



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Relações Distância-Redshift e Testes de Supernovas Ia
em um Modelo Cosmológico Anisotrópico

Roberto dos Santos Menezes Jr.

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

Relações Distância-Redshift e Testes de Supernovas Ia
em um Modelo Cosmológico Anisotrópico

Roberto dos Santos Menezes Jr.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Carneiro de S. Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador – Bahia – 2010

*À minha querida esposa Maiana e
minha amada filha Maria Clara.*

Agradecimentos

À Deus, autor de toda natureza, objeto do estudo humano, que me deu inteligência, força e coragem para seguir nesse caminho que hoje trilho.

À minha mãe, Nilza, quem me deu a vida e a educação e sempre me motivou a estudar e perseguir sempre meus objetivos.

À minha família: minha irmã Amanda, tio Washington, Gui, meu pai Roberto, Maria do Céu, por existirem em minha vida e por se alegrarem com minhas alegrias e vitórias, sempre torcendo por mim.

À minha esposa Maiana (meu sustentáculo sempre), que com seu amor, dedicação, compreensão e muita paciência fez com que esse trabalho se tornasse possível.

À minha filha Maria Clara, que mesmo em tenra idade e muitas vezes até dificultando o trabalho, é hoje a maior de minhas motivações.

À minha outra família: D. Ana e Mariana, pelos momentos em que foram babás de minha filha, permitindo que eu pudesse trabalhar e estudar; a Maurício, pelos momentos de descontração que muitas vezes necessitou minha mente cansada. À Hanna, por sua alegria contagiante que sempre me alegra.

Ao meu orientador Saulo, que se tornou um amigo e a quem devo muito a realização desse trabalho, especialmente no momento final, quando o tempo parecia ser um forte adversário.

Ao grupo de Cosmologia que já são, além de colegas, amigos: Humberto, Agostinho, Mariana e Welber, pelos momentos de discussões e aprendizado e um especial a Cássio, que na reta final, apesar de estar com a vida bem atribulada devido ao seu doutorado, sempre disponibilizou tempo e muita paciência para tirar minhas dúvidas.

Ao Instituto de Física e, em especial, ao Programa de Pós-Graduação, seus coordenadores e secretários, sempre solícitos em me atender nas necessidades.

À CAPES.

Resumo

Estudamos um modelo anisotrópico gerado a partir de uma métrica tipo Bianchi III, generalização da métrica de Gödel, e que é solução exata das equações de campo de Einstein. Em particular, analisamos dados obtidos de compilações de supernovas tipo Ia, mais precisamente o SDSS (MLCS2K2), verificando em quais limites de distâncias e *redshifts* a anisotropia do modelo poderia ser evidenciada, e em quais limites o modelo se aproxima do Λ CDM (modelo padrão). Verificamos que o *redshift* $z = 2$ tem particular importância, se configurando o ponto em que a anisotropia começaria a ser notada, bem como o ponto no qual nosso modelo começa a divergir do Λ CDM. Concluímos, portanto, que dados de distâncias a supernovas acima desses limites de *redshift*, bem como o aumento da precisão na obtenção dessas mesmas distâncias, poderiam apontar para a existência ou não de tal anisotropia no universo.

Abstract

We study an anisotropic model generated from a metric classified as Bianchi type III, generalization of the Gödel metric and exact solution of the Einstein field equations. We analyzed data from one compilation of type Ia supernovae, namely the SDSS (MLCS2k2), checking in which limits of distances and redshifts the anisotropy of the model could be detected. We find that the redshift $z = 2$ is of particular importance, setting the point where the anisotropy would begin to be noticed, as well as the point at which our model begins to diverge from Λ CDM. We therefore conclude that data from supernovae above this redshift, as well as an increasing precision in obtaining their distances, might indicate the presence or absence of such anisotropy in the universe.

Sumário

Notações e convenções	9
1. Introdução	10
1.1 O céu ontem e hoje	10
1.2 Astrofísica, astronomia e cosmologia	11
1.3 Uma breve história dos modelos	12
1.4 Albert Einstein x Edwin Hubble	14
1.5 A descoberta da radiação cósmica de fundo e o princípio cosmológico	17
1.6 O nosso modelo anisotrópico	18
2. Modelos Cosmológicos	20
2.1 O Modelo Padrão	20
2.1.1 Métrica FRW e equação de Friedmann	20
2.1.2 Época dominada pela radiação	25
2.1.3 Época dominada pela matéria	26
2.1.4 Época dominada por Λ	27
2.1.5 Parâmetros cosmológicos em função do <i>redshift</i>	28
2.2 O Modelo Anisotrópico	31
2.2.1 As métricas RTKO	31
2.2.2 Métrica Anisotrópica x Isotropia da CMB	34
2.2.3 Cosmologia Anisotrópica	36
3. Medição de Parâmetros Cosmológicos	43
3.1 Distâncias curtas	44
3.2 Distância própria	46
3.3 Distância luminosidade	49
3.4 Distância diâmetro-angular	51
3.5 Módulo de distância	54
4. Ajustes dos parâmetros	57
4.1 Supernovas	58
4.1.1 Procedimentos do ajuste	61
i) Ajuste do k - Λ CDM.....	63

ii) Ajuste do modelo anisotrópico	64
4.1.2 Resultados	67
5. Conclusão	74
Anexos	76
A. Vetores de Killing	76
B. Equação de Klein-Gordon e tensor momento-energia do campo escalar	83
Referências	85

Notações e Convenções

Nessa dissertação utilizaremos as seguintes notações e convenções:

- A assinatura das métricas utilizada será $(+, -, -, -)$.
- Utilizaremos o sistema de unidades no qual $8\pi G = c = 1$
- O índice 0 (zero) referir-se-á à coordenada temporal e os demais 1, 2 e 3 às coordenadas espaciais.
- As letras do alfabeto grego: $\alpha, \beta, \chi, \gamma, \eta, \dots$ variarão entre os índices 0, 1, 2 e 3.
- As letras do alfabeto latino: a, b, i, j, m, \dots variarão entre os índices espaciais 1, 2 e 3.
- As derivadas covariantes de um tensor serão representadas por ponto e vírgula ou por

$$\nabla_{\mu} : \nabla_{\lambda} T^{\nu} = T^{\nu}{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial T^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\nu} T^{\kappa}.$$

- As derivadas ordinárias de um tensor serão representadas apenas por vírgulas ou por

$$\partial_{\mu} : \partial_{\lambda} T^{\nu} = T^{\nu}{}_{,\lambda} \equiv \frac{\partial T^{\nu}}{\partial x^{\lambda}}.$$

- O ponto sobre a letra representará a derivada com relação ao tempo cosmológico t :

$$\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}.$$

- O apóstrofo sobre a letra representará a derivada com relação ao tempo conforme η :

$$a' \equiv \frac{da}{d\eta}.$$

- O tensor $\eta_{\mu\nu}$ corresponderá ao tensor métrico no espaço-tempo plano (Minkowski), ou seja, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ corresponderá ao caso geral, do espaço-tempo curvo.

Capítulo 1

Introdução

1.1 O céu ontem e hoje

A observação do céu sempre fascinou o ser humano. Desde as mais remotas civilizações o homem olha para o céu em busca de respostas, tanto a profundas indagações tais como “houve um início?”, “como tudo se formou?”, “haverá um fim?”, “estamos sós no universo?”, quanto a questões mais quotidianas a respeito de períodos de plantio, colheita, de cheia, de seca ou até consultas astrológicas a respeito do futuro. Há indícios que civilizações como egípcios e mesopotâmios possuíam uma astronomia bastante avançada a ponto de poder prever com grande precisão fenômenos como eclipses e fases da Lua. Hoje, porém, com um rápido pensamento, poderíamos ser levados, erroneamente, a afirmar que os astros estão distantes de nós. Em nosso dia-a-dia não nos referimos à forma do universo; não está presente em nossas conversas as explosões de supernovas, as nebulosas, as novas galáxias descobertas... No máximo, quando nos referimos aos astros, falamos que o Sol “está quente” ou a Lua bonita. Se há um eclipse, talvez paremos alguns segundos para contemplá-lo. No entanto, o que não percebemos é que a relação homem-cosmo ainda se mantém tão estreita que muitas vezes se funde à nossa vida, como quando fazemos perguntas tão simples como “qual a sua idade?” ou “que horas são?”, isso porque a idade é medida em anos que é o período em que a Terra dá uma volta completa em torno do Sol e 1 hora é aproximadamente a fração de 1/24 da duração do dia, intervalo de tempo em que a Terra realiza um movimento de

rotação completa em torno do seu eixo. Isso sem falar nos sinais eletromagnéticos (ondas de tv, rádio, celular, etc.) que invadem nossos prédios e automóveis oriundos de satélites no espaço. O universo nos cerca.

1.2 Astrofísica, Astronomia e Cosmologia

A observação do universo é feita através de três ramos distintos da ciência do universo que em muito se confundem: a *astronomia*, a *astrofísica* e a *cosmologia*. Em poucas palavras, poderíamos definir a astronomia como sendo o estudo do movimento dos corpos celestes em geral, se preocupando com os movimentos dos astros e atuando no tocante à previsão de eventos celestes. A astrofísica é o ramo da física que estuda a constituição material, as propriedades físicas, a origem e evolução dos astros e para isso se apóia na física nuclear e na mecânica quântica. A cosmologia é o ramo da física que estuda a estrutura e a evolução do universo em seu todo, preocupando-se tanto com a origem quanto com a evolução do mesmo.

A cosmologia pode ser considerada como um caso geral, do qual astronomia e astrofísica são capítulos à parte. Por outro lado a cosmologia depende das evoluções nos campos da astrofísica e da astronomia. Existem pesquisadores que só se dedicam à astronomia ou astrofísica, mas, ainda assim, contribuem para a cosmologia. A respeito da astronomia e cosmologia poderíamos ainda dizer que a astronomia atua em pequenas escalas, na maioria, em distâncias dentro do limite de nossa galáxia (a Via-Láctea = “*caminho de leite*”), cerca de 100.000 anos-luz, ou a galáxias vizinhas, na ordem de poucos megaparsecs (Mpc)¹, enquanto que a cosmologia atua em escalas bem maiores, na ordem de centenas ou milhares de megaparsecs, nas quais o universo nos parece *homogêneo* e *isotrópico*. Os estudos cosmológicos se dão por meio de modelos de universo que buscam, baseados em hipóteses e observações, responder às antigas e ainda atuais questões que insistem em povoar a nossa mente: “houve um início?”, “como tudo se formou?”, “por que é como o vemos hoje?” “haverá um fim?”, entre outras.

¹A distância de 1 parsec (1 pc) equivale a $3,1 \times 10^{16}$ m, o que implica que $1 \text{ Mpc} = 3,1 \times 10^{22}$ m.

1.3 Uma breve história dos modelos²

O primeiro modelo do cosmo que se tem notícia talvez tenha sido o modelo grego, que tinha como principal defensor Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.). Nesse modelo, o universo era composto de esferas cristalinas (esferas celestes) sobre as quais estariam fixos os corpos celestes. Essas esferas eram concêntricas, girando uniformemente em torno de uma central que era a esfera terrestre, na qual estaria a Terra, imóvel. Era, portanto, um modelo *geocêntrico*. O universo era limitado até a esfera das estrelas, posterior à de Saturno, sendo este o último planeta conhecido até então (do grego, planeta = “*aquele que vagueia*”)³.

Após o modelo aristotélico, o mais representativo foi o de Cláudio Ptolomeu (100-170). A idéia básica desse modelo era que as órbitas dos planetas em torno da Terra seriam o resultado da composição de dois movimentos circulares acoplados: cada planeta descreveria um movimento circular em torno de um centro que, por sua vez, executaria um movimento circular em torno da Terra. Esse modelo era ainda geocêntrico.

Nos séculos XV e XVI, cerca de 2000 anos após o modelo aristotélico, começa uma revolução na gravitação universal com o padre católico Nicolau Copérnico (1473-1543) em seu famoso tratado “Sobre a revolução dos orbes celestes” (*De revolutionibus orbium coelestium*), em 1543. Este propõe um sistema *heliocêntrico* no qual a rotação da esfera celeste se justificava pela rotação da Terra em torno de seu eixo, demonstrando, com a simplicidade do ponto de vista heliocêntrico, as mesmas observações de Ptolomeu. Esse modelo permitiu a Copérnico deduzir pela primeira vez a escala relativa das distâncias dentro do sistema solar, através do ângulo que estes eram vistos da Terra em instantes diferentes.

Em 1609, o físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano Galileu Galilei (1564-1642) teve conhecimento de um telescópio que foi oferecido por alto preço ao doge de Veneza. Ao saber que o instrumento era composto de duas lentes em um tubo, Galileu logo construiu um capaz de aumentar três vezes o tamanho aparente de um objeto, depois outro capaz de ampliar em dez vezes e, por fim, um capaz de aumentar 30 vezes. Ao apontar esse telescópio para o céu, ele descobriu assim que a Via Láctea é composta de miríades de estrelas (e não era uma

² As referências históricas foram extraídas das referências [1,2,3].

³ Já eram conhecidos os planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno.

"emanação" como se pensava até essa época), descobriu ainda os satélites de Júpiter, as montanhas e crateras da Lua. Todas essas descobertas foram feitas em março de 1610 e comunicadas ao mundo no livro "O Mensageiro das Estrelas" (*Sidereus Nuncius*) em março do mesmo ano em Veneza. A observação dos satélites de Júpiter e das fases de Vênus levaram-no a defender o sistema heliocêntrico de Copérnico.

No final do século XVI, início do XVII, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) herda do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) dados precisos a respeito das posições dos planetas que foram o resultado de uma vida inteira dedicada a essas observações. Em posse desses dados e munido de um grande conhecimento matemático foi possível a ele descrever o que hoje conhecemos a respeito das órbitas planetárias: as Leis de Kepler. Em sua primeira lei (a lei das órbitas) ele enunciou que as órbitas dos planetas em torno do Sol eram elipses e não círculos como se pensava, e que o Sol ocuparia um dos focos dessa elipse. Na segunda lei (ou lei das áreas) ele descreve que a linha imaginária que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais para iguais intervalos de tempo. Como principal consequência dessa última lei, um planeta não teria uma velocidade constante em sua órbita ao redor do Sol, sendo mais rápido quando mais próximo desse e mais lento quando mais distante. Na terceira lei (lei dos períodos) Kepler relaciona os períodos (T) de revolução dos planetas em torno do Sol com as suas distâncias médias (r) ao mesmo, deduzindo que a razão T^2/r^3 seria igual para todos os planetas do sistema solar.

Em 1687, na grande obra "Princípios Matemáticos de Filosofia Natural" (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*), Isaac Newton (1642-1727) propõe que as mesmas forças que atuavam na Terra mantendo os corpos presos a ela era a responsável pela manutenção dos movimentos planetários em torno do Sol. De posse dessa hipótese, das leis da mecânica por ele desenvolvidas nesse mesmo livro e do cálculo diferencial, ele consegue demonstrar matematicamente as mesmas leis que Kepler obteve empiricamente. Newton relata que a força gravitacional seria proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado das suas distâncias, ou seja

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad , \quad (1.1)$$

onde r_{12} e \hat{r}_{12} são, respectivamente, a distância entre as massas m_1 e m_2 e o versor que aponta da massa m_2 a m_1 . A constante $G = 6,67 \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ (no sistema internacional – SI) foi determinada com precisão por Henry Cavendish (1731-1810), em 1798.

O fato de a força gravitacional ter caráter central permitiu a Newton demonstrar que a variação da velocidade de um planeta em sua órbita elíptica seria decorrência da conservação do momento angular, tal como a lei das áreas. A lei dos períodos pôde ser obtida a partir da igualdade da força gravitacional com a centrípeta, e a forma das órbitas a partir da análise da energia potencial e cinética que possuiria o planeta na referida órbita, podendo essa ser, além de elíptica, circular, parabólica ou hiperbólica.

1.4 Albert Einstein x Edwin Hubble

Apesar do grande sucesso da teoria newtoniana da gravitação universal, verifica-se que esta só concorda com os dados observacionais dentro de um limite de campos gravitacionais relativamente fracos. No limite de campos mais fortes se faz necessário uma nova teoria que se aplique a essa situação: essa teoria é a Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por Albert Einstein (1879-1955) em 1915. Apesar de não ser essa a motivação que conduziu Einstein a propor essa nova teoria da gravitação (na verdade ele buscava uma generalização da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) ou especial (TRE) – que era válida apenas para referenciais inerciais – através da modificação da teoria newtoniana da gravitação), a interpretação da força gravitacional em termo de curvatura de um novo ente físico denominado *espaço-tempo* (um espaço quadridimensional, onde o tempo entra como uma nova dimensão) permitiu a aplicação de sua teoria em situações mais gerais que as que limitavam a teoria de Newton. O ponto de partida de Einstein foi o *princípio da equivalência* (PE) entre a massa inercial e a gravitacional, que na teoria newtoniana aparece como mera coincidência. De fato, na teoria da gravitação de Newton, a massa que aparece na equação (1.1) é a mesma que aparece em sua 2ª lei da dinâmica, de modo que

$$m_1 \vec{a} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \Rightarrow \vec{a} = -G \frac{m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.2)$$

onde a é a aceleração adquirida pelo corpo 1 devido a uma força gravitacional “gerada” pela interação com a massa gravitacional m_2 . Este fato está longe de ser trivial, pois, se definirmos m^G e m^I como sendo, respectivamente, as massas gravitacional e inercial, teríamos para a aceleração

$$\vec{a} = -G \frac{m_1^G}{m_1^I} \frac{m_2^G}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = \frac{m_1^G}{m_1^I} \vec{g}, \quad (1.3)$$

onde definimos

$$\vec{g} \equiv -G \frac{m_2^G}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}. \quad (1.4)$$

Verificamos, portanto, que a aceleração gravitacional seria, em geral, diferente para diferentes corpos, dependendo da razão m^G / m^I de cada corpo. Entretanto, observando o resultado do experimento da queda livre de dois corpos A e B, concluímos que

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B \Rightarrow \frac{m_A^G}{m_A^I} = \frac{m_B^G}{m_B^I} = \text{constante}, \quad (1.5)$$

que, por uma escolha adequada de unidades, podemos escrever

$$\frac{m_A^G}{m_A^I} = \frac{m_B^G}{m_B^I} = 1, \quad (1.6)$$

ou seja, a aceleração adquirida por esses corpos independe de suas massas, fato que já havia sido notado e exposto por Galileu em seu livro “Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo” (*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*), publicado em 1632. A saída de Einstein para a solução de tal coincidência foi a de perceber que para o referencial de um corpo em queda livre, em uma região suficientemente pequena do espaço-tempo, o campo gravitacional *não existe*. Assim, dois corpos em queda livre parecerão, um em relação ao outro, no estado de inércia (na ausência de quaisquer outras forças, exceto a gravitacional). Em posse desse pensamento ele pôde enunciar o princípio de equivalência: *não existem experimentos locais que possam distinguir entre um referencial caindo livremente em um campo gravitacional e um em movimento retilíneo uniforme na ausência desse mesmo campo*, implicando diretamente na igualdade entre as massas inerciais e gravitacionais. A partir daí, o caminho seguido por Einstein foi a utilização dos seus famosos experimentos de pensamento, especialmente os do elevador acelerado, para notar que o espaço-tempo deveria se curvar na presença de um campo gravitacional. Analisando o comportamento de um raio luminoso ao entrar através de uma pequena fenda em um elevador que sobe com aceleração igual à gravitacional ele pôde notar que, para um observador em repouso no referencial do elevador, o raio sofreria um desvio, concluindo então que o mesmo, ao passar por um campo gravitacional, devido ao princípio da equivalência, também deveria sofrer tal desvio (fato observado pela primeira vez em 29 de maio de 1919 em Sobral, no estado do Ceará – Brasil),

pois no elevador seria impossível distinguir entre a ação de um campo gravitacional ou a aceleração deste mesmo elevador. Conhecendo, então, a geometria riemanniana (geometria do espaço curvo) e o cálculo tensorial, ele conseguiu obter suas famosas equações de campo [4,5,6,7],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

e publicá-las em 1915. Nelas, o lado esquerdo refere-se à geometria do espaço-tempo, onde $R_{\mu\nu}$ é denominado tensor de Ricci (e é resultado de uma operação tensorial denominada *contração* do tensor de Riemann, que define a curvatura do espaço-tempo), $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e R é o escalar de Ricci (uma contração do tensor de Ricci); o lado direito refere-se ao conteúdo material do universo, onde $T_{\mu\nu}$ representa o tensor momento-energia. As equações obtidas por Einstein, entretanto, conduziam a um universo dinâmico, com aceleração negativa, devido à ação das forças gravitacionais atrativas, e isso ia de encontro às suas convicções e às observações dos *movimentos peculiares*⁴ dentro de nossa própria galáxia, que não conduziam a evidências de um universo que se expandisse ou contraísse, o que o levou a introduzir um termo *ad hoc* às suas equações a fim de contrabalancear a atração gravitacional e permitir a existência de um universo estático: a *constante cosmológica* (representada pela letra grega Λ).

Em 1929, porém, a história tem um novo capítulo. O astrônomo americano Edwin Hubble (1889-1953) obtém, através de inúmeras observações, a relação velocidade (v) x distância (r) para um grupo de cerca de 20 galáxias [2,8],

$$v = H_0 r \quad (1.8)$$

(denominada hoje como lei de Hubble), onde $H_0 = 500 \text{ km/s.Mpc}$ ⁵ é a constante de Hubble, concluindo que o universo estaria em expansão e não estático como havia pensado Einstein. Essa descoberta levou Einstein a descrever a constante cosmológica como “*the greatest blunder of my career*”. Porém, mais tarde foi necessário se justificar a expansão acelerada observada com mais precisão posteriormente, e nesse intuito a constante cosmológica foi reinterpretada e “ressuscitada”, sendo identificada como resultado da contribuição da *energia de vácuo*.

Hoje muitos modelos já foram propostos, envolvendo ou não a constante cosmológica,

⁴Aqueles que não resultam expansão/contração do universo, tais como a translação de planetas e satélites.

⁵Valor obtido por Hubble em 1929.

inclusive em alguns ela é uma função do *tempo cosmológico* ($\Lambda=\Lambda(t)$) [9,10]. O modelo que mais se adéqua às observações atuais é denominado Λ CDM (*Lambda-Cold Dark Matter*) ou Modelo Padrão, no qual o universo é espacialmente plano, homogêneo e isotrópico em largas escalas e possui expansão acelerada atualmente.

1.5 A descoberta da radiação cósmica de fundo e o princípio cosmológico

Um dos fatos notáveis nas observações cosmológicas é a isotropia da radiação cósmica de fundo (do inglês, *Cosmic Microwave Background* – CMB). Essa radiação corresponde a uma radiação na frequência das microondas emitida nos tempos iniciais da formação do universo e foi observada pela primeira vez em 1965 pelos astrônomos Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson do Bell Telephone Laboratories – New Jersey. Essa radiação já havia sido prevista teoricamente por George Gamov, Ralph Alpher e Robert Herman em 1948 e, posteriormente, por Robert Dicke, e seria resultado de uma teoria cosmológica na qual o universo teria sido iniciado a partir de um estado extremamente quente e denso. Porém, até 1965 ainda não havia sido detectada. Essa detecção ocorreu acidentalmente quando Penzias e Wilson trabalhavam com um radiômetro que utilizavam para experiências de radioastronomia e comunicação via satélite. O instrumento deles tinha um ruído térmico excessivo de 3,5 K que eles não podiam explicar, e após diversos testes Penzias se deu finalmente conta que aquele ruído nada mais era do que a radiação cósmica de fundo predita por Gamov, Alpher, Herman e Dicke [8]. Após receber um telefonema de Penzias, Dicke disse a famosa frase: “*Boys, we’ve been scooped*”. Uma reunião entre as equipes de Princeton e Holmdel verificou que o ruído da antena era devido efetivamente à radiação cósmica de fundo. Penzias e Wilson receberam o Prêmio Nobel de Física de 1978 pela descoberta.

A CMB detectada apresentava um alto grau de isotropia [11] que, juntamente com a aparente homogeneidade e isotropia dos aglomerados de matéria, espalhados sobre escalas da ordem de 100 Mpc [12], foi responsável pela elaboração do *Princípio Cosmológico*, que enuncia que, o universo, quando visto de uma escala suficientemente grande, tem iguais propriedades para todos os observadores. Esta afirmação está fortemente relacionada à

hipótese que a parte do universo que podemos ver é uma amostra representativa do mesmo, e que as mesmas leis físicas se aplicam em todos os lugares. Em essência, ela afirma de certa forma que o universo pode ser conhecido a partir da análise de uma parte sua, e está jogando corretamente com os cientistas.

O alto grau de isotropia da CMB explica ainda o sucesso da teoria das perturbações cosmológicas em reproduzir o espectro de anisotropia detectado na mesma. A medida dessas anisotropias, originadas nas flutuações primordiais, têm um papel fundamental no advento da cosmologia de precisão, permitindo a determinação de muitos parâmetros cosmológicos e a rejeição de um grande número de modelos cosmológicos [13,14].

1.6 O modelo anisotrópico

O modelo que estudaremos nesta dissertação conduzirá a um universo homogêneo, porém, anisotrópico e também deverá possuir expansão acelerada gerada pelo Λ (tal como o modelo padrão), consistente, desse modo, com as observações [15]. O ponto de partida para a sua construção será a métrica anisotrópica, espacialmente homogênea, livre de cisalhamento, com *expansão conforme*, estudada por Korotkii e Obukhov [16,17] e antes por Marcelo Rebouças e Jaime Tiomno [18], a qual é um caso particular de métricas do tipo Gödel, com rotação, classificadas como Bianchi III [19,20,21], que chamaremos de agora em diante de métricas RTKO (Rebouças-Tiomno-Korotkii-Obukhov). As métricas RTKO, em geral, possuem um parâmetro de rotação que, em nosso caso, será feito igual a zero. A condição de que a expansão seja conforme é essencial para garantir a isotropia da radiação cósmica de fundo, tal como também o é a existência de campos vetoriais de Killing [*cf.* Anexo A] conformes paralelos à quadrivelocidade, como veremos adiante. Além disso, mostraremos que, no limite de distâncias curtas, tal métrica se reduz à métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plana.

Mostraremos também que o modelo conduz a uma distribuição anisotrópica de pressões (o conteúdo material usual do universo, matéria + radiação + constante cosmológica, conduz apenas a pressões isotrópicas), obtidas a partir das equações de campo de Einstein, que pode ser gerada se incluirmos, no conteúdo material, um campo escalar anisotrópico $\phi(x^\mu)$, sem

massa e com acoplamento mínimo [22,23,24]. Todos esses resultados fazem desta métrica uma candidata viável para a descrição de nosso universo.

Além disso, faremos análises estatísticas a fim de obter os melhores valores dos parâmetros livres envolvidos no modelo, através da análise de distâncias a supernovas do tipo Ia, com o objetivo de ajustar o modelo aos dados observacionais já consolidados e de também obtermos uma ferramenta para a investigação da possível anisotropia existente no universo.

Capítulo 2

Modelos Cosmológicos

2.1. O Modelo Padrão

2.1.1. Métrica FRW e equação de Friedmann

Ao observarmos o universo sobre grandes escalas (> 100 Mpc) verificamos que o mesmo apresenta-se isotrópico, não se configurando nenhum ponto do universo como privilegiado, incluída a Terra. Essa isotropia também é verificada pela análise da radiação cósmica de fundo. Estes fatos conduziram dois físicos, Howard Robertson e Arthur Walker, em 1930, a proporem, independentemente um do outro, uma métrica para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico que englobasse todas as possíveis curvaturas desse espaço-tempo (positiva, negativa ou plana), a qual é uma solução exata das equações de campo de Einstein [4,6,25]. Tal métrica chamaremos de métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)¹ e ela é dada pelo intervalo

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.1)$$

¹ O termo Friedmann é empregado na denominação da métrica pelo fato dessa métrica conduzir à equação de Friedmann – Eq. (2.14).

onde t é o tempo cosmológico, (r, θ, ϕ) são as coordenadas comóveis² de um ponto do espaço e k é a constante de curvatura espacial, que pode assumir os valores $-1, 0$ ou $+1$ conforme a curvatura espacial seja, respectivamente, negativa (geometria aberta), nula (geometria plana) ou positiva (geometria fechada). $a(t)$ é o fator de escala (de expansão ou contração do universo) e é função apenas do tempo cosmológico. Fazendo uma apropriada transformação de coordenadas, $r = f_k(\chi)$, passamos a métrica (2.1) para a forma bem conhecida

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.2)$$

onde a função $f_k(\chi)$ assume diferentes formas para diferentes curvaturas,

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & (k = +1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh \chi & (k = -1) \end{cases}. \quad (2.3)$$

Procuremos agora analisar, à luz das equações de Einstein, a que modelos de universo a métrica FRW pode conduzir. Para tanto, apliquemos a métrica às equações de campo de Einstein.

Contraindo a Eq. (1.4) obtemos

$$R = -T, \quad (2.4)$$

onde R é o escalar de Ricci e T é o tensor momento-energia contraído. Substituindo a Eq. (2.4) na (1.4), as equações de Einstein ficam na forma

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \equiv S_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

A partir do lado esquerdo da Eq. (2.5), calculado da métrica (2.1), obtemos

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (2.6)$$

$$R_{ii} = -\left(\frac{2k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}\right)g_{ii}, \quad (2.7)$$

$$R_{i0} = R_{ij} = 0, \quad i \neq j \neq 0. \quad (2.8)$$

² Coordenadas de um ponto fixo do espaço-tempo.

O lado direito pode ser calculado partindo-se do tensor momento-energia do fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde ϵ é a densidade de energia do conteúdo material do modelo, p é a pressão correspondente a esse conteúdo e $u_\mu = \delta_\mu^0$, a quadrivelocidade comóvel. O lado direito, então, torna-se

$$S_{00} = \frac{1}{2}(\epsilon + 3p), \quad (2.10)$$

$$S_{ii} = -\frac{1}{2}(\epsilon - p)g_{ii}, \quad (2.11)$$

$$S_{i0} = S_{ij} = 0, \quad i \neq j \neq 0. \quad (2.12)$$

Da igualdade das equações (2.6) e (2.10), obtemos

$$\ddot{a} = -\frac{1}{6}(\epsilon + 3p)a, \quad (2.13)$$

que é a equação da aceleração. Nela podemos observar que se, $\epsilon > 0$ e $p > 0$, então o universo deverá estar desacelerado, visto que $a > 0$. Em contrapartida, se $p < (-1/3)\epsilon$, então $\ddot{a} > 0$ e o universo estará acelerado.

Igualando agora as equações (2.7) e (2.11), e utilizando a Eq.(2.13) a fim de eliminar a aceleração, obtemos a bem conhecida *equação de Friedmann*,

$$H^2 = \frac{\epsilon}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.14)$$

onde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble. A equação de Friedmann descreve a dinâmica de todos os possíveis modelos de universo que podem ser construídos a partir da métrica FRW.

A constante cosmológica pode ser inserida no conteúdo material do modelo através da inserção da densidade de energia $\epsilon_\Lambda = \Lambda$, além das densidades da matéria, ϵ_m , e da radiação, ϵ_r , na densidade de energia total que aparece na equação, de modo que a densidade total torne-se $\epsilon = \epsilon_m + \epsilon_r + \epsilon_\Lambda$. Uma análise na equação da aceleração nos mostra que para termos um universo acelerado hoje, em acordo com as observações, deveremos ter $p < -\frac{1}{3}\epsilon$. A pressão devido à constante cosmológica é dada por

$$p_{\Lambda} = -\varepsilon_{\Lambda} = -\Lambda. \quad (2.15)$$

A pressão da matéria não-relativística ($v \ll c$) é sabida igual a zero, enquanto a da radiação, obtida da Mecânica Estatística, é

$$p_r = \frac{1}{3}\varepsilon_r, \quad (2.16)$$

o que nos garante, a partir da Eq. (2.13), um universo acelerado, pois, nesse caso, $\ddot{a} > 0$.

Se $k = 0$, a equação de Friedmann torna-se simplesmente

$$H^2 = \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.17)$$

de onde definiremos a *densidade crítica*

$$\varepsilon_c \equiv 3H^2. \quad (2.18)$$

Se $\varepsilon > \varepsilon_c$, então o universo possui curvatura positiva (geometria fechada); se $\varepsilon < \varepsilon_c$, então o universo possui curvatura negativa (geometria aberta); se $\varepsilon = \varepsilon_c$, o universo é plano.

Muitas vezes é mais conveniente, ao invés de utilizarmos a densidade de energia absoluta, trabalharmos com o parâmetro adimensional denominado *parâmetro de densidade* e definido por

$$\Omega \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}. \quad (2.19)$$

Assim, em termos de Ω , a equação (2.14) se torna

$$1 - \Omega = -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.20)$$

A análise da Eq. (2.20) nos permite estudar a curvatura a partir do valor do parâmetro de densidade total (note que $\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_{\Lambda}$): se $\Omega > 1$, obtemos um universo positivamente curvado; se $\Omega < 1$, o universo é negativamente curvado; se $\Omega = 1$, o universo é plano.

O conteúdo da densidade de energia do modelo padrão é composto de matéria não-relativística, radiação e constante cosmológica, sendo, esta última, constante no tempo. A

densidade de energia relacionada à matéria cai proporcionalmente ao cubo do fator de escala, visto que o volume de certa região do universo evolui com o cubo desse mesmo fator. Assim

$$\epsilon_m = \epsilon_{mo} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3, \quad (2.21)$$

onde os subscritos “o” significam que a grandeza é correspondente ao presente momento t_o (da observação), ou seja, $a_o \equiv a(t_o)$ e $\epsilon_{m,o} \equiv \epsilon_m(t_o)$. Já a densidade de energia relacionada à radiação cai com a quarta potência do fator de escala, devido ao fato de que, à medida que o universo se expande, os comprimentos de onda dos fótons crescem e, conseqüentemente, a energia deles cai, somando-se a isso ainda o efeito da expansão do volume do universo que também contribui para a queda da densidade de energia. Assim,

$$\epsilon_r = \epsilon_{ro} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4. \quad (2.22)$$

A densidade de energia da constante cosmológica (por ser constante, por definição) não é função do fator de escala (e, conseqüentemente, do tempo cosmológico) ficando simplesmente

$$\epsilon_\Lambda = \Lambda. \quad (2.23)$$

Solucionar a equação de Friedmann significa determinar como o universo evolui com o tempo, ou seja, encontrar a função desconhecida $a(t)$. Nesse intuito, com o auxílio das equações (2.21) a (2.23) aplicadas à Eq. (2.14) podemos escrever

$$H^2 = \frac{\epsilon_{ro}}{3} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4 + \frac{\epsilon_{mo}}{3} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.24)$$

que, dividido por H_o^2 , com o uso das equações (2.19) e (2.20), toma a forma

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{ro} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4 + \Omega_{mo} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 + (1 - \Omega_{ro} - \Omega_{mo} - \Omega_\Lambda) \left(\frac{a_o}{a} \right)^2 + \Omega_\Lambda. \quad (2.25)$$

Visto que $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt}$, podemos, em princípio, resolver a Eq. (2.25) a fim de obter a função desejada $a(t)$ se conhecermos os valores atuais dos parâmetros de densidade, além do parâmetro de Hubble atual. Explicitamente, poderíamos integrar a equação

$$dt = \frac{da}{H_o a \left(\Omega_{ro} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4 + \Omega_{mo} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 + (1 - \Omega_{ro} - \Omega_{mo} - \Omega_{\Lambda}) \left(\frac{a_o}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda} \right)^{1/2}} \quad (2.26)$$

com essa finalidade, obtendo, portanto, $t(a)$ e invertendo-a em seguida para encontrar $a(t)$. Em geral, entretanto, a integral (2.26) não possui uma solução analítica, Porém, podemos obter tais soluções se analisarmos as épocas nas quais há um domínio de uma determinada componente sobre as outras e estudarmos a expansão do universo nesse período específico.

No caso particular de um modelo plano, $k = 0$ e, conseqüentemente, $\Omega = 1$. Dessa forma, as equações (2.24), (2.25) e (2.26) tornam-se, respectivamente,

$$H^2 = \frac{\epsilon_{ro}}{3} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4 + \frac{\epsilon_{mo}}{3} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.27)$$

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{ro} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4 + \Omega_{mo} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 + \Omega_{\Lambda}, \quad (2.28)$$

$$dt = \frac{da}{H_o a \left(\Omega_{ro} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4 + \Omega_{mo} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 + \Omega_{\Lambda} \right)^{1/2}}. \quad (2.29)$$

2.1.2. Época dominada pela radiação

Se tomarmos períodos de tempos curtos ($t \ll 1$), que nos remetem aos tempos mais remotos da evolução do universo, para um universo que esteve sempre em expansão, uma análise na Eq. (2.29) mostrará que o termo dominante nesse período é o da radiação, de modo que essa equação torna-se, simplesmente,

$$dt \approx \frac{ada}{H_o a_o^2 (\Omega_{ro})^{1/2}}. \quad (2.30)$$

Integrando (2.30), assumindo a condição inicial que $a(t = 0) = 0$, obtemos a função analítica para o fator de escala em função do tempo,

$$a(t) \approx \left(2a_o^2 H_o \sqrt{\Omega_{ro} t}\right)^{1/2}, \quad (2.31)$$

e a do parâmetro de Hubble,

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \approx \frac{1}{2t}. \quad (2.32)$$

Além disso, podemos também obter o fator de desaceleração, q , definido pela expressão

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (2.33)$$

que é negativo para um universo acelerado ($\ddot{a} > 0$) e positivo para um desacelerado ($\ddot{a} < 0$). No caso do período da radiação ele torna-se

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \approx 1, \quad (2.34)$$

que se traduz em um universo em expansão desacelerada nesse período.

2.1.3. Época dominada pela matéria

Definimos o período a partir do qual a matéria passa a dominar sobre as demais componentes como aquele em que a densidade de energia da radiação se torna igual ao da matéria, ou seja, aquele em que a densidade relativa

$$\epsilon_{rm} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_m} \quad (2.35)$$

torna-se igual a 1 e, portanto, o fator de escala se torna

$$\epsilon_{rm} = \frac{\epsilon_{ro} \left(\frac{a_o}{a}\right)^4}{\epsilon_{mo} \left(\frac{a_o}{a}\right)^3} = \frac{\epsilon_{ro} a_o}{\epsilon_{mo} a} = 1 \Rightarrow$$

$$a_{rm} = a_o \frac{\epsilon_{ro}}{\epsilon_{mo}}. \quad (2.36)$$

Nesse caso, a integração, a fim de se obter a função $a(t)$, só pode ser feita numericamente, conhecidos os valores dos parâmetros de densidade atuais e do parâmetro de Hubble atual (*cf.* Cap. 4).

A época dominada pela matéria tem fim quando a densidade relativa entre a matéria e a constante cosmológica torna-se igual a 1, passando essa última a prevalecer, ou seja, quando o fator de escala atinge o valor

$$a_{m\Lambda} = a_o \sqrt[3]{\frac{\epsilon_{mo}}{\epsilon_{\Lambda}}}. \quad (2.37)$$

Note que, para um universo em expansão ($a_{m\Lambda} > a_{rm}$), deveremos ter

$$\sqrt[3]{\frac{\epsilon_{mo}}{\epsilon_{\Lambda}}} > \frac{\epsilon_{ro}}{\epsilon_{mo}} \Rightarrow (\epsilon_{mo})^4 > (\epsilon_{ro})^3 \epsilon_{\Lambda}. \quad (2.38)$$

2.1.4. Época dominada por Λ

Como vimos, a época de domínio da constante cosmológica se dá quando o fator de escala atinge o valor mínimo $a_o \sqrt[3]{\epsilon_{mo}/\epsilon_{\Lambda}}$ (final da época de matéria) e não possui um limite superior. Nessas condições, podemos impor um limite $t \rightarrow \infty$ (e, conseqüentemente, $a \rightarrow \infty$) para analisarmos esse período, tornando a Eq. (2.29) na forma simples

$$dt \approx \frac{1}{H_o (\Omega_{\Lambda})^{1/2}} \frac{da}{a}, \quad (2.39)$$

que integrada, nos fornece a função

$$a(t) \approx K_o e^{H_o t}, \quad (2.40)$$

onde, K_o é uma constante de integração que pode ser obtida pela escolha de uma condição inicial apropriada e $H_\infty = H_o \sqrt{\Omega_\Lambda}$. Nesse caso, o fator de desaceleração fica

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \approx -1, \quad (2.41)$$

o que nos remete a um universo acelerado. O parâmetro de Hubble é, então,

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \approx H_o = \text{const.} \quad (2.42)$$

2.1.5. Parâmetros cosmológicos em função do *redshift*

O *redshift* (desvio ao vermelho) z da luz é, por definição,

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \Rightarrow 1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e}, \quad (2.43)$$

onde λ_e é comprimento de onda medido no ponto do espaço-tempo em que ocorre a emissão (na fonte) – ou seja, no laboratório – e λ_o , o comprimento de onda medido no ponto do espaço-tempo em que ocorre a observação (no receptor).

O *redshift* é uma grandeza muito utilizada em observações, sendo, portanto, de extrema importância na análise de modelos cosmológicos a fim de se verificar a adequação desses aos dados observacionais. Deste modo, para prosseguirmos em tal análise, se faz necessário antes relacionar z ao fator de escala, com a finalidade de obter equações em função apenas de z . Nesse intuito, portanto, consideremos uma frente de onda luminosa que foi emitida em um instante de tempo t_e por uma galáxia e observada por nós no instante presente t_o . Durante sua viagem, a luz percorreu uma geodésica nula, na qual $ds = 0$, que possui coordenadas θ e φ constantes, devido à suposta homogeneidade e isotropia do universo. Tomando a métrica FRW escrevemos, então,

$$dt^2 = a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} \Rightarrow \frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.44)$$

Integrando ambos os lados da Eq. (2.44), obtemos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}. \quad (2.45)$$

A próxima frente de onda é emitida no instante $t_e + \lambda_e$ (lembrando que no sistema de unidades adotado, $c = 1$) e é observada no instante $t_o + \lambda_o$. Portanto, para essa frente de onda,

$$\int_{t_e + \lambda_e}^{t_o + \lambda_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (2.46)$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \lambda_e}^{t_o + \lambda_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.47)$$

Subtraindo a integral

$$\int_{t_e + \lambda_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}$$

de ambos os lados da Eq. (2.47), nós encontramos a relação

$$\int_{t_e}^{t_e + \lambda_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \lambda_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.48)$$

ou seja, a integral de $dt/a(t)$ entre os instantes de tempo da emissão de sucessivas frentes de onda é igual à integral de $dt/a(t)$ entre os instantes de tempo da observação dessas frentes. Porém, durante a emissão de duas frentes de onda sucessivas, esperamos que o universo não se expanda significativamente, o que torna a Eq. (2.48) na forma mais simples

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \lambda_e} dt = \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o + \lambda_o} dt \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_o}{a(t_o)} \quad (2.50)$$

e o redshift (2.43) se torna, com o uso da Eq. (2.50),

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \equiv \frac{a_o}{a}. \quad (2.51)$$

A reescrita da equação (2.28), portanto, em função do redshift representado através da Eq. (2.51), se torna imediata:

$$H(z) = H_o \left[\Omega_{ro} (1+z)^4 + \Omega_{mo} (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda} \right]^{1/2}. \quad (2.52)$$

O fator de desaceleração, definido anteriormente, também pode ser reescrito em função de z . Vejamos.

Podemos reescrever a Eq. (2.33) na forma

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (2.53)$$

O termo \ddot{a} pode ser escrito na forma

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (aH) = a \frac{dH}{dt} + \dot{a}H = a \frac{dH}{dt} + aH^2. \quad (2.54)$$

Como temos o parâmetro de Hubble em função de z , aplicando a regra da cadeia para dH/dt ,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (2.55)$$

e derivando a Eq. (2.51) em relação ao tempo,

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_o}{a^2} \dot{a} = -(1+z)H, \quad (2.56)$$

obtemos a função $\ddot{a}(z)$, substituindo as Eqs. (2.56) e (2.55) na (2.54). Por fim encontramos o fator de desaceleração em função de z

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH}{dz}, \quad (2.57)$$

onde o termo dH/dz pode ser obtido da Eq. (2.52) para o modelo padrão ou o próprio de cada modelo.

Além disso, podemos ainda obter o parâmetro de idade do universo, definido por $H_0 t_0$. Tomando-se a Eq. (2.29) e utilizando a relação (2.56), obtemos

$$H_0 t_0 = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+z} \frac{H_0 dz'}{H(z')}, \quad (2.58)$$

visto que, em $a(t_0)$, $z = 0$, e em $a(t = 0)$, $z \rightarrow \infty$.

2.2. O Modelo Anisotrópico

2.2.1. As Métricas RTKO

As métricas RTKO são descritas pelo elemento de linha

$$ds^2 = a^2(\eta)[(d\eta + l e^x dy)^2 - dx^2 - e^{2x} dy^2 - dz^2], \quad (2.59)$$

onde η é o tempo conforme, definido pela relação $dt \equiv a(\eta)d\eta$, $a(\eta)$ é o fator de escala e x , y e z são as coordenadas espaciais. O parâmetro l é uma constante não-negativa denominada *parâmetro de rotação*, cujo valor varia no intervalo $[0,1)$ a fim de não permitir a existência de curvas tipo-tempo fechadas, o que levaria a uma violação da causalidade [16,17]. Em nosso caso, faremos $l = 0$ e o elemento de linha (2.59) se reduzirá a

$$ds^2 = a^2(\eta)d\eta^2 - a^2(\eta)(dx^2 + e^{2x} dy^2 + dz^2). \quad (2.60)$$

Essa é uma métrica Bianchi tipo III, espacialmente homogênea, que possui três vetores de Killing (*cf.* Anexo A: *Vetores de Killing*),

$$\xi_{(1)} = \partial_x - y\partial_y, \quad \xi_{(2)} = \partial_y, \quad \xi_{(3)} = \partial_z, \quad (2.61)$$

e também um campo vetorial de Killing conforme,

$$\xi_{conf}^{\mu} = \delta_0^{\mu}, \quad (2.62)$$

que são soluções das equações

$$L_{\xi} g_{\alpha\beta} = 2\sigma g_{\alpha\beta}, \quad (2.63)$$

com fator conforme $2\sigma = 2\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}$. Nessa última equação, $L_{\xi} g_{\alpha\beta}$ representa a *derivada de Lie* do tensor métrico em relação ao campo vetorial de Killing, representado por ξ (*cf.* Anexo A, Eq. (A.13)). A quadrivelocidade comóvel para essa métrica é dada por

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} = \frac{\delta_0^{\mu}}{a(\eta)}. \quad (2.64)$$

A métrica (2.60) possui ainda simetria cilíndrica. Para explicitarmos esse fato, lancemos mãos das transformações de coordenadas

$$e^x = \cosh r + \cos \varphi \sinh r, \quad (2.65)$$

$$ye^x = \sin \varphi \cdot \sinh r, \quad (2.66)$$

que tornará a métrica (2.61) na forma que utilizaremos de agora em diante,

$$ds^2 = a^2(\eta)d\eta^2 - a^2(\eta)(dr^2 + \sinh^2 r d\varphi^2 + dz^2), \quad (2.67)$$

apresentando-se, dessa forma, nas coordenadas cilíndricas $x^{\mu} = (\eta, r, \varphi, z)$.

Como dissemos anteriormente, a métrica RTKO expressa na forma dada pela Eq. (2.67) se reduz à métrica de FRW plana para distâncias curtas. De fato, se tomarmos as novas transformações de coordenadas

$$r = \chi \sin \theta, \quad (2.68)$$

$$z = \chi \cos \theta, \quad (2.69)$$

que relacionam as coordenadas cilíndricas com novas coordenadas esféricas $(\eta, \chi, \theta, \varphi)$; as diferenciarmos,

$$dr = \chi \cos \theta d\theta + \sin \theta d\chi, \quad (2.70)$$

$$dz = -\chi \sin \theta d\theta + \cos \theta d\chi; \quad (2.71)$$

nós obteremos

$$dr^2 + dz^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\theta^2 \quad (2.72)$$

e, conseqüentemente, a métrica (2.67) ficará na forma

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\theta^2 - \sinh^2(\chi \sin \theta) d\varphi^2], \quad (2.73)$$

que é a métrica RTKO em coordenadas esféricas. Agora, tomando a expansão em série da função $\sinh(x)$ até a primeira ordem: $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots \approx x$, obtemos

$$ds^2 \approx a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2(d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (2.74)$$

que é justamente a métrica FRW plana (*conf.* Eq. (2.2)).

Consideremos, por fim, as equações de campo de Einstein

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R = T_{\nu}^{\mu}. \quad (2.75)$$

Quando aplicada à métrica (2.67), ela nos fornece os tensores momento-energia para as componentes diagonais

$$T_0^0 a^4 = 3a'^2 - a^2, \quad (2.76)$$

$$T_1^1 a^4 = T_2^2 a^4 = 2aa'' - a'^2, \quad (2.77)$$

$$T_3^3 a^2 = T_1^1 a^2 - 1, \quad (2.78)$$

e para as demais componentes

$$T_{\nu}^{\mu} = 0; \quad \mu \neq \nu. \quad (2.79)$$

Nas seções que seguirão discutiremos os modelos cosmológicos oriundos da nossa métrica. Antes, porém, discutamos a relação entre a anisotropia presente na métrica RTKO e a isotropia da radiação cósmica de fundo.

2.2.2. Métrica Anisotrópica x Isotropia da CMB

O alto grau de isotropia da radiação cósmica de fundo (com flutuações na ordem de 10^{-5} apenas) explica o sucesso da teoria linear das perturbações cosmológica em reproduzir o espectro de anisotropia detectado na CMB [25]. Queremos, portanto, mostrar que é possível se construir um modelo cosmológico homogêneo, porém anisotrópico, compatível com a isotropia observada de 10^{-5} na radiação cósmica de fundo. Vejamos.

Utilizando a relação que nos fornece a energia de um fóton [26]

$$E = p^{\mu} u_{\mu}, \quad (2.80)$$

onde $u^{\mu} = \delta_0^{\mu} / a(\eta)$ é a quadrivelocidade em coordenadas comóveis do emissor/receptor, e sabendo que, para fótons, $E \propto 1/\lambda$ e $p^{\mu} \propto k^{\mu}$, podemos escrever o *redshift* – Eq. (2.43) – na forma

$$1 + z = \frac{(k^{\mu} u_{\mu})_e}{(k^{\mu} u_{\mu})_o}, \quad (2.81)$$

onde os índices subscritos “e” e “o” denotam que as grandezas entre parênteses são medidas nos pontos do espaço-tempo em que ocorrem a emissão e a observação dos fótons, respectivamente.

Supondo que a radiação cósmica de fundo tem espectro de corpo-negro, a energia de seus fótons é proporcional à temperatura ($E \propto T$), e, conseqüentemente, obtemos a relação entre as temperaturas de emissão T_e e observação T_o dos fótons provenientes dessa radiação,

$$1 + z = \frac{T_e}{T_o}, \quad (2.82)$$

que se desdobra, pela (2.81), em

$$\frac{T_e}{T_o} = \frac{(k^\mu u_\mu)_e}{(k^\mu u_\mu)_o}. \quad (2.83)$$

Obviamente, em um caso geral, a temperatura da radiação T_o dependerá da direção de observação. Em nosso caso, entretanto, não será assim.

Como vimos na seção precedente, a métrica (2.60) possui vetores de Killing conformes

$$\xi_{conf}^\mu = \delta_o^\mu = a(\eta)u^\mu. \quad (2.84)$$

Utilizando a equação (A.26) do Anexo A, podemos escrever, a partir da Eq. (2.84),

$$\xi_{\mu}^{conf} k^\mu = a(\eta)u_\mu k^\mu = const. \quad (2.85)$$

Logo,

$$a(\eta_e)(u_\mu k^\mu)_e = a(\eta_o)(u_\mu k^\mu)_o, \quad (2.86)$$

de onde obtemos, com o auxílio da Eq. (2.83),

$$\frac{T_e}{T_o} = \frac{a(\eta_o)}{a(\eta_e)} \Rightarrow T_o = T_e \frac{a(\eta_e)}{a(\eta_o)} \quad (2.87)$$

e

$$1 + z = \frac{a(\eta_o)}{a(\eta_e)}. \quad (2.88)$$

Portanto, a temperatura da radiação e o *redshift* observados de objetos astrofísicos não dependem (explicitamente) das posições espaciais do receptor e observador, mas somente dos tempos de emissão e observação dessa radiação, assegurando a isotropia detectada na CMB (em ordem zero), como queríamos demonstrar. Nossa métrica, por conseguinte, apesar de anisotrópica, é compatível com a isotropia da radiação cósmica de fundo, podendo ser empregada na construção de modelos cosmológicos compatíveis com os resultados já bem estabelecidos.

2.2.3. Os Modelos Cosmológicos Anisotrópicos

A partir do tensor momento-energia do fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.89)$$

obtemos

$$\varepsilon = T_0^0 \quad , \quad p_i = -T_i^i \quad (2.90)$$

para a densidade de energia total e as pressões, respectivamente. Dessa forma, as equações (2.76), (2.77) e (2.78) se tornarão, portanto,

$$\varepsilon a^4 = 3a'^2 - a^2, \quad (2.91)$$

$$p_1 a^4 = p_2 a^4 = a'^2 - 2aa'', \quad (2.92)$$

$$p_3 a^2 = p_1 a^2 + 1. \quad (2.93)$$

O conjunto de equações anterior evidencia claramente a mencionada anisotropia presente na métrica, mais precisamente na Eq. (2.93), onde a pressão p_3 difere das demais por um fator $1/a^2$. Os conteúdos materiais usuais (radiação, matéria ou constante cosmológica) não podem gerar tal anisotropia. A nossa saída, então, será propor o *ansatz* de que tal anisotropia se deve à existência de um campo escalar $\phi(x^\mu)$, sem massa, acoplado à gravidade.

O uso de campos escalares em cosmologia tem importante papel no estudo de modelos inflacionários [27] e na cosmologia de Brans-Dicke [25,28,29]. Além disso, a relação observada existente entre distância luminosidade e *redshift* para supernovas tipo Ia (SNe Ia) – *conf.* seção 4.1 – deu lugar a uma forte evidência a favor de uma expansão acelerada do universo. A fim de explicar esta aceleração e ajustar os dados da SNe Ia, modelos cosmológicos com um novo componente material foram propostos. Este componente, denominado *quintessência*, pode ser modelado a partir de um campo escalar com auto-interação, acoplado à gravidade [14].

A partir desta perspectiva, o uso dos campos escalares na busca por soluções anisotrópicas pode ser considerada como uma nova aplicação desses campos em cosmologia. O campo que nós introduziremos não é propriamente um campo de quintessência, pois não provoca aceleração, a qual será provocada pela presença da constante cosmológica Λ . De fato, o

campo na forma que proporemos não provocará nem aceleração nem desaceleração, sendo apenas responsável pela geração da anisotropia do modelo.

No espaço-tempo curvo, o campo escalar minimamente acoplado à gravidade deve satisfazer à equação de Klein-Gordon [Anexo B]

$$\phi_{;\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{;\mu} g^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (2.94)$$

e possui tensor momento-energia [Anexo B]

$$T_{\mu}^{\nu} = \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \phi_{;\gamma} \phi_{;\lambda} g^{\gamma\lambda} \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (2.95)$$

Aqui g e $g^{\mu\nu}$ são, respectivamente, o determinante e o inverso do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. δ_{ν}^{μ} representa o delta de Kronecker.

Consideremos agora, que o nosso campo escalar seja dado na forma

$$\phi(z) = Cz, \quad (2.96)$$

com C constante e diferente de zero. Esse campo satisfaz a Eq. (2.94),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{;\mu} g^{\mu\nu})_{;\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{;z} g^{zv})_{;v} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{;z} g^{zz})_{;z} = \\ &= C \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{zz})_{;z} = 0 \quad \therefore (\sqrt{-g} g^{zz})_{;z} = \sqrt{-g}_{;z} g^{zz} + \sqrt{-g} g^{zz}_{;z} = 0, \end{aligned} \quad (2.97)$$

que se anula pelo fato de o tensor métrico independer da coordenada z . Ele possui também componentes diagonais do tensor momento-energia

$$T_0^0 = T_3^3 = -T_1^1 = -T_2^2 = -\frac{C^2}{2a^2}, \quad (2.98)$$

que, pelas Eqs. (2.90), resultará na densidade de energia e pressões, respectivamente,

$$\varepsilon^{(c)} = \frac{C^2}{2a^2}, \quad (2.99)$$

$$p_1^{(c)} = p_2^{(c)} = -p_3^{(c)} = -\frac{C^2}{2a^2}. \quad (2.100)$$

O índice superior (c) referir-se-á à contribuição do campo escalar. Podemos notar que a densidade de energia cai com a^2 e as pressões são anisotrópicas.

Usando o fato de que o campo escalar cai com $1/a^2$ é possível remover qualquer anisotropia presente nas equações de Einstein de nosso espaço-tempo. Definindo

$$\varepsilon \equiv \bar{\varepsilon} + \varepsilon^{(c)}, \quad (2.101)$$

e da mesma forma para as pressões,

$$p_i \equiv \bar{p}_i + p_i^{(c)}, \quad (2.102)$$

onde a barra irá se referir ao conteúdo isotrópico (radiação, matéria e constante cosmológica). Substituindo essas novas definições na Eq. (2.93),

$$\begin{aligned} p_3 a^2 = p_1 a^2 + 1 \therefore \bar{p}_3 a^2 + p_3^{(c)} a^2 = \bar{p}_1 a^2 + p_1^{(c)} a^2 + 1 \Rightarrow \\ \bar{p}_3 a^2 = \bar{p}_1 a^2 - C^2 + 1, \end{aligned} \quad (2.103)$$

nós percebemos que as anisotropias do modelo serão absorvidas pelo campo escalar se $C^2=1$, o que tornará $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3$, ficando nosso campo escalar simplesmente

$$\phi(z) = \pm z, \quad (2.104)$$

suas densidade e pressões iguais a

$$\varepsilon^{(c)} = \frac{1}{2a^2}, \quad (2.105)$$

$$p_1^{(c)} = p_2^{(c)} = -p_3^{(c)} = -\frac{1}{2a^2} \quad (2.106)$$

e as novas equações de Einstein, em função dos parâmetros isotrópicos, na forma

$$\bar{\varepsilon} a^4 = 3a'^2 - \frac{3}{2} a^2, \quad (2.107)$$

$$\bar{p}a^4 = a'^2 - 2aa'' + \frac{a^2}{2}, \quad (2.108)$$

onde $\bar{p} = \bar{p}_i$, para qualquer $i = 1, 2$ ou 3 . Notavelmente, essas equações são justamente as de um modelo aberto de FRW com constante de curvatura $k = -1/2$. De fato, dividindo a Eq. (2.91) por $3a^4$, obtemos a “equação de Friedmann” para o modelo anisotrópico:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{\bar{\epsilon}}{3} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow H^2(\eta) = \frac{\bar{\epsilon}}{3} + \frac{1}{2a^2}, \quad (2.109)$$

onde definimos $H(\eta) \equiv \frac{a'}{a^2} \left(= \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t) \right)$ como o parâmetro de Hubble³ em função do tempo conforme η (compare com a Eq. (2.14)).

Desejamos agora obter as equações análogas às Eqs. (2.24), (2.25) e (2.26), para tanto, definamos as densidades de energia para nosso modelo, a partir do tensor momento-energia do fluido perfeito, como sendo

$$\epsilon_r = \frac{A}{a^4}, \quad (2.110)$$

$$\epsilon_m = \frac{B}{a^3} \quad (2.111)$$

e

$$\epsilon_\Lambda = \Lambda, \quad (2.112)$$

com A , B e Λ constantes. A densidade de energia do conteúdo isotrópico passa então a ser

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_r + \epsilon_m + \epsilon_\Lambda = \frac{A}{a^4} + \frac{B}{a^3} + \Lambda. \quad (2.113)$$

A densidade de energia do campo escalar será dada pela Eq. (2.105). Aplicando a Eq. (2.113) à Eq. (2.107) obtemos

$$A + Ba + \Lambda a^4 = 3a'^2 - \frac{3}{2}a^2 \quad (2.114)$$

de onde vem a integral

³ De agora em diante usaremos apenas a notação H ao invés de $H(\eta)$ para nos referir ao parâmetro de Hubble em função do tempo conforme. Quando nos referirmos ao $H(t)$ o faremos explicitamente.

$$\int d\eta = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2A + 2Ba + 3a^2 + 2\Lambda a^4}} da \quad (2.115)$$

em função do tempo conforme, com condição inicial $a(\eta = 0) = 0$ ou a integral

$$\int dt = \int \frac{\sqrt{6}a}{\sqrt{2A + 2Ba + 3a^2 + 2\Lambda a^4}} da \quad (2.116)$$

em função do tempo cosmológico, com condição inicial $a(t = 0) = 0$. Essas integrais podem ser usadas, em princípio, para se obter a função desconhecida $a(t)$ para o nosso modelo, entretanto, elas não possuem solução analítica, de modo que, se quisermos integrar (2.116), deveremos procurar por soluções numéricas nos limites de integração $0 \leq t \leq t_o$ e $0 \leq a \leq a_o$, conhecendo os valores das constantes A , B , Λ e a_o .

Da Eq. (2.114), dividindo-a por $3a^4$ e reorganizando-a, podemos obter a útil relação

$$H^2 = \frac{A}{3a^4} + \frac{B}{3a^3} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{1}{2a^2}, \quad (2.117)$$

da qual também podemos escrever, dividindo-a por H^2 ,

$$\Omega^{(c)} = 1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_\Lambda, \quad (2.118)$$

onde definimos o parâmetro de densidade (análogo ao do termo de curvatura, com exceção do fator 2) $\Omega^{(c)} \equiv \frac{1}{2H^2 a^2}$. Devido à sua dependência com o fator de escala, denominaremos, por vezes, este termo de “curvatura” do modelo anisotrópico, porém, chamamos a atenção que nele se encerra, além da curvatura, a contribuição da densidade de energia do campo escalar, responsável pela anisotropia.

O fator de desaceleração pode também ser obtido a partir da relação (2.33):

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2},$$

que em função do tempo conforme torna-se

$$q(\eta) = -\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{da}{dt}\right) \cdot a}{\left(\frac{da}{dt}\right)^2} = -\frac{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{da}{d\eta} \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{da}{d\eta} \frac{1}{a}\right)^2} = -\frac{\frac{1}{a} \frac{d^2a}{d\eta^2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{d\eta}\right)^2}{\left(\frac{da}{d\eta} \frac{1}{a}\right)^2} = 1 - \frac{a \frac{d^2a}{d\eta^2}}{\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2} \Rightarrow$$

$$q(\eta) = 1 - \frac{aa''}{a'^2}. \quad (2.119)$$

Utilizando a Eq. (2.114), após algumas manipulações, obtemos

$$a'^2 = \frac{2\Lambda a^4 + 3a^2 + 2Ba + 2A}{6} \quad (2.120)$$

e

$$a'' = \frac{4\Lambda a^3 + 3a + B}{6}, \quad (2.121)$$

e, então, a partir da Eq.(1.119),

$$q(\eta) = \frac{-2\Lambda a^4 + Ba + 2A}{2\Lambda a^4 + 3a^2 + 2Ba + 2A}. \quad (2.122)$$

Para um universo acelerado, deveremos ter

$$q < 0 \Rightarrow 2\Lambda a^4 > Ba + 2A \Rightarrow \Lambda > \frac{B}{2a^3} + \frac{A}{a^4} = \frac{\epsilon_m}{2} + \epsilon_r \quad (2.123)$$

ou (dividindo por $3H^2$)

$$\Omega_\Lambda > \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r. \quad (2.124)$$

Deveremos obter ainda os parâmetros constantes através de ajustes às observações. Com esse objetivo é necessário obtermos uma expressão da equação que representa a dinâmica do universo em função do redshift. Assim, dividindo a Eq. (2.117) por H_o^2 , obtemos

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \frac{A}{3H_o^2 a^4} + \frac{B}{3H_o^2 a^3} + \frac{\Lambda}{3H_o^2} + \frac{1}{2H_o^2 a^2}. \quad (2.125)$$

Ainda, sabemos que

$$\epsilon_{ro} = \frac{A}{a_o^4} \Rightarrow A = \epsilon_{ro} a_o^4 \quad (2.126)$$

e que

$$\epsilon_{mo} = \frac{B}{a_o^3} \Rightarrow B = \epsilon_{mo} a_o^3. \quad (2.127)$$

Então, substituindo as Eqs. (2.126) e (2.127) na Eq. (2.125) temos

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{ro} \left(\frac{a_o}{a} \right)^4 + \Omega_{mo} \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 + \Omega_o^{(c)} a_o^2 \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \Omega_\Lambda, \quad (2.128)$$

e, utilizando a relação entre o *redshift* e o fator de escala – Eq. (2.52) –, obtemos

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{ro} (1+z)^4 + \Omega_{mo} (1+z)^3 + \Omega_o^{(c)} (1+z)^2 + \Omega_\Lambda \quad (2.129)$$

ou, eliminando o parâmetro $\Omega_o^{(c)}$ através da Eq. (2.118),

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{ro} (1+z)^4 + \Omega_{mo} (1+z)^3 + (1 - \Omega_{ro} - \Omega_{mo} - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda, \quad (2.130)$$

de onde definiremos ainda a função $E(z)$:

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_o} = \sqrt{\Omega_{ro} (1+z)^4 + \Omega_{mo} (1+z)^3 + (1 - \Omega_{ro} - \Omega_{mo} - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}, \quad (2.131)$$

que será usada mais adiante a fim de se obter o ajuste desejado.

Capítulo 3

Determinação de Distâncias Cosmológicas

Talvez tenha sido Galileu o pioneiro e fundador do método científico: o famoso “ver para crer”. Antes dele, as teorias científicas ficavam apenas no campo filosófico; das idéias. Galileu, então, inaugurou um novo caminho para o desenvolvimento da ciência, que é a necessidade de teste para comprovação das teorias científicas, quando – conta-se – abandonou do alto da torre de Pisa, na Itália, duas balas: uma de mosquete e outra de canhão, no intuito de mostrar que Aristóteles estava errado quando afirmou que a velocidade de queda dos corpos dependia da massa dos mesmos. O que Galileu verificou foi que ambos chegavam praticamente juntos ao chão – a pequena diferença era devida apenas à resistência do ar. É possível que tenha sido a teoria aristotélica sobre a queda dos corpos a primeira a ser derrubada empiricamente. O fato é que, de lá para cá, uma teoria, para ser considerada científica, deve ter a possibilidade de ser testada. Foi, inclusive, Galileu o primeiro a observar o céu “com outros olhos”, através de uma luneta.

A cosmologia, como teoria científica, não está livre do crivo da comprovação. Apesar de não ser possível a realização de experimentos cosmológicos, os modelos podem ser testados ao ser confrontados aos fatos observacionais conhecidos sobre o universo.

Nesse contexto, além do *redshift*, existem outras grandezas passíveis de medição cosmológica, tais como distâncias, intensidade luminosa, posição angular. As medições de distâncias, porém, não são feitas de forma fácil, devido ao fato de não podermos estender uma régua ou fita métrica até o objeto ao qual se quer medir a distância, como é feito comumente na Terra. O método de reflexão de sinais de rádio, como veremos abaixo, é útil apenas para

pequenas distâncias, mas falha na medição de grandes distâncias, devido à dificuldade de detecção da reflexão desses sinais. Entretanto, existem outros meios de se medir distâncias a corpos celestes e/ou galáxias.

3.1. Distâncias curtas

Quando nos referimos a distâncias dentro do nosso Sistema Solar, o método utilizado é o da reflexão de sinais de radar: sinais são enviados a partir da Terra em direção ao astro em questão, que os reflete. Medido o tempo Δt de viagem do sinal, a distância ao referido astro é encontrada por $(c\Delta t)/2$. Nesse caso, desprezamos a velocidade peculiar do astro em questão em relação à velocidade da luz (no caso da Terra, por exemplo, $v_{\text{Terra}} \approx 30$ km/s em relação ao Sol, que é muito menor que $c \approx 300.000$ km/s). A distância média ao Sol, por exemplo, é de 149.597.870,61 km \equiv 1 UA (unidade astronômica). A técnica de radar, porém, só é útil para distâncias dentro do Sistema Solar. A partir de 10 UA, a reflexão de ondas de rádio dificilmente é detectada. Acima dessa escala o método utilizado é o da *paralaxe trigonométrica*.

O movimento da Terra ao redor do Sol faz com que qualquer estrela produza um movimento anual aparente ao redor de uma elipse. Tal movimento pode ser percebido através da observação das estrelas que estão ao fundo no céu – denominadas *estrelas fixas*. Na antiguidade algumas estrelas eram chamadas de estrelas fixas na esfera celeste, pois suas posições relativas pareciam não variar entre si com o passar do tempo. Tais estrelas diferiam dos planetas principalmente pelo fato de que os planetas pareciam se mover por entre as estrelas fixas (daí o nome “aquele que vagueia”). Assim, conhecida a distância média Terra-Sol (= 1 UA), podemos através de uma trigonometria simples obter a distância de paralaxe a uma determinada estrela pela fórmula

$$d_{\text{paralaxe}} = \frac{D}{\tan \theta}, \quad (3.1)$$

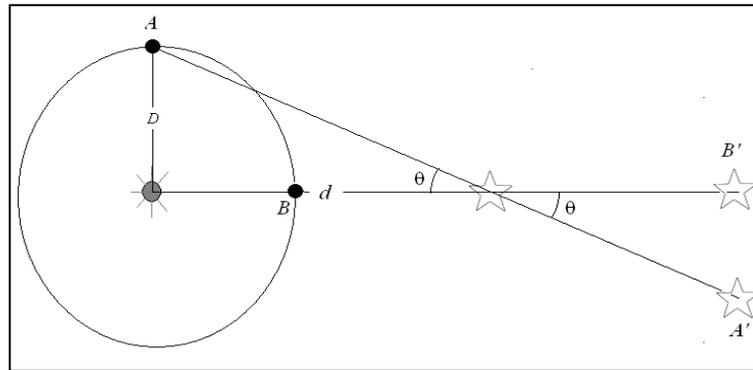


Fig. 3.1: Estrela vista nas posições aparentes A' e B' a partir das posições A e B da Terra, respectivamente.

onde θ é o ângulo medido entre as posições aparentes da estrela, vista da Terra, e D é a distância Terra-Sol (figura 3.1). Como as estrelas encontram-se em distâncias muito grandes comparadas à do Sol à Terra, podemos fazer a aproximação $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ (θ em radianos) e, com isso, a distância de paralaxe torna-se

$$d_{\text{paralaxe}} = \frac{D}{\theta}. \quad (3.2)$$

As primeiras estrelas a terem suas distâncias de paralaxe medidas foram α -Centauri, por Thomas Henderson, em 1832, e 61-Cygni, por Friedrich Bessel, em 1838 [4]. Essas estrelas estão a distâncias de 1,35 pc e 3,48 pc, respectivamente. A atmosfera da Terra torna muito difícil a medição de paralaxes trigonométricas menores que $0,03''$ (segundos de arco) a partir de telescópios situados em sua superfície, de modo que, por muitos anos, este método pôde ser utilizado apenas para encontrar distância de estrelas inferiores a 30 pc, e, nessas distâncias só há algumas poucas estrelas, e, ainda assim, essas medidas são obtidas com pequena precisão. Entretanto, o satélite Hipparcos, lançado pela agência espacial européia em 1989, foi capaz de encontrar distâncias de paralaxe para cerca de 10^5 estrelas, com precisão da ordem de 1 miliarco-segundo. No entanto, a medição de θ para galáxias com distâncias da ordem de 100 Mpc, usando a órbita da Terra como linha de base, exige uma precisão menor que 10 nanoarco-segundos, precisão que a tecnologia atual não nos oferece [4].

3.2. Distância própria (d_p)

Quando tratamos de distâncias curtas, dentro do Sistema Solar ou mesmo da nossa galáxia ou grupo local (< 100 Mpc), o efeito de expansão do universo pode ser desprezado, devido à relativa pequena escala em que estamos efetuando as medições. Contudo, quando tratamos de escalas cosmológicas o mesmo não pode ser feito; as distâncias variarão conforme o tempo passa e o universo se expande. Dessa forma, se queremos medir uma distância entre dois objetos, devemos especificar em qual instante se quer sabê-la. Se supusermos estarmos na origem de um sistema de coordenadas e observamos uma galáxia nas coordenadas comóveis (r, θ, ϕ) , então a *distância própria* entre ela e nós no instante t , $d_p(t)$, será igual ao comprimento espacial da geodésica quando o fator de escala tem seu valor fixado em $a(t)$. Vejamos no caso particular da métrica FRW:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (3.3)$$

Ao observarmos uma galáxia, o fazemos através de ângulos θ e ϕ constantes, conseqüentemente,

$$dt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.4)$$

de onde obtemos a distância própria entre ela e nós

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}. \quad (3.5)$$

Fazendo a transformação de coordenadas $r = f_k(\chi)$, onde

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & (k = +1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh \chi & (k = -1) \end{cases},$$

resolvemos a integral em (3.5), obtendo a distância própria em um instante t arbitrário,

$$d_p(t) = a(t)\chi. \quad (3.6)$$

A velocidade com que a galáxia se afasta de nós pode, então, ser obtida derivando-se a Eq. (3.6)

$$v_p(t) = \dot{d}_p(t) = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}d_p(t). \quad (3.7)$$

Assim, no instante de observação ($t = t_o$), existe uma relação linear entre a distância própria e a velocidade de afastamento da galáxia:

$$v_p(t_o) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_o} d_p(t_o) = H_o d_p(t_o), \quad (3.8)$$

que é, justamente, a lei de Hubble – Eq. (1.4).

Quando nós observamos uma galáxia distante, nós podemos conhecer sua posição angular muito bem, mas sua distância é de difícil determinação. Entretanto, podemos medir o *redshift* da luz proveniente da mesma e relacioná-lo à distância própria. Com a ajuda da Eq. (2.46) podemos reescrever a Eq. (3.5), para o instante de observação t_o , na forma

$$d_p(t_o) = a(t_o) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = a(t_o) \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow$$

$$d_p(t_o) = \int_{t_e}^{t_o} \frac{a_o}{a} dt. \quad (3.9)$$

Se tomarmos, na Eq. (3.9), o tempo de emissão $t_e = 0$, então definimos a *distância de horizonte*

$$d_{hor}(t_o) = a(t_o) \int_0^{t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.10)$$

que é a máxima distância que a luz proveniente de uma galáxia pôde percorrer até o momento atual. Objetos que estão a uma distância maior que $d_{hor}(t_o)$ não podem ser observados, pois a radiação por eles emitida não teve tempo suficiente para alcançar o observador e estão, conseqüentemente, desconectados causalmente.

Tomando agora a Eq. (2.51) e a diferenciando, obteremos

$$dz = -\frac{a_o}{a^2} \frac{da}{dt} dt = -\frac{a_o}{a} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right) dt = -(1+z)H(z)dt, \quad (3.11)$$

que substituindo na Eq. (3.9), nos fornecerá (com as devidas substituições dos limites de integração: $t_e \rightarrow z$, $t_o \rightarrow z=0$)

$$d_p(t_o) = -\int_z^0 (1+z') \frac{dz'}{(1+z')H(z')} \Rightarrow$$

$$d_p(t_o) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.12)$$

Portanto, conhecida a função $H(z)$ – ou seja, dado um modelo cosmológico – e medindo-se o *redshift* de determinada galáxia, podemos determinar a sua distância própria no instante da observação. É importante também salientarmos que poderíamos ter também escrito a Eq. (3.9) em função do tempo conforme η . Nesse caso ela se tornaria

$$d_p(t_o) = \int_{\eta_e}^{\eta_o} a_o d\eta. \quad (3.13)$$

A relação (3.11), por sua vez, ficaria na forma

$$dz = -(1+z)H(z)a(\eta)d\eta \quad (3.14)$$

e, conseqüentemente, não haveria qualquer alteração na Eq. (3.12).

Obviamente, a Eq. (3.12), que nos fornece a distância própria a um objeto cosmológico, é calculada em função do modelo que supomos descrever o universo (ou seja, é função do $H(z)$).

3.3. Distância luminosidade (d_L)

Um método muito comum para se determinar distâncias em cosmologia é baseado na medição do fluxo de energia de objetos de luminosidade absoluta L conhecida (denominados de “velas-padrão”). A luminosidade absoluta é a energia por ele irradiada por unidade de tempo. Dessa forma, o fluxo (energia/segundo) medido por unidade de área de um receptor, f , situado a uma distância d da fonte de emissão, será dado por

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (3.15)$$

supondo que a mesma seja emitida isotropicamente pela fonte. Essa energia será distribuída também isotropicamente em uma esfera de raio d e área $4\pi d^2$. Assim, se conhecemos de alguma maneira a luminosidade L de um objeto, então nós podemos medir o fluxo f e definir uma função denominada *distância luminosidade*:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Essa distância seria a distância própria a um objeto astronômico se o universo fosse plano e estático. Entretanto, para um universo que se expande, o fluxo por unidade de área decairá na razão $1/(1+z)^2$. Primeiro, devido ao decréscimo de energia sofrido por cada fóton por conta da expansão (visto que a energia de um fóton é proporcional ao inverso do comprimento de onda, λ^{-1}), e assim, da Eq. (2.51), a relação entre os comprimentos de onda emitidos e observados se torna

$$\lambda_o = \frac{a_o}{a} \lambda_e = (1+z)\lambda_e \quad (3.17)$$

e a energia de cada fóton cairá como

$$E_o = \frac{E_e}{1+z}. \quad (3.18)$$

Segundo, porque, devido à expansão do universo, o tempo entre detecção dos fótons será maior (lembrando que $L = E/\Delta t$). Se dois fótons são emitidos separados por um intervalo de tempo δt_e , no instante da detecção sua separação temporal será $\delta t_o = \delta t_e (1+z)$. Assim, a relação entre a luminosidade emitida e a observada ficará

$$\frac{L_o}{L_e} = \frac{E_o}{E_e} \frac{\delta t_e}{\delta t_o} = \frac{E_o}{E_o(1+z)} \frac{\delta t_o/(1+z)}{\delta t_o} = \frac{1}{(1+z)^2} \Rightarrow$$

$$L_o = \frac{L}{(1+z)^2}, \quad (3.19)$$

onde fizemos $L_e = L$. Além disso, se o universo não é plano, a energia será distribuída não em uma superfície esférica, mas em uma generalização da mesma para um espaço curvo descrito pela métrica FRW, dada pela área própria

$$A_p(t_o) = 4\pi a_o^2 f_k^2(\chi)^1. \quad (3.20)$$

Dessa forma, o fluxo observado se torna

$$f = \frac{L}{4\pi a_o^2 f_k^2(\chi)(1+z)^2} \quad (3.21)$$

e a distância luminosidade,

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi} \frac{4\pi a_o^2 f_k^2(\chi)(1+z)^2}{L} \right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$d_L = a_o (1+z) f_k(\chi) \quad (3.22)$$

com

¹ Se definirmos $dA_p(t_o) = dl_1 \cdot dl_2$, então, a partir da métrica FRW, obteremos $dl_1 = a_o f_k(\chi) d\theta$, $dl_2 = a_o f_k(\chi) \sin\theta d\varphi$ e $dA_p(t_o) = a_o^2 f_k^2(\chi) \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow A_p(t_o) = 4\pi a_o^2 f_k^2(\chi)$.

$$\chi = \frac{d_p(t_o)}{a_o} = \frac{1}{a_o} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (3.23)$$

No caso de um universo fechado ($k = +1$) a distância luminosidade se tornará

$$d_L = a_o(1+z) \sin \chi = a_o(1+z) \sin \left(\frac{d_p(t_o)}{a_o} \right) = a_o(1+z) \sin \left[\frac{1}{a_o} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right]. \quad (3.24)$$

Para o caso de um universo plano ($k = 0$), obtemos

$$d_L = a_o(1+z) \chi = a_o(1+z) \frac{d_p(t_o)}{a_o} = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (3.25)$$

e, para um universo aberto ($k = -1$), por analogia, obteremos

$$d_L = a_o(1+z) \sinh \left[\frac{1}{a_o} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (3.26)$$

ou ainda, reescrevendo os resultados (3.24), (3.25) e (3.26) em termos de $|\Omega_{ko}| \equiv \frac{1}{H_o^2 a_o^2}$,

obtemos

$$d_L = \begin{cases} \frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2} H_o} \sin \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] & (k = +1) \\ \frac{(1+z)}{H_o} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} & (k = 0) \\ \frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2} H_o} \sinh \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] & (k = -1) \end{cases} \quad (3.27)$$

3.4. Distância diâmetro-angular (d_A)

As distâncias própria e luminosidade não são as únicas distâncias que podem ser calculadas utilizando propriedades de objetos cosmológicos. Existe outro tipo de distância que nós podemos medir quando comparamos comprimentos angulares com dimensões físicas: a

distância diâmetro-angular. Suponhamos que observamos no céu um objeto com o comprimento igual a ds (“régua-padrão”), perpendicular à nossa linha de visão, e cujas extremidades subtendem um ângulo $d\theta$ (muito pequeno) quando vistas da Terra. A geometria euclidiana nos mostra que a distância a esse objeto pode ser determinada pela relação

$$d = \frac{dl}{d\theta}, \quad (3.28)$$

a partir da qual definiremos a distância diâmetro-angular

$$d_A \equiv \frac{dl}{d\theta}. \quad (3.29)$$

Dessa forma, a distância diâmetro-angular é a distância própria ao referido objeto se o universo fosse plano (euclidiano) e estático. Para ilustrar esse fato, suponhamos que as extremidades do referido objeto se encontrem nas coordenadas $(\chi, \theta_1, \varphi)$ e $(\chi, \theta_2, \varphi)$, então a distância entre suas extremidades no momento da emissão da luz que chega até nós será, para um universo descrito pela métrica FRW,

$$dl = a(t_e) f_k(\chi) d\theta, \quad (3.30)$$

e, então,

$$\frac{dl}{d\theta} = a(t_e) f_k(\chi) = d_A. \quad (3.31)$$

Multiplicando e dividindo a Eq. (3.31) por $a(t_o) = a_o$, obtemos a distância diâmetro-angular em função do *redshift*,

$$d_A = \frac{a_o f_k(\chi)}{1+z}. \quad (3.32)$$

A comparação da Eq. (3.40) com a (3.22) nos permite ainda escrever

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (3.33)$$

Para um universo plano ($k = 0$), portanto, a partir das Eqs. (3.6), (3.22) e (3.32) é possível se obter a relação entre as três distâncias

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} = \frac{d_p(t_o)(1+z)}{(1+z)^2} = \frac{d_p(t_o)}{(1+z)}. \quad (3.34)$$

Logo,

$$d_A(1+z) = \frac{d_L}{(1+z)} = d_p(t_o). \quad (3.35)$$

Assim, no caso limite em que $z \rightarrow 0$ (universo estático ou objetos próximos), obtemos $d_p(t_o) = d_A = d_L$.

Por fim, podemos ainda obter, através das Eqs. (3.27), a distância diâmetro-angular para as três possíveis geometrias do universo em função do *redshift*:

$$d_A = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_{ko}|^{1/2} H_o (1+z)} \sin \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] & (k = +1) \\ \frac{1}{(1+z) H_o} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} & (k = 0) \\ \frac{1}{(1+z) H_o |\Omega_{ko}|^{1/2}} \sinh \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] & (k = -1) \end{cases} \quad (3.36)$$

Em geral, a medida de distâncias diâmetro-angular encontra dificuldades devido à obtenção de uma régua-padrão, pois a mesma deve ser larga o suficiente para que possamos medir, a partir da Terra, o ângulo subtendido entre suas extremidades. Assim, quanto mais afastados estiverem esses objetos (que são os objetos de maior interesse cosmológico), maior deverá ser sua largura para que possamos medir com precisão a sua abertura angular. Por outro lado, galáxias oferecem boa abertura angular, porém elas (e os corpos que a constituem) estão em movimento constante, sendo corpos sem forma definida e sendo também difícil se estabelecer o limite desses corpos. Graças a esses fatos, o uso de velas-padrão para a medição da distância luminosidade é mais comum na determinação de distâncias cosmológicas.

3.5. Módulo de distância (μ)

No século II a.C., o astrônomo grego Hiparco (190-126 a.C.) – de quem derivou o nome do satélite citado anteriormente – dividiu as estrelas em seis classes, de acordo com seu brilho aparente, visto a olho nu. As estrelas de maior brilho receberam a classificação de “primeira-magnitude”. As menos visíveis foram classificadas como de “sexta-magnitude”. Em 1856, Norman Robert Pogson (1829-1891) verificou que a percepção do brilho pelo olho humano seguia a lei

$$m = A \log f + B, \quad (3.37)$$

onde A e B são constantes e f , o fluxo luminoso. Ele constatou que o fluxo correspondente a uma estrela de primeira magnitude ($m = 1$) tinha brilho 100 vezes superior a uma com $m = 6$. Assim,

$$m_1 - m_2 = A \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \Rightarrow 1 - 6 = A \log \left(\frac{100 f_2}{f_2} \right), \quad (3.38)$$

de onde obtemos

$$A = -2,5$$

e, dessa forma, a diferença de magnitude

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right). \quad (3.39)$$

Como trabalharemos apenas com diferenças de magnitude, o valor da constante B , que define o zero da escala, será irrelevante.

A partir da Eq. (3.39) definimos a grandeza denominada *magnitude bolométrica aparente*:

$$m \equiv -2,5 \log \left(\frac{f}{f_x} \right), \quad (3.40)$$

e a *magnitude bolométrica absoluta*,

$$M \equiv -2,5 \log \left(\frac{L}{L_x} \right), \quad (3.41)$$

que é a magnitude aparente de um objeto que se encontra a uma distância luminosidade igual a 10 pc. As quantidades f_x e L_x são parâmetros que definem o zero das escalas e o conhecimento de seus valores não será necessário em nosso caso.

Dadas as definições (3.40) e (3.41), podemos agora definir o *módulo de distância* pela relação

$$\mu \equiv m - M = 2,5 \log \left(\frac{L}{L_x} \right) - 2,5 \log \left(\frac{f}{f_x} \right) = 2,5 \log \left(\frac{L f_x}{L_x f} \right). \quad (3.42)$$

Mas, a partir da definição de distância luminosidade (3.16) e tendo em vista que $d_{Lx} = 10\text{pc}$, podemos reescrever a Eq. (3.42) na forma

$$\begin{aligned} \mu = m - M &= 2,5 \log \left(\frac{L \frac{L_x}{4\pi(10\text{pc})^2}}{L_x \frac{L}{4\pi d_L^2}} \right) \Rightarrow \\ \mu = m - M &= 5 \log \left(\frac{d_L}{10\text{pc}} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Em termos de Mpc, a Eq. (3.43) fica

$$\begin{aligned} \mu = m - M &= 5 \log \left(\frac{d_L}{10^{-5} \text{Mpc}} \right) = 5 \log \left(\frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right) - 5 \log(10^{-5}) \Rightarrow \\ \mu = m - M &= 5 \log \left(\frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right) + 25. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ainda, com a ajuda das Eqs. (3.27) podemos escrever o módulo de distância para as diferentes curvaturas do espaço-tempo de FRW e em função do *redshift*:

$$\mu = \begin{cases} 5 \log \left(\frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2} H_o} \sin \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] Mpc^{-1} \right) + 25 & (k = +1) \\ 5 \log \left(\frac{(1+z)}{H_o} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} Mpc^{-1} \right) + 25 & (k = 0) \\ 5 \log \left(\frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2} H_o} \sinh \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] Mpc^{-1} \right) + 25 & (k = -1) \end{cases} \quad (3.45)$$

Deste modo, se conhecermos as relações distância *versus redshift*, podemos utilizá-las para testes observacionais, a fim de qualificar o modelo em estudo.

Capítulo 4

Estimativa de Parâmetros

Entre os diferentes métodos de ajuste de modelos, um em particular requer a escolha apropriada de velas-padrão, ou seja, corpos que tenham sua luminosidade absoluta L conhecida, através da qual será possível se determinar a distância luminosidade e, conseqüentemente, o módulo de distância. Uma candidata a ser essa vela-padrão é a chamada *estrela Cefeida*¹. Essas estrelas são altamente luminosas, luminosidade essa que varia entre 400 e 40.000 L_{sol} , e são pulsantes, o que acarreta em uma variação de sua luminosidade, com períodos que variam entre 1,5 e 60 dias ou até superiores a 100 dias. Em 1912, Henrietta Swan Leavitt, do Harvard College Observatory, descobriu que as variáveis Cefeidas na Pequena Nuvem de Magalhães (SMC, do inglês *Small Magellanic Clouds*) tinham luminosidades aparentes dadas em função do período de variação da luminosidade, mas a distância à SMC não era conhecida. Sendo possível se medir as distâncias e luminosidades aparentes para diversas Cefeidas (e, conseqüentemente, sua luminosidade absoluta) seria possível, então, calibrar a relação entre o período e a luminosidade, tornando-as velas-padrão que poderiam ser usadas para se medir a distância às galáxias nas quais se encontram.

Leavitt, investigando a SMC, mostrou que, como a profundidade dessa constelação era pequena em relação à sua distância a nós, a diferença no fluxo médio dessas estrelas era devido à variação de sua luminosidade média e não à sua distância luminosidade e notou uma clara relação entre o período e o fluxo médio, sendo que as estrelas que possuíam períodos

¹ As Cefeidas mais próximas de nós são a Polaris (130 pc) e a δ Cephei (300 pc), a qual dá origem ao nome dessa classe de estrelas.

mais longos também tinham maior luminosidade. Assim, se a mesma relação entre período e luminosidade fosse válida para todas as Cefeidas, teríamos, então, nossa vela-padrão.

A derivação da relação período-luminosidade é feita hoje a partir da Grande Nuvem de Magalhães (LMC, do inglês *Large Magellanic Clouds*), onde existe uma grande quantidade de Cefeidas e cuja distância luminosidade é conhecida (cerca de 50 kpc). Dessa forma, se nós observamos duas Cefeidas de mesmo período e, conseqüentemente, mesma luminosidade absoluta média, \bar{L} , situadas, por exemplo, uma na LMC e outra em M31, podemos determinar, através da relação entre os fluxos médios dessas estrelas, $\bar{f}_{LMC} / \bar{f}_{M31}$, medida da Terra, e da equação

$$\frac{\bar{f}_{LMC}}{\bar{f}_{M31}} = \left(\frac{d_{L(M31)}}{d_{L(LMC)}} \right)^2, \quad (4.1)$$

obtida a partir da Eq. (3.16), a distância luminosidade a M31.

Foi a descoberta de Cefeidas na galáxia M31, juntamente com a calibração da relação período-luminosidade, que permitiu a Edwin Hubble medir a distância a M31 e verificar seu afastamento de nossa galáxia [4].

Infelizmente, Cefeidas são estrelas muito raras e só algumas poucas estrelas próximas de nossa galáxia tiveram sua medição realizada com precisão pelo satélite Hipparcos. Com o telescópio espacial Hubble foi possível se determinar distâncias até a ordem de 20 Mpc (onde o universo não pode ser considerado nem homogêneo, nem isotrópico). Porém, se quisermos ter informações a respeito do universo como um todo e de tempo mais antigos, devemos ser capazes de efetuar medições em escalas além de 100 Mpc, nas quais o princípio cosmológico passa a ser válido. Nesse caso, necessitamos de uma nova vela-padrão.

4.1. Supernovas (SNes)

Uma estrela é formada a partir de nuvens de gases que começam a se concentrar em certa região do espaço devido à atração gravitacional. Desse processo de concentração, os gases que constituirão a estrela começam a aquecer, em um processo lento que pode levar milhões de anos, até atingirem uma temperatura suficiente para produzir reações termonucleares

como, primeiramente, a fusão do hidrogênio, que, como resultado, leva à formação de hélio e à liberação de uma gigantesca quantidade de energia.

Quando termina a “queima” do hidrogênio, a estrela, então, começa a fase de combustão do hélio. Porém, fundir hélio é mais difícil que hidrogênio, já que a repulsão elétrica é quatro vezes maior para dois núcleos de hélio do que para dois núcleos de hidrogênio. Para que esse processo ocorra, então, a temperatura no interior deve aumentar, o que, de fato, ocorre.

À medida que a estrela vai queimando o seu combustível original, a pressão da radiação, que está, inicialmente, em equilíbrio com a pressão gerada pela atração gravitacional, impedindo que a estrela colapse, cede (em consequência do esgotamento do combustível) ante a pressão gravitacional. Devido a isso o núcleo da estrela se contrai cada vez mais, e por isso aumenta demasiadamente sua temperatura, de cerca de 10^6 °C a 10^8 °C. Na última fase da queima de hidrogênio, este começa a ser consumido na superfície da estrela. Nesta etapa a luminosidade aumenta e a estrela inteira se expande. Ao expandir-se, sua superfície esfria e sua coloração se torna mais vermelha – a estrela se converte em uma *gigante vermelha*.

O estado final de uma estrela dependerá da massa que ela possui: se tiver a massa relativamente pequena, ela poderá se tornar uma *anã branca*; as de maior massa podem explodir em *supernovas*, terminarem em *estrelas de nêutrons* ou até se tornarem *buracos-negros*.

No caso, queremos discutir a dinâmica de uma estrela que a conduz a uma supernova. As estrelas de massa maior (cerca de 10 vezes a massa solar), depois de converter seu hidrogênio, podem seguir fundindo os componentes restantes para formar elementos mais pesados (carbono, oxigênio, neônio, magnésio, silício, e finalmente ferro). Como o núcleo de ferro é o mais estável da natureza, não existe mais a possibilidade de se obter energia usando o ferro como combustível nuclear: a produção de energia nuclear na estrela para abruptamente quando se formam núcleos de ferro. Nesse momento a estrela colapsa, desmoronando-se em si mesma, aumentando a densidade no centro, e, devido à resistência da matéria nuclear, as camadas externas que caem para o interior da estrela são rebatidas em seu centro. Ocorre assim uma grande explosão que destrói a estrela – a supernova. O brilho desta explosão é considerável e pode ser até dez bilhões de vezes mais intenso que do Sol.

A importância das supernovas na cosmologia observacional provém da necessidade de obtermos velas-padrão que possam nos fornecer informações a grandes distâncias, em escalas além de 100 Mpc. Nessas escalas o brilho de objetos tais como Cefeidas não é detectável, sendo, portanto, a supernova, uma nova candidata a indicadora de distâncias, devido à alta

luminosidade que ela gera e às distâncias que podem ser encontradas. Outra vantagem observacional das supernovas é a possibilidade de se isolar a radiação emitida por elas, pois, como são temporárias, seu brilho cresce e diminui em intensidade no decorrer do tempo. Assim, se tivermos a radiação provinda do espaço antes da ocorrência de uma supernova nessa região, podemos, pelo método de subtração de imagens, isolar a radiação emitida apenas por ela.

No início do estudo das supernovas, quando pouco se conhecia a respeito da física envolvida nelas, as supernovas foram divididas em duas categorias, as do tipo I e as do tipo II, baseadas na presença ou não de hidrogênio em seu espectro, de acordo com uma proposta feita em 1941 por Rudolph L. B. Minkowski (1895-1976) [2]. As do tipo I não possuem linhas de absorção ou emissão de hidrogênio em seu espectro, enquanto que as do tipo II as possuem. As supernovas do tipo II são estrelas gigantes com massas superiores a 8 massas solares e que quase totalmente colapsam para formar buracos-negros ou estrelas de nêutrons. As supernovas do tipo I são divididas em dois subtipos: os tipos Ia e Ib. As do tipo Ib são estrelas massivas que colapsam após sua camada externa ser soprada pelo seu forte vento estelar. Já as do tipo Ia (SNes Ia) são completamente diferentes. Elas ocorrem quando uma anã branca, num sistema binário, adquire massa da companheira e, ao ultrapassar o limite de Chandrasekhar (cerca de 1,4 massas solares), a explosão é acionada. A explosão da estrela sempre ocorre com uma massa próxima desse limite, de modo que existe muito pouca variação em sua luminosidade absoluta (ou seja, elas possuem comportamento padrão), fazendo-as, também por isso, indicadores de distâncias ideais.

Se, por exemplo, em uma galáxia próxima, observarmos uma supernova, e, nessa galáxia, ainda encontra-se uma Cefeida, através de seu período de pulsação, podemos, por meio de curvas de calibração de período x luminosidade, obter sua magnitude aparente, medindo-se o fluxo, e por meio da Eq. (3.40) sua distância luminosidade, a qual, devido à distância da referida galáxia a nós ser muito superior às dimensões da mesma, será, aproximadamente, a distância luminosidade da supernova. A partir daí obtemos o módulo de distância e sua luminosidade absoluta (e conseqüente magnitude absoluta²), por meio da Eq. (3.41) – que é seu fluxo a uma distância de 10 pc da Terra. Tendo, portanto, a magnitude absoluta dessas supernovas, podemos medir o módulo de distância observacional e comparar com o obtido teoricamente (por exemplo, a partir das equações (3.45) para um universo descrito pela

² A de SNes Ia foi encontrada como sendo $M_{(SNes Ia)} \approx 19,5$ mag.

métrica FRW, como é o caso do modelo Λ CDM), a fim de se obter o melhor conjunto de parâmetros que se adéquem às observações. Isso consistirá no teste que descreveremos agora para as observações de supernovas.

4.1.1. Procedimentos do ajuste

A função que quantifica a concordância entre o modelo teórico e os dados obtidos da observação é expressa pelo χ^2 (*chi* quadrado) e definida pela equação

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu_{teor}(z_i | \theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.2)$$

onde $\mu_{obs}(z_i)$ corresponde ao módulo de distância calculado a partir do *redshift* (z_i) medido da i -ésima supernova do conjunto de N supernovas; o termo $\mu_{teor}(z_i | \theta)$ refere-se ao módulo de distância teórico calculado para o mesmo *redshift* (z_i), para um dado conjunto de parâmetros livres (θ) do modelo; e o σ_i^2 refere-se à soma dos quadrados dos erros nas medições do módulo de distância, *redshift* e erros sistemáticos, ou seja, $\sigma_i^2 = (\sigma_{\mu_i})^2 + (\sigma_{z_i})^2 + (\sigma_{sist_i})^2$.

O teste, portanto, consiste em atribuir diferentes valores para o conjunto de parâmetros livres e calcular, para uma dada compilação de N supernovas, qual conjunto minimiza a função χ^2 , obtendo-se, assim, o χ_{min}^2 (*chi* quadrado mínimo).

A qualificação do modelo é dada pela função χ^2 reduzido (χ_r^2), definida por

$$\chi_r^2 \equiv \frac{\chi_{min}^2}{\nu}, \quad (4.3)$$

sendo que, tanto melhor será o modelo, quanto mais próximo de 1 estiver o χ_r^2 . Na Eq. (4.3) o termo ν refere-se ao número de graus de liberdade ($= N - n^\circ$ de parâmetros livres).

Uma vez conhecido o conjunto de parâmetros que melhor se ajusta aos dados observacionais (ou seja, que possui o menor χ^2), definimos *níveis de confiança* sobre os quais podemos estimar a probabilidade de o melhor valor se encontrar dentro desses limites. Esses limites são estabelecidos dentro de uma região $\chi^2 < \chi_{min}^2 + \delta\chi_o^2$, onde os valores de $\delta\chi_o^2$,

obtidos da Estatística, são denominados níveis 1σ , 2σ e 3σ . Esses níveis expressam, respectivamente, as probabilidades 68,3%, 95,4% e 99,73% de se encontrar o valor mais provável em cada um deles. O $\delta\chi_o^2$ também depende do número de parâmetros livres existentes no ajuste realizado. A tabela 4.1 descreve os valores de $\delta\chi_o^2$ para diferentes níveis de confiança e diferentes números de parâmetros livres.

Quando queremos nos limitar apenas à distribuição probabilística de dois parâmetros ao invés de três, por exemplo, é útil utilizarmos uma nova função χ_*^2 , ao invés da função χ^2 , mas definida em termos dessa última (dizemos, nesse caso, que *marginalizamos* sobre o terceiro parâmetro). A razão principal para tal redução de parâmetros consiste na redução de tempo no cálculo computacional. No caso da Cosmologia, é comum se marginalizar sobre o parâmetro de Hubble ou sobre o parâmetro adimensional h , definido por

$$h \equiv \frac{H_o}{100 \frac{km/s}{Mpc}} \quad (4.4)$$

visto que esse parâmetro pode ser muito bem determinado por métodos independentes do modelo. Nesse caso, a função χ_*^2 será

$$\chi_*^2 = \chi^2 - \frac{C_1}{C_2} (C_1 + 0,4 \ln 10) - 2 \ln h_* \quad (4.5)$$

onde o χ^2 é dado na Eq. (4.2) e os termos C_1 e C_2 são

$$C_1 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\mu_{obs}(z_i) - \mu_{teor*}(z_i | \theta)}{\sigma_i^2}, \quad C_2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (4.6)$$

Aqui, definimos $\mu_{teor*}(z_i | \theta) \equiv \mu_{teor}(z_i | \theta, h = h_*)$, onde o termo h_* pode ser tomado com qualquer valor, pois a derivada de (4.5) em relação a h_* se anula independentemente da escolha do seu valor³.

³Para mais detalhes ver referência [10].

Níveis	Probabilidade	Nº de parâmetros livres		
		1	2	3
1σ	68,3%	1,00	2,30	3,53
2σ	95,4%	4,00	6,17	8,02
3σ	99,73%	9,00	11,8	14,2

Tabela 4.1: Valores de $\delta\chi_o^2$ para diferentes níveis de confiança e quantidade de parâmetros livres.

i) Ajuste nos modelos Λ CDM

Os ajustes dos modelos Λ CDM se darão através das expressões do módulo de distância:

$$\mu(z) = \begin{cases} 5 \log \left(\frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2} H_o} \sin \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] Mpc^{-1} \right) + 25 & (k = +1) \\ 5 \log \left(\frac{(1+z)}{H_o} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} Mpc^{-1} \right) + 25 & (k = 0) \\ 5 \log \left(\frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2} H_o} \sinh \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] Mpc^{-1} \right) + 25 & (k = -1) \end{cases}, \quad (4.7)$$

deduzidas no capítulo anterior para os diferentes tipos de curvatura da métrica FRW. Tendo em vista que no sistema de unidades que estamos utilizando $c = 1$, logo, $km/s = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$, após alguns cálculos simples obtemos

$$\mu(z) = \begin{cases} 5 \log \left(\frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2}} \sin \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \right) - 5 \log(h) + 42,38 & (k = +1) \\ 5 \log \left((1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) - 5 \log(h) + 42,38 & (k = 0) \\ 5 \log \left(\frac{(1+z)}{|\Omega_{ko}|^{1/2}} \sinh \left[|\Omega_{ko}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] \right) - 5 \log(h) + 42,38 & (k = -1) \end{cases} \quad (4.8)$$

Aos modelos Λ CDM (plano e curvos) denominaremos k - Λ CDM, onde k é a constante de curvatura que assume os valores $k = +1$, se o modelo for fechado, $k = 0$, se plano, e $k = -1$, se aberto, como é sabido. Na Eq. (4.8) a função $E(z)$ será expressa por

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{mo}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{mo} - \Omega_{\Lambda})(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda}}, \quad (4.9)$$

onde definimos

$$\Omega_{ko} = 1 - \Omega_{mo} - \Omega_{\Lambda} \quad \text{e} \quad |\Omega_{ko}| \equiv \frac{1}{H_o^2 a_o^2}. \quad (4.10)$$

O conjunto de parâmetros livres no caso k - Λ CDM será $\theta = \{\Omega_{mo}, \Omega_{\Lambda}\}$ e será ajustado, por meio de uma rotina *Fortran*, comparando os diversos valores obtidos para χ_{*}^2 para cada valor atribuído ao par $(\Omega_{mo}, \Omega_{\Lambda})$ no intervalo entre 0 e 1,00, com passo de 0,01. Para tanto utilizaremos a compilação de supernovas do *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS)⁴, tratada a partir do método MLCS2K2, que envolve um conjunto de 288 supernovas com *redshifts* variando entre 0,0218 e 1,5510 e que possui um erro sistemático igual 0,16, além dos erros do *redshift* e da magnitude.

ii) Ajuste do modelo anisotrópico

O universo descrito pela métrica FRW é isotrópico. Isso quer dizer que dadas duas galáxias, se observamos os mesmos *redshifts* partindo de ambas, então elas se encontram à mesma distância luminosidade de nós. No caso de nossa métrica anisotrópica isso não é verdade. Para um mesmo *redshift*, podemos obter distâncias luminosidade diferentes, ou seja, a distância luminosidade dependerá, além do *redshift*, do ângulo de observação. Assim sendo, as expressões deduzidas para um universo FRW não deverão ser válidas, em geral, para a nossa métrica. Precisamos, portanto, obter a distância luminosidade para o nossa métrica, que em coordenadas esféricas será expressa por (*conf.* seção 2.2.1):

⁴ www.sdss.org

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\theta^2 - \sinh^2(\chi \sin \theta) d\phi^2] \quad (4.11)$$

O ponto de partida será obtermos a distância diâmetro-angular para o caso anisotrópico da métrica (4.11) e a utilizarmos na equação (3.33), que permanece válida para essa métrica, para obtermos a distância luminosidade.

Quando definimos a distância diâmetro-angular na seção 3.4 utilizamos a relação

$$d_A = \frac{dl}{d\alpha}, \quad (4.12)$$

na qual, $d\alpha$ é o ângulo que subtende a distância ds entre dois pontos observados (duas extremidades de uma galáxia, por exemplo). Entretanto, devido à anisotropia, a distância ds deve se alterar para um mesmo $d\alpha$ conforme muda-se o ângulo de observação θ . Tal dependência pode ser observada através do argumento da função seno-hiperbólico na métrica (4.11). Dessa forma, definiremos a distância diâmetro-angular a partir da relação:

$$d_A^2 = \frac{dA_p}{d\Omega}. \quad (4.13)$$

onde A_p é a área própria e $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, o diferencial do ângulo sólido. No caso FRW é fácil mostrar que a Eq. (4.13) conduz ao mesmo resultado que a Eq. (4.12). Entretanto, no caso de nossa métrica não é assim.

O elemento de área descrito pela métrica anisotrópica pode ser obtido tomando-se a parte espacial da métrica e fixando-se o χ . Daí, obtemos o intervalo espacial

$$dl^2 = a^2(\eta)[\chi^2 d\theta^2 + \sinh^2(\chi \sin \theta) d\phi^2], \quad (4.14)$$

que, por seu caráter infinitesimal, se aproxima da hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são

$$dx = a(\eta)\chi d\theta \quad \text{e} \quad dy = a(\eta)\sinh(\chi \sin \theta) d\phi. \quad (4.15)$$

Logo, o elemento de área própria será

$$dA_p(\eta) = dx \cdot dy = a(\eta)\chi d\theta \cdot a(\eta)\sinh(\chi \sin \theta) d\phi \Rightarrow$$

$$dA_p(\eta) = a^2(\eta)\chi \sinh(\chi \sin \theta) d\theta d\varphi, \quad (4.16)$$

que, dividido pelo ângulo sólido resulta em

$$d_A^2(\eta) = \frac{a^2(\eta)\chi \sinh(\chi \sin \theta)}{\sin \theta} \Rightarrow$$

$$d_A(\eta) = a(\eta)\chi \left[\frac{\sinh(\chi \sin \theta)}{\chi \sin \theta} \right]^{1/2} \quad (4.17)$$

A fim de fazermos análises observacionais, podemos reescrever a Eq. (4.17) em função do *redshift*. Utilizando a Eq. (2.51) que relaciona o *redshift* com o fator de escala, reescrevemos (4.17) na forma

$$d_A(z) = \frac{a_o \chi}{1+z} \left[\frac{\sinh(\chi \sin \theta)}{\chi \sin \theta} \right]^{1/2}, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (4.18)$$

O parâmetro χ pode ser obtido tomando-se a geodésica nula $ds = 0$. Assim,

$$d\chi = d\eta \Rightarrow \chi = \Delta\eta = \int_{\eta_e}^{\eta_o} d\eta = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{da}{a^2 H}, \quad (4.19)$$

mas, como $da = -\frac{a^2}{a_o} dz$,

$$\chi = \Delta\eta = -\frac{1}{a_o} \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')} = \frac{1}{a_o} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} = \frac{1}{a_o H_o} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = \frac{1}{a_o H_o} Z(z), \quad (4.20)$$

com

$$Z(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (4.21)$$

A distância luminosidade, através da Eq. (3.33), torna-se simplesmente

$$d_L(z) = (1+z)a_o \chi \left[\frac{\sinh(\chi \sin \theta)}{\chi \sin \theta} \right]^{1/2}, \quad \theta \in (0, \pi), \quad (4.22)$$

ou, em termos de $|\Omega_{ko}|$:

$$d_L(z) = \frac{(1+z)Z(z)}{H_o} \left[\frac{\sinh(|\Omega_{ko}|^{1/2} Z(z) \sin \theta)}{|\Omega_{ko}|^{1/2} Z(z) \sin \theta} \right]^{1/2}, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (4.23)$$

Podemos notar que, no limite $\theta \rightarrow 0$ ou de χ muito pequeno ($|\Omega_{ko}|^{1/2} Z(z) \rightarrow 0$), a distância luminosidade torna-se a mesma de um modelo FRW plano, ou seja,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} [d_L(z)] = \lim_{|\Omega_{ko}|^{1/2} Z(z) \rightarrow 0} [d_L(z)] = (1+z)a_o \chi \quad (4.24)$$

(cf. eqs. (3.25) e (3.27)). Note também que $|\Omega_{ko}| = \frac{1}{H_o^2 a_o^2} = 2\Omega^{(c)}$ (cf. Eq. (2.117 e 2.118)),

de modo que podemos reescrever (4.23) em função de $\Omega^{(c)}$.

Como até o momento da conclusão deste trabalho não dispúnhamos de dados de supernovas em função de sua dependência angular, optamos por ajustar os parâmetros livres para esse modelo, $\{\Omega_{mo}, \Omega^{(c)}\}$, utilizando a média angular da distância luminosidade no intervalo $[0, \pi]$, calculada para cada z (devido à dependência da média ao produto $|\Omega_{ko}|^{1/2} Z(z)$). O módulo de distância, portanto, nesse caso ficará

$$\mu(z) = 5 \log(H_o \bar{d}_L(z)) - 5 \log(h) + 42,38 \quad (4.25)$$

onde $\bar{d}_L(z)$ é a média da Eq. (4.23) calculada no intervalo $\theta \in [0, \pi]$.

Nesse ajuste também utilizaremos a mesma compilação de dados de supernovas utilizada para o modelo padrão, isto é, a SDSS (MLCS2K2), e variaremos o conjunto de parâmetros $\{\Omega_{mo}, \Omega^{(c)}\}$ entre os valores 0 e 1,00, com passos de 0,01.

4.1.2. Resultados

Procedendo conforme descrito anteriormente foi possível obter o melhor ajuste para o modelo k - Λ CDM nos valores $\Omega_{mo} = 0,390$, $\Omega_{\Lambda} = 0,581$ e $\Omega_{ko} = 0,029$ (com um $\chi_r^2 = 0,840$), revelando uma pequena curvatura negativa ($\Omega_{total} = \Omega_{mo} + \Omega_{\Lambda} = 0,971 < 1$) – universo

levemente aberto. No intervalo referente ao nível 2σ , obtemos os valores $0,16 < \Omega_{mo} < 0,58$ e $0,12 < \Omega_{\Lambda} < 0,95$. A máxima curvatura se deu para $\Omega_{ko} = 0,71$, enquanto a mínima ficou em $\Omega_{ko} = -0,51$ nesse mesmo nível. As curvas de nível podem ser observadas no gráfico 4.1 (esquerda). No caso do modelo anisotrópico, obtivemos o melhor ajuste com os parâmetros $\Omega_{mo} = 0,381$, $\Omega_{\Lambda} = 0,574$ e $\Omega_o^{(c)} = 0,045$, com um $\chi_r^2 = 0,840$ e um $\Omega_{total} = 0,955$. Os valores no nível 2σ para esse modelo foram $0 < \Omega_{mo} < 0,48$ e $0,04 < \Omega_{\Lambda} < 0,67$. O parâmetro de densidade $\Omega_o^{(c)}$ máximo nesse nível de confiança se deu em $\Omega_o^{(c)} = 0,95$, e mínimo em $\Omega_o^{(c)} = 0$. As curvas de nível estão representadas no gráfico 4.1 (direita).

Na tabela 4.2 apresentamos um comparativo dos melhores valores obtidos para ambos os modelos, bem como o fator de desaceleração q_o e o parâmetro de idade $H_o t_o$, calculados a partir das Eqs (2.57) e (2.58), respectivamente.

Modelo	Ω_{mo}	$\Omega_{ko} \Omega_o^{(c)}$	Ω_{Λ}	χ_{*r}^2	q_o	$H_o t_o$
Λ CDM	0,390	0,029	0,581	0,840	-0,386	0,888
Anisotrópico	0,381	0,045	0,574	0,840	-0,384	0,890

Tabela 4.2: Resultados das análises realizadas para os modelos k - Λ CDM e anisotrópico, decorrentes de ajustes através do *sample* SDSS (MLCS2K2).

Modelo	k - Λ CDM		Anisotrópico	
	Ω_{mo}	Ω_{Λ}	Ω_{mo}	Ω_{Λ}
1σ (68,3%)	[0,28 ; 0,49]	[0,36 ; 0,77]	[0,12 ; 0,45]	[0,21 ; 0,65]
2σ (95,4%)	[0,16 ; 0,58]	[0,12 ; 0,95]	[0,00 ; 0,48]	[0,04 ; 0,67]
3σ (99,7%)	[0,02 ; 0,68]	[-0,15 ; 1,09]	[0,00 ; 0,52]	[-0,07 ; 0,72]

Tabela 4.3: Parâmetros dos modelos k - Λ CDM e anisotrópico, para os níveis de confiança 1σ , 2σ e 3σ .

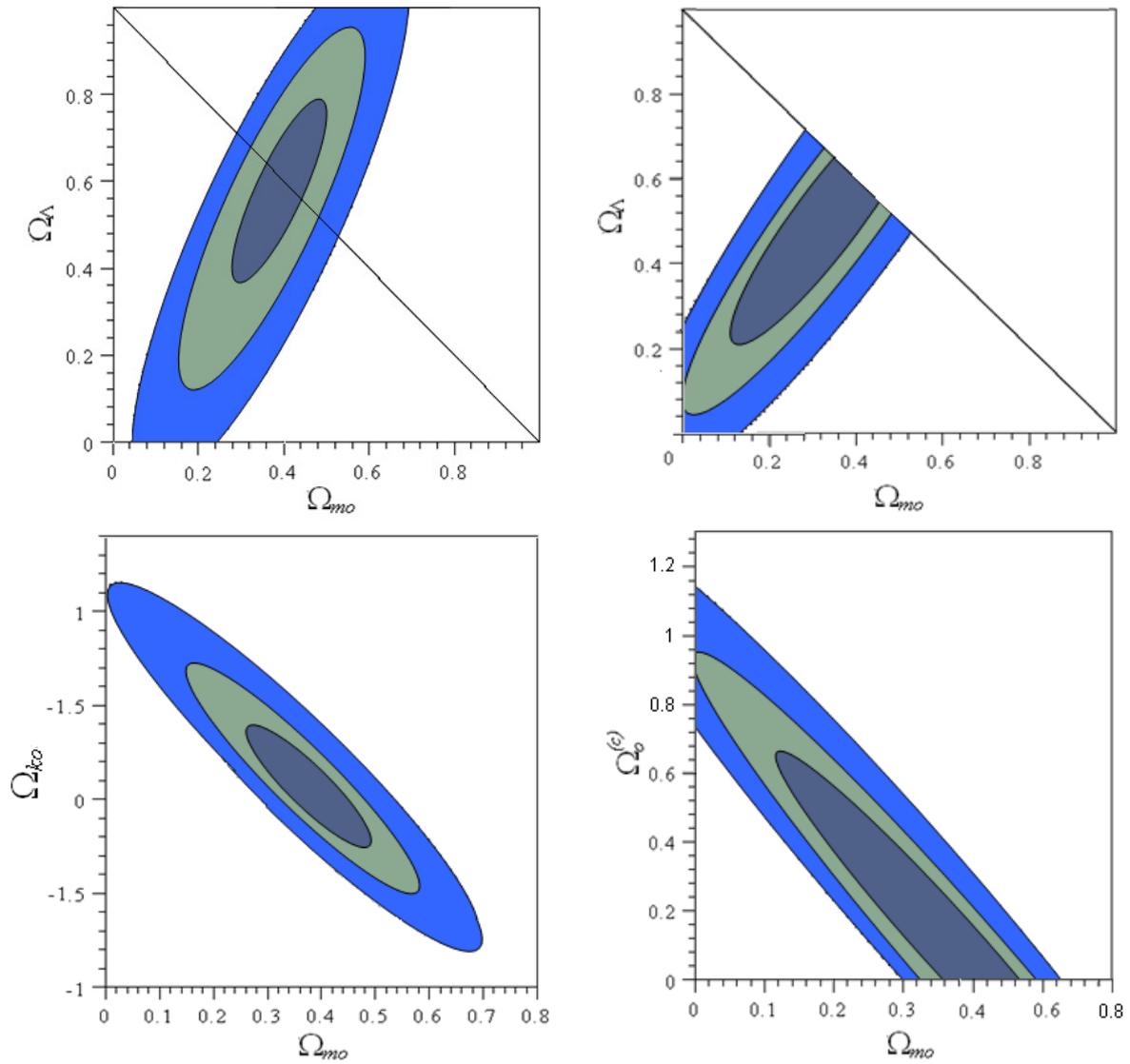


Gráfico 4.1: Curvas de nível de confiança para os intervalos 1σ , 2σ e 3σ dos modelos k - Λ CDM (esquerda) e anisotrópico (direita) – SDSS (MLCS2K2).

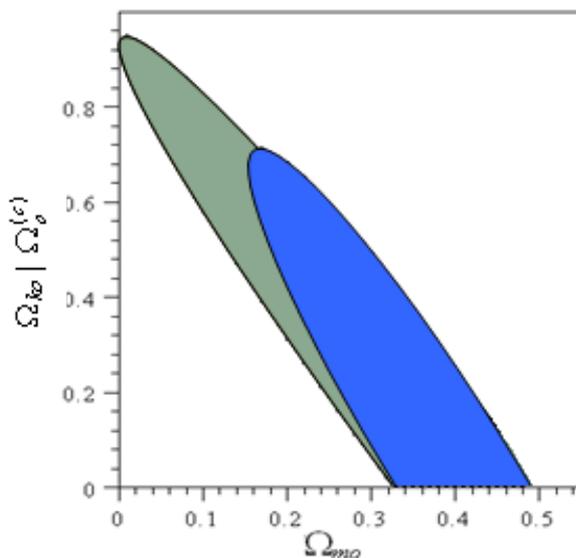


Gráfico 4.2: Curvas de nível para o intervalo de confiança 2σ dos modelos k - Λ CDM (escuro) e anisotrópico (claro) – SDSS (MLCS2K2).

Os parâmetros para os níveis de confiança 1σ , 2σ e 3σ (respectivamente, 68,3%, 95,4% e 99,7%) podem ser observados na tabela 4.3, bem como nos gráficos 4.1, para ambos os modelos. Podemos notar, em particular, a ausência da parte superior do gráfico $\Omega_\Lambda \times \Omega_{mo}$ do modelo anisotrópico (gráfico superior à direita) que se deve ao fato de que esse modelo é aberto apenas, ou seja, $\Omega_\Lambda + \Omega_{mo} < 1$.

O gráfico 4.2 revela as regiões de concordância e de discordância dos dois modelos no nível 2σ . Particularmente, nesse gráfico pode-se notar que para um $\Omega_{mo} < 0,16$ há uma discordância significativa entre suas curvaturas. No que diz respeito aos aspectos de anisotropia, o nosso modelo nos oferece uma maneira de detectá-la, se existir. Com esse objetivo, definimos o desvio relativo máximo (do ângulo $\theta = \pi/2$ em relação ao ângulo $\theta = 0$) da distância luminosidade para um dado *redshift* (z_i),

$$\Delta d_L(z_i) = \left| \frac{d_L(\theta = \pi/2) - d_L(\theta = 0)}{d_L(\theta = 0)} \right|_{z=z_i}, \quad (4.26)$$

com o qual foi possível obter uma curva desse desvio em função do *redshift*, utilizando, para tanto, a “curvatura” máxima dentro do intervalo de 2σ que corresponde a um parâmetro de densidade da matéria mínimo igual 0,25 ($\Omega_o^{(c)} = 0,52$) [24]. O resultado está ilustrado no gráfico 4.3. O gráfico 4.4 expressa um comparativo entre os módulos de distância observados (dispersão) e teóricos (linhas contínuas correspondendo aos valores máximo, mínimo e médio da distância luminosidade), demonstrando que, para o intervalo de *redshifts* disponível no SDSS, as predições teóricas se encontram dentro do limite de erro experimental (curvas superpostas). Quando extrapolamos o limite de *redshifts* do SDSS (gráfico 4.5), observamos que as distâncias luminosidade teóricas máxima, mínima e média começam a divergir em torno do *redshift* $z = 2$, demonstrando a possibilidade de detecção da anisotropia, se existir, a partir de dados de supernovas com *redshifts* $z > 2$. Uma nova análise no gráfico 4.3 mostra que o desvio relativo em torno do valor $z = 2$ seria próximo de 10%.

Em nosso ajuste, detectamos que o melhor impõe uma pequena curvatura (universo aberto) para o modelo k - Λ CDM. Este fato indica a possibilidade de se confundir uma possível anisotropia com uma curvatura presente no universo. A fim de verificarmos dentro de qual intervalo de *redshifts* ambos os modelos se confundem, traçamos um gráfico (gráfico 4.6) da magnitude média anisotrópica, do k - Λ CDM e das magnitudes observacionais em função de z , para os valores de parâmetros que melhor se ajustaram em ambos os modelos. O resultado foi

curvas superpostas neste intervalo, ambas concordando com os dados observacionais, mesmo extrapolando o limite $z = 2$ (gráfico 4.7). Entretanto, quando tomamos os valores da maior curvatura possível no nível 2σ para um $\Omega_{mo} = 0,25$ ($\Omega_o^{(c)} = 0,52$ e $\Omega_{ko} = 0,64$) (gráfico 4.8), as magnitudes do modelo anisotrópico e do k - Λ CDM passam a divergir, particularmente, a partir do *redshift* $z = 2$. Indicando que acima desse limite de *redshift* o teste se torna mais sensível para a anisotropia, divergindo dos efeitos de curvatura apenas, sendo possível, então, a sua detecção, caso exista.

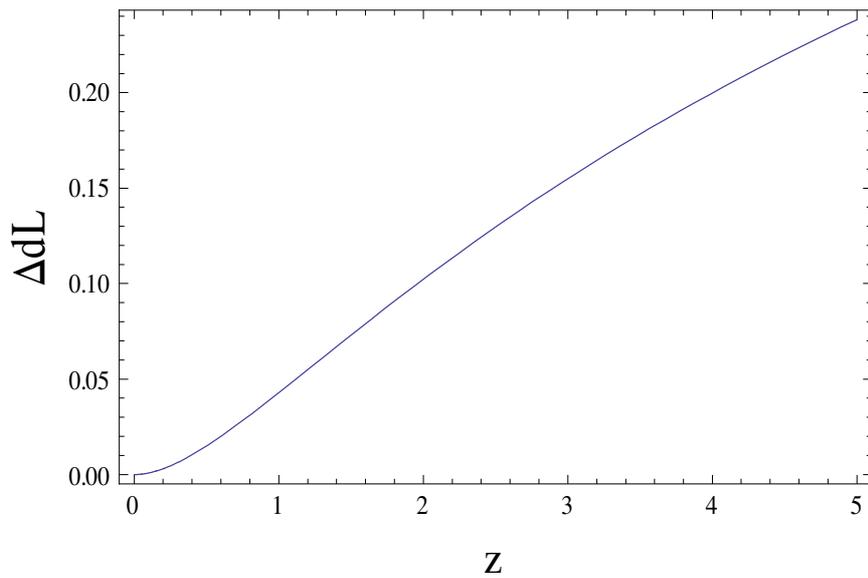


Gráfico 4.3: Desvio relativo entre as distâncias luminosidade teóricas máxima ($\theta = \pi/2$) e mínima ($\theta = 0$).

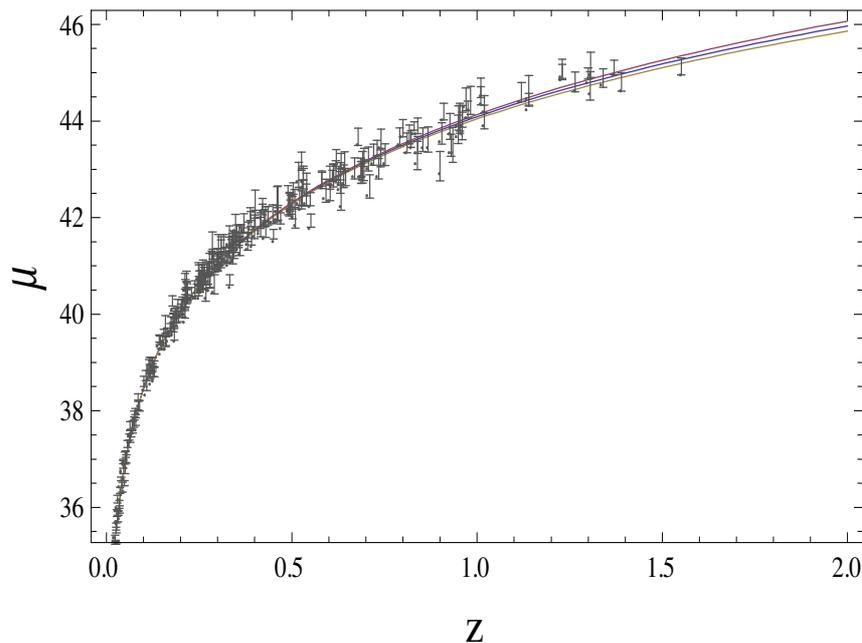


Gráfico 4.4: Módulos de distância máximo (linha superior), médio (linha intermediária) e mínimo (linha inferior) teóricos e observacional (dispersão) *versus redshift* ($0 < z < 2$)

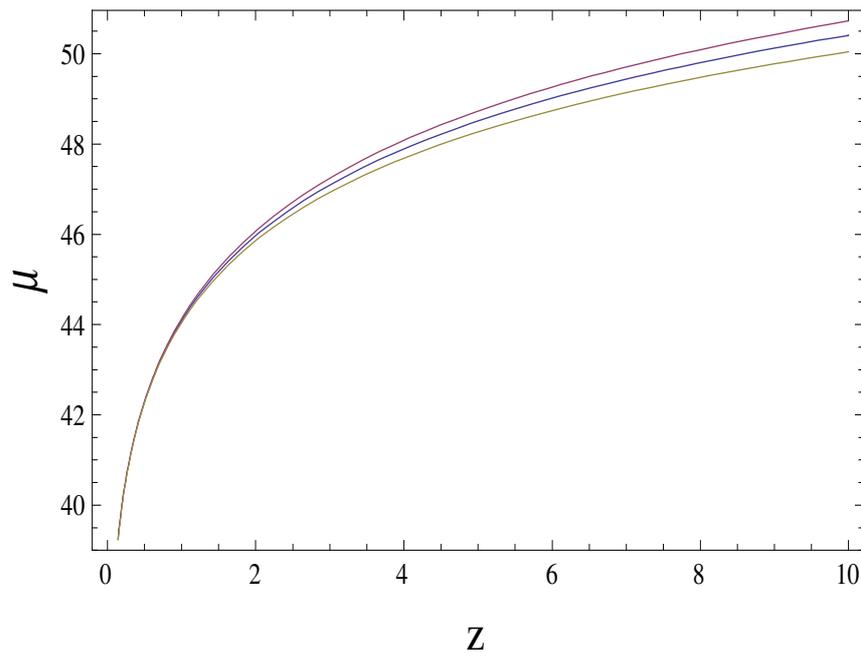


Gráfico 4.5: Módulos de distância máxima (linha superior), médio (linha intermediária) e mínimo (linha inferior) teóricos versus redshift ($0 < z < 10$).

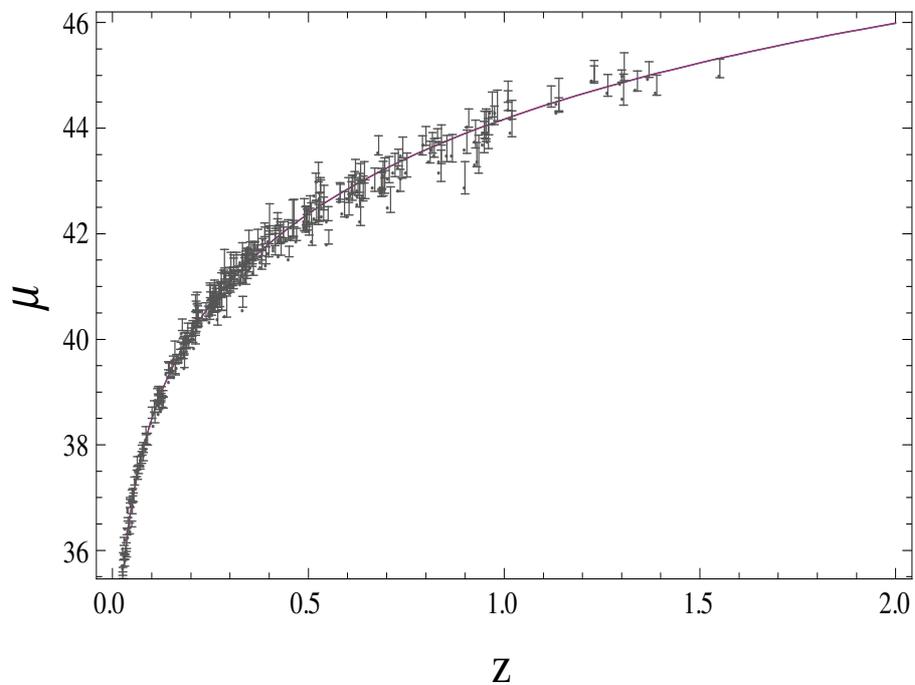


Gráfico 4.6: Módulos de distância teóricos e observacional para os modelos k - Λ CDM e anisotrópico (linhas superpostas) x redshift para os valores de melhor ajuste ($0 < z < 2$).

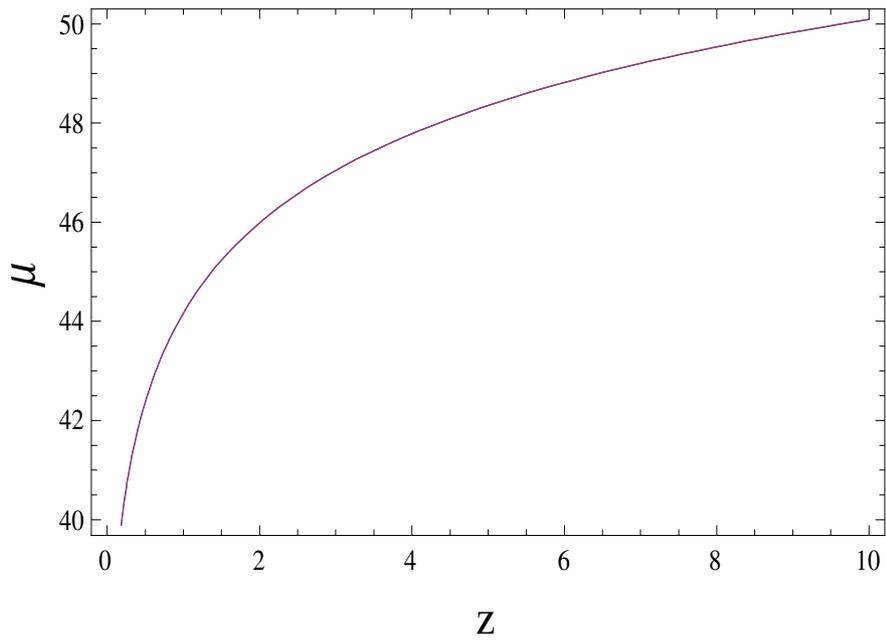


Gráfico 4.7: Módulos de distância teóricos para o modelo k - Λ CDM e modelo anisotrópico *versus redshift* para os valores de melhor ajuste ($0 < z < 10$).

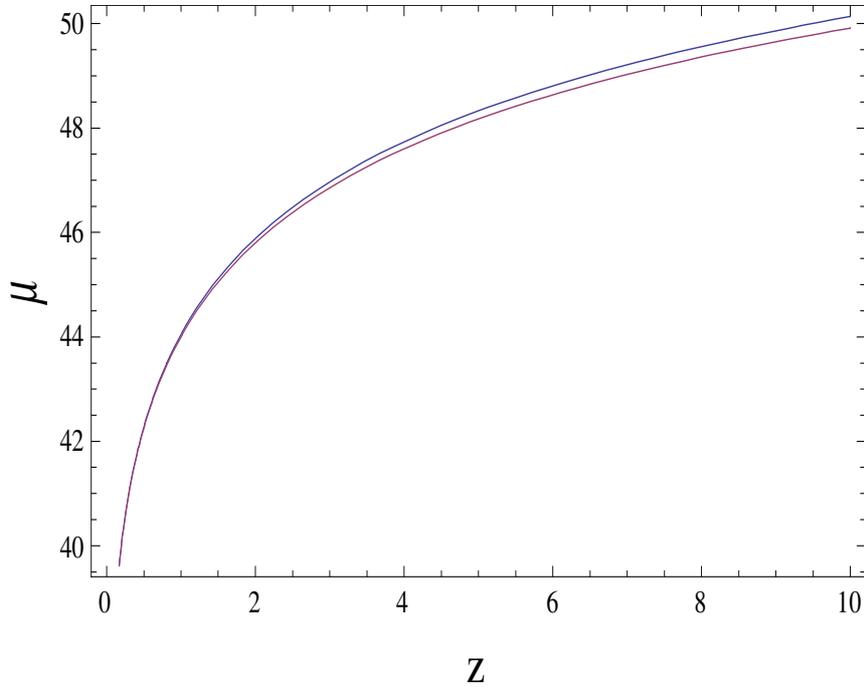


Gráfico 4.8: Módulos de distância teóricos para o modelo k - Λ CDM (inferior) e modelo anisotrópico (superior) *versus redshift* para os valores de maior curvatura possível dentro do nível de confiança 2σ e para $\Omega_{mo} = 0,25$ ($0 < z < 10$).

Capítulo 5

Conclusão

A busca por indícios de possíveis anisotropias no universo tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores [31,32,33]. A importância desses estudos reside no fato de que a descoberta de uma possível anisotropia do universo poderia conduzir a um melhor conhecimento do mecanismo do Big-Bang e das pequenas flutuações de temperatura detectadas na CMB. Além disso, derrubaria a crença na validade do princípio cosmológico em que se apóiam muitas interpretações das observações.

A fim de realizar esta investigação, propusemos um modelo anisotrópico, a partir de uma métrica anisotrópica que é solução das equações de Einstein, proposta primeiramente por Gödel em 1949 [34], classificada como Bianchi III e estudada por M.Rebouças, J. Tiomno, V. Korotkii e Y. Obukhov, a qual denominamos métrica RTKO. Nós tomamos o caso particular onde seu parâmetro de rotação é feito nulo. Como é sabido, o fluido perfeito que constitui o universo não conduz a anisotropias. Portanto, para dar conta dela, introduzimos um campo escalar que foi o responsável por “gerá-la”, criando uma diferença na pressão na direção preferencial, que definimos como sendo a direção z . Foi mostrado que nossa métrica, apesar de anisotrópica, prevê uma CMB isotrópica, tal como a observamos (a menos de pequenas flutuações da ordem de 10^{-5} [5,11,25]), devido à existência de vetores de Killing conformes paralelos à quadri-velocidade.

No contexto observacional, o nosso trabalho teve o intuito de detecção dos indícios de anisotropia presentes no universo. Nós analisamos dados de 288 supernovas do tipo Ia, dentro

da faixa de *redshift* entre 0,0218 e 1,5510, coletados pelo projeto *Sloan Sky Digital Survey* (SSDS) e tratados pelo método MLCS2K2. Verificamos que, para pequenos *redshifts*, nosso modelo se adequou muito bem ao modelo padrão, bem como aos dados observacionais, como era esperado de uma métrica que se reduz ao caso FRW plano em pequenas distâncias, como foi mostrado. Para grandes *redshifts*, os efeitos de anisotropia puderam ser separados dos de possíveis curvaturas do universo (o universo FRW ajustado pelo SDSS-MLCS2K2 se mostrou levemente aberto ($\Omega_{total} < 1$)), como foi mostrado através da curva do módulo de distância *versus* z , onde teve particular importância o ponto $z = 2$, onde se iniciaria a possível distinção entre os modelos k - Λ CDM e anisotrópico. Dados de supernovas com *redshift* acima dessa faixa poderiam, em princípio, fornecer evidências em favor de um ou outro, favorecendo ou não a existência de tal anisotropia.

Ainda, alternativamente, uma obtenção mais refinada de dados de supernovas em função de sua posição angular também poderia revelar essa possível anisotropia, uma vez que a distâncias luminosidade máxima, média e mínima começam a divergir justamente em $z = 2$. Nessa faixa o desvio relativo fica em torno de 10%.

Este trabalho ainda prevê próximos passos, que serão a análise do modelo anisotrópico através de outros *samples* de supernovas, tais como o *Union2 Compilation*¹ e o *Constitution*², da CMB e BAO. Além disso, procuraremos investigar a distribuição de supernovas com a posição angular, a fim de detectar qualquer indício de anisotropia acima dos erros sistemáticos. Procuraremos, ainda, fazer uma investigação no nível perturbativo.

¹ www.cfa.harvard.edu/supernova.

² www.supernova.lbl.gov/union.

Anexos

A. Vetores de Killing

O espaço-tempo, como uma variedade Riemanniana, pode possuir numerosas simetrias, sendo que algumas dessas permitem transformações de coordenadas infinitesimais e contínuas que permitem à métrica manter-se inalterada (tais transformações são denominadas *isometrias*).

A principal ferramenta para a investigação das isometrias de uma métrica são os *vetores de Killing*, introduzida no século XIX pelo matemático alemão Wilhelm Killing.

A.1 Campos Vetoriais de Killing

Consideremos uma mudança infinitesimal nas coordenadas da métrica $g_{\alpha\beta}$ gerada por um vetor $\varepsilon\xi^\alpha(x^\beta)$

$$x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon\xi^\alpha(x^\beta), \quad (\text{A.1})$$

onde ε é uma constante infinitesimal. O resultado da transformação (A.1) é mover um ponto $P(x^\alpha)$ a um ponto P' , com coordenadas $x^\alpha + \varepsilon\xi^\alpha(x^\beta)$. De forma semelhante, um ponto

vizinho $Q(x^\alpha + dx^\alpha)$ será movido a outro $Q'(x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha + dx^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha_{,\gamma} dx^\gamma)$ pela transformação (A.1), onde fizemos

$$\begin{aligned} x^\alpha &\rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha \\ dx^\alpha &\rightarrow dx'^\alpha = dx^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha_{,\gamma} dx^\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

O intervalo infinitesimal $\overline{P'Q'}$ será

$$x^\alpha + dx^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha_{,\gamma} dx^\gamma - (x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha), \quad (\text{A.3})$$

ou

$$dx^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha_{,\gamma} dx^\gamma, \quad (\text{A.4})$$

e o comprimento ds' desse intervalo será dado por

$$\begin{aligned} ds'^2 &= g_{\alpha\beta}(x'^\gamma) dx'^\alpha dx'^\beta = g_{\alpha\beta}(x^\gamma + \varepsilon \xi^\gamma) (dx^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha_{,\gamma} dx^\gamma) (dx^\beta + \varepsilon \xi^\beta_{,\gamma} dx^\gamma) = \\ &= [g_{\alpha\beta}(x^\gamma) + \varepsilon g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma] (dx^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha_{,\gamma} dx^\gamma) (dx^\beta + \varepsilon \xi^\beta_{,\gamma} dx^\gamma), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde usamos

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{g_{\alpha\beta}(x^\gamma + \varepsilon \xi^\gamma) - g_{\alpha\beta}(x^\gamma)}{\varepsilon \xi^\gamma}, \quad (\text{A.6})$$

pelo fato que $\varepsilon \ll 1$.

Expandindo a Eq. (A.5), desprezando termos da ordem de ε^2 e reorganizando os índices inferiores, obtemos o resultado

$$ds'^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \varepsilon (g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \xi^\gamma_{,\beta} + g_{\gamma\beta} \xi^\gamma_{,\alpha}) dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{A.7})$$

de onde definiremos o tensor

$$2s_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \xi^\gamma_{,\beta} + g_{\gamma\beta} \xi^\gamma_{,\alpha}, \quad (\text{A.8})$$

que porá a Eq. (A.7) na forma

$$\frac{1}{\varepsilon}(ds'^2 - ds^2) = 2s_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (\text{A.9})$$

O número 2 multiplicado na Eq. (A.8) surge por conveniência. A estrutura no lado direito da Eq. (A.9) é denominada *derivada de Lie* de um objeto geométrico (no caso, o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$) em relação a um campo vetorial ξ , e é representada, comumente, na forma

$$L_\xi g_{\alpha\beta} = 2s_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.10})$$

No caso especial onde o tensor métrico é invariante sob uma transformação de coordenadas (ou $ds' = ds$ na Eq. (A.9)), nós teremos $L_\xi g_{\alpha\beta} = 0$. Nesse caso, o vetor ξ é, por definição, um *vetor de Killing*. Então, teremos

$$L_\xi g_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \xi^\gamma_{,\beta} + g_{\gamma\beta} \xi^\gamma_{,\alpha} = 0. \quad (\text{A.11})$$

A equação acima pode também ser reescrita na forma

$$L_\xi g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0, \quad (\text{A.12})$$

cuja identidade com a Eq. (A.11) pode ser demonstrada facilmente pelo desenvolvimento das derivadas covariantes, independentemente da escolha de algum sistema de coordenadas particular, de onde resulta sua validade em qualquer sistema. A Eq. (A.12) indica que a parte simétrica do tensor $\xi_{\alpha;\beta}$ desaparece. Devido ao fato de que deslocamentos infinitesimais gerados por vetores de Killing conduzem a uma métrica inalterada, estes deslocamentos traçam geodésicas a geodésicas vizinhas. Podemos notar ainda que as Eqs. (A.8) podem ser lidas de duas maneiras: dada uma métrica, elas criam um meio de se determinar os vetores de Killing ou, dados os vetores de Killing, determinamos a métrica.

A.2 Movimentos Conformes e Homotéticos

Em adição aos traçados descritos pelos vetores de Killing, existem outras classes de transformações geradas por campos vetoriais que são importantes. Estes são denominados

movimentos *conformes* e *homotéticos*. Nestes casos, respectivamente, a derivada de Lie é igual ao tensor métrico multiplicado por uma função escalar das coordenadas ou por uma constante. Os geradores desses movimentos são denominados vetores de Killing conformes ou homotéticos. Nesses dois casos a derivada de Lie é proporcional à métrica e pode ser representada, para ambos os casos, na forma

$$L_{\xi} g_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^{\gamma} + g_{\alpha\gamma} \xi^{\gamma}_{,\beta} + g_{\gamma\beta} \xi^{\gamma}_{,\alpha} = 2\sigma g_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.13})$$

Para determinarmos σ , podemos contrair a Eq. (A.13) com $g^{\alpha\beta}$ e utilizar as identidades

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} &= 4 \\ g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} \xi^{\gamma}_{,\beta} &= \delta^{\beta}_{\gamma} \xi^{\gamma}_{,\beta} = \xi^{\gamma}_{,\gamma} \\ g^{\alpha\beta} g_{\gamma\beta} \xi^{\gamma}_{,\alpha} &= \delta^{\alpha}_{\gamma} \xi^{\gamma}_{,\alpha} = \xi^{\gamma}_{,\gamma} \\ g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^{\gamma} &= 2\Gamma^{\gamma}_{\gamma\kappa} \xi^{\kappa}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

de onde obteremos, a partir da Eq. (A.13),

$$2\sigma \cdot 4 = 2\xi^{\gamma}_{,\gamma} + 2\Gamma^{\gamma}_{\gamma\kappa} \xi^{\kappa} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{4} \xi^{\gamma}_{,\gamma} \quad (\text{A.15})$$

Então, a Eq. (A.13) torna-se

$$g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^{\gamma} + g_{\alpha\gamma} \xi^{\gamma}_{,\beta} + g_{\gamma\beta} \xi^{\gamma}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \xi^{\gamma}_{,\gamma} g_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.16})$$

que também pode ser escrito na forma

$$L_{\xi} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \xi^{\gamma}_{,\gamma} g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.17})$$

ou

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = \frac{1}{2} \xi^{\gamma}_{,\gamma} g_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.18})$$

Se $\xi^\gamma_{;\gamma}$ é uma função escalar das coordenadas ($\phi(x^\alpha)$, por exemplo), o vetor de Killing descreve um movimento conforme; se $\xi^\gamma_{;\gamma}$ for uma constante, o vetor de Killing descreve um movimento homotético.

A.3 Teoremas de Conservação

Uma das mais importantes propriedades dos vetores de Killing é sua utilidade na derivação de teoremas de conservação. Estes são obtidos em conjunto com os vetores tangentes das geodésicas \mathbf{k} . Para partículas livres de forças, as geodésicas são geradas pela equação da geodésica

$$\frac{dk^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha k^\beta k^\gamma = 0, \quad (\text{A.19})$$

onde λ é um parâmetro afim ao longo da trajetória e $k^\alpha = dx^\alpha / d\lambda$. A Eq. (A.19) pode também ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha k^\gamma k^\beta &= \frac{\partial k^\alpha}{\partial x^\beta} k^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha k^\gamma k^\beta = \left(\frac{\partial k^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha k^\gamma \right) k^\beta = 0 \Rightarrow \\ k^\alpha_{;\beta} k^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Para fótons, nós temos a relação

$$k^\alpha k_\alpha = 0, \quad (\text{A.21})$$

que decorre do fato que $ds = 0$, para os fótons.

Para o vetor de Killing ξ e o vetor tangente à geodésica, \mathbf{k} , o produto $\xi_\alpha k^\alpha$ é uma constante ao longo da geodésica. Isto pode ser verificado através da derivada direcional do produto $\xi_\alpha k^\alpha$ ao longo da geodésica, ou seja, na direção de \mathbf{k} ,

$$(\xi_\alpha k^\alpha)_{;\beta} k^\beta = \xi_{\alpha;\beta} k^\alpha k^\beta + \xi_\alpha k^\alpha_{;\beta} k^\beta = 0. \quad (\text{A.22})$$

O primeiro termo no lado direito da Eq. (A.22) se anula pela relação (A.12) e o segundo, pela Eq. (A.20). Consequentemente,

$$\xi_{\alpha} k^{\alpha} = \text{const.} \quad (\text{A.23})$$

ao longo da geodésica.

Ainda sobre os fótons, se a métrica admitir vetores de Killing homotéticos ou conformes, a relação (A.23) continua válida. Nesses casos, o tensor $\xi_{\alpha;\beta}$ é proporcional ao tensor métrico (ver Eq.(A.18))

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = \frac{1}{2} \xi^{\gamma}{}_{;\gamma} g_{\alpha\beta} \therefore \xi_{\alpha;\beta} k^{\alpha} k^{\beta} + \xi_{\beta;\alpha} k^{\alpha} k^{\beta} = \frac{1}{2} \xi^{\gamma}{}_{;\gamma} g_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta} = 0, \quad (\text{A.24})$$

visto que $g_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta}$ é proporcional a $ds^2 = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha;\beta} k^{\alpha} k^{\beta} + \xi_{\beta;\alpha} k^{\alpha} k^{\beta} &= 2\sigma g_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta} = 0 \Rightarrow \\ (\xi_{\alpha} k^{\alpha})_{;\beta} k^{\beta} + (\xi_{\beta} k^{\beta})_{;\alpha} k^{\alpha} &= 2(\xi_{\alpha} k^{\alpha})_{;\beta} k^{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

e, então,

$$\xi_{\alpha}^{conf} k^{\alpha} = \text{const.} \quad (\text{A.26})$$

$$\xi_{\alpha}^{homot} k^{\alpha} = \text{const.} \quad (\text{A.27})$$

Procedamos agora à análise dos teoremas de conservação. Para tanto, tomemos a divergência do tensor momento-energia

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Dado, então, um campo vetorial de Killing, podemos definir a grandeza

$$S^{\beta} \equiv \xi_{\alpha} T^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.29})$$

A conservação dessa grandeza requer que sua divergência $S^{\beta}{}_{;\beta}$ se anule. De fato,

$$S^{\beta}{}_{;\beta} \equiv (\xi_{\alpha} T^{\alpha\beta})_{;\beta} = \xi_{\alpha;\beta} T^{\alpha\beta} + \xi_{\alpha} T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (\text{A.30})$$

onde o primeiro termo se anula pela Eq.(A.12) e o segundo pela (A.28).

B. Equação de Klein-Gordon e tensor momento-energia do campo escalar

A equação de Euler-Lagrange que descreve a dinâmica de campos $\phi(x^\mu)$ é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\phi_{,\mu})} \right] = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde \mathcal{L} é a lagrangiana do campo. Ela é obtida de forma semelhante à equação de Euler-Lagrange da Mecânica, por meio do princípio de mínima ação, fazendo apenas a substituição das coordenadas generalizadas (q, \dot{q}) por $(\phi, \phi_{,\mu})$.

No caso de campos escalares, a lagrangiana é representada pela lagrangiana de Klein-Gordon:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\phi^{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2), \quad (\text{B.2})$$

onde $\phi^{,\mu} \equiv g^{\mu\nu} \phi_{,\nu}$. Aplicando-se, então, a lagrangiana de Klein-Gordon à equação de Euler-Lagrange, obtemos facilmente

$$(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \phi = 0, \quad (\text{B.3})$$

que é a equação de Klein-Gordon e descreve a dinâmica de campos escalares, ou seja, partículas de spin zero, (portanto bósons). No caso particular de campos formados por partículas que não possuem massa, a equação (B.3) torna-se simplesmente

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0. \quad (\text{B.4})$$

Quando trabalhamos em espaços-tempo curvos, podemos utilizar o princípio do acoplamento mínimo (ou seja, trocar as derivadas ordinárias pelas derivadas covariantes) e obter a equação de Klein-Gordon para partículas sem massa em um espaço-tempo curvo. Aplicando-o à equação (B.4), temos

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \nabla^\mu\nabla_\mu\phi = 0. \quad (\text{B.5})$$

Podemos ainda reescrever a Eq. (B.5), utilizando a relação [43]

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}A^\mu), \quad (\text{B.6})$$

onde A^μ é um vetor e g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, na forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\nabla^\mu\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi) = 0 \quad (\text{B.7})$$

ou ainda na forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial_\nu\phi g^{\mu\nu}) = 0. \quad (\text{B.8})$$

O tensor momento-energia do campo escalar pode ser obtido a partir da expressão geral

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (\text{B.9})$$

Aplicando-se, então, a lagrangiana de Klein-Gordon em (B.9), obtemos

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\phi^{\lambda}\phi_{,\lambda} - m^2\phi^2). \quad (\text{B.10})$$

No caso do campo de partículas sem massa, ele torna-se

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi^{\lambda}\phi_{,\lambda} \quad (\text{B.11})$$

ou, equivalentemente,

$$T^\mu_\nu = g^{\lambda\mu}\partial_\mu\phi\partial_\lambda\phi - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\lambda\sigma}\phi_{,\lambda}\phi_{,\sigma}. \quad (\text{B.12})$$

Referências

- [1] J. F. Rocha *et al.*, *Origens e Evolução da Idéias da Física*, Edufba (2002).
- [2] K. Oliveira Filho and M. F. Saraiva, *Astronomia e Astrofísica*, 2ª edição, Ed. Livraria da Física (2004).
- [3] M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 1*, 4ª edição, Ed. Edgard Blücher (2002)
- [4] S. Weinberg, *Cosmology*, 1ª edição, Oxford University Press, New York (2008).
- [5] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press (2003).
- [6] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, 1ª edição, Oxford University Press (1992).
- [7] W. Rindler, *Essential Relativity: Special, General and Cosmology*, Ed. Springer (1924).
- [8] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Ed. Addison Wesley (2003).
- [9] C. M. Pigozzo, *Testes Observacionais em Modelos Cosmológicos com Interação Vácuo-Matéria*, Dissertação de Mestrado, IF-UFBA (2008).
- [10] C. M. Pigozzo, *Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro*, Tese de Doutorado, IF-UFBA (2010).
- [11] G. F. Smoot *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* 396, L1 (1992).
- [12] R. Giovanelli *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* 505, L91 (1998).
- [13] A. E. Lange *et al.* *Phys. Rev. D* 63, 042001 (2001).
- [14] A. Balbi *et al.* *Astrophys. J. Lett.* 545, L1 (2000).

- [15] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* 517, 565 (1999)
- [16] Yu. N. Obukhov, in *Colloquium on Cosmic Rotation*, edited by M. Scherfner, T. Chrobok and M. Shefaat (Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, 2000).
- [17] V. A. Korotkii and Yu. N. Obukhov, *Sov. Phys. JETP* 72, 11 (1991).
- [18] M. J. Rebouças and J. Tiomno, *Phys. Rev. D*, 28, 1251 (1983).
- [19] R. J. Gleiser *et al.*, *Class Quantum Grav.* 23, 2653 (1982)
- [20] D. Lorenz, *J. Phys. A: Math. Gen.* 15, 2997 (1982).
- [21] A. Moussiaux *et al.*, *J. Phys. A: Math. Gen.* 14, L277 (1981)
- [22] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press (2005)
- [23] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Notes for a Course on Classical Fields* (IFT-SP, 2008)
- [24] J. Frieman *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 75, 2077 (1995).
- [25] P. de Bernardis *et al.*, *Nature* (London) 404, 955 (2000).
- [26] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Ed. W. H. Freeman and Company – San Francisco (1973).
- [27] A. Guth, *Phys. Rev. D* 23, 347 (1981)
- [28] C. Brans and R.H. Dicke, *Phys. Rev.* 124, 925 (1961).
- [29] A. E. Montenegro Jr., *Soluções Exatas da Cosmologia de Brans-Dicke com Termo Cosmológico Variável*, Dissertação de Mestrado, IF-UFBA (2005).
- [30] G. Efstathiou *et al.*, *R. Astron. Soc.* (1998); astro-ph/9812226.
- [31] I. Antoniou and L. Perivolaropoulos, (2010); arXiv:1007.4347 [astro-ph.CO]
- [32] T. S. Koivisto *et al.* (2010; arXiv:1006.3321v1 [astro-ph.CO].
- [33] K. Gödel, *Phys. Ver. D* 23, 347 (1981)
- [34] S. Carneiro and G. Marúgan, *Phys. Rev. D* 64, 083502 (2001)
- [35] A. Balbi *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* 505, L91 (1998).

- [36] A. Harvey, E. Schucking and E. Surowitz, *Am.J.Phys.*74,1017-1024 (2006).
- [37] S. Carneiro and G. Marúgan, *Lect.Notes Phys.*617, 302 (2003).
- [38] S. Carneiro, *Gen.Rel.Grav.*34, 793 (2002).
- [39] D.H. Lyth and A. Riotto, *Phys. Rep.* 314, 1 (1999).
- [40] R. Feymann, F. B. Moringo and W. G. Wagner, *Lectures on Gravitation*, California Institute of Technology (1995).
- [41] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of the General Theory Relativity* (1972).
- [42] S. Bonometto, V. Gorini and U. Moschella, *Modern Cosmology*, IOP Publishing Ltd (2002).
- [43] A. H. Klotz, *Macrophysics and Geometry*, Cambridge University Press (1982).
- [44] L. Landau and E. Lifshitz, *Teoria do Campo*, Ed. Mir – Moscou (1980).