



Universidade Federal da Bahia
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação

Dissertação de Mestrado

**Informação Quântica: Efeitos da
Temperatura Utilizando a Dinâmica de
Campos Térmicos**

Sergio Floquet Sales

Setembro de 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

**Informação Quântica: Efeitos da
Temperatura Utilizando a Dinâmica de
Campos Térmicos**

Sergio Floquet Sales

Orientador: Prof. Dr. José David Manguiera Vianna

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física da Universidade Federal da Bahia
como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador, Setembro de 2011

S163 Sales, Sergio Floquet.

Informação Quântica: Efeitos da Temperatura Utilizando a Dinâmica de Campos
Térmicos / Sergio Floquet Sales – 2011.

105 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. José David Manguiera Vianna.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física,
2011.

1. Mecânica Quântica. 2. Informação Quântica. 3. Dinâmica de Campos Térmicos.

I. Vianna, José David Manguiera. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de
Física. III. Título.

CDD - 530.12

CDU - 530.145

INFORMAÇÃO QUÂNTICA: EFEITOS DA TEMPERATURA UTILIZANDO A DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS

SERGIO FLOQUET SALES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física, aprovada em 22 de setembro de 2011.

Banca examinadora:

Prof. Dr. José David Manguiera Vianna (Orientador)
UFBA / UnB

Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana
UnB

Prof. Dr. Aurino Ribeiro Filho
UFBA

Dedico esta dissertação às
mulheres da minha vida:

Catia, Luize, Juliana e Clara

Agradecimentos

Este modesto trabalho, só foi possível de ter sido feito devido à ajuda direta e indireta de muitas pessoas. Sendo assim, venho aqui manifestar os meus sinceros agradecimentos. Desde já peço desculpas àqueles cujos nomes não estão aqui, já que ter uma boa memória nunca foi uma das minhas qualidades.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, o Prof. José David Manguiera Vianna, pela sua orientação, minuciosa correção, paciência e confiança nesses 5 anos de convívio, desde a iniciação científica. A Profa. Maria das Graças Reis Martins pelo apoio nos momentos difíceis. Ao Prof. Marco Antônio Silva Trindade pelas discussões e influência que teve nesse trabalho.

Agradeço aos meus amigos João Humberto, Wallas, Lafayette, Iuri, Vinicius (Mestre), Miralvo, Cabelo, Tche, Kim, Anderson Roque, Mércia e Lilian. Sem eles, minha estada no Instituto de Física teria sido extremamente sem graça.

Agradeço aos funcionários Seu Valtério, Dona Eraldina, Tereza Cristina, Seu Nelson, Dona Conceição, Marli, Geraldo, Dal e todos os funcionários da cantina e da limpeza.

Agradeço aos professores Luciano Abreu, Jailton Almeida, Rita de Cássia, Ivan Lima.

Agradeço também a Lourival, Alejandro, Osvaldo, Leo Cerqueira, João Cláudio, Tenilson, Jessica, Welber, Micael, Erico, Exupério, Vanessa, Renatão, Daniel Abreu, Gabarito, Mariana, Bárbara, Castro, Bocão, Dunga, Edgar, Eric Pinto, Isabel, Fábio da Hora, Fabrício, Vitinho, Iara e Bruninha.

Agradeço aos meus primos Helga, Vinícius, Cecília, Alan e Daniela.

Agradeço também aos grandes amigos que fiz a partir do 2 de Julho Mana, Binho, Rafa, Jomar, Pisquilo, Ed, Ia, Rodrigo, Emanuelle, Nara, Luana, Isa, Bionho, Mumu, Lima, Neto, Negão, Gaby, Acarajé, Mia, Bolinha, Deco, Samuel, Adriana, Joe, Gabriel, Alana e Janaina. Muito obrigado pelo apoio e compreensão nesse período.

Agradeço à minha família, que esteve sempre ao meu lado.

Agradeço à Clarinha; sem o apoio dela, nada disso seria possível.

E por fim, agradeço a minha mãe e minhas irmãs, sem elas nada disso existiria. Obrigado!

"Os sinais + e - modificam a quantidade
diante da qual são colocados, como
o adjetivo modifica o substantivo."

Cauchy

Resumo

Nesta dissertação utilizamos o critério de Simon, dentro do formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT), para analisar a relação entre a perda do emaranhamento e a variação da temperatura para estados do tipo Bell. Ainda dentro do formalismo da DCT, determinamos a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner para um estado do tipo Bell, obtendo concordância com os resultados encontrados a partir da análise do critério de Simon. Apresentamos também uma revisão sobre o formalismo da DCT e sua aplicação ao oscilador harmônico bosônico e fermiônico. Introduzimos também as noções básicas da Computação Quântica e da Informação Quântica, e os critérios de emaranhamento mais utilizados.

Abstract

In this dissertation, we use the Simon's criterion, within the formalism of Thermo Field Dynamics (TFD), to analyze the relationship between the loss of entanglement and the temperature variation for Bell-type states. Even within the formalism of the TFD, we determine the Quantum Fidelity, Mandel Factor and the Wigner function for this state of Bell-type, which agree with the results from the analysis of the Simon's criterion. We also present a review on the formalism of the TFD and its application to bosonic and fermionic harmonic oscillator. We also introduced the basic concept of Quantum Computation and Quantum Information and the most commonly used criteria of entanglement.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 17
2	Dinâmica de Campos Térmicos	p. 20
2.1	Introdução ao Formalismo	p. 20
2.2	Oscilador Harmônico Bosônico Termalizado	p. 23
2.2.1	Operadores Termalizados	p. 26
2.3	Oscilador Harmônico Fermiônico Termalizado	p. 30
2.3.1	Operadores Termalizados	p. 32
2.4	Operador Densidade Termalizado	p. 34
3	Computação Quântica, Informação Quântica e Critérios de Emaranhamento	p. 37
3.1	Computação e Informação Quânticas	p. 37
3.2	Q-bits, Portas Lógicas e Circuitos Quânticos	p. 40
3.2.1	Q-bits	p. 40
3.2.2	Portas Lógicas	p. 41
3.2.3	Circuitos Quânticos	p. 46
3.3	Emaranhamento e Estados de Bell	p. 47
3.4	Critério de Simon	p. 50
3.5	Outros Critérios de Emaranhamento	p. 55

4	Analisando o Emaranhamento a partir da Dinâmica de Campos Térmicos	p. 57
4.1	Critério de Simon e Propriedades Térmicas	p. 57
4.1.1	Operador Densidade Termalizado do Estado de Bell	p. 57
4.1.2	A Matriz Variância	p. 59
4.1.3	A DCT e o Critério de Simon	p. 70
4.1.4	Análise das Relações (4.53) e (4.54)	p. 73
4.2	Cálculo da Fidelidade Quântica	p. 76
4.3	Cálculo do Fator de Mandel	p. 82
4.4	Cálculo da Função de Wigner	p. 89
4.5	Conclusão	p. 93
5	Conclusão e Perspectivas	p. 94
	Apêndice A – Cálculo de Séries de Interesse	p. 95
	Apêndice B – Cálculo da Integral $I_{\eta,\xi}(q, p)$	p. 97
	Apêndice C – Aplicação do Critério de Simon à Estados Gaussianos	p. 99
	Referências Bibliográficas	p. 103

Lista de Figuras

3.1	Lei de Moore	p. 38
3.2	Representação do q-bit $ \psi\rangle$ na Esfera de Bloch.	p. 41
3.3	Exemplo de Circuito Quântico	p. 46
3.4	Exemplo de Circuitos Quânticos	p. 47
3.5	Circuito Quântico para os Estados de Bell	p. 48
4.1	Gráfico de $y(x) = 2 x ^2 - x ^4 - 2 x ^6 + x ^8$	p. 73
4.2	Gráfico de $2\bar{n} + 8\bar{n}^2 + 10\bar{n}^3 + 4\bar{n}^4 \geq 0,5625$	p. 75
4.3	Gráfico de $\frac{e^{3x} + e^{2x}}{(e^x - 1)^4} \geq 0,28125$	p. 75
4.4	Gráfico da Fidelidade x Número de Ocupação	p. 81
4.5	Gráfico da Fidelidade x $\beta\omega$	p. 81
4.6	Gráfico do Fator de Mandel x Número de Ocupação	p. 88
4.7	Gráfico do Fator de Mandel x $\beta\omega$	p. 89
4.8	Gráfico da Função de Wigner	p. 93

Lista de Tabelas

3.1	Tabela Comparativa entre o Algoritmo de Shor e um Algoritmo Clássico. . .	p. 39
-----	---	-------

1 Introdução

O emaranhamento é o ingrediente fundamental para a Teoria da Informação Quântica. Em 1935 Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen [1] publicaram um artigo sobre a completude da Mecânica Quântica. Fazendo uso de uma definição do que seria a realidade física, juntamente com a hipótese de localidade, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) demonstraram a incompletude da Mecânica Quântica. Neste mesmo ano, Niels Bohr publica um artigo [2] com o mesmo título do artigo de EPR, só que com um conteúdo completamente diferente, tentando refutar a argumentação exposta por EPR.

Também em 1935 Erwin Schrödinger [3], fazendo uso de um experimento imaginário, realça que poderíamos ter situações estranhas ao descrever o mundo macroscópico utilizando a Mecânica Quântica; é o famoso experimento do gato, que pode estar em dois estados, ou $|Vivo\rangle$ ou $|Morto\rangle$. Dentro da caixa, além do gato, existe um mecanismo com um gás altamente tóxico o qual, quando liberado, mata rapidamente o gato. O mecanismo de liberação do veneno depende da liberação de energia de um átomo, inicialmente instável ($|\text{átomo instável}\rangle$) que pode decair para uma configuração mais estável ($|\text{átomo estável}\rangle$). A Mecânica Quântica nos diz somente a probabilidade do átomo decair, proibindo prever deterministicamente quando ocorrerá o decaimento. Dessa forma, pelo princípio de superposição:

$$|\Psi\rangle = \alpha |\text{átomo instável}\rangle |Vivo\rangle + \beta |\text{átomo estável}\rangle |Morto\rangle.$$

Esse resultado implica que, após passado o tempo médio de decaimento, o gato estará num estado superposto entre dois estados macroscópicos distintos: $|Vivo\rangle$ e $|Morto\rangle$. Schrödinger utilizou o termo *Verschränkung* para descrever esta relação entre o gato e o átomo que, do alemão para o inglês foi traduzido para *entanglement* e em português virou *emaranhamento*.

Por quase 30 anos essa discussão ficou restrita ao âmbito das ideias e das argumentações até que em 1964, John S. Bell [4] conseguiu quantificar, por meio de uma desigualdade¹, o limite que uma teoria local não poderia atravessar. No início da década de 80 do século XX, expe-

¹Conhecida atualmente como a desigualdade de Bell.

rimentos [5, 6] foram realizados e fortaleceram definitivamente a não-localidade da Mecânica Quântica.

No fim da década de 90 do século passado, o emaranhamento já era visto como uma ferramenta de extrema utilidade que poderia ser utilizado na implementação de tarefas que até então eram impossíveis de serem implementadas classicamente, tais como o teletransporte, a codificação superdensa e a criptografia quântica. Esses novos fenômenos integram o que atualmente é conhecido como Computação Quântica e Informação Quântica [7].

Hoje em dia a área da Computação e Informação Quânticas está bastante desenvolvida e solidificada, mas uma questão de extrema importância, que ainda está em aberto, é como identificar se um sistema qualquer é ou não emaranhado. Existe uma série de critérios que caracterizam o emaranhamento para certos sistemas [7–11].

Um critério muito utilizado é o critério de Peres-Horodecki. Asher Peres propôs [12], que a positividade da transposição parcial do operador densidade é uma condição necessária para que o sistema seja emaranhado. A suficiência foi demonstrada por Michal, Pawel e Ryszard Horodecki [13], que é válida para espaços de Hilbert com dimensão menor ou igual a 6. Devido às contribuições distintas de Peres e Horodecki, o critério recebeu o nome de ambos.

Simon [14] conseguiu escrever o critério de Peres-Horodecki de uma forma muito mais operacional, a partir da utilização da matriz de variância, sendo conhecido como critério de Simon. Além disso Simon conseguiu mostrar, nesse mesmo artigo, que para estados gaussianos o critério de Peres-Horodecki torna-se uma condição necessária e suficiente.

Um fator importante que só começou a ser considerado recentemente é a temperatura. Na física, efeitos de temperatura são capazes de alterar completamente as propriedades de um sistema. No contexto da Teoria Quântica de Campos (TQC), os efeitos de temperatura foram acomodados de forma satisfatória inicialmente por Matsubara 1955 [15–17] introduzindo o que passou a ser conhecido de formalismo de tempo imaginário. Existe também o formalismo proposto por Schwinger [15, 16], em tempo real, capaz de tratar sistemas fora do equilíbrio.

Existe um outro formalismo, equivalente ao formalismo de Schwinger, capaz de introduzir a temperatura de forma consistente. Esse formalismo é a Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) [15, 16, 18, 19], proposta por Umezawa e Takahashi em 1975. No presente trabalho, pretendemos utilizar o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos sobre os estados do tipo Bell [20, 21]. Em seguida, aplicamos o critério de Simon para observar como a temperatura e o emaranhamento se relacionam. A escolha do critério de Simon baseia-se na relação existente entre os estados gaussianos e os estados térmicos.

Este texto está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 introduzimos o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos, descrevendo os osciladores bosônicos e fermiônicos com dois modos, o que será utilizado ao longo da dissertação. Veremos a importância da Transformação de Bogoliubov dentro deste formalismo, juntamente com a noção de operadores termalizados. Finalizamos este capítulo falando sobre o operador densidade termalizado.

Já no capítulo 3, realizamos uma introdução à área da Computação Quântica e da Informação Quântica. Descrevemos o que são os q-bits, portas lógicas quânticas e circuitos quânticos. Observamos como o conceito de emaranhamento surge naturalmente da descrição da Mecânica Quântica. Demonstramos o critério do Simon, que será utilizado ao longo do texto. Por fim, citamos uma série de critérios que também são utilizados na teoria da Computação e Informação Quânticas.

O capítulo 4 é destinado a apresentação e análise dos resultados. Neste capítulo termalizamos o estado de Bell e encontramos o operador densidade termalizado associado a esse estado; a partir dele fomos capazes de encontrar a matriz variância, necessária para a aplicação do critério de Simon; analisamos os efeitos de temperatura para esse estado de Bell a partir do critério de Simon e calculamos o Fator de Mandel, a Fidelidade Quântica e a Função de Wigner, que concordaram com os nossos resultados.

No capítulo 5, finalizamos essa dissertação apresentando as nossas conclusões e perspectivas.

2 *Dinâmica de Campos Térmicos*

Existem diversos formalismos para introduzir a temperatura em sistemas quânticos [15, 18, 19]. Há o formalismo de tempo imaginário, introduzido por Matsubara em 1955, que explora a semelhança entre o operador densidade e o operador evolução temporal, fazendo a associação $\beta \leftrightarrow \frac{it}{\hbar}$, que leva o tempo a ser um número imaginário puro. O formalismo de Schwinger, a tempo real, que utiliza as integrais de trajetória para contornos temporalmente fechados, sendo muito útil na descrição de sistemas fora do equilíbrio.

Uma outra formulação, que adotaremos ao longo deste trabalho, é a Dinâmica de Campos Térmicos (DCT). Desenvolvida por Umezawa e Takahashi em 1975, a DCT é uma formulação a tempo real, equivalente à formulação de Matsubara, em que o espaço de Hilbert do sistema é duplicado quando o sistema entra em contato com um reservatório, caracterizando uma duplicação dos graus de liberdade do sistema.

2.1 Introdução ao Formalismo

Para um dado sistema em equilíbrio com um reservatório térmico, a Mecânica Estatística fornece que a média de um observável é

$$\langle A \rangle = \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H})}{Z(\beta)}, \quad (2.1)$$

sendo Tr o traço, H o Hamiltoniano e $Z(\beta)$ a função de partição, que é $Z(\beta) = \text{Tr}e^{-\beta H}$. Em termos dos autoestados $|n\rangle$ do hamiltoniano, $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H})}{Z(\beta)} \\ &= \sum_n \frac{e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle}{Z(\beta)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nossa motivação é encontrar um estado $|0(\beta)\rangle$, de modo que a média estatística de um operador qualquer seja igual a seu valor esperado no estado $|0(\beta)\rangle$ que será chamado futuramente de vácuo térmico. Portanto, queremos que

$$\langle A \rangle := \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle. \quad (2.3)$$

Primeiro tentaremos escrever $|0(\beta)\rangle$ em função dos autoestados de energia

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n | 0(\beta) \rangle \\ &= \sum_n g_n(\beta) |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $g_n(\beta) = \langle n | 0(\beta) \rangle$. Logo teremos que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} g_n^*(\beta) \langle n | A | m \rangle g_m(\beta) \\ &= \sum_n \frac{e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle}{Z(\beta)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

o que implica na seguinte igualdade

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{e^{-\beta E_n} \delta_{nm}}{Z(\beta)}, \quad (2.6)$$

isto é, a condição necessária para que $|0(\beta)\rangle$ possa ser escrito como combinação linear dos autoestados do hamiltoniano ¹ é que as funções $g_n(\beta)$ satisfaçam uma condição de ortogonalidade, que é um absurdo já que o espaço das funções, munido do produto usual de funções², não tem como satisfazer uma relação de ortogonalidade. Logo, $|0(\beta)\rangle \notin \mathbb{H}$.

Para que a equação (2.6) seja satisfeita, uma possibilidade é que $g_n(\beta)$ seja um vetor de um espaço de Hilbert. Consequentemente, definimos que

$$g_n(\beta) = \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |\tilde{n}\rangle \in \tilde{\mathbb{H}}, \quad (2.7)$$

o que resulta em,

¹E consequentemente, pertença a \mathbb{H} .

²O produto ponto a ponto.

$$\begin{aligned}
g_n^*(\beta)g_m(\beta) &= \langle \tilde{n} | \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} \frac{e^{-\frac{\beta E_m}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} | \tilde{m} \rangle \\
&= \frac{e^{-\beta E_n} \delta_{nm}}{Z(\beta)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Então, o estado térmico, com relação ao qual o valor esperado resulta na média estatística, tem que ter a forma

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n, \tilde{n}\rangle \in \mathbb{H} \otimes \tilde{\mathbb{H}}. \tag{2.9}$$

Desse modo, a construção do estado térmico requer a duplicação dos graus de liberdade do sistema, isto é, a criação de um segundo espaço de Hilbert, com as mesmas propriedades do espaço original, que denotaremos por espaço til ($\tilde{\cdot}$). Existem várias interpretações para a existência desse espaço til, sendo de particular interesse a argumentação de Araki e Woods [22] que, a partir da Teoria Quântica de Campos (TQC) axiomática de Wightman, prevê que numa TQC à temperatura finita seria necessário a duplicação dos graus de liberdade. A interpretação de cada espaço de Hilbert pode ser encontrada em [18] que explora a relação entre observáveis e grandezas conservadas.

Como $\tilde{\mathbb{H}}$ é uma réplica de \mathbb{H} , as álgebras A_i de operadores sobre esses dois espaços são isomorfas, de modo que podemos definir um mapeamento entre essas álgebras, dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{\cdot} : C^*(\mathbb{H}) &\rightarrow C^*(\tilde{\mathbb{H}}), \\
\widetilde{(A_i A_j)} &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \\
\widetilde{(c_i A_i + A_j)} &= c_i^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \\
\widetilde{(A_i^\dagger)} &= (\tilde{A}_i)^\dagger
\end{aligned} \tag{2.10}$$

e

$$[A_i, \tilde{A}_k] = 0. \tag{2.11}$$

No espaço duplicado, $\mathbb{H} \otimes \tilde{\mathbb{H}}$, o estado de vácuo é o estado de menor energia associado a cada espaço, ou seja, $|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$. Nesse contexto, a transformação de Bogoliubov pode ser definida como sendo a transformação que leva o estado $|0, \tilde{0}\rangle$ ao estado termalizado $|0(\beta)\rangle$, isto é,

$$U(\beta) : \mathbb{H} \otimes \tilde{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{H} \otimes \tilde{\mathbb{H}},$$

ou, especificamente,

$$U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle = |0(\beta)\rangle. \quad (2.12)$$

Tendo os elementos básicos necessários para introduzir o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos, trataremos agora dos osciladores harmônicos Bosônico e Fermiônico.

2.2 Oscilador Harmônico Bosônico Termalizado

O Hamiltoniano do oscilador harmônico unidimensional é dado por

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 m x^2}{2} \\ &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

em que $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right)$ é o operador de aniquilação, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$ é o operador de criação, $N = a^\dagger a$ é o operador número, e notaremos o comutador por $[\cdot, \cdot]$. Como $[q, p] = i\hbar$, fazendo $\hbar = 1$ e redefinindo a energia de ponto zero temos que

$$\begin{aligned} H &= \omega N = \omega a^\dagger a; \\ [a, a^\dagger] &= 1; [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger], \end{aligned}$$

e para os estados $|n\rangle$ segue que

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle; \\ a|0\rangle &= 0, \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ N|n\rangle &= a^\dagger a|n\rangle \\ &= n|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Para dois modos desacoplados do oscilador harmônico, teremos que

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{\omega_1^2 m x_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{\omega_2^2 m x_2^2}{2}, \quad (2.14)$$

ou seja,

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 = \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2, \quad (2.15)$$

em que $a_1, a_1^\dagger, a_2, a_2^\dagger, N_1$ e N_2 são os operadores de aniquilação e criação do primeiro modo, de aniquilação e criação do segundo modo e os operadores número do primeiro modo e do segundo modo respectivamente. Como não há acoplamento entre os osciladores, teremos a quantização usual, que acarreta em

$$[a_i, a_j] = 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]; \quad [a_i, a_i^\dagger] = 1$$

e

$$\begin{aligned} a_1 |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_1} |n_1 - 1, n_2\rangle, \\ a_1 |0, n_2\rangle &= 0, \\ a_2 |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_2} |n_1, n_2 - 1\rangle, \\ a_2 |n_1, 0\rangle &= 0, \\ a_1^\dagger |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_1 + 1} |n_1 + 1, n_2\rangle, \\ a_2^\dagger |n_1, n_2\rangle &= \sqrt{n_2 + 1} |n_1, n_2 + 1\rangle, \\ N_1 |n_1, n_2\rangle &= n_1 |n_1, n_2\rangle, \\ N_2 |n_1, n_2\rangle &= n_2 |n_1, n_2\rangle. \end{aligned}$$

Para o oscilador harmônico com dois modos, o espaço de Hilbert é $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$. Por construção, o estado térmico $|0(\beta)\rangle \in \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2 \otimes \widetilde{\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2}$; então

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\beta E_{n_1, n_2}}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pela condição de normalização, $\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta)|0(\beta) \rangle &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \frac{e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}}{Z(\beta)} \\
&= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} e^{-\beta\omega_1 n_1} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{+\infty} e^{-\beta\omega_2 n_2} \right) \frac{1}{Z(\beta)} \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

que é o produto de duas séries geométricas. Logo

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_1}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_2}}. \tag{2.18}$$

Então, o estado térmico é

$$\begin{aligned}
|0(\beta) \rangle &= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_1}} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_2}} e^{-\frac{\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}{2}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2 \rangle \\
&= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_1}} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_2}} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} e^{-\frac{\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}{2}} \frac{a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger}{n_1!} \frac{a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger}{n_2!} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle \\
&= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_1}} \sqrt{1 - e^{-\beta\omega_2}} e^{(e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger)} e^{(e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

É possível reescrever $e^{-\frac{\beta\omega_i}{2}} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger$ na forma $U = e^{-i\theta(\beta)G}$ em que G é um operador hermitiano e $\theta(\beta)$ uma função real de β : definindo as funções hiperbólicas

$$\begin{aligned}
\cosh\theta(\beta)_i &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}}} = u(\beta)_i, \\
\sinh\theta(\beta)_i &= \frac{e^{-\beta\omega_i}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}}} = v(\beta)_i,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

então

$$\sqrt{1 - e^{-\beta\omega_i}} e^{(e^{-\frac{\beta\omega_i}{2}} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle = \cosh^{-1}\theta(\beta)_i e^{\tanh\theta(\beta)_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle; \tag{2.21}$$

e, utilizando a identidade $e^{\tanh\alpha B} e^{\text{Incosh}\alpha[A, B]} e^{\tanh\alpha A} = e^{\alpha(A+B)}$, notando que $e^{f(\beta; a_i, a_i^\dagger, \tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger) a_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle = 0$ e que $e^{f(\beta; a_i, a_i^\dagger, \tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger) \tilde{a}_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0} \rangle = 0$, teremos que a equação (2.21) fica da forma

$$\begin{aligned}
& e^{\tanh\theta(\beta)_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger} e^{\ln(\cosh^{-1}\theta(\beta)_i)} e^{-\ln(\cosh\theta(\beta)_i) \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i} e^{-\ln(\cosh\theta(\beta)_i) a_i^\dagger a_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > \\
= & e^{\tanh\theta(\beta)_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger} e^{-\ln(\cosh\theta(\beta)_i) [1 + \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i + a_i^\dagger a_i]} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > \\
= & e^{\tanh\theta(\beta)_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger} e^{-\ln(\cosh\theta(\beta)_i) [\tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i + a_i^\dagger a_i]} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > \\
= & e^{\tanh\theta(\beta)_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger} e^{-\ln(\cosh\theta(\beta)_i) [\tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i + a_i^\dagger a_i]} e^{-\tanh\theta(\beta)_i \tilde{a}_i \tilde{a}_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > . \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Fazendo então a associação

$$\begin{aligned}
A &= -\tilde{a}_i a_i, \\
B &= a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger, \\
[A, B] &= -\tilde{a}_i \tilde{a}_i^\dagger - a_i^\dagger a_i, \\
\alpha &= \theta(\beta)_i,
\end{aligned}$$

encontramos que a equação (2.22) torna-se

$$e^{-\theta(\beta)_i (\tilde{a}_i a_i - \tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > = e^{-iG(\beta)_i} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > ,$$

em que, $G(\beta)_i = -i\theta(\beta)_i (\tilde{a}_i a_i - \tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger)$ é hermitiano. Com isso, podemos reescrever a equação (2.19) como sendo

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= e_1^{-iG(\beta)_1} e_2^{-iG(\beta)_2} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > \\
&= e^{-iG(\beta)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle > , \tag{2.23}
\end{aligned}$$

já que $e^A e^B = e^{A+B}$, quando $[A, B]=0$, e definimos $G(\beta) = -i\theta(\beta)_1 (\tilde{a}_1 a_1 - \tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger) - i\theta(\beta)_2 (\tilde{a}_2 a_2 - \tilde{a}_2^\dagger a_2^\dagger)$.

Por construção, $U(\beta) = e^{-iG(\beta)}$ é a transformação de Bogoliubov e leva o vácuo duplicado não térmico no estado térmico $|0(\beta)\rangle >$.

2.2.1 Operadores Termalizados

A partir da construção do estado termalizado, obtivemos a forma explícita da transformação de Bogoliubov. Podemos, de forma natural³, introduzir o conceito de operadores termalizados

³Seguindo os conceitos da Teoria de Grupos.

como sendo aqueles obtidos pela transformação de similaridade

$$F(\beta) = U(\beta)FU^\dagger(\beta), \quad (2.24)$$

em que F é um operador não-termalizado.

Sendo assim, os operadores de criação e aniquilação térmicos são

$$\begin{aligned} a_i^\dagger(\beta) &= U(\beta)a_i^\dagger U^\dagger(\beta), \\ a_i(\beta) &= U(\beta)a_i U^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i^\dagger(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}_i^\dagger U^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}_i(\beta) &= U(\beta)\tilde{a}_i U^\dagger(\beta), \end{aligned} \quad (2.25)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} a_i(\beta)|0(\beta)_i > &= U(\beta)a_i U^\dagger(\beta)U(\beta)|0_i, \tilde{0}_i > \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

e similarmente,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i(\beta)|0(\beta)_i > &= U(\beta)\tilde{a}_i U^\dagger(\beta)U(\beta)|0_i, \tilde{0}_i > \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

o que corrobora com a ideia de que $a_i(\beta)$ e $\tilde{a}_i(\beta)$ são operadores de destruição térmicos e que o estado térmico $|0(\beta) >$ é justamente o vácuo térmico.

Utilizando a relação $e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!}[B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots$, e os resultados

$$\begin{aligned}
[G, a_i] &= -i\theta(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger, \\
[G, \tilde{a}_i^\dagger] &= -i\theta(\beta)_i a_i, \\
[G, [G, a_i]] &= -\theta(\beta)_i^2 a_i, \\
[G, \tilde{a}_i] &= -i\theta(\beta)_i a_i^\dagger, \\
[G, a_i^\dagger] &= -i\theta(\beta)_i \tilde{a}_i, \\
[G, [G, \tilde{a}_i]] &= -\theta(\beta)_i^2 \tilde{a}_i,
\end{aligned}$$

podemos escrever das relações (2.25) que

$$\begin{aligned}
a_i(\beta) &= U(\beta) a_i U^\dagger(\beta) \\
&= e^{-iG} a_i e^{iG} \\
&= a_i + (-i)[G, a_i] + \frac{(-i)^2}{2!} [G, [G, a_i]] + \frac{(-i)^3}{3!} [G, [G, [G, a_i]]] + \dots, \\
&= \cosh\theta(\beta)_i a_i - \sinh\theta(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger \\
&= u(\beta)_i a_i - v(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

E com um desenvolvimento similar, encontramos as seguintes relações:

$$\tilde{a}_i^\dagger = \cosh\theta(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger - \sinh\theta(\beta)_i a_i = u(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger - v(\beta)_i a_i, \tag{2.29}$$

$$a_i^\dagger = \cosh\theta(\beta)_i a_i^\dagger - \sinh\theta(\beta)_i \tilde{a}_i = u(\beta)_i a_i^\dagger - v(\beta)_i \tilde{a}_i, \tag{2.30}$$

e

$$\tilde{a}_i = \cosh\theta(\beta)_i \tilde{a}_i - \sinh\theta(\beta)_i a_i^\dagger = u(\beta)_i \tilde{a}_i - v(\beta)_i a_i^\dagger. \tag{2.31}$$

Consequentemente, podemos escrever os operadores não térmicos em termos dos operadores térmicos, multiplicando convenientemente por $u(\beta)_i$ ou por $v(\beta)_i$ e lembrando que $u^2(\beta)_i - v^2(\beta)_i = \cosh^2(\beta)_i - \sinh^2(\beta)_i = 1$. Assim

$$a_i = u(\beta)_i a_i(\beta) + v(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger(\beta), \tag{2.32}$$

$$\tilde{a}_i^\dagger = u(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger(\beta) + v(\beta)_i a_i(\beta), \tag{2.33}$$

$$a_i^\dagger = u(\beta)_i a_i^\dagger(\beta) + v(\beta)_i \tilde{a}_i(\beta) \quad (2.34)$$

e

$$\tilde{a}_i = u(\beta)_i \tilde{a}_i(\beta) + v(\beta)_i a_i^\dagger(\beta). \quad (2.35)$$

A partir da análise das equações (2.29), (2.31), (2.33) e (2.35) temos que a aplicação de duas transformações til é compatível com $(\tilde{\tilde{a}}_i) = a_i$.

Uma propriedade interessante, que será útil futuramente, é que

$$\begin{aligned} a_i(\beta)|0(\beta)\rangle &= (u(\beta)_i a_i - v(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger)|0(\beta)\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(\beta)_i a_i |0(\beta)\rangle = v(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger |0(\beta)\rangle. \quad (2.36)$$

Similarmente para $\tilde{a}_i(\beta)$ ⁴, temos

$$u(\beta)_i \tilde{a}_i |0(\beta)\rangle = v(\beta)_i a_i^\dagger |0(\beta)\rangle. \quad (2.37)$$

Logo

$$\begin{aligned} a_i^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= (u(\beta)_i a_i^\dagger - v(\beta)_i \tilde{a}_i)|0(\beta)\rangle \\ &= (u(\beta)_i a_i^\dagger - v(\beta)_i \frac{v(\beta)_i a_i^\dagger}{u(\beta)_i})|0(\beta)\rangle, \end{aligned} \quad (2.38)$$

que, como $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$, resulta em

$$a_i^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{a_i^\dagger}{u(\beta)_i} |0(\beta)\rangle, \quad (2.39)$$

e, como $[a_i^\dagger(\beta), a_i^\dagger] = 0$,

$$(a_i^\dagger(\beta))^n |0(\beta)\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^n}{u^n(\beta)_i} |0(\beta)\rangle. \quad (2.40)$$

⁴Ou aplicando a operação $\tilde{\cdot}$.

Concluindo essa seção calcularemos o valor médio do operador número de ocupação⁵,

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle_\beta &= \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \sum_{i=1}^2 (u(\beta) a_i^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}_i(\beta)) (u(\beta) a_i(\beta) + v(\beta) \tilde{a}_i^\dagger(\beta)) | 0(\beta) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^2 v_i(\beta)^2 \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

em que $N = \sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i$. O valor médio do operador número é justamente a distribuição de Bose-Einstein associada a cada modo do oscilador harmônico.

2.3 Oscilador Harmônico Fermiônico Termalizado

Partindo da mesma equação (2.14) do oscilador harmônico bosônico, agora considerando a relação de anticomutação $\{\cdot, \cdot\}$ para os observáveis, consideramos o hamiltoniano

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2,$$

com os operadores de criação e aniquilação satisfazendo as relações

$$\{a_i, a_i^\dagger\} = 1,$$

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = \{a_2^\dagger, a_1\} = \{a_1^\dagger, a_2\} = 0. \tag{2.42}$$

Já que $(a_i^\dagger)^2 = 0$, o espaço de Fock é composto por apenas 4 estados, $|0, 0\rangle$, $|0, 1\rangle$, $|1, 0\rangle$ e $|1, 1\rangle$, em que

$$H |n_i, n_j\rangle = (\omega_i n_i + \omega_j n_j) |n_i, n_j\rangle.$$

⁵Que, por construção, é o valor esperado no estado de vácuo térmico.

Portanto, o vácuo termalizado é dado por

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \sum_{n_1, n_2} \frac{e^{-\frac{\beta E_{n_1, n_2}}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \{1 + e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger + e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger + e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger\} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \{1 + e^{-\frac{\beta\omega_1}{2}} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger\} \{1 + e^{-\frac{\beta\omega_2}{2}} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger\} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

onde temos que

$$\begin{aligned}
|10, \tilde{1}\tilde{0}\rangle &= a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger |0, 0, \tilde{0}\tilde{0}\rangle \\
&= -\tilde{a}_1^\dagger a_1^\dagger |0, 0, \tilde{0}\tilde{0}\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|11, \tilde{1}\tilde{1}\rangle &= a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger |0, 0, \tilde{0}\tilde{0}\rangle \\
&= \tilde{a}_2^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger |0, 0, \tilde{0}\tilde{0}\rangle.
\end{aligned}$$

Pela condição de normalização de $|0(\beta)\rangle$, i.é,

$$\begin{aligned}
\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= Z^{-1}(\beta)(1 + e^{-\beta\omega_1})(1 + e^{-\beta\omega_2}) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

obtemos

$$Z(\beta) = (1 + e^{-\beta\omega_1})(1 + e^{-\beta\omega_2}). \tag{2.44}$$

Então a equação (2.43) torna-se

$$|0(\beta)\rangle = (1 + e^{-\beta\omega_1})^{-1/2} (1 + e^{-\beta\omega_2})^{-1/2} (1 + e^{-\beta\omega_1/2} a_1^\dagger \tilde{a}_1^\dagger) (1 + e^{-\beta\omega_2/2} a_2^\dagger \tilde{a}_2^\dagger) |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle. \tag{2.45}$$

Podemos introduzir a transformação de Bogoliubov. Definindo

$$\begin{aligned}
u(\beta)_i &= \cos\theta(\beta)_i = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega_i}}}, \\
v(\beta)_i &= \sin\theta(\beta)_i = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega_i}}}, \tag{2.46}
\end{aligned}$$

e percebendo, a partir das relações (2.42), que

$$(\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)^{2n} |00, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle = (-1)^n |00, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle$$

e

$$(\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)^{2n+1} |00, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle = (-1)^{n+1} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger |00, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle, \quad (2.47)$$

a equação (2.45) para o vácuo térmico pode ser escrita como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \prod_{i=1}^2 \{ \cos \theta(\beta)_i + \sin \theta(\beta)_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger \} |00, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\ &= \prod_{i=1}^2 \left\{ 1 - \theta(\beta) (\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger) + \frac{\theta(\beta)}{2!} (a_i \tilde{a}_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)^2 + \dots \right\} |00, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\ &= \prod_{i=1}^2 e^{-\theta(\beta) (\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{-iG(\beta)} |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde $G = -i\theta(\beta)_i \sum_{i=1}^2 (\tilde{a}_i a_i - a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger)$ e define uma transformação de Bogoliubov semelhante ao do oscilador bosônico, mas lembrando que aqui os operadores anticomutam.

2.3.1 Operadores Termalizados

Através da transformação de Bogoliubov encontrada podemos também, para o caso de férmions, introduzir os operadores térmicos a partir de uma transformação de similaridade

$$\begin{aligned} a(\beta) &= U(\beta) a U(\beta)^\dagger, \\ a^\dagger(\beta) &= U(\beta) a^\dagger U(\beta)^\dagger, \\ \tilde{a}(\beta) &= U(\beta) \tilde{a} U(\beta)^\dagger \end{aligned}$$

e

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = U(\beta) \tilde{a}^\dagger U(\beta)^\dagger. \quad (2.49)$$

Novamente utilizando que $e^{-iB} A e^{iB} = A + (-i)[B, A] + \frac{(-i)^2}{2!} [B, [B, A]] + \frac{(-i)^3}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots$ e as relações 2.42, teremos

$$\begin{aligned}
[G, a_i] &= -i\theta(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger, \\
[G, \tilde{a}_i^\dagger] &= i\theta(\beta)_i a_i, \\
[G, [G, a_i]] &= \theta^2(\beta)_i a_i, \\
[G, \tilde{a}_i] &= i\theta(\beta)_i a_i^\dagger, \\
[G, a_i^\dagger] &= -i\theta(\beta)_i \tilde{a}_i, \\
[G, [G, \tilde{a}_i]] &= \theta^2(\beta)_i \tilde{a}_i,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

relações similares ao caso do oscilador bosônico. Portanto, os operadores de criação e destruição termalizados serão

$$a_i(\beta) = u(\beta)a_i - v(\beta)\tilde{a}_i^\dagger, \tag{2.51}$$

$$\tilde{a}_i^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}_i^\dagger + v(\beta)a_i, \tag{2.52}$$

$$a_i^\dagger(\beta) = u(\beta)a_i^\dagger - v(\beta)\tilde{a}_i \tag{2.53}$$

e

$$\tilde{a}_i(\beta) = u(\beta)\tilde{a}_i + v(\beta)a_i^\dagger. \tag{2.54}$$

Diferente do caso bosônico, a partir das equações (2.52) e (2.54), temos que a aplicação de duas transformações til é compatível com $\widetilde{(\tilde{a})}_i = -a_i$. Com isso, as regras de conjugação til dão um resultado consistente. As relações inversas são

$$a_i = u(\beta)a_i(\beta) + v(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta),$$

$$\tilde{a}_i^\dagger = u(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger(\beta) - v(\beta)_i a_i(\beta),$$

$$a_i^\dagger = u(\beta)_i a_i^\dagger(\beta) + v(\beta)_i \tilde{a}_i(\beta),$$

e

$$\tilde{a}_i = u(\beta)\tilde{a}_i(\beta) - v(\beta)a_i^\dagger(\beta), \tag{2.55}$$

com

$$u(\beta)a_i|0(\beta)\rangle = v(\beta)\tilde{a}_i^\dagger|0(\beta)\rangle \quad (2.56)$$

e

$$a_i^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{a_i^\dagger}{u(\beta)}|0(\beta)\rangle. \quad (2.57)$$

Por fim, calcularemos o valor médio do operador número de ocupação,

$$\begin{aligned} \langle N \rangle_\beta &= \langle 0(\beta) | \left(\sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i \right) | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | \left(\sum_{i=1}^2 (u(\beta)_i a_i^\dagger(\beta) + v(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger(\beta)) (u(\beta)_i a_i(\beta) + v(\beta)_i \tilde{a}_i^\dagger(\beta)) \right) | 0(\beta) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 v(\beta)_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{e^{\beta\omega_i} + 1} \end{aligned} \quad (2.58)$$

que é a distribuição de Fermi-Dirac para cada modo do oscilador fermiônico.

2.4 Operador Densidade Termalizado

O operador densidade, introduzido por Landau [23], é muito utilizado na Teoria Quântica por refletir aspectos inerente à teoria. Von-Neumann [24] utilizou-se do conceito de operador densidade para descrever ensembles puros e mistos.

Nesta seção vamos escrever o vácuo térmico em função do operador densidade e introduzir o conceito de operador densidade termalizado associado a um estado térmico $|\Psi(\beta)\rangle$. Pela definição de vácuo térmico (veja equação (2.9)), temos que

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta E_n}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta H}{2}}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \sqrt{\frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}} \sum_n |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \sqrt{\rho} \sum_n |n, \tilde{n}\rangle, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}. \quad (2.60)$$

A média térmica de um observável O assume a forma

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | O | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} \langle n, \tilde{n} | \sqrt{\rho} O \sqrt{\rho} | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle n | \sqrt{\rho} O \sqrt{\rho} | m \rangle \delta_{n,m} \\ &= \sum_n \langle n | \sqrt{\rho} O \sqrt{\rho} | n \rangle \\ &= \text{Tr}(\sqrt{\rho} O \sqrt{\rho}) \\ &= \text{Tr}(\rho O). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Considerando um estado térmico qualquer, $|\Psi(\beta)\rangle = f(a(\beta), a^\dagger(\beta)) |0(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger; \beta) |0(\beta)\rangle$, temos que a média de um observável sobre esse estado térmico, será dada pelo traço do operador densidade térmico associado a esse estado, isto é,

$$\langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle = \text{Tr}(\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} O). \quad (2.62)$$

Logo, o operador densidade térmico é obtido considerando que

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\beta) | O | \Psi(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) O f(a, a^\dagger; \beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= \text{Tr}(f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) O f(a, a^\dagger; \beta) \rho) \\ &= \text{Tr}(O f(a, a^\dagger; \beta) \rho f^\dagger(a, a^\dagger; \beta)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} = f(a, a^\dagger; \beta) \rho f^\dagger(a, a^\dagger; \beta). \quad (2.63)$$

Finalizamos essa seção escrevendo o operador densidade ρ para o oscilador harmônico bosônico com dois modos. Neste caso

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} = e^{-\beta(\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2)} (1 - e^{-\beta\omega_1}) (1 - e^{-\beta\omega_2})$$

e pela relação de completeza $\sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| = 1$ e ortogonalidade dos autoestados

do hamiltoniano, temos que

$$\rho = (1 - e^{-\beta\omega_1})(1 - e^{-\beta\omega_2}) \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} e^{-\beta(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} |n_1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2|. \quad (2.64)$$

Podemos escrever esse operador densidade em termos do número de ocupação $\bar{n}_i(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1}$, já que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \bar{n}_i(\beta)} &= \frac{1}{\frac{e^{\beta\omega_i}}{e^{\beta\omega_i} - 1}} \\ &= 1 - e^{-\beta\omega_i} \end{aligned} \quad (2.65)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\bar{n}_i(\beta)}{1 + \bar{n}_i(\beta)} &= \frac{1}{e^{\beta\omega_i} - 1} \frac{e^{\beta\omega_i} - 1}{e^{\beta\omega_i}} \\ &= e^{-\beta\omega_i} \end{aligned} \quad (2.66)$$

resultando então, para o operador densidade (2.60) a expressão

$$\rho = \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2}\right)^{n_2} |n_1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2|. \quad (2.67)$$

3 Computação Quântica, Informação Quântica e Critérios de Emaranhamento

Neste capítulo faremos uma introdução à Computação e Informação Quânticas, introduzindo os conceitos de q-bits, portas lógicas quânticas e circuitos quânticos [7,25,26]. Trazemos também o conceito de emaranhamento, como o ingrediente fundamental para a Computação e Informação Quânticas. Em seguida, faremos a análise do Critério de Simon, que usaremos ao longo desta dissertação. Por fim, discutiremos outros critérios que também podem ser utilizados dentro da teoria da Computação e Informação Quânticas.

3.1 Computação e Informação Quânticas

Em dezembro de 1959 Richard Feynman [27] proferiu uma palestra na Reunião Anual da Sociedade Americana de Física com o título: "Existe muito espaço lá embaixo." Nesse mesmo ano, Feynman instituiu um prêmio de U\$ 1.000,00 para quem resolvesse um dos dois problemas:

1. Construir um motor elétrico dentro de um cubo com arestas de 0,4mm.
2. Escrever a página de um livro em um espaço reduzido linearmente de 25 mil vezes.

O primeiro desafio foi resolvido em 1960 por Wiliam McLellan [28, 29], e o segundo por Tom Newman [28, 29] em 1985 ao escrever uma página de um livro, na cabeça de um alfinete utilizando feixe de elétrons.

Ainda na década de 70 do século XX, Gordon Moore publicou um artigo [30] sobre a redução do tamanho de componentes eletrônicos. Moore percebeu que o número de transistores dentro dos *chips* de computadores dobrava a cada ano e meio. Essa descoberta passou a ser conhecida como a Lei de Moore que, na verdade, acabou sendo uma superestimativa já que, em

1975 estimava-se o uso de 65 mil transistores pela Lei de Moore, enquanto que o processador 8086 da Intel, lançado naquele ano, tinha 29 mil transistores. A escalada, no entanto, continuou: em 2000, quando foi lançado o Pentium IV, foram empregados 42 milhões de transistores e com o processador Dual Core, foi ultrapassada a marca de um bilhão de transistores. Em 2008, físicos ingleses reportaram um transistor, construído em grafeno, com 10 átomos de comprimento e 1 átomo de espessura, cujo uso pode levar a números bem próximos do que estipulava a Lei de Moore para esse período [31].

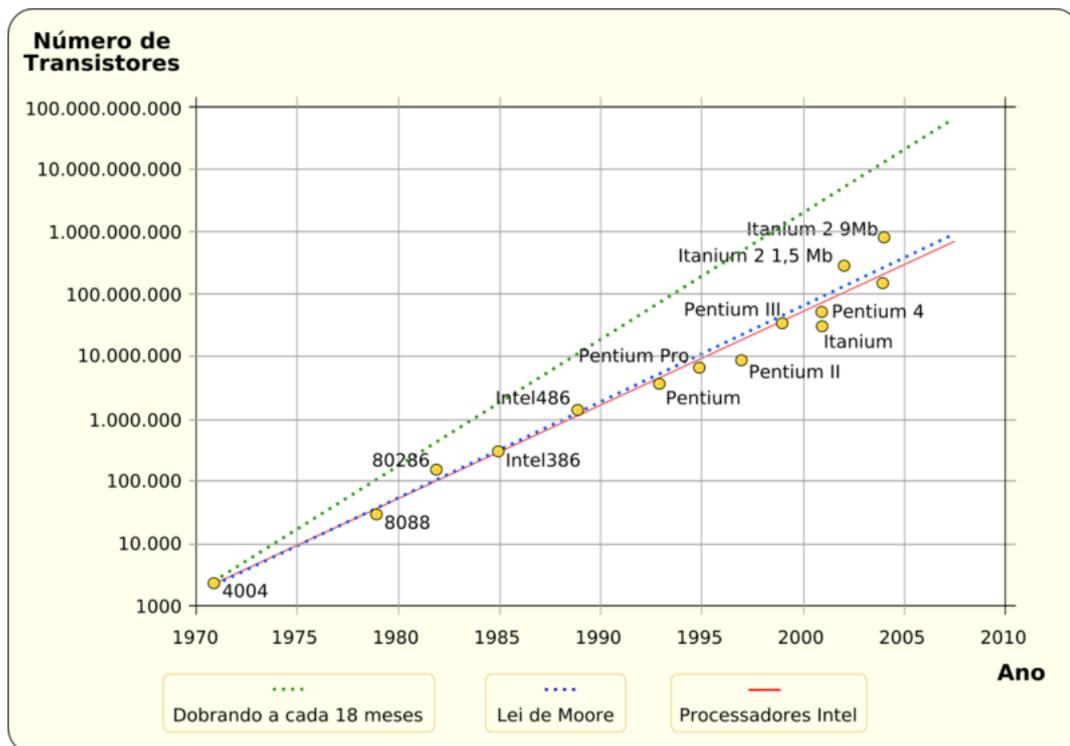


Figura 3.1: Lei de Moore

Como mostra a Figura 3.1¹, a Lei de Moore prevê que no ano de 2020, cada bit de informação em um computador será representado por apenas um átomo, que é a região onde a Mecânica Quântica detém o controle. Portanto, a partir de 2020, a Física Clássica não seria mais aplicável aos componentes do computador, que deverão ser descritos pelas leis da Física Quântica. Com isso, a Lei de Moore estabelece uma conexão entre duas áreas que inicialmente pareciam ser bem distintas. A junção da Mecânica Quântica com a Teoria da Computação dá origem a um novo campo de pesquisa, que é a *Computação Quântica e a Informação Quântica*.

Um dos primeiros grandes resultados desse novo campo de pesquisa foi o *Algoritmo de Shor*, descoberto em 1994 por Peter Shor [33]. O Algoritmo de Shor é um algoritmo quântico capaz de fatorar números inteiros com n bits num tempo polinomial em n , enquanto que o

¹Figura retirada da referência [32].

melhor algoritmo clássico executa a mesma tarefa num tempo exponencial em n , como mostra a Tabela 3.1².

Comprimento do número a ser fatorado (em bits)	Tempo de fatoração por algoritmo clássico	Tempo de fatoração com o algoritmo de Shor
512	4 dias	34 segundos
1024	100 mil anos	4,5 minutos
2048	100 mil bilhões de anos	36 minutos
4096	100 bilhões de quatrilhões de anos	4,8 horas

Tabela 3.1: Tabela Comparativa entre o Algoritmo de Shor e um Algoritmo Clássico.

Para se ter uma noção da dificuldade do problema de fatoração de números inteiros foi criado, em 1991, o desafio RSA (Rivest, Shamir e Adleman)³, com prêmios que iam até U\$ 200.000,00 para quem obtivesse a fatoração de certos números inteiros. Em 2010 [35] foi fatorado o RSA-768, com 232 dígitos, em 6 meses. Um computador clássico com um processador de 2.2GHz e 2G RAM levaria 500 anos para executar esta tarefa.

Essa descoberta confirma a observação de Feynman [36] no início da década de 80 do século XX, de que, certas tarefas executadas por um computador quântico não podem ser executadas por um computador clássico de modo eficiente. Em 1995, Lov Grover mostrou outra evidência do poder dos computadores quânticos, ao desenvolver um algoritmo de busca numa lista desordenada muito mais veloz que qualquer algoritmo clássico.

Devido a essas propriedades, um computador quântico poderia em princípio decifrar qualquer sistema em minutos. Segredos de Estado, transações financeiras, códigos militares poderiam ser decifrados em pouquíssimo tempo. Vários protótipos de computadores quânticos, utilizando algumas dezenas de bits quânticos, já foram testados com sucesso em laboratórios de todo o mundo [7]. O grau de desafio no momento é aumentar o número de bits quânticos mantendo as propriedades quânticas do sistema, de modo a ter um computador que possa realizar grandes operações.

²Tabela retirada da referência [34].

³RSA é um algoritmo de criptografia de dados que deve seu nome aos seus três inventores Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman.

3.2 Q-bits, Portas Lógicas e Circuitos Quânticos

3.2.1 Q-bits

A unidade fundamental da teoria clássica da informação é o bit, que pode assumir dois valores lógicos: 0 ou 1. Este objeto pode ser implementado de diversas formas: via eletricidade, a partir da utilização do nível de carga de um capacitor; por via da luz, a partir da utilização de fibras ópticas; por via de ondas eletromagnéticas, a partir da utilização de redes *wireless*; ou também por via de polarização magnética, utilizada em discos rígidos.

Já na Computação e Informação Quânticas, utiliza-se estados quânticos de modo que a unidade fundamental deve pertencer a um espaço de Hilbert \mathbb{H} . Esse objeto é denominado q-bit⁴, que pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (3.1)$$

em que os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são chamados de estados da base computacional⁵ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

O postulado da mecânica quântica que dá origem ao q-bit é o da superposição. Os estados clássicos possíveis poderiam ser imaginados como sendo os estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Já na mecânica quântica o estado resultante é a combinação linear dos estados admissíveis.

Um procedimento que é utilizado para obtermos uma visualização geométrica de um q-bit é a partir de

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ &= |\alpha|e^{i\gamma}|0\rangle + e^{i\eta}|\beta||1\rangle, \end{aligned}$$

podendo-se definir $|\alpha| = \cos(\theta/2)$ e $|\beta| = \sin(\theta/2)$, que mantém a condição de normalização; logo,

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}(\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i(\eta-\gamma)}\sin(\theta/2)|1\rangle),$$

onde $e^{i\gamma}$ é um fator de fase global e que pode ser desconsiderado por não alterar a amplitude de

⁴Quantum Binary Digit.

⁵Poderíamos, a priori, pensar em quaisquer estados linearmente independentes ($|e_1\rangle$ e $|e_2\rangle$) para descrever o q-bit. Usualmente utiliza-se a base computacional que é formada por $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

probabilidade. Fazendo $\eta - \gamma = \phi$, encontramos que

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle \quad (3.2)$$

Os números $(\theta, \phi, \langle \psi|\psi\rangle = 1)$ definem uma superfície esférica de raio unitário, conhecida como Esfera de Bloch, onde cada ponto dessa superfície representa um possível q-bit do sistema (veja Figura (3.2)).

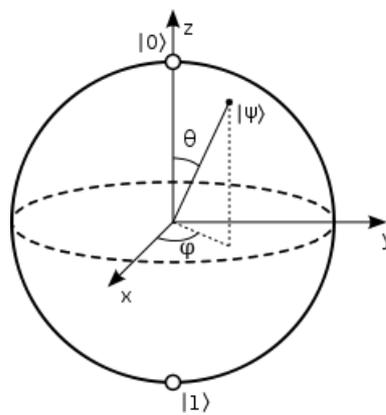


Figura 3.2: Representação do q-bit $|\psi\rangle$ na Esfera de Bloch.

Pelos postulados da Mecânica Quântica, o sistema constituído por dois q-bits é formado por

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \otimes (\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle) \\ &= \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

com a condição de que $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$.

De modo análogo podemos definir 3 q-bits, 4 q-bits e de modo geral, n q-bits.

3.2.2 Portas Lógicas

Um computador clássico é construído a partir de circuitos elétricos com portas lógicas. Do mesmo modo, um computador quântico é constituído de circuitos quânticos contendo portas lógicas quânticas que carregam e manipulam a informação quântica. Portanto as portas lógicas quânticas devem atuar sobre o estado, gerando um estado pertencente ao mesmo espaço de Hilbert e preservando a norma do vetor de estado. Dentro da Teoria Quântica, os objetos com essas características são justamente os operadores unitários.

De modo geral, podemos afirmar que toda porta lógica quântica está associada a uma transformação unitária. Para um q-bit, podemos utilizar uma representação matricial de dimensão 2, de modo que

$$|0\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

deste modo, portas lógicas quânticas poderão ser representadas por matrizes unitárias 2x2.

A porta lógica quântica NÃO⁶, que notaremos por X, atua no q-bit invertendo o estado, ou seja,

$$X|0\rangle = |1\rangle; \quad X|1\rangle = |0\rangle; \quad (3.6)$$

logo, a representação matricial de X é

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

pois

$$\begin{aligned} X|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \\ &= \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Uma outra porta lógica quântica de interesse é a troca de fase, que notaremos por Z. Essa

⁶Em inglês NOT, negação.

porta é tal que

$$Z|0\rangle = |0\rangle; \quad Z|1\rangle = -|1\rangle; \quad (3.9)$$

logo, a representação matricial da troca de fase é

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

já que

$$\begin{aligned} Z|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \\ &= \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

As portas lógicas quânticas X e Z são justamente as matrizes de Pauli σ_x e σ_z , implicando em que uma outra porta lógica quântica seja

$$\begin{aligned} Y &= ZX \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Além dessas portas lógicas introduziremos aqui a porta Hadamard, H. A aplicação dessa porta gera uma superposição dos estados quânticos, ou seja,

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + |1\rangle]$$

e

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle - |1\rangle], \quad (3.13)$$

de modo que a representação matricial da porta Hadamard é

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Segue então que:

$$\begin{aligned}
 H^2|0\rangle &= H\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[H|0\rangle + H|1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right]\right\} \\
 &= |0\rangle
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

e

$$\begin{aligned}
 H^2|1\rangle &= H\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle - |1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[H|0\rangle - H|1\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right]\right\} \\
 &= |1\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Temos também a porta lógica quântica de fase, que notaremos por S, tal que

$$S|0\rangle = |0\rangle; S|1\rangle = i|1\rangle, \tag{3.17}$$

cuja representação matricial é

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

e a porta lógica quântica $\pi/8$, que notaremos por T, tal que

$$T|0\rangle = |0\rangle; T|1\rangle = e^{i\pi/4}|1\rangle, \tag{3.19}$$

que podemos representá-la como

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

O fato da porta ser chamada de $\pi/8$ apesar de termos uma rotação de $\pi/4$ é histórico.

Inicialmente considerava-se

$$\begin{aligned} \pi/8 &= \begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/8} \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\pi/8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

que é equivalente à nossa definição (3.20) de T , a menos de uma fase global.

Podemos também definir portas lógicas quânticas para muitos q-bits de forma análoga a que fizemos para 1 q-bit. Para exemplificar essa ideia vamos discutir a porta lógica quântica NÃO-Controlado⁷ para 2 q-bits. A representação de 2 q-bits é $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$, onde

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

A porta CNOT faz com que, quando o primeiro q-bit for $|0\rangle$ seja mantido o segundo inalterado e, quando o primeiro for $|1\rangle$ inverta-se o segundo, i.é.,

$$\begin{aligned} CNOT|00\rangle &= |00\rangle, \\ CNOT|01\rangle &= |01\rangle, \\ CNOT|10\rangle &= |11\rangle, \\ CNOT|11\rangle &= |10\rangle, \end{aligned} \quad (3.23)$$

sendo então a representação matricial da porta CNOT dada por

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Um resultado importante [7] é que qualquer porta lógica quântica de múltiplos q-bits pode ser contruída a partir da porta CNOT e das portas de 1 q-bit.

⁷Em inglês Controlled NOT, CNOT

3.2.3 Circuitos Quânticos

Com as noções de bits quânticos e portas lógicas quânticas estabelecidas, podemos pensar numa coleção desses objetos, ou seja, num conjunto de portas lógicas quânticas atuando em vários q-bits. Isso constitui um Circuito Quântico.

Os circuitos quânticos possuem uma representação gráfica composta de linhas e símbolos, que especificaremos a seguir.

- O tempo "passa" da esquerda para direita.
- Cada q-bit é representado por uma linha horizontal.
- Cada porta lógica quântica é representada por uma caixa ou um círculo, que atua em um ou mais q-bits.
- As linhas verticais informam que o circuito atua simultaneamente sobre os q-bits ligados.
- O símbolo \bullet indica que o q-bit é de controle, ou seja, se estiver no estado $|1\rangle$ a porta lógica realiza a operação, caso esteja no estado $|0\rangle$ a porta não realiza operação alguma.

Exemplos desses circuitos são as Figuras 3.3⁸ e 3.4⁹

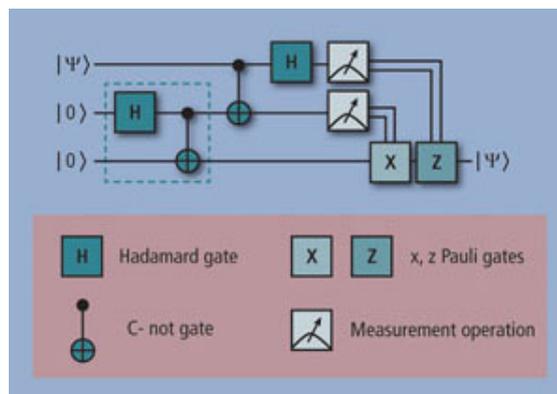


Figura 3.3: Exemplo de Circuito Quântico

⁸Figura retirada da referência [37].

⁹Figura retirada da referência [38].

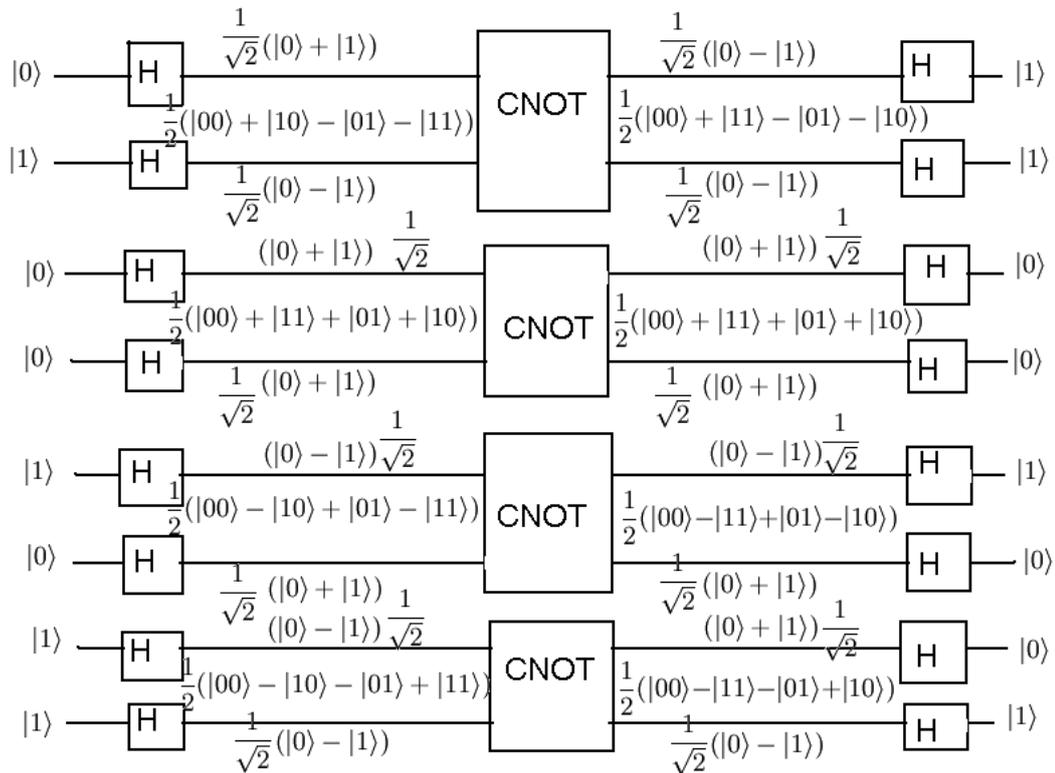


Figura 3.4: Exemplo de Circuitos Quânticos

3.3 Emaranhamento e Estados de Bell

A Mecânica Quântica surpreendeu e ainda surpreende em vários aspectos. A necessidade de descrever um sistema quântico num espaço de Hilbert e o fato que o espaço que caracteriza dois sistemas é o produto tensorial dos espaços de Hilbert, associados ao princípio de superposição, proporcionam coisas bem interessantes .

O espaço de Hilbert de 1 q-bit na base computacional é gerado por $\{|0\rangle, |1\rangle\} \in \mathbb{H}$. O espaço de Hilbert associado a 2 q-bits, pelos postulados da Mecânica Quântica, deve ser o produto tensorial desses dois espaços de Hilbert, e será gerado por $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$.

Existem estados admissíveis para o sistema total, formado de subsistemas, que não podem ser escritos como produto tensorial de estados de cada subsistema. Estados dessa forma são ditos serem estados emaranhados. De modo geral, um estado $|\Psi\rangle$ é dito ser emaranhado¹⁰, se

¹⁰Quando o estado não está emaranhado, ele é dito ser separável. A negação dessa proposição fornece, de forma equivalente, a definição para estados separáveis.

e somente se,

$$\nexists |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2 / |\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (3.25)$$

Uma forma mais geral de se definir emaranhamento é a partir do operador densidade. Podemos dizer que um sistema $\mathbb{H} = \mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$ é emaranhado se e somente se o operador densidade do sistema não pode ser escrito da forma

$$\rho^{AB} = \sum_j w_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B, \quad (3.26)$$

onde ρ^A , ρ^B e ρ^{AB} são respectivamente os operadores densidades do subsistema A, do subsistema B e do sistema formado por A e B.

Os estados emaranhados mais conhecidos na literatura são os estados de Bell [4]. São estados de 2 q-bits, maximamente emaranhados ¹¹ que podem ser encontrados a partir do seguinte circuito quântico:

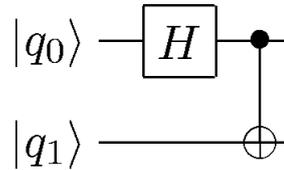


Figura 3.5: Circuito Quântico para os Estados de Bell

- Para $|q_0\rangle = |0\rangle$ e $|q_1\rangle = |0\rangle$

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= CNOT(H|0\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= CNOT\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] \otimes |0\rangle\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}CNOT[(|00\rangle + |10\rangle)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \end{aligned} \quad (3.27)$$

- Para $|q_0\rangle = |1\rangle$ e $|q_1\rangle = |0\rangle$

¹¹Dentro da teoria da Informação Quântica, existem formas de se quantificar o grau de emaranhamento [7].

$$\begin{aligned}
|\Phi^- \rangle &= CNOT(H|1 \rangle \otimes |0 \rangle) \\
&= CNOT\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0 \rangle - |1 \rangle)\right] \otimes |0 \rangle\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}CNOT[(|00 \rangle - |10 \rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00 \rangle - |11 \rangle). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

- Para $|q_0 \rangle = |0 \rangle$ e $|q_1 \rangle = |1 \rangle$

$$\begin{aligned}
|\Psi^+ \rangle &= CNOT(H|0 \rangle \otimes |1 \rangle) \\
&= CNOT\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0 \rangle + |1 \rangle)\right] \otimes |1 \rangle\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}CNOT[(|01 \rangle + |10 \rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01 \rangle + |10 \rangle). \tag{3.29}
\end{aligned}$$

- Para $|q_0 \rangle = |1 \rangle$ e $|q_1 \rangle = |1 \rangle$

$$\begin{aligned}
|\Psi^+ \rangle &= CNOT(H|1 \rangle \otimes |1 \rangle) \\
&= CNOT\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0 \rangle - |1 \rangle)\right] \otimes |1 \rangle\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}CNOT[(|01 \rangle - |11 \rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01 \rangle - |10 \rangle). \tag{3.30}
\end{aligned}$$

As duas definições (3.25) e (3.26) para emaranhamento não são muito práticas para se julgar se um sistema está ou não emaranhado. Em geral, verificar se $|\Psi \rangle$ ou ρ podem ser decompostos como produtos tensoriais é uma tarefa difícil; dizemos então que essas definições não são operacionais.

Dentro da teoria da Informação Quântica existem uma série de critérios operacionais para determinar se um sistema é ou não emaranhado. Esses critérios operacionais não são tão gerais quanto as definições (3.25) e (3.26), de modo que devemos utilizá-los observando seus domínios de validade. Ao longo deste capítulo, introduziremos alguns deles.

3.4 Critério de Simon

Critérios operacionais para a descrição do emaranhamento são um dos grandes problemas na área da Informação Quântica. Um critério operacional que utilizaremos ao longo dessa dissertação é o Critério de Simon [14].

Asher Peres [12] demonstrou que a positividade da transposição parcial do operador densidade é uma condição necessária para a separabilidade de um estado quântico e conjecturou a suficiência. Na referência [13], a família Horodecki demonstra que, para $\dim(\mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B) \leq 6$, a suficiência é válida; para espaços de Hilbert com dimensão maior que 6, eles exibiram um contra exemplo.

O critério resultante destes trabalhos ficou conhecido como critério de Peres-Horodecki. Simon [14] utilizou o sistema descrito por 2 modos do oscilador harmônico bosônico para encontrar uma forma mais operacional do critério de Peres-Horodecki; ele mostrou que a operação de transposição do operador densidade está relacionada a uma reflexão no espaço de fase. De fato, seja $f_w(q, p)$ a Função de Wigner que pode ser escrita como

$$f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{ipz/\hbar} \langle q - z/2 | \rho | q + z/2 \rangle. \quad (3.31)$$

A Função de Wigner associada ao operador densidade transposto é

$$\begin{aligned} f'_w(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{ipz/\hbar} \langle q - z/2 | \rho^T | q + z/2 \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{ipz/\hbar} \langle q + z/2 | \rho | q - z/2 \rangle; \end{aligned} \quad (3.32)$$

fazendo a reparametrização $z' = -z$, teremos que

$$\begin{aligned} f'_w(q, p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{i(-p)z'/\hbar} \langle q - z'/2 | \rho^T | q + z'/2 \rangle \\ &= f_w(q, -p). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Deste modo, a operação de transposição do operador densidade está associada a uma reflexão no Espaço de Fase.

$$\rho \rightarrow \rho^T \iff f_w(q, p) \rightarrow f_w(q, -p). \quad (3.34)$$

Utilizando a notação simplética para descrever esse sistema de 2 modos do oscilador harmônico bosônico, introduzamos a notação

$$\xi = (q_1, p_1, q_2, p_2); \quad [\xi_\alpha, \xi_\beta] = i\Omega_{\alpha,\beta}, \quad (3.35)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o comutador e a matriz $\Omega = [\Omega_{\alpha,\beta}]$ é dada por:

$$\Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

A transposição parcial do operador densidade ρ^{TB} estará associada à transformação

$$\begin{aligned} f'_w(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 e^{ip_1 z_1/\hbar} e^{ip_2 z_2/\hbar} \\ &\quad \times \langle q_1 - z_1/2, q_2 - z_2/2 | \rho^{TB} | q_1 + z_1/2, q_2 + z_2/2 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 e^{ip_1 z_1/\hbar} e^{ip_2 z_2/\hbar} \\ &\quad \times \langle q_1 - z_1/2, q_2 + z_2/2 | \rho | q_1 + z_1/2, q_2 - z_2/2 \rangle \\ &= f_w(q_1, p_1, q_2, -p_2), \end{aligned} \quad (3.37)$$

então

$$f'_w(q_1, p_1, q_2, p_2) = f_w(q_1, p_1, q_2, -p_2). \quad (3.38)$$

Essa transformação assume uma representação matricial, que é da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda\Omega\Lambda = \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Definindo a matriz de Variância $V_{\alpha,\beta} = \langle \{\Delta\xi_\alpha, \Delta\xi_\beta\} \rangle$, onde $\{A, B\} = \frac{1}{2}(AB + BA)$,

$\Delta\xi_\alpha = \xi_\alpha - \langle \xi_\alpha \rangle \mathbf{e} \langle \xi_\alpha \rangle = Tr\xi_\alpha$, encontra-se que

$$\begin{aligned}\Delta\xi_\alpha\Delta\xi_\beta &= \frac{1}{2}(\Delta\xi_\alpha\Delta\xi_\beta + \Delta\xi_\beta\Delta\xi_\alpha) + \frac{1}{2}(\Delta\xi_\alpha\Delta\xi_\beta - \Delta\xi_\beta\Delta\xi_\alpha) \\ &= \{\Delta\xi_\alpha, \Delta\xi_\beta\} + \frac{1}{2}[\xi_\alpha, \xi_\beta] \\ &= \{\Delta\xi_\alpha, \Delta\xi_\beta\} + \frac{i}{2}\Omega_{\alpha,\beta},\end{aligned}\tag{3.40}$$

e tomando a média dessa equação, teremos que [39]

$$V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0.\tag{3.41}$$

Se efetuarmos a operação de reflexão sobre o operador densidade, teremos que a matriz variância sofrerá uma transformação de similaridade, de modo que (3.41) torna-se:

$$\Lambda V \Lambda + \frac{i}{2}\Omega \geq 0.\tag{3.42}$$

Para encontrarmos uma expressão mais simples, que reúna as propriedades de (3.41) e (3.42), utilizaremos a Teoria de Grupos. Como estamos trabalhando sobre o espaço de fase tetradimensional, analisaremos a ação do Grupo Simplético $S_p(4, R)$ ¹² que mantém inalterada a estrutura simplética agindo unitariamente. Logo, teremos:

$$\begin{aligned}S &\in S_p(4, R); & S\Omega S^T &= \Omega \\ \xi &\rightarrow \xi' = S\xi, & [\xi'_\alpha, \xi'_\beta] &= i\Omega_{\alpha,\beta}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Vale a pena ressaltar que a atuação do Grupo Simplético sobre o espaço de Hilbert será da forma $|\psi'\rangle = U(S)|\psi\rangle$, onde $U(S)$ é a representação unitária de $S \in S_p(4, R)$, que mantém inalterada a relação entre o operador densidade e a Função de Wigner:

$$\rho \rightarrow U(S)\rho U(S)^\dagger \iff f_w(\xi) \rightarrow f_w(S^{-1}\xi).\tag{3.44}$$

Como estamos interessados numa condição para separabilidade do sistema, iremos tomar um subgrupo do Grupo Simplético que age separadamente em cada subsistema,

$$S_p(2, R) \otimes S_p(2, R) \subset S_p(4, R),\tag{3.45}$$

ou seja, estamos considerando o subgrupo $S_p(2, R) \otimes S_p(2, R)$ do Grupo Simplético $S_p(4, R)$.

¹²O $S_p(4, R)$ é o grupo simplético no espaço tetradimensional sobre os números reais.

O subgrupo $S_p(2, R)$ é um Grupo Simplético que atua num espaço bidimensional (q_i, p_i) sobre os números reais. Então, dado $S' \in S_p(2, R) \otimes S_p(2, R)$ e $S_i \in S_p(2, R)$,

$$S' = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}; \quad S_1 J S_1^T = S_2 J S_2^T = J. \quad (3.46)$$

Pela propriedade de simetria dos anticomutadores, a matriz de Variância pode ser escrita como sendo

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

onde A, B e C são matrizes 2x2. Devido à atuação de $S' \in S_p(2, R) \otimes S_p(2, R)$, mostra-se que é possível escrever (3.47), de forma que as matrizes A, B e C sejam diagonais, ou seja,

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

com $\det A = a^2$, $\det B = b^2$ e $\det C = c_1 c_2$.

Substituindo (3.48) em (3.41), teremos que

$$\begin{pmatrix} a & i/2 & c_1 & 0 \\ -i/2 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & i/2 \\ 0 & c_2 & -i/2 & b \end{pmatrix} \geq 0, \quad (3.49)$$

e calculando o determinante, encontraremos

$$a^2 b^2 - a c_2^2 b - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c_1 c_2}{4} + \frac{1}{16} + c_1^2 c_2^2 - a c_1^2 - \frac{c_1 c_2}{4} \geq 0, \quad (3.50)$$

que pode ser reescrito na forma

$$4(ab - c_1^2)(ab - c_2^2) \geq (a^2 + b^2) + 2c_1 c_2 - 1/4. \quad (3.51)$$

Substituindo os valores de $\det A$, $\det B$ e $\det C$ na equação (3.51), encontramos

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - \det C\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B). \quad (3.52)$$

Agora, para que o sistema seja separável, além de satisfazer a equação (3.41), também é necessário que a matriz variância satisfaça a relação (3.42). Como

$$\Lambda V \Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & -c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

pela equação (3.42) teremos

$$\begin{pmatrix} a & i/2 & c_1 & 0 \\ -i/2 & a & 0 & -c_2 \\ c_1 & 0 & b & i/2 \\ 0 & -c_2 & -i/2 & b \end{pmatrix} \geq 0, \quad (3.54)$$

que é similar à equação (3.49), a menos do sinal oposto em c_2 , que acarretará que $\det C \rightarrow -\det C$. Portanto, tomando o determinante da equação (3.54), encontraremos

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - (-\det C)\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B). \quad (3.55)$$

O requerimento que a matriz de variância satisfaça a condição de separabilidade (3.42) juntamente com a relação (3.41), é equivalente a que as equações (3.52) e (3.55) sejam satisfeitas. Portanto, encontramos que

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - |\det C|\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B), \quad (3.56)$$

o que constitui o Critério de Simon, que deve ser satisfeito por estados separáveis.

Esse critério de separabilidade é o critério que aplicaremos no próximo capítulo ao estado de Bell termalizado para podermos analisar o emaranhamento .

3.5 Outros Critérios de Emaranhamento

Além do Critério de Simon há na literatura outros. Por completeza, para finalizar este capítulo, citaremos alguns desses critérios utilizados dentro da Teoria da Informação Quântica para caracterizar o emaranhamento num sistema [8].

Critério de Peres : Se a transposta parcial de ρ não for positiva, então ρ é emaranhado, isto é

$$(\rho^{AB})^{T_A} \not\geq 0 \implies \text{Emaranhado} \quad (3.57)$$

tal que, a transposição parcial de $[\rho^{AB}]_{m\mu, n\eta} = \sum_i w_i [\rho_i^A]_{mn} [\rho_i^B]_{\mu\eta}$ em relação ao subsistema A é a transposição somente de $(\rho^A)_{mn}$, isto é, $[\rho^{AB}]_{n\mu, m\eta}$.

Critério de Horodecki : Um estado ρ é separável se, e somente se, para qualquer mapa positivo Φ , $\Phi\rho$ é positivo, isto é:

$$\text{Separável} \iff (\Phi \otimes I)(\sum_j w_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B) = \sum_j w_j (\Phi \rho_j^A) (\otimes \rho_j^B) \geq 0. \quad (3.58)$$

Um operador A é dito ser positivo se $Tr\{AP\} \geq 0$ para qualquer projetor P. Então um mapa é positivo se ele aplica operadores positivos em operadores positivos, isto é, se $A \geq 0$ então $\Phi(A) \geq 0$.

Critério de Peres-Horodecki : Um estado ρ com $dim\mathbb{H} \leq 6$ é emaranhado se e somente se a transposição parcial de ρ for não negativa, ou seja,

$$\rho^{T_A} \not\geq 0 \iff \text{Emaranhado}. \quad (3.59)$$

Critério Reduzido : Seja ρ^{AB} o operador densidade do sistema A e B. Os operadores reduzidos são definidos como sendo o traço sobre um dos subsistemas, ou seja, o operador reduzido $\rho_A = Tr_B \rho^{AB}$ e $\rho_B = Tr_A \rho^{AB}$. Uma condição suficiente para que o sistema seja emaranhado é que os operadores densidade reduzidos satisfaçam a relação

$$\rho_A \otimes I - \rho < 0 \quad \text{ou} \quad I \otimes \rho_B - \rho < 0. \quad (3.60)$$

Critério Entrópico : Seja S uma entropia extensiva, como por exemplo a entropia de Von-Neumann. A entropia condicional $S(A|B)$ é definida como sendo a diferença entre a

entropia do operador densidade ρ^{AB} e a do operador densidade reduzido $\rho_A = Tr_B \rho^{AB}$, isto é, $S(A|B) = S(\rho^{A,B}) - S(\rho_A)$; então

$$S(A|B) < 0 \implies \text{Emaranhado.} \quad (3.61)$$

Critério Algébrico : Dado uma álgebra (A), um ideal (I) a esquerda (direita) é um subconjunto de A $I \subset A$ tal que o produto de qualquer elemento da álgebra pela esquerda (direita) por um elemento do ideal resulta num elemento do ideal. Um ideal é dito minimal se ele não contém nenhum outro ideal .

A partir da identificação dos kets ($|>$) com ideais minimais à esquerda e os bras ($\langle|$) com ideais minimais à direita, Trindade [20] demonstrou o seguinte critério algébrico:

Uma sobreposição de ideais à esquerda minimais na álgebra produto $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}$ pode ser decomposto num produto tensorial dos ideais à esquerda minimais de cada álgebra se e somente se os coeficientes ζ_i da superposição satisfazem a relação:

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\zeta_3}{\zeta_4} = \dots = \frac{\zeta_{n-1}}{\zeta_n}, \quad (3.62)$$

onde o coeficiente ζ_1 é o coeficiente do primeiro elemento na ordem de dicionário, ζ_2 é coeficiente do segundo elemento e assim por diante.

4 *Analisando o Emaranhamento a partir da Dinâmica de Campos Térmicos*

Após termos introduzido o formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) e o critério de Simon pretendemos, nesse capítulo, utilizar a DCT na formulação do critério de Simon para extrair propriedades térmicas associadas ao emaranhamento. Pensando no estado de Bell fazemos essa análise, que é ratificada com o cálculo da Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a Função de Wigner.

4.1 Critério de Simon e Propriedades Térmicas

4.1.1 Operador Densidade Termalizado do Estado de Bell

Dentre os estados emaranhados os estados de Bell, que são estados maximamente emaranhados, têm uma grande importância histórica e uma boa realização experimental. Dentre eles, analisaremos o estado

$$|\psi\rangle = x|10\rangle + y|01\rangle, \quad (4.1)$$

onde estamos considerando pesos arbitrários, mas normalizados $|x|^2 + |y|^2 = 1$.

Para introduzirmos a temperatura, imaginaremos o sistema de estado $|\psi\rangle$ em um banho térmico, o que acarreta que o estado termalizado agora é descrito, de acordo com a DCT, considerando dois espaços de Hilbert, ou seja,

$$\mathbb{H} \otimes \tilde{\mathbb{H}} \ni |\psi\rangle \otimes |\tilde{00}\rangle = \{x|10, \tilde{00}\rangle + y|01, \tilde{00}\rangle\}. \quad (4.2)$$

onde a duplicação está sendo proposta em termos do vácuo, para garantir que quando $T \rightarrow 0$, retornemos ao estado original [18]. O estado térmico associado a $|\psi\rangle$ será o $|\psi(\beta)\rangle$ que, com

o uso da transformação de Bogoliubov do caso bosônico, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
|\psi(\beta)\rangle &= x|\beta; 10, \widetilde{00}\rangle + y|\beta; 01, \widetilde{00}\rangle, \\
&= \{xa_1^\dagger(\beta) + ya_2^\dagger(\beta)\}|\beta; 00, \widetilde{00}\rangle \\
&= \{xa_1^\dagger(\beta) + ya_2^\dagger(\beta)\}|0(\beta)\rangle.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Como já discutimos na seção 2.4, temos que o operador densidade termalizado satisfaz a relação

$$\langle \psi(\beta) | \widehat{O} | \psi(\beta) \rangle = \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} \widehat{O}. \tag{4.4}$$

Como, pela relação (2.39) $a_i^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{a_i^\dagger}{u(\beta)_i}|0(\beta)\rangle$, temos que

$$|\psi(\beta)\rangle = \left\{ x \frac{a_1^\dagger}{u_1(\beta)} + y \frac{a_2^\dagger}{u_2(\beta)} \right\} |\beta; 00, \widetilde{00}\rangle \quad e \quad \langle \psi(\beta) | = \langle 0(\beta) | \left\{ x \frac{a_1^\dagger}{u_1(\beta)} + y \frac{a_2^\dagger}{u_2(\beta)} \right\}^\dagger. \tag{4.5}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle \psi(\beta) | \widehat{O} | \psi(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | \{xa_1^\dagger(\beta) + ya_2^\dagger(\beta)\}^\dagger \widehat{O} \{xa_1^\dagger(\beta) + ya_2^\dagger(\beta)\} | 0(\beta) \rangle \\
&= \frac{|x|^2}{u_1(\beta)u_2(\beta)} \langle 0(\beta) | a_1 \widehat{O} a_1^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&\quad + \frac{x^*y}{u_1(\beta)u_2(\beta)} \langle 0(\beta) | a_1 \widehat{O} a_2^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&\quad + \frac{y^*x}{u_1(\beta)u_2(\beta)} \langle 0(\beta) | a_2 \widehat{O} a_1^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&\quad + \frac{|y|^2}{u_1(\beta)u_2(\beta)} \langle 0(\beta) | a_2 \widehat{O} a_2^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&= \frac{1}{u_1(\beta)u_2(\beta)} \{ |x|^2 \text{Tr} \rho a_1 \widehat{O} a_1^\dagger + x^*y \text{Tr} \rho a_1 \widehat{O} a_2^\dagger \\
&\quad + y^*x \text{Tr} \rho a_2 \widehat{O} a_1^\dagger + |y|^2 \text{Tr} \rho a_2 \widehat{O} a_2^\dagger \} \\
&= \text{Tr} \frac{|x|^2 a_1^\dagger \rho a_1 \widehat{O} + x^*y a_2^\dagger \rho a_1 \widehat{O} + y^*x a_1^\dagger \rho a_2 \widehat{O} + |y|^2 a_2^\dagger \rho a_2 \widehat{O}}{u_1(\beta)u_2(\beta)} \\
&= \text{Tr} \frac{\{ |x|^2 a_1^\dagger \rho a_1 + x^*y a_2^\dagger \rho a_1 + y^*x a_1^\dagger \rho a_2 + |y|^2 a_2^\dagger \rho a_2 \}}{u_1(\beta)u_2(\beta)} \widehat{O},
\end{aligned}$$

o que resulta em:

$$\rho_{|\psi(\beta)\rangle} = \frac{|x|^2 a_1^\dagger \rho a_1 + x^* y a_2^\dagger \rho a_1 + y^* x a_1^\dagger \rho a_2 + |y|^2 a_2^\dagger \rho a_2}{u_1(\beta) u_2(\beta)}. \quad (4.6)$$

Como, por (2.67),

$$\rho = \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right)^{n_1} \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right)^{n_2} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2|$$

segue que

$$\begin{aligned} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta)) u_1(\beta) u_2(\beta)} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} \left(\frac{\bar{n}_1(\beta)}{1 + \bar{n}_1(\beta)} \right)^{n_1} \left(\frac{\bar{n}_2(\beta)}{1 + \bar{n}_2(\beta)} \right)^{n_2} \\ &\times \{ |x|^2 (n_1 + 1) |n_1 + 1, n_2\rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\ &+ x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \langle n_1, n_2 + 1| \\ &+ x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1, n_2 + 1\rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\ &+ |y|^2 (n_2 + 1) |n_1, n_2 + 1\rangle \langle n_1, n_2 + 1| \} \end{aligned} \quad (4.7)$$

que é o operador densidade termalizado .

4.1.2 A Matriz Variância

A matriz variância, que foi definida no capítulo 3, é dada por

$$V_{\alpha\beta} = \langle \{ \Delta\xi_\alpha, \Delta\xi_\beta \} \rangle \quad (4.8)$$

onde $\xi_\alpha = (q_1, p_1, q_2, p_2)$, $\Delta\xi_\alpha = \xi_\alpha - \langle \xi_\alpha \rangle$, $\langle \xi_\alpha \rangle = Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} \xi_\alpha$ e por fim $\{ \dots \}$ é o anticomutador, ou seja, $\{A, B\} = \frac{AB+BA}{2}$.

Como exposto no capítulo 2, nosso sistema é um oscilador harmônico; então

$$a_\alpha = \frac{q_\alpha + ip_\alpha}{\sqrt{2}}$$

e

$$a_\alpha^\dagger = \frac{q_\alpha - ip_\alpha}{\sqrt{2}}$$

o que nos dá

$$q_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_\alpha^\dagger + a)$$

e

$$p_\alpha = \frac{-i\sqrt{2}}{2}(a_\alpha - a_\alpha^\dagger).$$

Substituindo então na matriz variância, temos

$$\begin{aligned} V_{\alpha\kappa} &= \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\{\Delta\xi_\alpha, \Delta\xi_\kappa\} \\ &= \frac{1}{2}\{\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\Delta\xi_\alpha\Delta\xi_\kappa + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\Delta\xi_\kappa\Delta\xi_\alpha\} \\ &= \frac{1}{2}\{\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}(\xi_\alpha - \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha)(\xi_\kappa - \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa) \\ &\quad + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}(\xi_\kappa - \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa)(\xi_\alpha - \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha\xi_\kappa - 2\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa \\ &\quad + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle} + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa\xi_\alpha \\ &\quad - 2\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como o $\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle} = 1$, somando os termos similares, encontramos

$$V_{\alpha\kappa} = \frac{1}{2}\{\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha\xi_\kappa + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa\xi_\alpha - 2\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\alpha\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\xi_\kappa\}. \quad (4.10)$$

Para continuar tratando os elementos da matriz variância de forma geral, introduziremos a seguinte notação

$$\xi_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}f_\alpha\{a_\alpha + (-1)^{1+\alpha}a_\alpha^\dagger\} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (4.11)$$

onde $f_1 = 1 = f_3$, $f_2 = i = f_4$, $a_1 = a_2 = \text{operador } a_1$, $a_1^\dagger = a_2^\dagger = \text{operador } a_1^\dagger$, $a_3 = a_4 = \text{operador } a_2$ e $a_3^\dagger = a_4^\dagger = \text{operador } a_2^\dagger$, i.é, para utilizar livremente os índices de 1 até 4 notamos os operadores de destruição e criação dessa forma. Substituindo (4.11) em (4.10), temos que

$$\begin{aligned} V_{\alpha\kappa} &= \frac{1}{2}\{\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\frac{f_\alpha f_\kappa}{2}[a_\alpha + (-1)^{1+\alpha}a_\alpha^\dagger][a_\kappa + (-1)^{1+\kappa}a_\kappa^\dagger] \\ &\quad + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\frac{f_\alpha f_\kappa}{2}[a_\kappa + (-1)^{1+\kappa}a_\kappa^\dagger][a_\alpha + (-1)^{1+\alpha}a_\alpha^\dagger] \\ &\quad - 2[\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\frac{\sqrt{2}f_\kappa}{2}(a_\kappa + (-1)^{1+\kappa}a_\kappa^\dagger)] \\ &\quad \times [\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\frac{\sqrt{2}f_\alpha}{2}(a_\alpha + (-1)^{1+\alpha}a_\alpha^\dagger)]\} \\ &= \frac{f_\alpha f_\kappa}{4}\{\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha a_\kappa + (-1)^{1+\alpha}\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger a_\kappa \\ &\quad + (-1)^{1+\kappa}\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha a_\kappa^\dagger + (-1)^{\alpha+\kappa}\text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger a_\kappa^\dagger + \text{Tr}\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa a_\alpha\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{1+\alpha}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa a_\alpha^\dagger + (-1)^{1+\kappa}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha a_\kappa^\dagger + (-1)^{\alpha+\kappa}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa^\dagger a_\alpha^\dagger \\
& -2[Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha + (-1)^{1+\alpha}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger \\
& +(-1)^{1+\kappa}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa^\dagger Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha + (-1)^{\alpha+\kappa}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa^\dagger Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger]. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Como $[a_\alpha, a_\kappa] = 0$ e $[a_\alpha^\dagger, a_\kappa^\dagger] = 0 \forall \alpha, \kappa$, então podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\kappa} &= \frac{f_\alpha f_\kappa}{4} \{ 2Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha a_\kappa + 2(-1)^{\alpha+\kappa}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa^\dagger a_\alpha^\dagger \\
& + (-1)^{1+\alpha}[Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger a_\kappa + Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa a_\alpha^\dagger] \\
& + (-1)^{1+\kappa}[Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha a_\kappa^\dagger + Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa^\dagger a_\alpha] \\
& - 2[Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha + (-1)^{1+\alpha}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger] \\
& \times [Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa + (-1)^{1+\kappa}Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\kappa^\dagger]. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

que é a forma mais simples, mantendo a generalidade, que o matriz variância pode ser expressa.

Considerando que a matriz de variância é simétrica, isto é,

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\kappa} &= Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\{\Delta\xi_\alpha, \Delta\xi_\kappa\} \\
&= Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}\{\Delta\xi_\kappa, \Delta\xi_\alpha\} \\
&= V_{\kappa\alpha} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

precisamos calcular somente os 6 elementos da parte triangular superior e os elementos da diagonal da matriz de variância. Além disso, como $[a, a^\dagger] = 1$ então

$$\begin{aligned}
Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha a_\alpha^\dagger &= Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle} + Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger a_\alpha \\
&= 1 + Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}a_\alpha^\dagger a_\alpha,
\end{aligned}$$

e sabendo que $Tr(A^\dagger) = (Tr A)^*$ temos que

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_{|\psi(\beta)\rangle}AB)^\dagger &= TrB^\dagger A^\dagger \rho_{|\psi(\beta)\rangle} \\
&= Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}B^\dagger A^\dagger \\
&= Tr(\rho_{|\psi(\beta)\rangle}AB)^*,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$Tr(\rho_{|\psi(\beta)\rangle}AB)^* = Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle}B^\dagger A^\dagger.$$

Com essas propriedades, para obtermos os elementos da matriz variância, é suficiente calcu-

lar os valores esperados abaixo enumerados, onde notaremos $A = \frac{1}{(1+\bar{n}_1(\beta))(1+\bar{n}_2(\beta))u_1(\beta)u_2(\beta)}$, $k_i = \frac{\bar{n}_i(\beta)}{1+\bar{n}_i(\beta)}$ e consideraremos a base $\{|n'_1, n'_2\rangle\}$ que designaremos por $\{|i, j\rangle\}$ para simplificar a notação. Temos assim:

$$\begin{aligned}
\bullet \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1 &= k \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) a_1 a_1 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1 a_1 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1 a_1 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) a_1 a_1 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{n_1(n_1+1)} \\
&\quad \times \langle ij | n_1-1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2 | ij\rangle \\
&\quad + x y^* (n_1+1) \sqrt{n_1(n_2+1)} \langle ij | n_1-1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1 | ij\rangle \\
&\quad + y x^* \sqrt{(n_1-1)n_1(n_1+1)(n_2+1)} \langle ij | n_1-2, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2 | ij\rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{n_1(n_1-1)} \langle ij | n_1-2, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1 | ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{n_1(n_1+1)} \delta_{i, n_1-1} \delta_{j, n_2} \delta_{i, n_1+1} \delta_{j, n_2} \\
&\quad + x y^* (n_1+1) \sqrt{n_1(n_2+1)} \delta_{i, n_1-1} \delta_{j, n_2} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2+1} \\
&\quad + y x^* \sqrt{(n_1-1)n_1(n_1+1)(n_2+1)} \delta_{i, n_1-2} \delta_{j, n_2+1} \delta_{i, n_1+1} \delta_{j, n_2} \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{n_1(n_1-1)} \delta_{i, n_1-2} \delta_{j, n_2+1} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2+1} \} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_2 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) a_1 a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1 a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1 a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) a_1 a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{n_2(n_1+1)} \\
&\quad \times \langle ij | n_1, n_2-1\rangle \langle n_1+1, n_2 | ij\rangle \\
&\quad + x y^* (n_1+1) \sqrt{n_2(n_2+1)} \langle ij | n_1, n_2-1\rangle \langle n_1, n_2+1 | ij\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +yx^*(n_2+1)\sqrt{n_1(n_1+1)} \langle ij|n_1-1, n_2 \rangle \langle n_1+1, n_2|ij \rangle \\
& +|y|^2(n_2+1)\sqrt{n_1(n_2+1)} \langle ij|n_1-1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2+1|ij \rangle \\
= & A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2(n_1+1)\sqrt{n_1(n_1+1)}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2-1}\delta_{i,n_1+1}\delta_{j,n_2} \\
& +xy^*(n_1+1)\sqrt{n_1(n_2+1)}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2-1}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2+1} \\
& +yx^*\sqrt{(n_1-1)n_1(n_1+1)(n_2+1)}\delta_{i,n_1-1}\delta_{j,n_2}\delta_{i,n_1+1}\delta_{j,n_2} \\
& +|y|^2(n_2+1)\sqrt{n_1(n_1-1)}\delta_{i,n_1-1}\delta_{j,n_2}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2+1} \} \\
= & 0. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet Tr\rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2 & = \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij| \sum_{n_1,n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2(n_1+1)a_1 a_1 |n_1+1, n_2 \rangle \langle n_1+1, n_2| \\
& +xy^*\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}a_1 a_1 |n_1+1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2+1| \\
& +x^*y\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}a_1 a_1 |n_1, n_2+1 \rangle \langle n_1+1, n_2| \\
& +|y|^2(n_2+1)a_1 a_1 |n_1, n_2+1 \rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij \rangle \\
= & A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2(n_1+1)\sqrt{n_2(n_2-1)} \\
& \times \langle ij|n_1+1, n_2-2 \rangle \langle n_1+1, n_2|ij \rangle \\
& +xy^*\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)n_2(n_2-1)} \langle ij|n_1+1, n_2-2 \rangle \langle n_1, n_2+1|ij \rangle \\
& +yx^*(n_2+1)\sqrt{(n_1+1)n_2} \langle ij|n_1, n_2-1 \rangle \langle n_1+1, n_2|ij \rangle \\
& +|y|^2(n_2+1)\sqrt{n_2(n_2+1)} \langle ij|n_1, n_2-1 \rangle \langle n_1, n_2+1|ij \rangle \\
= & A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2(n_1+1)\sqrt{n_1(n_1+1)}\delta_{i,n_1+1}\delta_{j,n_2-2}\delta_{i,n_1+1}\delta_{j,n_2} \\
& +xy^*(n_1+1)\sqrt{n_1(n_2+1)}\delta_{i,n_1+1}\delta_{j,n_2-2}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2+1} \\
& +yx^*\sqrt{(n_1-1)n_1(n_1+1)(n_2+1)}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2-1}\delta_{i,n_1+1}\delta_{j,n_2} \\
& +|y|^2(n_2+1)\sqrt{n_1(n_1-1)}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2-1}\delta_{i,n_1}\delta_{j,n_2+1} \} \\
= & 0. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) a_1 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2| + \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) a_1 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{(n_1+1)} \\
&\quad \times \langle ij | n_1, n_2 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + xy^* (n_1+1) \sqrt{(n_2+1)} \langle ij | n_1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle \\
&\quad + yx^* \sqrt{n_1(n_1+1)(n_2+1)} \langle ij | n_1-1, n_2+1 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{n_1} \langle ij | n_1-1, n_2+1 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{(n_1+1)} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2} \delta_{i, n_1+1} \delta_{j, n_2} \\
&\quad + xy^* (n_1+1) \sqrt{(n_2+1)} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2+1} \\
&\quad + yx^* \sqrt{n_1(n_1+1)(n_2+1)} \delta_{i, n_1-1} \delta_{j, n_2+1} \delta_{i, n_1+1} \delta_{j, n_2} \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{n_1} \delta_{i, n_1-1} \delta_{j, n_2+1} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2+1} \} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{n_2} \\
&\quad \times \langle ij | n_1+1, n_2-1 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)n_2(n_2+1)} \langle ij | n_1+1, n_2-1 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle \\
&\quad + yx^* (n_2+1) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \langle ij | n_1, n_2 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{(n_2+1)} \langle ij | n_1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{n_2} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2-1} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)n_2(n_2+1)} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2-1} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \\
&\quad + yx^* (n_2+1) \sqrt{(n_1+1)} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{(n_2+1)} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij | \sum_{n_1,n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) a_1^\dagger a_1 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1^\dagger a_1 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1^\dagger a_1 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) a_1^\dagger a_1 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1)^2 \langle ij | n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2 | ij\rangle \\
&\quad + xy^* (n_1+1) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \langle ij | n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1 | ij\rangle \\
&\quad + yx^* n_1 \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \langle ij | n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2 | ij\rangle \\
&\quad + |y|^2 n_1 (n_2+1) \langle ij | n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1 | ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1)^2 \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \\
&\quad + xy^* (n_1+1) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \\
&\quad + yx^* n_1 \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) n_1 \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \} \\
&= A \sum_{n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1)^2 + |y|^2 (n_2+1) n_1 \} \\
&= A \left\{ |x|^2 \frac{1}{1-k_2} \frac{k_1+1}{(1-k_1)^3} + |y|^2 \frac{1}{(1-k_2)^2} \frac{k_1}{(1-k_1)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{(1+\bar{n}_1(\beta))^{\frac{3}{2}} (1+\bar{n}_2(\beta))^{\frac{3}{2}}} \left\{ |x|^2 [(1+\bar{n}_2(\beta))(1+\bar{n}_1(\beta))]^3 \left(1 + \frac{\bar{n}_1(\beta)}{1+\bar{n}_1(\beta)}\right) \right. \\
&\quad \left. + |y|^2 [(1+\bar{n}_2(\beta))^2 (1+\bar{n}_1(\beta))^2 \frac{\bar{n}_1(\beta)}{1+\bar{n}_1(\beta)}] \right\} \\
&= \frac{|x|^2 [(1+\bar{n}_2(\beta))(1+2\bar{n}_1(\beta))] + |y|^2 [(1+\bar{n}_2(\beta))\bar{n}_1(\beta)]}{(1+\bar{n}_1(\beta))^{\frac{1}{2}} (1+\bar{n}_2(\beta))^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde as somas foram efetuadas utilizando o apêndice A.

$$\begin{aligned}
\bullet \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) a_1^\dagger a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1^\dagger a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_1^\dagger a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) a_1^\dagger a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij\rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{(n_1+2)n_2} \\
&\quad \times \langle ij | n_1+2, n_2-1 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)n_2(n_2+1)} \langle ij | n_1+2, n_2-1 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle \\
&\quad + yx^* (n_1+1)(n_2+1) \langle ij | n_1+1, n_2 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \langle ij | n_1+1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle \\
&= A \sum_{i,j, n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) \sqrt{(n_1+1)n_2} \delta_{i, n_1+2} \delta_{j, n_2-1} \delta_{i, n_1+1} \delta_{j, n_2} \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)n_2(n_2+1)} \delta_{i, n_1+2} \delta_{j, n_2-1} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2+1} \\
&\quad + yx^* (n_1+1)(n_2+1) \delta_{i, n_1+1} \delta_{j, n_2} \delta_{i, n_1+1} \delta_{j, n_2} \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2} \delta_{i, n_1} \delta_{j, n_2+1} \} \\
&= Ayx^* \sum_{n_1=0}^{+\infty} \{ k_1^{n_1} (n_1+1) \} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \{ k_2^{n_2} (n_2+1) \} \\
&= Ayx^* \frac{1}{(1-k_1)^2} \frac{1}{(1-k_2)^2} \\
&= yx^* \frac{1}{(1+\bar{n}_1(\beta))^{\frac{3}{2}} (1+\bar{n}_2(\beta))^{\frac{3}{2}}} (1+\bar{n}_1(\beta))^2 (1+\bar{n}_2(\beta))^2 \\
&= yx^* \sqrt{(1+\bar{n}_1(\beta))(1+\bar{n}_2(\beta))} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} \langle ij | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) a_2^\dagger a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + xy^* \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_2^\dagger a_2 |n_1+1, n_2\rangle \langle n_1, n_2+1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} a_2^\dagger a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1+1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1) a_2^\dagger a_2 |n_1, n_2+1\rangle \langle n_1, n_2+1| \} |ij\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) n_2 \langle ij | n_1+1, n_2 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + xy^* n_2 \sqrt{n_1(n_2+1)} \langle ij | n_1+1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle \\
&\quad + yx^* (n_2+1) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \langle ij | n_1, n_2+1 \rangle \langle n_1+1, n_2 | ij \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1)^2 \langle ij | n_1, n_2+1 \rangle \langle n_1, n_2+1 | ij \rangle \\
&= A \sum_{i,j,n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) n_2 \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \\
&\quad + xy^* n_2 \sqrt{n_1(n_2+1)} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \\
&\quad + yx^* (n_2+1) \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \delta_{i,n_1+1} \delta_{j,n_2} \\
&\quad + |y|^2 (n_2+1)^2 \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \delta_{i,n_1} \delta_{j,n_2+1} \} \\
&= A \sum_{n_1,n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1+1) n_2 + |y|^2 (n_2+1)^2 \}
\end{aligned}$$

que é a mesma série para $Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1$, só que trocando x com y, e k_1 com k_2 , i.é, $x \leftrightarrow y$ e $k_1 \leftrightarrow k_2$. Portanto

$$Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 = \frac{|y|^2 [(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + 2\bar{n}_2(\beta))] + |x|^2 [(1 + \bar{n}_1(\beta))\bar{n}_2(\beta)]}{(1 + \bar{n}_2(\beta))^{\frac{1}{2}} (1 + \bar{n}_1(\beta))^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.22)$$

Nas expressões utilizamos que $\delta_{i,n_1+a} \delta_{i,n_1+b} \implies i = n_1 + a$ e $i = n_1 + b$, que só tem solução se $a=b$, e que para todos os outros casos o produto das deltas é nulo. Utilizamos também que

$$\begin{aligned}
k_i &= \frac{\bar{n}_i(\beta)}{1 + \bar{n}_i(\beta)} \implies \\
1 - k_i &= \frac{1 + \bar{n}_i(\beta) - \bar{n}_i(\beta)}{1 + \bar{n}_i(\beta)} = \frac{1}{1 + \bar{n}_i(\beta)},
\end{aligned}$$

que $u_i(\beta) = \sqrt{1 + \bar{n}_i(\beta)}$ e que as séries que são todas convergentes podem ser calculadas a partir da série geométrica.

Considerando os valores nulos acima encontrados, a expressão (4.13) torna-se:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\kappa} &= \frac{f_\alpha f_\kappa}{4} \{ (-1)^{1+\alpha} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_\alpha^\dagger a_\kappa + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_\kappa a_\alpha^\dagger] + \\
&\quad (-1)^{1+\kappa} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_\alpha a_\kappa^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_\kappa^\dagger a_\alpha] \}
\end{aligned} \quad (4.23)$$

cujos elementos de matriz em termos dos valores esperados não nulos são

$$\begin{aligned}
\bullet V_{1,1} &= \frac{1}{4} \{ (-1)^2 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger] \\
&\quad + (-1)^2 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1] \} \\
&= \frac{1}{2} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger] \\
&= Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{1,2} &= \frac{i}{4} \{ (-1)^2 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger] \\
&\quad + (-1)^3 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1] \} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{1,3} &= \frac{1}{4} \{ (-1)^2 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_1^\dagger] \\
&\quad + (-1)^4 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_2^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_1] \} \\
&= \frac{1}{2} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle}^* a_1^\dagger a_2].
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{1,4} &= \frac{i}{4} \{ (-1)^2 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_1^\dagger] \\
&\quad + (-1)^5 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_2^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_1] \} \\
&= \frac{1}{2} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 - Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle}^* a_1^\dagger a_2].
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{2,2} &= \frac{-1}{4} \{ (-1)^3 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger] \\
&\quad + (-1)^3 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1] \} \\
&= \frac{1}{2} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_1^\dagger] \\
&= Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{2,3} &= \frac{i}{4} \{ (-1)^3 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_1^\dagger] \\
&\quad + (-1)^4 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_2^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_1] \} \\
&= \frac{i}{2} [-Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + Tr^* \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{2,4} &= \frac{-1}{4} \{ (-1)^3 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_1^\dagger] \\
&\quad + (-1)^5 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1 a_2^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_1] \} \\
&= \frac{1}{2} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + Tr^* \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2].
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{3,3} &= \frac{1}{4} \{ (-1)^4 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger] \\
&\quad + (-1)^4 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2] \} \\
&= \frac{1}{2} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger] \\
&= Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{3,4} &= \frac{i}{4} \{ (-1)^4 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger] \\
&\quad + (-1)^5 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2] \} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V_{4,4} &= \frac{-1}{4} \{ (-1)^5 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger] \\
&\quad + (-1)^5 [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2] \} \\
&= \frac{1}{2} [Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 + Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2 a_2^\dagger] \\
&= Tr \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Denotando

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1, & \sigma &= \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2, \\ \eta &= \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 + \text{Tr}^* \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 & e \quad \nu &= \text{Tr} \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2 - \text{Tr}^* \rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2,\end{aligned}\quad (4.34)$$

a matriz variância fica da forma

$$V = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{2} & 0 & \frac{\eta}{2} & \frac{i\nu}{2} \\ 0 & \alpha + \frac{1}{2} & \frac{-i\nu}{2} & \frac{\eta}{2} \\ \frac{\eta}{2} & \frac{-i\nu}{2} & \sigma + \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{i\nu}{2} & \frac{\eta}{2} & 0 & \sigma + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \alpha + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sigma + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \sigma + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{2} & \frac{i\nu}{2} \\ \frac{-i\nu}{2} & \frac{\eta}{2} \end{pmatrix}; \quad (4.36)$$

de modo que,

$$\det A = (\alpha + \frac{1}{2})^2, \quad \det B = (\sigma + \frac{1}{2})^2 \quad e \quad \det C = \frac{1}{4}(\eta^2 - \nu^2) \quad (4.37)$$

4.1.3 A DCT e o Critério de Simon

Tendo determinado a matriz de variância podemos analisar o critério de Simon que diz, com nossa notação, se

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - |\det C|\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{\det A + \det B}{4}, \quad (4.38)$$

onde J é a matriz (3.36), então o estado é separável. Calculemos cada um dos fatores em (4.38).

Segue que

$$\begin{aligned}\text{Tr}[AJCJBJC^T J] &= \text{Tr}[J(\alpha + 1/2)IJCJ(\sigma + 1/2)IJC^T] \\ &= \text{Tr}[(\alpha + 1/2)(\sigma + 1/2)JIJCJIJC^T] \\ &= \text{Tr}[(\alpha + 1/2)(\sigma + 1/2)(-I)C(-I)C^T] \\ &= \text{Tr}[(\alpha + 1/2)(\sigma + 1/2)CC^T] \\ &= (\alpha + 1/2)(\sigma + 1/2)\left(\frac{\eta^2 - \nu^2}{2}\right)\end{aligned}\quad (4.39)$$

onde usamos que a matriz identidade comuta com toda matriz,

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

e que por (4.36)

$$CC^T = \begin{pmatrix} \frac{\eta}{2} & \frac{i\nu}{2} \\ \frac{-i\nu}{2} & \frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\eta}{2} & \frac{-i\nu}{2} \\ \frac{i\nu}{2} & \frac{\eta}{2} \end{pmatrix} = \frac{\eta^2 - \nu^2}{4} I. \quad (4.41)$$

Substituindo em (4.38) o resultado (4.39) e os valores dos determinantes dados por (4.37) encontramos para o critério de Simon a expressão:

$$\begin{aligned} (\alpha + 1/2)^2(\sigma + 1/2)^2 + \frac{(1 - |\eta^2 - \nu^2|)^2}{16} - (\alpha + 1/2)(\sigma + 1/2)\left(\frac{\eta^2 - \nu^2}{2}\right) \geq \\ \frac{(\alpha + 1/2)^2 + (\sigma + 1/2)^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Expandindo os termos dessa expressão, podemos simplificar a equação (4.42), obtendo

$$(\alpha^2 + \alpha)(\sigma^2 + \sigma) + \frac{(|\eta^2 - \nu^2|)^2}{16} \geq \frac{|\eta^2 - \nu^2|}{4} \{2\alpha\sigma + \alpha + \sigma + 1\}. \quad (4.43)$$

Visando analisar gráficos, consideremos a expressão (4.43) para $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ou seja, $\bar{n}_1(\beta) = \bar{n}_2(\beta) = \bar{n}(\beta)$. Temos assim

$$\begin{aligned} \alpha &= Tr(\rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_1) \\ &= \frac{|x|^2[(1+\bar{n}(\beta))(1+2\bar{n}(\beta))] + |y|^2[(1+\bar{n}(\beta))\bar{n}(\beta)]}{(1+\bar{n}(\beta))^{\frac{1}{2}}(1+\bar{n}(\beta))^{\frac{1}{2}}} \\ &= |x|^2(1+2\bar{n}(\beta)) + |y|^2\bar{n}(\beta), \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= Tr(\rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_2^\dagger a_2) \\ &= \frac{|y|^2[(1+\bar{n}(\beta))(1+2\bar{n}(\beta))] + |x|^2[(1+\bar{n}(\beta))\bar{n}(\beta)]}{(1+\bar{n}(\beta))^{\frac{1}{2}}(1+\bar{n}(\beta))^{\frac{1}{2}}} \\ &= |y|^2(1+2\bar{n}(\beta)) + |x|^2\bar{n}(\beta), \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \eta &= Tr(\rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2) + Tr(\rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2) \\ &= yx^*(1+\bar{n}(\beta)) + xy^*(1+\bar{n}(\beta)) \\ &= (1+\bar{n}(\beta))(yx^* + xy^*), \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
\nu &= \text{Tr}(\rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2) - \text{Tr}(\rho_{|\psi(\beta)\rangle} a_1^\dagger a_2) \\
&= yx^*(1 + \bar{n}(\beta)) - xy^*(1 + \bar{n}(\beta)) \\
&= (1 + \bar{n}(\beta))(yx^* - y^*x),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta^2 - \nu^2 &= [(1 + \bar{n}(\beta))(yx^* + xy^*)]^2 - [(1 + \bar{n}(\beta))(yx^* - y^*x)]^2 \\
&= [(1 + \bar{n}(\beta))]^2 4|y|^2|x|^2.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Pela condição de normalização, $|x|^2 + |y|^2 = 1$, ou seja, $|y|^2 = 1 - |x|^2$ que substituída nas equações (4.44), (4.45) e (4.48) resulta em

$$\alpha = |x|^2(1 + \bar{n}(\beta)) + \bar{n}(\beta), \tag{4.49}$$

$$\sigma = 1 + 2\bar{n}(\beta) - |x|^2(1 + \bar{n}(\beta)), \tag{4.50}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta^2 - \nu^2 &= [(1 + \bar{n}(\beta))(yx^* + xy^*)]^2 - [(1 + \bar{n}(\beta))(yx^* - y^*x)]^2 \\
&= [(1 + \bar{n}(\beta))]^2 4(1 - |x|^2)|x|^2.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Substituindo as expressões (4.49), (4.50) e (4.51) em (4.43), teremos a equação

$$\begin{aligned}
&\{(|x|^2(1 + \bar{n}(\beta)) + \bar{n}(\beta))^2 + (|x|^2(1 + \bar{n}(\beta)) + \bar{n}(\beta))\} \\
&\{(1 + 2\bar{n}(\beta) - |x|^2(1 + \bar{n}(\beta)))^2 + (1 + 2\bar{n}(\beta) - |x|^2(1 + \bar{n}(\beta)))\} + \frac{[(1 + \bar{n}(\beta))]^2 4(1 - |x|^2)|x|^2}{16} \geq \\
&\frac{[(1 + \bar{n}(\beta))]^2 4(1 - |x|^2)|x|^2}{4} \{2(|x|^2(1 + \bar{n}(\beta)) + \bar{n}(\beta))(1 + 2\bar{n}(\beta) - |x|^2(1 + \bar{n}(\beta))) \\
&+ (|x|^2(1 + \bar{n}(\beta)) + \bar{n}(\beta)) + (1 + 2\bar{n}(\beta) - |x|^2(1 + \bar{n}(\beta))) + 1\}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

que assume a forma

$$2\bar{n}(\beta) + 8\bar{n}(\beta)^2 + 10\bar{n}(\beta)^3 + 4\bar{n}(\beta)^4 \geq 2|x|^2 - |x|^4 - 2|x|^6 + |x|^8. \tag{4.53}$$

Substituindo $\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$ em (4.53), temos que,

$$2\frac{1}{e^{\beta\omega}-1} + 8\left(\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\right)^4 \geq 2|x|^2 - |x|^4 - 2|x|^6 + |x|^8,$$

ou seja,

$$2\frac{e^{3\beta\omega} + e^{2\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^4} \geq 2|x|^2 - |x|^4 - 2|x|^6 + |x|^8. \quad (4.54)$$

uma expressão por nós obtida para o critério de Simon que possibilita uma análise dos estados termalizados (4.3)

4.1.4 Análise das Relações (4.53) e (4.54)

Primeiramente, analisando o lado direito da expressão (4.53), encontramos que

$$y(x) = 2|x|^2 - |x|^4 - 2|x|^6 + |x|^8 \geq 0; \forall x \in [0, 1] \quad (4.55)$$

e

$$2|x|^2 - |x|^4 - 2|x|^6 + |x|^8 = 0 \iff x = 0 \text{ e } 1. \quad (4.56)$$

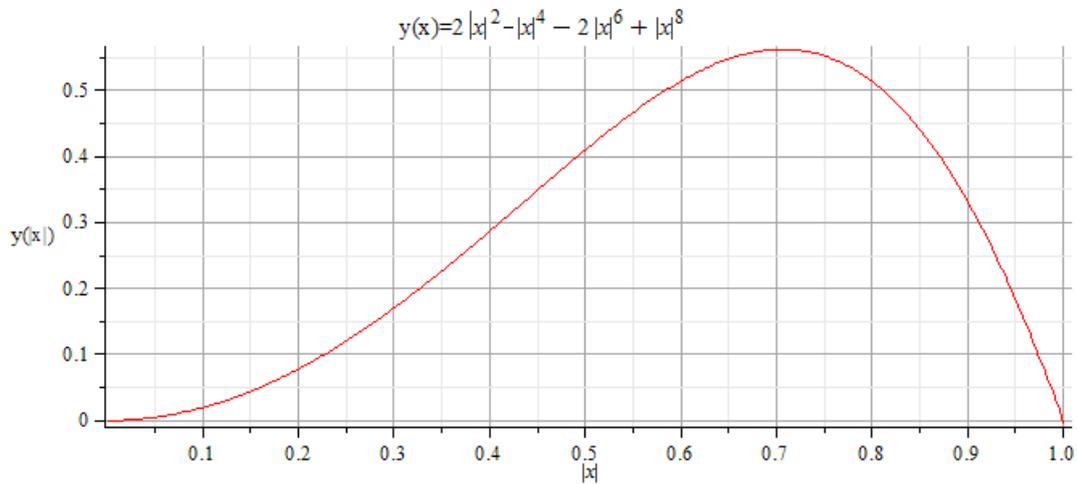


Figura 4.1: Gráfico de $y(x) = 2|x|^2 - |x|^4 - 2|x|^6 + |x|^8$

Para $x = 0$ ou $x = 1$, temos que $|\psi\rangle = |01\rangle$ ou $|\psi\rangle = |10\rangle$ respectivamente. Notando $2\frac{e^{3\beta\omega} + e^{2\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^4}$ de $g(\beta\omega)$, temos então que o critério de Simon para que o estado do tipo Bell (4.1) seja separável pode ser escrito por (4.54) como

$$g(\beta\omega) \geq y(|x|). \quad (4.57)$$

Como o domínio de valores de $g(\beta\omega)$ varia de zero a infinito pode-se concluir que, para

qualquer valor de $\beta\omega$ a desigualdade nunca será violada. Portanto, esses estados serão sempre separáveis para qualquer temperatura, o que é razoável.

Dado um valor $y(|x|) > 0$, haverá sempre algum valor de $\beta\omega$ para o qual a relação (4.57) será violada, ou seja, dado um estado normalizado do tipo Bell o emaranhamento à temperatura finita pode ser agora caracterizado de forma efetiva em termos do valor de T e da frequência ω , uma vez que $\beta\omega = \frac{\omega}{k_b T}$ com k_b a constante de Boltzmann. Dito de outra forma, para todo estado emaranhado do tipo Bell dado por (4.3) ¹ podemos afirmar que para cada frequência existe uma temperatura onde o sistema é emaranhado, e uma onde não podemos mais garantir que o emaranhamento seja preservado.

Fazendo a análise para $T \rightarrow 0$ temos que $\beta \rightarrow +\infty$ e $\bar{n}(\beta) \rightarrow 0$; então, por (4.53), a desigualdade é sempre violada para todo estado emaranhado do tipo Bell(4.1), ou seja, se o estado for emaranhado, a tendência dele é permanecer emaranhado. A partir disso podemos inferir que a morte súbita do emaranhamento tem uma forte relação com a temperatura do sistema, isto é, a perda do emaranhamento está fortemente relacionada à perda da correlação com o ambiente.

Fazendo agora a análise para $T \rightarrow +\infty$ temos que $\beta \rightarrow 0$ e $\bar{n}(\beta) \rightarrow +\infty$; assim por (4.53), a desigualdade é sempre satisfeita independente do valor de x . Portanto, quando aumentarmos gradativamente a temperatura, o estado tenderá a perder a sua correlação inicial tornando-se separável.

Para o caso específico do estado de Bell com $|x|^2 = 1/2$, temos que a relação (4.53) fica da forma

$$2\bar{n}(\beta) + 8\bar{n}(\beta)^2 + 10\bar{n}(\beta)^3 + 4\bar{n}(\beta)^4 \geq 0,5625 \quad (4.58)$$

A igualdade para a equação (4.58) é obtida quando $\bar{n}(\beta) = 0,1589$.

Considerando (4.54) e $\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$, temos que

$$2 \frac{e^{3\beta\omega} + e^{2\beta\omega}}{(e^{\beta\omega} - 1)^4} \geq 0,5625. \quad (4.59)$$

que pode ser observada na Figura (4.3).

Em (4.59) a igualdade é satisfeita para $\beta\omega = 1,98629$; com isso, para

$$\beta\omega\hbar \leq 1,98629,$$

¹Para o estado ser emaranhado, por (4.3) uma condição necessária é que $|x| \neq 0$ e $|x| \neq 1$, pela condição de normalização.

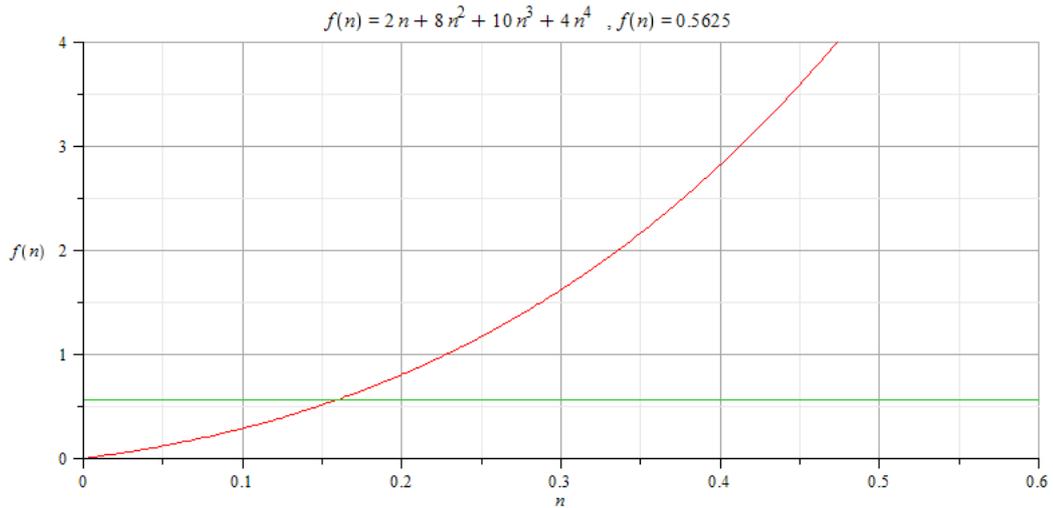


Figura 4.2: Gráfico de $2\bar{n} + 8\bar{n}^2 + 10\bar{n}^3 + 4\bar{n}^4 \geq 0,5625$

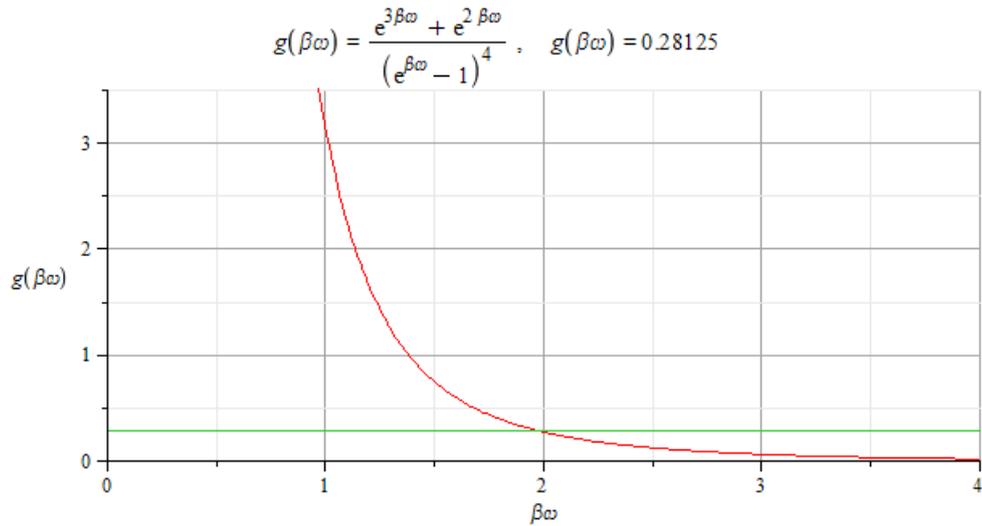


Figura 4.3: Gráfico de $\frac{e^{3x} + e^{2x}}{(e^x - 1)^4} \geq 0,28125$

ou seja,

$$\frac{\omega}{T} \leq 1,98629 \frac{k_b}{\hbar} = 2,60047 \cdot 10^{11} \frac{\text{Hertz}}{\text{Kelvin}} \quad (4.60)$$

onde reintroduzimos \hbar a partir de uma análise dimensional².

Pela referência [40], que fez um estudo com o átomo de Itérbio ($^{171}\text{Yb}^+$) de estados de Bell na frequência 12,643GHz, encontramos que para temperatura $T < 0,05K$, o sistema preserva o emaranhamento, isto é, viola a desigualdade.

Para $T = 300K$, encontramos uma frequência da ordem de $7,80141 \times 10^{13}$ Hertz, ou seja, nosso desenvolvimento permite estimar que para uma frequência dessa ordem o sistema poderá

²O expoente da exponencial deve ser adimensional; então, como β tem dimensão inversa de energia é necessário que o numerador tenha dimensão de energia. Consequentemente devemos ter $\hbar\omega$.

ter todas as suas correlações preservadas à temperatura ambiente.

A relação (4.60) possibilita também uma análise mais audaciosa do emaranhamento. Com esse objetivo, notemos que podemos reescrevê-la como

$$T_{\text{temperatura}} \geq \frac{2\pi}{T_{\text{período}} 2,60047 \times 10^{11}},$$

ou seja,

$$T_{\text{temperatura}} T_{\text{período}} \geq 2,41617 \times 10^{-11}, \quad (4.61)$$

onde estamos utilizando os índices temperatura e período para diferenciar o T.

A expressão (4.61) permite escrever uma relação do tipo

$$T_{\text{temperatura}} t_{\text{tempo}} \geq 2,41617 \times 10^{-11}$$

ou, de forma mais geral

$$T_{\text{temperatura}} t_{\text{tempo}} \geq a \in \mathbb{R}, \quad (4.62)$$

com a uma constante para cada sistema. Considerando então que (4.62) é uma relação que surge da condição para que o sistema seja separável chega-se à ideia de que a morte súbita do emaranhamento estaria relacionada com a própria evolução temporal do sistema; isto é, para cada temperatura há um intervalo de tempo para o qual a própria evolução temporal do sistema pode levar ao término do emaranhamento.

4.2 Cálculo da Fidelidade Quântica

A fidelidade, que é uma medida de distância, pode ser definida como³ $F = \sqrt{\langle \psi | \rho_{\psi(\beta)} | \psi \rangle}$, e informa, em nosso caso, o quanto o estado $|\psi\rangle$ está se distanciando dele mesmo considerando à influência da temperatura. Logo

$$F = \sqrt{\langle 10|x^* + \langle 01|y^* | \rho_{|\psi(\beta)\rangle} [x|10\rangle + y|01\rangle] \quad (4.63)$$

onde $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, o que implica em $\bar{n}_1(\beta) = \bar{n}_2(\beta) = \bar{n}(\beta)$. Usando $\rho_{|\psi(\beta)\rangle}$ dado por (4.7) temos de calcular os termos que aparecem em (4.7) e enumerados abaixo.

³A Fidelidade Quântica pode ser definida de forma mais geral, relacionando a distância entre quaisquer dois estados.

$$\begin{aligned}
\bullet \langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 10 \rangle &= \langle 10 | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \\
&\quad \{ |x|^2 (n_1 + 1) |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \} | 10 \rangle \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \langle 10 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 10 \rangle \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 10 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 10 \rangle \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 10 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 10 \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \langle 10 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 10 \rangle \} \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \}.
\end{aligned}$$

Analisando cada parcela temos que $n_1 = 0 = n_2$ para o termo $|x|^2$ e os termos $x y^*$ e $x^* y$ são nulos, já que não existem n_1 e n_2 que satisfaçam as relações determinadas pelas deltas. Para o caso do termo com $|y|^2$, teremos que $n_2 = -1$, mas -1 não pertence a soma, isto é, $n_2 \in \mathbb{N}$. Com isso, encontramos

$$\begin{aligned}
\langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 10 \rangle &= A |x|^2 \\
&= \frac{|x|^2}{(1 + \bar{n}(\beta))^3}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 01 \rangle &= \langle 10 | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \\
&\quad \{ |x|^2 (n_1 + 1) |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \} | 01 \rangle \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \langle 10 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 01 \rangle \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 10 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 01 \rangle \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 10 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 01 \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \langle 10 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 01 \rangle \} \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \delta_{n_1+1,0} \delta_{n_2}, \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \delta_{n_1+1,0} \delta_{n_2,1} \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \}.
\end{aligned}$$

A análise das deltas mostra que $n_1 = 0 = n_2$ para o termo $x y^*$ e todos os outros termos são nulos; assim

$$\begin{aligned}
\langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 01 \rangle &= A x y^* \\
&= \frac{x y^*}{(1 + \bar{n}(\beta))^3}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \langle 01 | \rho_{\psi(\beta)} | 10 \rangle &= \langle 01 | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \\
&\quad \{ |x|^2 (n_1 + 1) |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \} | 10 \rangle \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \langle 01 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 10 \rangle \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 01 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 10 \rangle \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 01 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 10 \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \langle 01 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 10 \rangle \} \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \delta_{n_1+1,0} \delta_{n_2,1} \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1+0} \delta_{n_2,1} \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \delta_{n_1+1,1} \delta_{n_2,0} \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \delta_{n_1,1} \delta_{n_2+1,0} \},
\end{aligned} \tag{4.66}$$

o que implica em $n_1 = 0 = n_2$ para o termo x^*y e todos os outros termos nulos, resultando em

$$\begin{aligned}
\langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 10 \rangle &= A x^* y \\
&= \frac{x^* y}{(1 + \bar{n}(\beta))^3}.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \langle 01 | \rho_{\psi(\beta)} | 01 \rangle &= \langle 01 | \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \\
&\quad \{ |x|^2 (n_1 + 1) |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2| \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) |n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1| \} | 01 \rangle \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \langle 01 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 01 \rangle \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 01 | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 01 \rangle \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle 01 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1, n_2 | 01 \rangle \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \langle 01 | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | 01 \rangle \} \\
&= \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} A k_1^{n_1} k_2^{n_2} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \delta_{n_1+1,0} \delta_{n_2,1} \delta_{n_1+1,0} \delta_{n_2}, \\
&\quad + x y^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1+0} \delta_{n_2,1} \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \\
&\quad + x^* y \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \delta_{n_1+1,0} \delta_{n_2,1} \\
&\quad + |y|^2 (n_2 + 1) \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \delta_{n_1,0} \delta_{n_2+1,1} \}. \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Neste caso, temos que $n_1 = 0 = n_2$ para o termo $|y|^2$ e todos os outros termos são nulos.

Então

$$\begin{aligned}
\langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 01 \rangle &= A |y|^2 \\
&= \frac{|y|^2}{(1 + \bar{n}(\beta))^3}. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (4.64), (4.65), (4.67) e (4.69) na expressão da Fidelidade, temos que

$$\begin{aligned}
F &= \sqrt{|x|^2 \langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 10 \rangle + y^* x \langle 01 | \rho_{\psi(\beta)} | 10 \rangle + y x^* \langle 10 | \rho_{\psi(\beta)} | 01 \rangle + |y|^2 \langle 01 | \rho_{\psi(\beta)} | 01 \rangle} \\
&= \sqrt{\frac{1}{(1 + \bar{n}(\beta))^3} (|x|^4 + |y|^2 |x|^2 + |y|^2 |x|^2 + |y|^4)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{(1 + \bar{n}(\beta))^3} (|x|^2 + |y|^2)^2},
\end{aligned}$$

e devido à normalização, $|x|^2 + |y|^2 = 1$, o que nos dá,

$$F = \frac{1}{(1 + \bar{n}(\beta))^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.70)$$

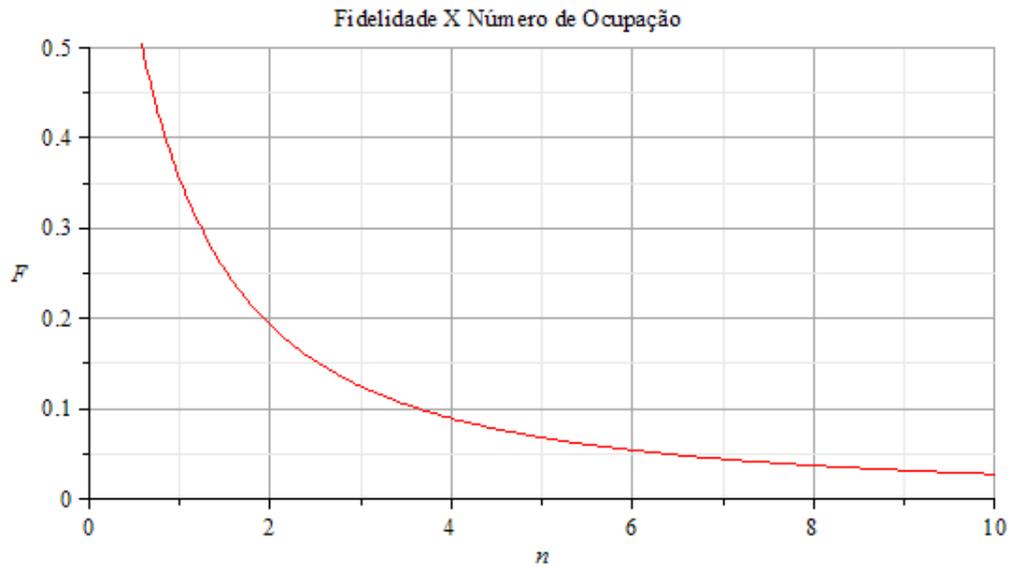


Figura 4.4: Gráfico da Fidelidade x Número de Ocupação

Como $\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$ temos $1 + \bar{n}(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}$ e a expressão (4.70) da Fidelidade fica da forma

$$F = (1 - e^{-\beta\omega})^{\frac{3}{2}}. \quad (4.71)$$

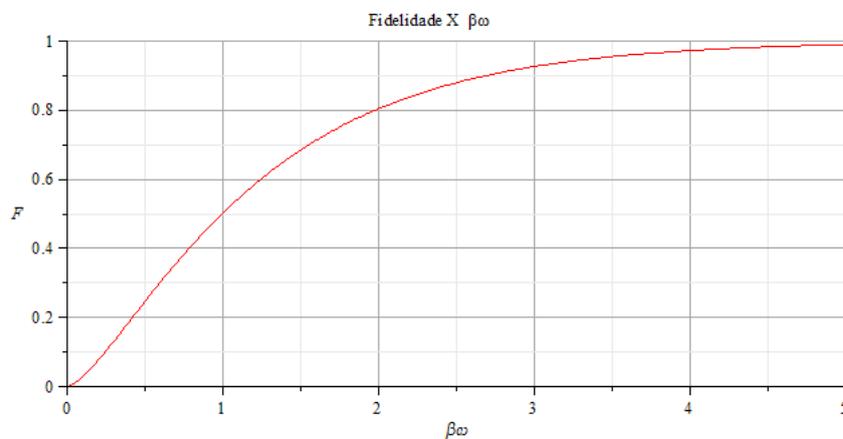


Figura 4.5: Gráfico da Fidelidade x $\beta\omega$

A relação (4.71) possibilita analisar alguns casos de interesse.

1. Para $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow +\infty$, o que implica que a Fidelidade tende para 1, ou seja, o sistema tende a permanecer no mesmo estado. Então, se começarmos com um estado emaranhado, ele tenderá a continuar emaranhado.
2. Para $T \rightarrow +\infty$ temos $\beta \rightarrow 0$, o que implica que a Fidelidade tenderá para 0, isto é, o estado inicial se distancia bastante do final, o que é esperado.
3. Para a situação analisada em [40], onde se encontra $\omega = 12,643GHz$, para o estado de Bell, pela equação (4.58) temos que $\bar{n}(\beta) = 0,1589$. Substituindo esse valor em (4.70), temos que

$$F \approx 0,8, \quad (4.72)$$

ou seja, o estado continua bem próximo do original, o que concorda com nosso resultado obtido pelo critério de Simon.

4.3 Cálculo do Fator de Mandel

Uma das características quânticas dos modos do campo eletromagnético é a estatística sub-Poissoniana [18]. A natureza da estatística de um estado pode ser determinada pela comparação da dispersão do operador número com a média desse mesmo operador. O Fator de Mandel, que é dado por

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\langle (\Delta \widehat{N})^2 \rangle - \langle \widehat{N} \rangle^2}{\langle \widehat{N} \rangle} \\ &= \frac{\langle \widehat{N}^2 \rangle - \langle \widehat{N} \rangle^2 - \langle \widehat{N} \rangle}{\langle \widehat{N} \rangle} \\ &= \frac{\langle \widehat{N}^2 \rangle}{\langle \widehat{N} \rangle} - \langle \widehat{N} \rangle - 1, \end{aligned} \quad (4.73)$$

fornece justamente essa informação. Se $Q \in [-1, 0)$ dizemos que a estatística é sub-Poissoniana; se $Q = 0$ dizemos que a estatística é Poissoniana e, para $Q > 0$, dizemos que a estatística é super-Poissoniana.

Na DCT, a média será o valor esperado associado ao estado termalizado, de modo que

$$Q = \frac{\langle \psi(\beta) | \widehat{N}^2 | \psi(\beta) \rangle}{\langle \psi(\beta) | \widehat{N} | \psi(\beta) \rangle} - \langle \psi(\beta) | \widehat{N} | \psi(\beta) \rangle - 1, \quad (4.74)$$

onde $\widehat{N} = \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2$. Como foi discutido no capítulo 2

$$a_i = u_i(\beta)a_i(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta)$$

e

$$a_i^\dagger = u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta), \quad (4.75)$$

então:

$$\begin{aligned} \widehat{N} &= \sum_{i=1}^2 [u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta)] [u_i(\beta)a_i(\beta) + v_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta)] \\ &= \sum_{i=1}^2 [u_i(\beta)^2 a_i^\dagger(\beta)a_i(\beta) + v_i(\beta)u_i(\beta)a_i^\dagger(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta) \\ &\quad + v_i(\beta)u_i(\beta)a_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta) + v_i(\beta)^2 \tilde{a}_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta)] \end{aligned} \quad (4.76)$$

Com isso, o valor esperado térmico do número de ocupação é

$$\begin{aligned} \langle \psi(\beta) | \widehat{N} | \psi(\beta) \rangle &= |x|^2 \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle + yx^* \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad + yx^* \langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle + |y|^2 \langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle . \end{aligned}$$

Considerando $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, temos os resultados seguintes:

$$\begin{aligned} \bullet \widehat{N} | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle &= \sum_{i=1}^2 [u(\beta)^2 a_i^\dagger(\beta)a_i(\beta) | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle + v(\beta)u(\beta)a_i^\dagger(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta) | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad + v(\beta)u(\beta)a_i(\beta)\tilde{a}_i(\beta) | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle + v(\beta)^2 \tilde{a}_i(\beta)\tilde{a}_i^\dagger(\beta) | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle] \\ &= [u(\beta)^2 | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta) | \beta; 20, \widetilde{10} \rangle + v(\beta)^2 | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle] \\ &\quad + [v(\beta)u(\beta) | \beta; 11, \widetilde{01} \rangle + v(\beta)^2 | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle] \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle = u(\beta)^2 + 2v(\beta)^2 \quad (4.77)$$

e

$$\langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle = 0. \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \widehat{N}|\beta; 01, \widetilde{00}\rangle &= \sum_{i=1}^2 [u(\beta)^2 a_i^\dagger(\beta) a_i(\beta) |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle + v(\beta) u(\beta) a_i^\dagger(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + v(\beta) u(\beta) a_i(\beta) \widetilde{a}_i(\beta) |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle + v(\beta)^2 \widetilde{a}_i(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle] \\
&= [v(\beta) u(\beta) |\beta; 11, \widetilde{10}\rangle + v(\beta)^2 |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle] \\
&\quad + [u(\beta)^2 |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle + v(\beta) u(\beta) \sqrt{2} |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle + v(\beta) u(\beta) v(\beta)^2 |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle]
\end{aligned}$$

resultando em:

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle = 0 \quad (4.79)$$

e

$$\langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle = u(\beta)^2 + 2v(\beta)^2. \quad (4.80)$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi(\beta) | \widehat{N} | \psi(\beta) \rangle &= |x|^2 (u(\beta)^2 + 2v(\beta)^2) + |y|^2 (u(\beta)^2 + 2v(\beta)^2) \\
&= u(\beta)^2 + 2v(\beta)^2,
\end{aligned} \quad (4.81)$$

onde usamos a condição de normalização.

Para obter $\langle \psi(\beta) | \widehat{N}^2 | \psi(\beta) \rangle$, precisamos dos resultados:

$$\begin{aligned}
\widehat{N}^2 |\beta; 10, \widetilde{00}\rangle &= (u(\beta)^2 + v(\beta)^2) \widehat{N} |\beta; 10, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \sqrt{2} v(\beta) u(\beta) \widehat{N} |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle + v(\beta) u(\beta) \widehat{N} |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle
\end{aligned} \quad (4.82)$$

e

$$\begin{aligned}
\widehat{N}^2 |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle &= (u(\beta)^2 + v(\beta)^2) \widehat{N} |\beta; 01, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + \sqrt{2} v(\beta) u(\beta) \widehat{N} |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle + v(\beta) u(\beta) \widehat{N} |\beta; 11, \widetilde{10}\rangle,
\end{aligned} \quad (4.83)$$

sendo portanto necessário além dos resultados acima os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
\bullet \widehat{N}|\beta; 20, \widetilde{10}\rangle &= \sum_{i=1}^2 [u(\beta)^2 a_i^\dagger(\beta) a_i(\beta) |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle + v(\beta) u(\beta) a_i^\dagger(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle \\
&\quad + v(\beta) u(\beta) a_i(\beta) \widetilde{a}_i(\beta) |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle + v(\beta)^2 \widetilde{a}_i(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle] \\
&= [2u(\beta)^2 |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle + \sqrt{6}v(\beta)u(\beta) |\beta; 30, \widetilde{20}\rangle + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta) |\beta; 10, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + 2v(\beta)^2 |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle] + [\sqrt{2}v(\beta)u(\beta) |\beta; 21, \widetilde{11}\rangle + v(\beta)^2 |\beta; 20, \widetilde{10}\rangle],
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 20, \widetilde{10} \rangle = 0 \quad (4.84)$$

e

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 20, \widetilde{10} \rangle = \sqrt{2}v(\beta)u(\beta). \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \widehat{N}|\beta; 11, \widetilde{01}\rangle &= \sum_{i=1}^2 [u(\beta)^2 a_i^\dagger(\beta) a_i(\beta) |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle + v(\beta) u(\beta) a_i^\dagger(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad + v(\beta) u(\beta) a_i(\beta) \widetilde{a}_i(\beta) |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle + v(\beta)^2 \widetilde{a}_i(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle] \\
&= [u(\beta)^2 |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta) |\beta; 21, \widetilde{11}\rangle + v(\beta)^2 |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle] \\
&\quad + [u(\beta)^2 |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle + 2v(\beta)u(\beta) |\beta; 12, \widetilde{02}\rangle + v(\beta)u(\beta) |\beta; 10, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + 2v(\beta)^2 |\beta; 11, \widetilde{01}\rangle],
\end{aligned}$$

resultando em

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 11, \widetilde{01} \rangle = 0 \quad (4.86)$$

e

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 11, \widetilde{01} \rangle = v(\beta)u(\beta). \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \widehat{N}|\beta; 02, \widetilde{01}\rangle &= \sum_{i=1}^2 [u(\beta)^2 a_i^\dagger(\beta) a_i(\beta) |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle + v(\beta) u(\beta) a_i^\dagger(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle \\
&\quad + v(\beta) u(\beta) a_i(\beta) \widetilde{a}_i(\beta) |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle + v(\beta)^2 \widetilde{a}_i(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle] \\
&= [v(\beta)u(\beta) |\beta; 12, \widetilde{11}\rangle + v(\beta)^2 |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle] \\
&\quad + [2u(\beta)^2 |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle + \sqrt{6}v(\beta)u(\beta) |\beta; 03, \widetilde{02}\rangle + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta) |\beta; 10, \widetilde{00}\rangle \\
&\quad + 2v(\beta)^2 |\beta; 02, \widetilde{01}\rangle],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 02, \widetilde{01} \rangle = 0 \quad (4.88)$$

e

$$\langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 02, \widetilde{01} \rangle = \sqrt{2}v(\beta)u(\beta). \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \bullet \widehat{N} | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle &= \sum_{i=1}^2 [u(\beta)^2 a_i^\dagger(\beta) a_i(\beta) | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle + v(\beta) u(\beta) a_i^\dagger(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle \\ &\quad + v(\beta) u(\beta) a_i(\beta) \widetilde{a}_i(\beta) | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle + v(\beta)^2 \widetilde{a}_i(\beta) \widetilde{a}_i^\dagger(\beta) | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle] \\ &= [u(\beta)^2 | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle + 2v(\beta) u(\beta) | \beta; 21, \widetilde{20} \rangle \\ &\quad + v(\beta) u(\beta) | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle + v(\beta)^2 | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle] \\ &\quad + [u(\beta)^2 | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle + \sqrt{2}v(\beta) u(\beta) | \beta; 12, \widetilde{11} \rangle \\ &\quad + v(\beta)^2 | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle], \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle = 0 \quad (4.90)$$

e

$$\langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle = v(\beta)u(\beta). \quad (4.91)$$

Portanto, considerando os resultados acima obtidos, temos que

$$\langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle = 0 = \langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle, \quad (4.92)$$

enquanto que

$$\begin{aligned} \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle &= (u(\beta)^2 + v(\beta)^2) \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle \\ &\quad + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta) \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 20, \widetilde{10} \rangle \\ &\quad + v(\beta)u(\beta) \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 11, \widetilde{01} \rangle \\ &= (u(\beta)^2 + v(\beta)^2)[(u(\beta)^2 + v(\beta)^2)] \\ &\quad + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta)[\sqrt{2}v(\beta)u(\beta)] + v(\beta)u(\beta)[v(\beta)u(\beta)] \\ &= u(\beta)^4 + 4u(\beta)^2v(\beta)^2 + 4v(\beta)^4 + 2u(\beta)^2v(\beta)^2 + u(\beta)^2v(\beta)^2 \\ &= u(\beta)^4 + 7u(\beta)^2v(\beta)^2 + 4v(\beta)^4. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Analogamente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle &= (u(\beta)^2 + v(\beta)^2) \langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle \\
&\quad + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta) \langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 02, \widetilde{01} \rangle \\
&\quad + v(\beta)u(\beta) \langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N} | \beta; 11, \widetilde{10} \rangle \\
&= (u(\beta)^2 + v(\beta)^2)[(u(\beta)^2 + v(\beta)^2)] \\
&\quad + \sqrt{2}v(\beta)u(\beta)[\sqrt{2}v(\beta)u(\beta)] + v(\beta)u(\beta)[v(\beta)u(\beta)],
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle &= u(\beta)^4 + 7u(\beta)^2v(\beta)^2 + 4v(\beta)^4 \\
&= \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Considerando os resultados (4.92) e (4.94) segue então que

$$\langle \psi(\beta) | \widehat{N}^2 | \psi(\beta) \rangle = |x|^2 \langle \beta; 10, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 10, \widetilde{00} \rangle + |y|^2 \langle \beta; 01, \widetilde{00} | \widehat{N}^2 | \beta; 01, \widetilde{00} \rangle$$

que com a condição de normalização resulta em:

$$\langle \psi(\beta) | \widehat{N}^2 | \psi(\beta) \rangle = u(\beta)^4 + 7u(\beta)^2v(\beta)^2 + 4v(\beta)^4. \tag{4.95}$$

Consequentemente, com (4.81) e (4.95), o Fator de Mandel pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\langle \psi(\beta) | \widehat{N}^2 | \psi(\beta) \rangle}{\langle \psi(\beta) | \widehat{N} | \psi(\beta) \rangle} - \langle \psi(\beta) | \widehat{N} | \psi(\beta) \rangle - 1 \\
&= \frac{u(\beta)^4 + 4v(\beta)^4 + 7u(\beta)^2v(\beta)^2}{u(\beta)^2 + v(\beta)^2} - (u(\beta)^2 + v(\beta)^2) - 1 \\
&= \frac{(u(\beta)^2 + v(\beta)^2)^2 + 3u(\beta)^2v(\beta)^2 - (u(\beta)^2 + v(\beta)^2) - (u(\beta)^2 + v(\beta))}{u(\beta)^2 + v(\beta)^2} \\
&= \frac{3u(\beta)^2v(\beta)^2 - u(\beta)^2 - v(\beta)}{u(\beta)^2 + v(\beta)^2}
\end{aligned}$$

e sabendo que $u(\beta)^2 = 1 + \bar{n}(\beta)$ e $v(\beta)^2 = \bar{n}(\beta)$ temos:

$$Q = \frac{3(1 + \bar{n}(\beta))\bar{n}(\beta) - (1 + \bar{n}(\beta)) - 2\bar{n}(\beta)}{(1 + \bar{n}(\beta)) + 2\bar{n}(\beta)}$$

ou

$$Q = \frac{3\bar{n}(\beta)^2 - 1}{1 + 3\bar{n}(\beta)}, \quad (4.96)$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 4.6.

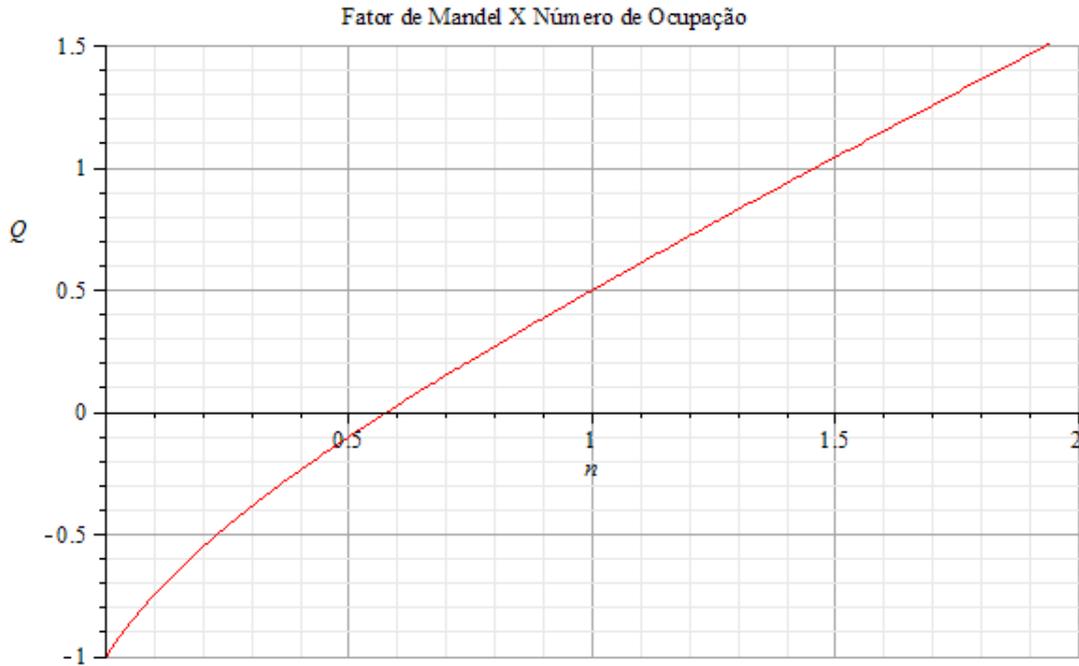


Figura 4.6: Gráfico do Fator de Mandel x Número de Ocupação

Como $\bar{n}(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$, a equação (4.96) fica na forma

$$Q = \frac{3\left(\frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}\right)^2 - 1}{1 + \left(\frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}\right)}$$

ou seja,

$$Q = \frac{-e^{2\beta\omega} + 2e^{\beta\omega} + 2}{e^{2\beta\omega} + e^{\beta\omega} - 2} \quad (4.97)$$

cujo gráfico em função de $(\beta\omega)$ é apresentado na Figura 4.7.

As Figuras 4.6 e 4.7 possibilitam uma análise do comportamento de Q:

1. No limite $T \rightarrow 0$ temos $\beta \rightarrow +\infty$, $\bar{n}(\beta) \rightarrow 0$ e o Fator de Mandel tende a -1; portanto temos uma estatística sub-Poissoniana, o que favorece o emaranhamento.
2. No limite $T \rightarrow +\infty$ temos $\beta \rightarrow 0$, $\bar{n}(\beta) \rightarrow +\infty$ e encontramos uma estatística super-Poissoniana, que por sua vez não favorece o emaranhamento.
3. Na situação analisada na referência [40] em que $\omega = 12,643GHz$ então, por (4.96), temos

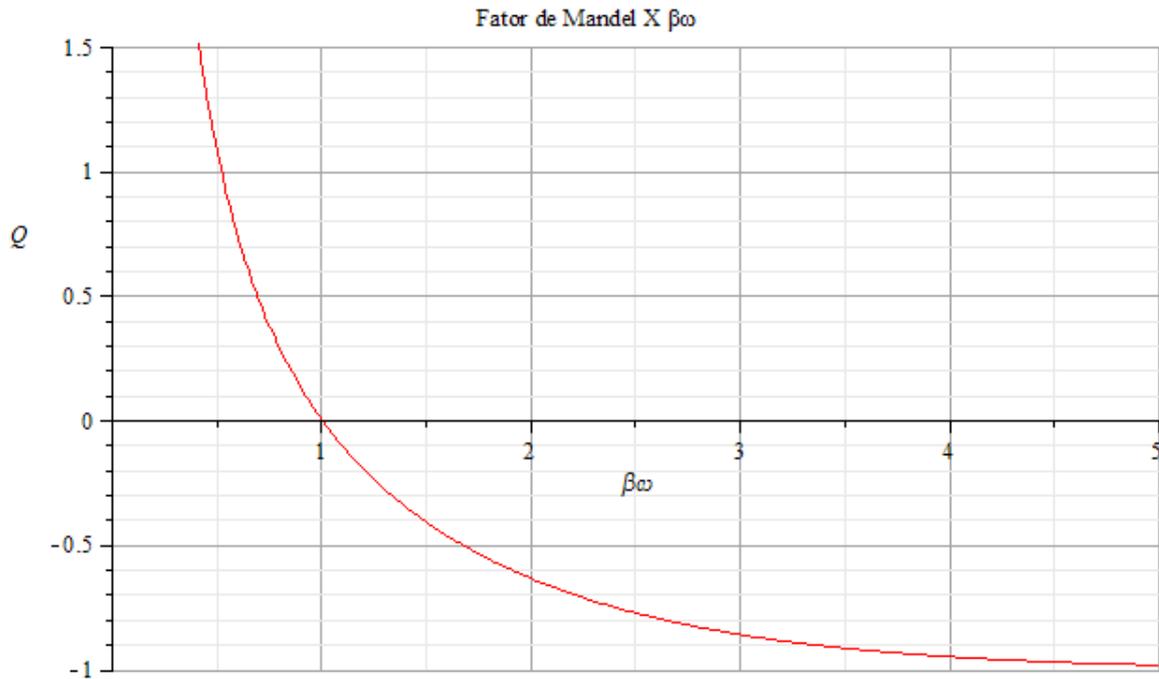


Figura 4.7: Gráfico do Fator de Mandel x $\beta\omega$

que

$$Q = -0,62588, \quad (4.98)$$

sendo portanto a estatística sub-Poissoniana, como esperado, e fortalecendo assim nossos resultados.

4.4 Cálculo da Função de Wigner

A Função de Wigner é uma quase probabilidade, cujos valores negativos estão associados a propriedades não clássicas do sistema. Toda informação do estado térmico $|\Psi(\beta)\rangle$ está contida no $\rho_{|\psi(\beta)\rangle}$, de modo que a função de Wigner que irá caracterizar o nosso estado térmico será determinada por:

$$f_w(q_1, p_1, q_2, p_2; \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \exp\left(\frac{ip_1 v_1}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \exp\left(\frac{ip_2 v_2}{\hbar}\right) \times \langle q_1 - \frac{v_1}{2}, q_2 - \frac{v_2}{2} | \rho_{|\psi(\beta)\rangle} | q_1 + \frac{v_1}{2}, q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle. \quad (4.99)$$

Portanto, usando a expressão (4.7) para $\rho_{|\psi(\beta)\rangle}$ temos que

$$\begin{aligned}
f_w(q_1, p_1, q_2, p_2; \beta) &= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))u_1(\beta)u_2(\beta)} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \\
&\times \exp^{\frac{i(p_1 v_1 + p_2 v_2)}{\hbar}} \{ |x|^2 (n_1 + 1) \langle q_1 - \frac{v_1}{2}, q_2 - \frac{v_2}{2} | n_1 + 1, n_2 \rangle \\
&\times \langle n_1 + 1, n_2 | q_1 + \frac{v_1}{2}, q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle + xy^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \\
&\times \langle q_1 - \frac{v_1}{2}, q_2 - \frac{v_2}{2} | n_1 + 1, n_2 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | q_1 + \frac{v_1}{2}, q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle \\
&+ xy^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \langle q_1 - \frac{v_1}{2}, q_2 - \frac{v_2}{2} | n_1, n_2 + 1 \rangle \\
&\times \langle n_1 + 1, n_2 | q_1 + \frac{v_1}{2}, q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle + |y|^2 (n_2 + 1) \\
&\times \langle q_1 - \frac{v_1}{2}, q_2 - \frac{v_2}{2} | n_1, n_2 + 1 \rangle \langle n_1, n_2 + 1 | q_1 + \frac{v_1}{2}, q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle \} \\
&= \frac{1}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))u_1(\beta)u_2(\beta)} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} \\
&\times \{ |x|^2 (n_1 + 1) [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \exp^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \langle q_1 - \frac{v_1}{2} | n_1 + 1 \rangle \langle n_1 + 1 | q_1 + \frac{v_1}{2} \rangle] \\
&\times [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \exp^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \langle q_2 - \frac{v_2}{2} | n_2 \rangle \langle n_2 | q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle] \\
&+ xy^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \exp^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \langle q_1 - \frac{v_1}{2} | n_1 + 1 \rangle \\
&\times \langle n_1 | q_1 + \frac{v_1}{2} \rangle [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \exp^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \langle q_2 - \frac{v_2}{2} | n_2 \rangle \langle n_2 + 1 | q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle] \\
&+ xy^* \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \exp^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \langle q_1 - \frac{v_1}{2} | n_1 \rangle \\
&\times \langle n_1 + 1 | q_1 + \frac{v_1}{2} \rangle [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \exp^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \langle q_2 - \frac{v_2}{2} | n_2 + 1 \rangle \langle n_2 | q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle] \\
&+ |y|^2 (n_2 + 1) [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \exp^{\frac{ip_1 v_1}{\hbar}} \langle q_1 - \frac{v_1}{2} | n_1 \rangle \langle n_1 | q_1 + \frac{v_1}{2} \rangle] \\
&\times [\int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \exp^{\frac{ip_2 v_2}{\hbar}} \langle q_2 - \frac{v_2}{2} | n_2 + 1 \rangle \langle n_2 + 1 | q_2 + \frac{v_2}{2} \rangle] \}. \quad (4.100)
\end{aligned}$$

Com isso, para avaliar a Função de Wigner, basta calcular

$$I_{\eta, \xi}(q, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp^{\frac{ipv}{\hbar}} \langle q - \frac{v}{2} | \eta \rangle \langle \xi | q + \frac{v}{2} \rangle, \quad (4.101)$$

onde $\eta, \xi = n, n + 1$.

Como o nosso sistema é o oscilador harmônico, as autofunções do hamiltoniano são justa-

mente os polinômios de Hermite $H_n(x)$ [41]. Logo,

$$\langle q + \alpha | \tau \rangle = \psi_\tau(q + \alpha) = \frac{\exp\left(-\frac{(q+\alpha)^2}{2b^2}\right)}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{\tau}{2}} (\tau)!^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} H_\tau\left(\frac{q + \alpha}{b}\right), \quad (4.102)$$

em que $b^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ e segue que

$$\begin{aligned} I_{\eta,\xi}(q,p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp\left(\frac{ipv}{\hbar}\right) \frac{\exp\left(-\frac{(q-v/2)^2}{2b^2}\right)}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{\eta}{2}} (\eta)!^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} H_\eta\left(\frac{q-v/2}{b}\right) \frac{\exp\left(-\frac{(q+v/2)^2}{2b^2}\right)}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{\xi}{2}} (\xi)!^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} H_\xi\left(\frac{q+v/2}{b}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\exp\left(\frac{ipv}{\hbar} - \frac{q^2}{b^2} - \frac{v^2}{4b^2}\right)}{\sqrt{\pi\eta! \xi!} 2^{\frac{\eta+\xi}{2}}} H_\eta\left(\frac{q-v/2}{b}\right) H_\xi\left(\frac{q+v/2}{b}\right) \end{aligned} \quad (4.103)$$

Usando o resultado do Apêndice B, temos então, para os termos de (4.100):

$$\begin{aligned} \bullet I_{n,n}(q,p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp\left(\frac{ipv}{\hbar}\right) \langle q - \frac{v}{2} | n \rangle \langle n | q + \frac{v}{2} \rangle \\ &= 2(-1)^n \exp\left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) \frac{2^n}{2^{\frac{n+n}{2}}} \frac{n!}{\sqrt{n!n!}} z_n^{|n-n|} L_n^{|n-n|}(-2z_n z_n) \\ &= 2(-1)^n \exp\left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) L_n\left(2\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} + 2\frac{q^2}{b^2}\right), \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} I_{n,n+1}(q,p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp\left(\frac{ipv}{\hbar}\right) \langle q - \frac{v}{2} | n \rangle \langle n+1 | q + \frac{v}{2} \rangle \\ &= 2(-1)^n \exp\left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) \frac{2^{n+1}}{2^{\frac{n+n+1}{2}}} \frac{n!}{\sqrt{n!(n+1)!}} z_{n+1}^{|n+1-n|} L_n^{|n+1-n|}(-2z_{n+1} z_n) \\ &= 2^{3/2}(-1)^n \exp\left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) (n+1)^{-1/2} \left(\frac{q^2}{b^2} + \frac{ipb}{\hbar}\right) L_n^1\left(2\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} + 2\frac{q^2}{b^2}\right), \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} I_{n+1,n}(q,p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp\left(\frac{ipv}{\hbar}\right) \langle q - \frac{v}{2} | n+1 \rangle \langle n | q + \frac{v}{2} \rangle \\ &= 2(-1)^{n+1} \exp\left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) \frac{2^{n+1}}{2^{\frac{n+n+1}{2}}} \frac{n!}{\sqrt{n!(n+1)!}} z_n^{|n+1-n|} L_n^{|n+1-n|}(-2z_{n+1} z_n) \\ &= 2^{3/2}(-1)^{n+1} \exp\left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}\right) (n+1)^{-1/2} \left(-\frac{q}{b} + \frac{ipb}{\hbar}\right) L_n^1\left(2\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} + 2\frac{q^2}{b^2}\right), \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned}
I_{n+1,n+1}(q,p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp \frac{ipv}{\hbar} \langle q - \frac{v}{2} | n+1 \rangle \langle n+1 | q + \frac{v}{2} \rangle \\
&= 2(-1)^{n+1} \exp \left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2} \right) \frac{2^{n+1}}{2^{\frac{n+1+n+1}{2}}} \frac{n+1!}{\sqrt{(n+1)!(n+1)!}} \\
&\quad \times z_{n+1}^{|n+1-n-1|} L_{n+1}^{|n+1-n-1|}(-2z_{n+1}z_{n+1}) \\
&= 2(-1)^{n+1} \exp \left(-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2} \right) \\
&\quad \times L_{n+1} \left(2\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} + 2\frac{q^2}{b^2} \right). \tag{4.107}
\end{aligned}$$

Considerando os resultados (4.104), (4.105), (4.106) e (4.107) na expressão (4.100) obtemos então a função de Wigner dada por

$$\begin{aligned}
f_w(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \frac{e^{-x_1^2 - x_2^2}}{(1 + \bar{n}_1(\beta))(1 + \bar{n}_2(\beta))u_1(\beta)u_2(\beta)} \sum_{n_1, n_2=0}^{+\infty} k_1^{n_1} k_2^{n_2} (-1)^{n_1+n_2+1} \\
&\quad \times \{4|x|^2(n_1+1)L_{n_1+1}(2x_1^2)L_{n_2}(2x_2^2) + 8xy^*(-x_1^*)x_2L_{n_1+1}(2x_1^2)L_{n_2}(2x_2^2) \\
&\quad + 8xy^*(-x_2^*)x_1L_{n_1+1}(2x_1^2)L_{n_2}(2x_2^2) + 4|y|^2(n_2+1)L_{n_1}(2x_1^2)L_{n_2+1}(2x_2^2)\} \tag{4.108}
\end{aligned}$$

onde $x_i = \frac{ip_i b}{\hbar} + \frac{q_i}{b}$ e conseqüentemente $-x_i^* = \frac{ip_i b}{\hbar} - \frac{q_i}{b}$, sendo $L(x)$ polinômios de Laguerre.

O gráfico da (4.108) como função de q_1 e p_1 é apresentado na Figura 4.8 para valores $\bar{n}_1(\beta) = \bar{n}_2(\beta) = \bar{n}(\beta)$, $q_2 = 0, 1$, $p_2 = 0, 1$, $x = \sqrt{0,5}$, $y = \sqrt{0,5}$ e $\bar{n}(\beta) = 0, 158907$.

Da Figura 4.8 observamos que a função de Wigner apresenta valores negativos que, como é conhecido, corresponde à região em que o sistema apresenta propriedades não clássicas.

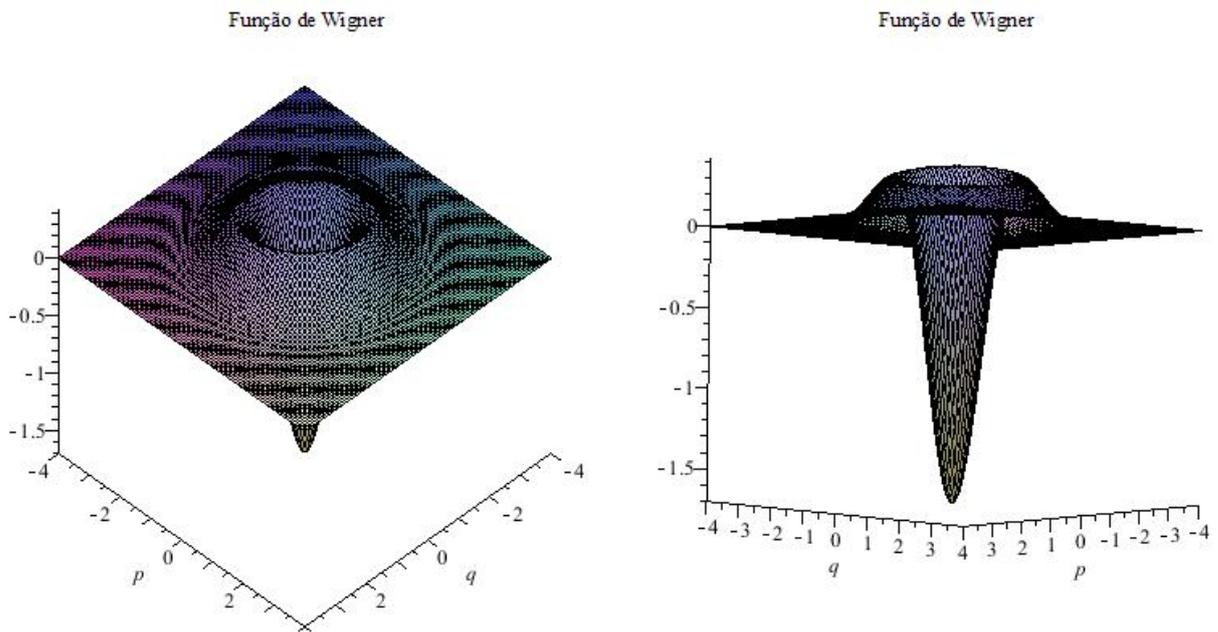


Figura 4.8: Gráfico da Função de Wigner

4.5 Conclusão

Neste capítulo mostramos como determinar o critério de Simon dentro da Teoria de Campos Térmicos. Com esse objetivo consideramos um estado do tipo Bell mas nosso desenvolvimento é geral e pode ser aplicado a outros estados. Nosso resultado permite estimar, para uma dada frequência, a faixa de temperatura que o sistema deve estar para que haja preservação do emaranhamento: percebe-se que quanto maior a temperatura mais facilmente o emaranhamento pode ser perdido, de modo que podemos inferir que uma das causas do fenômeno denominado "morte súbita do emaranhamento" deve ser as flutuações térmicas; por outro lado, quanto menor a temperatura maior será a probabilidade de se preservar as correlações quânticas de modo que, por nosso resultado, quanto menor a temperatura, melhor será o funcionamento de um computador quântico.

Para ratificar os nossos resultados, calculamos a Fidelidade Quântica, o Fator de Mandel e a função de Wigner, que concordam com os resultados encontrados usando o critério de Simon.

5 *Conclusão e Perspectivas*

O estudo dos aspectos qualitativos e quantitativos do emaranhamento é uma das grandes áreas de pesquisa na Teoria Quântica da Computação e da Informação. Neste domínio, um dos temas de interesse é a obtenção de critérios que possibilitem a análise do emaranhamento; um desses critérios é devido a Simon [14] que tem como uma das vantagens a operacionalidade e a aplicabilidade para estados gaussianos. Juntamente com a obtenção de critérios há um grande interesse em se determinar como a temperatura influencia os estados emaranhados. Neste trabalho nós consideramos esses dois aspectos do problema determinando dentro do contexto da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) o critério de Simon.

Para esse fim, escolhemos o estado tipo Bell $x|01\rangle + y|10\rangle$ com pesos arbitrários x e y , via DCT, fomos capazes de termalizar esse estado de Bell e encontrar o operador densidade termalizado, elementos básicos para nosso desenvolvimento. Obtido o critério de Simon no contexto da DCT podemos analisar a importância da temperatura na preservação da informação. Observamos por exemplo que, quanto maior a temperatura, mais facilmente as correlações quânticas são perdidas. Esse fato foi confirmado nos cálculos da Fidelidade Quântica, que informa o quanto um estado se afasta dele mesmo; do Fator de Mandel, que caracteriza a estatística seguida pelo sistema e , por fim, pela Função de Wigner, cuja parte negativa está associada a propriedades não clássicas.

Dentro da Teoria da Computação e Informação Quânticas existe uma série de estados de interesse teórico e de aplicabilidade experimental. Nossa perspectiva é estender essa análise via Dinâmica de Campos Térmicos para os diversos estados de interesse na Computação e Informação Quânticas. Com isso pretendemos entender melhor as diversas formas como o emaranhamento pode ser perdido.

Para analisar outros estados, poderá ser necessário adaptar outros critérios de emaranhamento ao formalismo da DCT já que o critério de Simon, embora poderoso, pode não ser aplicável a todos os estados de interesse. Portanto, pretendemos estender nossa análise a diversos critérios, de forma a elucidar a íntima relação entre o emaranhamento e a temperatura.

APÊNDICE A – Cálculo de Séries de Interesse

Neste apêndice explicitaremos a resolução das séries necessárias para o cálculo da matriz de variância na seção 4.1.2. Partimos da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k}, \quad (\text{A.1})$$

com $k < 1$.

Considerando k como variável na equação (A.1), podemos derivar em relação a k os dois membros dessa igualdade, o que resultará em

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^{n-1} n = \frac{1}{(1-k)^2}; \quad (\text{A.2})$$

reescalando a soma encontraremos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^n (n+1) = \frac{1}{(1-k)^2}. \quad (\text{A.3})$$

que é uma das séries necessárias.

Na relação (A.2), multiplicando por k os dois membros da igualdade obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^n n = \frac{k}{(1-k)^2}, \quad (\text{A.4})$$

que também é uma série utilizada ao longo da dissertação.

Por fim, se na equação (A.3) multiplicarmos por k , teremos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^{n+1} (n+1) = \frac{k}{(1-k)^2}, \quad (\text{A.5})$$

e derivando a equação (A.5) em relação a k

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^n (n+1)^2 = \frac{1+k}{(1-k)^3} \quad (\text{A.6})$$

a última série que necessitaremos na seção 4.1.2.

APÊNDICE B – Cálculo da Integral $I_{\eta,\xi}(q,p)$

Desenvolveremos neste apêndice o cálculo da equação (4.103) necessária para a obtenção da função de Wigner. Portanto, temos que $I_{\eta,\xi}(q,p)$ é dada por

$$\begin{aligned} I_{\eta,\xi}(q,p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp \frac{ipv}{\hbar} \frac{\exp \frac{-(q-v/2)^2}{2b^2}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{\eta}{2}} (\eta)!^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} H_{\eta}\left(\frac{q-v/2}{b}\right) \frac{\exp \frac{-(q+v/2)^2}{2b^2}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{\xi}{2}} (\xi)!^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} H_{\xi}\left(\frac{q+v/2}{b}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\exp \frac{ipv}{\hbar} - \frac{q^2}{b^2} - \frac{v^2}{4b^2}}{\sqrt{\pi\eta!\xi!} 2^{\frac{\eta+\xi}{2}}} H_{\eta}\left(\frac{q-v/2}{b}\right) H_{\xi}\left(\frac{q+v/2}{b}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Considerando que

$$\frac{ipv}{\hbar} - \frac{v^2}{4b^2} = -\left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 - \frac{p^2 b^2}{\hbar^2}$$

temos, substituindo em (B.1), que

$$I_{\eta,\xi}(q,p) = \frac{\exp \frac{-p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}}{\sqrt{\pi\eta!\xi!} 2^{\frac{\eta+\xi}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp^{-\left(\frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}\right)^2} H_{\eta}\left(\frac{q-v/2}{b}\right) H_{\xi}\left(\frac{q+v/2}{b}\right).$$

Fazendo a mudança de variável $x = \frac{v}{2b} - \frac{ipb}{\hbar}$, encontramos:

$$I_{\eta,\xi}(q,p) = 2(-1)^{\xi} \frac{\exp \frac{-p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}}{\sqrt{\pi\eta!\xi!} 2^{\frac{\eta+\xi}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp^{-x^2} H_{\eta}(x+z_{\eta}) H_{\xi}(x+z_{\xi}), \quad (\text{B.2})$$

onde utilizamos que $H_{\xi}(-x) = (-1)^{\xi} H_{\xi}(x)$ e estamos notamos, por simplicidade, os argumentos associados aos polinômios de Hermite por $z_{\eta} = \frac{ipb}{\hbar} - \frac{q}{b}$ e $z_{\xi} = \frac{ipb}{\hbar} + \frac{q}{b}$ respectivamente .

Sabendo que [41]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp^{-x^2} H_{\eta}(x + z_{\eta}) H_{\xi}(x + z_{\xi}) = \sqrt{\pi} 2^{\max(\eta, \xi)} \min(\eta, \xi)! z_{\max(\eta, \xi)}^{|\eta - \xi|} L_{\min(\eta, \xi)}^{|\eta - \xi|}(-2z_{\eta}z_{\xi}), \quad (\text{B.3})$$

em que $L(x)$ são os polinômios de Laguerre e \min e \max são respectivamente, o menor e o maior entre os números η e ξ , temos que (B.2) resulta em

$$I_{\eta, \xi}(q, p) = 2(-1)^{\xi} \exp^{-\frac{p^2 b^2}{\hbar^2} - \frac{q^2}{b^2}} \frac{2^{\max(\eta, \xi)} \min(\eta, \xi)!}{2^{\frac{\eta + \xi}{2}} \sqrt{\eta! \xi!}} z_{\max(\eta, \xi)}^{|\eta - \xi|} L_{\min(\eta, \xi)}^{|\eta - \xi|}(-2z_{\eta}z_{\xi}), \quad (\text{B.4})$$

o que conclui a integração de $I_{\eta, \xi}(q, p)$.

APÊNDICE C – Aplicação do Critério de Simon à Estados Gaussianos

Este apêndice é destinado à aplicação do critério de Simon a estados Gaussianos [14], a fim de mostrar que esse critério de separabilidade é uma condição necessária e suficiente para estados Gaussianos. Como obtido no capítulo 3, o critério de Simon é

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - |\det C|\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B), \quad (\text{C.1})$$

em que

$$V = [\{\xi_\alpha, \xi_\beta\}] = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix},$$

é a matriz de variância, $\{.,.\}$ o anticomutador e $\xi_\alpha = (q_1, p_1, q_2, p_2)$.

O estado Gaussiano é definido como aquele cuja função de Wigner¹ é uma função Gaussiana [42]

$$f_w(\xi) = (4\pi^2 \sqrt{\det V})^{-1} e^{-1/2 \xi^T V^{-1} \xi}, \quad (\text{C.2})$$

sendo V^{-1} a inversa da matriz variância e considerando, sem perda de generalidade, que a $\langle \xi_\alpha \rangle = 0$.

Como o critério de Peres-Horodecki é sempre uma condição necessária para separabilidade, basta mostrar que o critério de Simon é uma condição suficiente, isto é, se a equação (C.1) é válida então o estado é separável.

1. Primeiramente vamos mostrar que se o $\det C > 0$ então o sistema é separável. De fato,

¹ O de forma equivalente, a função característica.

como a matriz de variância pode ser escrita na forma

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

vamos aplicar as seguintes transformações simpléticas

$$S_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}, S_y = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

então V é transformado em

$$V' = S_y S_x V = \begin{pmatrix} y^2 x^2 a & 0 & y^2 c_1 & 0 \\ 0 & y^{-2} x^{-2} a & 0 & y^{-2} c_2 \\ y^2 c_1 & 0 & y^2 x^{-2} b & 0 \\ 0 & y^{-2} c_2 & 0 & y^{-2} x^2 b \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Calculando os autovalores da matriz (C.5) encontramos que

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} y^2 \{ x^2 a + x^{-2} b \pm [(x^2 a - x^{-2} b)^2 + 4c_1^2]^{1/2} \}$$

e

$$\lambda'_{\pm} = \frac{1}{2} y^{-2} \{ x^{-2} a + x^2 b \pm [(x^{-2} a - x^2 b)^2 + 4c_2^2]^{1/2} \}. \quad (\text{C.6})$$

Definindo

$$V'' = \text{diag}(\lambda_+, \lambda'_+, \lambda_-, \lambda'_-), \quad (\text{C.7})$$

pela equação $V'' + i/2\Omega \geq 0^2$ e de acordo com as referências [14, 43] esse estado é separável.

2. Como segundo caso consideremos $\det C = 0^3$. Aplicando a seguinte transformação sim-

²Essa é a equação (3.41), deduzida no capítulo 3.

³Já que $\det C = 0$, vamos supor sem perda de generalidade que $c_2 = 0$

plética

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} (2a)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2a)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2b)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2b)^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

à matriz (C.3)) encontramos

$$V' = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2c_1(ab)^{1/2} & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2c_1(ab)^{1/2} & 0 & 2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Os autovalores da matriz (C.9) são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad e \quad \lambda_{\pm} = a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4abc_1^2} \quad (\text{C.10})$$

A partir da relação $V' + i/2\Omega \geq 0$ e de acordo com as referências [14, 43] esse estado é separável.

3. Finalmente, seja o caso em que $\det C < 0$. A operação de transposição parcial do operador densidade ρ^{TB} está associada a uma reflexão no Espaço de Fase, ou seja,

$$\rho \rightarrow \rho^{TB} \iff f_w(q_1, p_1, q_2, p_2) \rightarrow f_w(q_1, p_1, q_2, -p_2), \quad (\text{C.11})$$

cuja representação matricial é da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

A aplicação da tranposição parcial resulta que a matriz de variância se transforme em

$$\Lambda V \Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & -c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Temos que essa operação altera o sinal do determinante de C , logo, para este caso, basta tomarmos a transposição parcial de ρ que obteremos $\det C > 0$ e pelo 1º caso o estado será separável.

Portanto um estado Gaussiano bipartite é separável se, e somente se, o critério de Simon é satisfeito.

Referências Bibliográficas

- 1 . Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N., Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- 2 . Bohr, N., Phys. Rev., **48**, 696 (1935).
- 3 . Schrödinger, E., Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **31**, 555 (1935).
- 4 . Bell, J. S., Physica, **1**, 195 (1964).
- 5 . Aspect, A., Grangier, P., Roger, G., Phys. Rev. Lett. , **47** , 460 (1981).
- 6 . Aspect, A., Grangier, P., Roger, G., Phys. Rev. Lett., **49** , 91 (1982).
- 7 . Nielsen, M. A., Chuang, I. L., *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- 8 . Bengtsson, I., Życzkowski, K., *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*, Cambridge University Press , Cambridge (2006).
- 9 . Cunha., M. O. T., *Emaranhamento: dos Gatos de Schrödinger a Algebra Multilinear*, Notas de Curso, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais (2004).
- 10 - Cunha, M. O. T., *Noções de Informação Quântica*, IMPA, Rio de Janeiro (2007).
- 11 . Vianna, J. D. M. , Trindade, M. A. S., Fernandes, M. C. B., Int. J. Theor. Phys., **47**, 961 (2008).
- 12 . Peres , A., Phys. Rev. Lett., **77**, 1413 (1996).
- 13 . Horodecki, M., Horodecki, P., Horodecki, R., Phys. Lett. A, **223**, 1 (1996).
- 14 . Simon, R., Phys. Rev. Lett., **84**, 2726 (2000).
- 15 . Das, A., *Finite Temperature Field Theory*. World Scientific, Singapore (1997).
- 16 . Rodrigues, A. F., *A Integral de Feynman: Das Origens às Teorias de Campos a Temperaturas Finitas*, Rio de Janeiro (2010); <http://escoladocbpf.blogspot.com/p/notas-das-aulas.html>.
- 17 . Lima, I. C. C., *Manual Prático de Funções de Green em Física da Matéria Condensada*, Editora da UERJ, Rio de Janeiro (2011).
- 18 . Khanna, F. C., Malbouisson, A. P. C., Malbouisson, J. M. C., Santana, A. E., *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications*. World Scientific, Singapore (2009).

- 19 . Umezawa, H., Matsumoto, H., Tachiki, M., *Thermo field dynamics and condensed states*. North-Holland, Netherlands (1982).
- 20 . Trindade, M. A. S., *Estruturas Algébricas em Informação Quântica e Dinâmica de Campos Térmicos*, Tese de Doutorado, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador (2010).
- 21 . Rocha, O. L. V., *Estados Quânticos do Tipo Bell na Representação Duplo-Trilho e Efeitos de Temperatura: Uma Análise Usando a Dinâmica de Campos Térmicos*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador (2011).
- 22 . Araki, H., Woods, E., *J. Math. Phys.* , **4** , 637 (1963).
- 23 . Landau, L., *Z. Phys.*, **45** , 430 (1927).
- 24 . Neumann, J. Von, *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, New Jersey (1996).
- 25 . Oliveira, I. C., Jesus, V. L. B., *Introdução à Física do Estado Sólido*, 2ed., Livraria da Física, São Paulo (2011).
- 26 . Rigolin, G. G., *Estados Quânticos Emaranhados*, Tese de Doutorado, Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2005).
- 27 . Feynman, R. P., *Caltech Engineering and Science* , **23**, 22 (1960).
- 28 . Gribbin, J., Gribbin, M., *Richard Feynman: a life in science*, Dutton, New York (1997).
- 29 . Dietrich, J. S., *California Institute of Technology* , **49**, 25 (1986).
- 30 . Gordon, E. M., *Electronics Magazine*, **38** 8 (1965).
- 31 . Novoselov, K., *Physics World*, **22** , 27 (2009).
- 32 . Candido, F. *Será o Fim da Lei de Moore?*, Disponível em <http://info.abril.com.br/noticias/ti/sera-o-fim-da-lei-de-moore-10042009-10.shl>. Acesso em: 12 de agosto de 2011.
- 33 . Shor, P. W., *Foundations of Computer Science* , **124** (1994).
- 34 . *Criptografia Quântica*, Disponível em <http://www.artigonal.com/tecnologia-astigos/criptografia-quantica-1227856.html>. Acesso em: 12 de agosto de 2011.
- 35 . Kleinjung, T., Aoki, K., Franke, J., Lenstra, A., Thomé, E., Bos, J., *Advances in Cryptology* , **6223** , 333 (2010).
- 36 . Feynman, R. P., *Int. J. of Theor. Phys.*, **21**, 467 (1982).
- 37 . Gasster, S. *Qubit By Qubit: Advancing the State of Quantum Information Science and Technology*, Disponível em <http://www.aero.org/publications/crosslink/spring2011/07>. Acesso em: 12 de agosto de 2011.
- 38 . *Controlled NOT Gate*, Disponível em [http://en.wikipedia.org/wiki/Controlled NOT gate](http://en.wikipedia.org/wiki/Controlled_NOT_gate). Acesso em: 12 de agosto de 2011.
- 39 . Simon, R., Mukunda, N., Dutta, B., *Phys. Rev. A*, **49**, 1567 (1994).

- 40 . Olmschenk, S., Younge, K., Moehring, D., Matsukevich, D., Maunz, P., Monroe, C., Phys. Rev. A , **76** 052314 (2007).
- 41 . Arfken, G. B., Weber, H. J., Harris, F., *Mathematical methods for physicists*. Academic Press New York, Orlando (1985).
- 42 . Wang, X., Hiroshima, T., Tomita, A., Hayashi, M., Physics Reports , **448** 1 (2007).
- 43 . Englert, B., Wodkiewicz, K., Phys. Rev. A, **65** 054303 (2002).