UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Álgebras Geométricas e a Quantização de Campos com Vínculos

João Humberto A. Pedroza Júnior

Fevereiro - 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Álgebras Geométricas e a Quantização de Campos com Vínculos

João Humberto A. Pedroza Júnior

Orientadores: Prof Dr. José David Mangueira Vianna

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal da Bahia para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador - Fevereiro - 2012

Abstract

In this work we present geometric algebras in the context of field theory. We show how it is possible to generalize these algebras when we have trivial relations, and realize the connection between our development and constrained Hamiltonian systems. Applications to quantization of systems with a large number of constraints are presented.

Resumo

Neste trabalho nós apresentamos as algébras geométricas no contexto da teoria de campos. Mostramos como é possível generalizar tais álgebras quando relações triviais comparecem permitindo realizar uma conexão entre estas álgebras e sistemas hamiltonianos vinculados. Aplicações na quantização de campos com um grande número de vínculos são realizadas.

Agradecimentos

Este trabalho se deve em grande parte aos esforços e ajuda de muitas pessoas.

Inicialmente gostaria de agradecer aos professores José David Vianna e Maria das Graças Martins que me acompanharam e orientaram desde a Iniciação Científica.

Aos meus pais João Humberto e Jane Feitosa pelo suporte e pelo incentivo que sempre me deram. Muito obrigado!

Agradeço a toda minha família vô João, vó Enézia e Conceição, Marcella, Mateus, Lucas, Alexandre, tios Jadson, Fábio, Elian, Vera, Rogério, Marcelo. Obrigado pelo apoio.

Agradeço ao meu cumpadre Lafayette e aos meus amigos Floquet e Wallas. Obrigado pelos grandes momentos regados a cerveja ou não.

Muito obrigado ainda a todos aqueles companheiros que estão ainda na caminhada e aqueles que já seguiram outros rumos: Érico, Abreu, Lima, Fábio da Hora, Professor Bocão, Manuela (cumadre), Jorginho, Vinícius (Mestre), Humberto, Ricardo, Fabrício, Castro.

Agradeço aos meus companheiros em Bodocó Chidote, Paulo, Paulistinha, Thiago, James Fábio, Neyrton, Claudinho, Bega, Vanderson.

Obrigado também a Dona Conceição, Luciana, Paulinho, Emanuel (Balalaika), Carol pelo apoio nesta reta final.

Agradeço ainda a todo o pessoal do Instituto de Física: Nelson, Conceição, Simone, Marli, Geraldo, Dal, Nice, Seu Valtério, Dona Eraldina, Gilmar.

Por último, e mais importante, agradeço a Mabele, Cauê e Júlia; sem vocês esta caminhada seria muito mais triste. Obrigado!

"Deixar que os fatos sejam fatos naturalmente, sem que sejam forjados para acontecer. Deixar que os olhos vejam os pequenos detalhes lentamente.

Deixar que as coisas que lhe circundam estejam sempre inertes, como móveis inofensivos, para lhe servir quando for preciso, e nunca lhe causar danos, sejam eles morais, físicos ou psicológicos."

Chico Science

A **João Acrísio**.

(*in memorian*)

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Numa série de artigos publicados na decáda de cinqüenta do século XX Schönberg [1][2]discutiu a relação entre a Teoria Quântica e a Geometria. Em seus trabalhos Schönberg mostra como as diversas álgebras que comparecem na teoria quântica, tais como a álgebra Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) e a álgebra das matrizes de Dirac, podem ser compreendidas dentro de uma mesma estrutura algébrica[1][2][3]. Tal formulação algébrica serviu, e serve, de base para um estudo aprofundado da Teoria Quântica no espaço de fase[4]. Neste contexto, Bohm e Hiley[5] construíram uma álgebra matricial no espaço de fase. Nesta construção assume-se a matriz densidade (ou uma certa generalização desta) como objeto fundamental para a descrição do estado de um sistema e então, realizando uma transformação de Wigner-Moyal sobre a matriz densidade, chega-se a uma equação tipo Liouville. Fernandes[6] mostrou, seguindo as propostas de Bohm e Schönberg, como obter a equação DKP no espaço de fase. Seguindo também as formulações de Bohm e Schönberg, Holland [7] obteve algumas equações relativísticas no espaço de fase. Fernandes, Vianna e Santana[8] derivaram a equação de Pauli-Schrödinger no espaço de fase utilizando a formulação da covariância Galileana, o que os permitiu um estudo não-relativístico de partículas de spin 1/2.

Um dos grandes objetivos por trás destas diversas formulações é a busca de estruturas algébricas que permitam mostrar paralelamente as teorias clássica e quântica, possibilitando uma observação sobre os limites destas teorias, e ainda possíveis generalizações. Nesta forma abstrata de "enxergar" as teorias, as quantidades físicas, quer pertençam a teoria clássica ou a teoria quântica, aparecem como realizações da estrutura algébrica em questão.

Nosso trabalho estará focado na estrutura algébrica desenvolvida por Schönberg. Veremos que esta estrutura encaixa-se perfeitamente no estudo algébrico do espaço de fase, que é uma parte importante em nosso desenvolvimento. Mostraremos como é possível estender estas álgebras para o caso em que relações nulas, conhecidas como relações triviais da álgebra, comparecem na estrutura algébrica [9][10][11].

Existem alguns sistemas onde a Lagrangiana associada é dita degenerada. Uma Lagrangiana degenerada nos conduz a relações de vínculos na teoria quando procuramos realizar a passagem ao formalismo Hamiltoniano[12][13][14][15]. Dirac foi um dos pioneiros na tentativa de tratar deste problema[15]. Em sua formulação ele mostra como é possível "estender" a formulação Hamiltoniana para casos onde aparecem vínculos na teoria. Em seu trabalho, Dirac mostra também que o parênteses de Poisson, da formulação Hamiltoniana, precisa, para o caso onde há vínculos, ser substituido pelo que atualmente denominamos de *parênteses de Dirac*. Esta nova estrutura permite-nos executar o procedimento de quantização canônica para os casos onde há vínculos, de forma que neste caso deve-se associar o comutador dos operadores da teoria quântica não mais ao parênteses de Poisson das observáveis clássicas, mas sim aos parênteses de Dirac das observáveis em questão.

Do ponto de vista algébrico as relações de vínculos são vistas como relações triviais da álgebra[9][10]. Assim, conforme dito anteriormente, vamos fazer aqui uma generalização do formalismo de Schönberg para casos de sistemas com Lagrangianas degeneradas, mostrando algumas aplicações desta formulação.

Uma vez que o parênteses de Dirac trata de uma extensão do parênteses de Poisson quando há vínculos presentes, este se adequa bem ao tratamento de sistemas bosônicos. No entanto, podemos nos questionar sobre qual deve ser a extensão ao caso de sistemas fermiônicos. Neste trabalho discutimos como é possível construir um parênteses de Dirac simétrico[11][16] no contexto algébrico. Assim, as discussões sobre extensões da estrutura algébrica para casos onde relações nulas comparecem nos levarão a expressões semelhantes aos parênteses de Dirac simétrico e anti-simétrico, o que indica uma possível ligação entre a formulação algébrica com os sistemas físicos de Lagrangianas degeneradas.

O desenvolvimento dos itens citados anteriormente serão divididos da seguinte forma:

No capítulo 2 apresentamos uma introdução dos aspectos matemáticos que serão utilizados no trabalho. Aqui algumas noções sobre álgebras, tensores, produto externo, álgebra de Clifford são dadas e por fim discute-se como tratar álgebras em que relações nulas comparecem, que será um aspecto importante associado ao nosso trabalho.

No capítulo 3 mostra-se como é possível realizar a passagem ao formalismo Hamiltoniano quando os sistemas em questão possuem Lagrangiana degenerada. Discute-se também, de forma resumida, a formulação simplética da mecânica clássica[17][18][19] realizando duas extensões: a primeira mostrará como obter o parênteses de Dirac e a segunda irá mostrar, usando a primeira extensão, como obter o parênteses de Dirac simétrico [16]. No final do capítulo serão feitas algumas aplicações.

No capítulo 4 realizamos uma introdução às álgebras de Schönberg que serão utilizadas no trabalho. Nele mostramos como os elementos pertencentes à álgebra têm conexão com diversas quantidades físicas da mecânica quântica. No final do capítulo é feita a generalização algébrica para casos onde há relações triviais na álgebra. Neste momento estabelecemos a relação da estrutura dos parênteses de Dirac com os produtos obtidos no final deste capítulo, para álgebras degeneradas.

No capítulo 5, usando os resultados dos capítulos anteriores, realizamos a quantização dos campos Duffin-Kemmer-Petiau Galileano e de Rarita-Schwinger. Em particular, mostramos como tratar sistemas em que um grande número de vínculos comparecem.

No capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e perspectivas. Os apêndices A, B e C contêm tópicos que complementam os desenvolvimentos apresentados na dissertação.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo são apresentados alguns fundamentos da matemática que será utilizada no decorrer do texto. Serão discutidos conceitos relativos a álgebras, tensores simétricos e anti-simétricos e álgebra geométrica. Aqui serão utilizadas como referências os textos [9] [20][21][22][23].

2.1 Espaços Vetoriais

Por um espaço vetorial, sobre um corpo K, entende-se um conjunto arbitrário $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que as seguintes operações são satisfeitas:

- **Soma**

a) $x_j + x_k = x_k + x_j$

b) $x_j + (x_k + x_l) = (x_j + x_k) + x_l$

c)Há um elemento 0 tal que $x_j + 0 = x_j$

d)A cada elemento x existe um correspondente $-x$ tal que $x_j + (-x_j) = 0$

- **Multiplicação**

a') $1x_j = x_j$

b') $\alpha(\beta x_j) = (\alpha\beta)x_j$

c') $(\alpha + \beta)x_j = \alpha x_j + \beta x_j$

d') $\alpha(x_j + x_k) = \alpha x_j + \alpha x_k$

em que α, β e 1 pertencem ao corpo K. Nota-se destes axiomas que tomando $(x_1, x_2, ..., x_n)$ como sendo o conjunto dos números reais, estes satisfazem os axiomas de espaço vetorial dado acima. Os elementos de um espaço vetorial são comumente chamados de vetores.

Um questão importante a cerca dos espaços vetoriais de dimensão finita é o fato de existirem vetores não nulos, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, tais que qualquer outro vetor[1] $\mathbf{w}$ pode ser escrito como combinação destes, ou seja

$$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n, \tag{2.1}$$

com α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in K$.

Denomina-se o conjunto de vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ de base do espaço vetorial e seu número determina a dimensão do espaço. No exemplo dado acima, pode-se tomar como base os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$, sendo então o espaço de dimensão n.

2.2 Álgebra

Considere K um corpo. Por uma álgebra associativa A entende-se um espaço vetorial sobre K munido de uma aplicação que associa a cada par de vetores deste espaço um outro elemento de A[9][20][21]

[1] Utilizaremos, em alguns momentos, a notação de símbolos em negrito para denotar vetores. Nota-se, por exemplo, que ao definirmos álgebra não utilizamos a notação em negrito para vetores.

$(a,b) \to ab$,

satisfazendo as seguintes condições:

- $(ab)c = a(bc)$
- $a(b+c) = ab + cb$ e $(b+c)a = ba + ca$
- $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$

quaisquer que sejam $a, b, c \in A$ e $\alpha \in K$.

2.3 Formas Lineares

Seja E_n um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K. Denomina-se de forma linear a aplicação que associa a cada vetor $\mathbf{v}$ de E_n um valor $f(\mathbf{v})$ em K, tal que

a) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \qquad ; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$

b) $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$,

com $\alpha \in K$, são satisfeitas.

Note desta definição que se $\mathbf{x}$ é um vetor de E_n, com base $\{\mathbf{e}_i\}$, então:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i, \tag{2.2}$$

e logo

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = \alpha_i x^i, \tag{2.3}$$

onde estamos considerando $f(\mathbf{e}_i) = \alpha_i$.

As definições

a)$(f+g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}) \qquad ; \mathbf{v} \in E_n$

b)$(\alpha f)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}), \qquad ; \alpha \in K$

c)$0(\mathbf{v}) = 0$

d)$(-f)(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$

fazem com que o conjunto das formas lineares associadas ao espaço E_n também possua a estrutura de espaço vetorial. Tal espaço é conhecido como dual de E_n e é usual notá-lo por E_n^*.

2.4 Espaço Afim

Suponha que temos um conjunto de pontos $(a, b, ..., j)$ e que a todo par de pontos (a, b) fazemos corresponder um vetor $\vec{ab}$ pertencente ao espaço vetorial E_n, n-dimensional, tal que:

a) $\vec{ab} = -\vec{ba}$

b) $\vec{ab} = \vec{ac} + \vec{cb}$

c) sendo O um ponto arbitrário do conjunto de pontos, associa-se a todo vetor $\vec{x}$ de E_n um ponto x do conjunto de pontos tal que $Ox = \vec{x}$.

Se estas condições são satisfeitas o conjunto de pontos, cuja notação será $\mathcal{E}_n$, é dito constituir um *espaço pontual afim n-dimensional*.

2.5 Noções de Produto Tensorial

Dados dois espaços vetoriais E_n^1 e $E_{n'}^2$ de dimensão n e n', respectivamente, pode-se construir um espaço produto $E_n^1 \otimes E_{n'}^2$, nn'-dimensional. Tal espaço é conhecido como espaço produto tensorial e seus elementos $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, com $\mathbf{x} \in E^1_n$ e $\mathbf{y} \in E^2_{n'}$, satisfazem as propriedades:

a) $\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y}_i + \mathbf{y}_j) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_i + \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_j$

b) $(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}$

c) $\alpha\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$, com $\alpha \in K$

Se $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n)$ forem bases de E^1_n e $E^2_{n'}$, respectivamente, os nn' elementos $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ formam uma base no espaço produto $E^1_n \otimes E^2_{n'}$.

Assim, pode-se escrever $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ como sendo[2]

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i y^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j = x^i y^j \epsilon_{ij}, \tag{2.4}$$

com ϵ_{ij} sendo a base em $E^1_n \otimes E^2_{n'}$ e $x^i y^j$ as componentes do produto tensorial na base considerada. Os objetos da forma $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ são conhecidos como *tensores de ordem 2*. Note que apesar de ter construido aqui tensores a partir de dois espaços vetoriais, podemos realizar o mesmo procedimento para construir tensores de ordem superior através do produto entre mais espaços, com o cuidado de usar o fato que o produto $\otimes$ entre os espaços é associativo.

Dado um espaço vetorial E_n podemos realizar o produto tensorial j-vezes de espaços idênticos a E_n. Neste caso o produto dos elementos pertencentes a estes espaços fica

$$\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{x}_j = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_j}_{(j)} \epsilon_{i_1 i_2 ... i_j}, \tag{2.5}$$

onde $x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_j}_{(j)}$ são as componentes do tensor e o fator $\epsilon_{i_1 i_2 ... i_j}$ é a base do espaço produto.

[2]Note que estamos utilizando a convenção dos índices contraídos. Nesta expressão temos uma soma sobre todos os i e j.

Esta discussão também pode ser estendida para o espaço dual de E_n. Assim, pode-se construir elementos gerais a partir de um produto do tipo

$$E_n^{i_1} \otimes E_n^{*j_1} \otimes E_n^{i_2} \otimes E_n^{*j_2} \otimes ... \otimes E_n^{i_q} \otimes E_n^{*j_q}. \tag{2.6}$$

Tais elementos construidos de produtos de espaços idênticos entre si ou com seu dual são conhecidos como *tensores*[21]. Os elementos pertencentes ao produto tensorial $\otimes_{\alpha=1}^{f} E_n^{\alpha}$ são denominados tensores contravariantes de ordem f; eles também podem ser considerados como formas f-lineares[3] sobre o dual E_n^*. Similarmente, os elementos de $\otimes_{\alpha=1}^{f} E_n^{*\alpha}$ podem ser considerados formas f-lineares sobre E_n e são denominados tensores covariantes de ordem ou grau f. Um fato interessante que deve ser observado, através da relação (2.6), é que nesta expressão temos tensores mistos.

É possível mostrar também que por uma mudança de base os tensores de qualquer natureza (covariantes, contravariantes ou mistos) não mudam de categoria. Isto se deve ao fato que a matriz que realiza uma mudança de base de um espaço E_n é a inversa da matriz que realiza a mudança de base do espaço dual E_n^*. Isto inclusive serve como um critério de tensorialidade para os tensores[21], ou seja se um determinado tensor é covariante (contravariante), por uma mudança de base este tensor continua sendo de natureza covariante (contravariante). O mesmo vale para um tensor misto de ordem qualquer.

Mediante o produto tensorial de vetores é possível introduzir o produto externo dado por[21]

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}. \tag{2.7}$$

Note que este produto é anti-simétrico pela inversão dos vetores. O objeto geométrico $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ é conhecido como *bivetor*.

[3] Por uma forma f-linear entendemos um elemento obtido a partir do produto tensorial entre f-formas lineares.

2.6 Bivetores

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores, define-se um bivetor[6][22][23] como sendo:

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \tag{2.8}$$

Aqui $\wedge$ é o produto externo dos vetores. Note que o conjunto de bivetores satisfaz os axiomas de espaço vetorial.

O módulo do bivetor é dado por[22]

$$|\hat{\mathbf{B}}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|sen(\alpha), \tag{2.9}$$

onde α é o ângulo formado entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e $|\mathbf{u}|$ e $|\mathbf{v}|$ representam os módulos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, respectivamente.

Geometricamente interpreta-se um bivetor como sendo um fragmento de plano orientado, cuja orientação dependerá de como se percorre suas fronteiras: se no sentido horário ou anti-horário, conforme mostram as figuras a seguir. O módulo do bivetor representa a área dos fragmentos.

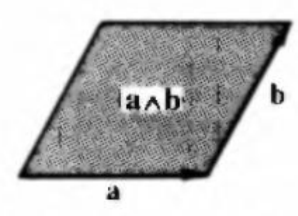

Figura 2.1: $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$

Seja E_3 o espaço Euclidiano tridimensional. Neste espaço um bivetor pode ser escrito como:

$$\hat{\mathbf{B}} = \sum_{i,j}^{3} B^{ij}\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, \tag{2.10}$$

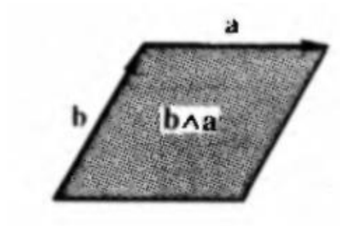

Figura 2.2: $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$

com $B^{ij} = -B^{ji}$ sendo as coordenadas dos bivetores. Note que essas comportam-se como componentes de um tensor de segunda ordem.

É possível definir um outro produto entre vetores e bivetores. Tal produto é conhecido como produto interno e é dado por[22] [23]

$$\mathbf{u}.\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{u}.(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Aqui $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ refere-se ao produto escalar usual. Veja que o vetor resultante de tal operação pertence ao plano determinado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Note ainda que $\mathbf{u}.\hat{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{B}}.\mathbf{u}$.

Define-se também o produto interno de dois bivetores. Neste caso[22][23]:

$$\hat{\mathbf{B}}.\hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{u}.(\mathbf{v}.\hat{\mathbf{C}}). \quad (2.12)$$

2.6.1 Aplicação de Hodge

Um fato notável é que para qualquer plano que tomemos, por exemplo, no espaço tridimensional E_3, vetores perpendiculares aos planos associados aos bivetores da base são, para cada plano, todos paralelos entre si. Desta forma podemos criar uma associação entre os planos formados pelos bivetores e os vetores perpendiculares a estes planos.

A relação entre os vetores $\mathbf{B}$ e os bivetores $\hat{\mathbf{B}}$ pode ser construída tomando os módulos dos bivetores e vetores iguais, fazendo a direção de $\mathbf{B}$ perpendicular à direção de $\hat{\mathbf{B}}$ e relacionando a orientação do bivetor com o vetor através da regra conhecida como *regra da mão direita*[23][24].

Esta aplicação $\hat{\mathbf{B}} \to \mathbf{B}$ é biunívoca; então podemos ter a aplicação inversa $\mathbf{B} \to \hat{\mathbf{B}}$, que é denominada *aplicação de Hodge*, geralmente notada com um asterisco $*$. Assim,

$$*\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}. \tag{2.13}$$

Neste contexto diz-se que $\hat{\mathbf{B}}$ é o dual de $\mathbf{B}$[6][23].

Observa-se que a aplicação de Hodge permite relacionar o produto vetorial usual com o produto externo, pois

$$*(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \tag{2.14}$$

Em particular, no espaço E_3:

$$*\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \qquad *\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \qquad *\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \tag{2.15}$$

2.7 Trivetores

Um trivetor pode ser obtido realizando o produto externo de um vetor por um bivetor. Assim

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{u}. \tag{2.16}$$

A comutatividade entre o vetor e o bivetor deve-se ao fato que a álgebra definida com o produto $\wedge$ é associativa. O módulo do trivetor é dado por

$$|\hat{\mathbf{T}}| = |\hat{\mathbf{B}}||\mathbf{u}|sen(\alpha), \tag{2.17}$$

onde α é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\hat{\mathbf{B}}$.

A expressão (2.16) pode ser escrita em termos do produto de três vetores na forma

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u}. \tag{2.18}$$

Veja ainda que usando a associatividade a expressão acima é simétrica por mudanças cíclicas, ou seja

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}). \tag{2.19}$$

Também neste caso pode-se introduzir o produto interno entre um trivetor e um vetor, que é dado pela expressão[23]

$$\mathbf{b}.\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{b}.(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{b}.\mathbf{u})\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + (\mathbf{b}.\mathbf{v})\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} + (\mathbf{b}.\mathbf{w})\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \tag{2.20}$$

Estes resultados podem ser generalizados para diversas ordens permitindo obter elementos de ordem superior, denominados *multivetores*. Pensando num espaço mais geral é possível construir elementos cuja forma pode ser escrita como[22][24]

$$\Gamma = \lambda + \mathbf{u} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{T}} + ..., \tag{2.21}$$

ou explicitamente usando os elementos da base $\mathbf{e}_i$

$$\Gamma = \lambda + u^i \mathbf{e}_i + (1/2!)a^{i_1 i_2} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} + ... + (1/n!)a^{i_1 \ldots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{i_n}. \tag{2.22}$$

O elemento acima é denominado um Cliffor. A álgebra contendo estes Cliffors com a operação do produto externo constitui a álgebra de Grassmann[23]. O produto externo é associativo e distributivo; no entanto, ele não necessariamente será comutativo ou anti-comutativo. De forma geral temos[22][23][24]:

$$\mathbf{V}_k \wedge \mathbf{V}_l = (-1)^{kl} \mathbf{V}_l \wedge \mathbf{V}_k, \tag{2.23}$$

em que $\mathbf{V}_i$ é um multivetor e os índices i, k, l referem-se a ordem do ente em questão, por exemplo, para $i = 2$ tem-se um bivetor.

2.8 Álgebra de Clifford

Seguindo os resultados anteriores é possível construir um produto entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, entre vetores e bivetores, vetores e trivetores e vetores e multivetores. Este produto é dado por[22][23][24]:

$$\mathbf{uv} = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{u}.\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{B}} \tag{2.25}$$

$$\mathbf{u}\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{u}.\hat{\mathbf{T}} + \mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{T}} \tag{2.26}$$

Considerando os resultados anteriores junto ao fato que o produto "." é comutativo, um conjunto formado pelos elementos acima com a operação dada por (2.24-26) é uma álgebra; tal álgebra é conhecida como *álgebra de Clifford* e é notada por $\mathcal{C}_n$.

Apesar de até o momento ter sido considerado apenas o E_3, os resultados anteriores podem ser generalizados para um espaço n-dimensional E_n. Neste caso usa-se a notação $\mathcal{C}_n^{(k)}$ para representar o conjunto dos k-vetores. Assim, $\mathcal{C}_n^{(0)}$ é o campo escalar, $\mathcal{C}_n^{(1)}$ é igual ao E_n e:

$$\mathcal{C}_n = \oplus_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^{(k)}. \tag{2.27}$$

A dimensão de $\mathcal{C}_n$ é:

$$dim\mathcal{C}_n = \sum_{k=0}^{n} dim\mathcal{C}_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{2.28}$$

No caso particular do E_3 tomando como vetores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ perpendiculares entre si, seguem as operações

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, \tag{2.29}$$

se $i \neq j$, e

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i)^2 = |\mathbf{e}_i|^2, \tag{2.30}$$

se $i = j$. Estas informações podem ser escritas fazendo:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}. \tag{2.31}$$

Na obtenção desta expressão consideramos o E_3, mas este resultado pode ser generalizado para mais dimensões e o espaço não necessariamente precisa ser o Euclidiano[24]. Nesse caso numa álgebra de Clifford seus geradores satisfazem a relação (2.31) com δ_{ij} substituído pela métrica g_{ij}. Neste sentido nota-se que as matrizes de Pauli podem ser consideradas como geradores de uma álgebra de Clifford[25].

2.9 Álgebras Quocientes

Conforme será visto, é importante considerar álgebras em que elementos nulos comparecem. Neste caso, podem aparecer relações nulas entre os elementos da álgebra. Assim, objetivando o tratamento de tais casos, torna-se importante discutir o conceito de álgebras quocientes, sendo necessário neste contexto definir outros conceitos.

Considere A e A'duas álgebras sobre K. A aplicação $\phi : A \to A'$ é um homomorfismo se esta preserva a estrutura de espaço vetorial e a estrutura multiplicativa de A, ou seja:

a)$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$

b)$\phi(\alpha a) = \alpha\phi(a)$

c)$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

quaisquer que sejam $a, b \in A$ e $\alpha \in K$.

A imagem de ϕ, denotada por Imϕ, é o conjunto de todos os elementos $\phi(a) \in A'$. Em particular ϕ é sobrejetiva se Im$\phi = A'$. Ao conjunto de elementos de A tais que $\phi(a) = 0$ dá-se o nome de núcleo de ϕ, denotado por Kerϕ. Nota-se que utilizando as propriedades do homomorfismo, se um elemento a pertence ao Kerϕ então qualquer elemento ab ou ba, com $b \in A$, também pertencerá ao Kerϕ. Desta forma ϕ é injetiva se Ker$\phi = 0$.

Um subconjunto I de uma álgebra A é um ideal à esquerda se I é invariante pela multiplicação à esquerda por um elemento $a \in A$, ou seja

$$ab \in I, \tag{2.32}$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in I$. De forma similar define-se um ideal à direita de A. É possível definir também um ideal bilateral, ou simplesmente ideal, como um subconjunto I de A que é simultaneamente um ideal à esquerda e à direita de A. Verifica-se então, das observações acima sobre o núcleo de um homomorfismo, que Kerϕ é um ideal de A.

Agora considere I um ideal de A. Define-se em A uma relação binária da forma:

$$a \equiv a'(modI), \tag{2.33}$$

se $a - a' \in I$. Tem-se então uma relação de equivalência cuja classe de equivalência é

$$\bar{a} = a + I = \{a + b/b \in I\}. \tag{2.34}$$

Nota-se desta definição que as seguintes operações são satisfeitas:

a) $\overline{a} + \overline{c} = \overline{a + c}$

b) $\alpha\overline{a} = \overline{\alpha a}$

c) $\overline{a}\ \overline{c} = \overline{ac}$, quaisquer que sejam a e $c \in A$. Assim, obtem-se uma álgebra denominada *álgebra quociente* de A pelo ideal I, cuja notação é dada por A/I. Observe que a aplicação $\phi : a \to a'$ de A em A/I é um homomorfismo.

Uma questão importante a ser usada posteriormente é o fato que sendo J um ideal de A que contêm I, também ideal em A, então $J/I = \{\overline{a}/a \in J\}$ é um ideal de A/I[9]. De forma inversa, se $\mathcal{J}$ é um ideal de A/I, existe um único ideal J de A contendo I tal que $\mathcal{J} = J/I$. Este resultado será importante no tratamento da quantização de sistema com vínculos, no contexto das álgebras geométricas, quando o número de vínculos do sistema em questão for grande, situação em que o cômputo dos parênteses dos vínculos torna-se mais difícil. Na realidade, esses fatos estão no teorema fundamental dos homomorfismos de álgebra[26]:"Seja I um ideal de A, então A/I é a imagem homomórfica de A sob o homomorfismo natural $a \to a' + I$, com $a \in A$ e $a + I \in A/I$ e, inversamente, se A' for a imagem homomórfica de A sob o homomorfismo $a \to a'$, $a \in A$ e $a' \in A'$, então A' é isomórfico a A/I onde I é o núcleo do homomorfismo".

Dito de forma resumida, todo núcleo é ideal da álgebra e, inversamente, todo ideal é o núcleo de algum homomorfismo.

Capítulo 3

Quantização de Sistemas com Vínculos

Neste capítulo discutimos os aspectos fundamentais do estudo sobre sistemas hamiltonianos com vínculos. Inicialmente serão apresentados os aspectos formais da teoria, depois discute-se o procedimento de quantização, finalizando com uma aplicação. Será feito ainda uma discussão sobre o parênteses de Poisson simétrico, com o objetivo de dar um tratamento para sistemas fermiônicos.

3.1 Introdução

O tratamento de sistemas hamiltonianos com vínculos teve como um dos pioneiros Dirac [15]. Desde então diversos autores [12] [13] têm dado contribuições no estudo da formulação hamiltoniana com vínculos.

Um sistema possui vínculos quando dentro do conjunto de variáveis dinâmicas, necessárias para descrever o estado do sistema, temos um subconjunto das variáveis satisfazendo alguma relação funcional entre as variáveis (pelo menos uma parte destas). É comum, nos problemas de mecânica newtoniana aparecerem vínculos de natureza cinemática, ou seja, vínculos que restringem o movimento do sistema físico em estudo. Quando tais vínculos são escritos através de uma relação funcional da forma $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n, t) = 0$, com $\mathbf{r}_i$ representando as coordenadas e t o tempo, estes são denominados de *vínculos holônomos*. Uma forma de eliminar tais vínculos é realizada através do formalismo lagrangiano. Neste trabalho, conforme será apresentado, os vínculos são de natureza diferente. Estes vínculos, apesar de também imporem restrições sobre os valores das variáveis em questão, não são necessariamente de natureza cinemática. Tais vínculos aparecem na teoria quando executa-se a passagem do formalismo lagrangiano ao hamiltoniano. Portanto, o passo inicial deve ser dado através do formalismo lagrangiano.

Nosso tratamento começará considerando um sistema de partículas; posteriormente vamos estender o tratamento para campos. Define-se o funcional ação como [18][19][27]

$$S \equiv \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q})dt, \tag{3.1}$$

onde L é a lagrangiana do sistema e q,$\dot{q}$ são as coordenadas generalizadas e as velocidades generalizadas, respectivamente.

Realizando a variação de tal funcional através do Princípio de Hamilton chega-se a um conjunto de equações diferenciais, as *equações de Euler-Lagrange*[19][27].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \qquad ; n = 1, 2, ..., N. \tag{3.2}$$

Aqui N representa o número de graus de liberdade do sistema. A equação acima pode ainda ser escrita[13],

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \ddot{q}^{n'} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \dot{q}^{n'}. \tag{3.3}$$

As equações acima podem ser resolvidas para as acelerações desde que seja possível garantir a inversibilidade dos coeficientes $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$. Logo uma solução não-singular é possível se

$$det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}) \neq 0, \tag{3.4}$$

sendo a matriz formada pelos coeficientes, $||\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}||$, denominada de *Hessiana.*

A passagem ao formalismo hamiltoniano é realizada introduzindo a variável

$$p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \tag{3.5}$$

denominada *momento canônico.* Deve-se ainda introduzir a função H chamada Hamiltoniana, dada através da transformação de Legendre

$$H = \sum_{n=1}^{N} \dot{q}^n p_n - L. \tag{3.6}$$

Realizando a variação desta expressão e utilizando a definição dos momentos temos:

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta(\sum_{n=1}^{N} \dot{q}^n p_n - L) = \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\dot{q}^n \delta p_n + p_n \delta \dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^n} \delta q^n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \delta \dot{q}^n) = \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} \delta q^n). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim a função acima depende explicitamente apenas das variáveis p e q. Entretanto, é importante notar de (3.4) que toda construção realizada acima é possível desde que se possa obter as velocidades generalizadas, através da expressão (3.5), como funções de q e p. A condição de inversibilidade para as velocidades, dada a definição dos $p's$ em (3.5), é que

$$det||\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}|| \neq 0, \tag{3.8}$$

onde $||\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}||$ é a matriz formada pelas segundas derivadas da Lagrangiana com respeito às velocidades generalizadas e n', assim como n, varia de 1 a N.

Mas, esta é a mesma condição para se resolver as acelerações no formalismo lagrangiano. Portanto, a passagem ao formalismo hamiltoniano é possível desde que a matriz Hessiana seja inversível, ou seja, desde que seja possível resolver as acelerações no formalismo lagrangiano. Quando admite-se a possibilidade que a Hessiana seja não-inversível um conjunto de relações entre as variáveis q e p devem aparecer, ou seja, devemos ter

$$\Phi_m(q, p) = 0, \tag{3.9}$$

em que $m = 1, 2, ..., j$, com $j \leq N$. Tais equações são chamadas de *vínculos primários* da teoria e Dirac[15] as notou por $\Phi_m(q, p) \approx 0$.

Vamos agora apresentar como é possível passar ao formalismo hamiltoniano quando há vínculos. Neste sentido considera-se um conjunto de 3N funções da forma[12]:

$$\dot{q}^n = v^n, \qquad \dot{p}_n = \frac{\partial L}{\partial q^n}, \qquad p_n = \frac{\partial L}{\partial v^n}. \tag{3.10}$$

Considere a função H^* definida por

$$H^* \equiv \sum_{n=1}^{N} v^n p_n - L^v, \tag{3.11}$$

onde o L^v significa que trocamos os $\dot{q}_i$'s pelos v_i's. Fazendo a variação da função H^*, semelhante ao que foi feito em (3.7), com respeito a suas variáveis (q, p, v), obtém-se as identidades

$$\frac{\partial H^*}{\partial q^n} = -\frac{\partial L^v}{\partial q^n}, \qquad \frac{\partial H^*}{\partial v^n} = p_n - \frac{\partial L^v}{\partial v^n}, \qquad \frac{\partial H^*}{\partial p_n} = v^n. \tag{3.12}$$

Fazendo uso dos parênteses de Poisson[19] e de (3.10) podemos reescrever as equações acima como

$$\dot{q}^n = \{q^n, H^*\}, \qquad \dot{p}_n = \{p_n, H^*\}, \qquad \frac{\partial H^*}{\partial v^n} = 0. \tag{3.13}$$

Aqui devemos considerar que o posto[1] da Hessiana seja constante, ou seja,

$$posto||\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}|| = R, \qquad N - R = m_1 > 0, \tag{3.14}$$

N sendo a dimensão da matriz Hessiana e m_1 o número de vínculos primários. Com isso, divide-se as variáveis (q, p, v) em dois grupos,

$$X^i = q^i, \qquad \Pi_i = p_i, \qquad V^i = v^i \qquad (i = 1, ..., R). \tag{3.15}$$

$$x^\alpha = q^{R+\alpha}, \qquad \pi_\alpha = p_{R+\alpha}, \qquad \lambda^\alpha = v^{R+\alpha} \qquad (\alpha = 1, ..., m_1). \tag{3.16}$$

As equações (3.15), chamadas de “expressíveis”[12], satisfazem a condição

$$det||\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{X}^i \partial \dot{X}^j}|| \neq 0, \tag{3.17}$$

ou

$$det||\frac{\partial^2 L}{\partial V^i \partial V^j}|| \neq 0, \tag{3.18}$$

com $i, j = 1, ..., R$.

O outro conjunto (3.16) de variáveis é dito “não-expressíveis”. Note da expressão $\Pi_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial V^\alpha}$ que as velocidades “expressíveis” podem ser escritas como $V = \bar{V}(q, \Pi, \lambda)$. Assim, introduzindo as funções

$$\Phi^{(1)}_\alpha = \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial \lambda^\alpha}, \qquad f_\alpha = \frac{\partial \bar{L}^v}{\partial \lambda^\alpha}, \tag{3.19}$$

pode-se escrever

[1] Por posto de uma matriz entende-se o número de linhas não nulas quando a matriz encontra-se na forma reduzida escalonada por linhas. Aqui o posto está associado ao número de equações que podem ser resolvidas.

$$\Phi_\alpha^{(1)} = \pi_\alpha - f_\alpha(q, \Pi) = 0, \tag{3.20}$$

com $\alpha = 1, ..., m_1$.

A barra acima das funções serve para indicar que a função $V = \bar{V}(q, \Pi, \lambda)$ foi usada na expressão considerada. As quantidades $\Phi_\alpha^{(1)}$ são os vínculos primários da teoria. Com estas definições é possível introduzir a função

$$H^{(1)} = H + \sum_{\alpha=1}^{m_1} \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)}, \tag{3.21}$$

de modo que as equações (3.13) são reescritas como

$$\dot{q}^n = \{q^n, H^{(1)}\}, \qquad \dot{p}_n = \{p_n, H^{(1)}\}, \qquad \Phi_\alpha^{(1)} = 0, \tag{3.22}$$

ou ainda,

$$\dot{\xi} = \{\xi, H^{(1)}\}, \qquad \Phi_\alpha^{(1)} = 0, \qquad H^{(1)} = H + \sum_{\alpha=1}^{m_1} \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)}, \tag{3.23}$$

onde ξ representa o conjunto de variáveis canonicamente conjugadas (q, p). Diz-se que (3.23) é o *Sistema Hamiltoniano de Equações com Vínculos Primários*.

Os vínculos primários aqui obtidos são os mesmos vínculos da expressão (3.9), apenas optamos por uma apresentação diferente destes. Note em (3.19) e (3.20) que $\Phi_\alpha^{(1)}$ é a expressão dos momentos, mas aqui devido a separação realizada entre os momentos que podem ser expressos em termos das velocidades e os que não podem ser expressos, os vínculos, como deveriam ser, aparecem como a parte "não-expressível" dos momentos. Em (3.9) a expressão dos vínculos também comparecem a partir dos momentos, dados pela expressão (3.5), assim Φ_m representa a parte dos momentos que não poderão ser invertidos em termos das velocidades generalizadas.

Vale ressaltar que na expressão anterior $H^{(1)} = H^*|_{V=\bar{V}} = \bar{H}^*$, ou seja, $H^{(1)}$ é a hamiltoniana encontrada a partir da substituição $V = \bar{V}(q, \Pi, \lambda)$. Aqui $H =$

$(\sum_i \frac{\partial L^v}{\partial v^i} v^i - L^v)|_{V=\bar{V}}$ difere da função $H^{(1)}$ por não depender das velocidades "não-expressíveis" λ_α's. É importante notar que a expressão (3.21) é obtida a partir da transformação (3.11), junto as expressões dos λ_α's em (3.16) e (3.19).

3.2 Vínculos de Primeira e Segunda Classe

Os vínculos primários discutidos anteriormente mostram um conjunto de relações entre as variáveis dinâmicas; do ponto de vista geométrico essas relações restringem a variedade sobre a qual o movimento do sistema[2] se dá. Portanto, tais relações não se alteram no tempo, de forma que elas devem satisfazer as equações

$$\dot{\Phi}_\alpha^{(1)} = \{\Phi_\alpha^{(1)}, H^{(1)}\} = \{\Phi_\alpha^{(1)}, H\} + \sum_{\beta=1}^{m_1} \{\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\}\lambda^\beta = 0. \tag{3.24}$$

Destas relações pode-se obter os λ's em função dos (q, p). No entanto, para isto ser possível deve-se ter

$$det||\{\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\}|| \neq 0. \tag{3.25}$$

Desde que esta condição seja satisfeita, tem-se a partir da (3.24)

$$H^{(1)} = H - \Phi_\alpha^{(1)}\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(1)}\}^{-1}_{\alpha\beta}\{\Phi_\beta^{(1)}, H\}. \tag{3.26}$$

Entretanto, se a condição (3.25) não for satisfeita a matriz $||\{\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\}||$ será singular, logo

$$posto||\{\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_\beta^{(1)}\}|| = \rho_1 < m_1. \tag{3.27}$$

Assim, $m_1 - \rho_1$ funções λ de (3.24) permanecem desconhecidas e alguns vínculos aparecem na teoria; tais vínculos são chamados de *Vínculos Secundários* ou *Vínculos*

[2] Aqui referimo-nos a *movimento do sistema* como a evolução dos estados no Espaço de Fase.

de Segundo-Estágio. Neste ponto deve-se prosseguir de forma semelhante, ou seja, deve-se introduzir tais vínculos na hamiltoniana, de modo que tem-se

$$H^{(1)} = H - \Phi^{(1)}_{\alpha}\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(1)}\}^{-1}_{\alpha\beta}\{\Phi^{(1)}_{\beta}, H\} + \lambda^{\chi}\Phi^{(2)}_{\chi}, \tag{3.28}$$

em que α e β variam de 1 a ρ_1, pois, esta trata-se da parte em que é possível encontrar os λ's. Agora tem-se $\chi = m_1 - \rho_1$ funções λ desconhecidas.

Considerando os vínculos secundários e utilizando a condição (3.24) é possível chegar ainda a vínculos de terceiro-estágio, quarto-estágio, ..., j-ésimo-estágio, de modo que em cada um dos estágios deve-se realizar o procedimento discutido. Este procedimento encerra-se no k-ésimo estágio, pois o número de graus de liberdade do sistema é finito. Os vínculos de qualquer estágio serão sempre chamados de secundários, uma vez que eles diferem dos primários pelo uso das equações de movimento. Podemos denotar todos os vínculos como

$$\Phi^{(i,\ldots,j)} = (\Phi^{(i)}, ..., \Phi^{(j)}), \qquad 1 \leq i < j \leq k. \tag{3.29}$$

Os vínculos podem ainda ser classificados como de *primeira* e *segunda classe*[15][12]. Diz-se que um vínculo é de primeira classe se o seu parênteses de Poisson com qualquer outro vínculo é nulo. Caso contrário, o vínculo é de segunda classe. Os vínculos de primeira classe podem ser tratados fixando um calibre, conforme será visto em uma de nossas aplicações. Os vínculos de segunda classe satisfazem

$$det||\{\Phi^{(1)}_{\alpha}, \Phi^{(1)}_{\beta}\}|| \neq 0, \tag{3.30}$$

o que permite determinar os λ's e escrever a Hamiltoniana completa do sistema. Neste caso a condição de não alteração dos vínculos no tempo fica

$$\dot{\Phi}^{(1)}_{l} = \{\Phi_l, H^{(1)}\} = \{\Phi_l, H\} + \{\Phi_l, \Phi^{(1)}_{\alpha}\}\lambda^{\alpha} + \{\Phi\} = 0, \tag{3.31}$$

onde $\{\Phi\}$, são combinações lineares de vínculos. Desta forma é possível obter todos os λ's e construir um conjunto de equações de movimento dadas por

$$\dot{\xi} = \{\xi, H_k^{(1,2)}\}, \qquad \Phi = 0, \tag{3.32}$$

onde

$$H_k^{(1,2)} = H - \Phi_l \{\Phi, \Phi\}_{ll'}^{-1} \{\Phi_{l'}, H\}, \tag{3.33}$$

em que a notação Φ sem qualquer índice indica que nos referimos a todos os vínculos da teoria. O índice “2” na Hamiltoniana refere-se ao fato que, diferente da Hamiltoniana (3.26), aqui a soma é sobre todos os vínculos da teoria. Desta forma segue que k representa o k-ésimo estágio dos vínculos e l e l' variam sobre todos os vínculos da teoria.

Dirac[15] propôs que estas equações fossem escritas

$$\dot{\xi} = \{\xi, H\}_{D_{(\Phi)}}, \qquad \Phi = 0, \tag{3.34}$$

onde o produto $\{\xi, H\}_{D_{(\Phi)}}$ denota a expressão (3.32), com o H dado pela (3.33). O ente $\{\xi, H\}_{D_{(\Phi)}}$ é conhecido como *Parênteses de Dirac*. Dada duas funções quaisquer, definidas sobre o espaço de fase, define-se o parênteses de Dirac de duas quantidades F e G como

$$\{F, G\}_{D_{(\Phi)}} \equiv \{F, G\} - \{F, \Phi_l\}\{\Phi_l, \Phi_{l'}\}^{-1}\{\Phi_{l'}, G\}, \tag{3.35}$$

onde a soma em l e l' é tomada sobre todos os vínculos. Quando realizam-se os cálculos deve-se fixar um valor para l e somar sobre todos os l'. Isto deve ser feito até que se esgotem todos os vínculos.

O parênteses de Dirac é uma espécie de generalização dos parênteses de Poisson quando vínculos de segunda classe comparecem na teoria. Abaixo seguem algumas de suas propriedades:

$$\{F, G\}_{D_{(\Phi)}} = -\{G, F\}_{D_{(\Phi)}}. \tag{3.36}$$

$$\{F, G + \lambda K\}_{D_{(\Phi)}} = \{F, G\}_{D_{(\Phi)}} + \lambda\{F, K\}_{D_{(\Phi)}}. \tag{3.37}$$

$$\{F, \{G, K\}_{D_{(\Phi)}}\}_{D_{(\Phi)}} + \{K, \{F, G\}_{D_{(\Phi)}}\}_{D_{(\Phi)}} + \{G, \{K, F\}_{D_{(\Phi)}}\}_{D_{(\Phi)}} = 0. \tag{3.38}$$

Antes de ser realizado o procedimento de quantização da teoria com vínculos, vamos discutir de forma resumida a formulação simplética da mecânica, mostrando como é possível escrever o parênteses de Dirac Simétrico.

3.3 Formulação Simplética

Nesta seção analisamos a estrutura algébrica do parênteses de Dirac. Para isto será apresentado o parênteses de Poisson em termos algébricos[18][19]. O parênteses de Poisson de duas funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$, definidas sobre o espaço de fase 2N-dimensional com variáveis $(q^1, ..., q^N, p_1, ..., p_N)$, é definido pela relação

$$\{f, g\}(q,p) \equiv \sum_{k=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q^k}). \tag{3.39}$$

No entanto, note que introduzindo as variáveis

$$\omega^\mu = \sum_{k=1}^{N}(\delta^\mu_k q^k + \delta^{\mu,k+N} p_k), \tag{3.40}$$

e a matriz

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\delta^{\mu,\nu+N} + \delta^{\mu+N,\nu}, \tag{3.41}$$

reescreve-se (3.39) através da notação tensorial como

$$\{f,g\}(\omega)=\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial f(\omega)}{\partial\omega^{\mu}}\frac{\partial g(\omega)}{\partial\omega^{\nu}}. \tag{3.42}$$

Algumas das propriedades satisfeitas pelo produto (3.42) são as seguintes:

i) Anti-simetria: $\{f,g\}=-\{g,f\}$.

ii) Linearidade: $\{c_1f_1+c_2f_2,g\}=c_1\{f_1,g\}+c_2\{f_2,g\}$, com c_1 e c_2 sendo números.

iii) Para qualquer número c e qualquer $f(\omega)$: $\{c,f\}=0$.

iv) Identidade de Jacobi: $\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0$.

A matriz $\epsilon^{\mu\nu}$ é importante nesta formulação, pois é sobre ela que recai muitas das propriedades associadas aos parênteses de Poisson. Por exemplo, utilizando as propriedades de anti-simetria da matriz $\epsilon^{\mu\nu}$ prova-se a identidade de Jacobi. Além disso, podemos definir uma *transformação canônica* como aquela cuja matriz $\epsilon^{\mu\nu}$ é invariante sob a transformação em questão(Ver Apêndice).

A matriz inversa de $\epsilon^{\mu\nu}$ é dada por

$$\epsilon_{\mu\nu}=\delta_{\mu,\nu+N}-\delta_{\mu+N,\nu}. \tag{3.43}$$

Agora, dados os conjuntos $\phi^{\alpha}(\omega)$ de 2N-funções independentes, define-se os parênteses de Lagrange de ϕ^{α} e ϕ^{β} como[18]

$$[\phi^{\alpha},\phi^{\beta}]=L_{\alpha\beta}(\phi)=-\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial\omega^{\mu}}{\partial\phi^{\alpha}}\frac{\partial\omega^{\nu}}{\partial\phi^{\beta}}. \tag{3.44}$$

Nota-se que os parênteses de Poisson e Lagrange satisfazem a relação

$$L_{\alpha\sigma}(\phi)\{\phi^{\sigma},\phi^{\beta}\}=-\delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{3.45}$$

Uma identidade relevante para nosso propósito é dada pela expressão

$$\frac{\partial}{\partial\phi^{\alpha}}L_{\beta\gamma}(\phi)+\frac{\partial}{\partial\phi^{\beta}}L_{\gamma\alpha}(\phi)+\frac{\partial}{\partial\phi^{\gamma}}L_{\alpha\beta}(\phi)=0, \tag{3.46}$$

que é uma espécie de identidade de Jacobi para o parênteses de Lagrange.

3.3.1 Parênteses de Poisson Generalizado

Com o objetivo de escrever o parênteses de Dirac nesta formulação realiza-se uma generalização dos parênteses de Poisson. O *Parênteses de Poisson Generalizado* é definido por[17]

$$\{f,g\}^{\star}(\omega) \equiv \eta^{\mu\nu}(\omega)\frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega^{\mu}}\frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega^{\nu}}, \tag{3.47}$$

onde o termo $\eta^{\mu\nu}(\omega)$ é uma função das variáveis (q,p) e é anti-simétrico com respeito a μ e ν. Estudando as propriedades que esta função deve satisfazer para que sejam mantidas as propriedades do produto $\{,\}^{\star}$ semelhantes às do parênteses de Poisson, $\eta^{\mu\nu}(\omega)$ transforma-se como um tensor anti-simétrico de segunda ordem. Além disso, para que o produto $\{,\}^{\star}$ satisfaça a identidade de Jacobi deve-se ter[17][18]:

$$\eta^{\lambda\mu}(\omega)\frac{\partial \eta^{\nu\rho}(\omega)}{\partial \omega^{\mu}} + \eta^{\nu\mu}(\omega)\frac{\partial \eta^{\rho\lambda}(\omega)}{\partial \omega^{\mu}} + \eta^{\rho\mu}(\omega)\frac{\partial \eta^{\lambda\nu}(\omega)}{\partial \omega^{\mu}} = 0. \tag{3.48}$$

Considerando que a matriz formada pelos elementos $\eta^{\mu\nu}(\omega)$ é não-singular[17], então usando sua inversa $\eta_{\mu\nu}(\omega)$ reescreve-se (3.48) na forma

$$\frac{\partial \eta_{\mu\nu}(\omega)}{\partial \omega^{\lambda}} + \frac{\partial \eta_{\nu\lambda}(\omega)}{\partial \omega^{\mu}} + \frac{\partial \eta_{\lambda\mu}(\omega)}{\partial \omega^{\nu}} = 0. \tag{3.49}$$

Fazendo a correspondência $\eta_{\mu\nu}(\omega) \to L_{\alpha\beta}(\omega)$ e $\omega^{\mu} \to \phi^{\alpha}$ na expressão anterior, somos conduzidos à expressão (3.46) relativa ao parênteses de Lagrange. Isto mostra uma conexão entre o parênteses de Lagrange e a identidade de Jacobi associada ao parênteses de Poisson generalizado[17].

Introduzamos as funções

$$\theta^{a}(\omega), \qquad a = 1, 2, ..., 2(N-\gamma) \tag{3.50}$$

e

$$\psi^{m}(\omega), \qquad m = 1, 2, ..., 2\gamma, \tag{3.51}$$

que são no total 2N funções e as consideremos independentes. Além disso, consideremos que essas funções definidas sobre o espaço de fase sejam tais que as (2N - γ) funções θ^a descrevam o conjunto de vínculos de segunda classe da teoria.

Note de (3.45) que é possível então construir as seguintes relações:

$$\{\theta^a, \theta^b\} L_{bc}(\theta, \psi) + \{\theta^a, \psi^m\} L_{mc}(\theta, \psi) = \delta^a_c, \tag{3.52}$$

$$\{\theta^a, \theta^b\} L_{bn}(\theta, \psi) + \{\theta^a, \psi^m\} L_{mn}(\theta, \psi) = 0, \tag{3.53}$$

$$\{\psi^m, \theta^a\} L_{ab}(\theta, \psi) + \{\psi^m, \psi^n\} L_{nb}(\theta, \psi) = 0, \tag{3.54}$$

$$\{\psi^m, \theta^a\} L_{an}(\theta, \psi) + \{\psi^m, \psi^p\} L_{pn}(\theta, \psi) = \delta^m_n, \tag{3.55}$$

em que

$$L_{ab}(\theta, \phi) = -\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \omega^\mu}{\partial \theta^a} \frac{\partial \omega^\nu}{\partial \theta^b}, \tag{3.56}$$

$$L_{am}(\theta, \phi) = -\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \omega^\mu}{\partial \theta^a} \frac{\partial \omega^\nu}{\partial \psi^m}, \tag{3.57}$$

$$L_{mn}(\theta, \phi) = -\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \omega^\mu}{\partial \psi^m} \frac{\partial \omega^\nu}{\partial \psi^n}. \tag{3.58}$$

Nestas expressões usam-se os índices a,b e c para denotar as funções θ e os índices m, n e p para as funções ψ. Estas expressões junto ao uso de (3.45) explicam porquê algumas das expressões (3.52-55) são nulas e outras não. As expressões (3.53) e (3.54), por exemplo, são nulas porque as funções ψ e θ são independentes; de fato tem-se

$$\begin{aligned}
\{\psi^m, \psi^n\} L_{nb}(\theta,\psi) &= -\epsilon^{\mu\nu} \frac{\partial \psi^m}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial \psi^n}{\partial \omega^\nu} \epsilon_{\rho\lambda} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \psi^n} \frac{\partial \omega^\lambda}{\partial \theta^b} = \\
&= -\epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{\rho\lambda} \frac{\partial \psi^m}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial \omega^\rho}{\partial \omega^\nu} \frac{\partial \omega^\lambda}{\partial \theta^b} = \\
&= -\epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{\rho\lambda} \frac{\partial \psi^m}{\partial \omega^\mu} \delta^\rho_\nu \frac{\partial \omega^\lambda}{\partial \theta^b} = \\
&= -\delta^\mu_\lambda \frac{\partial \psi^m}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial \omega^\lambda}{\partial \theta^b} = \frac{\partial \psi^m}{\partial \theta^b} = 0,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

onde usamos a consideração que θ e ψ são independentes. Com argumento similar e abrindo os outros termos chega-se ao porquê de alguns termos ter como resultado uma δ^i_j.

Usando o fato que nas variáveis ψ a equação (3.46) é satisfeita, e se fizermos a correspodência $\eta_{\mu\nu}(\theta,\psi) \to L_{\alpha\beta}(\theta,\psi)$, supondo que o elemento inverso $\eta^{\nu\theta}(\theta,\psi)$ existe, define-se o parênteses

$$\{f, g\}^\star(\theta,\psi) \equiv \eta^{\mu\nu}(\theta,\psi) \frac{\partial f}{\partial \psi^\mu} \frac{\partial g}{\partial \psi^\nu}, \tag{3.60}$$

que satisfaz a identidade de Jacobi, para as 2γ variáveis ψ. Desta definição nota-se que $\{f, \theta^a\}^\star = 0$.

Mostra-se que (3.60) refere-se ao parênteses de Dirac. Para tanto assume-se que a matriz inversa dos parênteses de Poisson dos θ^a's existe, ou seja

$$C_{ab}(\theta,\psi).\{\theta^b, \theta^c\} = \delta^c_a. \tag{3.61}$$

Usando este fato em (3.53) tem-se

$$\{\theta^a, \theta^b\} L_{bn}(\theta,\psi) = -\{\theta^a, \psi^m\} L_{mn}(\theta,\psi) \tag{3.62}$$

ou

$$L_{bn}(\theta,\psi) = -C_{ba}(\theta,\psi)\{\theta^a, \psi^m\}\eta_{mn}(\theta,\psi), \tag{3.63}$$

em que a associação entre L e η foi feita no último termo. Agora, usa-se esta expressão em (3.55)

$$\{\psi^m, \theta^b\}(-C_{ba}(\theta,\psi)\{\theta^a, \psi^m\}\eta_{mn}(\theta,\psi)) + \{\psi^m, \psi^p\}\eta_{pn}(\theta,\psi) = \delta^m_n, \tag{3.64}$$

ou ainda,

$$[\{\psi^m, \psi^l\} - \{\psi^m, \theta^b\}C_{ba}(\theta,\psi)\{\theta^a, \psi^l\}]\eta_{ln}(\theta,\psi) = \delta^m_n. \tag{3.65}$$

A expressão acima indica a existência da matriz inversa η^{mn}, cuja forma é

$$\eta^{mn}(\theta,\psi) = \{\psi^m, \psi^n\} - \{\psi^m, \theta^a\}C_{ab}(\theta,\psi)\{\theta^b, \psi^n\}. \tag{3.66}$$

Agora fazendo uso desta quantidade em (3.47), expressa nas variáveis ψ tem-se a expressão:

$$\begin{aligned}
\{f,g\}^\star(\theta,\psi) &= \eta^{mn}\frac{\partial f}{\partial\psi^m}\frac{\partial g}{\partial\psi^n} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial\psi^m}[\{\psi^m,\psi^n\} - \{\psi^m,\theta^a\}C_{ab}(\theta,\psi)\{\theta^b,\psi^n\}]\frac{\partial g}{\partial\psi^n} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial\psi^m}\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\psi^m}{\partial\omega^\mu}\frac{\partial\psi^n}{\partial\omega^\nu}\frac{\partial g}{\partial\psi^n} - \\
&- \frac{\partial f}{\partial\psi^m}\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\psi^m}{\partial\omega^\mu}\frac{\partial\theta^a}{\partial\omega^\nu}C_{ab}(\theta,\psi)\epsilon^{\rho\lambda}\frac{\partial\theta^b}{\partial\omega^\rho}\frac{\partial\psi^n}{\partial\omega^\lambda}\frac{\partial g}{\partial\psi^n} = \\
&= \epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial\omega^\mu}\frac{\partial g}{\partial\omega^\nu} - \epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial\omega^\mu}\frac{\partial\theta^a}{\partial\omega^\nu}C_{ab}(\theta,\psi)\epsilon^{\rho\lambda}\frac{\partial\theta^a}{\partial\omega^\rho}\frac{\partial g}{\partial\omega^\lambda},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

portanto

$$\{f,g\}^\star(\theta,\psi) = \{f,g\} - \{f,\theta^a\}C_{ab}(\theta,\psi)\{\theta^b,g\}. \tag{3.68}$$

Assim, o parênteses de Poisson generalizado nas 2γ variáveis ψ é justamente o parênteses de Dirac, apresentado anteriormente.

3.3.2 Parênteses de Dirac Simétrico

Nesta seção apresentamos o parênteses simétrico associado ao parênteses de Dirac. Inicialmente mostra-se como introduzir o parênteses de Poisson simétrico. Este produto foi inicialmente introduzido por Droz-Vincent[29].Depois Franke e Kálnay[16] mostraram, seguindo a formulação de Mukunda e Sudarshan[17]discutida anteriormente, como é possível realizar uma generalização do parênteses de Poisson para casos onde vínculos aparecem. A extensão ao caso simétrico não se trata apenas de uma generalização matemática, ela nos permitirá realizar o procedimento canônico de quantização para férmions na presença de vínculos.

Considere, como antes, que as variáveis canônicas são representadas pelas variáveis ω^μ. A matriz $\epsilon^{\mu\nu}$ é neste caso dada por:

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

onde as matrizes "**1**" são de ordem N. Neste caso o parênteses simétrico fica então

$$\{f, g\}_+(\omega) = \epsilon_+^{\mu\nu} \frac{\partial f(\omega)}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega^\nu}. \tag{3.70}$$

Note que colocamos o sinal "+" com o objetivo de diferenciarmos o parênteses simétrico do anti-simétrico, sendo $\epsilon_+^{\mu\nu}$ a matriz (3.69). Daqui em diante usaremos a convenção que o sinal "+" está associado ao parênteses simétrico e o sinal "-" ao parênteses anti-simétrico.

Assim como antes, introduz-se o parênteses de Lagrange simétrico como

$$[\phi^\alpha, \phi^\beta]_+ = L^+_{\alpha\beta}(\phi) = \epsilon^+_{\mu\nu} \frac{\partial \omega^\mu}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \omega^\mu}{\partial \phi^\beta}, \tag{3.71}$$

com ϕ^α e ϕ^β sendo duas funções definidas sobre o espaço de fase. Da mesma forma vamos introduzir 2N-funções independentes

$$\theta^a(\omega), \qquad a = 1, 2, ..., N_\theta \tag{3.72}$$

e

$$\psi^m(\omega), \qquad m = 1, 2, ..., N_\psi, \tag{3.73}$$

onde $N_\theta + N_\psi = 2N$. Vamos ainda considerar que a matriz inversa dos parênteses de Poisson simétrico existe, ou seja

$$C^+_{ab}\{\theta^b, \theta^c\}_+ = \delta^c_a, \tag{3.74}$$

com $a, b, c = 1, 2, ..., N_\theta$. Além disso, considerando que existe uma função $\eta^{\mu\nu}(\theta, \psi)$, simétrica pela troca de $\mu\nu$, satisfazendo a relação [3]

$$\eta^{mp}_+ L^+_{pn} = \delta^m_n, \tag{3.75}$$

com $m, n, p = 1, 2, ..., N_\psi$, define-se o parênteses simétrico Dirac como

$$\{f, g\}^\star_+(\theta, \psi) \equiv \eta^{\mu\nu}_+(\theta, \psi)\frac{\partial f}{\partial \psi^\mu}\frac{\partial g}{\partial \psi^\nu}. \tag{3.76}$$

Utilizando expressões semelhantes às (3.52-55), trocando as operações anti-simétricas pelas simétricas, deduz-se

$$\eta^{mn}_+(\theta, \psi) = \{\psi^m, \psi^n\}_+ - \{\psi^m, \theta^a\}_+ C^+_{ab}\{\theta^b, \psi^n\}_+. \tag{3.77}$$

Assim, (3.76) fica:

$$\{f, g\}^\star_+(\theta, \psi) = \frac{\partial f}{\partial \psi^\mu}[\{\psi^\mu, \psi^\nu\}_+ - \{\psi^\mu, \theta^a\}_+ C^+_{ab}\{\theta^b, \psi^\nu\}_+]\frac{\partial g}{\partial \psi^\nu}. \tag{3.78}$$

Logo,

$$\{f, g\}^\star_+(\theta, \psi) = \{f, g\}_+ - \{f, \theta^a\}_+ C^+_{ab}\{\theta^b, g\}_+. \tag{3.79}$$

Portanto, o parênteses de Dirac simétrico assume a mesma forma do anti-simétrico, mudando apenas a forma dos parênteses de Poisson em questão. Com isto escreve-se os parênteses das quantidades f e g como:

[3]Note que aqui já estamos fazendo a associação que foi feita antes $\eta^{\mu\nu}_+ \to L^+_{\alpha\beta}$.

$$\{f,g\}^{\star}_{\pm}(\theta,\psi) = \{f,g\}_{\pm} - \{f,\theta^a\}_{\pm}C^{\pm}_{ab}\{\theta^b,g\}_{\pm}, \tag{3.80}$$

com $a,b = 1,2,...,N_\theta$. Estes são os parênteses de Dirac simétrico e antissimétrico da teoria, sendo N_θ o número de vínculos que comparecem na teoria.

3.4 Sistemas com Infinitos Graus de Liberdade

Tudo que se tem discutido até aqui é válido para sistemas com um número finito de graus de liberdade. No entanto, em nosso trabalho estamos preocupados em tratar de sistemas com um número infinito de graus de liberdade, campos. Dentro desta perspectiva, vamos discutir brevemente as mudanças que devem surgir nos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano quando o sistema em questão possui infinito graus de liberdade.

As variáveis de estado que aqui compareceram possuem um índice k variando de 1 a N, onde N corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. Quando o sistema em questão possui infinitos graus de liberdade o índice discreto k precisa ser substituido por um "índice" x que varia continuamente. No caso discreto para cada valor de k associa-se uma coordenada generalizada q_k, no contínuo tem-se para cada índice x um campo $\Psi(x)$. Na realidade, o campo Ψ também depende do tempo, t, de modo que deve-se escrever $\Psi(x,t)$. Assim, o valor que o campo assume é especificado pela posição e pelo instante de tempo. No caso tridimensional devemos ter o campo dependendo das três coordenadas espaciais $\Psi(x,y,z,t)$. A Lagrangiana de um tal sistema é dada por uma integral sobre as coordenadas espaciais[19]

$$L = \int\int\int \mathcal{L} \quad dxdydz. \tag{3.81}$$

A quantidade $\mathcal{L}$ é conhecida como densidade Lagrangiana. A densidade Lagrangiana depende, no caso geral, do campo Ψ, de suas derivadas no tempo $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ e espaço $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ e ainda pode depender do tempo, t, e posição, x, explicitamente, ou seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}, x, y, z, t). \tag{3.82}$$

Além disso, a depender do caráter do campo (escalar, vetorial, espinorial, etc) pode-se ter várias componentes para Ψ. Neste caso utiliza-se um índice ρ para indicar as componentes do campo, de modo que a Lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi_\rho, \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial z}, \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial t}, x, y, z, t). \tag{3.83}$$

Uma forma mais conveniente para tratar de campos é usar um espaço quadridimensional, cujas coordenadas são $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Além disso, sempre que nos referirmos às componentes do espaço quadridimensional serão usadas letras gregas para subescrevê-las $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, com $g_{\mu\nu}$ sendo o tensor métrico, e a parte referente às coordenadas espaciais serão subescritas com letras romanas x_i. Para os campos usaremos sempre a letra ρ quando representarmos suas componentes quadridimensionais, a menos que seja necessário utilizar outros índices para diferenciar, como abaixo, por exemplo, onde o índice i no campo denota suas componentes espaciais. Convêm ainda utilizar as notações

$$\Psi_{\rho,\nu} \equiv \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial x^\nu}; \qquad \Psi_{,j} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial x^j}; \qquad \Psi_{i,\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{3.84}$$

Nesta notação reescreve-se a densidade Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi_\rho, \Psi_{\rho,\nu}, x^\nu), \tag{3.85}$$

a Lagrangiana

$$L = \int \mathcal{L}(dx_i), \qquad (dx_i) = dxdydz \tag{3.86}$$

e a ação

$$S = \int \mathcal{L}(dx_\mu), \qquad (dx_\mu) = dtdxdydz. \tag{3.87}$$

O princípio de Hamilton quando aplicado à ação anterior, fica definido sobre um espaço quadridimensional, de modo que as equações de campo são encontradas fazendo

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(dx_\mu) = 0, \tag{3.88}$$

e considerando que os campos Ψ_ρ não variam nas fronteiras. Fazendo a variação deste funcional chega-se às equações de Euller-Lagrange para os campos[19][27]

$$\frac{d}{dx_\nu}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\rho,\nu}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\rho} = 0. \tag{3.89}$$

A passagem para o formalismo Hamiltoniano, no caso de sistemas com infinitos graus de liberdade, realiza-se mediante a definição do que denomina-se "densidade de momento"

$$\Pi_\rho \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\rho}. \tag{3.90}$$

A Hamiltoniana do sistema é dada, neste caso, por uma integral no espaço

$$H = \int\int\int dxdydz(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\rho}\dot{\Psi}_\rho - \mathcal{L}), \tag{3.91}$$

que, de forma semelhante ao que foi feito anteriormente, possibilita definir a densidade Hamiltoniana como

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\rho}\dot{\Psi}_\rho - \mathcal{L}. \tag{3.92}$$

Sendo possível a inversão da equação (3.90) escreve-se $\dot{\Psi}$ em função de Π e Ψ, e deste modo retira-se a dependência da densidade Hamiltoniana com respeito a $\dot{\Psi}$. Segue neste caso que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_\rho} = \dot{\Psi}_\rho + (\Pi_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\rho})\frac{\partial \dot{\Psi}_\rho}{\partial \Pi_\rho} = \dot{\Psi}_\rho, \tag{3.93}$$

que se trata de uma das equações dinâmicas para os campos no formalismo Hamiltoninano de sistemas com infinitos graus de liberdade. O outro conjunto de equações pode ser encontrado observando que $\mathcal{H}$ depende de Ψ_ρ através de $\mathcal{L}$ e de $\dot{\Psi}_\rho$, de modo que

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi_\rho} = \Pi_\lambda\frac{\dot{\Psi}_\lambda}{\partial\Psi_\rho} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}_\lambda}\frac{\dot{\Psi}_\lambda}{\partial\Psi_\rho} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\rho} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\rho}. \tag{3.94}$$

Usando as equações de Euller-Lagrange tem-se

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi_\rho} = -\frac{d}{dx_\mu}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\rho,\mu}}) = -\dot{\Pi}_\rho - \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\rho,i}}). \tag{3.95}$$

Para eliminar a dependência em $\mathcal{L}$ da equação anterior deve-se notar que

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi_{\rho,i}} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\rho,i}}, \tag{3.96}$$

logo

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi_\rho} = -\dot{\Pi}_\rho + \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi_{\rho,i}}), \tag{3.97}$$

ou

$$-\dot{\Pi}_\rho = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi_\rho} - \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Psi_{\rho,i}}). \tag{3.98}$$

Utilizando-se a noção de derivada funcional[27]

$$\frac{\delta}{\delta\Omega} = \frac{\partial}{\partial\Omega} - \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial}{\partial\Omega_{,i}}), \tag{3.99}$$

pode-se então reescrever o conjunto das equações de Euller-Lagrange como

$$-\dot{\Pi}_\rho = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Psi_\rho} \qquad ; \qquad \dot{\Psi}_\rho = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Pi_\rho}, \tag{3.100}$$

cujas equações são semelhantes, em suas formas, àquelas obtidas para um número finito de graus de liberdade. Nesta extensão ressaltamos que a passagem ao formalismo Hamiltoniano está restrita à possibilidade de inversão das equações (3.90), ou dito de outra forma, da matriz Hessiana, agora definida como a matriz das derivadas segundas da densidade Lagrangiana com respeito aos $\dot{\Psi}$, possuir determinante não nulo,

$$det||\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}_\chi\partial\dot{\Psi}_\rho}|| \neq 0. \tag{3.101}$$

Com o intuito de tratar do procedimento de quantização precisamos introduzir a extensão do parênteses de Poisson para campos. Assim, considere uma densidade $\mathcal{U}$ que é função dos campos (Ψ_ρ, Π_ρ), de seus gradientes, e possivelmente das coordenadas x^μ:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Psi_\rho, \Pi_\rho, \Psi_{\rho,i}, \Pi_{\rho,i}, x_\mu). \tag{3.102}$$

Define-se então a integral

$$U(t) = \int \mathcal{U}(dx_i), \tag{3.103}$$

que é definida sobre todo o espaço contornado por uma superfície onde (Ψ_ρ, Π_ρ) se anulam. Se diferenciarmos com respeito a t a expressão acima tem-se

$$\frac{dU}{dt} = \int (dx_i)(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_\rho}\dot{\Psi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_{\rho,i}}\dot{\Psi}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Pi_\rho}\dot{\Pi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Pi_{\rho,i}}\dot{\Pi}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}). \tag{3.104}$$

Nota-se, entretanto, que

$$\begin{aligned}\int (dx_i)\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_{\rho,i}}\dot{\Psi}_{\rho,i} = \int (dx_i)\frac{d}{dx_i}(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_{\rho,i}}\dot{\Psi}_\rho) - \int (dx_i)\dot{\Psi}_\rho\frac{d}{dx_i}(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_{\rho,i}}) = \\ = - \int (dx_i)\dot{\Psi}_\rho\frac{d}{dx_i}(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_{\rho,i}}),\end{aligned} \tag{3.105}$$

pois estamos considerando que Ψ, bem como $\dot{\Psi}$, se anulam nas fronteiras. Tem-se ainda de modo semelhante que

$$\int (dx_i)\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Pi_{\rho,i}}\dot{\Pi}_{\rho,i} = - \int (dx_i)\dot{\Pi}_\rho\frac{d}{dx_i}(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Pi_{\rho,i}}). \tag{3.106}$$

Juntando estes resultados em (3.104) tem-se

$$\frac{dU}{dt} = \int (dx_i)[(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_\rho} - \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Psi_{\rho,i}}))\dot{\Psi}_\rho + (\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Pi_\rho} - \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Pi_{\rho,i}}))\dot{\Pi}_\rho + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}], \tag{3.107}$$

ou ainda usando (3.99) e (3.100):

$$\frac{dU}{dt} = \int (dx_i)(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \Psi_\rho}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \Pi_\rho}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Psi_\rho}) + \int (dx_i)\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}. \qquad (3.108)$$

Note a semelhança entre o primeiro termo da equação anterior e a forma do parênteses de Poisson. Assim, sendo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ duas densidades quaisquer pode-se definir o parênteses de Poisson destas quantidades como sendo:

$$\{U, W\} = \int (dx_i)(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \Psi_\rho}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_\rho} - \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \Pi_\rho}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Psi_\rho}). \qquad (3.109)$$

Seguindo essa introdução aos sistemas com infinitos graus de liberdade pode-se pensar em extensões relacionadas a nossa discussão para sistemas hamiltonianos vinculados. Como dito anteriormente, a passagem ao formalismo hamiltoniano é possível quando $det||\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\chi \partial \dot{\Psi}_\rho}|| \neq 0$, caso contrário considera-se que tal matriz possui um posto constante e neste caso algumas relações de vínculos entre o campo Ψ e as densidades de momento Π devem aparecer, $\Theta_m = \Theta_m(\Psi, \Pi) = 0$.

Como feito antes introduz-se mais um conjunto de variáveis Γ, convenientemente escolhidas, de modo que se obtém equações semelhantes a (3.10), com o cuidado de trocar a lagrangiana pela densidade lagrangiana e os q's e p's pelos campos e densidades de momento, respectivamente. A hamiltoniana (3.11) deve ser substituida pela densidade hamiltoniana e a soma por uma integral no espaço. Seguindo este caminho, encontra-se um conjunto de equações semelhantes às (3.22), observando que o parênteses de Poisson deve tomar agora a forma (3.109). Além disso, todas as denominações usadas antes, tais como, vínculos de primeira e segunda classe e vínculos primários e secundários são estendidas para o caso de campos[11][12].

Seguindo este raciocínio chega-se ao parênteses de Dirac. Vale ressaltar que no segundo termo de (3.35) existe uma soma sobre todos os vínculos; tal soma será substituida no caso de campos por uma integral, de modo que o parênteses de Dirac de duas funções F e G dependentes de Ψ e Π torna-se[11][31]

$$\{F,G\}(\Psi,\Pi) = \{F,G\} - \int \{F,\theta^a\} C_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x'})\{\theta^b,G\}(dx_i)(dx'_i), \tag{3.110}$$

em que $\{F,G\}$ é dado pela (3.109) e $C_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x'})$ é a matriz inversa de $||\{\theta^a,\theta^b\}||$.

Estas discussões somadas aos trabalhos de Mukunda e Sudarshan[17] e de Franke e Kálnay[16], conduzem a uma extensão dos parênteses de Dirac antissimétrico e simétrico para campos da forma[11][31]

$$\{F,G\}_{\pm}(\Psi,\Pi) = \{F,G\}_{\pm} - \int \{F,\theta^a\} C^{\pm}_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x'})\{\theta^b,G\}_{\pm}(dx_i)(dx'_i), \tag{3.111}$$

em que a extensão do parênteses de Poisson ao caso simétrico é

$$\{F,G\}_{+} = \int (dx_i)(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Psi_\rho}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Pi_\rho} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Pi_\rho}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Psi_\rho}). \tag{3.112}$$

Através da forma mostrada aqui dos parênteses de Poisson e Dirac, para o caso de campos, percebe-se que a realização do procedimento de quantização canônica para campos é de maior dificuldade do que no caso discreto; entretanto é possível formulá-la seguindo as linhas do problema de Heisenberg para o caso discreto (Ver Apêndice B). No caso em que vínculos estão presentes na teoria a resolução do problema de Heisenberg se dá realizando a troca dos parênteses de Poisson das observáveis clássicas pelo parênteses de Dirac[15][32].

Alguns autores dedicam-se ao estudo formal da quantização de partículas e campos. Streater, por exemplo, mostrou[33] como pode-se estender o procedimento de quantização quando o sistema em questão é não-linear. Huber e Büttner[35] realizaram a quantização de osciladores não harmônicos utilizando o procedimento de quantização com vínculos; além disso mostraram que tal sistema após uma dada transformação torna-se integrável. No estudo da quantização com vínculos Gitman e Tyutin[12] e Henneaux e Teitelboim[13] também têm dado muitas contribuições.

3.5 Exemplos

Nesta seção consideraremos alguns exemplos com o intuito de demonstrar como pode-se realizar a passagem ao formalismo hamiltoniano quando há vínculos presentes na teoria.

3.5.1 Lagrangianas Degeneradas

Considere a lagrangiana[34]

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2. \tag{3.113}$$

Vê-se que a matriz hessiana de tal sistema é

$$||\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.114}$$

onde $i, j = 1, 2$. Assim, a lagrangiana deste sistema é degenerada e há vínculos presentes na teoria; com efeito, tem-se

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + q_2; \qquad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (1-\alpha)q_1. \tag{3.115}$$

Nota-se a presença de um vínculo primário na teoria dado por

$$\Phi_1 = p_2 - (1-\alpha)q_1. \tag{3.116}$$

A hamiltoniana, usando a definição usual[34], neste caso será

$$H = \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 - L, \tag{3.117}$$

onde substituindo $\dot{q}_1$ a partir da expressão de p_1, e p_2 sendo substituida pelo seu valor na segunda expressão de (3.115) tem-se

$$H = (p_1 - q_2)p_1 + \dot{q}_2(1-\alpha)q_1 - \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2, \tag{3.118}$$

que reorganizando os termos nos dá

$$H = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2. \tag{3.119}$$

A presença do vínculo primário permite escrever a hamiltoniana estendida

$$H^1 = H + \lambda^1 \Phi_1. \tag{3.120}$$

Usando a condição de consistência para Φ_1 tem-se

$$\dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, H^1\} = \{p_2 - (1-\alpha)q_1, H^1\} = (p_1 - q_2) + \beta(q_2 - q_1) - (1-\alpha)(p_1 - q_2) = 0, \tag{3.121}$$

ou ainda

$$\dot{\Phi}_1 = \alpha(p_1 - q_2) - \beta(q_1 - q_2) = 0. \tag{3.122}$$

Nota-se que tal equação depende de como são escolhidas as quantidades α e β. Objetivando exemplificar o procedimento introduzido no capítulo tomemos $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. Neste caso um vínculo secundário aparece na teoria

$$\Phi_2 = q_1 - q_2. \tag{3.123}$$

A hamiltoniana estendida fica então

$$H^{1,2} = H + \lambda^1 \Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2. \tag{3.124}$$

Usando a condição de consistência sobre Φ_2 obtemos

$$\dot{\Phi}_2 = \{q_1 - q_2, H^{1,2}\} = \{q_1 - q_2, H\} + \{q_1 - q_2, \lambda^1 \Phi_1\} = 0, \tag{3.125}$$

que permite encontrar λ^1,

$$\lambda^1 = p_1 - q_2. \tag{3.126}$$

Deste modo termina o conjunto de vínculos da teoria. Agora, usando novamente a condição de consistência em Φ_1 é possível determinar λ^2, pois

$$\dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, H^{1,2}\} = \{\Phi_1, H\} + \{\Phi_1, \lambda^2\Phi_2\} = 0, \tag{3.127}$$

e logo

$$\lambda^2 = \beta(q_1 - q_2). \tag{3.128}$$

Isto finaliza o procedimento e desta forma escreve-se a hamiltoniana total como

$$H^{1,2} = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - q_2)(p_2 - q_1). \tag{3.129}$$

Quanto a classificação dos vínculos em serem de primeira ou segunda classe nota-se que

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = 1, \tag{3.130}$$

logo os vínculos são todos de segunda classe. A matriz formada pelos parênteses de Poisson destes vínculos é

$$||A_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.131}$$

e sua inversa

$$||A_{ij}^{-1}|| = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.132}$$

Portanto, o parênteses de Dirac de duas quantidades quaisquer é dado por:

$$\begin{aligned} \{F, G\}_D &= \{F, G\} - \{F, \Phi_1\}A_{12}^{-1}\{\Phi_2, G\} - \{F, \Phi_2\}A_{21}^{-1}\{\Phi_1, G\} = \\ &= \{F, G\} + \{F, \Phi_1\}\{\Phi_2, G\} - \{F, \Phi_2\}\{\Phi_1, G\}. \end{aligned} \tag{3.133}$$

Nosso trabalho estará focado no cálculo dos parênteses de Dirac das observáveis fundamentais. Neste caso nota-se que

$$\begin{aligned}\{q_i, p_j\}_D &= \{q_i, p_j\} + \{q_i, \Phi_1\}\{\Phi_2, p_j\} - \{q_i, \Phi_2\}\{\Phi_1, p_j\} = \\ &= \delta_{ij} + \delta_{i2}(\delta_{1j} - \delta_{2j}),\end{aligned} \tag{3.134}$$

com $i, j = 1, 2$. Além disso obtém-se também

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\}_D &= \{q_i, q_j\} + \{q_i, \Phi_1\}\{\Phi_2, q_j\} - \{q_i, \Phi_2\}\{\Phi_1, q_j\} = \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.135}$$

e

$$\begin{aligned}\{p_i, p_j\}_D &= \{p_i, p_j\} + \{p_i, \Phi_1\}\{\Phi_2, p_j\} - \{p_i, \Phi_2\}\{\Phi_1, p_j\} = \\ &= \delta_{i2}\delta_{1j} - \delta_{i1}\delta_{2j}.\end{aligned} \tag{3.136}$$

Assim o procedimento de quantização canônico de um tal sistema se daria utilizando como relações fundamentais as expressões (3.134)-(3.136) ou seja,

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \delta_{i2}(\delta_{1j} - \delta 2j)), \tag{3.137}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \tag{3.138}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\hbar(\delta_{i2}\delta_{1j} - \delta_{i1}\delta_{2j}), \tag{3.139}$$

onde usamos $\hat{A}$ para indicar os operadores.

3.5.2 Osciladores Não-Lineares

Considere a lagrangiana de um sistema de osciladores acoplados com um vínculo T(q)[35]

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q) - \mu T(q), \tag{3.140}$$

com q_1, q_2 e q_3 sendo as coordenadas generalizadas,

$$V(q) = q_1^4 + c_2 q_2^4 + c_3 q_3^4 + c_4 q_1^2 q_2^2 + (24 - c_4) q_1^2 q_3^2 + [64 - (c_2 + c_3)] q_2^2 q_3^2 \tag{3.141}$$

e

$$T(q) = q_2 - q_3. \tag{3.142}$$

Nota-se que μ desempenha aqui um papel de parâmetro de Lagrange. A passagem ao formalismo hamiltoniano pode ser realizada imaginando o parâmetro μ como sendo uma coordenada generalizada canonicamente conjugada ao momento p_μ[35]. Assim,

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}} = 0. \tag{3.143}$$

Segundo nossas discussões este é um vínculo primário da teoria e será denotado por Φ_1. Além disso a hamiltoniana é:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \dot{\mu} p_\mu + V(q) + \mu T(q). \tag{3.144}$$

Agora constroi-se a hamiltoniana estendida

$$H^1 = H + \lambda^1 \Phi_1, \tag{3.145}$$

e toma-se a condição de consistência sobre o vínculo,

$$\dot{\Phi}_1 = \dot{p}_\mu = \{p_\mu, H^1\} = -T(q) = 0. \tag{3.146}$$

Nota-se que esta condição gera um vínculo secundário $\Phi_2 = T(q) = q_2 - q_3$. Seguindo o procedimento da hamiltonização tem-se a hamiltoniana

$$H^{1,2} = H + \lambda^1 \Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2. \tag{3.147}$$

Novamente usando a condição de consistência obtém-se para Φ_2

$$\dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, H^{1,2}\} = \{q_2, \frac{1}{2}p_2^2\} - \{q_3, \frac{1}{2}p_3^2\} = p_2 - p_3 = 0. \tag{3.148}$$

Aqui temos o aparecimento de um novo vínculo na teoria $\Phi_3 = p_2 - p_3$. A hamiltoniana total torna-se então

$$H^{1,2} = H + \lambda^1\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2 + \lambda^3\Phi_3. \tag{3.149}$$

Agora a condição de consitência para Φ_3 leva a

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_3 = \{\Phi_3, H^{1,2}\} &= \{p_2 - p_3, H + \lambda^1\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2 + \lambda^3\Phi_3\} = \\ &= -4c_2q_2^3 - 2c_4q_1^2q_2 - 2[64 - (c_2 + c_3)]q_2q_3^2 - \lambda^2 - \{-4c_3q_3^3 - 2(24 - c_4)q_1^2q_3 - \\ &- 2[64 - (c_2 + c_3)]q_2^2q_3 + \lambda^2\} = 0.\end{aligned} \tag{3.150}$$

Esta expressão permite obter a função desconhecida λ^2. Vê-se que

$$\begin{aligned}\lambda^2 = 2c_3q_3^3 + (24 - c_4)q_1^2q_3 + [64 - (c_2 + c_3)]q_2^2q_3 - \\ - 2c_2q_2^3 - c_4q_1^2q_2 - [64 - (c_2 + c_3)]q_2q_3^2,\end{aligned} \tag{3.151}$$

de modo que não há mais vínculos a ser encontrados na teoria. Agora, de posse da hamiltoniana completa (3.46) pode-se usar a condição de consistência para Φ_2 e encontrar λ^3; fazendo isto tem-se

$$\lambda^3 = -\frac{p_2 - p_3}{2}. \tag{3.152}$$

Quanto a classificação dos vínculos em serem de primeira ou segunda classe observa-se que

$$\{\Phi_1, \Phi_k\} = 0, \tag{3.153}$$

com $k = 2, 3$. Além disso,

$$\{\Phi_j, \Phi_k\} = 2, \tag{3.154}$$

se $j \neq k$, com $j, k = 2, 3$, e

$$\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0, \tag{3.155}$$

se $j = k$.

Assim, o vínculo Φ_1 é de primeira classe e os outros são de segunda classe. Neste caso ficamos impossibilitados de encontrar λ^1. Em casos como este deve-se impor outras relações de vínculos na teoria de modo que todas os λ's sejam determinados e que a teoria fique consistente. Este procedimento não é simples; no entanto, há casos onde pode-se chegar a um resultado satisfatório, como no caso do campo de Rarita-Schwinger[49], que será visto em nossas aplicações.

3.5.3 Campo de Maxwell

Vamos agora considerar um campo como exemplo[34]. Seja a densidade Lagrangiana[4]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{3.156}$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, onde A_μ são as componentes do campo, $A^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2$. Esta é a Lagrangiana associada ao campo de Maxwell. Explicitando a expressão (3.156) dá

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\dot{A}^i - \partial_i A^0)^2 - \frac{1}{4} F_{ik}^2, \tag{3.157}$$

com $i, k = 1, 2, 3$. Assim, os "momentos" associados aos campos são

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0 \qquad e \qquad \Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \partial^i A_0 - \dot{A}_i. \tag{3.158}$$

[4]Estamos utilizando a métrica $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

A densidade hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \Pi^i \partial_i A^0 + \frac{1}{4}F_{ik}^2, \tag{3.159}$$

em que os termos Π_i^2 e $\Pi^i \partial_i A^0$ possuem uma soma em $i = 1, 2, 3$.

Em (3.158) nota-se a presença de um vínculo primário na teoria

$$\Phi_1 = \Pi^0 = 0. \tag{3.160}$$

Assim a densidade hamiltoniana estendida é

$$\mathcal{H}^1 = \mathcal{H} + \lambda^1 \Phi_1. \tag{3.161}$$

Utilizando a condição de consistência para Φ_1 através do uso de (3.98) temos

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 = -\dot{\Pi}^0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A^0} - \frac{d}{dx_i}(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A^0{}_{,i}}) = \\ = -\partial^i \Pi_i = 0. \end{aligned} \tag{3.162}$$

Desta forma chega-se a um vínculo secundário na teoria,

$$\Phi^{(2)} = \partial^i \Pi_i. \tag{3.163}$$

Fazendo uso desta expressão construimos a densidade hamiltoniana estendida

$$\mathcal{H}^{1,2} = \mathcal{H} + \lambda^1 \Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2 \tag{3.164}$$

e o desenvolvimento pode ser realizado utilizando a formulação proposta por Dirac.

Este exemplo, bem como os anteriores, mostra algo que já discutimos no decorrer do texto; quando vínculos comparecem na teoria, a região acessível ao sistema fica restrita. Isto pode ser observado tomando as equações de movimento através da hamiltoniana total dos sistemas; nesses casos observa-se que a evolução do sistema se dá apenas sobre uma determinada região do espaço de fase.

Capítulo 4

Álgebras Geométricas e Sua Generalização

As álgebras geométricas estudam objetos geométricos tais como pontos, retas e planos a partir do ponto de vista algébrico. Tais álgebras têm sido cada vez mais aplicadas à física. As álgebras de Grassmann e Clifford são exemplos de álgebras geométricas que têm conseguido destaque no âmbito da física [22][30]. Os trabalhos de Hestenes, por exemplo, ganham destaque neste contexto; alguns de seus trabalhos desenvolveram a Mecânica Clássica em termos das álgebras de Clifford. Este trabalho visa discutir as álgebras geométricas construídas por Schönberg[1][2][3], desenvolvidas por Fernandes[6], Vianna et al[8], Holland[7], e aplicadas por Frescura e Hiley[4].

Em sua construção Schönberg discute a relação entre as álgebras geométricas (G_n e L_n) e a Mecânica Quântica [1][2][3]. Nesta perspectiva introduz-se sobre um espaço afim A_n certas relações entre os objetos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, que denotam os vetores covariantes e contravariantes respectivamente, e a partir daí são obtidas relações destes entes algébricos com elementos e operações da Teoria Quântica. Trabalhos recentes neste domínio têm sido publicados explorando aspectos da teoria de campos no espaço de fase [36][38]. Tais trabalhos contribuem no sentido de investigar e compreender possíveis relações entre as teorias clássica e quântica; foi dentro deste contexto, por exemplo, que Schönberg[1], Fernandes e Vianna[37] buscaram analisar o significado da variável conhecida como spin, abrindo assim novos caminhos para o seu entendimento.

4.1 As Álgebras Geométricas G_n

Seja A_n um espaço afim de dimensão n e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores covariantes e contravariantes, respectivamente. Considerando as bases para estes vetores como $\mathbf{e}^i$ e $\mathbf{e}_i$, respectivamente, estes podem ser escritos em termos de suas componentes como:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i \tag{4.1}$$

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \tag{4.2}$$

Na álgebra G_n seus geradores serão notados por $(\mathbf{u})$ e $(\mathbf{v})$ e irão satisfazer as seguintes relações:

$$[(\mathbf{u}), (\mathbf{u'})]_+ = (\mathbf{u})(\mathbf{u'}) + (\mathbf{u'})(\mathbf{u}) = 0 \tag{4.3}$$

$$[(\mathbf{v}), (\mathbf{v'})]_+ = (\mathbf{v})(\mathbf{v'}) + (\mathbf{v'})(\mathbf{v}) = 0 \tag{4.4}$$

$$[(\mathbf{u}), (\mathbf{v})]_+ = (\mathbf{u})(\mathbf{v}) + (\mathbf{v})(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{1}_{G_n} \tag{4.5}$$

Aqui $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ e $\mathbf{1}_{G_n}$ denotam o invariante $u_i v^i$ e o elemento unitário, respectivamente, em G_n. Portanto, G_n é uma álgebra associativa com unidade $\mathbf{1}_{G_n}$. Note que usando as expressões (4.1)-(4.5) seguem as relações:

$$[(\mathbf{e}^i), (\mathbf{e}^j)]_+ = 0 \tag{4.6}$$

$$[(\mathbf{e}_i), (\mathbf{e}_j)]_+ = 0 \tag{4.7}$$

$$[(\mathbf{e}^i), (\mathbf{e}_j)]_+ = \delta^i_j \mathbf{1}_{G_n} \tag{4.8}$$

Através destas equações nota-se que uma base para G_n é formada pelos 2^{2n} elementos $(\mathbf{e}_1)^{r_1}.....(\mathbf{e}_n)^{r_n}(\mathbf{e}^n)^{s_n}.....(\mathbf{e}^1)^{s_1}$, onde r e s podem assumir valores 0 e 1. Assim, G_n é de ordem 2^{2n}. Dizemos que G_n é a álgebra dos spins ou a álgebra das variáveis discretas[1].

A forma geral de um elemento em G_n será representado por:

$$\Gamma = \sum_{p,q}^{0,...,n} (p!q!)^{-1} C^{k_1,...,k_q}_{j_1,...,j_p} (\mathbf{e}^{j_1}).....(\mathbf{e}^{j_p})(\mathbf{e}_{k_1}).....(\mathbf{e}_{k_q}) \tag{4.9}$$

onde $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_q \leq n$ e $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_p \leq n$.

Os coeficientes C's são antissimétricos com respeito a troca dos índices. Estes coeficientes transformam-se como componentes de tensores antissimétricos por uma mudança no sistema de referência. A demonstração segue do fato que a matriz da transformação $C^{k'_1,...,k'_q}_{j'_1,...,j'_q} = A^{k'_1,...,k'_q}_{k_1,...,k_q} A^{j_1,...,j_q}_{j'_1,...,j'_q} C^{k_1,...,k_q}_{j_1,...,j_q}$ satisfaz $A^{k'_1,...,k'_q}_{k_1,...,k_q} A^{j_1,...,j_q}_{j'_1,...,j'_q} = \delta^{k'_1,...,k'_q}_{j'_1,...,j'_q} \delta^{j_1,...,j_q}_{k_1,...,k_q}$, junto ao fato que por uma permutação da base os coeficientes podem trocar seu sinal por $(-1)^p$, onde p representa o número de permutações.

A representação do elemento Γ em G_n fica mais clara se abrirmos a sua expressão, isto é,

$$\begin{aligned}\Gamma = {} & (0!0!)^{-1}C + (0!1!)^{-1}C^{k_1}(\mathbf{e}_{k_1}) + (0!2!)^{-1}C^{k_1k_2}(\mathbf{e}_{k_1})(\mathbf{e}_{k_2}) + ... + (1!0!)^{-1}C_{j_1}(\mathbf{e}^{j_1}) + \\ & (1!1!)^{-1}C^{k_1}_{j_1}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}_{k_1}) + (1!2!)^{-1}C^{k_1k_2}_{j_1}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}_{k_1})(\mathbf{e}_{k_2}) + ... + (2!0!)^{-1}C_{j_1j_2}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2}) + \\ & (2!1!)^{-1}C^{k_1}_{j_1j_2}(\mathbf{e}^{j_1})(\mathbf{e}^{j_2})(\mathbf{e}_{k_1}) + ...\end{aligned} \tag{4.10}$$

De interesse para o desenvolvimento da teoria são os elementos,

$$(P) = (\mathbf{e}_1).....(\mathbf{e}_n)(\mathbf{e}^n).....(\mathbf{e}^1) \tag{4.11}$$

e

$$(\bar{P}) = (\mathbf{e}^1).....(\mathbf{e}^n)(\mathbf{e}_n).....(\mathbf{e}_1). \tag{4.12}$$

Schönberg introduziu[2] ainda os elementos (N_j) e $(\bar{N}_j)$, onde

$$(N_j) = (\mathbf{e}^j)(\mathbf{e}_j), (\bar{N}_j) = (\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^j) = \mathbf{1}_{G_n} - (N_j), (N_j)^2 = (N_j), (\bar{N}_j)^2 = (\bar{N}_j). \tag{4.13}$$

Note que os (N_j) são comutativos e portanto é possível escrever,

$$(P) = (\bar{N}_1)...(\bar{N}_n) \qquad e \qquad (\bar{P}) = (N_1)...(N_n) \tag{4.14}$$

Associa-se também a cada Γ um elemento $\bar{\Gamma}$ de forma que

$$\bar{\Gamma} = \sum_{p,q}^{0,...,n} (p!q!)^{-1} C^{k_1,...,k_q}_{j_1,...,j_p} (\mathbf{e}_{k_1}).....(\mathbf{e}_{k_q})(\mathbf{e}^{j_p}).....(\mathbf{e}^{j_1}). \tag{4.15}$$

A transformação $\Gamma \to \bar{\Gamma}$ é uma involução invariante de G_n, pois $c_1\Gamma_1 + c_2\Gamma_2 \to c_1\bar{\Gamma_1} + c_2\bar{\Gamma_2}$, $\Gamma_1\Gamma_2 \to \bar{\Gamma_2}\bar{\Gamma_1}$, $\bar{\bar{\Gamma}} \to \Gamma$. Esta involução corresponde à criação e aniquilação de partículas na segunda quantização para férmions, pois veja que (N_j) é levado em $\mathbf{1}_{G_n} - (N_j)$.

Além do elemento (P) introduz-se o elemento $(P^{j_1,...,j_p}_{k_1,...,k_q})$ definido como:

$$(P^{j_1,...,j_p}_{k_1,...,k_q}) = (\mathbf{e}^{j_1}).....(\mathbf{e}^{j_p})(P)(\mathbf{e}_{k_q}).....(\mathbf{e}_{k_1}). \tag{4.16}$$

Estes elementos satisfazem duas propriedades que são importantes; são elas:

- $(P)(\mathbf{e}^j) = (\mathbf{e}^j)(P) = 0$
- $(P^{j_1,...,j_p}_{k_1,...,k_q})(P^{j'_1,...,j'_{p'}}_{k'_1,...,k'_{q'}}) = \delta_{q,p'}\delta^{j'_1,...,j'_{p'}}_{k_1,...,k_q}(P^{j_1,...,j_p}_{k'_1,...,k'_{q'}})$

As demostrações destas propriedades seguem utilizando as expressões (4.6-8).

A segunda propriedade mostra a regra de multiplicação para as unidades da álgebra matricial total de um espaço linear de dimensão 2^{2n}. Nota-se desta propriedade que estes 2^{2n} elementos formam uma base para G_n. Assim,

$$\Gamma = \sum_{p,q}^{0,\ldots,n} (p!q!)^{-1} A^{k_1,\ldots,k_q}_{j_1,\ldots,j_p} (P^{j_1,\ldots,j_p}_{k_1,\ldots,k_q}). \tag{4.17}$$

Observa-se da equação acima que $\Gamma(P)$ é um elemento que faz parte da sub-álgebra $G_n(P)$, pois

$$\Gamma(P) = \sum_{p,q}^{0,\ldots,n} (p!q!)^{-1} A^{k_1,\ldots,k_q}_{j_1,\ldots,j_p} (P^{j_1,\ldots,j_p}_{k_1,\ldots,k_q})(P) \tag{4.18}$$

tem como resultado, usando a segunda propriedade,

$$\Gamma(P) = \sum_{p,q}^{0,\ldots,n} (p!q!)^{-1} A^{k_1,\ldots,k_q}_{j_1,\ldots,j_p} \delta_{p,0} \delta^{0}_{j_1,\ldots,j_p} (P^{k_1,\ldots,k_q}_{0}), \tag{4.19}$$

ou,

$$\Gamma(P) = \sum_{q}^{0,\ldots,n} (0!q!)^{-1} A_{k_1,\ldots,k_q} (P^{k_1,\ldots,k_q}). \tag{4.20}$$

Definindo $\Gamma(P) \equiv (\Psi)$, escreve-se

$$(\Psi) = \sum_{q}^{0,\ldots,n} (q!)^{-1} A_{k_1,\ldots,k_q} (P^{k_1,\ldots,k_q}). \tag{4.21}$$

Perceba que o conjunto dos elementos (Ψ) formam uma sub-álgebra de G_n, e que $G_n(P)$ é o sub-espaço das formas lineares. Assim, $G_n(P)$ é a álgebra matricial total da soma direta dos espaços lineares dos tensores covariantes antissimétricos de todas as ordens de A_n.

Procedendo de forma semelhante obtém-se uma sub-álgebra de G_n, dita $(P)G_n$ cujos elementos são da forma:

$$(\Phi) = \sum_{p}^{0,\ldots,n} (p!)^{-1} A^{j_1,\ldots,j_p} (P_{j_1,\ldots,j_p}). \tag{4.22}$$

$(P)G_n$ é um espaço linear equivalente à soma direta dos espaços lineares dos tensores contravariantes antissimétricos de todas as ordens.

A partir dos resultados anteriores chega-se a um resultado interessante. Com este objetivo façamos a seguinte operação:

$$\Gamma(\Psi) = \sum_{p,q}^{0,\ldots,n} (p!q!)^{-1} A^{k_1,\ldots,k_q}_{j_1,\ldots,j_p} (P^{j_1,\ldots,j_p}_{k_1,\ldots,k_q}) \sum_{l}^{0,\ldots,n} (l!)^{-1} A_{n_1,\ldots,n_l} (P^{n_1,\ldots,n_l}). \tag{4.23}$$

Segue das propriedades vistas anteriormente que

$$\Gamma(\Psi) = \sum_{p,q}^{0,\ldots,n} (p!q!)^{-1} (p!)^{-1} A^{n_1,\ldots,n_p}_{k_1,\ldots,k_q} A_{n_1,\ldots,n_p} (P^{k_1,\ldots,k_q}). \tag{4.24}$$

O elemento (4.24) é claramente um elemento de $G_n(P)$. Assim Γ pode ser analisada como uma transformação linear que atua em $G_n(P)$.

Como consequência dessa discussão nota-se que é possível definir um projetor $\mathcal{P}_p$ da sub-álgebra $G_n(P)$. Tal elemento [1] pode ser definido como

$$\mathcal{P}_p \equiv (p!)^{-1} \sum_{j} (P^{j_1,\ldots,j_p}_{j_1,\ldots,j_p}), \tag{4.25}$$

e sua caracterização como o projetor em $G_n(P)$, segue realizando a operação deste com um elemento de $G_n(P)$, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_p(\Psi) &= (p!)^{-1} \sum_{j} (P^{j_1,\ldots,j_p}_{j_1,\ldots,j_p}) \sum_{l}^{0,\ldots,n} (l!)^{-1} A_{n_1,\ldots,n_l} (P^{n_1,\ldots,n_l}) \\
&= (p!)^{-1} \sum_{j,l} (l!) A_{n_1,\ldots,n_l} (P^{j_1,\ldots,j_p}_{j_1,\ldots,j_p})(P^{n_1,\ldots,n_l}) \\
&= (p!)^{-1} \sum_{j,l} (l!) A_{n_1,\ldots,n_l} \delta_{p,l} \delta^{n_1,\ldots,n_l}_{j_1,\ldots,j_p} (P^{j_1,\ldots,j_l}) \\
&= (p!)^{-2} \sum_{j} A_{j_1,\ldots,j_p} (P^{j_1,\ldots,j_p}),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

o que mostra que $\mathcal{P}_p$ projeta (Ψ) nos espaços lineares até a p-ésima ordem. Logo é possível notar que

[1] A soma neste caso refere-se ao fato que temos aqui uma soma de elementos da forma $(P^{j_1}_{j_1}) + (P^{j_1,j_2}_{j_1,j_2}) + \ldots$.

- $\mathcal{P}_0(\Psi)$ projeta (Ψ) no espaço dos escalares.
- $\mathcal{P}_1(\Psi)$ projeta (Ψ) no espaço dos escalares e das 1-formas.
- $\mathcal{P}_2(\Psi)$ projeta (Ψ) no espaço dos escalares, das 1-formas e das 2-formas.
- $\mathcal{P}_n(\Psi)$ projeta (Ψ) no espaço dos escalares, das 1-formas, das 2-formas, ..., das n-formas.

Existem duas propriedades importantes associadas ao projetor $(\mathcal{P}_p)$. São elas:

$$\sum_p (\mathcal{P}_p) = \mathbf{1}_{G_n} \tag{4.27}$$

e

$$(\mathcal{P}_p)(\mathcal{P}_q) = \delta_{p,q}(\mathcal{P}_p). \tag{4.28}$$

A demonstração de (4.27) é direta, pois note que $\sum_p (\mathcal{P}_p)(\Psi)$ leva (Ψ) nele próprio de forma que é possível identificar $\sum_p (\mathcal{P}_p)$ com a unidade $\mathbf{1}_{G_n}$. A (4.28) pode ser demonstrada explicitando as expressões dos $(\mathcal{P}_l)'s$ e realizando o produto de tais elementos a partir das propriedades já vistas. As propriedades (4.27-28) caracterizam $(\mathcal{P}_p)$ como sendo um *idempotente ortogonal*.

Existem ainda algumas relações importantes a respeito dos elementos $(\mathcal{P}_p)$, que serão úteis no tratamento das álgebras DKP. As demonstrações seguem utilizando as propriedades dos produtos entre os elementos da álgebra, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}_{p+1})(\mathbf{e}^k) &= ((p+1)!)^{-1}\sum_j (\mathbf{e}^{j_1}).....(\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P)(\mathbf{e}_{j_{p+1}}).....(\mathbf{e}_{j_1})(\mathbf{e}^k)\\
&= ((p+1)!)^{-1}(-1)^{n-1}\sum_j (\mathbf{e}^{j_1}).....(\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P)(\mathbf{e}_{j_{p+1}}).....(\mathbf{e}_{j_n})(\mathbf{e}^k)....(\mathbf{e}_{j_1})\\
&= ((p+1)!)^{-1}(-1)^{n-1}\sum_j (\mathbf{e}^{j_1}).....(\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P)(\mathbf{e}_{j_{p+1}}).....[\mathbf{1}_{G_n}\delta^k_{j_n} - (\mathbf{e}^k)(\mathbf{e}_{j_n})]....(\mathbf{e}_{j_1})\\
&= ((p+1)!)^{-1}(-1)^{n-1}\sum_j (\mathbf{e}^{j_1})...(\mathbf{e}^k)....(\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P)(\mathbf{e}_{j_{p+1}})...(\mathbf{e}_{j_1})\\
&= ((p+1)!)^{-1}(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}\sum_j (\mathbf{e}^k)(\mathbf{e}^{j_1})....(\mathbf{e}^{j_{p+1}})(P)(\mathbf{e}_{j_{p+1}})...(\mathbf{e}_{j_1})\\
&= (\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p).
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Procedendo de forma semelhante também encontra-se que

$$
(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j)(\mathcal{P}_{p+1}). \tag{4.30}
$$

De posse destes resultados podemos analisar o elemento $(\mathcal{P}_p)G_n(\mathcal{P}_p)$. Temos:

$$
\begin{aligned}
(P^{j_1...j_p}_{j_1...j_p})\Gamma &= (P^{j_1...j_p}_{j_1...j_p})\sum_{l,k}^n (l!k!)^{-1}A^{m_1...m_k}_{n_1...n_l}(P^{n_1...n_l}_{m_1...m_k})\\
&= \sum_{l,k}^n (l!k!)^{-1}A^{m_1...m_k}_{n_1...n_l}(P^{j_1...j_p}_{j_1...j_p})(P^{n_1...n_l}_{m_1...m_k})\\
&= \sum_{l,k}^n (l!k!)^{-1}A^{m_1...m_k}_{n_1...n_l}\delta_{p,l}\delta^{n_1...n_l}_{j_1...j_p}(P^{j_1...j_p}_{m_1...m_k})\\
&= \sum_{k}^n (p!k!)^{-1}A^{m_1...m_k}_{n_1...n_p}\delta^{n_1...n_p}_{j_1...j_p}(P^{j_1...j_p}_{m_1...m_k})\\
&= \sum_{k}^n (p!k!)^{-1}A^{m_1...m_k}_{j_1...j_p}(P^{j_1...j_p}_{m_1...m_k}).
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Então:

$$\sum_{j}^{n}(p)^{-1}(P^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p})\Gamma = (\mathcal{P}_p)\Gamma = \sum_{k}^{n}(p!)^{-2}(k!)^{-1}A^{m_1\ldots m_k}_{j_1\ldots j_p}(P^{j_1\ldots j_p}_{m_1\ldots m_k}). \tag{4.32}$$

Fazendo o mesmo produto à direita teremos:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_p)\Gamma(\mathcal{P}_p) &= \sum_{k}^{n}(p!)^{-2}(k!)^{-1}A^{m_1\ldots m_k}_{j_1\ldots j_p}(P^{j_1\ldots j_p}_{m_1\ldots m_k})\sum_{j}^{n}(p)^{-1}(P^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= \sum_{k,j}^{n}(p!)^{-3}(k!)^{-1}A^{m_1\ldots m_k}_{j_1\ldots j_p}(P^{j_1\ldots j_p}_{m_1\ldots m_k})(P^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= \sum_{k,j}^{n}(p!)^{-3}(k!)^{-1}A^{m_1\ldots m_k}_{j_1\ldots j_p}\delta_{k,p}\delta^{j_1\ldots j_p}_{m_1\ldots m_k}(P^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= \sum_{j}^{n}(p!)^{-4}A^{m_1\ldots m_p}_{j_1\ldots j_p}\delta^{j_1\ldots j_p}_{m_1\ldots m_p}(P^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= (p!)^{-4}A^{m_1\ldots m_p}_{m_1\ldots m_p}(P^{m_1\ldots m_p}_{m_1\ldots m_p}).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Assim, o elemento construido deste produto é da forma:

$$\Theta_p = (p!)^{-4}A^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}(P^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}) = (\mathcal{P}_p)\Gamma(\mathcal{P}_p). \tag{4.34}$$

O conjunto destes elementos formam uma sub-álgebra $E_{n,p}$ de G_n. $E_{n,p}$ é uma álgebra matricial relativa aos espaços lineares dos tensores anti-simétricos covariantes de ordem p. Para notar este fato aplica-se $(\mathcal{P}_p)\Gamma(\mathcal{P}_p)$ a um elemento de $G_n(P)$; neste caso encontra-se um outro elemento de $G_n(P)$, de modo que podemos interpretar $(\mathcal{P}_p)\Gamma(\mathcal{P}_p)$ como uma transformação de $G_n(P)$ em $G_n(P)$.

Um outro fato importante associado a álgebra $E_{n,p}$ é que para diferentes p's estas são ortogonais umas as outras. Conforme será visto, a soma direta de todas $E_{n,p}$ está associada a álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau(DKP).

4.1.1 A Álgebra Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

O estudo da equação DKP relativística tem ganho um destaque nos últimos anos. Neste contexto Fernandes e Vianna têm procurado discutir generalizações da álgebra DKP com o intuito de tentar entender os atributos físicos associados com a Teoria Quântica [36][37]. Neste trabalho os autores derivam a equação DKP, via as álgebras geométricas de Schönberg, e utilizando a proposta de Bohm e Hiley[5] tomam a transformação de Wigner-Moyal da equação. Em consequência quantidades físicas como spin aparecem através de um formalismo algébrico relativístico clássico no espaço de fase. Fernandes, Vianna e Santana[38] também estudaram a formulação DKP no espaço de fase no contexto da covariância Galileana obtendo a equação DKP para o caso não relativístico; esta generalização da formulação DKP para o caso da covariância Galileana os permitiu ainda realizar uma análise entre os casos relativísticos e não relativísticos. Aqui faremos uma breve introdução de como é possível tratar a álgebra DKP no contexto das álgebras geométricas.

Na álgebra DKP os seus geradores $\beta_j^{(p)}$ satisfazem a seguinte relação:

$$\beta_h^{(p)}\beta_j^{(p)}\beta_k^{(p)} + \beta_k^{(p)}\beta_j^{(p)}\beta_h^{(p)} = g_{hj}\beta_k^{(p)} + g_{jk}\beta_h^{(p)}. \tag{4.35}$$

No contexto da álgebra desenvolvida por Schönberg, representa-se os elementos $\beta_j^{(p)}$ em termos dos $(\mathcal{P}_p)$ como sendo:

$$\begin{aligned}\beta_j^{(p)} &= (\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p) \\ &= (\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j) + g_{jk}(\mathcal{P}_{p+1})(\mathbf{e}^k) \\ &= (\mathbf{e}_j)(\mathcal{P}_{p+1}) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p),\end{aligned} \tag{4.36}$$

em que g_{jk} é a métrica. O elemento $(\mathcal{P}_p)+(\mathcal{P}_{p+1})$ é a unidade na álgebra DKP; assim $(\mathcal{P}_p)+(\mathcal{P}_{p+1})$ junto aos $\beta_j^{(p)}$ geram uma álgebra DKP.

Pode-se introduzir ainda uma álgebra gerada pelos elementos $(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j)$, $(\mathbf{e}^j)(\mathcal{P}_p)$ e $(\mathcal{P}_p)+(\mathcal{P}_{p+1})$. Tal álgebra é notada como $D_{n,p}$ e contêm como sub-álgebra a álgebra

DKP. Schönberg mostrou que estas coincidem quando $p \neq (n-1)/2$[1]. Para tanto consideremos os entes:

$$\beta_j^{(p)} = (\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p) \tag{4.37}$$

e

$$\beta_i^{(p)} = (\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_i) + g_{il}(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p). \tag{4.38}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} &= [(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p)][(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_i) + g_{il}(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p)] \\
&= (\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j)(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_i) + (\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j)g_{il}(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p) \\
&+ g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p)(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_i) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p)g_{il}(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Lembrando que $(\mathcal{P}_p)(\mathcal{P}_q) = \delta_{p,q}(\mathcal{P}_p)$ e usando (4.27-28) obtem-se:

$$\begin{aligned}
\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} &= g_{il}(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_i) \\
&= g_{il}(\mathbf{e}_j)(\mathcal{P}_{p+1})(\mathcal{P}_{p+1})(\mathbf{e}^l) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathcal{P}_p)(\mathbf{e}_i) \\
&= g_{il}(\mathbf{e}_j)(\mathcal{P}_{p+1})(\mathbf{e}^l) + g_{jk}(\mathbf{e}^k)(\mathbf{e}_i)(\mathcal{P}_{p+1}) \\
&= g_{il}(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p) + g_{jl}(\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_i)(\mathcal{P}_{p+1}).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
g^{ji}\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} &= g^{ji}g_{il}(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p) + g^{ji}g_{jl}(\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_i)(\mathcal{P}_{p+1}) \\
&= \delta_l^j(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p) + \delta_l^i(\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_i)(\mathcal{P}_{p+1}) \\
&= (\mathbf{e}_l)(\mathbf{e}^l)(\mathcal{P}_p) + (\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_l)(\mathcal{P}_{p+1}) \\
&= \{1 - (\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_l)\}(\mathcal{P}_p) + (\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_l)(\mathcal{P}_{p+1}) \\
&= (\mathcal{P}_p) - (\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_l)(\mathcal{P}_p) + (\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_l)(\mathcal{P}_{p+1}) \\
&= (\mathcal{P}_p) - (\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_l)\{(\mathcal{P}_p) - (\mathcal{P}_{p+1})\}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Mas, lembrando das expressões (4.13):

$$g^{ji}\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} = (\bar{N})(\mathcal{P}_p) + (N)(\mathcal{P}_{p+1}), \tag{4.42}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} g^{ji}\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} &= (\mathcal{P}_p)(\bar{N}) + (\mathcal{P}_{p+1})(N) \\ &= (\mathcal{P}_p)[\mathbf{1}_{G_n} - (N)] + (\mathcal{P}_{p+1})(N), \end{aligned} \tag{4.43}$$

em que $(N) = \sum_j (N_j)$ e $(\bar{N}) = \sum_j (\bar{N}_j)$, com j = 1, 2,..., n.

Fazendo a aplicação deste resultado num elemento $(\Psi) \in G_n(P)$, e utilizando o fato que $\sum_j (N_j) = \sum_p p(\mathcal{P}_p)$, obtém-se

$$g^{ji}\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)}\Gamma(P) = (n-p)(\mathcal{P}_p)(\Psi) + (p+1)(\mathcal{P}_{p+1})(\Psi). \tag{4.44}$$

Deste modo,

$$g^{ji}\beta_j^{(p)}\beta_i^{(p)} = (n-p)(\mathcal{P}_p) + (p+1)(\mathcal{P}_{p+1}). \tag{4.45}$$

Assim, no caso em que $p \neq (n-1)/2$ a relação acima mostra que $(\mathcal{P}_p)$ e $(\mathcal{P}_{p+1})$ pertencem a DKP. Um fato importante a notar é que a álgebra $D_{4,0}$ corresponde a entes escalares. Esta álgebra é importante no estudo de partículas com spin nulo, tais como mésons[36][37].

4.2 As Álgebras Geométricas L_n

De forma semelhante à álgebra G_n vamos usar a notação **u** e **v** para os vetores covariantes e contravariantes. Na álgebra L_n seus geradores serão notados por $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$. L_n é uma álgebra associativa com unidade $\mathbf{1}_{L_n}$ e seus geradores satisfazem a regra de multiplicação:

$$[\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u'}\}]_- = \{\mathbf{u}\}\{\mathbf{u'}\} - \{\mathbf{u'}\}\{\mathbf{u}\} = 0 \tag{4.46}$$

$$[\{\mathbf{v}\},\{\mathbf{v'}\}]_{-}=\{\mathbf{v}\}\{\mathbf{v'}\}-\{\mathbf{v'}\}\{\mathbf{v}\}=0 \tag{4.47}$$

$$[\{\mathbf{u}\},\{\mathbf{v}\}]_{-}=\{\mathbf{u}\}\{\mathbf{v}\}-\{\mathbf{v}\}\{\mathbf{u}\}=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\mathbf{1}_{L_n} \tag{4.48}$$

em que $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ é o invariante u_iv^i e $\mathbf{1}_{L_n}$ é a unidade da álgebra. Segue destas expressões, considerando que $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$ estejam expandidos nas suas bases, que:

$$[\{\mathbf{e}_j\},\{\mathbf{e}_k\}]_{-}=0 \tag{4.49}$$

$$[\{\mathbf{e}^j\},\{\mathbf{e}^k\}]_{-}=0 \tag{4.50}$$

$$[\{\mathbf{e}^j\},\{\mathbf{e}_k\}]_{-}=\delta^j_k\mathbf{1}_{L_n} \tag{4.51}$$

É interessante notar que realizando a associação $q_j \equiv \{\mathbf{e}_j\}$ e $p_k \equiv i(\hbar)^{-1}\{\mathbf{e}^k\}$ a relação (4.51) assemelha-se a relação de comutação da cinemática quântica. Note ainda, que diferente do que acontece na G_n, na base de L_n formada pelos elementos $\{\mathbf{e}_1\}^{r_1}...\{\mathbf{e}_n\}^{r_n}\{\mathbf{e}^1\}^{s_1}...\{\mathbf{e}^n\}^{s_n}$, r e s podem assumir os valores $0,1,2...\infty$, de modo que a ordem de L_n é infinita. L_n é a álgebra das varáveis contínuas. Um elemento geral de L_n pode ser escrito como[1]:

$$\Lambda=\sum_{p,q}^{\infty}(p!q!)^{-1}(r_1!...r_n!)(s_1!...s_n!)C^{k_1...k_q}_{j_1...j_p}\{\mathbf{e}\}^{j_1}...\{\mathbf{e}\}^{j_p}\{\mathbf{e}\}_{k_1}...\{\mathbf{e}\}_{k_q}. \tag{4.52}$$

Como os elementos de L_n comutam então os C's acima são simétricos com respeito a troca dos j's e k's. Os números r_a e s_a representam o número de vezes que os inteiros j iguais a "a" e k iguais a "a", respectivamente, aparecem na expressão acima.

Observe que para os elementos Λ constituirem uma álgebra, a operação de multiplicação precisa ser fechada, ou seja, o produto de dois elementos da álgebra tem que gerar um elemento da álgebra. No entanto, nota-se das relações (4.49-51) entre os elementos que não temos esta garantia. Com o intuito de contornar este problema Schönberg introduziu a *quasi-álgebra* $\underline{L_n}$[2]. Nesta quasi-álgebra seus elementos $\underline{\Lambda}$ são dados por:

$$\underline{\Lambda} = \sum_{p,q}^{\infty}(p!q!)^{-1}(t_1!...t_n!)(v_1!...v_n!)A^{j_1...j_p}_{k_1...k_q}\{P^{k_1...k_q}_{j_1...j_p}\}. \tag{4.53}$$

Os coeficientes A's, assim como os C's, são também simétricos com respeito a troca dos j's e k's. Os elementos $\{P^{k_1...k_q}_{j_1...j_p}\}$ são simétricos pela troca dos j's e k's e obedecem a seguinte regra de multiplicação[2]:

$$\{P^{k_1...k_q}_{j_1...j_p}\}\{P^{k'_{1'}...k'_{q'}}_{j'_{1'}...j'_{p'}}\} = \delta_{p,q'}\delta^{v'_1...v'_n}_{t'_1...t'_n}\{P^{k_1...k_q}_{j'_{1'}...j'_{p'}}\}. \tag{4.54}$$

Estes elementos são definidos como sendo:

$$\{P^{k_1...k_q}_{j_1...j_p}\} \ = \{\mathbf{e}^{k_1}\}...\{\mathbf{e}^{k_q}\}\{P\}\{\mathbf{e}_{j_1}\}...\{\mathbf{e}_{j_p}\}(t_1!...t_n!v_1!...v_n!)^{-1/2}. \tag{4.55}$$

Assim como em G_n define-se aqui idempotentes ortogonais, dados por

$$\{\mathcal{P}_p\} = \sum_j (p!)^{-1}(t_1!...t_n!)\{P^{j_1...j_p}_{j_1...j_p}\}, \tag{4.56}$$

e o elemento unitário neste caso é

$$\mathbf{1}_{\underline{L_n}} = \sum_p^{0,..,\infty}\{\mathcal{P}_p\}. \tag{4.57}$$

Um fato notável é a possibilidade de escrever os $\{\mathbf{e}_j\}$'s em termos dos $\{P^{j_1...j_p}_{j_1...j_p}\}$ na forma:

$$\{\mathbf{e}_j\} = \sum_p^{0...\infty}\sum_{j_1...j_p}^{1...n}(p!)^{-1}(t_1!...t_n!)\{P^{j_1...j_p}_{j,j_1...j_p}\}(t_j+1)^{1/2}, \tag{4.58}$$

[2]Daqui em diante vamos omitir as linhas abaixo dos elementos pertencentes a $\underline{L_n}$, mas estará subtendido que se trata de elementos pertencentes a $\underline{L_n}$, a menos que se diga o contrário.

e

$$\{\mathbf{e}^j\} = \sum_{p}^{0...\infty} \sum_{j_1...j_p}^{1...n} (p!)^{-1}(t_1!...t_n!)\{P^{j,j_1...j_p}_{j_1...j_p}\}(t_j+1)^{1/2}. \tag{4.59}$$

As expressões (4.58-59) junto a operação de multiplicação (4.54) permitem encontrar os resultados:

$$[\{\mathbf{e}_j\},\{\mathbf{e}_k\}]_- = 0, \qquad [\{\mathbf{e}^j\},\{\mathbf{e}^k\}]_- = 0, \qquad [\{\mathbf{e}_j\},\{\mathbf{e}^k\}]_- = \delta^k_j \mathbf{1}_{\underline{L_n}}. \tag{4.60}$$

Isto mostra que $\underline{L_n}$ pode ser vista como uma extensão da álgebra L_n, uma vez que $\underline{L_n}$ inclui uma álgebra equivalente a L_n.

4.3 As Álgebras Geométricas no Espaço Quociente

Foi visto no capítulo 2 como é possível matematicamente tratar de álgebras quando relações nulas comparecem. Aqui veremos como a estrutura algébrica dos produtos $[,]_\pm$ pode ser mantida. Nesta perspectiva este produto será analisado no espaço quociente. Assim introduziremos, com base nos trabalhos de Dirac[15] um produto da forma

$$[a_1', a_2']' = [a_1, a_2]' + B_\alpha(a_1)'[a_\alpha, a_2]', \tag{4.61}$$

onde os a's são elementos da álgebra A, a' são as imagens de a pela aplicação quociente e $B_\alpha(a_1)$ é uma aplicação linear de A em A. O produto $[,]'$, do lado esquerdo da igualdade, é o produto associado à álgebra em questão definido no espaço quociente. Já o produto $[,]'$, do lado direito, é o produto da álgebra em questão tomando o homomorfismo, ou seja $[,]' = [,] + I$, com I sendo o ideal de A. O que será mostrado no que segue são as condições que deve-se ter para manter a estrutura algébrica dos produtos $[,]_\pm$ dentro do contexto de cada uma das álgebras geométricas.

Com intuito de clarificar as idéias expostas aqui vamos introduzir uma notação diferenciada. O produto usual entre elementos de A notaremos como $\bullet$, logo um ideal

$\mathcal{I}$ é ideal de A através de $\bullet$. Considere ainda que os produtos $[,]_+$ e $[,]_-$ sejam denotados por $\otimes$ e $\odot$, respectivamente. Os produtos entre elementos no espaço quociente serão identificados como $[,]'_+ \to \Box$ e $[,]'_- \to \triangle$.

4.3.1 Álgebra G_n no Espaço Quociente

Considere que $\mathcal{I}$ seja um ideal em G_n e que $G'_n = G_n/\mathcal{I}$ seja o espaço quociente. Conforme visto na seção (2.9) o homomorfismo natural $\phi : G_n \to G'_n$ preserva o produto $a \bullet b$, com a e $b \in G_n$, mas não temos a garantia que o produto $\otimes$ continue sendo satisfeito. Suponha, entretanto, que G'_n mantém a estrutura algébrica de G_n com seu produto dado por

$$a'_1 \Box a'_2 = (a_1 \otimes a_2)' + B_\alpha(a_1)' \bullet (a_\alpha \otimes a_2)', \tag{4.62}$$

onde $a \in G_n$ e $a' \in G'_n$. Os elementos a_α's são os geradores de $\mathcal{I}$, logo $a'_\alpha = 0$. Assim, uma condição de consistência que devemos ter é

$$(a_1 \otimes a_\alpha)' + B_\beta(a_1)' \bullet (a_\beta \otimes a_\alpha)' = 0. \tag{4.63}$$

Esta relação mostra que $(a_1 \otimes a_\alpha)' + B_\beta(a_1)' \bullet (a_\beta \otimes a_\alpha)'$ é um elemento de $\mathcal{I}$, logo podemos considerar (4.62) como um produto válido em G'_n.

Supondo que a matriz $||a_\beta \otimes a_\alpha||$ possua inversa o elemento $B_\beta(a_1)'$ pode ser computado usando a condição de consistência (4.63). Fazendo isto

$$B_\beta(a_1) = -(a_\beta \otimes a_\alpha)^{-1} \bullet a_1 \otimes a_\alpha. \tag{4.64}$$

Substituindo esta expressão em (4.62), segue que

$$a'_1 \Box a'_2 = (a_1 \otimes a_2)' - \{(a_\beta \otimes a_\alpha)^{-1} \bullet a_1 \otimes a_\alpha\}' \bullet (a_\beta \otimes a_2)', \tag{4.65}$$

ou ainda definindo $C^+_{\alpha\beta} \equiv (a_\beta \otimes a_\alpha)^{-1}$, tem-se:

$$a_1'\Box a_2' = (a_1 \otimes a_2)' - (a_1 \otimes a_\alpha \bullet C^+_{\alpha\beta} \bullet a_\beta \otimes a_2)', \tag{4.66}$$

que é assim a construção algébrica do produto associado a álgebra geométrica G_n definido no espaço quociente $G_n/\mathcal{I}$.

Torna-se conveniente também, observando as expressões anteriores, utilizar a notação $h(a) = a + \mathcal{I}$ para denotar o homomorfismo, isto deixará mais claro cada termo das expressões obtidas até aqui. Nesta notação temos para (4.66)

$$\begin{aligned} h(a_1)\Box h(a_2) &= h(a_1 \otimes a_2) - h(a_1 \otimes a_\alpha \bullet C^+_{\alpha\beta} \bullet a_\beta \otimes a_2) = \\ &= h(a_1 \otimes a_2 - a_1 \otimes a_\alpha \bullet C^+_{\alpha\beta} \bullet a_\beta \otimes a_2). \end{aligned} \tag{4.67}$$

É necessário, entretanto, mostrar que este produto preserva a estrutura algébrica, dadas por (4.3-5) em $G_n/\mathcal{I}$. Suponha, então que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam os vetores covariantes e contravariantes[3], como definidos no início do capítulo. Logo:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{u})\Box h(\mathbf{v}) &= h(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) - h(\mathbf{u} \otimes \mathbf{a}_\alpha \bullet C^+_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{a}_\beta \otimes \mathbf{v}) = \\ &= h(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{a}_\alpha \bullet C^+_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{a}_\beta \otimes \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{4.68}$$

onde os $\mathbf{a}_\alpha$'s representam os geradores do ideal e $C^+_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_\beta \otimes \mathbf{a}_\alpha)^{-1}$. Notamos nesta expressão que

$$\begin{aligned} h(\mathbf{u})\Box h(\mathbf{v}) &= h(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{a}_\alpha \bullet C^+_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{a}_\beta \otimes \mathbf{v}) = \\ &= h(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{u} \bullet C^+_{\beta\alpha} \bullet \mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_\beta) = \\ &= h(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_\beta \bullet C^+_{\beta\alpha} \bullet \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{u}) = \\ &= h(\mathbf{v})\Box h(\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{4.69}$$

[3]Nesta demonstração iremos representar os elementos geradores com letras em negrito, em conformidade com o que foi feito no início do capítulo.

Aqui usamos o fato de h ser um homomorfismo, $\bullet$ e $\otimes$ serem comutativos e $C^{-1}_{\beta\alpha}$ ser simétrica. Portanto, o produto $\Box$ satisfaz a relação de simetria exigida pela álgebra. Deste modo temos as relações em $G_n/\mathcal{I}$ sendo mantidas.

4.3.2 Álgebra L_n no Espaço Quociente

A generalização para a álgebra L_n é imediata. Seguindo de forma semelhante ao que foi feito anteriormente devemos ter um elemento b de L_n cuja imagem $h(b)$ pertence a L'_n, onde $L'_n = L_n/\mathcal{J}$, com $\mathcal{J}$ sendo um ideal de L_n. Vamos então considerar que em L'_n temos um produto dado por

$$b'_1 \triangle b'_2 = h(b_1 \odot b_2) + h(B_\alpha(b_1)) \bullet h(b_\alpha \odot b_2). \tag{4.70}$$

Assim, desde que a matriz $||b_\alpha \odot b_\beta||$ possua inversa a condição de consistência usada em (4.63) neste caso tem como resultado para $B_\beta(b_1)$

$$B_\beta(b_1) = -(b_\beta \odot b_\alpha)^{-1} \bullet b_1 \odot b_\alpha. \tag{4.71}$$

De modo que o produto (4.70) fica

$$h(b_1) \triangle h(b_2) = h(b_1 \odot b_2) - h(b_1 \odot b_\alpha \bullet C^{-}_{\alpha\beta} \bullet b_\beta \odot b_2), \tag{4.72}$$

onde $C^{-}_{\alpha\beta} \equiv (b_\beta \odot b_\alpha)^{-1}$.

Devemos agora investigar se a operação $\triangle$ satisfaz as operações exigidas para ser considerada uma álgebra L'_n. De forma semelhante a seção anterior, consideramos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como vetores covariantes e contravariantes[4]. Assim,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{u}) \triangle h(\mathbf{v}) &= h(\mathbf{u} \odot \mathbf{v}) - h(\mathbf{u} \odot \mathbf{b}_\alpha \bullet C^{-}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{b}_\beta \odot \mathbf{v}) = \\ &= h(\mathbf{u} \odot \mathbf{v} - \mathbf{u} \odot \mathbf{b}_\alpha \bullet C^{-}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{b}_\beta \odot \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{4.73}$$

[4] Assim como feito anteriormente também vamos denotar os geradores em negrito, para que a notação utilizada no início do capítulo permaneça inalterada.

onde os $\mathbf{b}_\alpha$'s representam os geradores do ideal e $C^{-}_{\alpha\beta} = (\mathbf{b}_\beta \odot \mathbf{b}_\alpha)^{-1}$. Fazendo uso de (4.46-48)

$$\begin{aligned} h(\mathbf{u}) \triangle h(\mathbf{v}) &= h((-\mathbf{v} \odot \mathbf{u}) - (-\mathbf{b}_\alpha \odot \mathbf{u}) \bullet (-C^{-}_{\beta\alpha}) \bullet (-\mathbf{v} \odot \mathbf{b}_\beta)) = \\ &= -h(\mathbf{v} \odot \mathbf{u} - \mathbf{v} \odot \mathbf{b}_\beta \bullet C^{-}_{\beta\alpha} \bullet \mathbf{b}_\alpha \odot \mathbf{u}) = \\ &= -h(\mathbf{v}) \triangle h(\mathbf{u}), \end{aligned} \tag{4.74}$$

em que usamos a anticomutatividade do produto (4.46-48), a comutatividade de $\bullet$ e a antissimetria da matriz $C^{-1}_{\beta\alpha}$. Assim, em $L_n/\mathcal{J}$ o produto $\triangle$ mantém a propriedade de ser antissimétrico pela troca dos entes.

Desta forma além das álgebras G_n e L_n, que permitem estudar a estrutura algébrica das variáveis discretas e contínuas associadas aos sistemas físicos, temos uma generalização aos casos onde relações nulas comparecem em nossos problemas. Conforme foi visto, relações nulas aparecem nas Lagrangianas ditas degeneradas, quando procura-se passar ao formalismo Hamiltoniano.

Agora observemos as expressões (3.68) e (3.69) do capítulo anterior e as expressões (4.67) e (4.72). A estrutura algébrica destas expressões são semelhantes. Considerando então que para sistemas cuja Lagrangiana é degenerada o parênteses de Poisson da formulação Hamiltoniana deve ser substituido pelo parênteses de Dirac (quando os vínculos são de segunda classe), sendo a estrutura algébrica dos parênteses de Dirac semelhante à estrutura do produto algébrico introduzido aqui, isto indica a possibilidade de trabalharmos algebricamente, pensando nos objetos, tais como as funções vistas anteriormente, como realizações das álgebras e desta forma o desenvolvimento que foi realizado neste capítulo pode ser aplicado para os sistemas com Lagrangianas degeneradas.

4.4 As Álgebras G_n e L_n - Generalizações

Os objetos algébricos construidos neste capítulo podem ser generalizados de modo a obtermos tensores de qualquer espécie; para tanto considera-se o produto direto das álgebras, $G_n \times L_n$. Nesta álgebra os geradores são elementos formados pelos $\{\mathbf{e}_j\}$'s e $(\mathbf{e}_j)$'s, satisfazendo as regras de multiplicação das álgebras G_n e L_n, com os elementos $\{\mathbf{e}_j\}$'s e $(\mathbf{e}_j)$'s comutando entre si.

Schönberg em seus trabalhos mostrou ainda a possibilidade de construção de um espaço 2n-dimensional, denotado por S_{2n}. Neste espaço, G_n pode ser vista como a álgebra de Clifford e L_n como a álgebra simplética. Pode-se analisar G_n como sendo uma álgebra de Clifford introduzindo os elementos[5] $\gamma_j^{(\pm)} = (\mathbf{e}_j) \pm g_{jk}(\mathbf{e}^k)$, com g_{jk} sendo o tensor métrico, pois:

$$\begin{aligned} \gamma_j^{(\pm)}\gamma_k^{(\pm)} &= [(\mathbf{e}_j) \pm g_{jl}(\mathbf{e}^l)][(\mathbf{e}_k) \pm g_{km}(\mathbf{e}^m)] = \\ &= (\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k) \pm g_{km}(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^m) \pm g_{jl}(\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}_k) \pm g_{jl}g_{km}(\mathbf{e}^l)(\mathbf{e}^m), \end{aligned} \tag{4.75}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(\pm)}\gamma_j^{(\pm)} &= [(\mathbf{e}_k) \pm g_{km}(\mathbf{e}^m)][(\mathbf{e}_j) \pm g_{jl}(\mathbf{e}^l)] = \\ &= (.\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j) \pm g_{jl}(\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}^l) \pm g_{km}(\mathbf{e}^m)(\mathbf{e}_j) \pm g_{km}g_{jl}(\mathbf{e}^m)(\mathbf{e}^l). \end{aligned} \tag{4.76}$$

Logo,

$$\gamma_j^{(\pm)}\gamma_k^{(\pm)} + \gamma_k^{(\pm)}\gamma_j^{(\pm)} = \pm 2 g_{jk}\mathbf{1}_{G_n} \tag{4.77}$$

e

$$\gamma_j^{(+)}\gamma_k^{(-)} + \gamma_k^{(-)}\gamma_j^{(+)} = 0. \tag{4.78}$$

Portanto, os $\gamma_j^{(+)}$'s geram uma álgebra de Clifford C_n^g correspondente a métrica $g_{jk}x^jx^k$, e os $\gamma_j^{(-)}$'s geram uma álgebra de Clifford C_n^{-g} correspondente a métrica $-g_{jk}x^jx^k$. Como os $\gamma_j^{(+)}$'s e $\gamma_j^{(-)}$'s são geradores de G_n linearmente independentes,

[5] Sinalizamos que nesta expressão não há soma nos índices contraídos, ou seja, k é um valor fixo.

então as expressões (4.77-78) mostram que G_n é a álgebra de Clifford do espaço pseudo-euclidiano 2n-dimensional com métrica $g_{jk}(x^j x^k - x^{n+j} x^{n+k})$. Nota-se também que a álgebra de Dirac das matrizes γ é isomorfa a $C_4[2]$.

De forma semelhante é possível também introduzir um ente pertencente à L_n da forma[6] $\lambda_j^{(\pm)} = \{\mathbf{e}_j\} \pm f_{jk}\{\mathbf{e}^k\}$, em que f_{jk} é a métrica associada. Usando as operações para os geradores de L_n, procedendo de forma semelhante ao que se fez anteriormente obtém-se:

$$\lambda_j^{(\pm)}\lambda_k^{(\pm)} - \lambda_k^{(\pm)}\lambda_j^{(\pm)} = \pm 2 f_{jk}\mathbf{1}_{K_n} \tag{4.79}$$

e

$$\lambda_j^{(+)}\lambda_k^{(-)} - \lambda_k^{(-)}\lambda_j^{(+)} = 0, \tag{4.80}$$

dando origem a uma álgebra K_n gerada pelos λ's com $\mathbf{1}_{K_n}$ sendo a unidade. Os $\lambda_j^{(+)}$'s geram uma álgebra simplética K_n^f associada aos f_{jk}. Já os $\lambda_j^{(-)}$'s geram uma álgebra simplética K_n^{-f} associada aos $-f_{jk}$.

O espaço 2n-dimensional S_{2n} é uma soma direta dos espaços associados aos $\mathbf{v}$'s e $\mathbf{u}$'s de A_n. No espaço S_{2n} denota-se seus vetores por $\mathbf{w}$ e assume-se que $\{w^1, w^2, ..., w^n\}$ são componentes tipo v^j e $\{w^{n+1}, w^{n+2}, ..., w^{2n}\}$ são componentes tipo u_j. Assim, quando A_n é o espaço de configuração de um sistema com n graus de liberdade, seu espaço de fase é semelhante ao S_{2n}.

Introduzindo-se em S_{2n} um produto interno dos vetores $\mathbf{w}$ dado por

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)_+ = \frac{1}{2}(\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle), \tag{4.81}$$

tem-se uma métrica pseudo-euclidiana em S_{2n}. Pode-se também introduzir um produto simplético dos $\mathbf{w}$'s, dado por

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)_- = \frac{1}{2}(\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2\rangle - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle), \tag{4.82}$$

[6] Nesta expressão também não há soma implícita, novamente k está fixo.

que dá uma geometria simplética em S_{2n}.

A possibilidade colocada neste trabalho de inserir um tratamento das relações nulas no contexto das álgebras geométricas, permite-nos introduzir um espaço S'_{2n} em que um subconjunto de seus elementos satisfazem relações nulas. Neste sentido G'_n e L'_n poderiam ser entendidas como as álgebras de Clifford e simplética degeneradas, respectivamente.

Para tal construção consideremos funções definidas sobre o espaço de fase; neste caso, conforme discutido, haverá um subconjunto destas funções que satisfazem relações nulas sobre uma certa região do espaço de fase ($f = 0$); tal região é referida como sendo a *superfície dos vínculos*. Sendo k_j uma função qualquer do espaço de fase e f_i uma função definida na superfície dos vínculos observa-se que $k_j.f_i \approx 0$, com "." sendo o produto usual de funções.

Em termos algébricos consideramos $\bullet$ o produto usual em S_{2n} e que as componentes de $\mathbf{w}$ dependem do ponto no espaço de fase, ou seja, $w_i = w_i(q,p)$. Neste caso, para os entes correspondentes às funções definidas sobre a superfície dos vínculos, temos que as componentes (ou combinações destas) w_j são nulas e portanto o produto usual entre alguns elementos dá $w_i \bullet w_j \approx 0$, em que o sinal $\approx$ refere-se à conexão que estamos fazendo entre a álgebra S_{2n} com o espaço de fase quando há vínculos presentes. Neste contexto alguns w_i pertencem ao ideal em S_{2n} com respeito a operação $\bullet$, e usaremos a notação w_α para os geradores deste ideal $\mathcal{I}$ de S_{2n}. Tomando o espaço quociente $S'_{2n} = S_{2n}/\mathcal{I}$ definimos o homomorfismo natural $h_1 : S_{2n} \to S'_{2n}$ tal que $h_1(w_i) = w_i + \mathcal{I}$. Segue então que o homomorfismo preserva a estrutura algébrica pela operação $\bullet$, ou seja

$$h_1(w_i) \bullet h_1(w_j) = (w_i + \mathcal{I}) \bullet (w_j + \mathcal{I}) = w_i \bullet w_j + \mathcal{I} = h_1(w_i \bullet w_j). \tag{4.83}$$

Assim S'_{2n} é uma álgebra sobre $\bullet$. Agora nosso objetivo é dar uma estrutura algébrica a S'_{2n} semelhante a estrutura dada para G'_n e L'_n. Neste caso devemos considerar os produtos $\otimes$ e $\odot$, e também $\Box$ e $\triangle$: um gerando uma álgebra de Clifford degenerada e outro gerando uma álgebra simplética degenerada. Com esses produtos definimos então um produto em S'_{2n} da forma:

$$h_1(w_i)\Box h_1(w_j) \equiv h_1(w_i \otimes w_j) + h_1(B_\alpha(w_i)) \bullet h_1(w_\alpha \otimes w_j), \tag{4.84}$$

(o mesmo pode ser feito para $\odot$ e $\triangle$) em que w_α denota os elementos pertencentes à superfície dos vínculos no espaço de fase e a construção segue paralelamente ao apresentado nos casos de G'_n e L'_n.

Capítulo 5

Álgebras Geométricas e a Quantização com Vínculos

As apresentações realizadas nos capítulos 3 e 4 capacitam-nos investigar como as quantidades físicas, representadas aqui por funcionais, relacionam-se em termos dos produtos definidos sobre a álgebra G_n e L_n, quando vínculos estão presentes. Esta investigação, uma vez concluída, possibilita a quantização dos campos seguindo a regra[12][13][15] [32][40]

$$\{,\}^*_\pm \rightarrow [,]_\pm, \tag{5.1}$$

com $\{,\}^*_\pm$ sendo o parênteses de Dirac simétrico (antissimétrico) e $[,]_\pm$ sendo os comutadores (anticomutadores).

Apresentamos, nas próximas seções, dois casos um não relativístico e outro relativístico. Para o caso não relativístico será apresentado o campo DKP Galileano e no caso relativístico o campo de Rarita-Schwinger (não massivo). Concluimos o capítulo discutido rapidamente sobre o formalismo da segunda quantização.

5.1 Caso Não Relativístico

5.1.1 Campo Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Galileano

A equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) aparece[41][42][43] na teoria relativística como uma equação de primeira ordem para descrever bósons massivos escalares e vetoriais; neste contexto ela se apresenta como equação invariante pelo grupo de Lorentz. Foi, no entanto, demonstrado que usando a formulação geométrica conhecida como covarância Galileana é possível obter-se uma versão da equação DKP não relativística capaz de descrever partículas de spin zero e spin 1. Essa formulação covariante Galileana é baseada em um espaço pentadimensional introduzido por Takahashi et al [44] e considera o seguinte: as transformações de Galilei são transformações espaço-temporais definidas por[8][46]

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{v}t + \mathbf{d} \tag{5.2}$$

e

$$t \rightarrow t' = t + b, \tag{5.3}$$

onde $\mathbf{R}$ é a matriz de rotação no espaço Euclidiano, $\mathbf{v}$ é a velocidade relativa entre os referenciais, $\mathbf{d}$ é a translação Euclidiana e b é a translação temporal. Das transformações (5.2) e (5.3) nota-se, entretanto, que a lagrangiana associada com uma partícula livre $L = \frac{1}{2}m(\frac{d\mathbf{x}}{dt})^2$ não é invariante pelas transformações (5.2-3). Tal invariância pode ser alcançada considerando mais uma dimensão no espaço de configuração e substituindo a lagrangiana através de

$$L \rightarrow L - m\frac{ds}{dt}, \tag{5.4}$$

com o parâmetro extra s, cuja dimensão é dada pela distância ao quadrado por unidade de tempo, transformando-se como

$$s \to s' = s - (\mathbf{Rx}).\mathbf{v} + \frac{1}{2}v^2 t + const. \tag{5.5}$$

Para obter-se o formalismo da covariância Galileana considera-se então esse espaço estendido pentadimensional $(4+1)$, cujas coordenadas são $x = (x^\mu) = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = (\mathbf{x}, t, s)$, com a métrica sendo

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Das transformações (5.2), (5.3) e (5.5) chega-se ao produto escalar invariante

$$< x|y >= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \sum_{i=1}^{3} x^i y^i - x^4 y^5 - x^5 y^4, \tag{5.7}$$

onde a métrica é dada por (5.6), os índices gregos $\mu, \nu, ...$ variam de 1 a 5 e os índices latinos variam de 1 a 3.

Neste espaço o penta-momento é

$$p^\mu = (\mathbf{p}, p^4, p^5) = (\mathbf{p}, mv, E/v) \tag{5.8}$$

e o penta-gradiente é

$$\partial_\mu = (\nabla, \partial_t, \partial_s). \tag{5.9}$$

Fazendo uso da métrica (5.6) pode-se "levantar" ou "abaixar" os índices dos vetores tornando-os

$$x_\mu = (\mathbf{x}, -s, -t), \tag{5.10}$$

$$\partial^\mu = (\nabla, -\partial_s, -\partial_t), \tag{5.11}$$

$$p_\mu = (\mathbf{p}, -E, -m), \tag{5.12}$$

em que se nota, a menos de uma constante, o acordo de (5.9) e (5.12) com a definição do operador quântico, ou seja

$$\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu. \tag{5.13}$$

Com esse desenvolvimento a densidade lagrangiana que descreve o campo DKP é expressa como[46]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\beta^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\Psi})\beta^\mu\Psi + K\bar{\Psi}\Psi, \tag{5.14}$$

onde $\mu, \nu = 1, ..., 5$, K é uma constante associada à massa do campo Ψ, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\eta$ é o campo adjunto, com $\eta = (\beta^4 + \beta^5)^2 + \mathbf{1}$ e as matrizes β^μ são tais que

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho + \beta^\rho\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\rho + g^{\rho\nu}\beta^\mu. \tag{5.15}$$

As representações irredutíveis das matrizes β são uma de dimensão 6 que descreve partículas de spin zero e outra de dimensão 15 que descreve partículas de spin 1. Neste trabalho, vamos considerar o caso de spin zero; assim os entes Ψ tomam a forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \\ \psi_5(x) \\ \psi_6(x) \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

em que o argumento $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Usando operadores de projeção[45] Ferreira indica como é possível selecionar o setor escalar (spin zero) associado ao campo DKP Galileano[46]. Esta seleção do setor escalar da teoria permite reescrever a densidade lagrangiana do sistema como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\psi^{*\mu}\partial_\mu\psi_6 - \psi_6^*\partial_\mu\psi^\mu - (\partial_\mu\psi^{*\mu})\psi_6 + (\partial_\mu\psi_6^*)\psi^\mu] + K(\psi^{*\mu}\psi_\mu - \psi_6^*\psi_6). \quad (5.17)$$

Os momentos conjugados aos campos são:

$$\Pi_i = 0, \qquad \Pi_4 = -\frac{1}{2}\psi_6^*, \qquad \Pi_5 = 0, \qquad \Pi_6 = \frac{1}{2}\psi^{*4}, \quad (5.18)$$

e

$$\Pi_i^* = 0, \qquad \Pi_4^* = -\frac{1}{2}\psi_6, \qquad \Pi_5^* = 0, \qquad \Pi_6^* = \frac{1}{2}\psi^4, \quad (5.19)$$

com $i = 1, 2, 3$.

De posse destes resultados obtemos a seguinte densidade hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \frac{1}{2}[&-\psi^{*i}\partial_i\psi_6 - \psi^{*5}\partial_5\psi_6 + \psi_6^*\partial_i\psi^i + \psi_6^*\partial_5\psi^5 - (\partial_i\psi^{*i})\psi_6 - (\partial_5\psi^{*5})\psi_6 + \\ &+ (\partial_i\psi_6^*)\psi^i + (\partial_5\psi_6^*)\psi^5] - K(\psi^{*\mu}\psi_\mu - \psi_6^*\psi_6)\end{aligned} \quad (5.20)$$

e os vínculos primários da teoria são

$$\Phi_1^{(1)} = \Pi_6 - \frac{1}{2}\psi^{*4}, \qquad \Phi_2^{(1)} = \Pi_4 + \frac{1}{2}\psi_6^* \qquad \Phi_3^{(1)} = \Pi_6^* - \frac{1}{2}\psi^4 \qquad \Phi_4^{(1)} = \Pi_4^* + \frac{1}{2}\psi_6 \quad (5.21)$$

e

$$\Phi_{5i}^{(1)} = \Pi_i^*, \qquad \Phi_{6i}^{(1)} = \Pi_i \qquad \Phi_7^{(1)} = \Pi_5^*, \qquad \Phi_8^{(1)} = \Pi_5, \quad (5.22)$$

que podem ser recombinados e serem expressos como

$$\Phi_1^{(1)} = \Pi_6 - \frac{1}{2}\psi^{*4}, \qquad \Phi_2^{(1)} = \Pi_4 + \frac{1}{2}\psi_6^* \qquad \Phi_3^{(1)} = \Pi_6^* - \frac{1}{2}\psi^4 \qquad \Phi_4^{(1)} = \Pi_4^* + \frac{1}{2}\psi_6 \quad (5.23)$$

e

$$\Phi_5^{(1)} = \Pi_i^* + \Pi_5^*, \qquad \Phi_6^{(1)} = \Pi_i + \Pi_5, \tag{5.24}$$

onde os termos com índice i representam uma soma dos Π's de 1 a 3.

Os vínculos (5.23) são de segunda classe, enquanto os vínculos (5.24) são de primeira classe. Seguindo o procedimento de Dirac teremos a densidade hamiltoniana estendida

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H} + \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)} \tag{5.25}$$

e a condição de consistência quando aplicada sobre os vínculos (5.24) geram os vínculos secundários

$$\Phi_1^{(2)} = \partial_i\psi_6 + K\psi_i + \partial_5\psi_6 + K\psi_5, \qquad \Phi_2^{(2)} = \partial_i\psi_6^* + K\psi_i^* + \partial_5\psi_6^* + K\psi_5^*. \tag{5.26}$$

As expressões (5.23), (5.24) e (5.26) formam um conjunto de vínculos de segunda classe, de forma que o procedimento para encontrar mais vínculos é encerrado. Reordenando estes termos tem-se[46]

$$\tilde{\Phi}_1 = \Pi_6 - \frac{1}{2}\psi^*{}_4, \qquad \tilde{\Phi}_2 = \Pi_4 + \frac{1}{2}\psi^*{}_6, \qquad \tilde{\Phi}_7 = \Pi^*{}_6 - \frac{1}{2}\psi_4, \qquad \tilde{\Phi}_8 = \Pi^*{}_4 + \frac{1}{2}\psi_6, \tag{5.27}$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \Pi_i + \Pi_5, \qquad \tilde{\Phi}_6 = \partial_i\psi_6 + k\psi_i + \partial_5\psi_6 + k\psi_5, \tag{5.28}$$

$$\tilde{\Phi}_4 = \Pi^*{}_i + \Pi^*{}_5, \qquad \tilde{\Phi}_5 = \partial_i\psi^*{}_6 + k\psi^*{}_i + \partial_5\psi^*{}_6 + k\psi^*{}_5. \tag{5.29}$$

Os vínculos aqui foram propositadamente distribuidos da forma acima porque vamos utilizar o procedimento descrito no apêndice (vide Apêndice C). Vamos ainda considerar a notação $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} = \{\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_7, \tilde{\Phi}_8\}$, $\{\rho_1, \rho_2\} = \{\tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_6\}$ e $\{\omega_1, \omega_2\} = \{\tilde{\Phi}_4, \tilde{\Phi}_5\}$ para o conjunto completo dos vínculos.

Os vínculos anteriormente explicitado formam, no desenvolvimento algébrico, o ideal da álgebra, que foram aqui divididos de forma a facilitar os cálculos que seguem. Na discussão sobre parênteses de Dirac vimos que se muitos vínculos estão presentes, o cálculo da matriz inversa associada ao parênteses de Poisson destes vínculos torna-se inviável, o que pode, em princípio, impossibilitar o uso do parênteses de Dirac no procedimento de quantização. No entanto, mostraremos, logo em seguida, que tal impedimento pode ser contornado pelo uso de propriedades algébricas. Com o objetivo de explicitar este procedimento, vamos considerar um caso geral, onde temos funcionais, pensados como entes da álgebra, e sobre esta álgebra definiremos um produto adequado para realizarmos a quantização do sistema.

Sejam $Q(\Psi,\Pi)$ e $Y(\Psi,\Pi)$ funcionais definidos sobre a álgebra L_n. Consideremos que em L_n temos o produto

$$Q(\Psi,\Pi)\odot Y(\Psi,\Pi)=\{Q(\Psi,\Pi),Y(\Psi,\Pi)\}_-=\int(\frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\Psi}\frac{\delta\mathcal{Y}}{\delta\Pi}-\frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\Pi}\frac{\delta\mathcal{Y}}{\delta\Psi})(dx_i) \tag{5.30}$$

entre os funcionais.

Entre os funcionais também podemos definir o produto usual destes como

$$(Q\bullet Y)(\Psi,\Pi)=Q(\Psi,\Pi)\bullet Y(\Psi,\Pi). \tag{5.31}$$

Em termos deste produto notamos que em L_n temos um ideal J cujos elementos são da forma

$$J=\{Q(\Psi,\Pi)\bullet\tilde{\Phi}_i(\Psi,\Pi)/Q(\Psi,\Pi)\in L_n\}, \tag{5.32}$$

com $i=1,...,8$ e $\tilde{\Phi}_i(\Psi,\Pi)$ sendo os vínculos (5.16-18). Desta forma, o conjunto de elementos sobre o quociente L_n/J são

$$L_n/J=\{Q+J/Q\in L_n\}=\{Q+Y^i\tilde{\Phi}_i/Q,Y^i\in L_n\}. \tag{5.33}$$

As variáveis envolvidas em nosso problema são 24 no total, onde 12 destas são as componentes ψ_i e ψ_i^* e as outras 12 são os momentos conjugados Π_j e Π_j^*. Como temos 8 relações de vínculos, conhecendo-se 16 variáveis do sistema as outras podem ser encontradas usando estas relações. Na região onde os vínculos são válidos os funcionais aí definidos formam um conjunto de elementos que dependem de 16 quantidades (Ψ, Π),

$$\Lambda = \{Q(\Psi, \Pi)\}, \tag{5.34}$$

em que Ψ e Π representam 16 quantidades, podendo ser as componentes do campo ψ_i ou conjugados ψ_i^*, bem como momentos Π_i ou seus conjugados Π_i^*.

O homomorfismo $h_1 : L_n \to \Lambda$, com respeito a $\bullet$, é obtido considerando um elemento $Q(\Psi, \Pi)$, dependente de todas as 24 quantidades ψ_i, Π_i, ψ_i^* e Π_i^* e usando as relações (5.16-18) o que dá como resultado um elemento $Q(\Psi, \Pi)$, dependente de 16 quantidades ψ_i, Π_i, ψ_i^* e Π_i^*, ou seja

$$h_1 : Q(\psi_i, \psi_i^*, \Pi_i, \Pi_i^*) \to Q(\psi_\kappa, \psi_\kappa^*, \Pi_\kappa, \Pi_\kappa^*), \tag{5.35}$$

onde diferenciamos os índices para denotar que algumas das 24 variáveis foram substituídas usando os vínculos.

Consideremos ainda o homomorfismo $h_2 : L_n \to L_n/J$, que como visto

$$h_2 : Q(\Psi, \Pi) \to Q(\Psi, \Pi) + J. \tag{5.36}$$

Sabemos que o núcleo de h_1 é J, uma vez que seus elementos devem se anular pela aplicação h_1. Além disso, vemos que J também é o núcleo de h_2, o que nos permite inferir, a partir do teorema fundamental do homomorfismo, que Λ e L_n/J são isomorfos com respeito a $\bullet$, ou seja

$$f(Q(\Psi, \Pi) + J) = Q(\psi_\kappa, \psi_\kappa^*, \Pi_\kappa, \Pi_\kappa^*), \tag{5.37}$$

com f sendo o isomorfismo $f : L_n/J \rightarrow \Lambda$.

O passo seguinte, em nossa formulação, é dar a L_n/J uma estrutura de álgebra L_n. Isto, segundo nosso desenvolvimento (vide cap. 4), pode ser dado por

$$Q'\triangle Y' = (Q \odot Y - Q \odot \tilde{\Phi}_i \bullet \Gamma^{-1}_{ij} \bullet \tilde{\Phi}_j \odot Y)', \tag{5.38}$$

com $Q', Y' \in L_n/J$, $Q, Y \in L_n$, $i, j = 1, ..., 8$ e Γ^{-1}_{ij} sendo a matriz do produto $\odot$ entre os vínculos.

Verifica-se através da discussão realizada na seção (4.3.2) que (5.38) satisfaz as propriedades da álgebra L_n. Note, por exemplo, que usando a anticomutatividade de $\odot$ e a comutatividade de $\bullet$ temos

$$\begin{aligned} Q'\triangle Y' &= (Q \odot Y - Q \odot \tilde{\Phi}_i \bullet \Gamma^{-1}_{ij} \bullet \tilde{\Phi}_j \odot Y)' = \\ &= ((-Y \odot Q) - (-\tilde{\Phi}_i \odot Q) \bullet (-\Gamma^{-1}_{ji}) \bullet (-Y \odot \tilde{\Phi}_j))' = \\ &= -(Y \odot Q - Y \odot \tilde{\Phi}_j \bullet \Gamma^{-1}_{ji} \bullet \tilde{\Phi}_i \odot Q)' = \\ &= -Y'\triangle Q', \end{aligned} \tag{5.39}$$

onde a antissimetria da matriz Γ^{-1}_{ij} foi utilizada.

Assim, o produto $\triangle$ é um produto anticomutativo e possibilita introduzir a estrutura de L_n.

O campo tratado aqui tem, como visto, muitos vínculos e isto torna o cálculo do produto entre os elementos no quociente longo. Entretanto, os parênteses de Dirac possuem uma propriedade interessante que podemos usar e que se encontra desenvolvida algebricamente no apêndice (vide Apêndice C).

Agora usando a divisão feita por nós dos vínculos percebemos que os θ's formam um ideal J_1 em L_n, logo sobre L_n/J_1 tem-se

$$g_1(Q)\triangle g_1(Y) = g_1(Q \odot Y - Q \odot \theta_m \bullet A^{-1}_{mn} \bullet \theta_n \odot Y), \tag{5.40}$$

onde $g_1 : L_n \rightarrow L_n/J_1$ e a matriz $A_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é

$$A_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\theta_m \odot \theta_n|| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.41}$$

cuja inversa é

$$A^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\theta_m \odot \theta_n||^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{5.42}$$

A expressão (5.40) pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} g_1(Q)\triangle g_1(Y) = g_1(&Q\odot Y - Q\odot\theta_1\bullet\theta_4\odot Y + Q\odot\theta_2\bullet\theta_3\odot Y - \\ &- Q\odot\theta_3\bullet\theta_2\odot Y + Q\odot\theta_4\bullet\theta_1\odot Y). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Novamente, ressaltamos que este produto possui as mesmas propriedades algébricas do produto definido sobre L_n, e isto verifica-se de forma semelhante ao que fizemos em (5.39). Logo, L_n/J_1 satisfaz os requesitos necessários para ser uma álgebra geométrica L'_n.

O conjunto de vínculos ρ's formam um ideal J_2 em L_n/J_1 através da aplicação $L_n \to L_n/J_1$. Podemos então considerar o quociente $(L_n/J_1)/J_2$ e considerar a operação denotada por $\diamond$ e dada pela expressão

$$g_2(Q)\diamond g_2(Y) = g_2(Q\triangle Y - Q\triangle\rho_m\bullet B^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})\bullet\rho_n\triangle Y), \tag{5.44}$$

em que $g_2 : L_n/J_1 \to (L_n/J_1)/J_2$ e $B^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ é a matriz inversa de $B_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ formada pelo produto dos vínculos ρ, ou seja, explicitamente

$$B_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\rho_m \odot \rho_n|| = \begin{pmatrix} 0 & -2k \\ 2k & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{5.45}$$

e

$$B_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{-1} = ||\rho_m \odot \rho_n||^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2k} \\ -\dfrac{1}{2k} & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{5.46}$$

Assim, temos

$$g_2(Q) \diamond g_2(Y) = g_2(Q \triangle Y - \frac{1}{2K} Q \triangle \rho_1 \bullet \rho_2 \triangle Y + \frac{1}{2K} Q \triangle \rho_2 \bullet \rho_1 \triangle Y). \tag{5.47}$$

Esta operação está consistente com o fato de que ele tem que satisfazer as mesmas propriedades da L_n. Segundo nossas considerações em (5.43) $\triangle$ é anticomutativo e desta forma em $Q \triangle Y - \frac{1}{2K} Q \triangle \rho_1 \bullet \rho_2 \triangle Y + \frac{1}{2K} Q \triangle \rho_2 \bullet \rho_1 \triangle Y$ os elementos, termo a termo, anticomutam, ou seja,

$$\begin{aligned} g_2(Q) \diamond g_2(Y) &= g_2((-Y \triangle Q) - (-\rho_1 \triangle Q) \bullet (-\frac{1}{2K} Y \triangle \rho_2) + \\ &+ (-\rho_2 \triangle Q) \bullet (-\frac{1}{2K} Y \triangle \rho_1) = \\ &= -g_2(Y \triangle Q - \frac{1}{2K} Y \triangle \rho_2 \bullet \rho_1 \triangle Q + \\ &+ \frac{1}{2K} Y \triangle \rho_1 \bullet \rho_2 \triangle Q = -g_2(Y) \diamond g_2(Q). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Dessa maneira encontra-se que $\diamond$ é um produto que satisfaz as condições exigidas pela álgebra.

Vamos a nosso último estágio, os vínculos ω. Considerando a aplicação $g_3 : L_n/J_1 \to (L_n/J_1)/J_2$ sobre os ω's notamos que estes formam um ideal J_3 em $(L_n/J_1)/J_2$. Assim, construimos o quociente $((L_n/J_1)/J_2)/J_3$ e definimos a operação

$$g_3(Q) \star g_3(Y) = g_3(Q \diamond Y - Q \diamond \omega_m \bullet C^{-1}_{mn} \bullet \omega_n \diamond Y), \tag{5.49}$$

com a matriz $C_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e sua inversa sendo

$$C_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\omega_m \odot \omega_n|| = \begin{pmatrix} 0 & -2k \\ 2k & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.50}$$

$$C^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\omega_m \odot \omega_n||^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2k} \\ -\dfrac{1}{2k} & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.51}$$

o que nos conduz à expressão

$$g_3(Q) \star g_3(Y) = g_3(Q \diamond Y - \frac{1}{2K} Q \diamond \omega_1 \bullet \omega_2 \diamond Y + \frac{1}{2K} Q \diamond \omega_2 \bullet \omega_1 \diamond Y). \tag{5.52}$$

Conforme observado no apêndice L_n/J é isomorfo a $((L_n/J_1)/J_2)/J_3$, uma vez que o núcleo da aplicação $g_3 \circ g_2 \circ g_1 : L_n \to ((L_n/J_1)/J_2)/J_3$ é J, de modo que pelo teorema fundamental garantimos o isomorfismo. Vale lembrar também que $\star$ é um produto genuíno de $((L_n/J_1)/J_2)/J_3$, e a prova pode ser dada usando a anticomutatividade mostrada em (5.48) para o produto $\diamond$, através de um procedimento semelhante ao que foi realizado naquela expressão.

A partir destes resultados obtemos as expressões:

$$\begin{aligned} g_1(\psi_\alpha(\mathbf{x},t)) \triangle g_1(\Pi_\beta(\mathbf{y},t)) &= g_1(\delta_{\alpha\beta} - \psi_\alpha(\mathbf{x},t) \odot \theta_1 \bullet A^{-1}_{14} \bullet \theta_4 \odot \Pi_\beta(\mathbf{y},t) - \\ &- \psi_\alpha(\mathbf{x},t) \odot \theta_2 \bullet A^{-1}_{23} \bullet \theta_3 \odot \Pi_\beta(\mathbf{y},t) - \\ &- \psi_\alpha(\mathbf{x},t) \odot \theta_3 \bullet A^{-1}_{32} \bullet \theta_2 \odot \Pi_\beta(\mathbf{y},t) - \\ &- \psi_\alpha(\mathbf{x},t) \odot \theta_4 \bullet A^{-1}_{41} \bullet \theta_1 \odot \Pi_\beta(\mathbf{y},t)) = \\ &= g_1((\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 6}\delta_{6\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 4}\delta_{4\beta})(\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})); \end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned} g_2(\psi_\alpha(\mathbf{x},t)) \diamond g_2(\Pi_\beta(\mathbf{y},t)) &= g_2((\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 6}\delta_{6\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 4}\delta_{4\beta} - \\ &- \frac{1}{2}(\delta_{\alpha i}\delta_{i\beta} + \delta_{\alpha i}\delta_{5\beta} + \delta_{\alpha 5}\delta_{i\beta} + \delta_{\alpha 5}\delta_{5\beta}))(\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})); \end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned} g_3(\psi_\alpha(\mathbf{x},t)) \star g_3(\Pi_\beta(\mathbf{y},t)) &= g_3(\psi_\alpha(\mathbf{x},t) \diamond \Pi_\beta(\mathbf{y},t)) = \\ &= g_3((\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 6}\delta_{6\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 4}\delta_{4\beta} - \\ &- \frac{1}{2}(\delta_{\alpha i}\delta_{i\beta} + \delta_{\alpha i}\delta_{5\beta} + \delta_{\alpha 5}\delta_{i\beta} + \delta_{\alpha 5}\delta_{5\beta}))(\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})). \end{aligned} \tag{5.55}$$

$$
\begin{aligned}
g_1(\psi_\alpha(\mathbf{x},t))\triangle g_1(\psi_\beta(\mathbf{y},t)) &= g_1(\psi_\alpha(\mathbf{x},t)\odot\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\odot\theta_m\bullet A^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})\bullet\theta_n\odot\psi_\beta(\mathbf{y},t)) = \\
&= g_1(-\psi_\alpha(\mathbf{x},t)\odot\theta_1\bullet A^{-1}_{14}\bullet\theta_4\odot\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \\
&- \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\odot\theta_2\bullet A^{-1}_{23}\bullet\theta_3\odot\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \\
&- \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\odot\theta_3\bullet A^{-1}_{32}\bullet\theta_2\odot\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \\
&- \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\odot\theta_4\bullet A^{-1}_{41}\bullet\theta_1\odot\psi_\beta(\mathbf{y},t)) = 0;
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2(\psi_\alpha(\mathbf{x},t))\diamond g_2(\psi_\beta(\mathbf{y},t)) &= g_2(\psi_\alpha(\mathbf{x},t)\triangle\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \\
&- \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\triangle\rho_1\bullet B^{-1}_{12}\bullet\rho_2\triangle\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \\
&- \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\triangle\rho_2\bullet B^{-1}_{21}\bullet\rho_1\triangle\psi_\beta(\mathbf{y},t)) = 0;
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

$$
\begin{aligned}
g_3(\psi_\alpha(\mathbf{x},t))\star g_3(\psi_\beta(\mathbf{y},t)) &= g_3(\psi_\alpha(\mathbf{x},t)\diamond\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \\
&- \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\diamond\omega_1\bullet C^{-1}_{12}\bullet\omega_2\diamond\psi_\beta(\mathbf{y},t) - \\
&- \psi_\alpha(\mathbf{x},t)\diamond\omega_2\bullet C^{-1}_{21}\bullet\omega_1\diamond\psi_\beta(\mathbf{y},t)) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

onde nas duas últimas expressões usamos o fato que ψ_α se anula quando realizamos os respectivos produtos deste com ρ_2 e com os ω_i's $(i = 1, 2)$.

Se procedermos de forma semelhante para os momentos conjugados aos campos obtemos também:

$$
g_3(\Pi_\alpha(\mathbf{x},t))\star g_3(\Pi_\beta(\mathbf{y},t)) = 0. \tag{5.59}
$$

Para os campos conjugados ψ_i^* e os momentos conjugados Π^* podemos utilizar as relações de vínculos. Fazendo isto encontraremos que as relações serão todas nulas. Assim, seguindo o procedimento de quantização obtemos

$$
\begin{aligned}
[\psi_\alpha(\mathbf{x},t), \Pi_\beta(\mathbf{y},t)]_- &= i\hbar(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 6}\delta_{6\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha 4}\delta_{4\beta} - \\
&- \frac{1}{2}(\delta_{\alpha i}\delta_{i\beta} + \delta_{\alpha i}\delta_{5\beta} + \delta_{\alpha 5}\delta_{i\beta} + \delta_{\alpha 5}\delta_{5\beta}))\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

com os outros comutadores sendo todos nulos, o que se encontra em acordo com a referência [46], a menos dos fatores onde o índice 5 aparece, o que é justificado em virtude de nosso desenvolvimento usar a teoria covariante por Galilei.

5.2 Caso Relativístico

5.2.1 Campo Rarita-Schwinger

Fierz e Pauli[48] desenvolveram uma equação linear nas derivadas apropriada para a descrição de partículas com spin arbitrário, inteiro ou semi-inteiro. Rarita e Schwinger[49] propuseram uma lagrangiana para o campo de spin 3/2 sem que houvesse a necessidade da introdução de espinores adicionais. Estudos posteriores[47] mostraram interesse no campo de spin 3/2 para o estudo de sua interação com o campo gravitacional. O campo(não-massivo) associado às partículas de spin 3/2, denominado de campo Rarita-Schwinger, possui a densidade lagrangiana[47]

$$\mathcal{L} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Psi_\mu A_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma, \tag{5.61}$$

onde $A_\nu = \gamma_0\gamma_5\gamma_\nu$ e γ_μ, com $\mu = 0,1,2,3$, são as matrizes de Dirac que satisfazem $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2g_{\mu\nu}$ e $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, onde $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$ e $g_{ij} = 0$ quando $i \neq j$, com $i, j = 1,2,3$.

Através da densidade lagrangiana (5.61) obtemos os momentos conjugados a Ψ_μ. Notamos que não temos a derivada temporal em Ψ_0, de modo que:

$$\Phi_1^{(1)} = \Pi_0 = 0. \tag{5.62}$$

Além disso para os Ψ_i's com $i = 1,2,3$ temos os vínculos:

$$\Pi^i = -\epsilon^{ijk}\Psi_i^T A_j = -\epsilon^{ijk} A_i \Psi_j, \tag{5.63}$$

ou

$$\Phi_2^{(1)} = \Pi^i + \epsilon^{ijk} A_i \Psi_j, \tag{5.64}$$

com Ψ_i^T indicando transposição.

A condição de consistência aplicada sobre (5.62) gera o vínculo secundário

$$\Phi_1^{(2)} = \epsilon^{ijk} \partial_i A_j \Psi_k = 0. \tag{5.65}$$

Usando (5.64) e (5.65) obtemos um outro vínculo de primeira classe, dado por:

$$\Phi_2^{(2)} = \partial_k \Pi^k - \epsilon^{ijk} \partial_i A_j \Psi_k = 0. \tag{5.66}$$

Devemos agora escolher condições de calibre adequadas de modo a tornar o conjunto de vínculos todos de segunda classe, nos permtindo assim realizar o procedimento de quantização. Aqui escolheremos[47]:

$$\Psi_0 = 0, \qquad \partial^i \Psi_i = 0. \tag{5.67}$$

Deste modo temos o conjunto de vínculos:

$$\theta^k = \Pi^k + \epsilon^{ijk} A_i \Psi_j; (k = 1, 2, 3) \tag{5.68}$$

$$\rho_1 = \partial_k \Pi^k - \epsilon^{ijk} \partial_i A_j \Psi_k, \qquad \rho_2 = \partial^i \Psi_i; \tag{5.69}$$

$$\omega_1 = \Pi^0, \qquad \omega_2 = \Psi_0. \tag{5.70}$$

A formulação algébrica pode ser realizada seguindo as discussões do capítulo anterior. Assim consideramos um conjunto de funcionais $U(\Psi, \Pi)$, dependentes dos campos e seus momentos conjugados, de forma que seja possível definir o produto de funcionais

$$U(\Psi,\Pi)\otimes W(\Psi,\Pi)=\{U(\Psi,\Pi),W(\Psi,\Pi)\}_+=\int(\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta\Psi}\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\Pi}+\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta\Pi}\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\Psi})(dx_i). \quad (5.71)$$

Concomitantemente, consideremos um outro produto definido entre os funcionais, denotado por $\bullet$, tal que

$$(U\bullet W)(\Psi,\Pi)=U(\Psi,\Pi)\bullet W(\Psi,\Pi). \quad (5.72)$$

Consideremos que este conjunto de funcionais com essas operações estejam definidos em G_n e que em G_n tenhamos um ideal I, em relação ao produto $\bullet$, que é dado pelo conjunto de elementos

$$I=\{U(\Psi,\Pi)\bullet\Phi_i(\Psi,\Pi)/U(\Psi,\Pi)\in G_n\}, \quad (5.73)$$

onde o índice $i=1,...,7$ e os Φ_i's representam os vínculos da teoria.

Considerando o quociente G_n/I, obtemos o conjunto de elementos

$$G_n/I=\{U+I/U\in G_n\}=\{U+W^i\bullet\Phi_i/U,WeV\in G_n\}, \quad (5.74)$$

onde considera-se uma soma em $W^i\bullet\Phi_i$.

Sobre o espaço formado pelos Ψ e Π, pensados aqui como elementos da álgebra G_n, há uma região na qual as relações de vínculo são válidas. Tal região, é formada por um subconjunto dos Ψ e Π, pois, uma vez determinados alguns destes podemos automaticamente conhecer o valor dos outros campos, ou momentos, através das relações de vínculo (5.68-70). No caso do campo Rarita-Schwinger dado um funcional $U(\Psi_i,\Pi_i)$, uma vez que são conhecidas algumas das quantidades Ψ_i e Π_i as outras ficam determinadas pelas relações de vínculo. Logo, sobre esta região do espaço define-se um conjunto S de funcionais cujos argumentos dependem apenas de Ψ_κ e Π_κ, com κ sendo o índice que representa o conjunto (Ψ_i,Π_i) após ser feito o uso dos vínculos, assim

$$S=\{U(\Psi_\kappa,\Pi_\kappa)\}. \quad (5.75)$$

O homomorfismo $h_1 : G_n \to S$, com relação à multiplicação $\bullet$ dos funcionais é obtido associando a cada elemento $U(\Psi_i, \Pi_i)$ de G_n um elemento $U(\Psi_\kappa, \Pi_\kappa)$ de S através do uso das relações (5.68-70), resultando em

$$h_1 : U(\Psi_i, \Pi_i) \to U(\Psi_\kappa, \Pi_\kappa). \tag{5.76}$$

Definindo o homomorfismo natural $h_2 : G_n \to G_n/I$, temos

$$h_2 : U(\Psi_i, \Pi_i) \to U(\Psi_i, \Pi_i) + I, \tag{5.77}$$

Como discutido o núcleo de h_1 é I, pois seus elementos são os funcionais que se anulam quando as condições de vínculos são usadas. Mas, I também é um ideal por h_2; portanto, pelo teorema fundamental das álgebras, S e G_n/I são isomorfos, com relação a $\bullet$, ou seja, existe um isomorfismo w entre os elementos $U(\Psi_\kappa, \Pi_\kappa)$, definidos sobre a região dos vínculos, e $U(\Psi_i, \Pi_i) + I$ definidos em G_n/I, dado por

$$w(U(\Psi_i, \Pi_i) + I) = U(\Psi_\kappa, \Pi_\kappa). \tag{5.78}$$

Precisamos agora dar uma estrutura de álgebra G_n sobre o quociente G_n/I. Seguindo o desenvolvimento do Capítulo 4 definimos o produto

$$U' \Box W' = (U \otimes W - U \otimes \Phi_i \bullet C^{-1}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bullet \Phi_j \otimes W)', \tag{5.79}$$

onde $U, W \in G_n$, $U', W' \in G_n/I$ e $i, j = 1, ..., 7$. Podemos provar que este produto é um produto genuíno em G_n/I, no sentido que este continua satisfazendo as relações da álgebra G_n. De fato,

$$\begin{aligned} U' \Box W' &= (U \otimes W - U \otimes \Phi_i \bullet C^{-1}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bullet \Phi_j \otimes W)' = \\ &= (W \otimes U - \Phi_i \otimes U \bullet C^{-1}_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bullet W \otimes \Phi_j)' = \\ &= (W \otimes U - W \otimes \Phi_j \bullet C^{-1}_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bullet \Phi_i \otimes U)' = \\ &= W' \Box U', \end{aligned} \tag{5.80}$$

em que usamos a simetria do produto $\otimes$, a comutatividade do produto $\bullet$ e a simetria da matriz C_{ij}^{-1}. Portanto, $\square$ satisfaz a mesma condição exigida em G_n para o produto entre os elementos.

Nesta seção, assim como na anterior, o número de vínculos na teoria é grande e portanto, faremos o uso da propriedade iterativa discutida no apêndice (vide apêndice C). Seguindo nosso formalismo os elementos θ^k's geram um ideal I_1 de G_n. Considerando o espaço quociente G_n/I_1 calculamos sobre este a operação:

$$\begin{aligned} h_1(\Psi_i)\square h_1(\Psi_j) &= h_1(\Psi_i \otimes \Psi_j - \Psi_i \otimes \theta^m \bullet C_{mn}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \bullet \theta^n \otimes \Psi_j) = \\ &= h_1(-\delta_{im} C_{mn}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\delta_{nj}) = h_1(-C_{ij}^{-1}), \end{aligned} \tag{5.81}$$

em que a matriz C_{mn}, com $m, n = 1, 2, 3$, e sua inversa são

$$C_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\theta_m \otimes \theta_n|| = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_3 & A_2 \\ A_3 & \mathbf{0} & A_1 \\ A_2 & A_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.82}$$

$$C_{mn}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\theta_m \otimes \theta_n||^{-1} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -i\mathbf{1} & -A_3 & A_2 \\ A_3 & -i\mathbf{1} & -A_1 \\ A_2 & A_1 & -i\mathbf{1} \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{5.83}$$

onde usamos uma notação de matriz por blocos uma vez que os A_i's são produtos de matrizes de Dirac.

Na equação (5.81) temos $(i, j) = 1, 2, 3$. A componente 0 do campo não foi considerada em (5.81) porque sendo esta um vínculo do sistema a expressão entre parênteses é nula. O mesmo vale para o momento conjugado, Π_0, a este campo, que também é um vínculo no sistema. Lembramos também que a discussão realizada em torno da expressão (5.80), onde foi visto que $\square$ é um produto genuíno em G_n/I, é válida para G_n/I_1 e a demonstração pode ser realizada seguindo os mesmos passos.

Agora consideramos a imagem dos ρ's através do homomorfismo natural $G_n \to G_n/I_1$. Estas imagens geram um ideal I_2 em G_n/I_1 e então construindo o quociente $(G_n/I_1)/I_2$, obtemos:

$$h_2(\Psi_i) \star h_2(\Psi_j) = h_2(\Psi_i \Box \Psi_j - \Psi_i \Box \rho_m \bullet B_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-1} \bullet \rho_n \Box \Psi_j), \tag{5.84}$$

onde

$$B_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\rho_m \otimes \rho_n|| = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4}\nabla^2 & \nabla^2 \\ \nabla^2 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{5.85}$$

e

$$B_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{-1} = ||\rho_m \otimes \rho_n||^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (\nabla^2)^{-1} \\ (\nabla^2)^{-1} & \frac{i}{4}(\nabla^2)^{-1} \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{5.86}$$

A simetria mostrada por nós para o produto $\Box$ permite verificar diretamente que $\star$ também é simétrico e satisfaz as mesmas relações existentes em G_n. Assim, verifica-se que

$$h_2(\Psi_i) \star h_2(\Psi_j) = h_2(\Psi_j) \star h_2(\Psi_i). \tag{5.87}$$

Na expressão (5.84) temos

$$\Psi_i \Box \rho_1 = \Psi_i \otimes \rho_1 - \Psi_i \otimes \theta_m \bullet C^{-1}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bullet \theta_n \otimes \rho_1, \tag{5.88}$$

e como $\theta_n \otimes \rho_1 = 0$, então:

$$\Psi_i \Box \rho_1 = \Psi_i \otimes \rho_1 = -\delta_{\alpha\gamma}\partial_i. \tag{5.89}$$

Além disso,

$$\Psi_i \Box \rho_2 = \Psi_i \otimes \rho_2 - \Psi_i \otimes \theta_m \bullet C^{-1}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bullet \theta_n \otimes \rho_2, \tag{5.90}$$

mas sendo $\Psi_i \otimes \rho_2 = 0$, obtemos:

$$\Psi_i \Box \rho_2 = -\partial_n C^{-1}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{5.91}$$

Com todos estes resultados obtidos somos conduzidos à expressão:

$$
\begin{aligned}
h_2(\Psi_i) \star h_2(\Psi_j) = h_2(-C^{-1}_{\alpha\beta} - \frac{i}{4}\partial_i(\nabla^2)^{-1}\partial_n - \frac{i}{4}\partial_i(\nabla^2)^{-1}\partial_n C^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \\
- \partial_n C^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\nabla^2)^{-1}\partial_i).
\end{aligned}
\tag{5.92}
$$

Agora precisamos calcular um outro produto que notaremos como $h_3(\Psi_i) \triangleleft h_3(\Psi_j)$. De forma análoga ao que foi feito antes realizamos a aplicação $(G_n/I_1) \to (G_n/I_1)/I_2$ referente aos vínculos ω's, que comporão o ideal I_3 em $(G_n/I_1)/I_2$ e assim podemos considerar o quociente $((G_n/I_1)/I_2)/I_3$. Entretanto, nota-se que $\Psi_i \star \omega_j = 0$, com $j = 1, 2$ e logo $h_3(\Psi_i) \triangleleft h_3(\Psi_j) = h_2(\Psi_i) \star h_2(\Psi_j)$. Vale ainda pontuar que o produto $\triangleleft$ também possui a propriedade da simetria, ou seja, é um produto genuíno de $((G_n/I_1)/I_2)/I_3$, e isto pode ser notado realizando a mesma discussão feita antes junto ao fato que $\star$ é também simétrico.

Seguindo todo o desenvolvimento encontramos então:

$$
h_2(\Psi_i) \star h_2(\Pi_j) = h_2(\frac{1}{4}(\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\nabla^2)^{-1}) - \frac{1}{4}(\partial_l A_l)\epsilon^{ijk}\partial_k(\nabla^2)). \tag{5.93}
$$

$$
h_2(\Pi_i) \star h_2(\Pi_j) = h_2(\frac{i}{4}(\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\nabla^2)^{-1}) - \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}\partial_k(\partial_l A_l)(\nabla^2)). \tag{5.94}
$$

As expressões (5.92-94) dão as relações fundamentais entre os campos e a quantização deste sistema é realizada segundo a regra $\{,\}^*_+ \to \chi[,]_+$[32][40], onde χ é um parâmetro na teoria que permite estabelecer as relações de anticomutação dos campos com seus momentos conjugados. Assim, somos conduzidos às seguintes relações de anticomutação

$$
\begin{aligned}
[\Psi_i(\mathbf{x},t), \Psi_j(\mathbf{y},t)]_+ = \chi(-A^{-1}_{\alpha\beta} - \frac{i}{4}\partial_i(\nabla^2)^{-1}\partial_n - \frac{i}{4}\partial_i(\nabla^2)^{-1}\partial_n A^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \\
- \partial_n A^{-1}_{mn}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\nabla^2)^{-1}\partial_i)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});
\end{aligned}
\tag{5.95}
$$

$$[\Pi_i(\mathbf{x},t),\Pi_j(\mathbf{y},t)]_+ = \chi(\frac{i}{4}(\delta_{ij}+\partial_i\partial_j(\nabla^2)^{-1}) - \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}\partial_k(\partial_l A_l)(\nabla^2))\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (5.96)$$

Estas expressões encontram-se condizentes com os resultados encontrados na referência[47], por meio da formulação usual.

5.3 Álgebras Geométricas e a Segunda Quantização

Neste capítulo apresentamos como pode ser realizada a quantização de sistemas fermiônicos ou bosônicos através de operações algébricas entre os operadores de campo. Neste sentido Ψ e Π foram considerados como entes pertencentes as álgebras G_n e L_n, caso o sistema seja fermiônico ou bosônico, respectivamente. Dentro desta formulação algébrica os vínculos que surgem na teoria são compreendidos como elementos triviais (nulos) da álgebra, sendo seus conjuntos entendidos, portanto, como ideais desta. No sentido de manter as álgebras como fundamentais para o processo de quantização, fizemos o uso de espaços quocientes e introduzimos nestes espaços um produto conveniente, de forma que este mantivesse a estrutura das álgebras G_n ou L_n, conforme fosse o caso. Assim, nosso desenvolvimento considera os campos e momentos conjugados como entes básicos, obtidos por meio de homomorfismos específicos, h (a depender do tipo de sistema temos $h : G_n \to G'_n$ ou $h : L_n \to L'_n$); os observáveis da teoria, em geral dados por formas quadráticas nas variáveis de campo, são do tipo Γ (no caso da G_n) ou do tipo Λ (no caso da L_n), mas com os elementos de G'_n ou L'_n, a depender do caso.

Uma outra forma possível para a realização do nosso desenvolvimento seria considerarmos operadores de criação, a^*_k , e destruição, a_k, como elementos básicos das álgebras G_n ou L_n, a depender do sistema ser fermiônico ou bosônico, e daí introduzirmos os campos e momentos conjugados como combinação linear desses operadores. Nesse caso, as componentes dos "vetores" seriam funções definidas sobre o espaço de configuração (caso da teoria quântica usual)[50][51] ou funções dependentes de p e q (caso da teoria quântica simplética)[52]. Nesta formulação, próxima ao método denominado segunda quantização, entretanto, a introdução de vínculos apresenta-se menos transparente que a formulação desenvolvida.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Sobre as álgebras geométricas há diversas contribuições [22]-[26] no contexto da Física. Nesses trabalhos nota-se alguns fatos importantes podendo-se citar:(i) a adequabilidade dessas álgebras a diferentes domínios da Física;(ii) a naturalidade com que determinados conceitos aparecem no contexto algébrico, permitindo-nos muitas vezes uma melhor compreensão de quantidades físicas e (iii) seu poder de síntese possibilitando-nos melhor analisar semelhanças e diferenças entre teorias físicas.

Neste trabalho mostramos como generalizar as álgebras geométricas desenvolvidas por Schönberg com o intuito de discutir sistemas físicos com lagrangianas degeneradas. Dada a generalidade das álgebras com que trabalhamos vimos a possibilidade do tratamento de sistemas não-relativísticos e relativísticos. Além disso, o procedimento algébrico discutido para sistemas com um grande número de vínculos mostrou-se eficaz e vantajoso. Neste contexto desenvolvemos, como aplicações, a quantização dos campos DKP Galileano e Rarita-Schwinger.

Uma das questões importantes relacionada ao nosso desenvolvimento é a possibilidade de discutir estruturas algébricas que podem servir de base tanto para o estudo da física clássica como da física quântica o que propicia uma síntese matemática. Assim, ao mostrarmos como essas estruturas algébricas devem ser desenvolvidas e aplicadas no caso de sistemas descritos por lagrangianas degeneradas, estamos abrindo novas possibilidades de estudo das teorias clássicas e quânticas.

Mostramos em nosso trabalho como tratar sistemas hamiltonianos com vínculos, dentro do contexto de álgebras geométricas considerando os campos como elementos básicos dessas álgebras. Uma forma de prosseguir nessa linha de pesquisa é com a adoção dos campos como elementos geométricos sobre uma variedade diferenciável Σ convenientemente definida e a consideração do grupo de Poincaré, no caso relativístico, ou do grupo de Galilei, no caso não relativístico, como grupos de simetria atuando transitivamente sobre Σ[53]. Com uma tal formulação que consideramos como uma das perspectivas será possível investigar as relações de vínculo de forma intrínseca.

Nosso trabalho deixa ainda como perspectiva um estudo da geometria simplética e da álgebra de Clifford na presença de vínculos; essas estruturas que denominamos (vide Capítulo 4) degeneradas podem ser exploradas em problemas de interesse físico, sendo esse outro tema para desenvolvimento de trabalhos posteriores.

Oliveira et al[52] mostraram como é possível construir uma Mecânica Quântica Simplética. A busca de uma forma para empregar as álgebras geométricas no desenvolvimento da Mecânica Quântica Simplética e o desenvolvimento dessa teoria na presença de vínculos são itens que se mostram interessantes para estudar sistemas não-lineares seguindo a prescrição de Huber e Buttner[35] e também se colocam para futuras pesquisas.

Apêndice A

Identidade de Jacobi e Transformações Canônicas

Na notação simplética a identidade de Jacobi fica:

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\sigma}(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^\mu\partial\omega^\rho}\frac{\partial g}{\partial\omega^\sigma}\frac{\partial h}{\partial\omega^\nu}+\frac{\partial f}{\partial\omega^\rho}\frac{\partial^2 g}{\partial\omega^\mu\partial\omega^\sigma}\frac{\partial h}{\partial\omega^\nu})+\\
&+\epsilon^{\rho\sigma}\epsilon^{\nu\mu}(\frac{\partial^2 h}{\partial\omega^\rho\partial\omega^\nu}\frac{\partial f}{\partial\omega^\mu}\frac{\partial g}{\partial\omega^\sigma}+\frac{\partial h}{\partial\omega^\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^\rho\partial\omega^\mu}\frac{\partial g}{\partial\omega^\sigma})+\\
&+\epsilon^{\nu\mu}\epsilon^{\sigma\rho}(\frac{\partial^2 g}{\partial\omega^\nu\partial\omega^\sigma}\frac{\partial h}{\partial\omega^\rho}\frac{\partial f}{\partial\omega^\mu}+\frac{\partial g}{\partial\omega^\sigma}\frac{\partial^2 h}{\partial\omega^\nu\partial\omega^\rho}\frac{\partial f}{\partial\omega^\mu}).
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Notemos que a soma acima é cíclica de modo que podemos juntar termos semelhantes. Assim podemos, por exemplo, tomar o primeiro e o terceiro termos, obtendo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^\mu\omega^\rho}\frac{\partial h}{\partial\omega^\nu}\frac{\partial g}{\omega^\sigma}(\epsilon^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\sigma}+\epsilon^{\rho\sigma}\epsilon^{\nu\mu})=\\
&=\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^\mu\omega^\rho}\frac{\partial h}{\partial\omega^\nu}\frac{\partial g}{\omega^\sigma}(\epsilon^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\sigma}-\epsilon^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu})=0.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Os outros termos nos conduzem a relações similares de modo que podemos comprovar a identidade de Jacobi.

Como sabemos uma transformação canônica pode ser definida como aquela cujos parênteses de Poisson de qualquer conjunto de variáveis canônicas toma sempre o mesmo valor. Na notação simplética isto pode ser resumido por:

$$\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\omega'^{\rho}}{\partial\omega^{\mu}}\frac{\partial\omega'^{\sigma}}{\partial\omega^{\nu}} = \epsilon^{\rho\sigma}. \tag{A.3}$$

Portanto neste contexto podemos dizer que uma transformação é canônica se a matriz $\epsilon^{\mu\nu}$ é invariante sob a transformação.

Apêndice B

O Problema de Heisenberg

A quantização de um sistema físico com n graus de liberdade pode ser realizada através da solução do *Problema de Heisenberg* [28], que consiste em encontrar operadores lineares $\hat{p}_j(t)$ e $\hat{q}_j(t)$, $j = 1, 2, ..., n$ que atuam em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfazendo as relações:

$$[\hat{q}_k(t), \hat{q}_j(t)] = [\hat{p}_k(t), \hat{p}_j(t)] = 0 \tag{B.1}$$

$$[\hat{q}_k(t), \hat{p}_j(t)] = i\hbar\delta_{kj} \tag{B.2}$$

e

$$\dot{\hat{q}}_k(t) = \frac{i}{\hbar}[H(\hat{q}(t), \hat{p}(t)), \hat{q}_k(t)] \tag{B.3}$$

$$\dot{\hat{p}}_k(t) = \frac{i}{\hbar}[H(\hat{q}(t), \hat{p}(t)), \hat{p}_k(t)] \tag{B.4}$$

onde:

$$\hat{q}(t) = (\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t), ..., \hat{q}_n(t)) \tag{B.5}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (comutador) \tag{B.6}$$

$$\hat{p}(t) = (\hat{p}_1(t), \hat{p}_2(t), ..., \hat{p}_n(t)) \tag{B.7}$$

e $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π.

A solução do problema de Heisenberg foi obtida por von Neumann e esta consiste em duas etapas: a etapa cinemática e a etapa dinâmica.

Etapa Cinemática: esta etapa consiste em determinar operadores lineares auto-adjuntos $\hat{q}_j^0$ e $\hat{p}_j^0$, com $j = 1, 2..., n$, sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfazendo

$$\{\hat{q}_k^0, \hat{p}_j^0\} = i\hbar\delta_{kj} \tag{B.8}$$

e

$$\{\hat{q}_k^0, \hat{q}_j^0\} = \{\hat{p}_k^0, \hat{p}_j^0\} = 0. \tag{B.9}$$

Von Neumann demonstrou que a solução de tal problema é a seguinte:

(i) o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é o espaço $\mathcal{L}^2$ das funções complexas $\psi(q)$ definidas sobre o espaço de configurações e de quadrado integrável em relação a seus argumentos reais q_k $(-\infty < q_k < \infty)$;

(ii) os operadores lineares $\hat{q}_j^0$ e $\hat{p}_j^0$ são auto-adjuntos e dados no espaço $\mathcal{L}^2$ por:

$$\hat{q}_j^0\psi(q_1, q_2, ..., q_n) = q_j\psi(q_1, q_2, ..., q_n) \tag{B.10}$$

$$\hat{p}_j^0\psi(q_1, q_2, ..., q_n) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}\psi(q_1, q_2, ..., q_n), \tag{B.11}$$

os quais coincidem com os operadores introduzidos por Schrödinger, na formulação denominada mecânica ondulatória, usando representação das coordenadas.

Etapa Dinâmica: esta etapa consiste na determinação do operador hamiltoniano $H(\hat{q}_j^0, \hat{p}_j^0, t)$ auto-adjunto obtido substituindo, na expressão clássica, as variáveis canônicas q_j, p_j pelos operadores $\hat{q}_j^0$, $\hat{p}_j^0$, respectivamente. O operador $H(\hat{q}^0, \hat{p}^0, t)$ assim construído define, pela equação

$$i\hbar\frac{\partial \hat{T}(t,t_0)}{\partial t} = H(\hat{q}^0,\hat{p}^0,t)\hat{T}(t,t_0), \qquad \hat{T}(t,t_0) = 1, \tag{B.12}$$

o operador unitário $\hat{T}(t,t_0)$, com o qual obtém-se:

$$\hat{q}_j(t) = \hat{T}(t,t_0)^{-1}\hat{q}_j^0\hat{T}(t,t_0) \tag{B.13}$$

$$\hat{p}_j(t) = \hat{T}(t,t_0)^{-1}\hat{p}_j^0\hat{T}(t,t_0); \tag{B.14}$$

que são as soluções de (B.1-4).

Apêndice C

Propriedade Iterativa dos Parênteses de Dirac

Dados $(\mathbf{e}_n)$'s geradores da álgebra G_n podemos subdividí-lo em dois (ou mais) subconjuntos. Suponha a seguinte divisão entre os geradores $(\mathbf{e}_i)$ e $(\mathbf{e}_j)$, com $i = 1, ..., n_\alpha$ e $j = n_\alpha + 1, ..., n$. Considerando que os elementos $(\mathbf{e}_i)$ geram um ideal I_1 de G_n podemos construir o espaço quociente, conforme vimos, G_n/I_1, onde neste espaço a operação entre os elementos de G_n era dada por (3.60) ou (3.64). Agore tome o conjunto dos elementos $(\mathbf{e}_j)$ pela aplicação $G_n \to G_n/I_1$. Neste caso note que estes elementos irão formar um ideal I_2 de G_n/I_1, e deste modo poderemos construir um espaço quociente dado por $(G_n/I_1)/I_2$.

Agora para garantir que em $(G_n/I_1)/I_2$ tenhamos uma estrutura algébrica semelhante a (3.60) ou (3.64) devemos construir um produto, que denotaremos $[f, g]'' = [f, g]' - B'(f)[a_l, g]'$, com $a_k \in I_2$ e f e g dois elementos quaisquer da álgebra. Aqui os $[,]'$ é como antes o produto definido em G_n/I_1. Perceba que estas operações são simplesmente uma composição de operações que resulta em $G_n \to (G_n/I_1)/I_2$. Esse processo pode ser aplicado diversas vezes, em sequência, a depender da quantidade de vínculos que tenhamos no problema e de como vamos dividí-los para serem ideais na álgebra.

Bibliografia

[1] **M. Schönberg**, Nuovo Cimento, **VI**, 356 (1957).

[2] **M. Schönberg**, Anais Acad. Bras. Ciências, **29** 473 (1957).

[3] **M. Schönberg**, Anais Acad. Bras. Ciências, **28** 11 (1956).

[4] **F. A. M. Frescura, B. J. Hiley**, Rev. Bras. de Física, Volume Especial - Os 70 Anos de Mário Schönberg - 49 (1984).

[5] **D. Bohm, B. J. Hiley**, Found. Phys., **11** 179 (1981).

[6] **M. C. B. Fernandes**, *Álgebras de Duffin-Kemmer-Petiau e Espaço de Fase Generalizado*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - UnB (1991).

[7] **P. R. Holland**, Found. Phys., **16** 701 (1986).

[8] **J. D. M. Vianna, M. C. B. Fernandes, A. E. Santana**, Found. Phys., **35** 109 (2005).

[9] **B. Felzenszwalb**, *Álgebras de Dimensão Finita*, Editora Impa, Rio de Janeiro (1979).

[10] **R. Hermann**, Phys. Rev., **177**, 2453 (1968).

[11] **T. M. Rocha Filho, J. D. M. Vianna**, Hadronic. J., **19**, 473 (1995).

[12] **D. M. Gitman, I. V. Tyutin**, *Quantization of fields with constraints*, Springer-Verlag, New York (1990).

[13] **M. Henneaux, C. Teitelboim**, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press, New Jersey (1992).

[14] **S. Shanmugadhasan**, J. Math Phys., **14**, 677 (1972).

[15] **P. M. Dirac**, *Lectures on quantum mechanics*, Dover Publications, New York (2001).

[16] **W. H. Franke, A. J. Kálnay**, J. Math. Phys., **11**, 1729 (1969).

[17] **N. Mukunda, E. C. G. Sudarshan**, J. Math. Phys.,**9**, 411 (1968).

[18] **E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda**, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, John Wiley & Sons, New York (1974).

[19] **H. Goldstein**, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1980).

[20] **A. Albert**, *Structure of Algebras*, American Mathematical Society, New York (1939).

[21] **A. Lichnerowicz**, *Elements of Tensor Calculus*, London: Methuen & CO LTD (1962).

[22] **D. Hestenes**, *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, New York (2002).

[23] **J. D. M. Vianna**, *Notas de Curso: Multivetores*, Instituto de Física - UFBA (2007).

[24] **C. Doran, A. Lasenby**, *Geometric Algebras for Physicists*, Cambridge UNiversity Press, New York (2003).

[25] **C. P. Poole Jr., H. A. Farach**, Found. Phys.,**12**, 719 (1982).

[26] **R. D. Schafer**, *An Introduction to Non-Associative Algebras*, Academic Press, New York (1966).

[27] **I. M. Gelfand, S. V. Fomin**, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, New Jersey (1963).

[28] **José David M. Vianna, Adalberto Fazzio, Sylvio Canuto**, *Teoria Quântica de Moléculas e Sólidos*, Editora Livraria da Física, São Paulo (2004).

[29] **P. Droz-Vincent**, Ann. Inst. Henri Poincaré, **V**, 257 (1966).

[30] **F. A. Berezin**, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York (1966).

[31] **T. M. Rocha Filho, J. D. M. Vianna**, Int. Jour. Theor. Physics, **26**, 951 (1987).

[32] **A. J. Kálnay, G. J. Ruggeri**, Int. Jour. Theor. Physics, **6**, 167 (1972).

[33] **R. F. Streater**, Commun. Math. Phys., **2**, 354 (1966).

[34] **Nivaldo A. Lemos**, *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física, São Paulo (2007).

[35] **H. Huber, H. Büttner**, J. Phys. A, **25**, L1111 (1992).

[36] **M. C. B. Fernandes, J. D. M. Vianna**, Braz. J. Phys., **28** 2 (1999).

[37] **M. C. B. Fernandes, J. D. M. Vianna**, Found. Phys., **29** 2 (1999).

[38] **M. C. B. Fernandes, A. E. Santana, J. D. M. Vianna**, Journal of Physics A, **36**, 3841 (2003).

[39] **F. Mandl, G. Shaw**, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, New York (2010).

[40] **A. C. Pedroza, J. D. M. Vianna**, J. Phys. A **13**, 825 (1979).

[41] **G. Petiau**, Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect. **16**, N 2, 1 (1936).

[42] **N. Kemmer**, Proc. Roy. Soc. A, **173**, 91 (1939).

[43] **R. J. Duffin**, Phys. Rev. Lett. **54**, 1114 (1938).

[44] **M. Omote, S. Kamefushi, Y. Takahashi, Y. Ohnuki**, Fort. Phys. **12**, 933 (1989).

[45] **E. S. Santos, L. M. Abreu**, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, (2008)075407.

[46] **F. J. S. Ferreira**, *O Campo Duffin-Kemmer-Petiau Galileano: Quantização Canônica e Estrutura Algébrica*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - UFBA (2009).

[47] **G. Senjanović**, Phys. Rev. D, **16**, 307 (1977).

[48] **M. Fierz, W. Pauli**, Proc. Roy. Soc. A, **173**, 211 (1939).

[49] **W. Rarita, J. Schwinger**, Phys. Rev., **60**, 61 (1941).

[50] **E. Merzbacher**, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York (1997).

[51] **J. D. M. Vianna**, *Notas de Curso: O Método da Segunda Quantização*, Instituto de Física - UFBA (2005).

[52] **M. D. Oliveira, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, J. D. M. Vianna**, Annals Phys. **312**, 492 (2004).

[53] **J. D. M. Vianna**, Act. Phys. Acad. Sci. Hung., **52**, 47 (1981).