são linearmente independentes, a

solução geral da equação (3.19) corresponde

$$F_l(r) = Nj_\delta(\alpha r) + N'j_{-\delta}(\alpha r), \quad (3.21)$$

assim, a função de onda, $\phi(\vec{r})$, com a escolha adequada de somente $N \neq 0$, ficamos com

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Nj_\delta(\alpha r)}{r} Y_{lm}(\Omega). \quad (3.22)$$

Esta solução é muito semelhante ao problema de uma partícula livre em coordenadas esféricas, na equação de Schrödinger. Uma boa discussão desse problema quantum macânico pode ser encontrada em [43]. Temos uma energia bem determinada, dada por E , e também um valor bem determinado do momento angular orbital, em $\delta^2 = l(l+1) + 1 + k_0^2$, com k_0 , sendo a constante referente ao potencial $U_r = -k_0/r$, onde $r = |\vec{r}|$.

Nossos resultados apontam para uma solução simples, do coulombiano inserido escalarmente na equação DKP-NR. Devemos chamar atenção para a simplificação usada ao longo dos nossos cálculos, fazendo $k = 0$, e, assim obtivemos uma equação radial de segunda ordem, que tem por solução as funções especiais de Bessel.

Seguiremos obtendo a normalização da solução (3.22) partindo da equação (2.28)

$$\int \phi^\dagger(\vec{r})\phi(\vec{r})dV = 1 \quad (3.23)$$

$$N^2 \int \left[\frac{j_{\delta'}(\alpha r)}{r} Y'_{lm}(\Omega) \right]^\dagger \left[\frac{j_\delta(\alpha r)}{r} Y_{lm}(\Omega) \right] dV = 1 \quad (3.24)$$

onde podemos usar coordenadas esféricas para integrar no espaço. Dessa forma temos

$$N^2 \int \left[\frac{j_{\delta'}(\alpha r)}{r} \frac{j_\delta(\alpha r)}{r} r^2 dr \right] \left[\int Y_{l'm'}^\dagger(\Omega) Y_{lm}(\Omega) d\Omega \right] = 1 \quad (3.25)$$

ficando com

$$N^2 \int j_\delta^2(\alpha r) dr = 1. \quad (3.26)$$

Integrando até um certo valor máximo de r , resultando

$$N = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{r_{max}} j_\delta^2(\alpha r) dr}}. \quad (3.27)$$

A integral acima, em (3.27), é resolvida numericamente para um determinado valor de r_{max} . As funções de Bessel são facilmente encontradas nos software disponíveis. A figura 3.1 mostra o comportamento assintótico de N para o r_{max} até 200. Para r_{max} próximos da origem o valor da constante de normalização N varia bruscamente, estabilizando para valores maiores de r_{max} .

A figura 3.2 mostra o comportamento da densidade de probabilidade para três diferentes

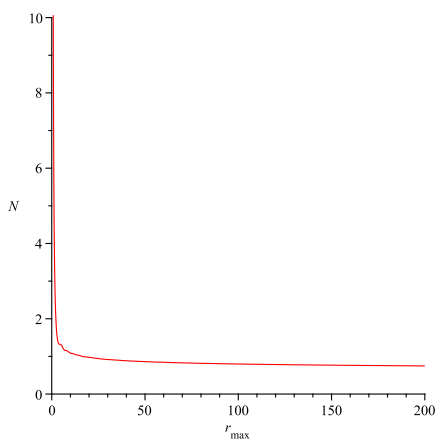


Figura 3.1: Valor de N para diferentes r_{max} , com $\alpha = 1$, $l = 0$ e $k_0 = 1$

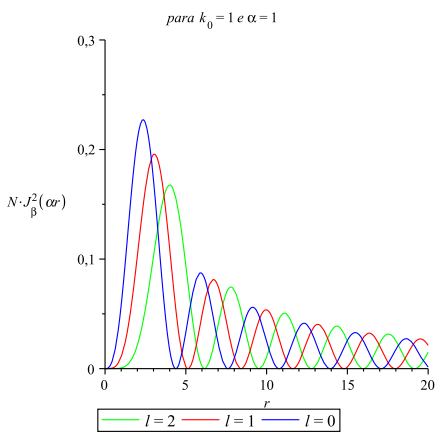


Figura 3.2: $Nj_{\delta}^2(\alpha r)$, para um $r_{max} = 100$

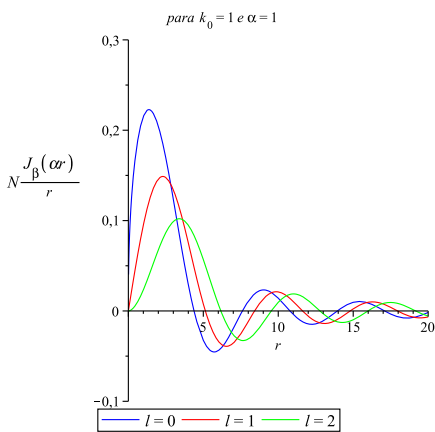


Figura 3.3: $N \frac{J_{\beta}(\alpha r)}{r}$, para um $r_{max} = 100$

valores de l . Enquanto que a figura 3.3 mostra o comportamento da solução radial da equação (3.17), destacamos o "amortecimento" promovido pelo fator $1/r$, já que sem esse efeito o nosso resultado seria muito parecido com a solução da equação de Schrödinger para partícula livre em coordenadas esféricas, de acordo com [43].

3.2 Potencial tipo Coulombiano através dos acoplamentos Escalar e Mínimo

Nesta seção implementaremos a resolução da equação DKPNR na presença de um potencial tipo coulombiano através de dois tipos de acoplamentos conjuntamente, escalar e mínimo. Assim, a equação DKPNR fica

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k + U_E + U_M) \Psi = 0, \quad (3.28)$$

onde U_E representa o potencial escalar e U_M o mínimo.

3.2.1 A Equação de Schrödinger

Substituindo $U_E(|\vec{r}|)$ e $U_M = -ie\beta^\mu A_\mu$ na equação DKPNR (3.28), temos

$$[\nabla^2 + 2m(E - eA_4) - (k + U_E(r))^2] \mathcal{P}\Psi - \frac{\nabla U_E(r) \cdot \nabla(\mathcal{P}\Psi)}{k + U_E(r)} = 0, \quad (3.29)$$

ou

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{(k + U_E(r))^2}{2m} + eA_4 \right] \mathcal{P}\Psi + \left[\frac{\nabla U_E(r)}{2m(k + U_E(r))} \right] \cdot \nabla(\mathcal{P}\Psi) = E \mathcal{P}\Psi. \quad (3.30)$$

onde o campo A_μ apresenta, apenas $A_4 \neq 0$.

3.2.2 A Equação Radial

Agora, considerando as interações expressas por

$$\begin{cases} U_E(r) = -\frac{\alpha}{r} \\ eA_4 = -\frac{\lambda}{r} \end{cases} \quad (3.31)$$

onde α e λ são constantes, definindo $\mathcal{P}\Psi = \psi(r)\vartheta(\Omega)$ e usando coordenadas esféricas, escrevemos a equação radial de (3.29) na forma

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \left[2mE + \frac{2m\lambda}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(k - \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] - \frac{\alpha/r^2}{k - \frac{\alpha}{r}} \frac{d}{dr} \right) \psi = 0.$$

Usando a transformação $\phi = r\psi$, temos

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left[2mE + \frac{2m\lambda}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(k - \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] - \frac{\alpha/r^2}{k - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \right) \phi = 0 \quad (3.32)$$

Definindo $\frac{k}{\alpha} = \gamma$, ficamos com

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left[2mE + \frac{2m\lambda}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\alpha^2}{r^2} (1 - \gamma r)^2 \right] + \frac{1}{r(1 - \gamma r)} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \right) \phi = 0.$$

Definindo $z = \gamma r$, obtemos

$$\left(\gamma^2 \frac{d^2}{dz^2} + \left[2mE + \frac{2\gamma m\lambda}{z} - \frac{\gamma^2 l(l+1)}{z^2} - \frac{\gamma^2 \alpha^2}{z^2} (1 - z)^2 \right] + \frac{\gamma^2}{z(1 - z)} \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{z} \right) \right) \phi = 0$$

e

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \left[\frac{2mE}{\gamma^2} + \frac{2m\lambda/\gamma}{z} - \frac{l(l+1)}{z^2} - \frac{\alpha^2}{z^2} (1 - z)^2 \right] + \frac{1}{z(1 - z)} \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{z} \right) \right) \phi = 0$$

Definindo $A = \alpha^2$, $B = 2m\lambda/\gamma$, $C = l(l+1)$ e $D = \frac{2mE}{\gamma^2}$, a equação acima é reescrita por

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \left[D + \frac{B}{z} - \frac{C}{z^2} - \frac{A}{z^2} (1 - z)^2 \right] + \frac{1}{z(1 - z)} \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{z} \right) \right) \phi = 0$$

e

$$\left(z(1 - z) \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} + \left[Dz(1 - z) + B(1 - z) - \frac{C(1 - z)}{z} - \frac{A}{z} (1 - z)^3 - \frac{1}{z} \right] \right) \phi = 0$$

e

$$\left(z^2(1 - z) \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + [Dz^2(1 - z) + Bz(1 - z) - C(1 - z) - A(1 - z)^3 - 1] \right) \phi = 0.$$

Considerando agora

$$\phi = z^\mu g(z), \quad (3.33)$$

então, suas derivadas são expressas por:

$$\phi' = \mu z^{\mu-1} g + z^\mu g', \quad (3.34)$$

e

$$\phi'' = \mu(\mu - 1)z^{\mu-2}g + 2\mu z^{\mu-1}g' + z^\mu g''. \quad (3.35)$$

Usando as derivadas (3.34) e (3.35), temos

$$z(1-z)g'' + g'[2\mu(1-z) + 1] + g\frac{1}{z}[\mu(\mu-1) + \mu - 1 + Dz^2(1-z) + Bz(1-z) - C(1-z) - A(1-z)^3]. \quad (3.36)$$

Usando ainda $(1-z)^3 = 1 - 3z + 3z^2 - z^3$ e impondo as condições

$$\begin{cases} \mu^2 - C - A - 1 = 0 \\ D - B - 3A = 0 \\ A - D = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

segue

$$z(1-z)g'' + [2\mu + 1 - (2\mu)z]g' - [\mu(\mu-1) - C - D]g = 0. \quad (3.38)$$

que é a equação de Gauss, com μ dado por

$$\mu = \sqrt{\frac{2mE}{\gamma^2} + l(l+1) + 1} \quad (3.39)$$

Definindo a , b e c em comparação com a equação diferencial de Gauss (D.1) em (3.38), temos

$$\begin{cases} c = 2\mu + 1 \\ a + b = 2\mu - 1 \\ ab = \mu(\mu-1) - C - D \end{cases} \quad (3.40)$$

resolvendo o sistema (3.40), encontramos

$$\begin{cases} c = 2\mu + 1 \\ a = \frac{2\mu-1 \pm \sqrt{4\mu^2-3}}{2} \\ b = \frac{2\mu-1 \mp \sqrt{4\mu^2-3}}{2} \end{cases} \quad (3.41)$$

A solução da equação (3.38) é expressa por:

$$g^\mu(z) = N_1 {}_2F_1^{(\mu)}[a, b; c; z] + N_2 z^{1-c} {}_2F_1^{(\mu)}[1+a-c, 1+b-c; 2-c; z], \quad (3.42)$$

onde N_1 e N_2 são constantes de normalização e ${}_2F_1[a, b; c; z]$ a função hipergeométrica apresentada em (D.2). Dessa forma temos

$$\phi^\mu(z) = N_1 z^\mu {}_2F_1^{(\mu)}[a, b; c; z] + N_2 z^{-\mu} {}_2F_1^{(\mu)}[1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; z]. \quad (3.43)$$

Como $\psi = \frac{\phi}{r}$ e $z = \gamma r$, temos

$$\psi^\mu(r) = N_1 \gamma^\mu r^{\mu-1} {}_2F_1^{(\mu)}[a, b; c; \gamma r] + N_2 \gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)} {}_2F_1^{(\mu)}[1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; \gamma r].$$

assim, devemos fazer a constante $N_1 = 0$, satisfazendo à condição de integrabilidade da função de onda, ou seja, finita para $z \rightarrow \infty$, logo obtemos

$$\psi^\mu(r) = N_2 \gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)} {}_2F_1^{(\mu)}[1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; \gamma r]. \quad (3.44)$$

Sabemos que a série hipergeométrica do tipo ${}_2F_1[a, b; c; \gamma r]$, converge para $|\gamma r| < 1$, mas fora de intervalo para pequenos valores de r , devemos truncar a série. Utilizando os termos consecutivos da série, temos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a + 1 - c + n)(b + 1 - c + n)}{(1 + n)(2 - c + n)},$$

para truncar a série hipergeométrica devemos ter

$$\begin{cases} a + 1 - c + n = 0 \\ ou \\ b + 1 - c + n = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

as duas condições se completam gerando uma única quantização

$$E_{n,l} = \frac{\gamma^2}{2m} \left[\left[\frac{3/4 + (n - 1/2)^2}{2(n - 1/2)} \right]^2 - l(l + 1) - 1 \right]. \quad (3.46)$$

Os níveis de energia mostrados em (3.46) podem ser divididos como

$$Q_n = \left[\frac{3/4 + (n - 1/2)^2}{2(n - 1/2)} \right]^2 \quad (3.47)$$

onde podemos observar que para os primeiros três níveis de energia, ou seja, $n = 0, 1, 2$, ele possui o mesmo valor 1, consideramos então que sempre haverá uma degenerescência na energia para estes níveis.

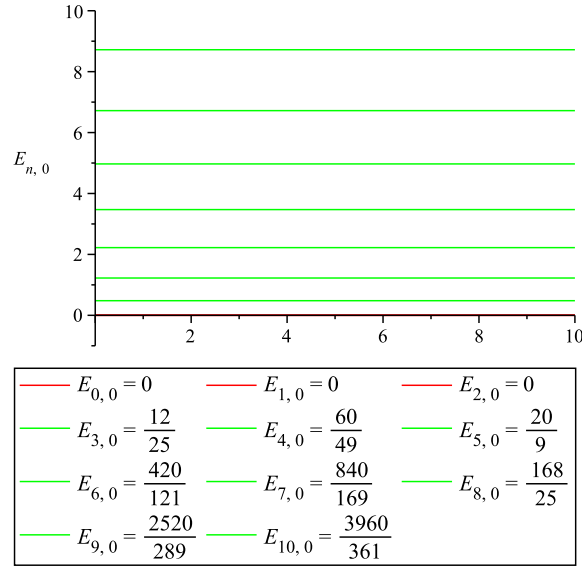


Figura 3.4: $E_{n,l}$, para $l = 0$, com $\gamma = m = 1$

$$\begin{cases} Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1 \\ Q_3 = \frac{49}{25} \end{cases} \quad (3.48)$$

Dessa forma a (3.46) fica mais apropriadamente escrita

$$\begin{cases} E_{(0,1,2),l} = -\frac{\gamma^2}{2m} [l(l+1)] \\ E_{(n>2),l} = \frac{\gamma^2}{2m} \left[\left[\frac{3/4+(n-1/2)^2}{2(n-1/2)} \right]^2 - l(l+1) - 1 \right] \end{cases} \quad (3.49)$$

As figuras 3.4, 3.5 e 3.6 mostram o comportamento de $E_{n,l}$ descrito por (3.49) em função de n , para três diferentes valores de l , com $\gamma = m = 1$.

Um estudo do potencial efetivo na equação de segunda ordem (3.32) nos possibilita visualizar a forma que o potencial adquire e sua dependência com os parâmetros introduzidos ao longo do cálculo. Para isso faremos a seguinte mudança na função $\phi(\vec{r})$ em busca de eliminar o termo de primeira derivada

$$\phi(r) = \left[C_0 \left(\frac{r - \alpha/k}{r} \right)^{k/2} \right] f(r). \quad (3.50)$$

Dessa forma, a equação (3.32) com $C_0 = 1$, fica

$$f''(r) + \left[\frac{\frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha kr}{(kr^2 - \alpha r)^2} + \frac{\alpha}{r(kr^2 - \alpha r)} + \frac{2m\lambda}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(k - \frac{\alpha}{r} \right)^2 + 2mE \right] f(r) = 0$$

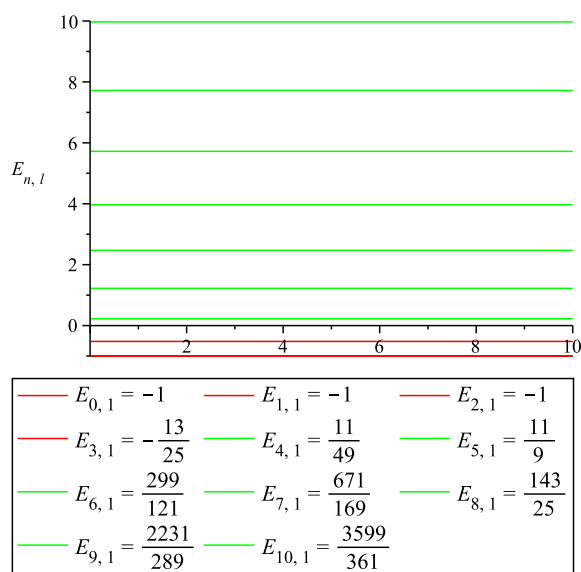


Figura 3.5: $E_{n,l}$, para $l = 1$, com $\gamma = m = 1$

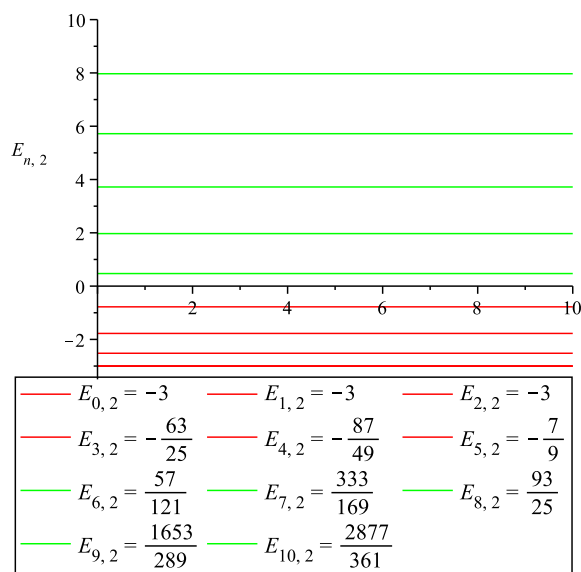


Figura 3.6: $E_{n,l}$, para $l = 2$, com $\gamma = m = 1$

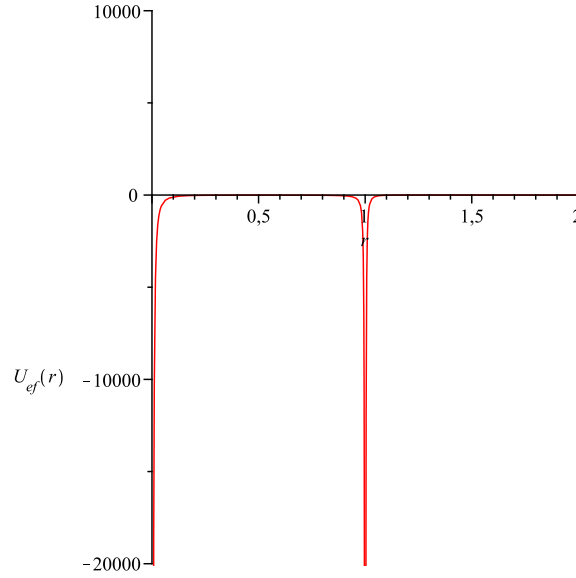


Figura 3.7: $U_{ef}(r)$, para $l = 0$, com $\alpha = \lambda = m = k = 1$

$$U_{ef}(r) = \left[\frac{\frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha kr}{(kr^2 - \alpha r)^2} + \frac{\alpha}{r(kr^2 - \alpha r)} + \frac{2m\lambda}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \left(k - \frac{\alpha}{r}\right)^2 \right] \quad (3.51)$$

Se fizermos o gráfico do potencial efetivo $U_{ef}(r)$ acima em (3.51), poderemos ver uma forte dependência do parâmetro α inserido através do acoplamento escalar U_E em (3.31). A Figura 3.7, mostra uma espécie de singularidade para o valor de α , como pode ser visto também na Figura 3.8 quando mudamos seu valor para $\alpha = 2$ e na Figura 3.9 o gráfico demonstra que o parâmetro λ produz uma espécie de barreira próximo à origem.

3.2.3 Normalização

A constante de normalização para o setor escalar é calculada usando a densidade de probabilidade, expressa por (3.23), dessa forma

$$N^2 \int (\gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)}) {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; \gamma r] Y'_{lm}(\Omega) \dagger (\gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)}) {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; \gamma r] Y_{lm}(\Omega) dV = 1 \quad (3.52)$$

onde podemos usar coordenadas esféricas para integrar no espaço

$$N^2 \int (\gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)}) {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; \gamma r] \dagger (\gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)}) {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; \gamma r] r^2 dr \int Y_{l'm}^\dagger(\Omega) Y_{lm}(\Omega) d\Omega = 1 \quad (3.53)$$

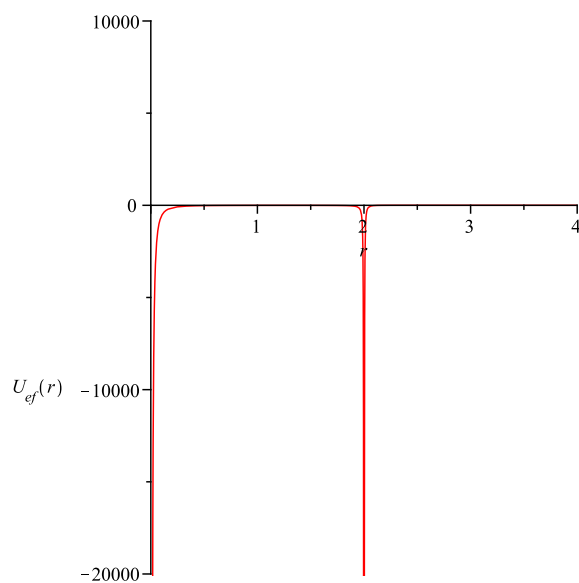


Figura 3.8: $U_{ef}(r)$, para $l = 0$, com $\alpha = 2$ e $\lambda = m = k = 1$

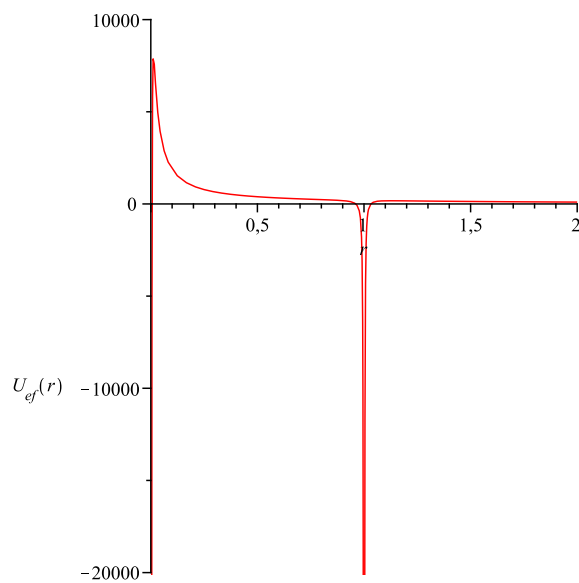


Figura 3.9: $U_{ef}(r)$, para $l = 0$, com $\alpha = m = k = 1$ e $\lambda = 100$

ficando com

$$N^2 \int (\gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)} {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; \gamma r])^\dagger (\gamma^{-\mu} r^{-(\mu+1)} {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; \gamma r]) r^2 dr = 1 \quad (3.54)$$

podemos integrar até um certo valor máximo de r , dessa forma

$$N = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{r_{max}} \gamma^{-2\mu} r^{-2\mu} ({}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; \gamma r])^2 dr}} \quad (3.55)$$

O r_{max} na equação acima tem o mesmo sentido mostrado em (3.27), para um determinado valor de r a normalização deve se estabilizar, não necessitando calcular a integral (3.55) para valores maiores de r_{max} .

Capítulo 4

Potencial Hulthén Assimétrico

Neste capítulo resolvemos a equação DKPNR unidimensional para um potencial tipo Hulthén assimétrico [25] em termos de funções hipergeométricas para o estado fundamental e de espalhamento. O potencial foi inserido de maneira usual, através do acoplamento mínimo. O potencial de Hulthén assimétrico, representa uma gama de potenciais de interesse tanto na Física relativística quanto na não-relativística, pois através da sua forma geral, podemos chegar a outros potenciais como: Coulomb, Cusp e Wood-Saxon. O potencial Hulthén assimétrico pode ser dado por

$$eA_4 = V(x) = V_0 \left[\theta(-x) \frac{1}{e^{-ax} - q} + \theta(x) \frac{1}{e^{bx} - \tilde{q}} \right] \quad (4.1)$$

Fazendo $a = b$ e $q = \tilde{q} = 1$ em (4.1), temos o potencial de Hulthén usual se, porém, $q = \tilde{q} = 0$, temos "Cusp Potential" [28] enquanto $a = b$ e $q = \tilde{q} = -1$ chegamos no potencial de Wood-Saxon. Como podemos ver, o potencial de Hulthén assimétrico envolve uma classe de interações existentes na Física. A seguir na seção 4.1 estudamos a equação DKP e sua solução, para o setor, escalar e vetorial.

4.1 A equação DKP e o Potencial de Hulthén

Partiremos da equação DKP na presença de um acoplamento mínimo

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k + U_M)\Psi = 0, \quad (4.2)$$

com U_M , dado na forma

$$U_M = -ei\beta^\mu A_\mu. \quad (4.3)$$

onde A_μ é um campo vetorial externo. Podemos agora selecionar o setor da teoria que queremos trabalhar. Com o uso dos projetores seção 2.4, podemos chegar as equações de segunda ordem referentes a cada setor da teoria.

4.1.1 Setor Escalar

Para o setor escalar, a partir dos desenvolvimentos feitos na seção 2.6.1 temos

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\mathcal{P}\Psi = 0 \quad (4.4)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ e $\mathcal{P}\Psi$ dado por

$$\mathcal{P}\Psi = \mathcal{P} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

sendo assim ficamos com a equação de Schrödinger covariante da forma

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\varphi = 0. \quad (4.6)$$

Tomando $A_\mu = (0, 0, 0, A_4, 0)$, esta equação pode ser melhor visualizada como

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) + 2mE\varphi(\vec{r}) - 2meA_4\varphi(\vec{r}) + k^2\varphi(\vec{r}) = 0, \quad (4.7)$$

ou

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\varphi(\vec{r}) - eA_4\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}), \quad (4.8)$$

onde $\varphi(x_\mu) = \exp(-imx_5)\exp(-iEt)\varphi(\vec{r})$. Se usarmos apenas uma dimensão espacial em (4.8), temos

$$-\left(\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + eA_4\right)\varphi(x) = E\varphi(x). \quad (4.9)$$

que é a usual equação de Schrödinger encontrada na literatura [43].

4.1.2 Setor Vetorial

A seguir daremos ênfase ao setor vetorial da teoria, mas como será mostrado adiante a equação diferencial que resolveremos é idêntica à (4.9). Assim, com a seleção do setor vetorial, chegamos na equação de Schrödinger covariante

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\mathcal{R}^\nu\Psi - D^\nu D_\mu\mathcal{R}^\mu\Psi + ei[(\partial^\nu A^\mu) - (\partial^\mu A^\nu)]\mathcal{R}_\mu\Psi = 0. \quad (4.10)$$

Para o desenvolvimento da equação (4.10) precisamos delimitar o formato do potencial A_μ como em (4.7). Partindo de (4.10), e sabendo que $D^\nu D_\mu\mathcal{R}^\mu\Psi = 0$ de acordo com a seção 2.6.1, têm-se

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\mathcal{R}^\nu\Psi + ei[(\partial^\nu A^\mu) - (\partial^\mu A^\nu)]\mathcal{R}_\mu\Psi = 0. \quad (4.11)$$

Fazendo o índice $\nu = j = 1, 2, 3$, têm-se

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\mathcal{R}^j\Psi + ei[(\partial^j A_\mu) - (\partial_\mu A^j)]\mathcal{R}^\mu\Psi = 0, \quad (4.12)$$

que para $\mu = k, 4, 5$, com $k = 1, 2, 3$, chega-se em

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\mathcal{R}^j\Psi + ei[(\partial^j A_k) - (\partial_k A^j)]\mathcal{R}^k\Psi + ei[(\partial^j A_4) - (\partial_4 A^j)]\mathcal{R}^4\Psi + ei[(\partial^j A_5) - (\partial_5 A^j)]\mathcal{R}^5\Psi = 0. \quad (4.13)$$

Quando o projetor \mathcal{R}^ν atua no espinor Ψ , seleciona as componentes da seguinte forma: $\mathcal{R}^j\Psi = \Psi_{9+j} = C_j$, para $j = 1, 2, 3$, $\mathcal{R}^4\Psi = \Psi_{14} = \phi$ e $\mathcal{R}^5\Psi = \Psi_{13} = \varphi$. Com isso, identificamos no espinor as mesmas como

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{10} = C_1 \\ \Psi_{11} = C_2 \\ \Psi_{12} = C_3 \\ \Psi_{13} = \varphi \\ \Psi_{14} = \phi \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Então, (4.13) é reescrita da forma

$$(D^\mu D_\mu - k^2)C_j + i(\partial_j eA_4)\phi = 0, \quad (4.15)$$

representando assim três equações quando variamos $j = 1, 2, 3$.

Para $\nu = 4$ em (4.11), temos

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\phi + i(\partial^4 eA_4)\phi = 0. \quad (4.16)$$

Considerando que eA_4 não depende da quinta coordenada, pois $\partial^4 = -\partial_5$, segue que $\partial^4 A_4 = -\partial_5 A_4 = 0$,

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\phi = 0. \quad (4.17)$$

Por fim, para $\nu = 5$ em (4.11), chegamos a

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\varphi + i(\partial^j eA_4)C_j = 0, \quad (4.18)$$

tornando-se,

$$(D^\mu D_\mu - k^2)\varphi + i\nabla(eA_4) \cdot \vec{C} = 0, \quad (4.19)$$

Resumindo, as cinco equações presentes em (4.11) são expressas por:

$$\begin{cases} (D^\mu D_\mu - k^2)C_j + i(\partial_j eA_4)\phi = 0, \\ (D^\mu D_\mu - k^2)\phi = 0, \\ (D^\mu D_\mu - k^2)\varphi + i\nabla(eA_4) \cdot \vec{C} = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

com $j = 1, 2, 3$.

Escolhemos fazer a componente $\phi = 0$. Em uma interpretação particular das componentes do espinor Ψ , tomar $\phi = 0$, significaria que estamos no limite magnético, também usado em [42, 6] dessa forma. Aqui, estamos apenas tomando a componente $\phi = 0$ sem uma escolha particular de sistema físico. Com isso, o sistema de equações (4.20) é simplificado, ficando

$$\begin{cases} (D^\mu D_\mu - k^2)C_j = 0, \\ \nabla \cdot \vec{C} = im\varphi \end{cases} \quad (4.21)$$

com $j = 1, 2, 3$, onde usamos a identidade $D^\nu D_\mu \mathcal{R}^\mu \Psi = 0$ para obter a segunda equação. Resolveremos inicialmente as primeiras equações para as componentes do vetor \vec{C} . Assim,

$$(D^\mu D_\mu - k^2)C_j = 0 \quad (4.22)$$

com $j = 1, 2, 3$.

Considerando uma dimensão espacial, uma temporal e a dimensão canonicamente conjugada a massa e chamando $C_j = \psi$, temos

$$[\partial_\mu \partial^\mu - e^2 A_\mu A^\mu - ei(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) - k^2]\psi = 0. \quad (4.23)$$

Calculando separadamente cada termo da expressão acima, temos

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \psi = (\partial_x^2 - 2\partial_t \partial_5)\psi, \\ A_\mu A^\mu \psi = (A_i^2 - A_4 A_5 - A_5 A_4)\psi = 0, \\ \partial_\mu A^\mu \psi = -\partial_5 A_4 \psi, \\ A_\mu \partial^\mu \psi = -A_4 \partial_5 \psi \end{cases} \quad (4.24)$$

onde chegamos em

$$[(\partial_x^2 - 2\partial_t\partial_5) + ei(\partial_5 A_4 + A_4\partial_5) - k^2]\psi(x_\mu) = 0, \quad (4.25)$$

Agora adotaremos uma forma para as funções $\psi(x_\mu)$, a saber

$$\psi(x_\mu) = e^{-imx_5} e^{-iEt} \psi(\vec{r}), \quad (4.26)$$

de forma que, tomando apenas uma dimensão espacial, por (4.25), temos

$$[(\partial_x^2 + 2mE + 2m(eA_4) - k^2]\psi(x) = 0,$$

que pode ser melhor expressa na forma

$$-\left(\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + eA_4\right) \psi(x) = \left(\frac{k^2}{2m} + E\right) \psi(x). \quad (4.27)$$

A equação acima é Schrödinger para um potencial acoplado de forma mínima no setor vetorial da teoria. A constante k pode ser suprimida, pois representa apenas um acréscimo no valor total da energia. Assim,

$$-\left(\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + eA_4\right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (4.28)$$

Usando a expressão para eA_4 em (4.1), primeiramente para $x < 0$, obtém-se

$$-\left(\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{e^{-ax} - q}\right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (4.29)$$

Fazendo a mudança de variável $y = qe^{ax}$, chegamos a

$$\left[y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} + \frac{2mV_0}{a^2q} \left(\frac{y}{1-y}\right) + \frac{2mE}{a^2}\right] \psi(y) = 0. \quad (4.30)$$

Tomando $\psi(y) = y^\mu f(y)$, chegamos na equação

$$y(1-y) \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + [1 + 2\mu - y(1 + 2\mu)] \frac{df(y)}{dy} + Af(y) = 0, \quad (4.31)$$

com A dado por,

$$A = \left[\mu^2 + \left(\frac{2mE}{a^2}\right)\right] \frac{(1-y)}{y} + \frac{2mV_0}{a^2q}. \quad (4.32)$$

Buscando obter uma equação diferencial mais simples, impomos a condição

$$\begin{cases} \mu = \frac{i}{a} \sqrt{2mE}, \\ \frac{2mV_0}{a^2q} = \beta. \end{cases} \quad (4.33)$$

Assim (4.31), é reescrita da forma

$$y(1-y)\frac{d^2f(y)}{dy^2} + [1+2\mu - y(1+2\mu)]\frac{df(y)}{dy} + \beta f(y) = 0. \quad (4.34)$$

Podemos comparar (4.34) com a forma geral da hipergeométrica (D.1), que tem por soluções linearmente independentes para $|y| < 1$, (D.13)

$$f(y) = A_2F_1[a, b; c; y] + By^{1-c}{}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; y], \quad (4.35)$$

onde

$$\begin{cases} c = 1 + 2\mu \\ a + b = 2\mu \\ -ab = \beta \end{cases} \quad (4.36)$$

logo, resolvendo este sistema, temos

$$\begin{cases} c = 1 + 2\mu \\ a = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + \beta} \\ b = \mu \mp \sqrt{\mu^2 + \beta} \end{cases} \quad (4.37)$$

Buscaremos agora a solução para $x > 0$, selecionando o lado direito da ação do potencial (4.1), assim, (4.28) fica

$$-\left(\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{e^{bx} - \tilde{q}}\right)\psi(x) = E\psi(x), \quad (4.38)$$

Fazendo a mudança de variável $z = \tilde{q}e^{-bx}$, chegamos em

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + \frac{2mV_0}{b^2\tilde{q}}\left(\frac{z}{1-z}\right) + \frac{2mE}{b^2}\right]\psi(z) = 0, \quad (4.39)$$

Tomando agora $\psi(z) = z^{\tilde{\mu}}f(z)$, chegamos na equação

$$z(1-z)\frac{d^2f(z)}{dz^2} + [1+2\tilde{\mu} - z(1+2\tilde{\mu})]\frac{df(z)}{dz} + \tilde{A}f(z) = 0, \quad (4.40)$$

com \tilde{A} , dado por

$$\tilde{A} = \left[\tilde{\mu}^2 + \left(\frac{2mE}{b^2}\right)\right]\frac{(1-z)}{z} + \frac{2mV_0}{b^2\tilde{q}}, \quad (4.41)$$

Buscando obter uma equação diferencial mais simples, impomos a condição

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = \frac{i}{b}\sqrt{2mE}, \\ \frac{2mV_0}{b^2\tilde{q}} = \tilde{\beta}. \end{cases} \quad (4.42)$$

Assim, (4.40) é reescrita da forma

$$z(1-z)\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + [1+2\tilde{\mu} - z(1+2\tilde{\mu})]\frac{df(z)}{dz} + \tilde{\beta}f(z) = 0. \quad (4.43)$$

nos dando a seguinte solução para $|z| < 1$

$$f(z) = C {}_2F_1[a, b; c; z] + Dz^{1-c} {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; z], \quad (4.44)$$

onde

$$\begin{cases} c = 1 + 2\tilde{\mu} \\ a + b = 2\tilde{\mu} \\ -ab = \tilde{\beta} \end{cases} \quad (4.45)$$

E,

$$\begin{cases} c = 1 + 2\tilde{\mu} \\ a = \tilde{\mu} \pm \sqrt{\tilde{\mu}^2 + \tilde{\beta}} \\ b = \tilde{\mu} \mp \sqrt{\tilde{\mu}^2 + \tilde{\beta}} \end{cases} \quad (4.46)$$

De posse das soluções tanto para $x < 0$, quanto para $x > 0$, resumimos em

- $x < 0$,

$$\begin{aligned} \psi(x < 0) = & Aq^{\frac{ik}{a}} e^{ikx} {}_2F_1\left[\frac{ik}{a}V_f^+, \frac{ik}{a}V_f^-; 1 + \frac{i2k}{a}; y\right] + Bq^{-\frac{ik}{a}} e^{-ikx} \\ & {}_2F_1\left[\frac{ik}{a}(V_f^+ - 1), \frac{ik}{a}(V_f^- - 1); 1 - \frac{ik}{a}; y\right], \end{aligned}$$

com

$$\begin{cases} k = \sqrt{2mE} \\ V_f^\pm = 1 \pm \sqrt{1 - V_m} \\ V_m = \frac{V_0}{Eq} \\ y = qe^{ax} \end{cases} \quad (4.47)$$

- $x > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(x > 0) = & C\tilde{q}^{\frac{ik}{b}} e^{-ikx} {}_2F_1\left[\frac{ik}{b}\tilde{V}_f^+, \frac{ik}{b}\tilde{V}_f^-; 1 + \frac{i2k}{b}; z\right] + D\tilde{q}^{-\frac{ik}{b}} e^{ikx} \\ & {}_2F_1\left[\frac{ik}{b}(\tilde{V}_f^+ - 1), \frac{ik}{b}(\tilde{V}_f^- - 1); 1 - \frac{i2k}{b}; z\right], \end{aligned}$$

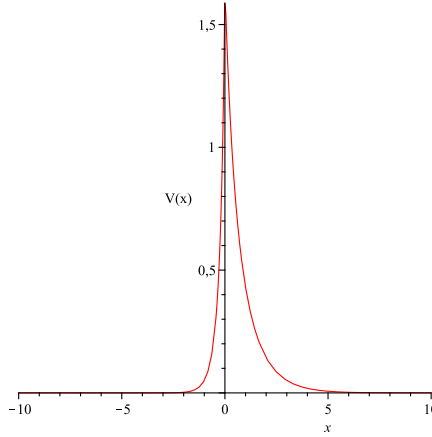


Figura 4.1: $V(x) = V_0 \left[\theta(-x) \frac{1}{e^{-ax}-q} + \theta(x) \frac{1}{e^{bx}-\tilde{q}} \right]$, para $V_0 = 1$, $a = 3$, $b = 1$ e $q = \tilde{q} = 0,4$

com

$$\begin{cases} k = \sqrt{2mE} \\ \tilde{V}_f^\pm = 1 \pm \sqrt{1 - \tilde{V}_m} \\ \tilde{V}_m = \frac{V_0}{E\tilde{q}} \\ z = \tilde{q}e^{-bx} \end{cases} \quad (4.48)$$

Logo, chegamos as soluções gerais para as componentes C_j de (4.22). Com as componentes C_j determinadas, podemos calcular o campo φ em (4.21) e, portanto, construir o espinor Ψ completamente. Na seção seguinte, utilizaremos dessas soluções para descrever o espalhamento de bósons vetoriais massivos através do potencial de Hulthén (4.1). E em seguida, discutiremos a solução do caso de estados ligados.

4.2 Estados de espalhamento

Podemos fazer agora uma discussão da transmissão e reflexão através do potencial barreira dado pela (4.1), mostrado na figura 4.1, onde estamos tomando $V_0 > 0$. Para uma solução fisicamente possível do sistema, a função de onda deve satisfazer as condições apropriadas de contorno. Fazendo $x \mapsto -\infty$, $y \mapsto 0$, temos

- $x < 0$, onda incidente, $\psi(x)_{inc}$, com $B = 0$ em (4.47)

$$\begin{aligned} \psi(x)_{inc} &= Aq^{\frac{ik}{a}} e^{ikx} {}_2F_1 \left[\frac{ik}{a} V_f^+, \frac{ik}{a} V_f^-; 1 + \frac{i2k}{a}; y \right], \\ &= Aq^{\frac{ik}{a}} e^{ikx} F_i(q) \longrightarrow Aq^{\frac{ik}{a}} e^{ikx} \end{aligned} \quad (4.49)$$

- $x < 0$, onda refletida, $\psi(x)_{refl}$, com $A = 0$ em (4.47)

$$\begin{aligned}
\psi(x)_{rfl} &= Bq^{-\frac{ik}{a}} e^{-ikx} {}_2F_1 \left[\frac{ik}{a} (V_f^+ - 1), \frac{ik}{a} (V_f^- - 1); 1 - \frac{ik}{a}; y \right], \\
&= Bq^{-\frac{ik}{a}} e^{-ikx} F_r(q) \longrightarrow Bq^{-\frac{ik}{a}} e^{-ikx}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

- $x > 0$, onda transmitida, $\psi(x)_{trm}$, com $C = 0$ em (4.48)

$$\begin{aligned}
\psi(x)_{trm} &= D\tilde{q}^{-\frac{ik}{b}} e^{ikx} {}_2F_1 \left[\frac{ik}{b} (\tilde{V}_f^+ - 1), \frac{ik}{b} (\tilde{V}_f^- - 1); 1 - \frac{i2k}{b}; z \right], \\
&= D\tilde{q}^{-\frac{ik}{b}} e^{ikx} F_t(\tilde{q}) \longrightarrow D\tilde{q}^{-\frac{ik}{b}} e^{ikx}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Onde as variáveis que constam nas expressões, estão em (4.47) e (4.48). Para determinação dos coeficientes de transmissão T e reflexão R , usaremos a continuidade da função, e de sua derivada em $x = 0$, lembrando que a penta-corrente é dada por, $j^\mu = \bar{\Psi}\beta^\mu\Psi$, de forma que temos

$$\begin{aligned}
T &= \left| \frac{j_{trm}}{j_{inc}} \right|, \\
R &= \left| \frac{j_{rfl}}{j_{inc}} \right|.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Pela continuidade da função de onda na origem, temos

$$N_1\psi_{inc}(x=0) + N_2\psi_{rfl}(x=0) = N_3\psi_{trm}(x=0)$$

e para a continuidade da derivada, temos

$$N_1 \left[\frac{d\psi_{inc}(x)}{dx} \right]_{x=0} + N_2 \left[\frac{d\psi_{rfl}(x)}{dx} \right]_{x=0} = N_3 \left[\frac{d\psi_{trm}(x)}{dx} \right]_{x=0},$$

podemos chegar em

$$T = \left| \frac{j_{trm}}{j_{inc}} \right| = \left| \frac{N_3}{N_1} \right|^2, \tag{4.53}$$

$$R = \left| \frac{j_{rfl}}{j_{inc}} \right| = \left| \frac{N_2}{N_1} \right|^2. \tag{4.54}$$

De posse das definições acima, seguimos no cálculo dos coeficientes,

$$T = \left| \frac{N_3}{N_1} \right|^2 = \left| \frac{q^{\frac{ik}{a}} F_i(q)}{\tilde{q}^{-\frac{ik}{b}} F_t(\tilde{q})} \left(\frac{i2k}{a} + \Omega_i - \Omega_r \right) \right|^2, \tag{4.55}$$

e ainda

$$R = \left| \frac{N_2}{N_1} \right|^2 = \left| q^{\frac{i2k}{a}} \frac{F_i(q)}{F_r(q)} \left[\frac{\frac{i2k}{a} + \Omega_i - \Omega_r}{\frac{i2k}{a} - \frac{b}{a}\Omega_t - \Omega_r} - 1 \right] \right|^2. \quad (4.56)$$

onde

$$\begin{cases} \Omega_i = f_i \frac{F_i^+(q)}{F_i(q)} \\ \Omega_r = f_r \frac{F_r^+(q)}{F_r(q)} \\ \Omega_t = f_t \frac{F_t^+(\tilde{q})}{F_t(\tilde{q})} \end{cases} \quad (4.57)$$

e com

$$\begin{cases} F_i^+(q) = {}_2F_1 \left[\frac{ik}{a} V_f^+ + 1, \frac{ik}{a} V_f^- + 1; 2 + \frac{i2k}{a}; q \right] \\ f_i = \frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2 V_m}{1 + \frac{i2k}{a}} \\ F_r^+(q) = {}_2F_1 \left[\frac{ik}{a} (V_f^+ - 1) + 1, \frac{ik}{a} (V_f^- - 1) + 1; 2 - \frac{i2k}{a}; q \right] \\ f_r = \frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2 (V_m + 1)}{1 - \frac{i2k}{a}} \\ F_t^+(\tilde{q}) = {}_2F_1 \left[\frac{ik}{b} (\tilde{V}_f^+ - 1) + 1, \frac{ik}{b} (\tilde{V}_f^- - 1) + 1; 2 - \frac{i2k}{b}; \tilde{q} \right] \\ f_t = \frac{\left(\frac{k}{b}\right)^2 (\tilde{V}_m + 1)}{1 - \frac{i2k}{b}} \end{cases} \quad (4.58)$$

Para a condição de transmissão total, devemos ter $R = 0$ em (4.56), assim chegamos na seguinte relação

$$\Omega_i + \frac{b}{a}\Omega_t = 0. \quad (4.59)$$

A equação (4.59) acima, contém os parâmetros que devemos ajustar para chegarmos nas condições de transmissão total.

4.3 Estados Ligados

Se fizermos $V_0 \rightarrow -V_0$, a barreira de potencial se torna um potencial atrativo, mostrado na figura 4.2. Utilizando os cálculos feitos na seção 4.1, temos que para $x < 0$:

$$\psi_{x < 0}(x) = Aq^{\frac{k}{a}} e^{kx} F_d(qe^{ax}), \quad (4.60)$$

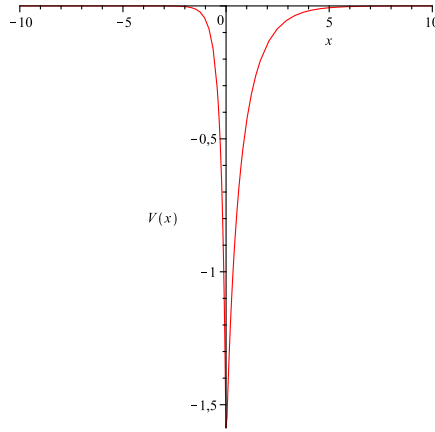


Figura 4.2: $V(x) = -V_0 \left[\theta(-x) \frac{1}{e^{-ax}-q} + \theta(x) \frac{1}{e^{bx}-\tilde{q}} \right]$, para $V_0 = 1$, $a = 3$, $b = 1$ e $q = \tilde{q} = 0,4$

como também para $x > 0$:

$$\psi_{x>0}(x) = C \tilde{q}^{\frac{k}{b}} e^{-kx} F_e(\tilde{q}e^{-bx}). \quad (4.61)$$

com

$$\begin{cases} F_d(qe^{ax}) = {}_2F_1 \left[\frac{ik}{a} V_f^+, \frac{ik}{a} V_f^-; 1 + \frac{2k}{a}; qe^{ax} \right] \\ F_e(\tilde{q}e^{-bx}) = {}_2F_1 \left[\frac{ik}{b} \tilde{V}_f^+, \frac{ik}{b} \tilde{V}_f^-; 1 + \frac{2k}{b}; \tilde{q}e^{-bx} \right] \end{cases} \quad (4.62)$$

As energias de estados ligados são encontradas requerendo a continuidade função de onda e de sua derivada em $x = 0$. Assim, devemos ter

$$\begin{cases} \psi_{x<0}(0) = \psi_{x>0}(0), \\ \left[\frac{d\psi_{x<0}(x)}{dx} \right]_{x=0} = \left[\frac{d\psi_{x>0}(x)}{dx} \right]_{x=0}, \end{cases} \quad (4.63)$$

obtendo

$$2k + a\Omega_d(k, q) + b\Omega_e(k, \tilde{q}) = 0 \quad (4.64)$$

onde

$$\begin{cases} \Omega_d(k, q) = f_d \frac{F_d^+(q)}{F_d(q)} \\ \Omega_e(k, \tilde{q}) = f_e \frac{F_e^+(\tilde{q})}{F_e(\tilde{q})} \end{cases} \quad (4.65)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} F_d^+(q) = {}_2F_1 \left[\frac{ik}{a} V_f^+ + 1, \frac{ik}{a} V_f^- + 1; 2 + \frac{2k}{a}; q \right] \\ f_d = \frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2 V_m}{1 + \frac{2k}{a}} \\ F_e^+(q) = {}_2F_1 \left[\frac{ik}{b} \tilde{V}_f^+ + 1, \frac{ik}{b} \tilde{V}_f^- + 1; 2 + \frac{2k}{b}; \tilde{q} \right] \\ f_e = \frac{\left(\frac{k}{b}\right)^2 \tilde{V}_m}{1 + \frac{2k}{b}} \end{array} \right. \quad (4.66)$$

A equação (4.64) relaciona as auto-energias com os parâmetros mostrados, contudo não podemos ainda dissociar sua equação fundamental isolando as energias de quantização.

4.4 Espinor Ψ

O espinor Ψ no setor vetorial da teoria DKP, tem cinco componentes principais, dadas pela ação do projetor \mathcal{R}^μ como em (4.14). Para determinar as outras componentes vamos usar a seção 2.5. Devemos levar em conta que o potencial está sendo inserido através do acoplamento mínimo, assim $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - eiA_\mu$, assim o espinor Ψ fica

$$\Psi = \left[\begin{array}{c} \vec{F} = \frac{i}{k} [\nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - (E + V(x))\vec{C}] \\ \vec{H} = \frac{im}{k} \vec{C} \\ \vec{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{C} \\ \vec{C} \\ -\frac{i}{m} \nabla \cdot \vec{C} \\ 0 \\ -\frac{1}{k} \nabla \cdot \vec{C} \end{array} \right], \quad (4.67)$$

onde \vec{C} , tem todas as componentes iguais, dependentes apenas x , fruto da simplificação que fizemos para uma única dimensão, dadas por (4.47) e (4.48). Vemos que a solução do vetor \vec{C} , nos permite chegar as outras componentes do espinor Ψ .

Capítulo 5

Conclusões

O formalismo DKPNR constitui uma boa ferramenta para tratamento de sistemas mecânico quânticos não relativísticos. As características principais desse formalismo, reside em sua capacidade de manipulação através dos diversos tipos de acoplamentos que podemos implementar. Uma atenção especial foi dada ao entendimento de como esses acoplamentos estão se configurando na equação de segunda ordem, a equação de Schrödinger. Uma vez inserido diretamente na equação DKPNR, as interações, são então estudadas na equação de segunda ordem, e posteriormente, resolvida a equação diferencial, chegamos as auto-funções e suas energias características. Podemos entender interações como sendo determinados tipos de potenciais inseridos na equação DKPNR, mesmo sabendo que não estão sendo acoplados de forma usual no Hamiltoniano. Identificamos que interações U inseridas diretamente na equação DKPNR devem responder a condição, $\eta U^\dagger \eta = U$ para que a penta-corrente j^μ seja conservada, dessa forma controlamos a validade física do acoplamento.

No capítulo 2, encontramos uma pequena discussão da Covariância Galileana e da teoria DKPNR, e por fim uma seção dedicada ao estudo das diversas formas de acoplamentos que podem ser usados. Um resumo elucidativo é mostrado para obtenção das componentes do espinor Ψ , tanto no setor escalar, quanto no setor vetorial da teoria. Uma demonstração do uso dos operadores de projeção é encontrada na seção 2.4. Assim, buscamos construir uma fonte de consulta para os que venham a trabalhar com DKPNR.

Para o capítulo 3, inserimos um potencial tipo Coulombiano de duas maneiras diferentes. Na seção 3.1 o potencial tipo Coulombiano é acoplado escalarmente, onde resolvemos a equação diferencial através de uma simplificação permitida pela DKPNR. Na seção seguinte 3.2, misturamos os acoplamentos mínimo e escalar, resolvemos a equação de Schrödinger para os mesmos e chegamos a soluções a partir de funções hipergeométricas, com suas respectivas energias quantizadas. Nossas expectativas de uma solução tipo "átomo de hidrogênio" não é possível, pois esse sistema físico somente é alcançado através do acoplamento mínimo, ou seja, um potencial tipo Coulombiano inserido escalarmente na equação DKPNR não se configura dessa "forma Coulombiana" na equação de segunda ordem, a equação de Schrödinger.

No capítulo 4, testamos o potencial tipo Hulthén Assimétrico para o setor vetorial da teoria. Chegamos a forma da equação de segunda ordem, a equação de Schrödinger, encontrando a solução em termos de funções hipergeométricas. Testamos esses resultados para estados

de espalhamento, obtendo os respectivos coeficientes de absorção e reflexão. Repetimos o processo para estados ligados com a forma do potencial invertida. Por fim, apresentamos o espinor Ψ completo.

Sem dúvida, nossas expectativas não foram completamente alcançadas a despeito desse trabalho que agora concluímos. Mas, nos preparamos para continuar com novas ideias e estratégias a serem implementadas nos próximos passos. A teoria DKPNR constitui uma boa ferramenta para o tratamento de sistemas físicos não relativísticos, principalmente por sua variedade de acoplamentos, dos quais somente dois foram explorados aqui. Novas possibilidades de interações podem ainda ser testadas, mais especificamente, buscaremos potenciais periódicos usados em problemas típicos de matéria condensada.

Apêndice A

Matrizes Beta

Abaixo listamos as matrizes β^μ para os setores escalar e vetorial, onde usamos a simplificação de que $(0) = (\cdot)$.

A.1 Setor Escalar

Para o setor escalar, temos:

$$\beta^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\beta^3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Apêndice B

Projetores

Abaixo descrevemos os projetores na forma matricial.

B.1 Setor Escalar

Para o setor escalar temos apenas \mathcal{P} , que é construído através das matrizes β^μ (A.1) do setor escalar

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2}(\beta^4 + \beta^5)^2(\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2 \quad (\text{B.1})$$

que, por fim, fica

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

B.2 Setor Vetorial

Para o setor vetorial, construímos projetores através das matrizes β^μ (A.2), na equação

$$\mathcal{R}^\mu = (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2[\beta^\mu(\beta^4 + \beta^5) - g^{\mu 4} - g^{\mu 5}], \quad (\text{B.3})$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o elemento da matriz métrica, dada por (2.8). Assim, os projetores são:

$$\mathcal{R}^1 = (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2[\beta^1(\beta^4 + \beta^5)] \quad (\text{B.4})$$

Apêndice C

Demonstrações

Na seção 2.6.2 estão alguns cálculos minimizados.

C.1 A e B

$$A = \mathcal{R}^\nu (\beta^\sigma \beta_\sigma - 2) \beta^\mu A_\mu, \quad (\text{C.1})$$

$$B = \mathcal{R}^{\nu\mu} (\beta^\sigma \beta_\sigma - 2) A_\mu. \quad (\text{C.2})$$

Para A(C.1), temos

$$A = \mathcal{R}^\nu \beta^\sigma \beta_\sigma \beta^\mu A_\mu - 2\mathcal{R}^\nu \beta^\mu A_\mu,$$

$$A = (\mathcal{R}^{\nu\sigma} \beta^\rho) g_{\sigma\rho} \beta^\mu A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

onde usamos $\beta_\sigma = g_{\sigma\rho} \beta^\rho$ e $g_{\sigma\rho}$ como escalar, substituindo a propriedade $\mathcal{R}^{\nu\sigma} \beta^\rho = g^{\sigma\rho} \mathcal{R}^\nu - g^{\nu\rho} \mathcal{R}^\sigma$, ficamos com

$$A = (g^{\sigma\rho} \mathcal{R}^\nu - g^{\nu\rho} \mathcal{R}^\sigma) g_{\sigma\rho} \beta^\mu A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

$$A = (g^{\sigma\rho} g_{\sigma\rho} \mathcal{R}^\nu - g^{\nu\rho} \mathcal{R}^\sigma g_{\sigma\rho}) \beta^\mu A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

como $g^{\sigma\rho} g_{\sigma\rho} = 5$, tem-se que

$$A = (5\mathcal{R}^\nu - g^{\nu\rho}\mathcal{R}^\rho)\beta^\mu A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

$$A = 3\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu - g^{\nu\rho}\mathcal{R}^\rho\beta^\mu A_\mu,$$

$$A = 3\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu - \mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

$$A = 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu. \tag{C.3}$$

Para B(C.2), temos

$$B = \mathcal{R}^{\nu\mu}(\beta^\sigma\beta_\sigma - 2)A_\mu,$$

$$B = (\mathcal{R}^{\nu\mu}\beta^\sigma)\beta_\sigma A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu.$$

E, substituindo a propriedade $\mathcal{R}^{\nu\mu}\beta^\sigma = g^{\mu\sigma}\mathcal{R}^\nu - g^{\nu\sigma}\mathcal{R}^\mu$, chegamos a

$$B = (g^{\mu\sigma}\mathcal{R}^\nu - g^{\nu\sigma}\mathcal{R}^\mu)\beta_\sigma A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

$$B = \mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu - \mathcal{R}^{\mu\nu} A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

com $\mathcal{R}^{\nu\mu} = -\mathcal{R}^{\mu\nu}$, com isso temos

$$B = \mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu + \mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu - 2\mathcal{R}^{\nu\mu} A_\mu,$$

$$B = 0. \tag{C.4}$$

C.2 C e D

Continuando, devemos ainda demonstrar

$$C = \mathcal{R}^{\mu\nu}(\beta^\sigma \beta_\sigma - 2)\beta^\alpha A_\alpha, \quad (\text{C.5})$$

$$D = \mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha (\beta^\sigma \beta_\sigma - 2) A_\alpha. \quad (\text{C.6})$$

Para C(C.5), temos

$$C = (\mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\sigma) \beta_\sigma \beta^\alpha A_\alpha - 2(\mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha) A_\alpha,$$

que fica

$$C = (g^{\nu\sigma} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\sigma} \mathcal{R}^\nu) \beta_\sigma \beta^\alpha A_\alpha - 2(g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu) A_\alpha,$$

$$C = (\mathcal{R}^\mu \beta^\nu - \mathcal{R}^\nu \beta^\mu) \beta^\alpha A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

movendo β^α para o interior dos parênteses, temos

$$C = (\mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha - \mathcal{R}^{\nu\mu} \beta^\alpha) A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

$$C = [(g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu) - (g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu - g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu)] A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

ficando

$$C = (\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu) - (\mathcal{R}^\nu A^\mu - \mathcal{R}^\mu A^\nu) - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

chegando então a

$$C = 0. \quad (\text{C.7})$$

Para D(C.6), temos

$$D = (\mathcal{R}^{\mu\nu} \beta^\alpha)(\beta^\sigma \beta_\sigma - 2)A_\alpha,$$

$$D = (g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu)(\beta^\sigma \beta_\sigma - 2)A_\alpha,$$

$$D = (g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu) \beta^\sigma \beta_\sigma A_\alpha - 2(g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu) A_\alpha,$$

que movendo a matrix β^σ e A_α para o interior dos parênteses, chegamos a

$$D = (g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^{\mu\sigma} - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^{\nu\sigma}) \beta_\sigma A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

usando $\beta_\sigma = g_{\sigma\rho} \beta^\rho$,

$$D = (g^{\nu\alpha} g_{\sigma\rho} \mathcal{R}^{\mu\sigma} \beta^\rho - g^{\mu\alpha} g_{\sigma\rho} \mathcal{R}^{\nu\sigma} \beta^\rho) A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

$$D = [g^{\nu\alpha} g_{\sigma\rho} (g^{\sigma\rho} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\rho} \mathcal{R}^\sigma) - g^{\mu\alpha} g_{\sigma\rho} (g^{\sigma\rho} \mathcal{R}^\nu - g^{\nu\rho} \mathcal{R}^\sigma)] A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

$$D = [(5g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\nu\alpha} g_{\sigma\rho} g^{\mu\rho} \mathcal{R}^\sigma) - (5g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu - g^{\mu\alpha} g_{\sigma\rho} g^{\nu\rho} \mathcal{R}^\sigma)] A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

$$D = [(5g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu) - (5g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu)] A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu).$$

De modo que chegamos em

$$D = 4(g^{\nu\alpha} \mathcal{R}^\mu - g^{\mu\alpha} \mathcal{R}^\nu) A_\alpha - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

movendo A_α para o interior dos parênteses

$$D = 4(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu) - 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu),$$

o que, finalmente, nos dá o valor de D

$$D = 2(\mathcal{R}^\mu A^\nu - \mathcal{R}^\nu A^\mu). \tag{C.8}$$

Apêndice D

Funções Hipergeométricas

D.1 Equação Diferencial

A equação diferencial abaixo

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c - (1+a+b)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0, \quad (\text{D.1})$$

é satisfeita pela função

$$y = {}_2F_1[a, b; c; z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{D.2})$$

introduzida por Gauss e, portanto, chamada função hipergeométrica de Gauss, onde $(a)_n$ é o chamado símbolo de Pochhammer que está definido da seguinte maneira

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+n-1), \quad (\text{D.3})$$

e em particular $(a)_0 = 1$.

Podemos ter ainda os exemplos

$$\begin{cases} (3)_5 = 3.4.5.6.7 = 2520 \\ (1)_n = n! \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

então

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (\text{D.5})$$

onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a)_n = \frac{1}{\Gamma(a)}. \quad (\text{D.6})$$

Se a é um inteiro negativo $-m$, temos

$$\begin{cases} (a)_n = (-m)_n = -m(1-m)(2-m)(3-m)\dots(n-1-m) \neq 0, & \text{se } m \geq n \\ (a)_n = 0, & \text{se } m > n \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

então $(-3)_3 = (-3)(-2)(-1) = -6$, mas $(-3)_4 = (-3)(-2)(-1)(0) = 0$.

Em (D.2), a , b , c e z podem ser reais ou complexos. Vemos também que se a ou b é zero ou um inteiro negativo, a função (D.2) se reduz a um polinômio, mas se c é zero ou inteiro negativo, a mesma não é definida.

Vamos assumir que

$$y = z^g \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad (\text{D.8})$$

é uma solução de (D.1), onde $u_0 \neq 0$. Que nos gera a seguinte condição

$$g(g+c-1) = 0, \quad (\text{D.9})$$

e, em geral,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(g+n+a)(g+n+b)}{(g+n+c)(g+n+1)}. \quad (\text{D.10})$$

Na (D.9), com $g = 0$, temos (D.2) como solução, e de $g = 1 - c$ nos dá a segunda solução, na qual

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a+1-c+n)(b+1-c+n)}{(1+n)(2-c+n)}. \quad (\text{D.11})$$

Esta solução é

$$y_2 = z^{1-c} {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; z]. \quad (\text{D.12})$$

aqui c deve ser um inteiro positivo ≥ 2 . Assim, uma completa solução de (D.1), a chamada Equação de Gauss é

$$y = A {}_2F_1[a, b; c; z] + B z^{1-c} {}_2F_1[1+a-c, 1+b-c; 2-c; z], \quad (\text{D.13})$$

para $|z| < 1$, onde A e B são constantes.

D.2 Derivadas

Para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_2F_1[a, b; c; z] = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} {}_2F_1[a+n, b+n; c+n; z] \quad (\text{D.14})$$

que podemos reescrever como

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^\delta (1-z)^{a+b-c} {}_2F_1[a, b; c; z]] = (\delta - n + 1)_n z^{\delta-n} {}_3F_2[c-a, c-b, \delta+1; c, \delta+1-n; z]. \quad (\text{D.15})$$

Referências Bibliográficas

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* **117**, (1928) 610. 1
- [2] G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* (8) 16 (1936) No. 2. 1
- [3] R. J. Duffin, *Phys. Rev.* **54**, (1938) 1114. 1
- [4] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. A* **173**, (1939) 91. 1
- [5] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos and J. D. M. Vianna, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, (2000) L273-L278. 1, 8
- [6] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana and E. S. Santos, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, (2001) 8901-8917. 1, 8, 48
- [7] J. M. Lévy-Leblond, *J. Math. Phys.* **4**, (1963) 776. 1
- [8] J. M. Lévy-Leblond, *Commun. Math. Phys.* **4**, (1967) 167. 1
- [9] J. M. Lévy-Leblond, *Commun. Math. Phys.* **6**, (1967) 286. 1
- [10] J. Voisin, *J. Math. Phys.* **6**, (1965) 1519. 1
- [11] C. R. Hagen, *Commun. Math. Phys.* **18**, (1970) 97. 1
- [12] J. J. Aghassi, P. Roman and R. M. Santilli, *Phys. Rev. D* **1**, (1970) 2753. 1
- [13] C. R. Hagen and W. J. Hurley, *Phys. Rev. Letters* **24**, (1970) 1381. 1
- [14] W. J. Hurley, *Phys. Rev. D* **3**, (1971) 2339. 1
- [15] P. Roman, J. J. Aghassi, R. M. Santilli and P. L. Huddleston, *IL Nuovo Cimento* **12A**, (1972) 185. 1
- [16] Y. Takahashi, *Fortschr. Phys.* **36**, (1988) 63. 1
- [17] Y. Takahashi, *Fortschr. Phys.* **36**, (1988) 83. 1
- [18] M. Omote, et al, *Fortschr. Phys.* **37**, (1989) 933. 1
- [19] M. C. B. Fernandes, A. E. Santana and J. D. M. Vianna, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, (2003) 3841-3854. 1

- [20] L. M. Abreu and E. S. Santos, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, (2008) 075407. 1, 12
- [21] L. M. Abreu, F. J. S. Ferreira and E. S. Santos, *Brazilian Journal of Physics* **40**, (2010) 235. 1
- [22] G. R. de Melo, M. de Montigny and E. S. Santos, *Int. J. Theor. Phys.* **51**, (2012) 2524-2539. 1
- [23] R. F. Guertin and T. L. Wilson, *Phys. Rev. D* **15**, (1977) 1518. 1, 10, 19
- [24] A. S. de Castro, *J. Phys. A: Math. Theor* **44**, (2011) 035201. 2, 22
- [25] K. Sogut and A. Havare, *Phys. Scr.* **82**, (2010) 045013. 2, 45
- [26] T. R. Cardoso, L. B. Castro and A. S. de Castro, *J. Phys. A: Math. Theor* **43**, (2010) 055306. 2, 22
- [27] K. Sogut and A. Havare, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, (2010) 225204. 2
- [28] Fevziye Yasuk, Cüneyt Berkdemir, Ayse Berkdemir and Coskun Önem, *Phys. Scr.* **71**, (2005) 340. 2, 45
- [29] M. Merad, *International Journal of Theoretical Physics* **46**, (2007) 8. 2
- [30] B. C. Clark, S. Hama, G. R. Kälbermann, R. L. Mercer and L. Ray, *Phys. Rev. Letters* **55**, (1985) 592. 2
- [31] G. Kälbermann, *Phys. Rev. C* **34**, (1986) 2240. 2
- [32] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **19**, (1993) 87. 2, 29
- [33] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, *J. Math. Phys.* **35**, (1994) 4517. 2, 29
- [34] H. Hassanabadi, B. H. Yazarloo, S. Zarrinkamar, and A. A. Rajabi, *Phys. Rev. C* **84**, (2011) 064003. 2, 29
- [35] L. M. Abreu, E. S. Santos and J. D. M. Vianna, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, (2010) 495402. 2, 12, 22
- [36] A. S. de Castro, *J. Math. Phys.* **51**, (2010) 102302. 2, 22
- [37] Y. L. Luke, *Mathematical Functions and their Approximations*, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. 2
- [38] W. Koepf, *Hypergeometric Summation*, Springer Vieweg, Advanced Lectures in Mathematics, 1998. 2
- [39] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1970. 2

- [40] T. R. Cardoso, Sobre Interações Escalares e Vetoriais na Teoria Duffin-Kemmer-Petiau, Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campos Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, (2011).
- [41] A. E. Santana, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **19**, (1997) 1. 6
- [42] E. S. Santos, Simetrias Não-Relativísticas, Espaço de De-Sitter (4,1) e Estruturas Tensoriais, Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, (1999). 7, 48
- [43] A.S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, second edition, 1976. 20, 27, 30, 32, 33, 35, 46
- [44] K. Konishi and G. Paffuti, *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2009. 20, 27