



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Testes Observacionais em Modelos de
Quintessência com Métrica Anisotrópica

Welber Leal de Araújo Miranda

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Testes Observacionais em Modelos de
Quintessência com Métrica Anisotrópica

Welber Leal de Araújo Miranda

Orientador: Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física da Universidade Federal da Bahia
como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Mestre em Física.

Salvador – Bahia – 2011

Ao tempo

Agradecimentos

Agradeço a minha família, que me possibilitou uma boa educação, sempre fornecendo as ferramentas necessárias ao meu desenvolvimento.

Agradeço a Saulo Carneiro, pela amizade construída e pela orientação. Com ele aprendi quase tudo que hoje sei sobre Cosmologia. Sua intuição física e matemática é uma fonte de inspiração.

Agradeço ao professor Olival Freire Júnior, que orientou minha Iniciação Científica e teve papel essencial em minha formação.

Agradeço a Jéssica Guerreiro, pela cumplicidade e companheirismo ao longo de bons anos, sempre me incentivando e acreditando em meu sucesso.

Agradeço aos amigos do grupo de cosmologia da UFBA: Cássio Pigozzo pelos diversos momentos de aprendizado, sempre disponível para minhas dúvidas e também para meus desabaços, Humberto Borges pelos momentos de discussões e descontração e também a Roberto Menezes pela grande generosidade e disposição em compartilhar não somente material de estudo, como também pela amizade e produtivas discussões.

Agradeço aos amigos do Instituto de física Climério, Gustavo, Joilton, Lilian, Leandro e Manuela pelos muitos anos de amizade.

A Jorge Ben Jor e tantos outros, por massagearem meus ouvidos enquanto escrevia este trabalho.

À CAPES pela bolsa de estudos.

Resumo

Estudamos modelos de quintessência com comportamento *tracker*, com um campo escalar ϕ submetido ao potencial Ratra-Peebles com o parâmetro α fixado em $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Aplicamos o modelo à métrica isotrópica FLRW e também à métrica anisotrópica RTKO. A métrica RTKO é uma generalização da métrica de Gödel, classificada como Bianchi III. Uma solução exata das equações de campo de Einstein pode ser obtida ao adicionarmos um campo escalar ψ , sem massa, minimamente acoplado à gravidade. Analisamos aspectos observacionais ao testarmos supernovas do tipo Ia, utilizando o conjunto de dados fornecido pelo projeto SDSS com o *fitter* MLCS2K2. Fizemos o ajuste para modelos de quintessência nas métricas FLRW e RTKO. Os resultados obtidos foram comparados com o modelo Λ CDM em ambas as métricas. Analisamos as distinções geradas entre o modelo padrão e os modelos de quintessência propostos. Fizemos também uma análise da viabilidade de detecção de anisotropia do universo através de efeitos de curvatura.

Abstract

We study cosmological quintessence models with tracking behavior, where the scalar field ϕ is subjected to a Ratra-Peebles potential. We apply those models to the FLRW metric and to an anisotropic metric denominated RTKO. The RTKO metric is a general form of a Gödel metric, classified as a Bianchi type III. The solution of Einstein equations is obtained by the addition of an anisotropic massless scalar field ψ minimally coupled to gravity. We then analyze observational aspects using Supernovae Ia observations. The SDSS project provides the used data with the fitter MLSC2K2. We worked out the analysis over the metric FLRW and RTKO. The results are compared with the Λ CDM model in FLRW and RTKO. The study of detectable anisotropies in the universe is worked out within a context in which such anisotropies are caused by the effect of curvature in a RTKO space-time.

Notações e Convenções

- A assinatura das métricas utilizada será $(+, -, -, -)$
- Utilizaremos o sistema de unidades no qual $8\pi G \equiv c \equiv 1$
- O índice 0 (zero) referir-se-á à coordenada temporal e os demais 1, 2 e 3 às coordenadas espaciais.
- As letras do alfabeto grego: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \dots$ variarão entre os índices 0, 1, 2 e 3.
- As letras do alfabeto latino: a, b, i, j, m, ... variarão entre os índices espaciais 1, 2 e 3.
- As derivadas covariantes de um tensor serão representadas por ponto e vírgula ou por $T_{;\epsilon}^{\mu} = \frac{\partial T^{\mu}}{\partial x^{\epsilon}} + \Gamma_{\epsilon k}^{\mu} T^k$
- As derivadas ordinárias de um tensor serão representadas apenas por vírgulas ou por $T^{\mu},_{\epsilon} = \frac{\partial T^{\mu}}{\partial x^{\epsilon}}$
- O ponto sobre a letra representará a derivada com relação ao tempo cosmológico t: $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$
- O linha (apóstrofo) sobre a letra representará a derivada com relação ao tempo conforme: $a' \equiv \frac{da}{dt}$
- O tensor $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski (coordenadas cartesianas), ou seja, $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$
- O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ corresponderá ao caso geral do espaço-tempo curvo.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	A Cosmologia e suas Múltiplas Origens	1
1.2	Princípios da Cosmologia moderna	3
1.3	Modelos de Quintessência e anisotropia	6
2	Observações Cosmológicas	8
2.1	A idade da terra e o escuro do céu	8
2.2	Redshift e a lei de Hubble	10
2.3	Nucleossíntese	13
2.4	Radiação Cósmica de Fundo – CMB.	18
2.5	Matéria escura	21
2.6	Supernovas.	23
3	Modelos Cosmológicos em FLRW	27
3.1	Equações de Einstein	28
3.2	Cosmologia padrão	31
3.2.1	Época dominada pela radiação	36
3.2.2	Época dominada pela matéria	37
3.2.3	Época dominada por Λ	37
3.2.4	Parâmetros cosmológicos em função do redshift	38
3.3	Modelos de Quintessência - ϕ CDM.	39
3.3.1	Dinâmica de um campo escalar.	40
3.3.2	O critério <i>tracker</i>	42
3.3.3	O Potencial Ratra-Peebles	44
3.3.4	O modelo cosmológico	45
3.3.5	Época dominada pela radiação	46
3.3.6	Época dominada pela matéria	46
3.3.7	Época dominada pelo campo escalar	47

4	A métrica anisotrópica RTKO	52
4.1	A métrica RTKO	53
4.2	Vetores de Killing.	55
4.3	Isotropia da CMB.	58
4.4	Soluções das equações de Einstein	59
4.5	O modelo de quintessência em RTKO	63
5	Parâmetros Cosmológicos	67
5.1	A escada de distâncias.	68
5.2	Distância Própria	72
5.3	Distância de Luminosidade	74
5.4	Distância Diâmetro-Angular	77
5.5	Módulo de Distância	79
5.6	Distância em RTKO	81
6	Ajuste Observacional	85
6.1	Estatística Bayesiana	85
6.1.1	Minimização de erros	87
6.1.2	Marginalização	89
6.2	Ajustes em Supernovas Ia.	90
6.2.1	Λ CDM em FLRW plano	91
6.2.2	ϕ CDM em FLRW	93
6.2.3	ϕ CDM em RTKO	95
6.3	Análise e Discussões	97
6.3.1	Anisotropias	98
7	Conclusão	103
	Bibliografia	106

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia é uma ambição da física e também um desafio ao intelecto humano. O estudo científico do cosmos descreve o universo como um único objeto físico, analisando sua estrutura, suas propriedades e sua evolução. As fronteiras do universo, tal como visto pela cosmologia atual, estende-se por vastidões, sendo a escala usual para formulação teórica do cosmos imensa, onde galáxias inteiras não passam de grãos numa extensa malha do espaço-tempo. A textura do universo é bastante diversa e altamente complexa, sendo composta por asteroides, inúmeros planetas e estrelas que se reúnem em galáxias, e ainda aglomerados e superaglomerados com milhares de galáxias perfazendo estruturas em variadas escalas. Ao unir-se os fundamentos da física às observações astronômicas é possível vislumbrar que a empreitada cosmológica é possível e torna-se a cada dia mais abrangente e substancial, permeando os domínios da física de precisão. Devido à riqueza e complexidade de tal universo, o estudo de tão vasto domínio encerra um processo de simplificação inevitável. Como fronteira final, a natureza poderá revelar o quão grosseira é sua descrição. O sucesso da cosmologia reside justamente ao fazermos nascer tais complexidades das mais imperfeitas hipóteses.

1.1 A cosmologia e suas múltiplas origens

A análise do cosmos é uma das facetas mais antigas do estudo da natureza e também uma questão fundamental para o intelecto humano. Desde os primórdios da

civilização todos tentam compreender os enigmas que nos cercam. A noção *cosmológica*¹ dos tempos neolíticos era extremamente local e os eventos cosmológicos relacionavam-se com o clima, fenômenos naturais como terremotos, ou mesmo as estações do ano. O universo era aquilo com que se podia interagir imediatamente. Com o avanço da vida em sociedade, compreender fenômenos da natureza era uma tarefa de grande importância e possibilitava melhores chances de sobrevivência. A ausência de compreensão dos fenômenos físicos levou ao surgimento de mitos que foram propagados e constantemente reconstruídos por diversos grupos sociais. Cada uma de forma particular, distintas culturas apresentaram uma variedade de mitologias para explicar os fenômenos naturais. Em contraste, um elevado nível de conhecimento sobre os episódios naturais foi atingido com o estudo sistemático destes fenômenos. Cada uma destas civilizações influenciou permanentemente o desenvolvimento científico da humanidade.

Alguns historiadores defendem que os chineses foram pioneiros e de fato, os mais persistentes e precisos observadores dos céus [1]. Os chineses produziram detalhados dados observacionais e mapas astronômicos que foram identificados como oriundos de épocas remotas, com documentos datados do século XV a.C. A civilização chinesa já dotava de profundos conhecimentos e uma rica mitologia para relacioná-los. Já no norte da África, os mitos da cosmologia antiga dos egípcios, seguiam linhas mais pragmáticas. Observações do céu, foram responsáveis pela formulação de uma mitologia vasta, que mais tarde veio a se tornar a sua religião fundamental, com suas principais divindades representadas por corpos celestes. Seus sacerdotes se ocupavam principalmente em calcular e prenunciar o tempo e local de aparição de seus deuses, e também predizer cheias e fenômenos periódicos. Os povos da mesopotâmia, por outro lado, produziram uma detalhada astronomia, a qual possuía inúmeros registros de eclipses, posições de planetas, nascer e por do Sol e da Lua. Os registros mesopotâmicos e suas observações do céu são datados em 800 a.C e são conhecidos como os documentos científicos mais antigos [2] .

Com uma produção escrita extremamente rica e abundante, é notável a hegemonia do pensamento grego no pensamento ocidental. A ciência grega pregava a observação e experimentação como elementos básicos na procura de leis universais e nestas bases o

¹ Nesta seção a palavra Cosmologia é usada num sentido geral de estudo do universo.

conhecimento grego floresceu vigorosamente [3]. A filosofia aristotélica distinguia os elementos pelo que chamavam de sua posição natural. Para estes, a natureza era decomposta em cinco elementos: Terra, Fogo, Água, Ar e o quinto elemento – Quintessência, um elemento desconhecido que deveria preencher o espaço além da esfera celeste.

Mais tarde, na Europa renascentista, inúmeros fatores possibilitaram uma revolução na qual superstições e mitos foram substituídos pela razão e pelo conhecimento. A revolução no meio científico borbulhava. No contexto da cosmologia, em 1543 Nicolau Copérnico (1473-1543) contribuiu com um modelo no qual a Terra girava sobre o Sol e a rotação da esfera celeste era justificada pela rotação da terra em torno de seu próprio eixo, ou seja, um modelo heliocêntrico. O pensamento científico de Galileu Galilei (1564-1642) teve papel predominante na revolução da ciência, suas ideias foram seminais para a formulação da mecânica newtoniana. Galileu melhorou significativamente o telescópio refrator e com ele descobriu as manchas solares, os satélites de Júpiter [4] e diversos objetos astronômicos. Estas descobertas contribuíram experimentalmente para uma sólida defesa do modelo heliocêntrico.

Em sua obra, Isaac Newton (1642-1727) pioneiramente proporciona uma teoria que explica as forças envolvidas na queda de objetos na terra e também a atração de corpos celestes, a *lei universal da gravitação* [5]. Newton conseguiu demonstrar, a partir das leis da mecânica, que as orbitas planetárias descreviam elipses, congruentemente às observações astronômicas de Tycho Brahe (1546-1601) e Johannes Kepler (1571-1630). Estas descobertas, aliadas às observações e descobertas de Galileu Galilei, culminaram mais tarde no abandono das teorias geocêntricas e o consequente estabelecimento da teoria heliocêntrica, o que pode ser considerado hoje um dos maiores avanços no entendimento do sistema solar e, de um certo ângulo, do próprio universo. Encerrado no imaginário científico coletivo, o universo tornava-se cada dia maior.

1.2 Princípios da cosmologia moderna

A formulação científica, tal como produto do intelecto humano, está nativamente impregnada com os ideais e a cultura de seus fundadores. O estudo e formulação das leis

naturais sofrem frequentes mudanças, por vezes básicas e sutis por outras drásticas e profundas. A visão sobre a qual é fundamentada a ciência como uma narrativa onde exalta-se o êxito das teorias verdadeiras sobre as falsas vem sendo desconstruída, gradativamente substituída por uma visão menos idealizada do fazer científico [6], na qual esta é vista como um ente sempre em construção e em constante reformulação.

No inevitável processo de construções e reconstruções do conhecimento científico, a teoria da gravitação newtoniana reinou por mais de duzentos anos como a correta descrição da interação entre corpos massivos, como os planetas e as estrelas. Embora hegemônica como descrição da interação gravitacional, a teoria não era isenta de problemas. A gravitação newtoniana torna-se impraticável quando tenta lidar com a interação de muitos corpos, fazendo com que a solução exata de problemas como o sistema solar, por exemplo, torne-se matematicamente inviável. Esta descrição também não explica a origem da equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, variáveis presentes em sua 2^o lei do movimento e em sua teoria da gravitação, respectivamente. No cálculo de campos intensos, a gravitação de Newton falha, como ao calcular erroneamente o período de precessão do periélio de mercúrio [7]. A cosmologia sofreu um avanço com a teoria Newtoniana, porém os modelos cosmológicos advindos desta teoria eram severamente limitados. Em 1905 Albert Einstein (1879–1955) compilou uma teoria que reformulou a descrição de corpos em movimento isentos de aceleração, conhecida como Teoria da Relatividade Restrita (TRR). A relatividade restrita [8] gerou uma profunda mudança de paradigmas na ciência. Sua pedra fundamental, o postulado de constância da velocidade da luz, estabelece que as ondas eletromagnéticas possuem velocidade constante em qualquer referencial inercial. A velocidade da luz (c), com valor aproximado de 3×10^8 m/s, tornou-se o limite para a propagação de entes físicos. Dentre as consequências mais fundamentais da TRR, é crucial a equivalência massa-energia, fundamentada pela famosa equação:

$$E = mc^2. \quad (1.1)$$

Este resultado modificou profundamente a noção de massa e energia como entidades independentes e culminou em uma profunda transformação em toda a física. A teoria da gravitação proposta por Newton não era compatível com estes princípios, uma vez que sua

descrição por forças instantâneas implicava numa velocidade infinita de propagação para a interação gravitacional. Em 1916 o próprio Einstein apresenta uma teoria da gravidade [9] na qual os princípios da relatividade restrita eram naturalmente respeitados. Esta é a Teoria da Relatividade Geral (TRG), cuja pedra fundamental é o princípio de equivalência, enunciado como:

“Em todo ponto do espaço-tempo sob um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de forma que numa região suficientemente pequena em torno deste ponto, as leis da natureza possuem a mesma forma que as de um sistema de coordenadas cartesiano inercial, isento de efeitos gravitacionais” [7].

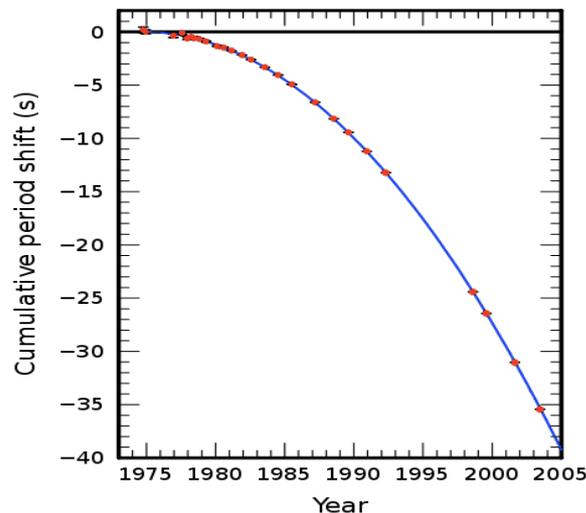


Figura 1.1: Valor medido e teórico para a variação do período de recessão de uma estrela binária pulsante (PSR B1913+16).

Diversos experimentos foram, e ainda vêm sendo realizados a fim de comprovar a validade da teoria einsteiniana. A teoria da R.G. esta em alto grau de concordância com uma variedade de observações: a precessão do periélio de Mercúrio, o desvio de raios luminosos por campos gravitacionais e a dilatação temporal de relógios em órbita estão dentre as mais comumente citadas. A mais recente destas confirmações, fornecida pelo Gravity Probe-B [10], atingiu um nível de confirmação para efeitos geodésicos (Precessão de Sitter) com erros de 0.28% e efeitos de arrasto (Efeito Lense-Thirrin), com erros de 19%.

Uma importante medição da T.R.G é mostrada na figura 1.1, que compara os valores medidos e a curva calculada, a partir da teoria da relatividade de Einstein, para a variação do período de recessão de uma estrela binária pulsante, durante três décadas de medições. O resultados mostraram que o período orbital do sistema decresce a uma taxa de 0.997 ± 0.002 vezes a prevista por emissão via radiação gravitacional. Este resultado indica uma das mais precisas verificações da validade da teoria de Einstein e rendeu aos seus realizadores o premio Nobel de Física de 1993. Com o advento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, pela primeira vez foi possível, através de uma teoria física sólida, modelar de forma detalhada o universo conhecido, permitindo descrevê-lo numa escala apropriada. Ao longo desta dissertação será utilizada a teoria da Relatividade Geral como descrição correta da dinâmica do universo em que vivemos.

1.3 Modelos de Quintessência e Anisotropia

Ao usarmos a Relatividade Geral, é possível obter uma infinidade de modelos cosmológicos, cada um destes com características específicas de geometria e conteúdo energético-material. As observações disponíveis atualmente não são capazes de determinar um modelo que descreva todas as propriedades observadas deste universo. Neste contexto será proposto um modelo cosmológico alternativo, na tentativa de melhorar nosso entendimento sobre a classe de modelos estudados e sobretudo realizar predições que possam ser confrontadas com os dados experimentais. O presente trabalho tem como objetivo estudar as propriedades e a viabilidade observacional de modelos de quintessência em uma métrica anisotrópica.

A métrica proposta possui geometria espacialmente homogênea cuja secção espacial é obtida pelo produto $\mathcal{R} \times \mathcal{H}^2$, onde \mathcal{R} é o espaço real e \mathcal{H} é um espaço hiperbólico. A métrica não possui cisalhamento, é anisotrópica e possui expansão conforme. Esta métrica é classificada como Bianchi III [11][12][13]. Esta geometria foi estudada pioneiramente por Rebouças e Tiommo [14] e também por Korotkii e Obukhov [15][16], assim denominaremos esta métrica RTKO (Rebouças-Tiomno-Korotkii-Obukhov). Será visto nos próximos capítulos que esta métrica se reduz à métrica FLRW (Friedmman-Lemaitre-Robertson-Walker) espacialmente plana no limite de pequenas distâncias e sua expansão

conforme é fato essencial para a isotropia da Radiação Cósmica de Fundo (CMB, do inglês *Cosmic Microwave background*) dos modelos apresentados.

Os modelos cosmológicos serão construídos com conteúdo energético formado por matéria e radiação acrescidos de dois fluidos descritos por campo escalar: um anisotrópico, responsável pela anisotropia da métrica [17] e um fluido isotrópico de quintessência, o qual deverá contribuir com uma pressão negativa e gerar expansão acelerada na era atual. Serão analisadas as principais diferenças deste modelo com os modelos de quintessência na métrica FLRW, assim como comparar suas propriedades com o modelo padrão Λ CDM². Os modelos de quintessência estudados serão restritos a um potencial do tipo inverso da potência, pioneiramente estudados por Ratra&Peebles [18], o qual denominaremos potencial Ratra-Peebles. Este potencial apresenta interessantes características ao modular a expansão acelerada do universo, observada em medições de luminosidade de supernovas Ia [19].

Nos capítulos seguintes será feita uma revisão da literatura, apresentando-se no capítulo 2 algumas das principais observações em cosmologia. No capítulo 3 será analisado os aspectos principais do modelo teórico considerado como padrão na cosmologia, denominado Λ CDM, assim como será feita a modelagem de quintessência para a métrica FLRW. O Capítulo 4 pretende analisar a métrica anisotrópica RTKO, algumas de suas simetrias e as soluções exatas das equações de Einstein. No Capítulo 5 será discutido os parâmetros de medição observacional dos modelos com métrica FLRW e com a métrica anisotrópica RTKO. Por fim no Cap. 6 será feita uma análise estatística através de comparações teóricas e observacionais de distâncias aos objetos astrofísicos conhecidos como Supernovas Ia. Desta forma poderemos analisar a viabilidade de modelos de quintessência tanto na métrica FLRW como na métrica RTKO, tornando possível delimitarem-se os parâmetros teóricos em coerência com os dados observacionais apresentados.

² Este modelo será estudado no capítulo 3.

Capítulo 2

Observações Cosmológicas

A grande diversidade de experimentos das últimas décadas, aliada ao desenvolvimento de novas tecnologias de medição, geraram uma mudança de paradigmas na cosmologia. O estudo do cosmos mudou drasticamente. Novos dados e medições astronômicas estabeleceram vínculos fundamentais para a estrutura do universo, sua idade e evolução. A cosmologia entra numa era de precisão na qual é possível restringir e refinar em profundidade os modelos cosmológicos. Para estabelecer teorias científicas com elegância matemática e consistência física, ao iniciar a modelagem dos vastos domínios da cosmologia, é importante analisar os seus vínculos observacionais mais fundamentais. Este capítulo é uma revisão das principais observações que restringem fisicamente a infinidade de possíveis universos. Serão apresentadas algumas das principais observações realizadas majoritariamente nos séculos XX e XXI. Estas observações propiciaram o nível de compreensão que foi atingido com a cosmologia moderna. Será analisada em nível introdutório a importância de cada dado observacional, numa tentativa de manter mínimas as influências de um modelo particular de universo. As hipóteses básicas que restringem os possíveis modelos cosmológicos físicos serão admitidas gradativamente no decorrer do capítulo.

2.1 A idade da Terra e o Escuro do Céu

Numa hierarquia simples, qualquer constituinte do cosmos deverá ser menos antigo que o próprio universo. Para estimar a idade do universo é preciso examinarmos vastas extensões além do sistema solar e de nossa galáxia, porém é preciso também nos

voltarmos para características locais, como as do nosso próprio planeta. É natural presumir que a Terra não foi formada imediatamente após o surgimento do cosmos. É logo plausível estimar a idade do universo como ao menos maior que a do planeta. Neste aspecto o estudo geológico fornece, com considerável precisão, um valor experimental essencial. Através de métodos de datação radiométrica, a idade da Terra é estimada em 4,58 bilhões de anos, com uma precisão de 1% [20].

Se agora nos voltamos para os domínios da astronomia, é possível examinar um distante *Quasar*¹ recentemente observado [21], que tem sua idade calculada em aproximadamente 13 bilhões de anos. Embora seja tentador limitarmos a idade do universo com estes dados, deve-se atentar que, no contexto astronômico, para que distâncias e idades de diferentes objetos possam ser calculadas é necessário um modelo cosmológico que descreva o universo no qual estes objetos estão inseridos. Desta forma o modelo teórico de universo adotado influencia sensivelmente o cálculo de idade destes objetos, e este vínculo, *a priori*, somente pode ser considerado de forma relaxada.

Ao observar o céu à noite a olho nu, não é difícil constatar que este é quase que totalmente escuro. Esta simples constatação pode entrar em conflito com alguns modelos de universo que são infinitos. O problema que se coloca, se assumimos um universo com infinitas estrelas, é conhecido como o *paradoxo de Olbers* [22], no qual se questiona que, de qualquer ângulo a partir de um observador na Terra, a linha de visão deste iria fatalmente terminar na superfície de uma estrela, logo a luz emitida por tais estrelas conjuntamente produziria um céu extremamente brilhante, tanto durante o dia quanto à noite. Elucidar esta questão é um problema pouco trivial. Seja L a luminosidade estelar média e $f(r)$ o fluxo luminoso de determinada fonte em função da distância. Temos então

$$f(r) = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (2.1)$$

Se consideramos uma fina camada esférica, com n estrelas, raio r e espessura dr , centrada na Terra, a intensidade da radiação desta camada de estrelas será

$$dI(r) = \frac{L}{4\pi r^2} n r^2 dr. \quad (2.2)$$

¹ Quasar (*Quasi-Stellar Radio Source*) é um distante núcleo de galáxia, altamente energético e luminoso.

Se admitimos que o universo é transparente, tendo todas as estrelas uma linha de visão desobstruída em relação à Terra, e também que o universo é infinito e estático, obtemos

$$I(r) = \int_{r'=0}^{r'=\infty} dI(r') dr', \quad (2.3)$$

$$I(r) = \int_{r'=0}^{r'=\infty} \frac{nL}{4\pi} dr', \quad (2.4)$$

e, assim,

$$I(r') \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Com as hipóteses acima, obteríamos um céu infinitamente brilhante. Dentre as mais simples soluções [23][24] para este paradoxo histórico, é possível admitir simplesmente que o universo não é estático ou infinitamente antigo. Embora existam controvérsias quanto às diferentes soluções, será visto ao longo deste capítulo que as hipóteses admitidas não parecem corresponder ao universo em que vivemos. Existem, por exemplo, fortes indícios observacionais que impõem limites à idade do universo. Há ainda evidências experimentais de que o universo não é estático, mas está na verdade em expansão.

2.2 Redshift e a Lei de Hubble

Um deslocamento do espectro de ondas eletromagnéticas em direção a um maior comprimento de onda é denominado redshift². Embora a sua observação seja também útil para aplicações terrestres, o redshift é um excelente parâmetro para cálculos cosmológicos e medição de propriedades de objetos astronômicos. Ele é geralmente atribuído ao efeito Doppler³, porém, em escalas cosmológicas este efeito pode ser devido a três diferentes mecanismos, a saber, a velocidade de recessão dos corpos (efeito Doppler convencional), variações do campo gravitacional entre o objeto emissor e receptor (efeito Doppler gravitacional) e, por fim, uma possível expansão da geometria do espaço-tempo. O

² Em tradução livre, *desvio para o vermelho*.

³ O efeito Doppler indica a variação de comprimentos de onda quando fonte e receptor das ondas se encontram em movimento relativo.

redshift(z) é definido pela diferença relativa entre os comprimentos de onda (ou frequências) observado(λ_o) e emitido(λ_e) de um objeto:

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.6)$$

de onde é possível notar que, se a fonte de luz se afasta do observador, um redshift ($z > 0$) ocorre, e por outro lado, se a fonte se move em direção ao observador, então um blueshift ($z < 0$) ocorre. É possível comparar o espectro observado de um astro com o espectro de inúmeros elementos e compostos químicos catalogados em laboratórios na Terra. Se a mesma linha espectral de um dado elemento é identificada em ambos os espectros, porém em diferentes comprimentos de onda, obtém-se o valor do redshift.

A figura 2.1 representa a comparação entre o espectro de um objeto no referencial terrestre ($z=0$, acima) e o mesmo espectro com redshift $z = 0.1$.

Em 1914, Slipher [25] observou 40 galáxias (conhecidas na época como nebulosas) e constatou que 90% delas apresentavam um desvio para o vermelho. As observações de redshift para uma grande quantidade de objetos astronômicos distantes parecem indicar que, de alguma forma, a maior parte dos corpos estão se afastando da Terra. No corpo da teoria da Relatividade Geral já era notada, desde sua formulação, que esta admitia uma expansão ou contração do espaço-tempo. Einstein à época, em acordo com seus princípios filosóficos, acreditava que esta possibilidade era irreal. A verificação⁴ de que o redshift astronômico estava associado majoritariamente à expansão do universo foi uma das constatações mais importantes da ciência do século XX.

Em 1929 Hubble observou o deslocamento para o vermelho nas linhas espectrais das galáxias observadas por Humason⁵, e medindo ele próprio suas distâncias (usando estrelas cefeidas), descobriu [26] que as galáxias se afastavam com velocidades proporcionais à sua distância. Esta verificação pode ser facilmente explicada ao admitir-se uma expansão. Hubble estabeleceu empiricamente que a velocidade de recessão das galáxias seria dada por

$$v \equiv H_0 \cdot d, \quad (2.7)$$

⁴ É fácil perceber que as observações que levaram à formulação empírica da lei de Hubble à época possuíam uma grande dispersão. Estas observações foram refinadas ao longo do século XX.

⁵ Milton La Salle Humason (1891-1972).

onde H_0 é a constante de Hubble e d é a distância à galáxia. A Lei de Hubble, como ficou conhecida, constituiu uma significativa evidência para a expansão do Universo. Hipóteses alternativas tais como teoria de luz cansada, proposta por Zwicky em 1929 [27], a qual atribuía o redshift medido a uma perda da energia do fóton, em geral não apresentam todas as propriedades exigidas pelas observações.

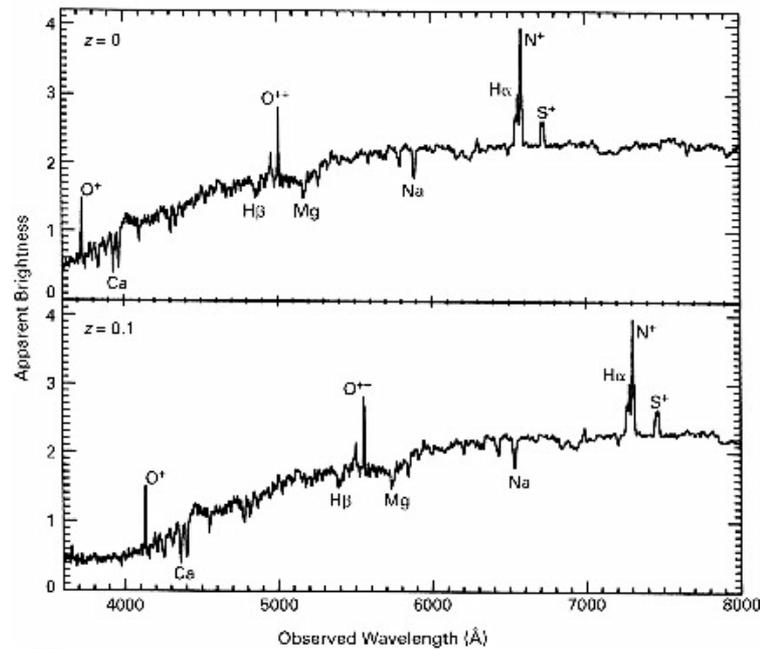


Figura 2.1: Luminosidade aparente versus comprimento de onda. Comparação entre espectros de um mesmo objeto astronômico em diferentes referenciais, com redshift $z = 0$ (acima) e $z = 0.1$ (abaixo).

Dada a limitação proveniente da velocidade finita da luz, as relações distância-redshift⁶ podem ser usadas no contexto da cosmologia para revelar a história da expansão do universo. Para isso é necessário observar objetos cada vez mais distantes (cuja luz foi emitida há milhares de anos no passado). Em observações astronômicas, examinar objetos com grande redshift ($z > 1$), devido às grandes distâncias envolvidas, introduz inúmeras dificuldades. Dentre alguns exemplos, no final deste capítulo serão estudados objetos conhecidos como Supernovas Ia, as quais podem ser comumente observadas com grande redshift, tipicamente entre $z = 0.1$ e $z \cong 1.5$. Veremos também (seção 2.4), uma observação chave para elucidar a expansão cósmica: uma radiação advinda de todas as

⁶ O uso e a dependência do redshift com determinado modelo cosmológico serão analisados no Capítulo 3.

direções, à qual se atribui um redshift $z \approx 1100$. Vejamos agora os principais vínculos oriundos da existência e abundância dos elementos químicos no universo.

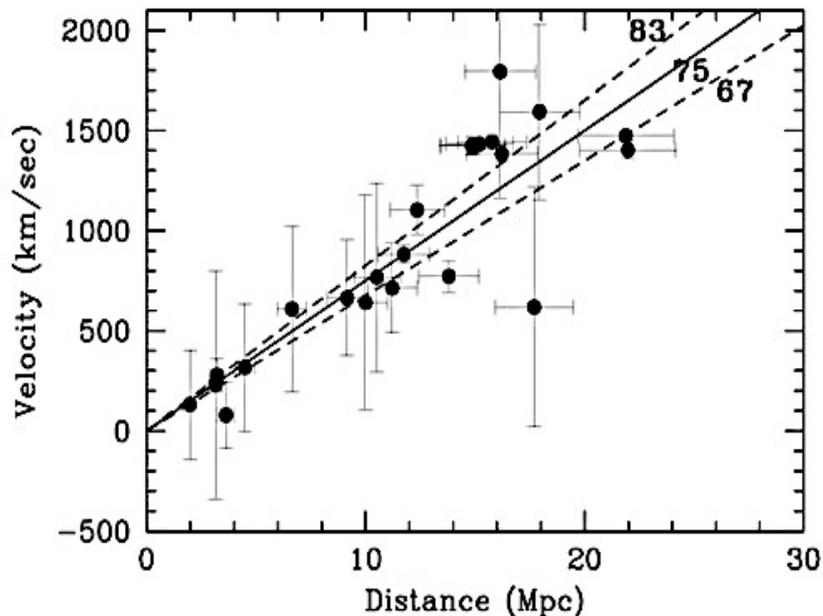


Figura 2.2: Velocidade versus distância para galáxias com estrelas cefeidas. gráfico moderno da lei de Hubble [28] .

2.3 Nucleossíntese

No contexto da Relatividade Geral o conteúdo de energia-matéria é fundamental para determinar as propriedades do universo. Examinando a matéria, sabe-se que esta é composta por diferentes elementos químicos. Numa escala cada vez menor, é possível aferir que estes elementos são, por sua vez, compostos por uma diversidade de partículas e subpartículas. Os objetos básicos que constituem o cosmos são formados por *bárions* (prótons, nêutrons etc.) e *léptons* (elétrons, neutrinos etc.). É importante analisar em variadas escalas qual a proporção e densidade de cada um destes componentes, assim como entender como eles foram criados e podem hoje ser observados em diferentes proporções. Será discutida inicialmente a quantidade destes elementos na escala do sistema solar e posteriormente em escala cosmológica, a fim de esclarecer a origem primária destes constituintes.

Com uma simples análise do planeta Terra, é possível perceber que o ferro é um elemento comum em nosso cotidiano, enquanto o ouro é raro. Embora o planeta seja um

objeto de extrema raridade no contexto astronômico, diversas destas abundâncias em nosso planeta são similares ao compararmos com os diversos objetos no sistema solar e também em diversas regiões do universo. Neste caso, sabemos que os gases leves (hidrogênio e hélio) foram quase que totalmente perdidos devido à fraca gravidade da Terra. Ao levar em conta os processos físicos específicos de cada sistema, é possível notar que o elevado grau de similaridade entre as abundâncias de elementos químicos nestes sistemas apresenta um via para analisar a composição do universo. Análises espectroscópicas mostram que 71% da massa do Sol é composta por hidrogênio, enquanto o hélio contribui com 27%, e o restante corresponde aos elementos mais pesados. Não é por acaso que os elementos mais pesados são mais raros. A principal forma de sintetização destes é a partir de reações termonucleares no interior de estrelas, onde as condições de pressão e temperatura permitem as reações nucleares, paulatinamente produzindo elementos químicos de maior número atômico.

A interface entre a física de partículas e a cosmologia vem crescendo enormemente. Cada uma destas ciências vem se beneficiando com a evolução da outra. Ao analisar a abundância de elementos no sistema solar (figura 2.3), nota-se que para cada 1 bilhão de átomos de Hidrogênio existem, por exemplo, aproximadamente 1 milhão de átomos de Silício (^{14}Si), 100 átomos de Zinco (^{30}Zi) e apenas 1 átomo de Chumbo (^{82}Pb). O gráfico mostra uma considerável quantidade de picos e vales de abundância, em especial nota-se a diminuta abundância dos elementos entre o Hélio (^4He) e o Carbono (^{12}C). Este vale na abundância relativa deve-se à alta instabilidade dos núcleos destas substâncias (Lítio, Berílio e Boro). Em seguida, devido à maior estabilidade, um pico de abundância é iniciado pelo carbono, produto da reação entre 3 núcleos de ^4He . A oscilação observada é atribuída à alternância na estabilidade dos átomos envolvidos, com a adição gradativa de nêutrons ao núcleo.

Ao seguir em direção à síntese de elementos mais pesados, nota-se um pico na abundância do Ferro (Fe) e de alguns elementos com número atômico similar. Este aumento se relaciona ao fato do Ferro ser o elemento estável com um maior valor de energia de ligação, fazendo com que o mesmo seja o último subproduto das reações exotérmicas de fusão nuclear no interior de estrelas.

Os processos termonucleares no interior das estrelas, e também explosões estelares (*novas e supernovas*), explicam satisfatoriamente a proporção de elementos pesados. Os processos envolvidos nesta nucleossíntese estelar não explicam por completo as

abundâncias do Hidrogênio e Hélio. Em especial, estes processos falham em elucidar a origem física destes elementos básicos. No universo primordial espera-se uma abundância específica de elementos. A existência de elementos leves na proporção observada em épocas atuais deve então estar relacionada a processos de síntese no universo primordial, o qual era extremamente denso, dominado por altas temperaturas. Estas proporções são progressivamente alteradas pela produção de elementos no interior de estrelas.

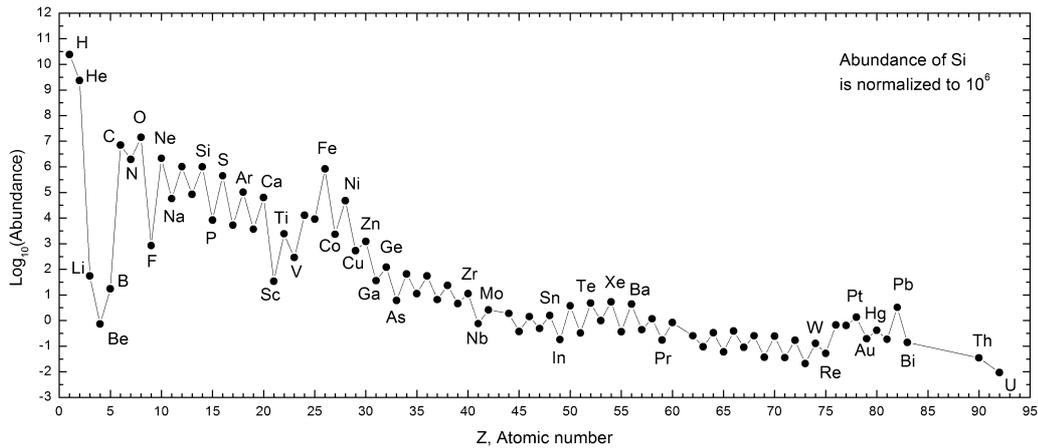


Figura 2.3: Abundância dos elementos químicos no sistema solar em função do número atômico z .

Para explicar estas abundâncias de elementos leves observadas, munido de soluções da relatividade geral de Einstein com expansão, Lemaitre [29] formulou uma teoria onde o universo expandia-se com o tempo, partindo de uma estado extremamente denso. Esta primeira idealização é hoje considerada a primeira teoria do Big Bang, processo no qual todo o conteúdo do universo seria condensado em uma ínfima região, com características extremas de densidade e temperatura. Uma formulação física do mecanismo envolvido nesta era inicial do Big Bang foi proposto por Gamow, Alpher e Herman [30][31]. Esta teoria de nucleossíntese do Big Bang, ou BBN (do inglês, *Big Bang Nucleosynthesis*), predizia uma abundância para os elementos leves, Hélio(^3He), Lítio(^7Li) e Deutério(D), com um alto nível de concordância com os valores observados. A síntese de elementos pode ser modelada a partir da equação de Boltzmann [32]

$$a^3 \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^0 n_2^0 \langle \sigma v \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^0 n_4^0} - \frac{n_1 n_2}{n_1^0 n_2^0} \right], \quad (2.8)$$

onde n_i é a densidade numérica final da partícula i , n_i^0 é a sua densidade inicial e $\langle \sigma v \rangle$ é a secção de choque média da reação. Esta equação determina a evolução

das abundâncias dos reagentes, submetidos a reações do tipo $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$. As reações básicas de equilíbrio são:

$$e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma, \quad (2.9)$$

$$n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-, \quad (2.10)$$

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (2.11)$$

$$p + \bar{\nu}_e \leftrightarrow n + e^-, \quad (2.12)$$

$$p + n \leftrightarrow D + \gamma, \quad (2.13)$$

$$D + n \leftrightarrow {}^3_1\text{He} + \gamma, \quad (2.14)$$

onde foi usado n para nêutrons, p para prótons, e^- para elétrons, ν_e para neutrinos, $\bar{\nu}_e$ para anti-neutrinos e por fim D para o Deutério. Um importante parâmetro para a análise observacional é a razão entre bárions e fótons (η), dada por

$$\eta = \frac{n_b + \bar{n}_b}{n_\gamma}. \quad (2.15)$$

É possível formular uma simples relação entre a razão bárions/fótons(η) com as abundâncias de elementos no universo. Assim, usando-se informações acerca da Radiação de Fundo em Microondas⁷, estima-se a densidade relativa dos bárions na época atual.

Parâmetro	Abundância	Valores observados
$10^5 Y_D^{FIT}$	$2.57^{+0.17}_{-0.13}$	1.6 – 4.0
$10^5 Y_3$	$1.05 \pm 0.03 \pm 0.03(sist)$	$< 1.1 \pm 0.2$
Y_p	$0.24819^{+0.00029}_{-0.00040} \pm 0.0006(sist)$	0.232 – 0.258

Tabela 2.1: Parâmetros de *best-fit* para a nucleossíntese

Na tabela 2.1 são indicados os valores observados para a abundância relativa dos elementos. Y_D^{FIT} representa a abundância do Deutério, Y_3 a abundância do Hélio-3 e Y_p a abundância do Lítio-7. Com os dados da abundância relativa é possível verificar os valores para a abundância de elementos no universo como $\approx 75\%$ de Hidrogênio, $\approx 24\%$ de Hélio e $\approx 1\%$ de elementos pesados.

⁷ Esta radiação será analisada na seção 2.3.

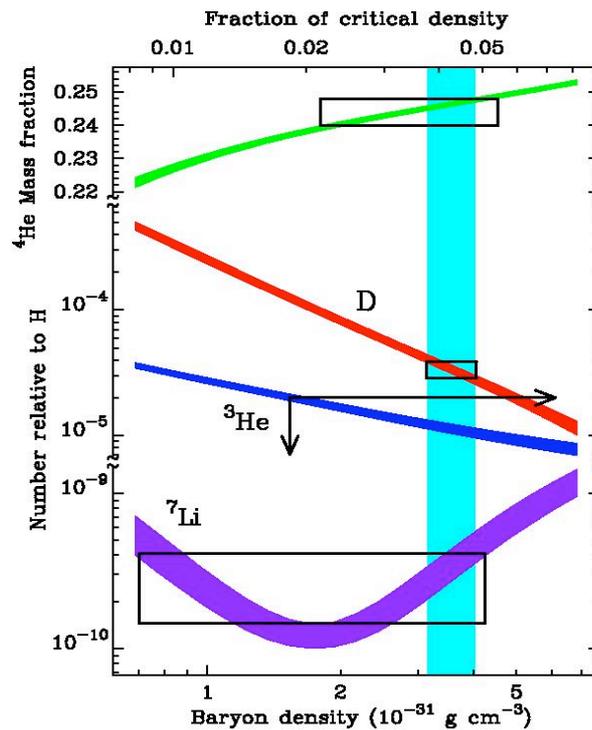


Figura 2.4: Curvas teóricas de abundância relativas ao Hidrogênio (^1H). Os quadros representam os vínculos observacionais. Os eixos sob a curva do Hélio representam o limite superior imposto pelas observações [34]. A faixa azul é fixada a partir das observações de Deutério primordial.

A figura 2.4 apresenta a curva teórica para a abundância de elementos e os valores observados. É preciso notar que os valores observados deverão diferir sensivelmente dos previstos devido aos processos dinâmicos estelares, que prevêem por exemplo a extinção do Lítio em processos termonucleares. A predição chave da BBN de Gamow foi a existência de uma radiação de fundo na faixa de microondas, permeando todo o universo, a qual sofreria um grande redshift em seu comprimento de onda desde sua emissão em épocas remotas, devido à expansão do universo. Na década de 1960, diferentes teorias competiram para descrever adequadamente a abundância de elementos observada e, é claro, o universo. Dentre estas a Teoria do Estado Estacionário [35] previa um universo com constante criação de matéria, sendo esta a teoria mais aceita na comunidade científica da época. Com a observação da radiação de fundo, como predito pelas teorias do Big Bang, a teoria do estado estacionário⁸ tornou-se desfavorecida, enquanto teorias que incluem o Big Bang apresentavam uma concordância mais adequada com diferentes observações.

⁸ Para mais detalhes ver [32] e suas referências.

2.4 Radiação Cós mica de Fundo

A Radiação de Fundo em Microondas, CMB (do inglês *Cosmic Microwave Background*) é uma previsão fundamental do modelo de Hot Big Bang. Nos estudos pioneiros de Gamow, este concluiu que a temperatura desta radiação deveria ser $T = 10$ K [30] [31], valor que foi posteriormente refinado pelo próprio Gamow e seus estudantes Alpher e Herman [36] para $T = 5$ K. Esta radiação foi descoberta em 1964 pelos astrônomos americanos Arno Penzias e Robert W. Wilson [37]. Os astrônomos não conseguiram estabelecer qualquer relação desta radiação com fontes no sistema solar ou na galáxia, uma vez que era detectada em todas as direções e com uma mesma temperatura (medida na época em $T = 3.5 \pm 1$ K). De fato, a constatação de que a radiação medida possuía diversas das características esperadas para uma radiação associada ao desacoplamento de fótons e matéria nas eras iniciais do universo favoreceu decisivamente os modelos de Big Bang. A CMB tem como característica principal um espectro térmico de corpo negro, determinado com extraordinária precisão, inicialmente pelo FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*), revelando o espectro térmico mais perfeito já observado.

O espectro de corpo negro pode ser escrito como

$$I(\nu, T) d\nu \propto \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu, \quad (2.16)$$

onde $I(\nu, T)d\nu$ é a energia por unidade de área num intervalo de frequência de $\nu + d\nu$, T é a temperatura, k é a constante de Boltzmann e h é a constante de Planck. Se a frequência sofre um redshift

$$\nu' = \frac{\nu}{1+z}, \quad (2.17)$$

É possível relacionar a temperatura emitida e observada, por

$$T_o = \frac{T_e}{1+z}, \quad (2.18)$$

A radiação cósmica de fundo prevê assim que a temperatura do universo deveria ser maior no passado, em total concordância com as exigências da nucleossíntese do Big

Bang. Recentes medições indicam que a temperatura média da CMB é

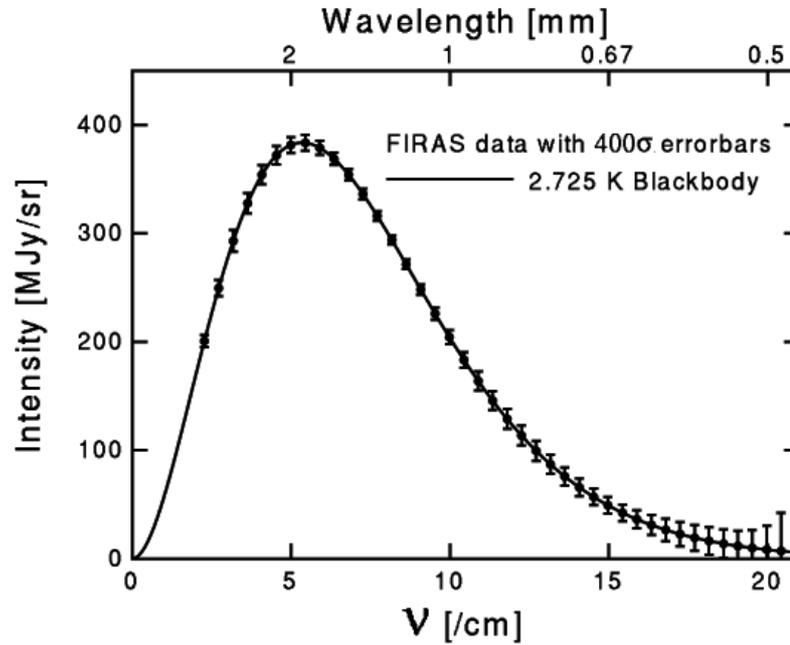


Figura 2.5: Espectro térmico da CMB. Valores observados com barras de erro multiplicadas 400 vezes (para visualização).

$$\langle T_e \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}, \quad (2.19)$$

A radiação de fundo pode ser detectada em todas as direções em que os instrumentos são apontados, com elevado grau de isotropia. Ao observar-se de diferentes ângulos, a mesma desvia da isotropia em somente

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) \equiv \frac{T(\theta, \varphi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \approx 10^{-5}, \quad (2.20)$$

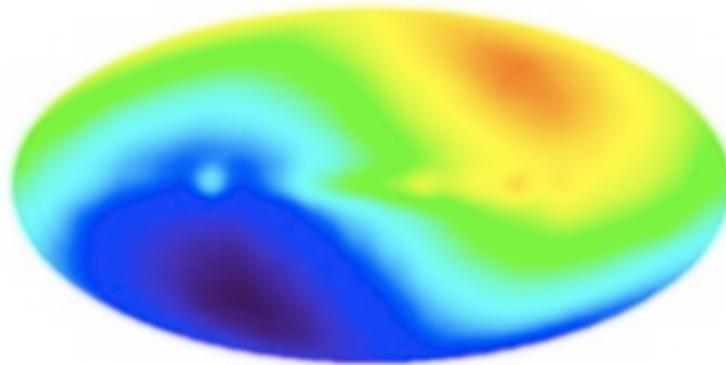


Figura 2.6: O Dipolo da CMB. Redshift associado ao movimento peculiar da via láctea em direção ao grupo local.

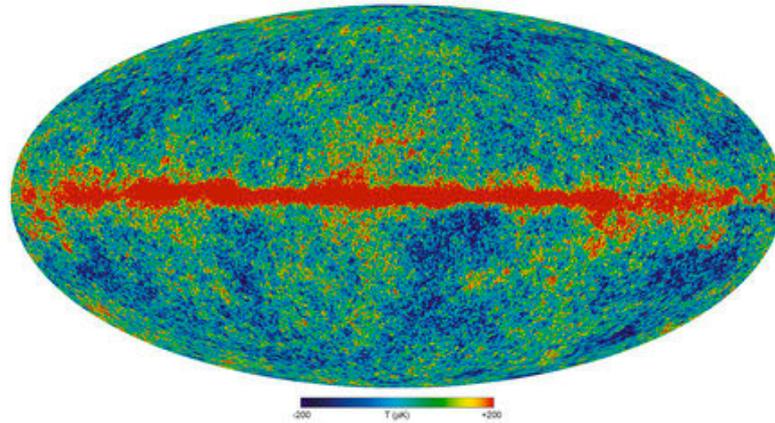


Figura 2.7: Ao corrigir o espectro devido ao movimento da galáxia, a CMB fica marcada com uma faixa central devido ao disco da via Láctea.

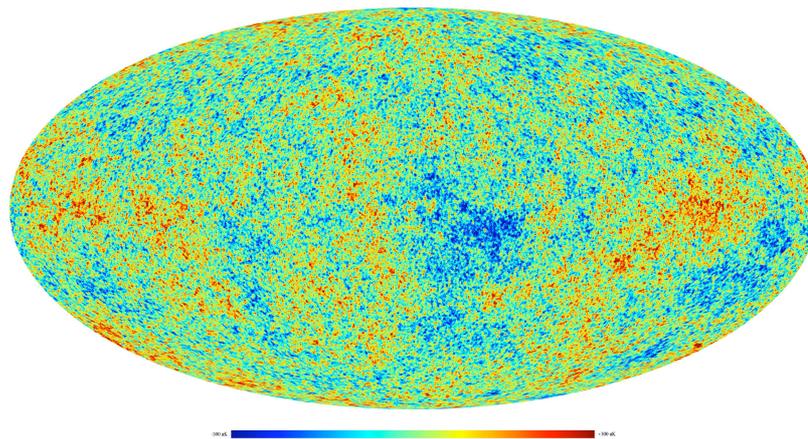


Figura 2.8: Radiação Cósmica de Fundo após retiradas as influências conhecidas da galáxia.

A figura 2.6, mostra o dipolo da CMB. No qual pode-se ver a influência do movimento peculiar da galáxia, gerando um blueshift na direção que aponta para o grupo local e um redshift na direção oposta. A figura 2.7 mostra a distribuição da radiação de fundo quando elimina-se o movimento peculiar da galáxia, neste caso temos uma distribuição aproximadamente homogênea, com exceção da faixa central que representa a emissão de fontes na via Láctea.

Devido ao seu espectro característico, é possível retirar as influências das emissões da galáxia, deixando somente uma radiação de fundo, observada com elevado grau de isotropia na figura 2.8.. Espera-se que, se as flutuações da CMB forem aleatórias, então

elas terão distribuições de probabilidade gaussianas. Em geral, a análise das diminutas anisotropias é feita usando uma expansão multipolar da função

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.21)$$

onde $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos e a_{lm} são os coeficiente da expansão. Nos limitaremos aqui a ressaltar que importantes processos físicos estão impressos na CMB. Devido às observações da CMB estarem em congruência com as predições teóricas do Big Ban, aliado à grande precisão em podemos medi-la, podemos afirmar que a CMB é um dos principais pilares da cosmologia moderna.

2.5 Matéria Escura

Matéria escura é uma forma de matéria inferida a partir de seus efeitos gravitacionais sobre a matéria visível e efeitos de lentes gravitacionais. Acredita-se que esta forma de matéria não emite nem espalha luz ou qualquer tipo de radiação eletromagnética. A primeira inferência acerca da presença de uma forma de matéria insensível à radiação eletromagnética foi feita por Zwicky na década de 1930 [40][41], na qual é aplicado o teorema do virial para o cluster de galáxias Coma. Zwicky estimou a massa total do cluster baseado no movimento de galáxias próximas, assim como em sua luminosidade total. Zwicky estimou cerca de 400 vezes mais massa do que o esperado se fosse considerada somente a matéria observável. Este problema ficou conhecido como o *problema da massa faltante* (ou *missing mass problem*). Segundo a lei de Kepler, a velocidade em função da distância ao centro da galáxia deverá ser dada por

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (2.22)$$

mas as observações parecem divergir fortemente desta previsão. Atribui-se a massa faltante a uma espécie exótica de matéria chamada de *matéria escura*. Na figura 2.9, estrelas longe do centro da galáxia são observadas com uma velocidade de rotação muito maior que a esperada pela teoria Newtoniana (linha tracejada). A curva de rotação de galáxias não pode ser explicada se utilizam-se as teoria gravitacionais disponíveis levando-se em conta somente a matéria visível.

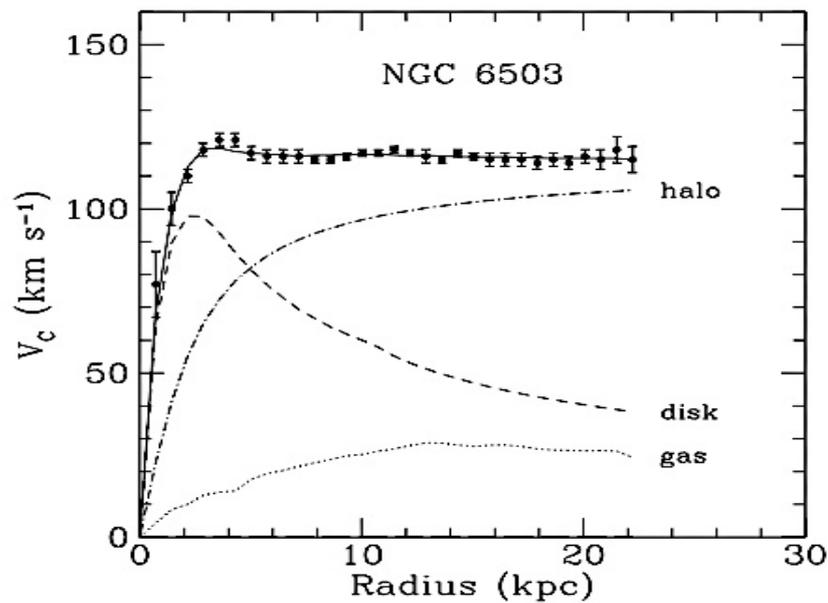


Figura 2.9: Curva de rotação da galáxia espiral NGC6503s. Os pontos representam a medida de velocidade em função do raio da galáxia. A figura mostra as curvas teóricas de um halo de matéria escura (ponto-tracejada), de um disco (tracejada) e de um gás (pontilhada) [42].

Diversas teorias vêm sendo formuladas para fornecer uma alternativa que explique a matéria escura sugerindo inconsistências nas teorias estabelecidas, em contraste com alguma forma invisível de matéria. As mais conhecidas propostas são as modificações da teoria Newtoniana, ou MOND (do inglês, *MOdified Newtonian Dynamics*) [43], e teorias de gravitação quântica, como a teoria de cordas e a *Loop Quantum Gravity*, que têm, além disso, o objetivo mais ambicioso de descrever a gravidade e a física quântica em uma única teoria unificada.

2.6 Supernovas

As supernovas são fenômenos extremamente luminosos atribuídos fisicamente a processos de explosão em determinadas estrelas. Estes fenômenos vêm sendo observados desde a antiguidade, com registros de astrônomos chineses que datam do ano de 185 d.C. Devido a sua intensa luminosidade, sua observação em alguns casos é possível mesmo durante o dia, como foram os das supernovas dos anos de 1006 e 1054, observadas por todo o mundo, com um brilho comparável ao de uma Lua cheia. Estima-se que ocorra

inicial e tardio. A figura 2.10 representa o espectro de diferentes supernovas (Ia, II, Ic e Ib), em um estágio anterior ao máximo de luminosidade (espectro inicial). É possível ver uma assinatura do Silício (Si II) que identifica as supernovas do tipo Ia. Na figura 2.10b, o espectro tardio (cerca de 5 meses após o pico de luminosidade), é observado a assinatura, em abundância, de diferentes íons de Ferro. A análise do espectro inicial e tardio é a principal ferramenta para a classificação de Supernovas do tipo Ia. A curva de luminosidade (figura 2.12) de diferentes tipos de supernova também apresenta uma grande variação entre os seus subtipos. A análise destas características é de fundamental importância para a padronização das curvas de luz ao se comparar diferentes supernovas. Através de uma modelagem dos aspectos astrofísicos das supernovas foi possível estabelecer relações heurísticas que possibilitam a padronização das mesmas. Em 1993 foi demonstrada a validade de uma fórmula empírica, a *relação de Philips* [47], na qual se estabelece que a variação da curva de luz de uma supernova Ia após 15 dias de seu pico (ΔM_{15}) deve ser proporcional à magnitude máxima ($M_{m\acute{a}x}(\lambda)$) de seu pico de luminosidade. A medição precisa desta proporcionalidade para supernovas em baixo redshift permitiu, através de uma redução sistemática nos erros, a padronização de supernovas com altos redshifts. Os métodos atuais utilizado nos *fitters* (métodos de padronização de supernovas Ia) de supernovas são inspirados nesta relação fundamental.

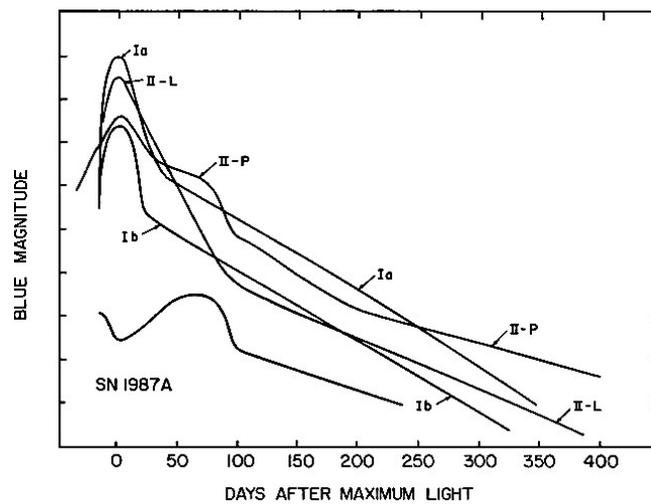


Figura 2.11: Curvas de luminosidade versus tempo (em dias) para diferentes tipos de supernova.

O sistema mais aceito [48] [49] para modelar as supernovas Ia se relaciona às estrelas binárias chamadas de *variáveis cataclísmicas*, onde ao menos uma delas é uma

anã branca que, pela ação de sua forte gravidade, captura massa de sua companheira. As estrelas anãs brancas possuem uma alta densidade ($\approx 10^6 \text{ g/cm}^3$), e seu colapso é somente impedido pela pressão de degenerescência dos elétrons (advinda do princípio de exclusão de Pauli). O limite físico em que a matéria degenerada pode existir em equilíbrio gravitacional é marcada pela chamada *massa de Chandrasekhar*, acima da qual a pressão de degenerescência não mais suporta a gravidade. Em resposta ao aumento de densidade da estrela, inicia-se um queima descontrolada de carbono e oxigênio, processo que libera imensa quantidade de energia, que supera a energia de ligação da estrela, destruindo-a completamente. Devido a suas características altamente similares e sua altíssima luminosidade, as supernovas do tipo Ia são atualmente os objetos astronômicos mais adequados para determinação de distâncias em escala cosmológica e serão usadas nesta dissertação como instrumentos para a determinação de parâmetros fundamentais do universo.

Por fim, percebe-se que diferentes observações indicam que o universo em que vivemos sofreu um considerável processo de expansão e versou, em épocas remotas, uma era de alta densidade e altas temperaturas. A nucleossíntese do Big Bang e a radiação cósmica de fundo são os principais pilares da cosmologia moderna. Distintas possibilidades de evolução cosmológica, que não aceitem estas características, somente parecem possíveis através de uma modificação considerável em nosso entendimento do cosmos ou de uma sistemática mudança em uma grande quantidade de hipóteses da cosmologia. Diferentes tentativas de descrição até o momento não alcançaram sucesso em fazer previsões concordantes com as observações.

Capítulo 3

Modelos Cosmológicos em FLRW

As observações indicam que o universo, com bom grau de aproximação, é homogêneo e isotrópico em escalas maiores que aproximadamente 100 Mpc, ou seja, matéria e radiação estariam uniformemente distribuídas, sem qualquer direção privilegiada¹. Este fato é uma importante base da cosmologia e é conhecido como o *princípio cosmológico*. Junto à formulação da relatividade geral por Einstein, este princípio permite a formulação de modelos cosmológicos consistentes e testáveis. A combinação do conhecimento teórico com as observações astronômicas faz surgir o quadro de um universo em expansão, cujo passado era definido por um estado extremamente quente e denso. A idéia de um universo evoluindo a partir de uma singularidade inicial, a chamada Teoria do Hot Big Bang, tem seus pilares fundamentais nos resultados da Nucleossíntese do Big Bang (BBN) e na Radiação Cósmica de Fundo (CMB). Neste capítulo será apresentada a Teoria da Relatividade Geral no contexto da cosmologia, explicitando as equações de Einstein para a métrica homogênea e isotrópica. Os principais modelos físicos de universo advindos desta métrica serão estudados. Será feita uma revisão dos principais aspectos da métrica FLRW e, em seguida, serão apresentadas as equações de Einstein da Relatividade Geral e obtidas suas soluções para esta métrica. Na seção 3.1 será estudado o modelo cosmológico Λ CDM, considerado padrão na cosmologia. Na seção²

¹ Esta hipótese será confrontada com os modelos anisotrópicos propostos nesta dissertação.

² Ver [7], [32] e [23] para maiores detalhes.

3.2 será analisada a dinâmica de campos escalares e sua aplicação na cosmologia, através de uma componente dinâmica denominada Quintessência.

Um espaço 4-dimensional, homogêneo, espacialmente plano e isotrópico é descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (3.1)$$

que, através de uma transformação para o sistema de coordenadas esférico, $x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$, $y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ e $z = r \cos\theta$, pode ser colocado na forma

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (3.2)$$

Fundamentando-se no princípio cosmológico e em observações que indicam uma expansão para o cosmos, deseja-se descrever a geometria do universo através uma métrica cuja seção espacial seja homogênea e isotrópica, mas que esteja livre para se expandir ou contrair-se. A partir destas hipóteses, a única métrica que pode ser construída é a chamada métrica FLRW, dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 \right], \quad (3.3)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala. Se reescrevemos esta métrica num sistema da coordenadas onde $r \equiv f_k(\chi)$, ficamos com a forma

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (3.4)$$

onde a função $f_k(\chi)$ depende do valor da curvatura k através de

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \operatorname{sen}\chi, & \text{se } k = +1 \\ \chi, & \text{se } k = 0 \\ \operatorname{senh}\chi, & \text{se } k = -1 \end{cases}, \quad (3.5)$$

onde a variável t descreve o tempo próprio cosmológico e (r, θ, ϕ) são as variáveis espaciais comoveis.

3.1 Equações de Einstein

A Relatividade Geral estabelece que a geometria do espaço-tempo é um efeito produzido por campos gravitacionais. As relações obtidas por esta teoria são dadas pelas equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum que descreve o conteúdo material. $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. O tensor $R_{\mu\nu}$ de ordem 2, é o tensor de Ricci e R é o tensor de Ricci contraído (escalar de Ricci). É possível então obter soluções para (3.6) utilizando-se, do lado direito, um fluido perfeito descrito pelo tensor energia-momentum

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde ρ é a densidade de energia³ do conteúdo material do modelo, p é a pressão exercida por esta componente e u_μ é a 4-velocidade, que em coordenadas comóveis assume a forma $u_\mu = \delta_\mu^0$.

Se contrairmos a equação (3.6), ficamos com $R = -T$, onde T é o tensor energia-momentum contraído. Substituindo esta relação de volta em (3.6), ficamos com uma forma mais conveniente:

$$R_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde o lado direito é dado por

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T. \quad (3.9)$$

A partir do lado esquerdo da Eq. (3.8), calculado cada componente da métrica (3.3), obtemos para a parte temporal

$$R_{00} = \frac{-3\ddot{a}}{a}, \quad (3.10)$$

e para a parte espacial

³ Como $c=1$ podemos usar, imprecisamente, os termos densidade de energia e densidade de matéria como sinônimos.

$$R_{ii} = -g_{ii} \left[\frac{2k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}}{a^2} \right], \quad (3.11)$$

sendo a derivada em relação ao tempo cosmológico representada como um ponto sobre as variáveis. Os termos cruzados do tensor de Ricci ficam

$$R_{i0} = R_{ij} = 0, \quad (3.12)$$

para $i \neq j \neq 0$. Analisando agora o lado direito de (3.8), temos

$$S_{00} = \frac{1}{2}(\rho + 3p), \quad (3.13)$$

$$S_{ii} = -\frac{1}{2}g_{ii}(\rho - 3p), \quad (3.14)$$

com os termos cruzados

$$S_{i0} = S_{ij} = 0, \quad (3.15)$$

para $i \neq j \neq 0$. Da igualdade das equações (3.10) e (3.13), obtemos

$$\ddot{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)a, \quad (3.16)$$

que é a *equação da aceleração*. Na equação acima é possível observar que, se ρ e p são positivos, então o universo deverá estar desacelerado ($\ddot{a} < 0$). Por outro lado, se $p < -\frac{\rho}{3}$, o universo estará acelerado ($\ddot{a} > 0$). Das equações (3.11) e (3.14), usando a equação de aceleração (3.16), obtemos

$$3H^2 = \rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (3.17)$$

historicamente conhecida como *equação de Friedmann*, onde a função $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble. Esta é uma equação muito importante para a cosmologia, pois, uma vez conhecida a densidade de energia ρ e a curvatura k , a evolução do fator de escala $a(t)$ fica determinada, revelando assim a dinâmica do universo.

Da conservação do tensor energia-momentum é possível obter uma outra equação de grande utilidade. Se existe a conservação da energia, devemos ter

$$T_{0v;0} = 0. \quad (3.18)$$

Fazendo as operações necessárias, chegamos a

$$T_{0v;0} = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}[\rho + p]. \quad (3.19)$$

E assim à *equação de conservação do fluido*,

$$\dot{\rho} + 3H[\rho + p] = 0. \quad (3.20)$$

A equações (3.17), (3.16) e (3.20) são relações-chave para entender as características da expansão. Para que seja possível descrever a evolução do universo através destas equações, deve-se conhecer o conteúdo deste universo. Em geral precisamos conhecer a densidade de energia total, a qual podemos escrever como

$$\rho = \sum \rho_i, \quad (3.21)$$

onde ρ_i é a densidade de energia de cada componente e ρ é a densidade de energia total. Para cada específico conteúdo material, a equação de Friedmann fornecerá uma particular evolução cosmológica. Para cada componente, é necessário também explicitar de que forma a densidade de energia se relaciona com a pressão deste fluido. Isto é feito através da equação de estado, dada por

$$w = \frac{p}{\rho}, \quad (3.22)$$

3.2 Cosmologia Padrão

O modelo padrão da cosmologia é descrito por um universo que, além de matéria e radiação, é constituído por uma exótica componente denominada *constante cosmológica*

$(\Lambda)^4$, a qual possui uma densidade de energia constante. A densidade de energia total é descrita por matéria (ρ_m), radiação(ρ_r) e a constante cosmológica (ρ_Λ):

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (3.23)$$

O parâmetro de estado da matéria é dado por $w_m = 0$, já que matéria incoerente não exerce qualquer pressão. A radiação tem $w_r = \frac{1}{3}$ e a constante cosmológica $w_r = -1$, o que causa uma curiosa (e desejada) pressão, contrária à gravidade. A inserção da constante cosmológica é a opção mais simples para gerar uma aceleração na expansão do universo. A energia desta componente é definida como

$$\rho_\Lambda = \Lambda. \quad (3.24)$$

Se examinamos a equação de aceleração (3.16), notamos que o universo só pode estar acelerado ($\ddot{a} > 0$) se $p < \frac{1}{3} \rho$. A escolha de uma constante cosmológica com as propriedades citadas produz assim um universo cuja expansão será acelerada quando Λ for a componente dominante. Para descrever a evolução do universo, é conveniente definirmos a densidade crítica (ρ_c), a qual está associada ao valor preciso que tornaria o universo espacialmente plano ($k = 0$). Da equação de Friedmann, ficamos com

$$\rho_c \equiv 3H^2. \quad (3.25)$$

Desta forma, se a curvatura do universo é positiva, temos $\rho > \rho_c$. Se a curvatura é negativa, então $\rho < \rho_c$, e nitidamente o universo é plano se $\rho = \rho_c$. Se dividimos a equação de Friedmann pela densidade crítica, ficamos com a relação

$$\Omega_k \equiv 1 - \Omega = - \frac{k}{H^2 a^2}, \quad (3.26)$$

onde Ω é o parâmetro de densidade, dado por

$$\Omega \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \quad (3.27)$$

⁴ Proposta por Einstein para contrapor o efeito atrativo da matéria e descrever um universo estático.

Neste caso, podemos também escrever o parâmetro de densidade para cada componente, onde

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \quad (3.28)$$

e cada parâmetro fica definido como

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m}{3H^2}, \quad (3.29)$$

$$\Omega_r \equiv \frac{\rho_r}{\rho_c} = \frac{\rho_r}{3H^2}, \quad (3.30)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\rho_\Lambda}{3H^2}. \quad (3.31)$$

Além disso, podemos também definir o *parâmetro de desaceleração*

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (3.32)$$

que é negativo para um universo acelerado e positivo para um desacelerado.

Ao construirmos modelos cosmológicos é importante expressarmos a equação de Friedmann em uma forma em que fique explícita a dependência de cada componente com o fator de escala. Para isso, analisemos cada uma separadamente. A densidade de energia da matéria é simplesmente a razão entre sua energia de repouso e o volume do universo ($V \sim a^3$). Sendo assim, espera-se que a densidade de energia desta componente seja proporcional ao inverso do cubo do fator de escala, ou seja, $\rho_m \sim a^{-3}$. De uma maneira mais formal, se utilizamos a equação de estado desta componente na equação de conservação, dada por (3.20), após alguns cálculos obtemos

$$\rho_m = \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (3.33)$$

onde os subscritos “*o*” correspondem ao tempo atual (t_0), ou seja, $a_0 = a(t_0)$ é o fator de escala atual e $\rho_{m,0} = \rho_m(t_0)$ é a densidade de energia atual. Já a densidade de energia da radiação deverá cair com a quarta potência do fator de escala, pois à medida que o

universo se expande, os comprimentos de onda se esticam e assim a energia ($E = h/\lambda$) diminui. Usando novamente a equação de conservação, mostra-se que:

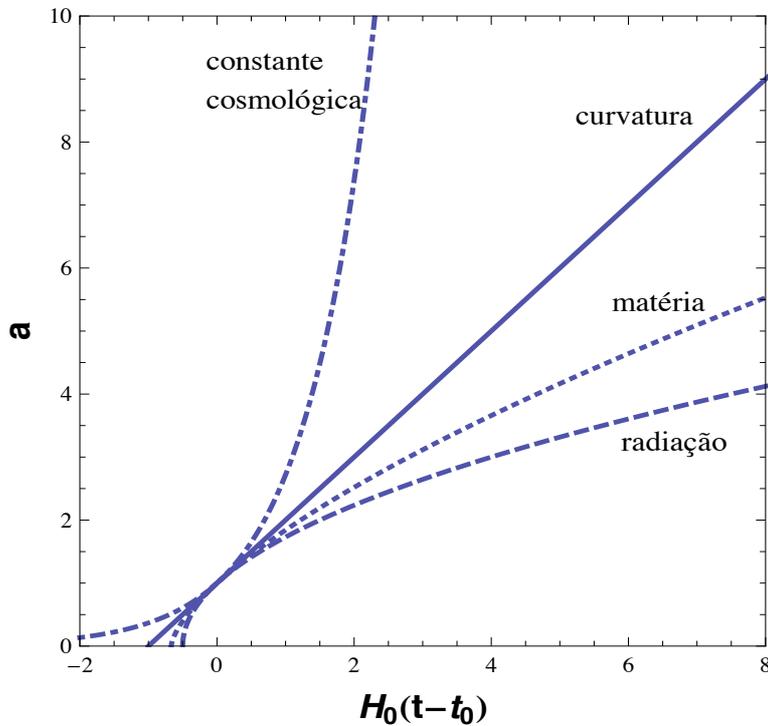


Figura 3.1: Diferentes evoluções para o fator de escala em universos descritos por uma única componente⁵ [50].

$$\rho_r = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \quad (3.34)$$

Por outro lado, como já definimos, a densidade de energia da constante cosmológica é constante, dada pela equação (3.24). Assim, podemos escrever a equação de Friedmann na forma

$$3H^2 = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Lambda - \frac{3k}{a^2}. \quad (3.35)$$

Ao dividirmos a equação (3.35) pela densidade crítica no tempo atual e usando (3.26), teremos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}) \left(\frac{a_0}{a}\right)^2, \quad (3.36)$$

⁵ Considerando a curvatura como uma componente.

uma vez que $H \equiv \dot{a}/a$. Se os parâmetros de densidade no tempo atual forem determinados, é possível então resolver a equação (3.36), a fim de obter a função desejada $a(t)$. O Λ CDM é o modelo cosmológico mais simples que melhor se ajusta aos vínculos observacionais. Os melhores valores de seus parâmetros, obtidos com observações recentes [39], estão listados na tabela abaixo:

Parâmetro	Símbolo	Valor
Parâmetro de Hubble	h	0.72 ± 0.03
Densidade de matéria	$\Omega_m h^2$	0.133 ± 0.006
Densidade de Bárions	$\Omega_b h^2$	0.0227 ± 0.0006
Constante Cosmológica	Λ	0.74 ± 0.03
Densidade de Radiação	$\Omega_r h^2$	2.47×10^{-5}

Tabela 3.1: Melhores parâmetros para o modelo Λ CDM, [39].

Estes parâmetros foram obtidos para o modelo Λ CDM plano. A constante cosmológica é usada para gerar um modelo cosmológico com expansão acelerada na época atual. Embora esta componente tenha uma motivação teórica pouco fundamentada, através dos vínculos observacionais disponíveis ela vem se mostrando a candidata mais adequada para a descrição do universo.

O problema que surge ao adotarmos tal descrição é o surgimento de um fluido exótico que compõe, na era atual, a maior parte do conteúdo energético do universo. A peculiaridade de tal componente está no fato de esta possuir efeito gravitacional repulsivo. Uma vez que não é conhecida ou observada nenhuma forma de energia com tal comportamento, esta forma de energia foi denominada *Energia Escura* (em inglês, *Dark Energy*).

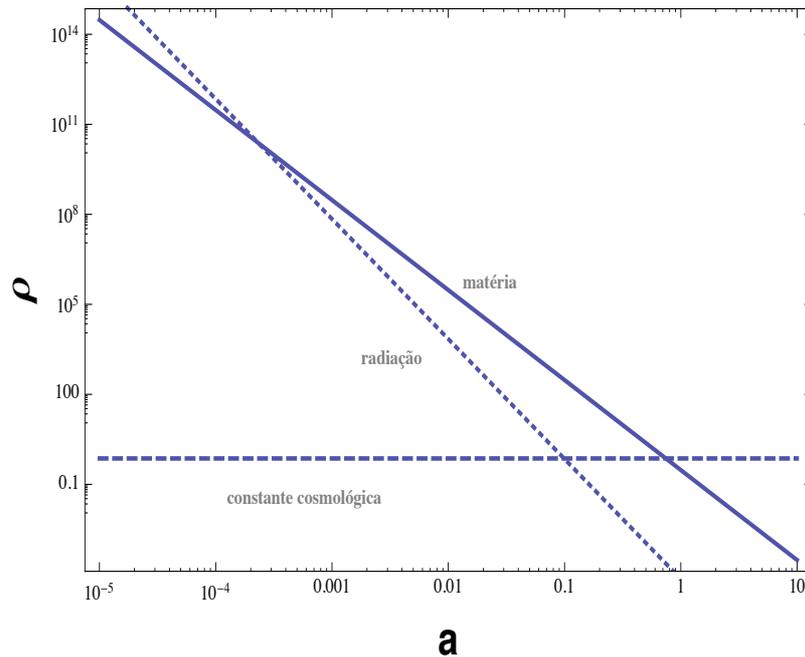


Figura 3.2: Densidade de energia (ρ) para diferentes fluidos ($\mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{1}$).

3.2.1 Época dominada pela radiação

Podemos reescrever a equação (3.36), na forma:

$$dt = \frac{da}{H_0 a \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_\Lambda) \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.37)$$

Tomemos períodos de tempo curtos ($t \ll 1$), referentes a eras iniciais do modelo de Big Bang, onde o fator de escala também era pequeno. É possível notar que, nesta aproximação, o termo dominante da equação acima é o da radiação (ver figura 3.2), de modo que essa equação fica, simplesmente,

$$dt \approx \frac{ada}{H_0 a_0^2 \sqrt{\Omega_{r,0}}}, \quad (3.38)$$

$$a(t) \approx (2H_0 a_0^2 \sqrt{\Omega_{r,0}}) t^{\frac{1}{2}}, \quad (3.39)$$

O parâmetro de Hubble toma a forma

$$H(t) \approx \frac{1}{2t}, \quad (3.40)$$

enquanto o parâmetro de desaceleração indica uma fase desacelerada e é dado por

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{a^2} \approx 1. \quad (3.41)$$

3.2.2 Época dominada pela matéria

O termo de matéria, devido a sua potência de menor valor, superará, com a expansão, a densidade de energia da radiação. Em determinado momento suas densidades são iguais, e das eqs. (3.33) e (3.34) vemos que neste momento temos

$$a_{\rho_r=\rho_m} = a_0 \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}}. \quad (3.42)$$

Embora sujeito a estimativa⁶ menos precisa, o parâmetro de Hubble pode ser aproximado por

$$H(t) \approx \frac{2}{3t}. \quad (3.43)$$

3.2.3 Época dominada pela energia escura (Λ)

A época de domínio da constante cosmológica se dá a partir do momento em que sua densidade de energia supera a da matéria, e isso acontece quando o fator de escala atinge

$$a_{\rho_\Lambda=\rho_m} = a_0 \left[\frac{\rho_{m,0}}{\rho_\Lambda} \right]^{1/3}, \quad (3.44)$$

marcando o final da era de matéria. A partir deste momento a constante cosmológica passa a dominar indefinidamente. Nessas condições a eq. (3.37) fica

⁶ Nesta era intermediária é difícil separar uma época na qual possamos aproximar com segurança um período de dominância para a matéria.

$$dt \approx \frac{da}{H_0 a \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}, \quad (3.45)$$

o que nos fornecerá um fator de escala

$$a(t) \sim e^{H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} t}. \quad (3.46)$$

Neste caso o parâmetro de Hubble assume um valor constante ($H_0 = cte$), enquanto o fator de desaceleração assume a esperada aceleração, com seu valor dado por

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \approx -1. \quad (3.47)$$

3.2.4 Parâmetros cosmológicos em função do redshift

O redshift foi definido na eq. (2.6) como um desvio percentual do comprimento de onda emitido em relação ao observado: $z \equiv (\lambda_o - \lambda_e)/\lambda_e$. Assumindo que o comprimento de onda é proporcional ao fator de escala em qualquer época, e usando $a(t_o) = a_0$ e $a(t_e) = a$, podemos reescrever o redshift como

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (3.48)$$

Esta simples relação pode ser usada para descrever os modelos cosmológicos em função do redshift, tornando mais direta a comparação com as observações. Com este propósito, vamos então reescrever a equação (3.36). Obtemos

$$\frac{H(z)}{H_0} = [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0})(1+z)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

O fator de desaceleração, definido anteriormente na eq. (3.32), também pode ser reescrito em função de z , de forma que

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (3.50)$$

e, como

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} = -(1+z)H(z), \quad (3.51)$$

o termo \ddot{a} pode ser calculado,

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left[\frac{da}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [aH] = a \frac{dH}{dt} + aH^2, \quad (3.52)$$

ficando assim o parâmetro na forma

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)} H'(z), \quad (3.53)$$

onde o termo $H'(z) \equiv dH/dz$ pode ser obtido se conhecemos o lado direito da eq. (3.49).

3.3 Modelos de Quintessência

A energia escura pode ser modelada por diferentes constituintes. Já é sabido que uma constante cosmológica (como no Λ CDM) pode explicar os dados observacionais. A constante cosmológica possui o inconveniente teórico de necessitar de um ajuste fino nas condições iniciais para que sejam obtidos no presente os valores requeridos pelas medições. Além disso, a densidade atual desta componente é da mesma ordem que a densidade de matéria, indicando que a energia escura passou a dominar na época atual (*coincidence problem*). A descrição desta forma de energia por componentes que possuam uma dinâmica pode elucidar, a partir de um suporte teórico mais sólido, porque esta forma de energia passou recentemente a dominar a evolução do universo. A escolha de uma descrição teórica fundamentada em testes experimentais (como, por exemplo, potenciais de campo escalar que possam ser confirmados no contexto do modelo padrão de partículas) pode eventualmente solucionar o problema do *fine-tuning*. Existem componentes descrevendo a energia escura por uma função do tempo, como os modelos $\Lambda(t)$ CDM [51][52][53], ou ainda por um fluido isotrópico descrito a partir de modelos de campo escalar [7][54][55]. Este fluido hipotético usado para descrever modelos de *energia escura*, cuja equação de estado depende do tempo, é chamado de *Quintessência*⁷. A idéia

⁷ Nesta dissertação usaremos *quintessência* para designar modelos dinâmicos de energia escura descritos canonicamente por um campo escalar. Outros modelos dinâmicos serão indicados explicitamente.

motivadora dos modelos de quintessência é explicar a fase acelerada do universo na era atual. Neste trabalho iremos exploraremos este último tipo de energia escura. A análise será restrita a modelos pouco sensíveis às condições iniciais, evitando assim o *fine-tuning*. O modelo estudado possui uma *base de atração* típica dos denominados *tracker fields*. Nas próximas seções, será apresentada a dinâmica de um campo escalar e suas principais motivações teóricas. Analisaremos algumas propriedades do potencial e dos modelos cosmológicos com esta componente.

3.3.1 Dinâmica de um campo escalar

O uso de campos escalares é essencial em diferentes áreas da física. Na teoria padrão de partículas têm-se exemplos nítidos de seu bem sucedido uso. No estudo cosmológico este tipo de descrição exerce papel essencial em explicar a evolução do universo primordial, através da *inflação*. A ação, invariante de coordenadas, conhecida como ação de Einstein-Hilbert é definida como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right]. \quad (3.54)$$

A variação da ação com respeito à métrica nos fornece, a partir do primeiro termo do colchetes, as equações de Einstein. O segundo termo nos dá a ação de um campo escalar. Há a possibilidade de modificar a ação de Einstein-Hilbert de forma a obter os populares modelos de gravitação modificada, com as chamadas teorias $F(R)$ [56], que visam esclarecer a aceleração do universo através de termos corretivos da Relatividade Geral. Foquemos na dinâmica cosmológica, na qual se considera um campo escalar real, minimamente acoplado. Sua ação pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (3.55)$$

onde a *densidade de lagrangiana*⁸ é

⁸ Daqui em diante somente lagrangiana.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (3.56)$$

O primeiro termo da equação (3.56) é o termo associado à energia cinética, e $V(\phi)$ é o potencial deste campo. Esta é a forma canônica da lagrangiana para modelos de quintessência. Também é possível tentar elucidar a energia escura através de modificações na lagrangiana, tornando possível, por exemplo, a existência de uma equação de estado $w < -1$, como nos modelos de energia fantasma (*phantom*) [57], ou através de uma modificação do termo cinético, como nos modelos de *K-essence* [58][59], onde a densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = K(\phi) f \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right], \quad (3.57)$$

e $K(\phi)$ representa uma função arbitrária do campo. Estas modificações não serão abordadas aqui. Neste trabalho analisaremos a dinâmica a partir da lagrangiana canônica, ao escolher um potencial específico para esta componente do universo.

A dinâmica do campo escalar de quintessência é obtida a partir da ação (3.55), usando a lagrangiana dada pela eq. (3.56). A variação desta ação nos dá a equação de Euler-Lagrange para os campos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\phi_{;\mu})} \right] = 0, \quad (3.58)$$

com o tensor energia-momentum dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \phi \partial_\rho \phi + V(\phi) \right]. \quad (3.59)$$

Se admitimos um campo escalar homogeneamente distribuído pelo espaço e dependente do tempo, $\phi(x^\mu) \rightarrow \phi(t)$, e supusermos que a eq. (3.59) toma a forma de um fluido perfeito,

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p), \quad (3.60)$$

teremos então uma densidade de energia e pressão dadas por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.61)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.62)$$

com uma equação de estado:

$$\omega_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.63)$$

Da equação (3.20), a conservação da energia para este fluido fica

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.64)$$

onde o ponto denota derivada em relação ao tempo e a linha denota derivada em relação ao campo. Essa é a equação de movimento para o campo escalar e contém toda a informação sobre sua evolução. Esta equação é análoga à de uma partícula em uma dimensão (com coordenada genérica ϕ), movendo-se num potencial $V(\phi)$ e sujeita a uma dissipação $-3H\dot{\phi}$, que em nosso caso deve-se à expansão. Em geral, o campo irá percorrer o potencial em direção aos valores mínimos de $V(\phi)$. É interessante formular modelos de quintessência que apresentem as seguintes propriedades:

1. O campo ϕ deve preferencialmente começar a rolar o potencial antes da época presente, de forma que este possua um comportamento dinâmico na era atual, fazendo-se uma distinção entre este e uma constante cosmológica (*unique behavior*).

2. O campo de quintessência ϕ deverá dominar a evolução do universo na época presente, de forma que seus efeitos possam ser mensuráveis (*late-time domination*).

3. Gerar expansão acelerada do universo, como é indicado pelas observações.

Na próxima seção será apresentada uma classe de potenciais que satisfazem estas condições e possuem um comportamento atual que é insensível às condições iniciais, tornando-os possíveis candidatos a solucionar o problema do *fine-tuning*. Além disso, estudaremos os critérios que definem esta classe de potenciais.

3.3.2 O critério *tracker*

Dentre a diversidade de potenciais usados nos modelos de quintessência, existe uma interessante classe que pode levar aos chamados *campos tracker* (*tracker fields*). Estes potenciais foram estudados inicialmente por Zlatev, Steinhardt e Wang [60][61] e possuem uma solução $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(t)$ para a qual todas as outras $\phi = \phi(t)$ convergem, mesmo quando sujeitos a uma grande variedade de condições iniciais. É importante fazer-se a distinção entre soluções *tracker* e uma solução *convergente*. No primeiro caso as soluções podem se comportar arbitrariamente em curtos intervalos e aproximam-se de uma base comum em determinada época. As soluções convergentes se aproximam do ponto de atração desde o início e ao longo de toda sua evolução. Em geral espera-se que a componente de quintessência possua uma densidade de energia muito pequena, quando comparada às componentes de fundo. Denominaremos o campo dominante, na evolução cósmica, como *fluido de fundo* (tipicamente matéria e radiação), sobre o qual podemos analisar o comportamento do campo escalar. Os campos com soluções *tracker* têm em geral a propriedade de seguir um comportamento evolutivo dependente deste campo de fundo. Além disso, uma grande variedade de condições iniciais levam o campo a uma mesma linha evolutiva em tempos longos. Como consequência, o domínio futuro do campo escalar, e sua evolução final, será determinado basicamente pela forma do potencial $V(\phi)$.

Ao fazermos algumas aproximações, é possível obtermos um critério para determinar se o potencial estudado satisfaz as condições acima. Se for exigido que i) o campo possua uma equação de estado constante ($\dot{\omega}_\phi \approx 0$), e ii) $\bar{\omega}_\phi \neq -1$, é possível introduzir a quantidade

$$\Gamma \equiv \frac{V''V}{V'^2}. \quad (3.65)$$

Então Γ é aproximadamente constante se satisfaz

$$\frac{\Gamma'/\Gamma}{V'/V} \ll 1. \quad (3.66)$$

Se definirmos

$$\tilde{\Gamma} \equiv 1 - \frac{1 - \bar{\omega}_f}{6 + 2\bar{\omega}_f}, \quad (3.67)$$

com ϖ_f representando a equação de estado do fluido de fundo, é possível mostrar que o potencial $V(\phi)$ admite soluções *tracker*, se Γ é aproximadamente constante e se

$$\Gamma > \tilde{\Gamma}. \quad (3.68)$$

O critério acima é denominado *critério tracker*.

É possível mostrar também que a equação de estado para o fluido de quintessência está relacionada com o fluido de fundo, com

$$\varpi_\phi \approx \frac{\varpi_f - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)}. \quad (3.69)$$

Assim, podemos ver que em tempos longos deveremos ter $\varpi_\phi \leq \varpi_f$, de forma que o fluido de quintessência domine, implicando, da eq. (3.69), que $\Gamma \geq 1$. Se analisarmos a equação (3.69) vemos que, a partir do momento em que o campo de quintessência é dominante ($\varpi_\phi = \varpi_f$), a equação acima fica $2(\Gamma - 1)\varpi_\phi \approx -2(\Gamma - 1)$, assim revelando que qualquer potencial com $\Gamma > 1$ levará a uma equação de estado $\varpi_\phi \approx -1$ em uma era futura. O valor do *critério tracker* é que a partir dele é possível determinar se um potencial possui solução *tracker* mesmo antes de se resolver a equação de campo (3.64).

3.3.3 O potencial Ratra-Peebles

Vamos considerar um potencial, classicamente utilizado na literatura [18] e pioneiramente estudado por Ratra e Peebles, definido como

$$V(\phi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha}, \quad (3.70)$$

onde M é uma constante fixada a partir das observações e α é um parâmetro constante arbitrário. Esta família de potenciais satisfaz o critério tracker, pois

$$V' = -\alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}}, \quad (3.71)$$

$$V'' = \alpha(\alpha + 1) \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+2}}, \quad (3.72)$$

e a partir da equação (3.65) obtemos

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad (3.73)$$

a qual leva a $\Gamma \geq 1$ para valores positivos de α . Assim, o potencial Ratra-Peebles definido pela eq. (3.70) possui solução *tracker* e sua equação de estado pode ser aproximada, usando-se a eq. (3.69), como

$$\varpi_\phi \approx \frac{\alpha(\varpi_f - 2)}{\alpha + 2}. \quad (3.74)$$

Nesta dissertação usaremos o potencial Ratra-Peebles com os parâmetros $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, o que nos dará uma equação de estado na época atual (próximo à equidade entre matéria e quintessência) $\varpi_\phi \approx -2/3$ para $\alpha = 1$, e $\varpi_\phi \approx -1/2$ para $\alpha = 2$. Deste ponto em diante, analisaremos somente este potencial nos modelos de quintessência desta dissertação.

3.3.4 O modelo cosmológico

A partir das equações de Einstein na métrica FLRW, iremos construir modelos cosmológicos com matéria, radiação e quintessência. A equação de Friedmann (3.17) fica, neste caso,

$$3H^2 = \rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\phi - \frac{3k}{a^2}, \quad (3.75)$$

onde ρ_ϕ é definido pela eq. (3.61), que agora pode ser escrita como

$$3H^2 = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{3k}{a^2}, \quad (3.76)$$

a qual podemos parametrizar dividindo-a pela densidade crítica e re-arrumando:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\phi + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a}\right)^2. \quad (3.77)$$

Aqui, o parâmetro de densidade de quintessência possui uma complicada dependência e é dado por

$$\Omega_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}{3H_0^2}. \quad (3.78)$$

As equações (3.77) e (3.64) descrevem completamente a evolução cosmológica. Veremos nas próximas seções qual o comportamento aproximado para essa componente em cada era cosmológica.

3.3.5 Época dominada pela radiação

Para qualquer potencial de quintessência, espera-se que em tempos suficientemente pequenos ρ_ϕ seja significativamente menor que a densidade de energia da radiação (ρ_r), pois a violação dessa condição na era da nucleossíntese poderia implicar numa abundância de bárions diferente da observada. A densidade de energia de radiação é proporcional ao fator de escala com $\rho_r \sim a^{-4}$, e já vimos que o fator de escala nesta era é dado por $a(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$. Assim, o parâmetro de Hubble fica

$$H(t) \approx \frac{1}{2t}, \quad (3.79)$$

e assim, com esta aproximação e usando o potencial Ratra-Peebles, a eq. (3.64) fica

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2t}\dot{\phi} - \alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}} = 0. \quad (3.80)$$

Uma solução nesta era [7] pode ser escrita como

$$\phi(t) = \left[\frac{\alpha(2+\alpha)^2 M^{4+\alpha} t^2}{6+\alpha} \right]^{\frac{1}{2+\alpha}}, \quad (3.81)$$

indicando assim que tanto $\dot{\phi}^2 \sim t^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$ como $V(\phi) \sim t^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$, fazendo com que em tempos iniciais esta componente seja muito pequena quando comparada à densidade de radiação.

3.3.6 Época dominada por matéria

Neste caso, o parâmetro de Hubble fica

$$H(t) \approx \frac{2}{3t}, \quad (3.82)$$

e a eq. (3.64) se reduz a

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{t}\dot{\phi} - \alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}} = 0. \quad (3.83)$$

Assim, a solução neste caso também deverá ser tanto $\dot{\phi}^2 \sim t^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$ como $V(\phi) \sim t^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$, porém com uma diferente constante multiplicativa. Assim, como a densidade de energia da matéria $\rho_m \sim t^{-2}$, em determinado momento o campo de quintessência deverá passar a dominar a evolução.

3.3.7 Época dominada pelo campo escalar

Quando o campo escalar domina a evolução cosmológica, podemos escrever

$$H^2 = \frac{\rho_\phi}{3}, \quad (3.84)$$

que, quando substituída na eq. (3.64) nos dá

$$\ddot{\phi} + \sqrt{3\rho_\phi}\dot{\phi} - \alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}} = 0. \quad (3.85)$$

Para este caso, vemos que o termo de dissipação $-\sqrt{3\rho_\phi}\dot{\phi}$ deverá gradativamente tornar a energia cinética ($\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$) do campo menor que o termo do potencial $V(\phi)$. Neste caso podemos fazer uma outra aproximação: $\dot{\phi}^2 \approx cte$, enquanto o termo $\ddot{\phi}$ se tornará muito pequeno quando comparado ao termo do potencial⁹, e assim a equação de movimento fica

$$\sqrt{3\rho_\phi}\dot{\phi} = \alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}}. \quad (3.86)$$

Como $\rho_\phi \approx V(\phi)$, temos então

$$\sqrt{3 \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}}}\dot{\phi} = \alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^{\alpha+1}}, \quad (3.87)$$

⁹ Esta aproximação é geralmente denominada *slow-roll*.

que tem como solução

$$\phi(t) = M \left[\frac{\alpha(2 + \alpha/2)^2 t}{\sqrt{3}} \right]^{2 + \frac{\alpha}{2}} + C, \quad (3.88)$$

onde a constante C pode ser absorvida com uma redefinição de t . Com esta solução vemos que a densidade de energia na era de quintessência será dada por

$$\rho_\phi(t) \sim t^{\frac{-\alpha}{2+\alpha/2}}, \quad (3.89)$$

e desta forma,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \sim t^{\frac{-\alpha}{2(2+\alpha/2)}}. \quad (3.90)$$

Finalmente, podemos ver que o fator de escala cresce exponencialmente:

$$\ln a(t) \sim t^{\frac{2}{2+\alpha/2}}, \quad (3.91)$$

$$a(t) \sim e^{t^{\frac{2}{2+\alpha/2}}}. \quad (3.92)$$

Podemos observar um comportamento muito próximo ao de uma constante cosmológica, no qual temos $\ln a(t) \sim t$. Vejamos agora as equações de interesse cosmológico na forma mais conveniente para as usarmos no ajuste de dados.

3.3.8 Parâmetros cosmológicos em função do redshift

Usando o mesmo procedimento que na seção 3.2.4, podemos colocar as equações acima em função do redshift, ficando assim com

$$\frac{H(z)}{H_0} = \left[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_\phi + \Omega_k(1+z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.93)$$

porém, neste caso, ao colocarmos o parâmetro de quintessência em função do redshift, usando (3.51), ficamos com

$$\Omega_\phi(z) = \frac{\frac{1}{2}(1+z)^2 H^2 \phi'^2 + V(\phi)}{3H_0^2}, \quad (3.94)$$

a qual, com o potencial de Ratra-Peebles, toma a forma

$$\Omega_\phi(z) = \frac{\frac{1}{2}(1+z)^2 H^2 \phi'^2 + \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha}}{3H_0^2}, \quad (3.95)$$

ou ainda

$$\Omega_\phi(z) = \frac{\frac{1}{2}(1+z)^2 H^2 \phi'^2}{3H_0^2} + \frac{M^{4+\alpha}}{3H_0^2 \phi^\alpha}. \quad (3.96)$$

Se definimos

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0}, \quad (3.97)$$

ficamos com a equação de Friedmann independente de H_0 ,

$$E^2(z) - \frac{(1+z)^2 E(z)^2 \phi'^2}{6} = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \frac{V(\phi)}{3} + \Omega_k(1+z)^2, \quad (3.98)$$

$$E(z) = \frac{\left[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \frac{M^{4+\alpha}}{3\phi^\alpha} + \Omega_k(1+z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \frac{(1+z)^2 \phi'^2}{6} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.99)$$

onde a linha aqui é usada para designar a derivada em relação ao redshift (z). A eq. acima deve ser resolvida concomitantemente com a eq. (3.64), que descreve a dinâmica do campo escalar. Dividindo por H_0^2 e colocando em função do redshift, a (3.64) fica na forma

$$E(z)^2 [1+z]^2 \phi(z)'^2 + [E(z)E(z)' [1+z]^2 - 2E(z)^2 [1+z]] \phi(z)' - \alpha \frac{M^{4+\alpha}}{\phi(z)^{\alpha+1}}. \quad (3.100)$$

As equações (3.99) e (3.100) representam a dinâmica de um universo com curvatura espacial e com conteúdo de matéria, radiação e quintessência. Estas equações somente podem ser resolvidas através de métodos numéricos e serão usadas no capítulo 6 para obter os ajustes observacionais a partir de supernovas tipo Ia. Para que seja possível realizarmos a análise observacional no capítulo 6, necessitamos integrar numericamente as equações (3.99) e (3.100). Temos assim duas equações diferenciais-algébricas não lineares acopladas. As funções $E(z)$ e $\phi(z)$ são obtidas numericamente, para então serem usadas no cálculo dos observáveis. Usaremos agora parâmetros cosmológicos arbitrários para ilustrar a dinâmica cosmológica com o fluido de quintessência.

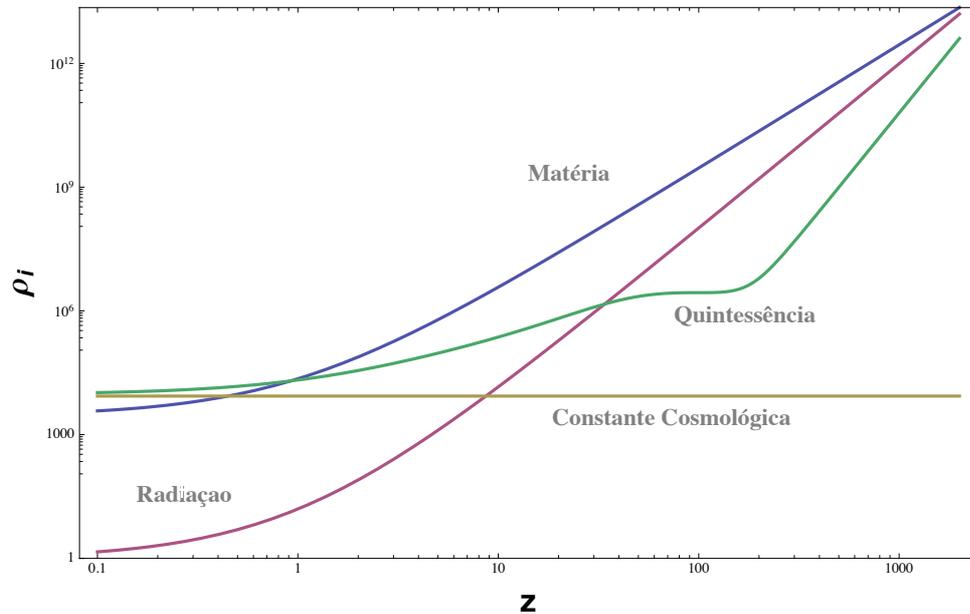


Figura 3.3: Comparações entre as densidades de energia ρ_i para cada fluido.

Obtivemos uma solução numérica para as funções $E(z)$ e $\phi(z)$. O gráfico na figura 3.3 demonstra o comportamento da densidade de energia de quintessência obtido, onde nota-se que o campo escalar possui uma dinâmica que leva ao domínio cosmológico deste fluido em tempos longos. Vemos também que na era atual o campo escalar de quintessência está rolando, possuindo ainda uma energia cinética. Esta característica é fundamental para que seja possível diferenciar-se observacionalmente este tipo de componente de uma constante cosmológica.

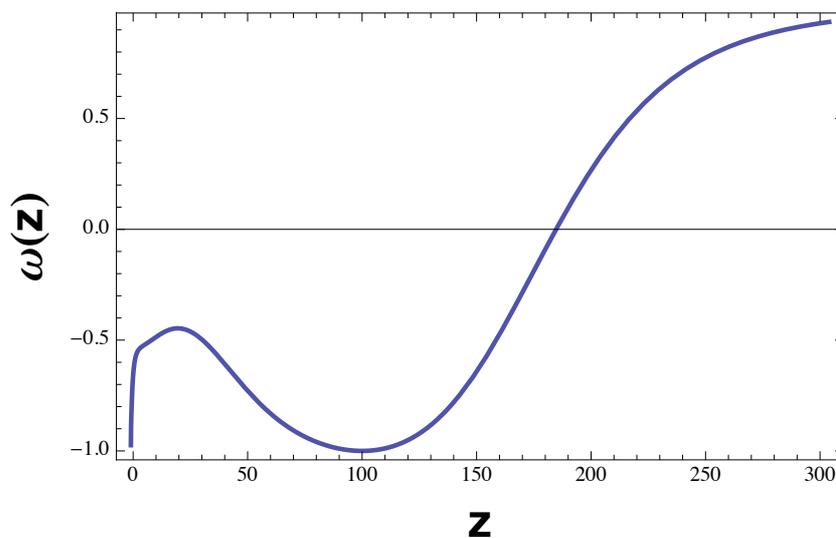


Figura 3.4: Parâmetro de estado para o fluido de quintessência.

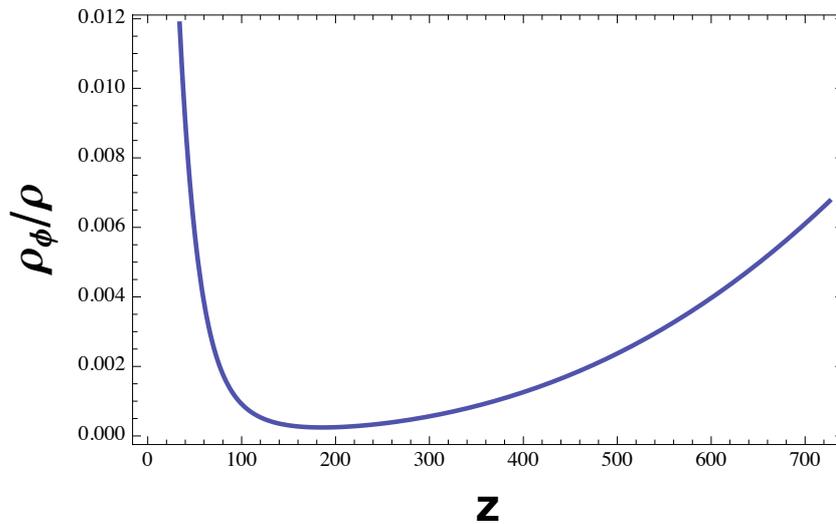


Figure 3.5: Energia relativa para o fluido de quintessência estudado.

As soluções obtidas elucidam o fato de que o fluido de quintessência estudado possui as exigências necessárias para um bom candidato à energia escura. Este produz uma aceleração na expansão do universo, com comportamento dinâmico distinto do de uma constante cosmológica. Para tempos longos o fluido de matéria é totalmente dominado, gerando um comportamento assintótico de constante cosmológica ($\omega \cong -1$).

Capítulo 4

Métrica Anisotrópica RTKO

Os sólidos modelos teóricos propostos para a cosmologia e a crescente precisão de medidas astronômicas estabeleceram nas últimas décadas uma era de precisão para a cosmologia. Diversas observações indicam um alto grau de isotropia do universo. Estes testes observacionais estabelecem que desvios na isotropia e homogeneidade, se existirem, deverão ser pequenos. A possibilidade de uma anisotropia no universo, no entanto, não deve ser primariamente descartada e vem sendo objeto de estudo de diversos pesquisadores [17][63][64]. Em estudos recentes [65][66][67], a possibilidade de existência de um eixo preferencial foi analisada, e.g., através das medições da radiação cósmica de fundo, fornecida pelo WMAP. Nesses estudos há indícios, ainda inconclusivos, de um alinhamento dos multipolos de baixa ordem da CMB. Num contexto de escrutinização de modelos, é necessário estudar a viabilidade de modelos cosmológicos cuja geometria admita pequenos desvios da isotropia. O estudo destes modelos se faz importante para uma determinação precisa dos parâmetros cosmológicos, e para que seu conteúdo material seja melhor classificado e entendido. Este capítulo visa estudar a métrica denominada RTKO, que possui secção espacial homogênea e apresenta uma direção privilegiada, caracterizando um espaço-tempo anisotrópico. As soluções das equações de Einstein desta métrica serão obtidas de forma exata, a partir da inserção de um campo escalar sem massa minimamente acoplado. Serão analisadas as características que fazem desta uma possível candidata para a descrição do universo. Ao levantarmos a degenerescência associada à métrica plana, novas possibilidades podem ser vislumbradas no sentido de entendermos em maior profundidade o universo conhecido.

4.1 A métrica RTKO

A métrica¹ aqui denominada RTKO é um caso particular de métricas do tipo Gödel, que apresentam rotação e são classificadas como Bianchi III. Esta métrica é descrita pelo elemento de linha

$$ds^2 = a(\eta)^2 [(d\eta + l e^x dy)^2 - dx^2 - e^{2x} dy^2 - dz^2], \quad (4.1)$$

onde η é o tempo conforme, definido por $d\eta = dt/a(\eta)$, e $a(\eta)$ é o fator de escala, enquanto x , y e z são as coordenadas cartesianas. O parâmetro de rotação l é uma constante positiva que pode variar no intervalo $0 \leq l < 1$, e que nesta dissertação será feito nulo ($l = 0$). Neste caso a métrica será escrita como

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - dx^2 - e^{2x} dy^2 - dz^2]. \quad (4.2)$$

Esta métrica é espacialmente homogênea, possui expansão conforme e é anisotrópica. Na expressão acima foram usadas as coordenadas cartesianas $x^\mu = (\eta, x, y, z)$. É possível notar que a mesma se reduz à métrica FLRW plana para distâncias curtas, para isso é mais conveniente trabalharmos em coordenadas esféricas, fazendo as transformações

$$r = \chi \operatorname{sen} \theta, \quad (4.3)$$

$$z = \chi \operatorname{cos} \theta, \quad (4.4)$$

e usando também suas diferenciais através de

$$dr = \chi \operatorname{cos} \theta d\theta + \operatorname{sen} \theta d\chi, \quad (4.5)$$

$$dz = -\chi \operatorname{sen} \theta d\theta + \operatorname{cos} \theta d\chi. \quad (4.6)$$

¹ Na verdade, uma família de métricas.

Assim podemos escrever

$$dr^2 + dz^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\theta^2, \quad (4.7)$$

e a métrica pode ser escrita na forma

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\theta^2 - \text{sen}h^2(\chi \text{sen} \theta) d\varphi^2]. \quad (4.8)$$

Podemos agora fazer uma aproximação:

$$\text{sen}h(\chi \text{sen} \theta) \approx \chi \text{sen} \theta + \frac{(\chi \text{sen} \theta)^3}{6} + \dots, \quad (4.9)$$

Mantendo somente o termo de primeiro ordem, a métrica RTKO se reduz a

$$ds^2 \approx a(\eta)^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\theta^2 - \chi^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2], \quad (4.10)$$

que representa a métrica FLRW em coordenadas esféricas, demonstrando assim a equivalência para pequenas distâncias.

Para que fique mais clara a anisotropia presente, colocaremos agora esta métrica numa forma cilíndrica, através das transformações

$$e^x = \cosh r + \cos \varphi \text{sen}h r, \quad (4.11)$$

$$ye^x = \text{sen} \varphi \text{sen}h r, \quad (4.12)$$

que transformará a métrica (4.2) em

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - dr^2 - \text{sen}h^2 r d\varphi^2 - dz^2], \quad (4.13)$$

que é um formato mais adequado para percebermos sua simetria. Se comparamos a forma acima com a métrica FLRW,

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - dr^2 - d\varphi^2 - dz^2], \quad (4.14)$$

observamos que os eixos z e r entram da mesma forma, enquanto existem variações na coordenada φ , indicando que z é um eixo de simetria desta geometria. Vejamos agora os vetores de Killing desta métrica, cuja presença garante a isotropia da CMB.

4.2 Vetores de Killing

O foco desta seção é analisar as simetrias da métrica utilizada. Estas simetrias são formalmente representadas através dos *vetores de Killing* [68][69]. Para obter estes vetores, fazemos uma mudança infinitesimal na métrica $g_{\mu\nu}$ através da transformação

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \epsilon \xi^{\alpha}, \quad (4.15)$$

onde ϵ é infinitesimal e o vetor $\xi^{\alpha}(x^{\beta})$ move o ponto $P_1 = P_1(x^{\alpha})$ para $P_2 = P_2(x^{\alpha} + \epsilon \xi^{\alpha})$. Se temos um ponto V_1 que é vizinho a P_1 e um ponto V_2 que é vizinho a P_2 , usamos a relação infinitesimal

$$dx'^{\alpha} = dx^{\alpha} + \epsilon \xi_{,\rho}^{\alpha} dx^{\rho}. \quad (4.16)$$

Dados

$$V_1 = V_1(x^{\alpha} + dx^{\alpha}), \quad (4.17)$$

$$V_2 = V_2(x^{\alpha} + \epsilon \xi^{\alpha} + dx^{\alpha} + \epsilon \xi_{,\rho}^{\alpha} dx^{\rho}), \quad (4.18)$$

podemos definir o comprimento infinitésimo $\overline{V_1 V_2}$ em função das coordenadas originais,

$$V_2 - V_1, \quad (4.19)$$

$$(x^{\alpha} + dx^{\alpha} + \epsilon \xi^{\alpha} + \epsilon \xi_{,\rho}^{\alpha} dx^{\rho}) - (x^{\alpha} + \epsilon \xi^{\alpha}), \quad (4.20)$$

que então assume a forma

$$\overline{V_1 V_2} = dx^{\alpha} + \epsilon \xi_{,\rho}^{\alpha} dx^{\rho}. \quad (4.21)$$

O comprimento ds' deste intervalo será

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu, \quad (4.22)$$

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha + dx^\alpha)[dx^\mu + \epsilon\xi_{,\alpha}^\mu dx^\alpha][dx^\nu + \epsilon\xi_{,\alpha}^\nu dx^\alpha], \quad (4.23)$$

$$ds'^2 = [g_{\mu\nu}(x^\alpha) + g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha][dx^\mu + \epsilon\xi_{,\alpha}^\mu dx^\alpha][dx^\nu + \epsilon\xi_{,\alpha}^\nu dx^\alpha], \quad (4.24)$$

onde usamos (para $\epsilon \ll 1$)

$$\epsilon\xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} = g_{\mu\nu}(x^\alpha + \epsilon dx^\alpha) - g_{\mu\nu}(x^\alpha), \quad (4.25)$$

Da equação (4.24), se utilizamos somente termos de 1º ordem em ϵ , após algumas operações obtemos

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \epsilon[g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha]dx^\mu dx^\nu, \quad (4.26)$$

e assim podemos definir

$$2s_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha, \quad (4.27)$$

que é o tensor advindo da diferença

$$ds'^2 - ds^2 = \epsilon 2s_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

O tensor definido em (4.27) é a conhecida *derivada de Lie*, definida como

$$L_\xi g_{\mu\nu} = 2s_{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

A invariância por transformações de coordenadas é implicada se $s_{\mu\nu} = 0$. Neste caso os vetores de Killing são os vetores que mantêm a métrica invariante, e estes podem ser escritos através de

$$L_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha = 0, \quad (4.30)$$

que nos fornecem, para a métrica RTKO, três *vetores de Killing*:

$$\xi_1 = \partial_x - y\partial_y, \quad (4.31)$$

$$\xi_2 = \partial_y, \quad (4.32)$$

$$\xi_3 = \partial_z. \quad (4.33)$$

Existe ainda uma classe de transformações, geradas por campos vetoriais, que levam à própria métrica multiplicada por um fator dependente das coordenadas (no caso de uma transformação conforme), ou por uma constante (no caso de transformações homotéticas). Na métrica RTKO é possível também obter o *campo vetorial de Killing* conforme, definido por

$$\xi_{conf}^\mu = \delta_0^\mu, \quad (4.34)$$

que descreve um movimento conforme se $\xi_{;\mu}^\mu$ é constante. Os vetores de Killing definem então as simetrias impostas pela métrica. Usaremos estes vetores na próxima seção para derivar a isotropia da radiação cósmica de fundo.

4.3 Isotropia da CMB

Nesta seção deseja-se mostrar que é possível construir um modelo cosmológico homogêneo, a partir da métrica anisotrópica apresentada, tendo uma radiação cósmica de fundo isotrópica no nível da base, em concordância com as medições realizadas. Com as simetrias postas, para analisar a radiação emitida, partiremos das relações básicas impostas para um fóton a fim de obter um redshift cosmológico que não possuirá qualquer direção privilegiada. Podemos partir da relação [68]:

$$E = P^\mu u_\mu, \quad (4.35)$$

onde a 4-velocidade comovel é definida por

$$u^\mu = \frac{\delta_0^\mu}{a(\eta)}. \quad (4.36)$$

Neste caso podemos usar a relação entre o momentum e o comprimento de onda,

$$p^\mu = \hbar k^\mu, \quad (4.37)$$

$$E = \frac{h}{\lambda}, \quad (4.38)$$

e assim obter a relação para o redshift sob a forma

$$1 + z = \frac{[k^\mu u_\mu]_e}{[k^\mu u_\mu]_o}, \quad (4.39)$$

onde os índices subscritos “ e ” e “ o ” indicam medidas nos pontos de emissão e de observação dos fótons, respectivamente. Do vetor de Killing (4.34) e da 4-velocidade (4.36) podemos escrever

$$\xi_{conf}^\mu = a(\eta)u^\mu. \quad (4.40)$$

Se multiplicamos por k^μ , ficamos com

$$\xi_\mu^{conf} k^\mu = a(\eta)u_\mu k^\mu, \quad (4.41)$$

a qual é constante. Usando assim o lado direito da equação acima no momento da emissão e recepção do fóton, ficamos com:

$$a(\eta_e)[u_\mu k^\mu]_e = a(\eta_o)[u_\mu k^\mu]_o. \quad (4.42)$$

Utilizando a relação acima e a equação (4.39), obtemos

$$1 + z = \frac{a(\eta_o)}{a(\eta_e)} = \frac{a_0}{a}, \quad (4.43)$$

que é a mesma expressão usada anteriormente e que depende somente do fator de escala no momento de emissão e observação, garantindo consequentemente a isotropia do redshift da CMB.

4.4 Soluções das equações de Einstein

Para obtermos um modelo cosmológico é necessário obter soluções para as equações de Einstein na métrica anisotrópica RTKO. Da equação (3.6), obtemos as componentes

$$T_0^0 a^4 = 3a'^2 - a^2, \quad (4.44)$$

$$T_1^1 a^4 = T_2^2 a^4 = 2aa'' - a'^2, \quad (4.45)$$

$$T_3^3 a^2 = T_1^1 a^2 - 1, \quad (4.46)$$

$$T_\nu^\mu = 0, \text{ se } \mu \neq \nu, \quad (4.47)$$

onde o linha indica uma derivada em relação ao tempo conforme. Da definição do tensor energia-momentum (3.6), vemos que

$$\rho = T_0^0, \quad (4.48)$$

$$p_i = -T_i^i. \quad (4.49)$$

Desta forma, as equações de Einstein (4.44), (4.45), (4.46) e (4.47) podem ser escritas na forma

$$\rho a^4 = 3a'^2 - a^2, \quad (4.50)$$

$$p_1 a^4 = p_2 a^4 = -2aa'' + a'^2, \quad (4.51)$$

$$p_3 a^2 = p_2 a^2 - 1. \quad (4.52)$$

É possível observar que a pressão p_3 difere das demais por um fator $\sim a^{-2}$. Estas equações indicam que a anisotropia da métrica deve ser gerada por algum fluido pouco usual,

tornando necessária a adição de uma nova componente ao conteúdo habitual de matéria e radiação. Esta componente deverá ser responsável pela anisotropia geométrica. Neste trabalho utilizaremos um campo escalar anisotrópico [17] minimamente acoplado, o qual será o conteúdo material responsável pela anisotropia da métrica. Nos limitaremos a analisar as contribuições deste campo anisotrópico(ψ) somente no nível cosmológico, sem examinar possíveis partículas físicas associadas ao mesmo. O campo proposto é definido como

$$\psi(z) = Cz , \quad (4.53)$$

onde C é uma constante não nula.

Da equação (3.59) se obtém que, no espaço-tempo curvo, o campo escalar minimamente acoplado à gravidade satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\psi_{;\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} \psi_{,\mu} g^{\mu\nu}]_{,\nu} = 0 , \quad (4.54)$$

onde g é o determinante da métrica e $g^{\mu\nu}$ é a métrica na forma contravariante. Do tensor energia-momentum, definido pela equação (3.60), obtemos para o campo² (4.53) as componentes

$$T_{00}^{(\psi)} = -\frac{C^2}{2a^2} , \quad (4.55)$$

$$T_{11}^{(\psi)} = \frac{C^2}{2a^2} , \quad (4.56)$$

$$T_{22}^{(\psi)} = \frac{C^2}{2a^2} , \quad (4.57)$$

$$T_{33}^{(\psi)} = -\frac{C^2}{2a^2} , \quad (4.58)$$

que, a partir de (4.48) e (4.49), gerará

² Por conveniência usaremos o índice superior para indicar a componente do campo escalar anisotrópico.

$$\rho^{(\psi)} = \frac{C^2}{2a^2}, \quad (4.59)$$

e as pressões anisotrópicas

$$p_1^{(\psi)} = p_2^{(\psi)} = -p_3^{(\psi)} = -\frac{C^2}{2a^2}. \quad (4.60)$$

Estes valores modificam as equações de Einstein, de forma que é mais conveniente reescrevê-las com uma redefinição do tipo

$$\rho = \bar{\rho} + \rho^{(\psi)}, \quad (4.61)$$

$$p = \bar{p} + p^{(\psi)}, \quad (4.62)$$

onde a barra irá se referir ao conteúdo isotrópico (radiação, matéria e constante cosmológica). Adicionando a componente do campo escalar anisotrópico ao tensor energia-momentum e usando as definições (4.61) e (4.62), ficamos com

$$\bar{p}_3 a^2 + p_3^{(\psi)} a^2 = \bar{p}_1 a^2 + p_1^{(\psi)} a^2 + 1, \quad (4.63)$$

$$\bar{p}_3 a^2 = \bar{p}_1 a^2 - C^2 + 1, \quad (4.64)$$

e assim vemos que as anisotropias poderão ser justificadas pelo campos escalar, se $C^2 = 1$, tornando assim as pressões modificadas isotrópicas,

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3, \quad (4.65)$$

fazendo com que o campo escalar seja reduzido a somente

$$\psi(z) = \pm z. \quad (4.66)$$

Das equações (4.59) e (4.60) podemos abreviar suas contribuições, como

$$p_1^{(\psi)} = p_2^{(\psi)} = -p_3^{(\psi)} = -\frac{1}{2a^2}, \quad (4.67)$$

e assim, de (4.50), (4.51) e (4.52), reescrever as equações de Einstein, em função dos parâmetros isotrópicos, na forma

$$\bar{\rho}a^4 = 3a'^2 - \frac{3}{2}a^2 \quad (4.68)$$

$$\bar{p}a^4 = a'^2 - 2aa'' + \frac{a^2}{2}. \quad (4.69)$$

Estas equações coincidem com as de um modelo aberto de FLRW com constante de curvatura $k = -1/2$, onde as pressões \bar{p}_i são idênticas. A ideia de um campo escalar com um eixo específico conduz naturalmente a uma justificação de um eixo preferencial na métrica. De fato, dividindo a equação (4.68) por $3a^4$, obtemos a equação de Friedmann para a métrica anisotrópica:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{\bar{\rho}}{3} + \frac{1}{2a^2}, \quad (4.70)$$

$$H^2(\eta) = \frac{\bar{\rho}}{3} + \frac{1}{2a^2}, \quad (4.71)$$

onde usamos a definição do parâmetro de Hubble em função do tempo conforme(η),

$$H^2(\eta) \equiv \frac{a'}{a^2}. \quad (4.72)$$

Obtemos assim soluções exatas para as equações de Einstein na métrica RTKO, sendo necessário neste caso introduzirmos um campo escalar anisotrópico. Devido à dependência com $\sim a^{-2}$ vincularemos esta componente com uma contribuição à curvatura do modelo, pois nesta se encerra a contribuição da densidade de energia do campo escalar e também da curvatura propriamente dita. Desejamos obter um conteúdo energético que possa descrever bem as observações cosmológicas. Tomaremos então o campo anisotrópico acima descrito como um efeito de curvatura e passaremos a utilizar as equações (4.68) e (4.69).

4.6 O modelo de quintessência em RTKO

Já dispondo de um conteúdo capaz de gerar a anisotropia da métrica, adicionaremos o conteúdo usual, matéria e radiação. A utilização de um constante cosmológica para gerar uma expansão acelerada nesta métrica foi anteriormente examinada em [69]. Nesta seção iremos examinar os efeitos cosmológicos ao adicionarmos uma componente de quintessência, tal como descrita no Cap. 3. Desejamos assim obter as equações de Friedmann, de forma que seja possível integrá-las numericamente. Supomos um conteúdo com radiação e matéria, ditado por uma energia

$$\rho_r = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4, \quad (4.73)$$

$$\rho_m = \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (4.74)$$

onde a_0 designa o valor atual do fator de escala e $\rho_{i,0}$ designa o valor atual da densidade de matéria ($i = m$) e radiação ($i = r$). Além disso incluímos o campo escalar de quintessência, com densidade de energia

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.75)$$

e assim a energia é descrita por

$$\bar{\rho} = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi. \quad (4.76)$$

A equação de Friedmann será escrita na forma

$$3H^2 = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi + \frac{3}{2a^2}. \quad (4.77)$$

Como a dinâmica do campo escalar é descrita pela equação de Klein-Gordon, devemos encontrar soluções para (4.77) e (3.65) simultaneamente. Se usamos a parametrização

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m}{3H^2}, \quad (4.78)$$

$$\Omega_r \equiv \frac{\rho_r}{\rho_c} = \frac{\rho_r}{3H^2}, \quad (4.79)$$

$$\Omega_\phi \equiv \frac{\rho_\phi}{\rho_c} = \frac{\rho_\phi}{3H^2}, \quad (4.80)$$

no caso da métrica RTKO definimos o parâmetro de densidade de curvatura como

$$\Omega_k = \frac{1}{2H^2 a^2}, \quad (4.81)$$

que difere do caso FLRW por um fator $1/2$. A densidade total é

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\phi. \quad (4.82)$$

Desta forma podemos construir explicitamente a função adimensional $E(z)$, como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\phi, \quad (4.83)$$

que pode ser reescrita, utilizando-se as relações obtidas no Cap. 3, numa forma mais convencional, em função do redshift:

$$E(z) = \frac{\left[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \frac{M^{4+\alpha}}{3\phi^\alpha} + \Omega_k(1+z)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \frac{(1+z)^2\phi^2}{6}\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.84)$$

onde o termo Ω_k foi modificado (em relação à definição do caso FLRW), de acordo com (4.81). É importante frisar que a utilização da métrica RTKO para resolver as equações de Einstein fica posta ao empregarmos a métrica FLRW com o parâmetro $k = -1/2$. Esta é a principal alteração quando comparamos as equações de interesse cosmológico nas métricas FLRW e RTKO. Para obtermos a dinâmica cosmológica é necessário integrarmos (4.84) em conjunto com a equação de Klein-Gordon, definida anteriormente por (3.100).

Com o objetivo de analisar a aceleração do universo, podemos escrever o parâmetro de desaceleração em função das componentes energéticas. Para isto lembremos que este parâmetro é definido como

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (4.85)$$

Como estamos utilizando a métrica anisotrópica em função do tempo conforme, se queremos expressar a equação (4.85) nesta variável devemos escrever

$$\dot{a} = \frac{da}{dt}, \quad (4.86)$$

$$\dot{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \equiv \frac{1}{a} a', \quad (4.87)$$

enquanto

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left[\frac{da}{dt} \right], \quad (4.88)$$

$$\ddot{a} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \right], \quad (4.89)$$

$$\ddot{a} = -\frac{a'^2}{a^3} + \frac{a''}{a^2}. \quad (4.90)$$

Desta forma, podemos encontrar o parâmetro de desaceleração em função do tempo conforme ao reescrever a equação (4.85) como

$$q(\eta) = 1 - \frac{aa''}{a'^2}. \quad (4.91)$$

Se utilizamos a equação (4.68), após algumas operações podemos escrever

$$a'^2 = \frac{2\rho_\phi a^4 + 2\rho_{m,0}a + 2\rho_{r,0} + 3a^2}{6}, \quad (4.92)$$

e

$$a'' = \frac{4\rho_\phi a^3 + 3a + \rho_{m,0}}{6}, \quad (4.93)$$

e finalmente

$$q(\eta) = \frac{-2\rho_\phi a^4 + \rho_{m,0}a + 2\rho_{r,0}}{2\rho_\phi a^4 + \rho_{m,0}a + 2\rho_{r,0} + 3a^2}. \quad (4.94)$$

Se dividimos por $3H_0^2$, ficamos com

$$q(\eta) = \frac{-2\Omega_\phi a^4 + \Omega_{m,0}a + 2\Omega_{r,0}}{2\Omega_\phi a^4 + \Omega_{m,0}a + 2\Omega_{r,0} + 2\Omega_k a^4}. \quad (4.95)$$

Deveremos ter um universo acelerado se $q(\eta) < 0$ e, portanto,

$$2\Omega_\phi a^4 > \Omega_{m,0} a + 2\Omega_{r,0}, \quad (4.96)$$

$$\Omega_\phi > \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{2\Omega_{r,0}}{a^4}, \quad (4.97)$$

$$\Omega_\phi > \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r, \quad (4.98)$$

que estabelece uma relação para o conteúdo material que, quando obedecida, implicará num universo com aceleração.

Capítulo 5

Parâmetros Cosmológicos

No início do século XX existia uma considerável dificuldade em diferenciar objetos dentro ou fora do Sistema Solar. Nessa época acreditava-se que todo o universo encerrava-se nos limites da galáxia. Somente após inúmeros debates científicos e uma considerável melhoria das técnicas e aparelhos de medição foi possível melhor entender a vizinhança cósmica. Na década de 1920 existiu um famoso debate entre Harlow Sharpley e Herber Curtis¹ sobre a natureza de objetos astronômicos conhecidos como nebulosas espirais (hoje classificados como galáxias). O debate residia em estabelecer se a Via Láctea era toda a extensão do universo, incluindo as nebulosas espirais como estruturas internas, ou se a galáxia possuía extensão finita (com valor medido de aproximadamente 32 Kpc), sendo as nebulosas externas à mesma. O debate pôde ser resolvido somente com as medições realizadas por Hubble em meados da década de 1920, o qual, a partir de medições indiretas de distância usando as estrelas variáveis cefeidas, obteve que a grande nebulosa de Andrômeda se encontrava² a 600 Kpc de distância, sendo assim uma galáxia vizinha à Via Láctea. Ficou então evidenciado que as nebulosas eram galáxias independentes e que o universo era na verdade extraordinariamente maior do que acreditava-se. Mesmo em escalas relativamente pequenas a dificuldade imposta ao analisar esta situação era

¹ Ver http://apod.nasa.gov/diamond_jubilee/debate_1920.html para mais referências.

² O valor atual é de 770 Kpc.

acentuada devido aos erros empíricos, gerando uma grande dificuldade em analisar as distâncias. Como não é possível estender uma imensa fita métrica ao longo do cosmos, definir comprimentos num espaço-tempo em expansão é ainda hoje uma questão fundamental para a análise cosmológica. A dificuldade aumenta gradativamente ao analisarmos regiões cada vez mais distantes. Veremos neste capítulo como definir distâncias no contexto cosmológico. O ponto de partida para analisar estas definições, assim como calibrá-las, é conhecido como *escada de distâncias*, a qual utiliza diferentes ferramentas de medição para inferir de forma gradativa a distância em escalas cada vez maiores. Esta análise permite analisar-se com segurança regiões muito além do sistema solar. Nas seções procedentes será detalhada a definição de distâncias utilizando a métrica isotrópica FLRW e também a métrica anisotrópica RTKO.

5.1 A escada de distâncias

Existem diferentes métodos para determinar distâncias a objetos astronômicos. Alguns destes métodos funcionam muito bem para objetos próximos, enquanto outros funcionam bem para medirmos objetos mais distantes. As escalas em que estes distintos métodos funcionam se sobrepõem, e assim métodos que medem distâncias próximas são usados para calibrar métodos mais distantes, e seguidamente estes métodos são usados para calibrar técnicas que medem regiões ainda mais distantes. Um dos métodos usuais para medir objetos em distâncias curtas (em escalas comparáveis ao tamanho do planeta) é o de reflexão e detecção de ondas por radar. Se emitimos um sinal eletromagnético, sabendo que a velocidade da luz (c) é constante e que podemos considerar as velocidades peculiares da Terra e de determinado astro muito pequenas (quando comparadas à luz) é possível calcular a distância(d) a um astro por uma simples relação:

$$d \cong \frac{c\Delta t}{2}, \quad (5.1)$$

onde $\Delta t/2$ é o tempo de ida do sinal (Δt sendo o tempo total entre emissão e detecção). Este método é muito útil para determinarmos a distância a grandes objetos no sistema solar com boa precisão. A distância Terra-Sol é determinada em aproximadamente

149.597.870 km (definido como 1 UA, unidade astronômica). A técnica acima é pouco útil para determinação de distâncias a objetos menores e mais afastados, uma vez que a detecção da onda refletida torna-se cada vez mais difícil. Um método mais abrangente, chamado método da paralaxe (ou triangulação) pode ser usado. Se um observador possui um plano de fundo que possa utilizar como referencial (como as estrelas distantes), é possível perceber que um objeto mais próximo parece se movimentar se mudamos a posição de observação³. Esta idéia é usada para calcular a distância a objetos além do sistema solar.

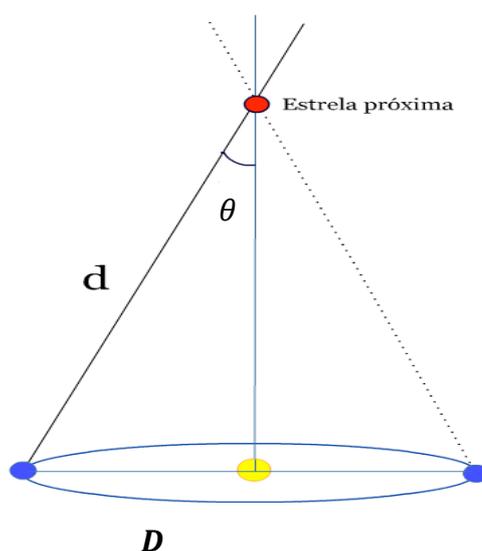


Figure 5.1 Ilustração do método da paralaxe trigonométrica.

O método da paralaxe utiliza a relação trigonométrica

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{D}{d}, \quad (5.2)$$

que geralmente envolve ângulos diminutos, de modo que pode ser aproximada através de $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$, o que implica em uma distância

$$d \cong \frac{D}{\theta}, \quad (5.3)$$

³ Este é na verdade o mesmo método utilizado pelo cérebro humano para deduzir a distância de objetos. Imagens captadas por cada olho detectam diferenças sensíveis na posição (em relação a um fundo mais distante) e estas diferenças são usadas para inferir a distância até o objeto (digamos uma caneta posta na mão).

onde d é a distância entre o observador (em geral na Terra) e o astro estudado, e o comprimento D é a distância base conhecida (em geral, $D = \text{distância Terra-Sol} \equiv 1\text{UA}$) e o ângulo θ é dado em radianos. A atmosfera terrestre dificulta uma resolução menor que $0,03''$ (arco-segundo), e acima desta somente os satélites podem realizar tais medições sem o inconveniente da atmosfera. Alguns satélites podem obter ângulos com uma precisão da ordem de milésimo de segundo de arco (obtida pelo satélite europeu *Hipparcos* em 1989), ou mesmo milionésimos de arco-segundo (a ser obtido pelo satélite *Gaia*), possibilitando assim a obtenção de distâncias que se estendem a dezenas de kilo-parsecs, porém que ainda englobam somente a parte interna da Via Láctea. Para alcançarmos maiores distâncias é necessário usarmos um método ainda mais geral. O método mais versátil para este propósito é o de derivar a distância do objeto a partir de sua luminosidade intrínseca. Se dispomos de um objeto cuja luminosidade absoluta (L) seja conhecida, podemos supor que, se a luz for irradiada de forma esférica (isotrópica), temos

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (5.4)$$

onde f é o fluxo detectado por um observador a uma distância d da fonte. Se conhecemos a luminosidade L e medimos o fluxo f podemos assim inferir a sua distância, que quando calculada por este método é chamada *distância de luminosidade* (que será analisada em detalhes na seção 5.3). Um grande problema para o uso deste método é caracterizar os objetos, denominados *vela-padrão*, cuja luminosidade intrínseca é conhecida. Diversas classes de vela-padrão vêm sendo estudadas como ferramenta de determinação de distâncias. As estrelas variáveis *Cefeidas* são extremamente úteis para este uso. Estas têm a curiosa propriedade de pulsar, variando a sua luminosidade de forma periódica. A característica principal destas estrelas foi notada em 1912 pela astrônoma Henrietta Leavitt no observatório de Harvard. Foi observado que quanto maior a luminosidade, menor era o seu período de pulsação, estabelecendo assim uma relação período-luminosidade que pode ser calibrada (a partir de distâncias obtidas por paralaxe). Desta forma, a medição de *Cefeidas* próximas é útil para estabelecer a relação fundamental (distância-luminosidade) que é posteriormente utilizada para medir distâncias às estrelas ainda mais afastadas. Como citamos antes, Edwin Hubble utilizou esta relação para

ampliar enormemente o conhecimento humano sobre a extensão do universo. A existência de uma diversidade de galáxias, além da nossa, estendeu nossa escala de medição para centenas de Mpc distantes (a vizinhança galáctica). Uma segunda relação, que utiliza a eq. (5.4) para inferir distâncias a partir da luminosidade intrínseca de galáxias espirais foi estabelecida na década de 1970 por Brent Tully e Ricky Fisher. A *relação Tully-Fisher* relaciona a velocidade de rotação de galáxias e sua luminosidade intrínseca. A velocidade de rotação é medida através do redshift interno das galáxias, e observa-se que quanto maior a rotação desta maior é sua luminosidade.

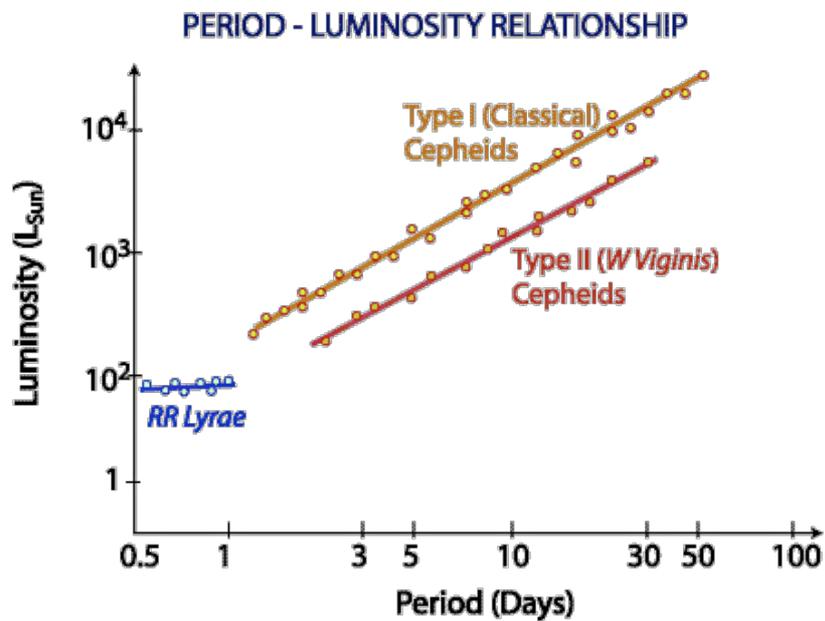


Figura 5.2 Relação distância-luminosidade para estrelas variáveis cefeidas.

Devido à maior luminosidade associada a uma galáxia, seu alcance observacional será nitidamente maior que os obtidos com as estrelas cefeidas. Apesar do grande alcance, o exame de curvas de rotação de galáxias distantes ainda exhibe um grande erro intrínseco em suas medições. A obtenção de um vela padrão (ou padronizável), suposta mais confiável, foi obtida somente a partir da observação de supernovas tipo Ia. O fator chave para este feito foi o estabelecimento (por Phillips [46] em 1993) de uma relação entre o decaimento da curva de luz e a luminosidade máxima destas supernovas. Devido à sua intensa luminosidade, que pode comumente ofuscar uma galáxia inteira, e ainda o estabelecimento de métodos mais precisos de padronização destes objetos, o uso de supernovas Ia é atualmente uma das ferramentas mais utilizadas para a determinação de

distâncias em escala cosmológica. Estes objetos são capazes de alcançar distâncias de dezenas de gigaparsecs. Com um aparato de calibração observacional estabelecido, devemos agora nos voltar à análise teórica destas distâncias num contexto mais geral, onde a geometria pode apresentar desvios da isotropia e pode expandir-se. Em especial, nas seções seguintes iremos definir diferentes distâncias, cuja determinação será compatível com a escala cosmológica.

5.2 Distância Própria

Ao analisarmos distâncias em cosmologia, precisamos levar em conta que vivemos num espaço-tempo 4-dimensional em expansão. Se queremos medir uma distância entre dois objetos, devemos especificar em qual instante se quer sabê-la. Supondo um observador na origem do sistema de coordenadas, ao observarmos um objeto com coordenadas comoveis (que se movem junto à expansão) dadas por (r, θ, φ) , a *distância própria* $d_p(t)$ em certo instante de tempo t é definida como o comprimento espacial da geodésica quando o fator de escala é fixado no tempo em determinado valor $a(t)$ (e assim $dt = 0$). Calculando esta distância na métrica FLRW, temos

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (5.5)$$

Se observarmos, digamos, uma galáxia em uma posição angular θ e φ , os termos $d\theta$ e $d\varphi$ são nulos e, conseqüentemente, podemos escrever

$$ds^2 = a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad (5.6)$$

de onde definimos a parte positiva da raiz como a distância própria (d_p):

$$d_p(t) \equiv a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}, \quad (5.7)$$

Se fazemos a transformação de coordenadas

$$r = f_k(\chi), \quad (5.8)$$

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \text{sen}\chi, & \text{se } k = +1 \\ \chi, & \text{se } k = 0 \\ \text{senh}\chi, & \text{se } k = -1 \end{cases}, \quad (5.9)$$

resolvemos a equação (5.7), obtendo num instante t uma relação simples para a distância própria:

$$d_p(t) \equiv a(t)\chi. \quad (5.10)$$

Devido ao fato de nos encontrarmos num universo em expansão, a luz proveniente de diferentes fontes sofre um desvio em seu espectro (redshift), que é proporcional a sua distância. A lei de Hubble pode ser obtida de forma explícita ao derivarmos em relação ao tempo a equação (5.10). Neste caso obtemos a velocidade de recessão de um objeto, que será

$$v_p(t) = \dot{d}_p(t) \equiv \dot{a}(t)\chi, \quad (5.11)$$

e que pode ser reescrita, usando-se a (5.10), como

$$v_p(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d_p(t). \quad (5.12)$$

Se analisamos no instante da observação, $t = t_0$, e lembrando que $H = \dot{a}/a$, ficamos com a relação

$$v_p(t_0) \equiv H_0 d_p(t_0), \quad (5.13)$$

que é justamente a lei de Hubble.

A distância própria pode ser reescrita a partir da equação (5.7), como

$$d_p(t_0) \equiv a(t_0) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = a(t_0) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (5.14)$$

e assim a distância própria pode ser determinada em termos do fator de escala:

$$d_p(t_0) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{a(t_0)}{a(t)} dt. \quad (5.15)$$

É fato que a luz deve propagar-se com velocidade constante, e assim, a depender de sua posição no universo, uma determinada radiação emitida num instante t_e pode não ter tido

tempo suficiente para atingir um observador na Terra no instante t_0 . Se indicamos $t_e = 0$, a distância máxima que um objeto apresentará, é

$$d_{Hor}(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{a_0}{a(t)} dt, \quad (5.16)$$

que é conhecida como *distância de horizonte*, para a qual objetos mais distantes estão casualmente desconectados do observador.

Devido à facilidade em medir o redshift (z) no espectro dos diferentes objetos astronômicos, é útil obtermos a distância própria em função deste parâmetro. Já vimos que podemos relacionar

$$dz = -(1+z)H(z)dt, \quad (5.17)$$

e também

$$1+z = \frac{a_0}{a}. \quad (5.18)$$

Substituindo as relações (5.17) e (5.18) na eq. (5.15), e sabendo que $t_0 \rightarrow z = 0$ e $t_e \rightarrow z$, temos

$$d_p(t_0) = \int_z^0 \frac{-(1+z)}{(1+z)H(z)} dz, \quad (5.19)$$

e assim ficamos com

$$d_p(t_0) = \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz', \quad (5.20)$$

que define explicitamente uma relação entre a distância própria num determinado instante e o parâmetro de Hubble $H(z)$, o qual já vimos (Cap. 3 e Cap. 4) ser função do modelo cosmológico. Esta relação será usada na próxima seção para a determinação da distância de luminosidade.

5.3 Distância de Luminosidade

A partir do fluxo de uma fonte esférica, definido pela eq. (5.4), já vimos que é possível inferir a distância a objetos cuja luminosidade intrínseca L é conhecida. Desejamos agora calcular explicitamente uma relação entre os parâmetros cosmológicos e esta distância. Se invertemos a equação (5.4), temos:

$$d_L = \sqrt{\frac{L_0}{4\pi f}} . \quad (5.21)$$

A distância d_L seria equivalente à distância própria se o universo fosse plano e estático, e neste caso teríamos

$$L = L_0 , \quad (5.22)$$

onde L é a luminosidade emitida e L_0 é a luminosidade observada. Como a potência luminosa é dada por

$$L = \frac{E}{\Delta t} , \quad (5.23)$$

para corrigirmos este termo em função da expansão do universo deveremos ter uma luminosidade modificada por algum fator que deverá depender do fator de escala (ou do redshift).

Devido à dependência da energia do fóton com o seu comprimento de onda, podemos escrever

$$E = \frac{h}{\lambda} . \quad (5.24)$$

Conhecendo a relação

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a} , \quad (5.25)$$

e usando também a relação entre fator de escala e redshift, (5.18), teremos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z . \quad (5.26)$$

Assim, vemos que a energia que o fóton tinha no tempo de sua emissão terá diminuído, quando observada, por um fator $\sim 1 + z$, dado por

$$E = \frac{E_e}{1+z}. \quad (5.27)$$

Um outro aspecto a ser analisado é a diferença entre o tempo de emissão e observação deste fóton. O tempo observado será modificado devido à dilatação temporal. Se dois fótons são emitidos separados por um intervalo de tempo Δt_e , no instante da detecção sua separação temporal será

$$\Delta t_0 = \Delta t_e (1+z), \quad (5.28)$$

uma vez que a dilatação é proporcional ao fator de escala. Desta forma a relação entre a luminosidade emitida e a observada ficará

$$\frac{L_0}{L} = \frac{E_0}{\Delta t_0} \frac{\Delta t}{E} = \frac{E_0}{\Delta t(1+z)} \frac{\Delta t}{E_0(1+z)}, \quad (5.29)$$

e assim ficamos com

$$L_0 = \frac{L}{(1+z)^2}, \quad (5.30)$$

e desta forma o fluxo se relacionará com a luminosidade através de

$$f = \sqrt{\frac{L}{4\pi d_p^2 (1+z)^2}}. \quad (5.31)$$

Consequentemente, podemos relacionar as distâncias por

$$d_L = (1+z)d_p. \quad (5.32)$$

Se desejamos generalizar este resultado para o caso com curvatura, obtemos a relação modificada por (5.8) e (5.9), ficando com

$$d_L = a_0(1+z)f_k(\chi), \quad (5.33)$$

ou, usando (5.10) e (5.20):

$$\chi = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (5.34)$$

Usando (5.33), (5.34) e (5.9), podemos finalmente explicitar a distância de luminosidade (d_L) para os casos fechado ($k = +1$), plano ($k = 0$) e aberto ($k = -1$), respectivamente como

$$d_L = a_0(1+z) \operatorname{sen} \left[\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (5.35)$$

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (5.36)$$

$$d_L = a_0(1+z) \operatorname{senh} \left[\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (5.37)$$

Que, em função do parâmetro de curvatura, assumem a forma

$$|\Omega_{k,0}| \equiv \frac{1}{H_0^2 a_0^2}, \quad (5.38)$$

$$a_0 = \frac{1}{H_0 |\Omega_{k,0}|^{1/2}}. \quad (5.39)$$

Podemos ainda escrever explicitamente, usando também a definição de $E(z) \equiv H(z)/H_0$,

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0 |\Omega_{k,0}|^{1/2}} \operatorname{sen} \left[|\Omega_{k,0}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (5.40)$$

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (5.41)$$

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0 |\Omega_{k,0}|^{1/2}} \operatorname{senh} \left[|\Omega_{k,0}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (5.42)$$

que é uma função explícita dos parâmetros cosmológicos.

5.4 Distância diâmetro-angular em FLRW

Se desejamos analisar objetos cosmológicos, ao invés de usarmos um astro cuja luminosidade intrínseca é conhecida seria igualmente útil conhecermos algum corpo cujo diâmetro seja bem determinado. Este objeto forneceria um diâmetro padrão com o qual poderíamos calcular sua distância, denominada neste caso de *distância diâmetro-angular*.

Se temos no céu um objeto cujo comprimento padrão é igual a l , que será observado num plano perpendicular à nossa linha de visão e cujas extremidades perfazem um ângulo $d\theta$ quando visto da Terra, e se supomos uma geometria euclidiana, a distância a tal objeto pode ser computada pela relação simples

$$d_A \equiv \frac{l}{d\theta}, \quad (5.43)$$

definida como *distância diâmetro-angular*. Mais uma vez vemos que, se o universo é isotrópico e estático, teríamos uma correspondência direta com a distância própria.

Se observamos um objeto cujas extremidades possuam as coordenadas $(\chi, \theta_1, \varphi)$ e $(\chi, \theta_2, \varphi)$ e supomos uma métrica curva em FLRW, a distância entre estas extremidades no momento da emissão será

$$\frac{dl}{d\theta} = a(t_e) f_k(\chi). \quad (5.44)$$

Assim, a distância diâmetro-angular pode ser escrita como

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{a_0 f_k(\chi)}{1+z}. \quad (5.45)$$

Ao compararmos com a distância de luminosidade, usamos a equação (5.33) para escrever

$$\frac{d_A}{d_L} = \frac{1}{(1+z)^2}, \quad (5.46)$$

e se reduzimos ao caso sem curvatura ($k=0$), usando também a equação (5.32), relacionamos as distâncias por

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} = \frac{d_p}{1+z}, \quad (5.47)$$

onde notamos que as diferentes relações para distâncias são somente obtidas porque vivemos num universo em expansão. Vemos que estas relações se reduzem ao mesmo valor

$$d_A = d_L = d_p, \quad (5.48)$$

se estamos no mesmo referencial que os objetos observados ($z=0$).

Para escrever explicitamente as relações, em função do redshift e dos parâmetros cosmológicos, para a distância diâmetro-angular, usamos as equações (5.47), (5.33) e (5.34) para obter

$$d_A = \frac{1}{(1+z)H_0|\Omega_{k,0}|^{1/2}} \operatorname{sen} \left[|\Omega_{k,0}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (5.49)$$

$$d_A = \frac{1}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (5.50)$$

$$d_A = \frac{1}{(1+z)H_0|\Omega_{k,0}|^{1/2}} \operatorname{senh} \left[|\Omega_{k,0}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (5.51)$$

para os casos com curvatura positiva ($k = +1$), nula ($k = 0$) e negativa ($k = -1$) respectivamente. A medição de distâncias a partir das relações de distância diâmetro-angular apresentam dificuldades operacionais, uma vez que são necessários telescópios ainda mais potentes que os atuais para resolver estruturas com diminuta largura angular, associado às imensas distâncias envolvidas. Além disso, a determinação de um objeto astrofísico viável às observações em escala cosmológica ainda não foi obtido.

5.5 Módulo de distância

A escala de luminosidade usada na astronomia não é simples e tem sua utilização vinculada a motivações históricas. No *Almagesto* de Ptolomeu, datado de 140 d.C, este apresentou, fundamentado no trabalho de Hipparco, uma escala de classificação de magnitude (ou grandeza) para as diferentes estrelas. A classificação em magnitudes impunha uma escala com 6 níveis entre as estrelas mais brilhantes do céu e as menos luminosas. Este sistema de classificação persiste até os dias atuais, porém, devido a sua intrínseca imprecisão, esta escala em geral é substituída por um sistema de classificação logarítmica, proposto (não por acaso) pelo astrônomo Pogson em 1856, onde

$$m_1 - m_2 = K \log_{10} \frac{F_1}{F_2}. \quad (5.52)$$

Aqui, m_i é a magnitude aparente e F_i é o fluxo luminoso. Como Pogson pôde medir o fluxo, através de um fotômetro recém-inventado, de diferentes estrelas, ele constatou que

estrelas de magnitude 1 possuíam fluxo luminoso cerca de 100 vezes maior que as de magnitude 6. Desta forma obtemos a constante de proporcionalidade,

$$1 - 6 = K \log_{10} 100, \quad (5.53)$$

e assim $K = -2.5$, definindo a escala usual

$$m = -2.5 \log_{10} F + c, \quad (5.54)$$

na qual o termo $c \equiv 2.5 \log_{10} F_0$ define o zero da escala. O fluxo luminoso neste caso depende da distância de luminosidade d_L .

A magnitude aparente m não diz muito sobre a luminosidade do astro, já que objetos mais próximos nitidamente terão maiores luminosidades observadas. Para melhor estudar diferentes objetos, define-se a *magnitude absoluta*

$$M = -2.5 \log_{10} F(10pc) + c, \quad (5.55)$$

e assim M é a magnitude aparente de um astro se este estivesse a uma distância de 10 pc do observador. Se definimos agora uma outra relação, dada pela diferença entre a magnitude aparente e absoluta, ficaremos com

$$m - M = 2.5 \log_{10} \frac{F(10pc)}{F(d_L)}. \quad (5.56)$$

Usando a relação para o fluxo luminoso, dado pela eq. (5.4) (sendo L a potência luminosa emitida), teremos

$$m - M = 2.5 \log_{10} \left[\frac{L/4\pi 10^2}{L/4\pi d_L^2} \right], \quad (5.57)$$

o que nos dará

$$m - M = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L}{10pc} \right]. \quad (5.58)$$

Em unidades mais convenientes à cosmologia (Mpc), temos

$$m - M = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L}{10^{-5} Mpc} \right] \quad (5.59)$$

$$= 5 \log_{10} \left[\frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right] + 25, \quad (5.60)$$

ou ainda

$$\mu \equiv 5 \log_{10} \left[\frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right] + 25, \quad (5.61)$$

onde definimos $\mu \equiv m - M$ como o módulo de distância. Usando agora as relações para a distância de luminosidade obtidas em (5.40), (5.41) e (5.42), ficamos com as expressões extremamente úteis

$$\mu_{(k=+1)} \equiv 5 \log_{10} \left[\frac{(1+z)}{H_0 |\Omega_{k,0}|^{1/2}} \text{sen} \left[|\Omega_{k,0}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \text{Mpc}^{-1} \right] \right] + 25 \quad (5.62)$$

$$\mu_{(k=0)} \equiv 5 \log_{10} \left[\frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \text{Mpc}^{-1} \right] + 25 \quad (5.63)$$

$$\mu_{(k=-1)} \equiv 5 \log_{10} \left[\frac{(1+z)}{H_0 |\Omega_{k,0}|^{1/2}} \text{senh} \left[|\Omega_{k,0}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \text{Mpc}^{-1} \right] \right] + 25. \quad (5.64)$$

5.6 Distâncias em RTKO

A métrica FLRW representa o máximo de simetria do espaço, ou seja, sua geometria é isotrópica e seu conteúdo homogêneo. Por outro lado, a métrica RTKO que desejamos estudar é anisotrópica. Para que seja possível obtermos as expressões para distâncias neste caso, é preciso analisar cuidadosamente quais as modificações implicadas. Vimos no capítulo 4 que a métrica RTKO é descrita, em coordenadas esféricas, pelo elemento de linha

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\theta^2 - \text{sen}^2 \theta d\varphi^2] \quad (5.65)$$

Ao definirmos a distância diâmetro-angular para o caso FLRW, usamos

$$d_A = \frac{ds}{d\theta}, \quad (5.66)$$

onde ds é a distância entre as extremidades de um objeto, a qual está associada a um ângulo $d\theta$. Podemos ainda definir a diâmetro-angular usando um ângulo sólido e a área associada para calcular a distância

$$d_{2A} = \left[\frac{dA_p}{d\Omega} \right]^{1/2}, \quad (5.67)$$

onde A_p indica uma área própria e $d\Omega$ representa o ângulo sólido ($d\Omega = \text{sen } \theta d\theta d\varphi$). É possível mostrar que esta definição leva à mesma distância diâmetro-angular (no caso isotrópico) que (5.66). Ao usarmos a área infinitesimal em FLRW,

$$dA_p = dx dy, \quad (5.68)$$

com

$$dx = a\chi d\theta, \quad (5.69)$$

$$dy = a\chi \text{sen } \theta d\varphi, \quad (5.70)$$

e

$$dA_p = a^2 \chi \text{sen } \theta d\theta d\varphi, \quad (5.71)$$

a métrica FLRW nos fornecerá

$$d_{2A} = \sqrt{\frac{a^2 \chi^2 d\Omega}{d\Omega}}, \quad (5.72)$$

$$d_{2A} = a\chi = d_A, \quad (5.73)$$

como queríamos mostrar.

Ao analisarmos a métrica RTKO, a distinção com a métrica FLRW é evidente quando observamos o termo angular $\text{sen}^2(\chi \text{sen } \theta)$. Devido a este fator, o ângulo de observação θ irá modificar sensivelmente o valor da distância medida se usamos a equação

(5.66). Esta discrepância pode ser eliminada se definimos a distância diâmetro-angular

(5.72). Neste caso teremos

$$dx = a\chi d\theta, \quad (5.74)$$

$$dy = a \operatorname{senh}[\chi \operatorname{sen}\theta] d\varphi. \quad (5.75)$$

O elemento de área fica

$$dA_p = a^2 \chi \operatorname{senh}[\chi \operatorname{sen}\theta] d\theta d\varphi, \quad (5.76)$$

e agora, dividindo pelo ângulo sólido, temos

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = \frac{a^2 \chi \operatorname{senh}[\chi \operatorname{sen}\theta] d\theta d\varphi}{\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi}. \quad (5.77)$$

A distância diâmetro-angular fica então

$$d_{2A} = a \left[\frac{\chi \operatorname{senh}[\chi \operatorname{sen}\theta]}{\operatorname{sen}\theta} \right]^{1/2}, \quad (5.78)$$

onde o ângulo θ tem a variação usual $0 < \theta < \pi$. Se expressamos a (5.78) em função do redshift, ficamos com

$$d_{2A} = \frac{a_0}{1+z} \left[\frac{\chi \operatorname{senh}[\chi \operatorname{sen}\theta]}{\operatorname{sen}\theta} \right]^{1/2}, \quad (5.79)$$

ou

$$d_{2A} = \frac{a_0 \chi}{1+z} \left[\frac{\operatorname{senh}[\chi \operatorname{sen}\theta]}{\chi \operatorname{sen}\theta} \right]^{1/2}. \quad (5.80)$$

Se definimos o termo

$$Z(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (5.81)$$

e usando também a (5.39), a equação (5.34) fica

$$\chi = |\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) , \quad (5.82)$$

e finalmente reescrevemos a distância como

$$d_{2A} = \frac{Z(z)}{(1+z)H_0} \left[\frac{\sinh[|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta]}{|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta} \right]^{1/2} . \quad (5.83)$$

que define a expressão para a distância diâmetro-angular para a métrica RTKO.

Se agora desejamos obter a expressão para a distância de luminosidade, teremos, da equação (5.47),

$$d_L = \frac{(1+z)Z(z)}{H_0} \left[\frac{\sinh[|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta]}{|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta} \right]^{1/2} . \quad (5.84)$$

Para avaliar a consistência, vemos que, quando $\lim_{\chi \rightarrow 0} d_L$, temos

$$\sinh[|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta] \rightarrow |\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta , \quad (5.85)$$

e a distância de luminosidade se reduz à distância de luminosidade para um universo plano, descrito pela métrica FLRW,

$$d_L = \frac{(1+z)Z(z)}{H_0} , \quad (5.86)$$

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} . \quad (5.87)$$

Na métrica RTKO, o módulo de distância ficará então

$$\mu_{RTKO} \equiv 5 \log_{10} \left[\frac{(1+z)Z(z)}{H_0} \left(\frac{\sinh\{|\Omega_{k,0}|^{\frac{1}{2}} \text{sen}\theta Z(z)\}}{|\Omega_{k,0}|^{\frac{1}{2}} Z(z) \text{sen}\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + 25 . \quad (5.88)$$

Capítulo 6

Ajuste Observacional

Este capítulo é dedicado ao ajuste observacional dos modelos cosmológicos estudados. Utilizamos medições de luminosidade de Supernovas do tipo Ia como método de inferência de distâncias. A análise dos parâmetros cosmológicos que melhor se adequam aos dados é realizada a partir de uma inferência Bayesiana, cuja interpretação probabilística é mais adequada no contexto da cosmologia. Esta análise é fundamentada na obra póstuma de Thomas Bayes (1793) e foi posteriormente desenvolvida e popularizada por Laplace. Ao longo deste capítulo, utilizaremos esta ferramenta estatística para comparar os modelos Λ CDM e os modelos de quintessência, tanto na métrica isotrópica FLRW como na métrica anisotrópica RTKO. Objetiva-se com isso conceber relações e distinções entre o universo curvo(e anisotrópico) sujeito a uma energia escura que esteja submetido à evolução dinâmica do campo escalar.

6.1 Estatística Bayesiana

A teoria Bayesiana fornece uma análise estatística que possibilita uma inferência probabilística *a priori* de determinado fenômeno. O contínuo aumento de complexidade das teorias físicas requer gradualmente um exame estatístico mais refinado. Diversos resultados físicos estão limitados a esta análise. É comum confrontar-se a estatística *frequentista* e a *Bayesiana*. A primeira fundamenta-se na ideia de definir a probabilidade de um dado evento ocorrer a partir da razão entre a ocorrência e o número total de

eventos, no limite em que este vai ao infinito. No contexto desta interpretação a probabilidade de certo evento é explicada como a observação de determinada propriedade em meio a uma quantidade imensa de medições. Apesar de hegemônica em diversos campos, a interpretação frequentista não se adequa à descrição de diversos fenômenos. Ao afirmar-se, por exemplo, que existe uma chance de 50% de um bebê nascer do sexo feminino, neste caso não está sendo levado em conta fatores biológicos (ambientais, etc) que podem modificar este valor. Além disso, uma vez que somente um bebê nascerá, o conceito de 50% de probabilidade fica pobremente definido, pois não existirão infinitos eventos à serem contabilizados, ou seja, o bebê será gerado e nascerá somente uma vez. Se tentamos aplicar este tipo de interpretação para a cosmologia, também ficaria pouco apropriado, uma vez que não temos infinitos universos em laboratório, sobre o qual podemos realizar repetidamente as medições.

A interpretação Bayesiana afirma que probabilidade é um grau de confiança ao analisarmos determinada medição, parâmetro ou hipótese. A análise de probabilidade é diretamente associado aos dados coletados, onde é interpretada como um grau de conhecimento sobre determinado evento. A inferência de Bayes introduz um grau de subjetividade, que reflete o grau de conhecimento prévio sobre os parâmetros antes da realização do experimento. Esta é a chamada informação *a priori* ou *prior* (do inglês). O teorema de Bayes pode ser aplicado, tanto para o caso discreto como para distribuições contínuas. O resultado obtido por este encerra, dentre outros êxitos, a facilidade de relacionar a ocorrência e não ocorrência de um ou vários eventos conhecendo-se a probabilidade de alguns destes. A probabilidade (p) de um evento (x), designada por $p(x)$ é sempre positiva. Com uma normalização, a probabilidade total de ocorrência de certo evento deverá ser normalizada, de modo que para o caso discreto, tenhamos

$$P = \sum_{i=1}^N p(x_i) = 1, \quad (6.1)$$

e para um caso contínuo

$$P = \int p(x)dx = 1, \quad (6.2)$$

onde P é a probabilidade combinada (total) dos eventos. Se diferentes eventos (x_i) possuem probabilidade independente de se realizar, a probabilidade total dos eventos é

$$P(x_1 \cup x_2) = P(x_1) + P(x_2), \quad (6.3)$$

Enquanto a probabilidade de ocorrência de um evento (x_1) vinculado a existência de outro evento (x_2) é dado por:

$$P(x_1, x_2) = P(x_1)P(x_2|x_1), \quad (6.4)$$

onde $P(x_2|x_1)$ é a probabilidade que x_2 ocorra, condicional à ocorrência de x_1 . Como também podemos escrever para o caso inverso,

$$P(x_2, x_1) = P(x_2)P(x_1|x_2), \quad (6.5)$$

que são iguais $P(x_2, x_1) = P(x_1, x_2)$. Se por conveniência substituirmos $x_1 \rightarrow D$ e $x_2 \rightarrow H$, fica definido a relação do teorema de Bayes por

$$P(H, D) = \frac{P(H)P(D|H)}{P(D)}, \quad (6.6)$$

onde associamos D com os dados e H com a hipótese (referente aos modelos). O termo $P(H)$ é o *Prior*, no qual estão impressas as informações conhecidas *a priori*. O termo $P(D)$ nos dá o fator de normalização enquanto $P(D|H)$ é a probabilidade, geralmente denominada *Likelihood*. A probabilidade *a posteriori* (ou posterior) pode ser atualizada a partir de uma dependência com os dados (D) ou pela modificação do *Prior*.

6.1.1 Minimização de erros

A inferência estatística Bayesiana tem como objetivo a estimativa de parâmetros. Esta inferência parte da comparação de uma curva (ou predição) teórica com dados observacionais. O método largamente utilizado na ciência para a obtenção dos valores que melhor representam determinada grandeza é o *método dos mínimos quadrados* (ou *método do χ^2*). Neste método iremos definir o parâmetro

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_o(z_i) - \mu_t(z_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (6.7)$$

onde N representa o número total de dados observados (z_i, μ_t) . Cada z_i está associado a um erro σ_i que serve como um peso estatístico para cada medida. Para fins de aplicação à cosmologia, o termo $\mu_t(z_i|\theta)$ definirá o modelo teórico usado, em função dos observáveis (z_i) e dos parâmetros do modelo (θ) , enquanto o termo $\mu_o(z_i)$ define o valor medido para cada observável. Na análise de supernovas Ia, cada evento z_i é comparado aos valores preditos através do módulo da distância (ver cap. 5.4 e 5.5). Neste contexto, os erros destas medições são decompostos por

$$\sigma_i^2 = \sigma_{\mu,i}^2 + \sigma_{z,i}^2 + \sigma_{sist,i}^2, \quad (6.8)$$

ou seja, dependem da determinação do módulo de distância, do redshift e o dos erros sistemáticos envolvidos. Em geral, supõe-se que a probabilidade será dada por uma distribuição Gaussiana. A maior probabilidade (*best-fit*¹) estará relacionada aos parâmetros que levam aos menores valores do χ^2 .

Uma vez conhecido o conjunto de parâmetros que melhor se ajustam aos dados observacionais, definimos *níveis de confiança* sobre os quais podemos estimar a probabilidade de se encontrar o melhor valor encerrado nestes limites. Os intervalos de confiança para os parâmetros são definidos por uma analogia a uma propriedade de uma *pdf* gaussiana unidimensional, ou seja,

$$p(x) \sim \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma}\right), \quad (6.9)$$

que possui valor central em x_0 e uma variância σ . A probabilidade total, para o caso unidimensional, contida em determinado intervalo é

$$\int_{x_0-1\sigma}^{x_0+1\sigma} p(x)dx = 68,27\%, \quad (6.10)$$

¹ Usaremos *best-fit* para designar os melhores parâmetros.

$$\int_{x_0-2\sigma}^{x_0+2\sigma} p(x)dx = 95,45\%, \quad (6.11)$$

$$\int_{x_0-3\sigma}^{x_0+3\sigma} p(x)dx = 99,73\%, \quad (6.12)$$

e assim os níveis 1σ , 2σ e 3σ , expressam as probabilidades 68,3%, 95,45% e 99,73% de que o valor real do parâmetro esteja nestes intervalos. Num espaço multivariado os contornos sigma dependem do número de parâmetros livres do ajuste. Estes valores são mostrados na tabela 6.1.

Níveis	Probabilidade	Nº de parâmetros livres		
		1	2	3
1σ	68,3%	1,00	2,30	3,53
2σ	95,45%	4,00	6,17	8,02
3σ	99,73%	9,00	11,8	14,2

Tabela 6.1: definições dos contornos, para diferentes níveis de confiança e quantidade de parâmetros

Para uma análise da qualidade da inferência, é usado o χ_r^2 (*Chi quadrado reduzido*), definido por:

$$\chi_r^2 \equiv \frac{\chi^2}{\nu}, \quad (6.13)$$

onde tanto melhor será o modelo, quanto mais próximo de 1 estiver o χ_r^2 . O termo ν se refere ao número de graus de liberdade. Em nosso caso ν é a diferença entre quantidade de supernovas medidas e o número de parâmetros livres. Este parâmetro serve como uma aplicação da *Navalha de Occham*, a qual privilegia modelagens teóricas mais simples (e.g., com menos parâmetros).

6.1.2 Marginalização

Embora o conceito de marginalização possa ser aplicado em todo o domínio estatístico, o pleno poder deste método é explorado a partir de um contexto Bayesiano.

Devido a crescente quantidade de proposições e parâmetros nos modelos cosmológicos a marginalização é uma ferramenta de grande utilidade. Quando diversas hipóteses são consideradas, o teorema de Bayes (6.6) pode fornecer a probabilidade de um evento, dada uma evidência de que determinado conjunto de hipóteses seja verdade. Se temos uma probabilidade multivariada e se uma lista de possíveis hipóteses é conhecida podemos usar a técnica de marginalização. Esta técnica leva em conta a probabilidade de ser observado D sob cada conjunto H . Supondo, e.g., os parâmetros cosmológicos usuais $\theta \equiv \{\Omega M, \Omega k, h\}$, onde as variáveis são contínuas, a probabilidade marginalizada será definida por

$$P(\Omega M) = \iint P(\Omega M, \Omega k, h) dh d\Omega k, \quad (6.14)$$

se desejamos marginalizar os parâmetros Ωk e h . Obtemos assim uma probabilidade que somente depende da variável ΩM^2 .

6.2 Ajuste observacional em Supernovas Ia

Utilizamos o conjunto de dados fornecido pelo SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), que fornece um total de 288 supernovas padronizadas a partir do método MLCS2k2. Os modelos comparados foram o Λ CDM espacialmente plano ($k = 0$) e os modelos de Quintessência aqui denominados ϕ CDM_{FRW} e o ϕ CDM_{RTKO}. Ao proceder com a análise do χ^2 , utilizamos as definições para o módulo de distância dadas no capítulo 5. Além disso, podemos também comparar os resultados aqui alcançados com os obtidos por [68] para o Λ CDM_{RTKO}. Para caso da métrica anisotrópica, escolhemos fazer uma análise com a média angular do módulo de distância. Apresentamos inicialmente as soluções, analisando a influência de cada parâmetro. Em seguida apresentamos os valores de *best-fit* para os modelos, assim como os contornos das curvas de nível do χ^2 . Analisamos também a possibilidade de uma anisotropia nos modelos. Após a sumarização dos resultados dos modelos estudados, fazemos uma discussão destes resultados.

² Neste Capítulo será utilizada a notação ΩM como equivalente a $\Omega_{m,0}$

6.2.1 Λ CDM em FLRW ($k=0$)

Através de uma análise com 2 parâmetros livres, $\theta = \{\Omega M, h\}$, obtivemos um *best-fit* para o Λ CDM com um $\chi^2 = 239.928$, com $\Omega M = 0.4 \pm 0.1$ (2σ) e um parâmetro de Hubble $h = 0.64 \pm 0.02$ (2σ). O parâmetro de desaceleração, calculado com os parâmetros do best-fit é $q_0 = -0.39$. Os gráficos na figura 6.1 e 6.2, relacionam como os parâmetros do modelo afetam as funções de interesse cosmológico

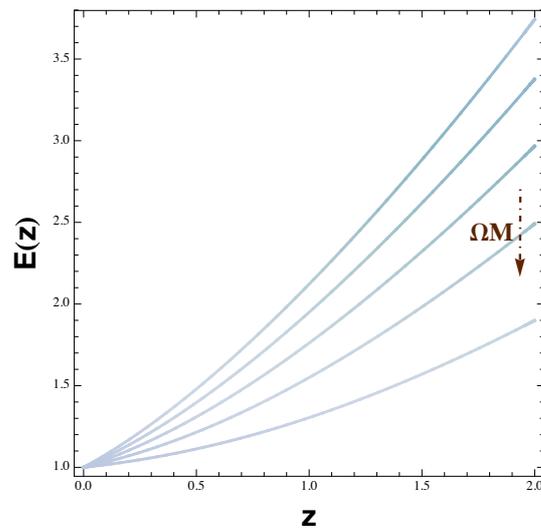


Figura 6.1: A função adimensional $E(\Omega M, \Omega k, z)$ para diferentes parâmetros ΩM , onde fixamos $\Omega k \equiv 0$ no modelo o Λ CDM.

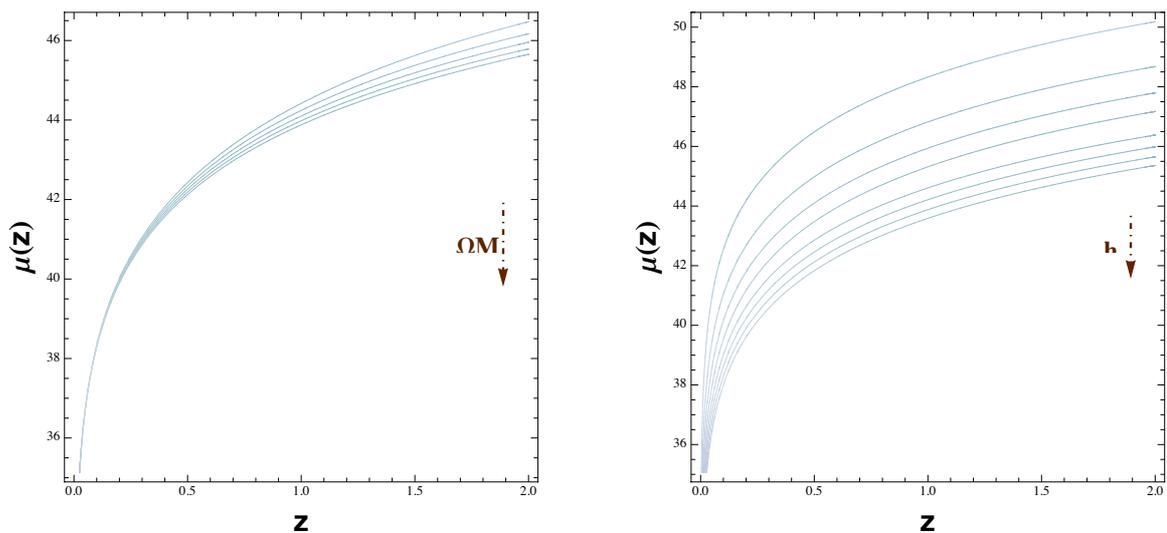


Figura 6.2: O módulo de distância $\mu(\Omega M, h, z)$ para diferentes parâmetros de densidade de matéria (à esquerda), para diferentes h (à direita) onde fixamos, $h \equiv 0.7$ (à esquerda) e $\Omega M \equiv 0.3$ (à direita) respectivamente para o Λ CDM plano

Com a análise do modelo padrão (Λ CDM) e de seu *best-fit*, temos um conjunto de dados, os quais podem ser usados para comparações com os modelos que desejamos estudar. Em geral, para os modelos estudados, o módulo de distância segue uma dependência similar. Os contornos do χ^2 são apresentados na figura 6.3a e 6.3b. para Ω_M e h livres. Vemos nestes casos que as observações de supernovas Ia, limitam fortemente os parâmetros cosmológicos. Na figura 6.4 apresentamos a curva do módulo de distância, usando o *best-fit* do modelo estudado e a comparamos com os dados do pacote SDSS e seus erros.

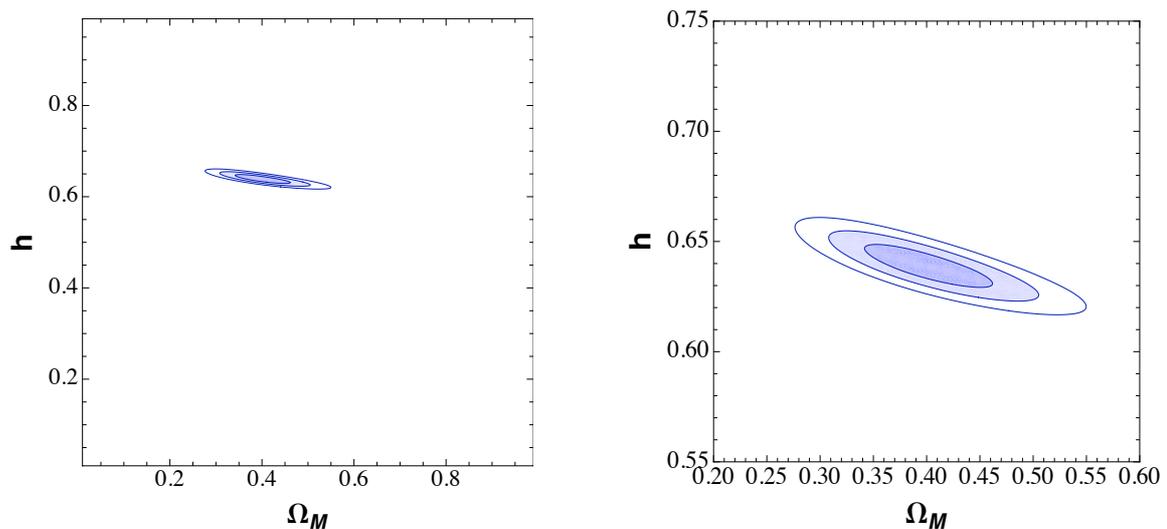


Figura 6.3 Contornos do χ^2 (h versus Ω_M) para o modelo Λ CDM plano.

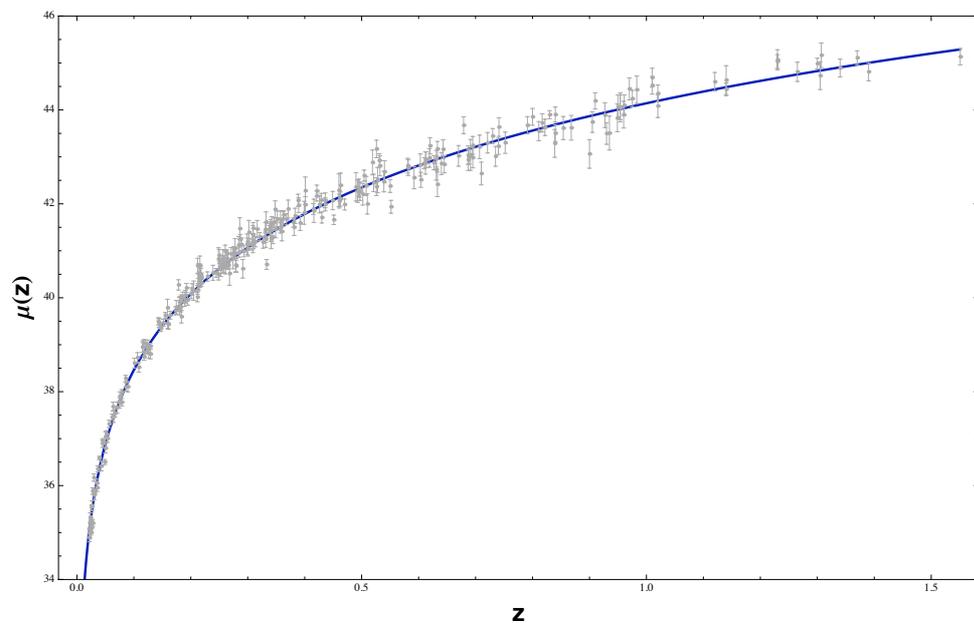


Figura 6.4: O módulo de distância, $\mu(z)$ teórico(para os parâmetros de *best-fit*), e o conjunto de supernovas Ia do SDSS.

6.2.2 ϕ CDM em FLRW($k=0$)

Antes de prosseguir com a análise estatística, façamos alguns comentários sobre as soluções numéricas encontradas e o comportamento físico do sistema sob estas soluções. Um parâmetro adicional dos modelos de quintessência caracterizado por (M), esta presente no potencial do campo escalar:

$$V(\phi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\phi^\alpha}, \quad (6.15)$$

Para o cálculo da função $E(z)$, fizemos uma integração numérica da equação de Friedmman, definida em (3.99) e da equação de Klein-Gordon (3.100). O valor de M é calculado numericamente, para cada conjunto de parâmetros de forma que o parâmetro de Hubble adimensional satisfaça $E(0) = 1$. O valor M fica determinado em conjunto com os parâmetros cosmológicos, ao obtermos o *best-fit*. Nos modelos ϕ CDM, utilizamos o potencial escalar Ratra-Peebles(6.15) e ajustamos os dados para $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Como nao pretende-se analisar fisicamente o fluido de ‘quintessência, em si, deste ponto em diante omitiremos o parâmetro M e nos referiremos ao parâmetros de interesse cosmológico. Nas secções a seguir, apresentaremos os resultados e posteriormente faremos uma análise destes, na seção 6.3.

Aplicamos o modelo de quintessência à métrica FLRW espacialmente plana. Os parâmetros empregados foram $\theta = \{\Omega_M, h\}$, obtivemos um *best-fit* para $\alpha = 1$ com um $\chi^2 = 240.245$, com $\Omega_M = 0.3_{-0.06}^{+0.11}$ (2σ) e um parâmetro de Hubble $h = 0.63_{-0.01}^{+0.02}$ (2σ). O parâmetro de desaceleração $q_0 = -0.29$. Nas figuras 6.5a e 6.5b apresentamos as curvas de nível do χ^2 para este modelo.

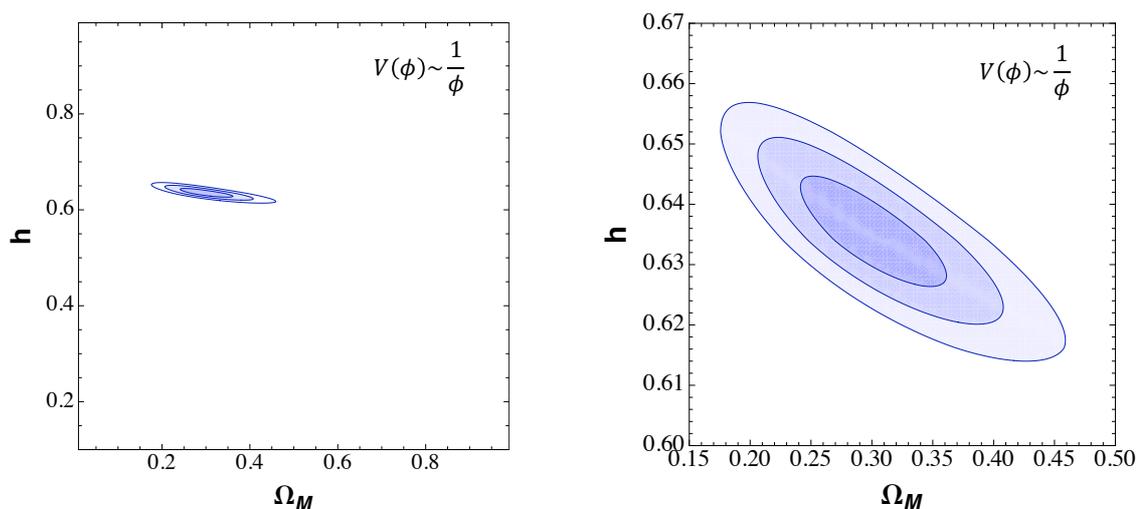


Figura 6.5: Contornos do χ^2 (h versus Ω_M) para o modelo ϕ CDM, $\alpha = 1$.

O *best-fit* para $\alpha = 2$ foi encontrado para o $\chi^2 = 240.466$, com $\Omega_M = 0.23_{-0.09}^{+0.11}(2\sigma)$ e um parâmetro de Hubble $h = 0.63_{-0.01}^{+0.02}(2\sigma)$. O parâmetro de desaceleração $q_0 = -0.26$.

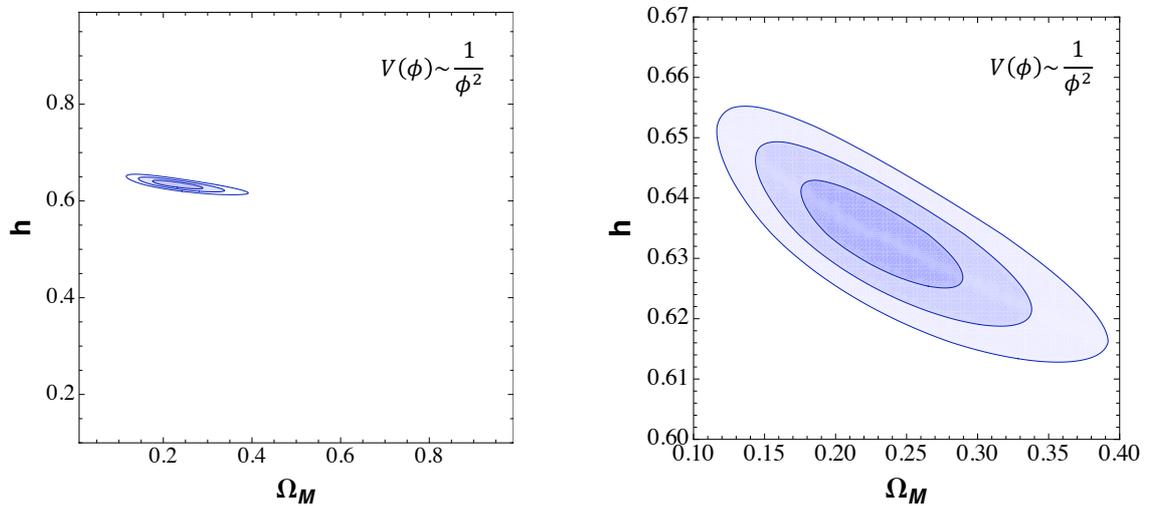


Figura 6.6: Contornos do χ^2 (h versus Ω_M) para o modelo ϕ CDM, $\alpha = 2$.

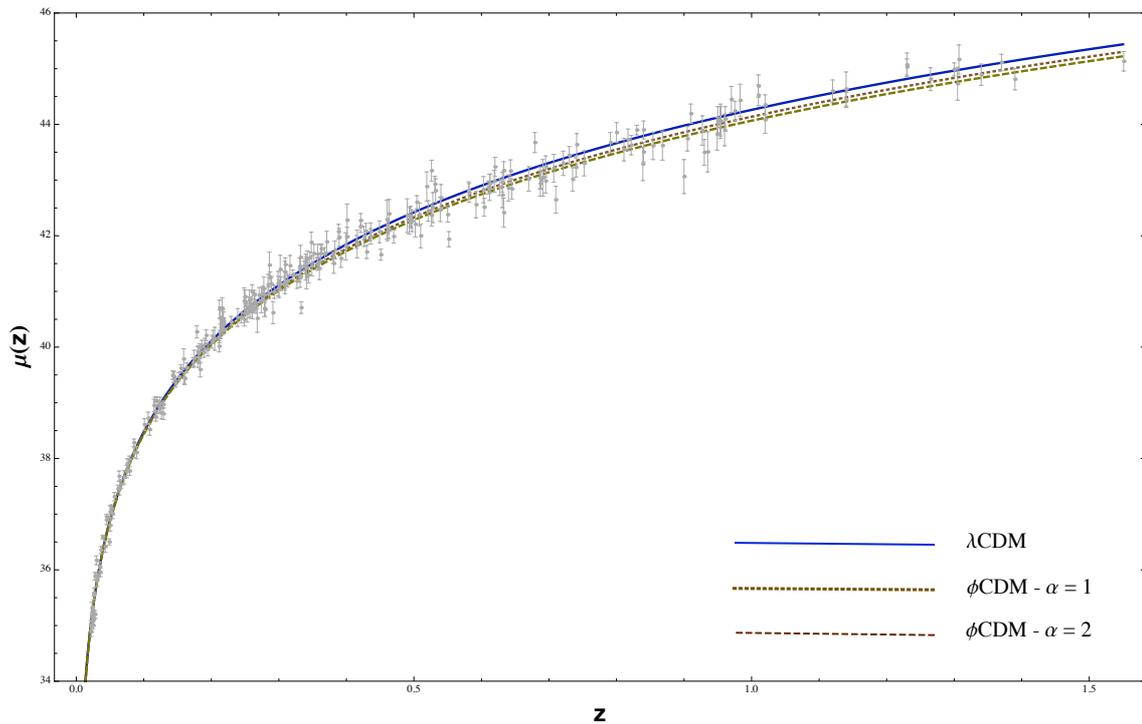


Figura 6.7: Comparações para o módulo de distância entre o Λ CDM em FLRW, ϕ CDM ($\alpha = 1$) e ϕ CDM ($\alpha = 2$) para um mesmo conjunto de parâmetros.

No gráfico 6.7 apresentamos uma comparação entre o modelo padrão e os modelos de quintessência, onde vemos uma tendência à curva do modelo padrão, ao diminuirmos o parâmetro α . No gráfico acima utilizamos o mesmo valor para a densidade de matéria

($\Omega_M \equiv 0.3$), para evidenciar a diferença no comportamento dos modelos ϕ CDM, com o potencial escalar Ratra-Peebles. No gráfico 6.8 mostramos as curvas (*best-fit*) para os modelos Λ CDM e ϕ CDM ($\alpha = 1$) e ϕ CDM ($\alpha = 2$), onde observamos uma superposição dos mesmos.

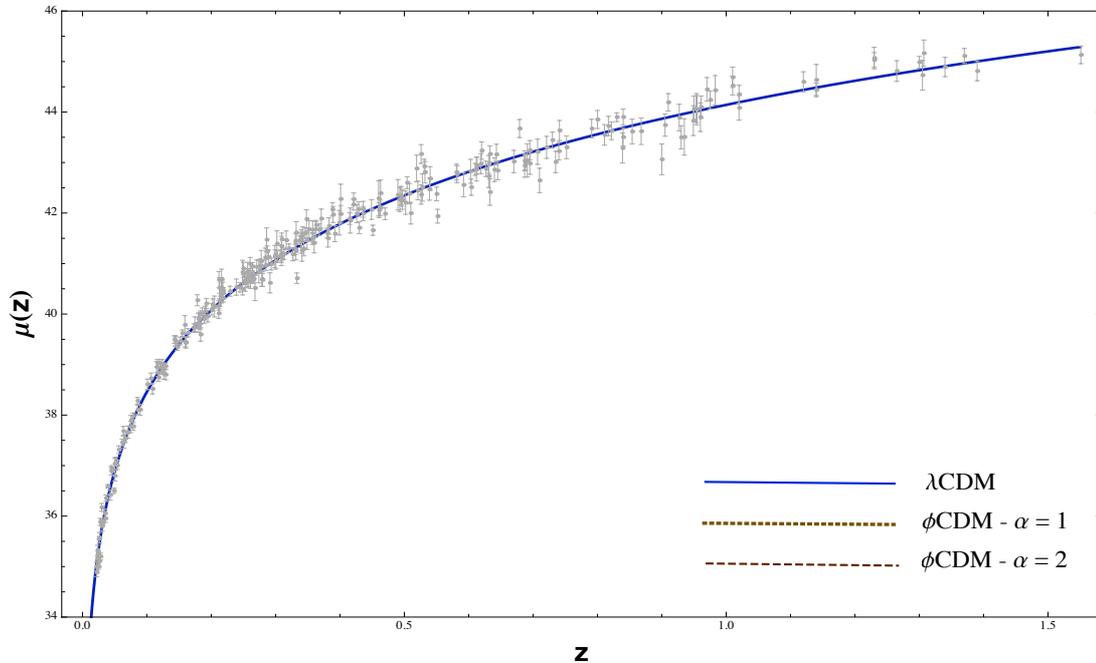


Figura 6.8: Módulo de distância entre o Λ CDM em FLRW, ϕ CDM ($\alpha = 1$) e ϕ CDM ($\alpha = 2$). Utilizamos neste caso o *best-fit* de cada modelo.

6.2.3 ϕ CDM em RTKO

Aplicamos agora os modelos de quintessência à métrica RTKO. Nos gráficos 6.9 e 6.10 apresentamos as curvas do χ^2 para cada par de parâmetros.

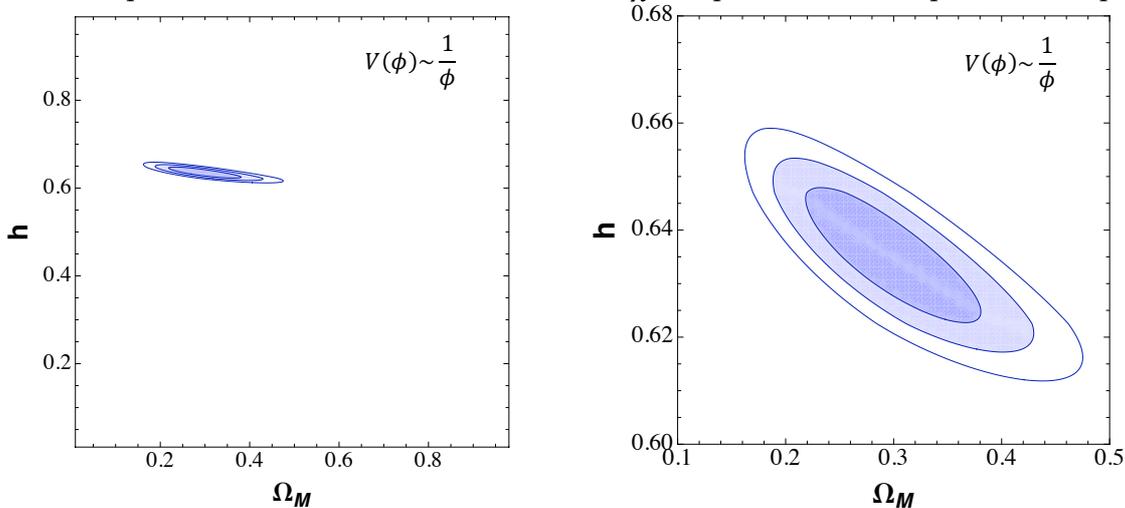


Figura 6.9: Contornos do χ^2 (h versus Ω_M) para o modelo ϕ CDM(RTKO), $\alpha = 1$.

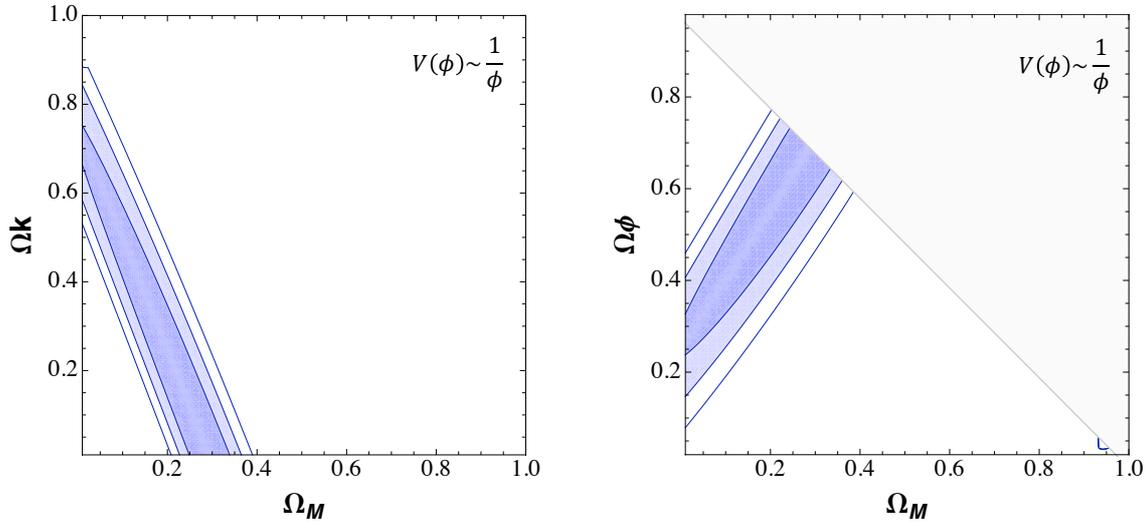


Figura 6.10: Contornos do χ^2 , Ωk versus ΩM (à esquerda) e $\Omega \phi$ versus ΩM (à direita) para o modelo $\phi\text{CDM}_{(\text{RTKO})}$, $\alpha = 1$.

No modelo modelo $\phi\text{CDM}_{(\text{RTKO})}$, ($\alpha = 1$), os parâmetros empregados foram $\theta = \{\Omega M, \Omega k, h\}$, onde lembramos que a métrica utilizada somente admite Ωk positivo (pois $k = -1/2$). Obtivemos um *best-fit* para o caso $\alpha = 1$ com um $\chi^2 = 240.8$, com $\Omega M = 0.29^{+0.14}_{-0.11}$ (2σ) e um parâmetro de Hubble $h = 0.64^{+0.02}_{-0.03}$ (2σ) e a curvatura $\Omega k = 0.01 \pm 0.4$ (2σ). O parâmetro de desaceleração $q_0 = -0.29$ (para os parâmetros do *best-fit*).

No modelo modelo $\phi\text{CDM}_{(\text{RTKO})}$, ($\alpha = 2$), obtivemos o *best-fit* para com um $\chi^2 = 241.1$, com $\Omega M = 0.23^{+0.15}_{-0.15}$ (2σ), parâmetro de Hubble $h = 0.63^{+0.03}_{-0.02}$ (2σ) e a curvatura $\Omega k = 0.01 \pm 0.4$ (2σ). O parâmetro de desaceleração $q_0 = -0.25$ (determinado com os parâmetros do *best-fit*).

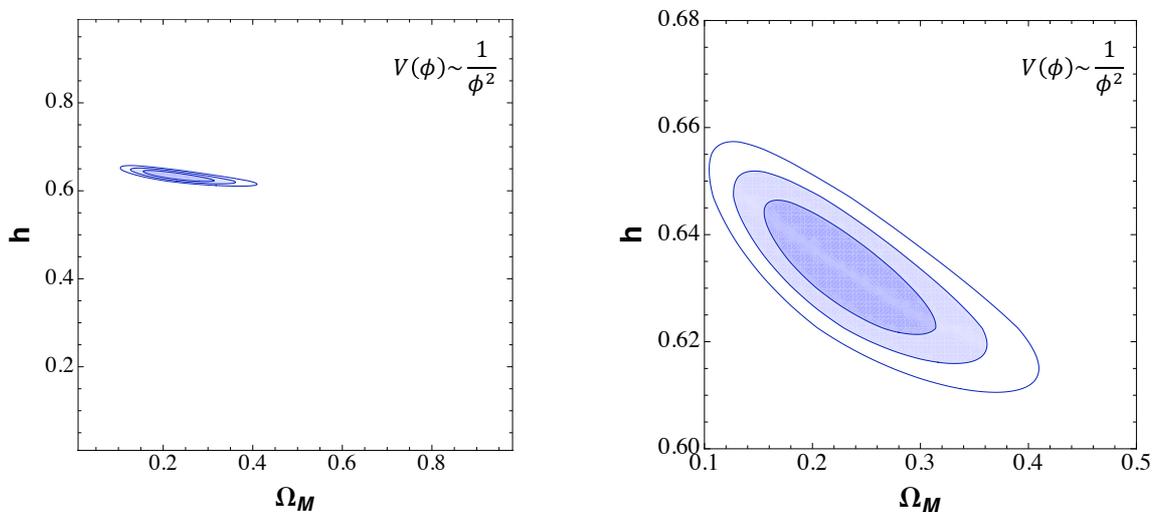


Figura 6.11: Contornos do χ^2 (h versus ΩM) para o modelo $\phi\text{CDM}_{(\text{RTKO})}$, $\alpha = 2$.

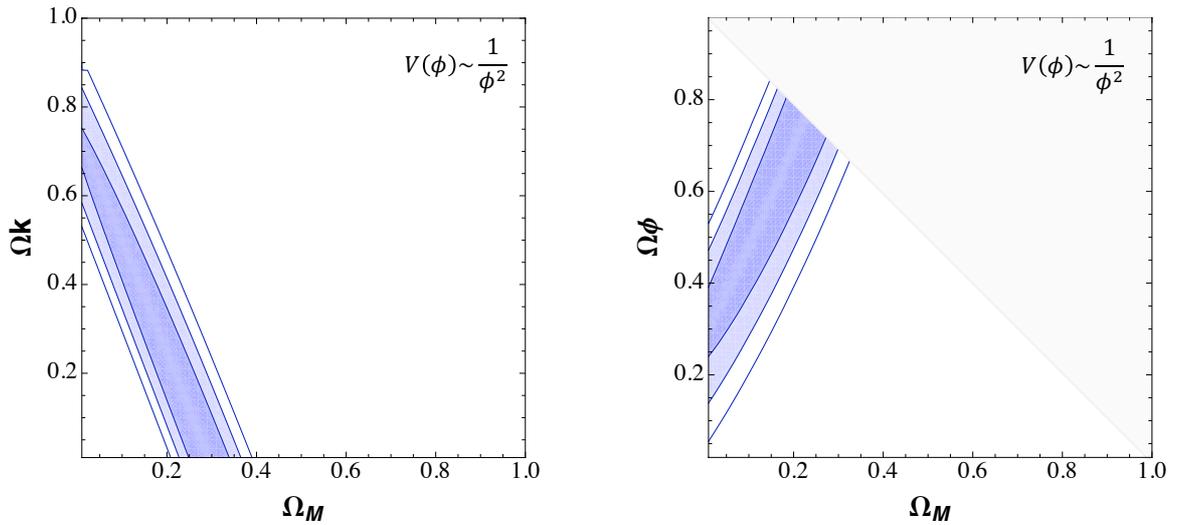


Figura 6.12: Contornos do χ^2 , Ω_k versus Ω_M (à esquerda) e Ω_ϕ versus Ω_M (à direita) para o modelo $\phi\text{CDM}_{(\text{RTKO})}$, $\alpha = 2$.

Nos gráficos 6.11 e 6.12 apresentamos as curvas de nível do χ^2 para os diferentes pares de parâmetros, ao analisarmos o modelo $\phi\text{CDM}_{(\text{RTKO})}$, ($\alpha = 2$).

6.3 Análise e Discussão

Nossos resultados estão na tabela 6.2. Na tabela 6.3 comparamos os resultados para o modelo ΛCDM (obtidos³ em [68]) e ϕCDM na métrica RTKO.

Modelo	Ω_M	Ω_k	Ω_ϕ	q_0	w_0
ΛCDM em FLRW	$0.4^{+0.1}_{-0.1}$	$\equiv 0$	0.6	-0.39	-1
$\phi\text{CDM}(\alpha = 1)$ em FLRW	$0.3^{+0.14}_{-0.11}$	$\equiv 0$	0.70	-0.29	-0.65
$\phi\text{CDM}(\alpha = 2)$ em FLRW	$0.23^{+0.15}_{-0.15}$	$\equiv 0$	0.77	-0.25	-0.5
$\phi\text{CDM}(\alpha = 1)$ em RTKO	$0.29^{+0.14}_{-0.11}$	$0.01^{+0.8}_{-0.8}$	0.70	-0.29	-0.65
$\phi\text{CDM}(\alpha = 2)$ em RTKO	$0.23^{+0.15}_{-0.15}$	$0.01^{+0.8}_{-0.8}$	0.76	-0.25	-0.5

Tabela 6.2: Melhores parâmetros (*best-fit*) para os modelos cosmológicos estudados

Dos dados apresentados vemos que os modelos de quintessência estudados tendem a retirar parte da densidade de energia do fluido de matéria, desta forma gerando uma densidade de energia escura maior que no modelo com constante cosmológica. Esta

³ Em [68], foi analisado o modelo ΛCDM com curvatura nas métricas FLRW e RTKO, utilizando supernovas Ia do SDSS(MLSC2K2)

diminuição parece estar associada ao fato que a energia escura de quintessência, suposta um campo escalar submetido ao potencial Ratra-Peebles, possui parâmetro de estado maior. Este depende diretamente do fator α , e que no caso $\phi\text{CDM}(\alpha = 1)$ apresenta o valor mínimo $w_0 = -0.65$ e $w_0 = -0.5$ para $\phi\text{CDM}(\alpha = 2)$. O fluido de quintessência produz assim uma pressão contrária a gravidade, de menor intensidade que no caso da constante cosmológica. Este fato pode explicar o aumento da densidade de energia desta componente, quando comparamos ao caso com constante cosmológica.

Métrica RTKO						
Modelo	$\Lambda\text{CDM}[68]$		$\phi\text{CDM}(\alpha = 1)$		$\phi\text{CDM}(\alpha = 2)$	
Nível	ΩM	Ωk	ΩM	Ωk	ΩM	Ωk
2σ (95,4%)	$0.38^{+0.1}_{-0.4}$	$0.045^{+0.6}_{-0.6}$	$0.29^{+0.14}_{-0.11}$	$0.01^{+0.4}_{-0.4}$	$0.23^{+0.15}_{-0.15}$	$0.01^{+0.4}_{-0.4}$

Tabela 6.3: Comparação para os melhores parâmetros dos modelos na métrica anisotrópica RTKO

Se comparamos os modelos de quintessência e constante cosmológica na métrica anisotrópica RTKO, vemos que o *best-fit* destes modelos possui menor densidade de energia associada à curvatura. Uma possível explicação deste fato pode ser concebida por dois mecanismos distintos. Um destes seria associar o menor valor de curvatura ao fato de que necessita-se maior densidade de energia escura para ajustar o módulo de distância aos dados de supernovas Ia, devido às distinções na equação de estado, como discutido anteriormente. Uma segunda possível explicação pode emergir ao notarmos que o fluido de quintessência possui uma energia que advém em parte do potencial e em parte da energia cinética do campo. Como a densidade de energia cinética do campo depende de um fator $\sim(1+z)^2\phi'^2$, é possível que a energia associada à curvatura tenha sido furtada pelo campo escalar de quintessência de forma a melhor ajustar a curva do módulo de distância, a partir de um comportamento associado a tal dependência.

6.3.1 Anisotropias

Os modelos estudados, como vimos, possuem uma métrica que admite a existência de um eixo preferencial no universo. A estrutura física deste eixo preferencial pode ser

modelada a partir de um campo escalar anisotrópico ψ que não depende do tempo (ver cap. 4). Como vimos, para o modelo anisotrópico a distância de luminosidade é dada por

$$d_L = \frac{(1+z)Z(z)}{H_0} \left\{ \frac{\sinh[|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta]}{|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta} \right\}^{1/2} \quad (6.16)$$

Vemos que na métrica RTKO a anisotropia depende diretamente da curvatura, uma vez que o argumento da raiz quadrada (assim como no argumento do seno hiperbólico), depende explicitamente deste parâmetro. O ajuste aqui realizado, analisou o conjunto de Supernovas Ia através de uma média sobre os valores angulares (θ), uma vez que durante o curso deste trabalho não dispúnhamos de dados de Supernovas Ia com dependência angular. Se analisamos o módulo de distância, temos

$$\mu_{RTKO} \equiv 5 \log_{10} \left[\frac{(1+z)Z(z)}{H_0} \left(\frac{\sinh\{|\Omega_{k,0}|^{1/2} \text{sen}\theta Z(z)\}}{|\Omega_{k,0}|^{1/2} Z(z) \text{sen}\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + 25 \quad (6.17)$$

Ao fazermos um gráfico para o módulo de distância para os valores angulares máximo ($\theta = \pi/2$) e mínimo ($\theta = 0$). A distinção do comportamento é dependente da curvatura adotada. Se ajustamos a densidade de curvatura para $\Omega k = 0.01$ não podemos observar as diferenças geradas (gráfico 6.13).

No gráfico 6.13 não é possível notar uma distinção entre as curvas teóricas indicadas. A comparação entre o modelo Λ CDM e ϕ CDM, na métrica RTKO, não produz diferenças significativas no que se refere a existência de uma anisotropia, ao supormos uma diminuta curvatura.

Nos gráficos 6.14 e 6.16, utilizamos o desvio relativo, para a dependência angular máxima ($\theta = \pi/2$) e mínima ($\theta = 0$), através da definição:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \equiv \frac{\mu(\theta=\pi/2) - \mu(\theta=0)}{\mu(\theta=0)} \quad (6.18)$$

onde fixamos o parâmetro $\Omega M \equiv 0.3$ e analisamos a dependência com Ωk . Vimos que a distinção entre as curvas, para cada valor angular é débil, somente se destacando para grandes valores de curvatura. Na figura 6.15 observamos que também na métrica RTKO, não é possível distinguir as curvas teóricas para o modulo de distância, para os valores angulares máximo ($\theta = \pi/2$) e mínimo ($\theta = 0$), se supomos um valor diminuto para a

curvatura. Na figura 6.17 evidencia-se as distinções entre o módulo de distância, da equação (6.17), obtido de uma média angular, quando comparado às curvas para o valor angular máximo ($\theta = \pi/2$) e mínimo ($\theta = 0$).

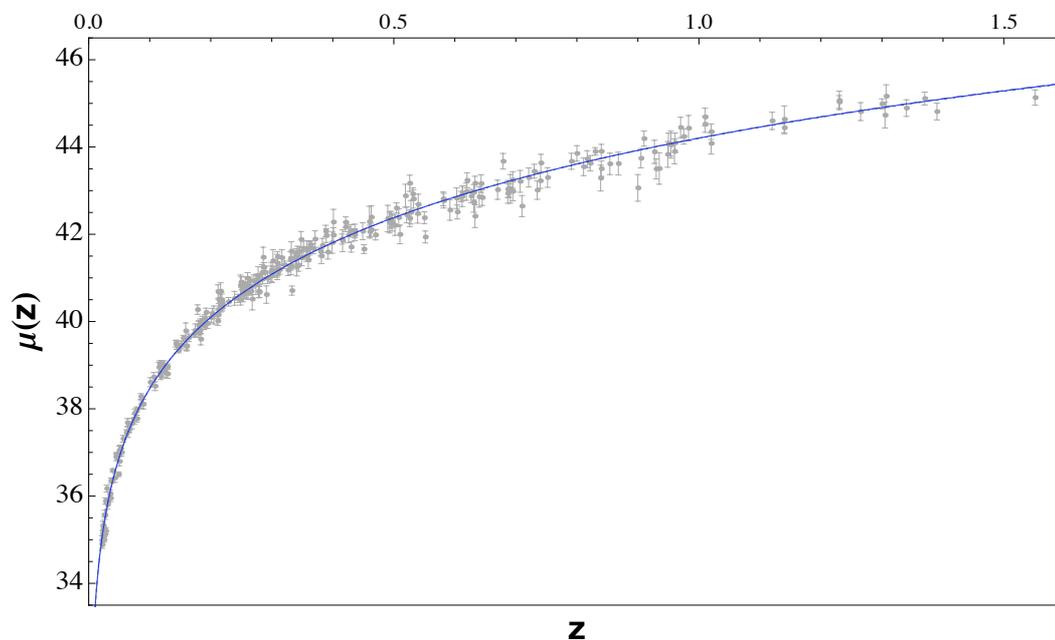


Figura 6.13: Curvas para a distância de luminosidade com valores de ângulo máximo ($\theta = \pi/2$), médio e mínimo ($\theta = 0$) no modelo Λ CDM ($\Omega k \equiv 0.01$) na métrica RTKO.

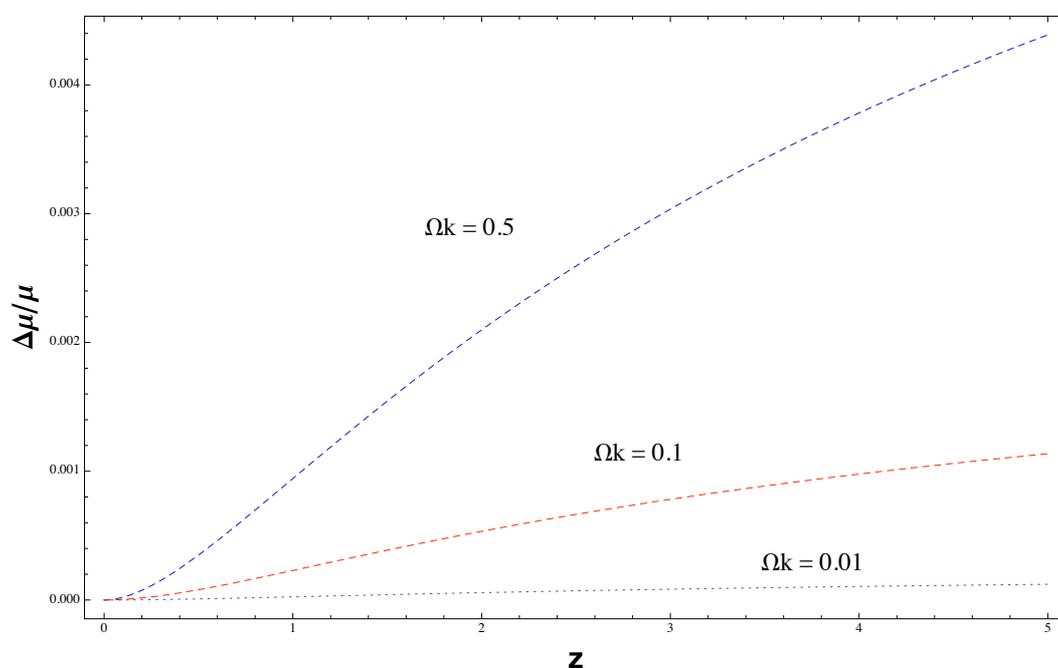


Figura 6.14: Diferentes curvas para o desvio relativo ($\Delta\mu/\mu$) entre o módulo de distância máximo ($\theta = \pi/2$) e mínimo ($\theta = 0$). Onde analisa-se o modelo Λ CDM na métrica RTKO.

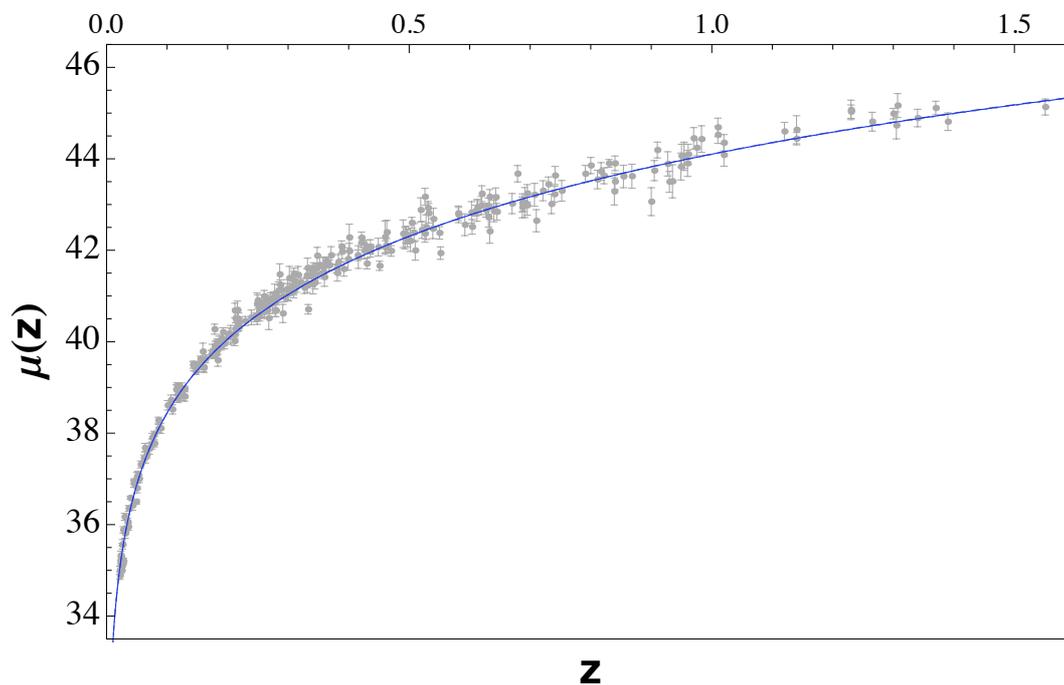


Figura 6.15: O valor máximo ($\theta = \pi/2$), médio e mínimo ($\theta = 0$) para o módulo de distância do modelo ϕ CDM ($\Omega k \equiv 0.01$) na métrica RTKO.

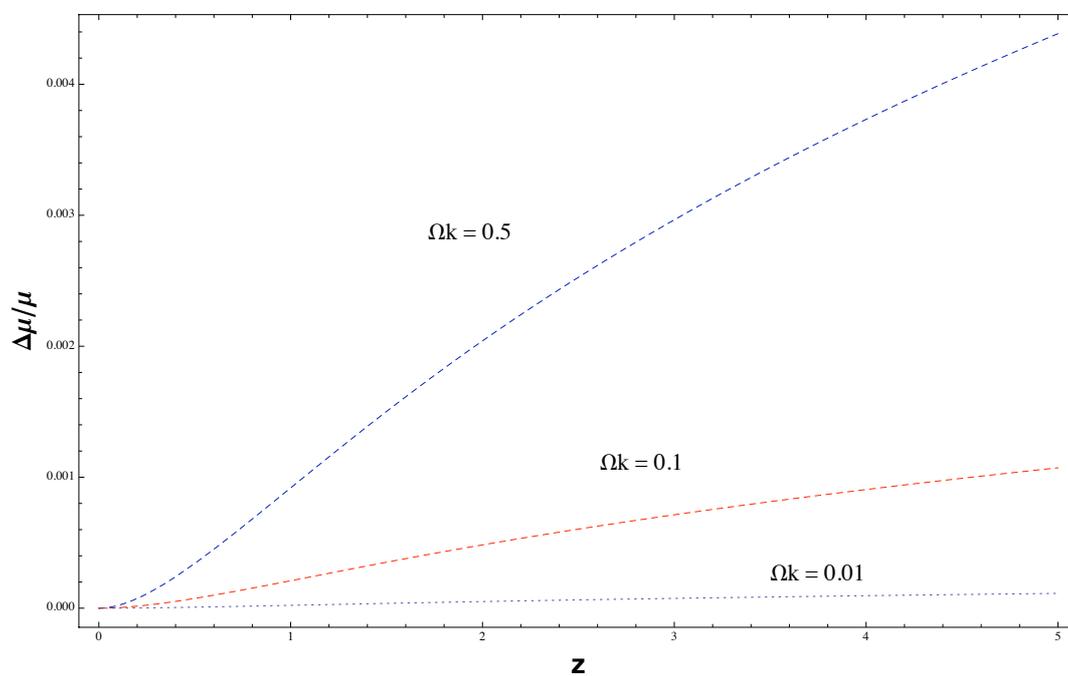


Figura 6.16: Diferentes curvas para o desvio relativo ($\Delta\mu/\mu$) entre o módulo de distância máximo ($\theta = \pi/2$) e mínimo ($\theta = 0$). Onde analisamos o modelo ϕ CDM na métrica RTKO.

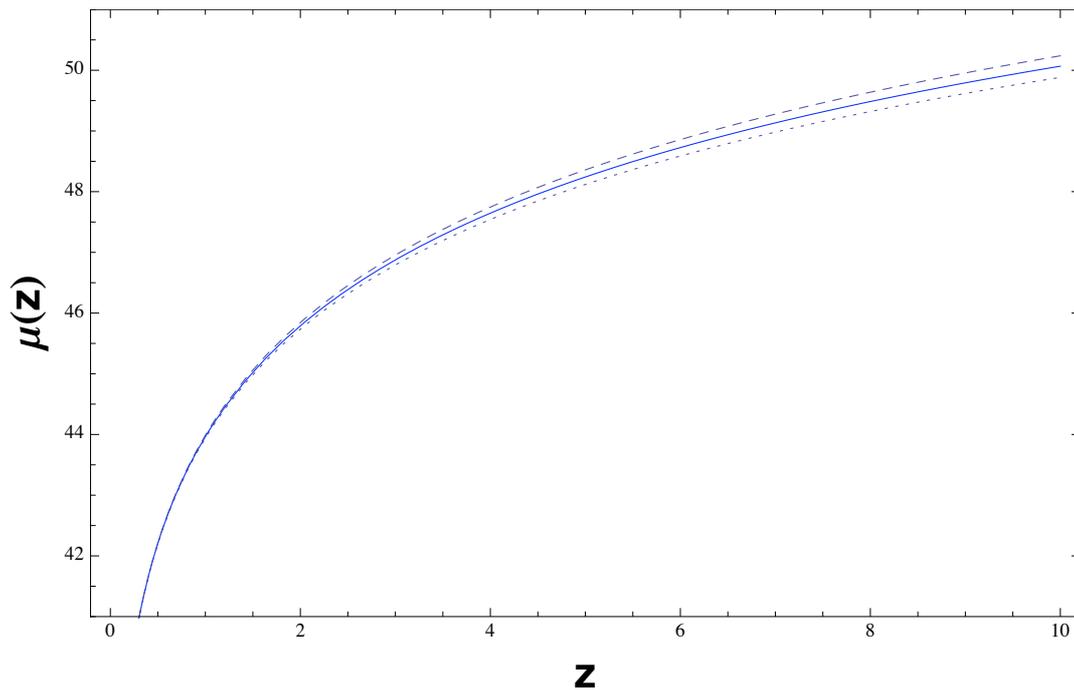


Figura 6.17: Curvas teóricas para o módulo de distância, fazendo $\Omega k \equiv 0.6$ (curvatura máxima em 2σ) e ao fixarmos $\theta = \pi/2$ (acima, curva tracejada) $\theta = 0$ (abaixo, curva pontilhada) e $\theta = \langle \theta \rangle$ (centro, curva regular), para a métrica RTKO.

Se desejamos analisar a anisotropia produzida pela curvatura da métrica RTKO, vemos que, seja num universo descrito por constante cosmológica ou pelo campo de quintessência, seria necessário um valor grande de curvatura, para que esta tornasse a anisotropia perceptível. Será necessário um aumento significativo em precisão e alcance para que os futuros projetos de medição de Supernovas Ia possam detectar tal anisotropia, se a analisamos suprimindo sua dependência angular. Se a análise é feita com dependência angular, vemos que surge a possibilidade de distinguirmos as curvas para grandes redshift. Mesmo supondo uma melhora razoável na precisão das medidas vemos que, para diferenciarmos uma dependência angular na métrica, seria necessário uma curvatura da ordem de $\Omega k \approx 0.5$, produzindo assim um universo com geometria aberta, fortemente curvado. Com a análise aqui apresentada não parece haver evidências a favor de tal descrição do universo. Por fim vimos que os modelos apresentados apresentaram boa concordância com os dados observacionais de supernovas Ia, ao utilizarmos o pacote de dados SDSS.

Capítulo 7

Conclusão

A possibilidade de construirmos infinitos modelos cosmológicos é um fato evidente das teorias físicas. Ao analisarmos cuidadosamente a estrutura do universo, através das mais variadas observações e técnicas de inferência, podemos restringir fortemente a diversidade destes modelos (ao menos no contexto da Relatividade Geral). O universo possui específicas leis naturais que regem sua evolução. Discutimos nos capítulos iniciais uma diversidade de observações que são realizadas para melhor entender e elucidar a estrutura deste universo, diversas outras observações foram aqui negligenciadas. Vimos que a Relatividade Geral fornece uma robusta ferramenta de análise do cosmos. A cosmologia moderna usa para tal propósito todo o arsenal da física moderna, inclusive ao englobar teorias associadas às mais ínfimas escalas. Elaboramos os aspectos principais que definem o modelo cosmológico conhecido como padrão. Neste modelo, vemos que grande parte da energia que compõe o cosmos é de origem desconhecida. O modelo apresenta uma coexistência de matéria, radiação e uma componente exótica simplesmente denominada de energia escura cuja descrição é realizada através de uma constante cosmológica Λ . Nesta dissertação consideramos a descrição desta energia escura através de uma componente de quintessência, que se distingue da constante cosmológica por possuir uma equação de estado dinâmica. Esta componente é descrita por um campo escalar submetido a um potencial, que como suposição, escolhemos ter uma dependência do tipo inverso da potência (Potencial Ratra-Peebles).

Modelos físicos descritos por campo escalar são de grande utilidade em diversas áreas da física, e essenciais na própria cosmologia, já que os modelos inflacionários são primordialmente modelados com tal componente. O modelo estudado possui a interessante propriedade, o fluido de quintessência possui uma evolução física que rastreia os fluidos de fundo durante grande parte da história cósmica, a quintessência *tracker*. Desta forma em eras recentes esta energia passa a dominar a evolução do universo através de um comportamento físico, possivelmente, mais natural que a constante cosmológica. Além de analisarmos a viabilidade de uma energia escura distinta da constante cosmológica, analisamos também quais seriam as consequências físicas desta componente evoluir num espaço-tempo anisotrópico. Utilizamos uma métrica com curvatura, que possui propriedades básicas concordantes com as observações mais vitais (como a isotropia da CMB), porém que possui um eixo de preferência em sua geometria.

Neste trabalho utilizamos supernovas do tipo Ia para examinar a possibilidade de modelos cosmológicos descritos por métrica anisotrópica e por uma forma de energia escura de quintessência, que é bastante distinta daquela que descreve o modelo padrão. Devido ao efeito repulsivo mais brando, os modelos de quintessência produzem um universo com densidade de matéria menor que nos modelos com Λ . De forma um pouco distinta dos modelos com Λ na métrica RTKO, os modelos de quintessência indicaram um menor valor para a curvatura porém, devido aos erros associados, identificamos que este modelo não exclui a anisotropia. O exame dos modelos alternativos aqui propostos produzem boa concordância com a análise de supernovas Ia. Apesar de apresentar hipóteses destoantes do modelo padrão, os modelos de quintessência em métrica anisotrópica descrevem de forma bastante satisfatória o universo. Com a presente análise não identificamos uma característica determinante que exclua a possibilidade de tal modelagem do cosmos. O estudo aqui realizado pretendia abranger os aspectos básicos do estudo dos modelos propostos. Devido à sua limitação, diversos aspectos observacionais e teóricos foram deixados de lado. As modelagens aqui tratadas possuem o importante objetivo de escrutinar um modelo, frente a grande diversidade de possibilidades teóricas, e suas motivações teóricas, em princípio mostram-se compatíveis com as observações.

Ao longo da história da construção da ciência pudemos, de uma certa forma, testemunhar como as motivações filosóficas, às vezes inerentes ao pensamento humano, influenciam fortemente nossas concepções e visões sobre a natureza. À época de Cristóvão Colombo diversos mapas haviam sido confeccionados descrevendo os continentes terrestres conhecidos, no entanto cada mapa construído por uma expedição diferente englobava uma certa região do planeta. A forma da Terra não podia ser definida, já que os mapas apresentados não eram capazes de delimitar uma geometria (ou uma topologia) específica para a Terra. Ainda não havia um mapa completo da superfície terrestre e assim diversas possibilidades eram factíveis com os dados da época. Podemos concluir este trabalho ao comparar a situação de Colombo com a que os cosmólogos e astrônomos vivem: o universo ao qual temos acesso é majoritariamente desconhecido e ainda não foi mapeado. Espera-se que a cosmologia possa viabilizar a elaboração de um mapa completo, não somente da geometria do universo mais da distribuição de suas estruturas, de sua composição e de uma forma ainda mais ambiciosa, de seu nascimento e evolução.

Bibliografia

- [1] Joseph Needham, with Wang Ling, *Science and Civilization in China*, Vol.3, Cambridge University Press 1959, p.171
- [2] A. Falkenstein, “The basic work on the earliest documents from Mesopotamia” (Berlin, 1936)
- [3] *A History of Science*, Vols 1–4, online text, Acessada em 17/05/2011
- [4] Metteli, P. *Treasures - The Central National Library of Florence - Sidereus Nuncius* (em inglês). The European Library. Visitada em 17/05/2011.
- [5] Cajori, F., *Historical and explanatory appendix to Isaac Newton’s Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*(University of California Press, 1966).
- [6] Kuhn, T. (1962), *The Structure of Scientific Revolutions*. The University of Chicago Press. pp. 24–25. ISBN 978-1443255448.
- [7] Weinberg, S (1972). *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley and Sons. pp. 185–201. ISBN 978-0-471-92567-5.
- [8] Einstein A. (1905) "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik* 17: 891;p
- [9] Einstein A. (1916), *Relativity: The Special and General Theory*, New York: H. Holt and Company
- [10] NASA, http://www.nasa.gov/mission_pages/gpb/, Visitada em 17/05/2011.
- [11] R. J. Gleiser et al., *Class Quantum Grav.* 23, 2653 (1982)
- [12] D. Lorenz, *J. Phys. A: Math. Gen.* 15, 2997 (1982).
- [13] A. Moussiaux et al., *J. Phys. A: Math. Gen.* 14, L277 (1981)
- [14] M. J. Rebouças and J. Tiomno, *Phys. Rev. D*, 28, 1251 (1983).

- [15] Yu. N. Obukhov, in Colloquium on Cosmic Rotation, edited by M. Scherfner, T. Chrobok and M. Shefaat, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin(2000).
- [16] V. A. Korotkii and Yu. N. Obukhov, *Sov. Phys. JETP* 72, 11 (1991).
- [17] S. Carneiro and G. Marúgan, *Phys. Rev. D* 64, 083502 (2001)
- [18] B. Ratra, P. J. E. Peebles, , Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field, *Phys. Rev. D*, 37, 3406 (1988)
- [19] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999)
- [20] Dalrymple, G. Brent (2001). "The age of the Earth in the twentieth century: a problem (mostly) solved". Special Publications, Geological Society of London 190 (1):
- [21] Mortlock, D., "A luminous quasar at a redshift of $z = 7.085$ " *Nature* 474, 616–619 (30 June 2011) doi:10.1038/nature10159
- [22] Harrison, E. R. (1987) *Darkness at Night: A Riddle of the Universe*, Harvard University Press.
- [23] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Ed. Addison Wesley (2003).
- [24] S. Serjeant, *Observational Cosmology*, Cambridge U. Press, New York, 2010.
- [25] Slipher, V.M., 1917, "Nebulae," *Proceedings of the American Philosophical Society*, Vol. 57, p. 403-409
- [26] Hubble, E.P. 1929, *Publ. Nat. Acad. Sci.*, 15, 168
- [27] Zwicky, F. 1929. On the Red Shift of Spectral Lines through Interstellar Space. *PNAS* 15:773-779
- [28] Mould, J. R., et al. 2000a, *ApJ*, 529, 786
- [29] Lemaitre, G., *Nature*, 127, 706 (1931).
- [30] Gamow, G., *J. Wash. Acad. Sci.* 32, 353 (1942).
- [31] Gamow, G., *Phys. Rev.* 70, 572 (1946).
- [32] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press (2003).

- [33] Smoot G. F., Bennett C. L., Kogut A, Wright EL, Aymon J, et al. 1992. *Ap. J. Lett.* 396:L1-L5
- [34] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons. pp. 495–464. ISBN 978-0471925675.
- [35] Hoyle, F.; Burbidge, G.; Narlikar, J. V. (1993). "A quasi-steady state cosmological model with creation of matter". *The Astrophysical Journal* 410: 437–457.
- [36] R. A. Alpher and R. Herman, "On the Relative Abundance of the Elements," *Physical Review* 74 (1948),
- [37] Penzias AA, Wilson RW. 1965. *Ap. J.* 142:419-421
- [38] Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, <http://map.gsfc.nasa.gov/>, acessada em 17/07/2011
- [39] Komatsu, E. et al. (2009a)
- [40] Zwicky, F. (1933). "Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln". *Helvetica Physica Acta* 6: 110–127.
- [41] Zwicky, F. (1937). "On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae". *Astrophysical Journal* 86: 217 .
- [42] Begeman K. G., Broeils A. H., Sanders R. H., Extended rotation curves of spiral galaxies; Dark haloes and modified dynamics, *MNRAS*, 1991, vol. 249, p. 523
- [43] Milgrom, M. (1983) *Astrophys. J.* 270 365
- [44] Arnett D. (1996). *Supernovae and Nucleosynthesis*. Princeton: Princeton Univ. Press
- [45] A.V. Filippenko. Optical spectra of supernovae. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 35:309-355, 1997. <http://nedwww.ipac.caltech.edu/>.
- [46] M.M. Phillips. The absolute magnitudes of type ia supernovae. *Astrophysical Journal*, 413:105-108, 1993. SAO/NASA ADS:1993ApJ...413L.105P.
- [47] K. Nomoto et al. Thermal stability of white dwarfs accreting hydrogen-rich mat-

- ter and progenitors of type ia supernovae. *Astrophysical Journal*, 663:1269, 2007.
arXiv:astro-ph/0603351v2.
- [48] W. Hillebrandt e J.C. Niemeyer. Type ia supernova explosion models. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38:191-230, 2000. arXiv:astro-ph/0006305v1.
- [49] C. M. Pigozzo, *Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro*, Tese de Doutorado, IF-UFBA (2010).
- [50] P. J. E Peebles and Bharat Ratra, 'Cosmology with a time-variable cosmological constant', *apJ*, 1988, 1-4.
- [51] Weinberg, D.H., Dekel, A. & Ostriker, J.P., 1989, *ApJ*, 336, 9
- [52] H. A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* 37 (2005) 1385.
- [53] Caldwell, R.R. (2000) 'An Introduction to Quintessence', *Brazilian Journal of Physics*, 1-15.
- [54] Wetterich, C. (2001), 'Quintessence-the Dark Energy in the Universe?', <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0110211v1>>.
- [55] J. D. Barrow and S. Cotsakis, *Phys. Lett. B* 214, 515 (1988); K. I. Maeda, *Phys. Rev. D* 39, 3159 (1989).
- [56] N. Arkani-Hamed, P. Creminelli, S. Mukohyama and M. Zaldarriaga, *Ghost inflation*, *JCAP* 0404, 001 (2004) [arXiv:hep-th/0312100].
- [57] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration, *Phys. Rev. Lett.* 85, 4438 (2000) [arXiv:astro-ph/0004134].
- [58] C. Armendáris-Picón, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, Essentials of k-essence, *Phys. Rev. D* 63, 103510 (2001) [arXiv:astro-ph/0006373].
- [59] Paul J Steinhardt, Limin Wang and Ivaylo Zlatev, 'Cosmological Tracking Solutions', arXiv, astro-ph (1998) <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9812313v1>>.

- [60] Ivaylo Zlatev, Limin Wang and Paul J Steinhardt, 'Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant', arXiv, astro-ph (1998) <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9807002v2>>.
- [61] Jasmin, Pielorz, Quintessence models with tracking behaviour, PHD thesis, (2003)
- [62] Koivisto et al., 'On the Possibility of Anisotropic Curvature in Cosmology'(2010), arXiv, astro-ph.CO <<http://arxiv.org/abs/1006.3321v1>>.
- [63] Brett Bochner, 'Looking for signs of Anisotropic Cosmological Expansion in the High-z Supernova data', arXiv, astro-ph (2007) <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0702730v1>>.
- [64] Joao Magueijo and Kate Land, 'Is the universe odd?', 2005, 1-5.
- [65] Kate Land and Joao Magueijo, 'The axis of evil', arXiv, astro-ph (2005) <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0502237v2>>.
- [66] Kate Land and Joao Magueijo, 'The Axis of Evil revisited', arXiv, astro-ph (2006) <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611518v2>>.
- [67] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation, Ed. W. H. Freeman and Company – San Francisco (1973).
- [68] Menezes, Roberto, Carneiro, Saulo 'Relações Distância-redshift e Testes de Supernova Ia para um Modelo de Cosmológico Anisotrópico'. UFBA, Tese de mestrado(2010)
- [69] P. Gregory. Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences. Cambridge University Press, 2005.
- [70] R. Trotta. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. Contemporary Physics, 49:71-104, 2008. arXiv:astro-ph/0803.4089v1.
- [71] L. Verde. A practical guide to basic statistical techniques for data analysis in cosmology. arXiv:arXiv:astro-ph/0712.3028v2, 2007.100
- [72] L. Verde. Statistical methods in cosmology. In G. Wolschin, editor, Lectures on cosmology: Accelerated expansion of the universe. Springer, 2010. arXiv:astro-ph.CO/0911.3105v1.