Universidade Federal da Bahia
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Teorias Algébricas e Espaço de Fase Generalizado: O Campo de Fierz-Pauli-Gupta

Salvador-Bahia, agosto de 2018
Brasil

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Teorias Algébricas e Espaço de Fase Generalizado: O Campo de Fierz-Pauli-Gupta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Anderson Roque Araújo dos Santos Meneses

Orientador: José David Mangueira Vianna

Salvador-Bahia, agosto de 2018
Brasil

M543t Meneses, Anderson Roque Araújo dos Santos
Teorias Algébricas e Espaço de Fase Generalizado: O campo de Fierz-Pauli-Gupta I Anderson Roque Araújo dos Santos Meneses. -- Salvador, Bahia, 2018.
150 f.

Orientador: José David Mangueira Vianna.
Dissertação (Mestrado - Física) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, 2018.

1. Teoria Quântica de Campos. 2. Física Matemática. 3. Espaço de Fase Relativístico. 4. Equação de Fierz-Pauli-Gupta. 5. Algebras de Clifford. 6. Equação de Liouville. I. Vianna, José David Mangueira. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDD 530.143

Sumário

Resumo

A equação de campo de Fierz-Pauli-Gupta (FPG) é desenvolvida no espaço de fase generalizado proposto por Bohm e Hiley. As álgebras de Dirac e DKP são consideradas em um processo de complexificação visando construir álgebras de Clifford associadas aos geradores da álgebra do campo FPG. Partículas livres e interagindo com um campo eletromagnético externo são analisadas a partir da equação tipo Liouville obtida para os casos estudados.

Palavras-Chave: Espaço de fase relativístico; Equação de Fierz-Pauli-Gupta; álgebras de Clifford; equação tipo Liouville.

Résumé

L'équation de champ de Fierz-Pauli-Gupta (FPG) est développée dans l'espace de phase généralisé proposé par Bohm et Hiley. Les algèbres de Dirac et de DKP sont considérées dans un processus de complexification afin de construire des algèbres de Clifford associées aux générateurs de l'algèbre de champ FPG. Les particules libres et interaction avec un champ électromagnétique externe sont analysées à partir de l'équation de Liouville obtenue pour les cas étudiés.

Mots-clés: Espace de phase relativiste; Équation de Fierz-Pauli-Gupta; Algèbres de Clifford; Équation de Liouville.

Abstract

The Fierz-Pauli-Gupta field equation (FPG) is developed in the generalized phase space proposed by Bohm and Hiley. The Dirac and DKP algebras are considered in a process of complexification in order to construct Clifford algebras associated to the generators of FPG field algebra. Free particles and interacting with an external electromagnetic field are analyzed from the Liouville equation obtained for the studied cases.

Keywords: relativistic phase space; Fierz-Pauli-Gupta equation; Clifford algebras; Liouville equation.

Agradecimentos

Ainda sendo feitos...

Gostaria de agradecer primeiramente à Conspiração do Universo por essa humilde e singela Existência!

Gostaria de agradecer ao Prof. José David Mangueira Vianna, pela orientação, apoio e tempo disponibilizado; por ter compartilhado seus conhecimentos e pelas discussões ao longo da orientação; por ser um exemplo de pessoa e humildade. Gostaria de agradecer também à Profa. Maria das Graças Martins, pelas suas críticas aguçadas desde os tempos da graduação e pelo seu temperamento diferenciado na leitura da realidade, mostrando sempre o contexto do cotidiano acadêmico; e, por ter lido a dissertação e corrigido os equívocos linguísticos outrora cometidos.

Gostaria de agradecer ao Prof. Edmar Moraes do Nascimento (*In Memorian*), meu primeiro orientador, pelas horas profíquas nas discussões científicas, fundamentais para a formação de um estudante.

Gostaria de agradecer aos Professores e Professoras do Instituto de Física, que na medida das possibilidades, ensinaram tudo o quanto foi possível, discutiram tudo o quanto foi possível e desafiaram, tanto o quanto foi possível, nossos limites intelectuais. Tenho um profundo respeito por Todos e Todas, e os(as) admiro: “Educar é um profundo Desafio. Para aqueles que se propõe a tal!”

Agradecer à minha Família e dizer, que a partir dela, tudo faz sentido! Aos meus Pais, Osvaldo (*In Memorian*) e Célia, alicerces e exemplos da minha Vida. Aos meus ilustríssimos Irmãos, Adson e Alysson, pela profunda Amizade e por compartilharmos de uma Irmandade, voltada à compreensão, cumplicidade e divergências. E dizer-lhes: “Que nem homens ou trevas abarcam espíritos iluminados”.

Agradecer à minha Companheira Carol, pelo seu Amor, Amizade e sobretudo Paciência em entender meus anseios, durantes estes 9 anos de cumplicidade e complementaridade.

Aos Amigos, Henrique, Guerra, Alexandre e Fábio, pelas brincadeiras, amizades e longa jornada destes anos, desde o nosso colegial.

Agradecer a dois ilustríssimos companheiros e amigos (que outrora do curso mas agora da vida): A Vitor Hugo, pela amizade, companhia e discussões de todas as horas, nestes quase 8 anos! Uma pessoa que possui uma avidez na clareza e conhecimento das coisas, difícil de se encontrar. E dizer-lhe: “Como não nos tornamos amigos no Instituto? Antes tarde do que nunca!”; A Vinícius Nonato, pelas horas infindáveis de risos, frustrações compartilhadas, alegrias memoráveis e discussões que se mantém até hoje - como se fôssemos "exploradores sobre o mar revolto" desbravando o universo da Física.

Agradecer aos Amigos, Amigas e Colegas que fiz nessa Casa. Pelos anos de convivência na graduação e pós-graduação, pelos exemplos de pessoas que são e tudo mais. Dizer a todos e a todas, que fizeram enorme diferença na minha Vida, inclusive reafirmar, como é difícil encontrar seres humanos como vocês. Em especial: Augusto César, Sérgio Floquet, Kim Veiga, Wallas Santos, Marcelo Cunha, Eric Pinto, Iuri Boaventura, Antônio Lafayette, Hildérico Lage, Alexandre Pinho, Elcimar Rocha, Euler Bentes, José Luis Silva, Junior Pedroza, Welber, Vitor Mancir, Vitor Moura, Jairo Jamerson, Eduardo Rosa, Miralvo Menezes, Renato Batista, Werter, Tiago Froes, Thiago Rodrigues, Osvaldo Rocha, Rogério Silva, Ricardo Martinho, Ricardo Macedo, Rafael Azevedo, Rafael Barros, Rafael Freitas, Joilton Bonifácio, Marcus Mello, Rafael Bittencourt, Thalisson Andrade, Paulo Moreno, Osvaldo Coimbra, João Henrique, Marício Rocha, Wanderley Vitorino, Renilson, Joel Andrade, Luiz Nazareth, Marcus Fernandes, Fagner Carvalho, Reginaldo Farias, Marcos Sales, Edgar Marcelino, Leonardo Bacelar, Climério Silva, Vinícius Mendonça, Caio Guimarães, Luis Pires, Carla Sena, Andréia Simões, Mabele Santos, Jéssica Guerreiro, Renata Gomes, Sara Santedicolo, Mariana Lima, Mariana Costa, Jamile Araújo, Cândida, Lílian Alves, Kelly Abreu,... São muitos(as) e caso tenha esquecido alguém perdoem-me.

Agradecer aos Funcionários desta Casa, a Seu Valtério, Dona Eraldina, Elson, Sr. Nelson, Simone, Gilmar, Aloísio, Dal e Nice, por estarem sempre dispostos a nos ajudar permitindo que o Instituto funcione e pelos anos de convivência.

Ainda sendo feito...

“Longa é a viagem rumo a si próprio, inesperada é sua descoberta.”

Thomas Mann

“A morte não é a maior perda da vida. A maior perda da vida é o que morre dentro de nós enquanto vivemos.”

Picasso

“A cada dia que vivo, mais me convenço de que o desperdício da vida está no amor que não damos, nas forças que não usamos, na prudência egoísta que nada arrisca, e que, esquivando-se do sofrimento, perdemos também a felicidade. A dor é inevitável. O sofrimento é opcional.”

Carlos Drummond de Andrade

1 Introdução

A "Álgebra Geométrica" tem início em tempos longínquos, advinda desde a época de Platão (427 a.C. a 347 a.C), onde a matemática grega sofreu radicais transformações, principalmente devido a ele e à sua Academia, em Atenas. Ela surge como uma alternativa à "Álgebra Aritmética", herdada dos babilônios, devido à dicotomia entre 'números X grandezas' contínuas e para tratar problemas de dimensão (os babilônios somavam, por exemplo, comprimento e área). Posteriormente, com sua evolução, passa a estudar enunciados e axiomatização de estruturas matemáticas, ou seja, a álgebra geométrica atual tem raízes profundas provinientes do Círculo Pitagórico, surgindo basicamente da necessidade fundamental de "medir" (RAMOS, 2013).

Longos séculos depois, precisamente em 1878, um trabalho foi publicado no *American Journal of Mathematics*, por William Kingdon Clifford (1845-1879), cujo título era, *Applications of Grassmann's Extensive Algebra*. Neste é apresentada uma inovadora estrutura matemática que ele denominou de "Álgebra Geométrica" (hoje álgebra de Clifford). Naturalmente muito distante daquela pensada pelos eminentes gregos. Clifford consegue unir duas estruturas que aparentavam estar dissociadas, os quatérnios de William Rowan Hamilton (1805-1865) (HAMILTON, 1843) e a álgebra exterior de Hermann Günther Grassmann (1809-1865) (GRASSMANN, 1844), estabelecendo uma álgebra que contemplasse ambos os conceitos. Toda essa pesquisa é o resultado que se inicia do esforço de diversos autores de representar geometricamente um número complexo, passando por Wessel (1797), Leibniz e Huygens (1679), Gauss (1831), Hamilton (1843), dentre outros (JUNIOR; JUNIOR, 2012).

Nos primeiros anos do século XX, surgem algumas ideias extremamente inovadoras nos diferentes formalismos teóricos da física. O "Mundo Clássico" e o "Mundo Quântico" estabelecem limites inter e intraparadoxais, fomentados ainda mais pela Teoria da Relatividade, causando uma revolução e efervescência em todos os conceitos modernos. Na primeira metade do século, são discutidas as principais equações de campo entre as mais prestigiadas, as equações de Klein-Gordon-Fock (KLEIN, 1926; GORDON, 1926; FOCK, 1926) e a de Paul Dirac (DIRAC, 1928). Ao mesmo tempo, Eugene Paul Wigner (WIGNER, 1932) estabelece uma formulação da mecânica quântica no espaço de fase para corrigir a termodinâmica do equilíbrio, através de uma álgebra matricial.

No fim da primeira e a partir da segunda metade do século XX, foram realizadas pesquisas para determinar uma única estrutura matemática em que pudessem ser descritas as teorias clássica e quântica. Desta forma, muitas dificuldades de interpretação apresentadas no formalismo quântico, como processos de medida, poderiam ser elucidadas à luz de análogos clássicos. Nesse sentido, surgem diversos trabalhos de algebrização dessas teorias. No contexto dessa dissertação, cabe destacar a série de artigos de Mário Schönberg (SCHÖNBERG, 1956; SCHÖNBERG, 1957a; SCHÖNBERG, 1957b) que estabelece uma álgebra geométrica utilizando como base fundamental as álgebras de Grassmann (GRASSMANN, 1844) e de Clifford (CLIFFORD, 1878). Um outro exemplo, são os trabalhos de Prigogine[1] e colaboradores (PRIGOGINE et al., 1973; PRIGOGINE et al., 1977; MISRA, 1978; MISRA; PRIGOGINE; COURBAGE, 1979a; MISRA; PRIGOGINE; COURBAGE, 1979b; GEORGE; PRIGOGINE, 1979), que a partir da formulação de Koopman (KOOPMAN, 1931), onde a mecânica clássica é descrita em termos da estrutura do espaço de Hilbert, formulam uma álgebra não-comutativa no espaço de fase clássico. Em seguida, muitos desenvolvimentos algébricos são realizados para tratar as equações de campo, nas quais estão reunidos os aspectos quânticos e relativísticos da natureza. Tem papel fundamental os trabalhos provenientes da série de artigos de Schönberg citados acima e os trabalhos de D. Bohm e B. J. Hiley (BOHM; HILEY, 1981; BOHM; HILEY, 1983), P. R. Holland (HOLLAND, 1986), M. C. B. Fernandes e J. D. M. Vianna (FERNANDES, 1991; FERNANDES; VIANNA, 1999), dentre outros.

D. Bohm e B. J. Hiley (BOHM; HILEY, 1981; BOHM; HILEY, 1983), durante toda a década de 80, realizaram uma formulação da teoria quântica usual descrita no espaço de fase, na qual a função de distribuição tem papel fundamental na descrição de sistemas quânticos, enquanto que o vetor de estado é definido *a posteriori*, sendo que o estado do sistema passa a ser descrito no espaço de Hilbert dimensionalmente mais amplo, segundo matrizes não-hermitianas. Então, utilizando os resultados do formalismo algébrico de Schönberg, Bohm e Hiley (BOHM; HILEY, 1983) determinam uma equação tipo Liouville associada à equação de Dirac, descrevendo-a assim, no espaço de fase generalizado; ou seja, demonstram uma metodologia para tratar equações de campo no espaço de fase relativístico e estendido, obtendo-se assim, o respectivo Liouvilliano generalizado.

P. R. Holland (HOLLAND, 1986), seguindo as sugestões de Schönberg e Bohm[2], estuda as representações no espaço de fase das equações de Dirac e Feymann-Gell-Mann, em termos das álgebras de Dirac e Jordan-Wigner, utilizando a transformação de Wigner-Moyal (WIGNER, 1932). Em seguida, ao longo da década de 90, M. C. B. Fernandes e J. D. M. Vianna determinam a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) no espaço de fase generalizado (FERNANDES, 1991; FERNANDES; VIANNA, 1999), utilizando os resultados dos geradores de DKP estabelecidos por Schönberg (SCHÖNBERG, 1956; SCHÖNBERG, 1957a; SCHÖNBERG, 1957b) e revisitando aqueles obtidos por Bohm e Hiley (BOHM; HILEY, 1983), para o campo de Dirac. Além disso, abordam nessa perspectiva o caso não-relativístico da equação de Pauli (FERNANDES, 1991).

[1] Ilya Prigogine, Prêmio Nobel de Química em 1977;
[2] Nesse artigo, intitulado *Relativistic Algebric Spinors and Quantum Motions in Space*, Holland afirma que seu trabalho foi imbuído pela sugestão de M. Schönberg e D. Bohm.

O presente trabalho está inserido neste contexto que compreende um amplo projeto de determinar a teoria de campos no espaço de fase generalizado. Nesse sentido, nossos estudos partem da equação de Fierz-Pauli-Gupta (FPG) (FIERZ; PAULI, 1939; GUPTA, 1952; GUPTA, 1954; TAKAHASHI, 1969) para campos, de spin 3/2, que possui uma estreita correlação com a equação de Dirac, de spin 1/2, e de Duffin-Kemmer-Petiau, de spin 0 e 1. Motivados pela estrutura matricial de FPG, propomos uma álgebra (que denominamos álgebra de FPG) utilizando os conceitos álgebricos geométricos, estabelecidos por Schönberg, os quais se baseiam na álgebra desenvolvida por Clifford (CLIFFORD, 1878) e Grassmann (GRASSMANN, 1844). Demonstramos como a álgebra de FPG é uma extensão complexa da álgebra de Schönberg, surgindo da estrutura matemática proposta um projetor complexado, composto pela identidade da álgebra de Dirac e pelo projetor de ordem p da álgebra DKP. Em seguida, após escrever a equação de FPG em termos dos geradores da álgebra proposta, realizamos uma transformação de Wigner-Moyal, segundo a metodologia indicada por Bohm e Hiley. Estes procedimentos são aplicados para os casos da partícula livre com massa desprezível e da partícula com massa, submetida a um campo eletromagnético externo qualquer. Os resultados demonstram semelhança com aqueles encontrados na literatura, para as equações de Dirac e de DKP.

Devemos observar que a representação da teoria de campos no espaço de fase generalizado permite ampliar o conhecimento de fenômenos físicos, devido a uma nova abordagem matemática envolvendo um mesmo ente da natureza. Além disso, como o espaço de fase permite uma análise da teoria clássica através de uma álgebra não-comutativa, é possível estabelecer análogos clássicos dentro de uma estrutura comum à teoria quântica. Ou seja, as possibilidades de resultados e interpretações dos fundamentos bem consolidados, assim como outros novos, abrem perspectivas de trabalhos, tanto no aspecto teórico como experimental.

O trabalho está divido em cinco capítulos (incluindo essa introdução) mais as considerações finais e perspectivas, além de três apêndices. No Capítulo 2 fazemos uma digressão matemática em dois aspectos: a primeira, denominada “Preâmbulos”, é uma revisão sucinta da matemática elementar; a segunda parte, denominada “Fundamentos Algébricos”, apresentamos os formalismos algébricos mais importantes para o desenvolvimento do trabalho. No Capítulo 3 são discutidas as definições das equações de campo e suas álgebras associadas, a partir dos geradores de Schönberg. Propomos também a álgebra correspondente ao campo de Fierz-Pauli-Gupta, relacionada às álgebras de Dirac e de DKP. No Capítulo 4 discutimos a formulação da Mecânica Quântica no Espaço de Fase desenvolvida por Wigner (WIGNER, 1932), com as contribuições realizadas por Moyal (MOYAL, 1949), Bohm e Hiley (BOHM; HILEY, 1981), Holland (HOLLAND, 1986) e Fernandes e Vianna (FERNANDES; VIANNA, 1999). No Capítulo 5, inicialmente fazemos uma revisão sobre os principais resultados das equações de campo escritas no espaço de fase generalizado, nos casos da equação de Dirac (BOHM; HILEY, 1983; HOLLAND, 1986) e de

Duffin-Kemmer-Petiau (SCHÖNBERG, 1957b; SCHÖNBERG, 1957a; FERNANDES, 1991; FERNANDES; VIANNA, 1999). Em seguida, utilizando a álgebra de FPG proposta e a transformação de Wigner-Moyal, encontramos o Liouvilliano generalizado para o campo de Fierz-Pauli-Gupta. Para todas as equações de campo indicamos o Liouvilliano generalizado para os casos de partícula livre com massa desprezível e de partícula com massa sobre um campo eletromagnético externo qualquer. Nas Considerações Finais e Perspectivas apontamos os principais resultados encontrados e as possíveis extensões deste trabalho.

2 Princípios Matemáticos

2.1 Preâmbulos

Nesta seção são apresentadas em linhas gerais, sem a preocupação de suas demonstrações, as principais estruturas matemáticas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. As referências consultadas foram Hoffman e Kunze (1971), Barata (2006) e Fernandes, Lavor e Neto (2017), dentre outras.

2.1.1 Grupo

Um grupo $\mathbb{G}$ é um conjunto de objetos $g_j \in \mathbb{G}$, que contém uma operação $(\circ)$ entre estes elementos, ou seja,

$$\circ : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$$

Explicitamente, tem-se:

(a) um conjunto $\mathbb{G} = \{g_1, g_2, ..., g_i, ..., g_n\}$,

mais uma operação chamada usualmente de,

(i) multiplicação de grupo, $(\mathbb{G} \times \mathbb{G}, \circ)$.

Com isso, seguem os axiomas fundamentais:

1. $\forall g_i, g_j \in \mathbb{G} \Rightarrow g_i \circ g_j \in \mathbb{G}$ (fechamento);
2. $\forall g_i, g_j, g_k \in \mathbb{G}$, $g_i \circ (g_j \circ g_k) = g_i \circ (g_j \circ g_k)$ (associatividade);
3. $\forall g_i \in \mathbb{G}$, $\exists g_1 \in \mathbb{G} \mid g_1 \circ g_i = g_i = g_i \circ g_1$, (identidade);
4. $\forall g_i, g_j \in \mathbb{G}$, $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i = g_1$, onde $g_j = g_i^{-1}$ (unicidade da inversa)

   Caso os elementos possuam uma relação de comutatividade, além das propriedades acima, este conjunto é denominado de *grupo abeliano*, e assim:

5. $\forall g_i, g_j \in \mathbb{G}$, $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ (comutatividade)

2.1.2 Corpo

Um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto de objetos $k_i \in \mathbb{K}$ que possui duas operações $(+, \circ)$ possíveis de serem realizadas com seus elementos, ou seja,

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\circ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Explicitamente, tem-se a estrutura,

(a) um conjunto $\mathbb{K} = \{..., k_o, k_1, ..., k_i, ...\}$, onde $k_i \in \mathbb{K}$,

com as operações denominadas:

(i) adição, $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, +)$;

(ii) multiplicação escalar, $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \circ)$.

Seguem assim os axiomas da soma e produto:

1. $\forall k_i, k_j \in \mathbb{K} \Rightarrow k_i + k_j = k_j + k_i \in \mathbb{K}$ (fechamento);
2. $\forall k_i, k_j, k_m \in \mathbb{K}$, $k_i + (k_j + k_m) = (k_i + k_j) + k_m$ (associatividade);
3. $\forall k_i \in \mathbb{K}$, $\exists 0 \in \mathbb{K} \mid 0 + k_i = k_i$ (elemento neutro);
4. $\forall k_i \in \mathbb{K}$, $\exists k_j \in \mathbb{K} \mid k_i + k_j = 0$ (inversa aditiva);
5. $\forall k_i, k_j \in \mathbb{K} \Rightarrow k_i \circ k_j \in \mathbb{K}$ (fechamento);
6. $\forall k_i, k_j, k_m \in \mathbb{K}$, $k_i \circ (k_j \circ k_m) = (k_i \circ k_j) \circ k_m$ (associatividade);
7. $\forall k_i$, $\exists 1 \in \mathbb{K} \mid k_i \circ 1 = 1 \circ k_i = k_i$ (identidade);
8. $\forall k_i$, $\exists k_i^{-1} \in \mathbb{K} \mid k_i \circ k_i^{-1} = k_i^{-1} \circ k_i$ (inversa multiplicativa[1]);
9. $\forall k_i, k_j, k_m \in \mathbb{K}$, (distributividade);
   $k_i \circ (k_j + k_m) = k_i \circ k_j + k_i \circ k_m$,
   $(k_i + k_j) \circ k_m = k_i \circ k_m + k_j \circ k_m$;
10. $\forall k_i, k_j \in \mathbb{K}$, $k_i \circ k_j = k_j \circ k_i$ (comutatividade).

[1] Barata (2006) indica as propriedades 4 e 8 apenas como “inversa”.

2.1.3 Espaços Vetoriais

Definição

Um espaço vetorial linear $\mathbb{V}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto de objetos que comporta duas operações $(+, \circ)$ entre seus elementos, de tal forma que:

$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$
$$\circ : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

ou seja, há:

(a) um corpo $\mathbb{K}$=$\{...,k_0, k_1, k_2, ..., k_j, ...\}$ de objetos cujos elementos são denominados *escalares* e,

(b) um espaço $\mathbb{V}$=$\{...,\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_j}, ...\}$ de objetos cujos elementos são denominados *vetores*,

com operações entre estes elementos denominadas por:

(i) adição vetorial, $(\mathbb{V} \times \mathbb{V}, +)$;

(ii) multiplicação escalar, $(\mathbb{K} \times \mathbb{V}, \circ)$.

A partir disso, em relação à operação $(\mathbb{V} \times \mathbb{V}, +)$, seguem os postulados da adição:

1. $\forall \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j} \in \mathbb{V} \Rightarrow \mathbf{v_i} + \mathbf{v_j} \in \mathbb{V}$ (fechamento);
2. $\forall \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{v_i} + \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} + \mathbf{v_i}$ (comutatividade);
3. $\forall \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}, \mathbf{v_k} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{v_i} + (\mathbf{v_j} + \mathbf{v_k}) = (\mathbf{v_i} + \mathbf{v_j}) + \mathbf{v_k}$ (associatividade);
4. $\forall \mathbf{v_j} \in \mathbb{V}$, $\exists \mathbf{v_0} \in \mathbb{V} \mid \mathbf{v_0} + \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} + \mathbf{v_0}$ (elemento neutro);
5. $\forall \mathbf{v_j} \in \mathbb{V}$, $\exists(-\mathbf{v_j}) \in \mathbb{V} \mid \mathbf{v_j} + (-\mathbf{v_j}) = \mathbf{v_0} = \mathbf{v_j} + (-\mathbf{v_j})$. (inversa).

E a partir da operação $(\mathbb{K} \times \mathbb{V}, \circ) = (\mathbb{K} \times \mathbb{V}, \ )$, os postulados da multiplicação:

1. $\forall k_i \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v_j} \in \mathbb{V} \Rightarrow k_i\mathbf{v_j} \in \mathbb{V}$ (fechamento);
2. $\forall k_i, k_j \in \mathbb{K}$ e $\forall \mathbf{v_k} \in \mathbb{V}$, $k_i(k_j\mathbf{v_k}) = (k_ik_j)\mathbf{v_k}$ (associatividade);
3. $\forall \mathbf{v_j} \in \mathbb{V}$, $\exists 1 \in \mathbb{K} \mid 1\mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j}1$ (identidade);
4. $\forall k_i \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v_j}, \mathbf{v_k} \in \mathbb{V}$, $k_i(\mathbf{v_j} + \mathbf{v_k}) = k_i\mathbf{v_j} + k_i\mathbf{v_k}$ (distributica escalar);
5. $\forall k_i, k_j \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v_k} \in \mathbb{V}$, $(k_i + k_j)\mathbf{v_k} = k_i\mathbf{v_k} + k_j\mathbf{v_k}$ (distributiva vetorial).

Base de um espaço vetorial

Seja um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$, onde $\{v_j\} \in \mathbb{V}$ e $\{k^j\} \in \mathbb{K}$. Então:

Definição 1. *Um conjunto de vetores* $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_j}, ..., \mathbf{v_n}\}$ *é dito linearmente dependente se, para,*

$$k^1\mathbf{v_1} + k^2\mathbf{v_2} + ... + k^j\mathbf{v_j} + ... + k^n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

os escalares $\{k^j\} \in \mathbb{K}$ *nem todos nulos.*

Definição 2. *Um conjunto de vetores* $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_j}, ..., \mathbf{v_n}\}$ *é dito linearmente independente se, sendo*

$$k^1\mathbf{v_1} + k^2\mathbf{v_2} + ... + k^j\mathbf{v_j} + ... + k^n\mathbf{v_n} = \mathbf{0},$$

então, existe $\{k^j\} \in \mathbb{K}$ onde todos os escalares são nulos.

Definição 3. *Um conjunto de vetores* $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_j}, ..., \mathbf{v_n}\}$ *é dito span*($\mathbb{V}$) *se,* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}$, *então existe* $\{x^j\} \in \mathbb{K}$, *tal que,*

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{v_1} + x^2\mathbf{v_2} + ... + x^j\mathbf{v_j} + ... + x^n\mathbf{v_n}$$

ou seja, $\mathbf{x}$ *é um vetor expandido sobre o espaço vetorial* $\mathbb{V}$, *considerando o conjunto* $\{x^j\} \in \mathbb{K}$ *(Vale ressaltar que a unicidade do vetor* $\mathbf{x}$ *não está imposta, pois pode ser reescrito de infinitas formas. Logo, se faz necessário garantir uma forma unívoca para quaisquer* $\{\mathbf{v}\} \in \mathbb{V}$, *assim como para o vetor* $\mathbf{x}$. *Isto pode ser feito fixando determinada base no espaço que os contêm).*

Definição 4. *Um conjunto de vetores* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ *é uma base de um espaço vetorial* $\mathbb{V}$ *se, e somente se, qualquer vetor* $\boldsymbol{v}$ *pode ser escrito como combinação linear unívoca desses elementos. Ou seja, este é um conjunto linearmente independente maximal (qualquer outro vetor que seja adicionado a esta combinação, a torna dependente) e é um conjunto de expansão mínima do espaço(qualquer vetor que seja retirado da combinação, torna o espaço não-expansível pelos entes restantes). Assim:*

Definição 5. *Se o conjunto de vetores* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ *é uma base do espaço vetorial* $\mathbb{V}$, *então qualquer vetor* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbb{V}$ *pode ser escrito como:*

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e_1} + x^2\mathbf{e_2} + ... + x^j\mathbf{e_j} + ... + x^n\mathbf{e_n} = \sum_{\mu=1}^{n} x^\mu \mathbf{e}_\mu$$

que, na notação de Einstein - soma sobre índices repetidos,

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$$

onde $\{x^\mu\}$ são denominadas as componentes do vetor $\mathbf{x}$ com respeito à base do espaço vetorial $\mathbb{V}$. Logo, dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{x}$ serão idênticos se e somente se suas componentes, quando escritas em relação aos vetores da base $\{\mathbf{e}_\mu\}$, possuem os mesmos $\{x^\mu\}$.

Definição 6. *Se dois conjuntos $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$ e $\{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, ..., \mathbf{f_m}\}$ são denominados vetores da base de $\mathbb{V}$, então a dimensão de $\mathbb{V}$ é escrita como $dim(\mathbb{V}) = m = n$. Consequência das definições 4 e 5.*
Observação: Vale ressaltar que os espaços vetoriais podem ter dimensões finitas e infinitas. Como exemplo, seriam respectivamente, o espaço de Minkowski ($\mathbb{M}$) com dimensão $dim(\mathbb{M}) = 4$, e o espaço de Hilbert ($\mathcal{H}$) com dimensão $dim(\mathcal{H}) = \infty$.

Aplicação (Transformação) Linear e Isomorfismo

Sejam dois espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$. Então a regra de aplicação,

$$\begin{aligned} T : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{W} \\ \mathbf{v} &\longmapsto T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

é uma transformação linear [antilinear] quando,

(a) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $T(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{v})$,

(b) $\forall k \in \mathbb{K}$ e $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ $[= k^*T(\mathbf{v})]$.

O conjunto das aplicações lineares [antilineares] de $\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ pode ser representado por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ $[\mathcal{A}(\mathbb{V}, \mathbb{W})]$. As definições,

(a) $\forall\, T, T' \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ $[\mathcal{A}(\mathbb{V}, \mathbb{W})]$, $(T + T')(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + T'(\mathbf{v})$,

(b) $\forall\, k \in \mathbb{K}$ e $\forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $(kT)(\mathbf{v}) = k \cdot T(\mathbf{v})$ $[= k^* \cdot T(\mathbf{v})]$.

tornam $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ $[\mathcal{A}(\mathbb{V}, \mathbb{W})]$ um espaço vetorial.

Definição 7. *Seja $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear [antilinear] com:*

(a) $T(0) = 0$;

(b) T é biunívoca se e, somente se, $T(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$.

Definição 8. *Sejam dois espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ de mesma dimensão $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W}) = n$ e $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear [antilinear]. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é um isomorfismo;

(b) T é biunívoca; e

(c) T é sobre $\mathbb{W}$.

Formas Lineares

Seja um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ dos complexos. Uma aplicação ϕ que associa a cada vetor $\mathbf{v}$ em $\mathbb{V}$ um escalar $\phi(\mathbf{v})$ em $\mathbb{K}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \phi(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

de tal maneira que, $\forall\ k \in \mathbb{K}$ e $\forall \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$,

(a) $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{v})$,

(b) $\phi(k\mathbf{v}) = k\phi(\mathbf{v})$,

é dito *Forma Linear*. Uma outra denominação comum para forma linear é *covetor*.

Se o conjunto das formas lineares sobre $\mathbb{V}$ define um espaço, tal que,

(c) $(\phi + \phi')(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}) + \phi'(\mathbf{v})$,

(d) $(k\phi)(\mathbf{v}) = k\phi(\mathbf{v})$,

o espaço dos covetores passa a ter uma estrutura de espaço vetorial. Nessas condições, o conjunto das formas lineares constitui um espaço vetorial $\mathbb{V}^*$ sobre $\mathbb{K}$, que é denominado o *espaço dual* $\mathbb{V}^*$ de $\mathbb{V}$, ou simplesmente espaço dual de $\mathbb{V}$. Os elementos do espaço vetorial $\mathbb{V}$ são chamados de vetores *contravariantes*, enquanto aqueles do espaço vetorial dual $\mathbb{V}^*$, de vetores *covariantes*. Ao longo do trabalho, por simplicidade, serão denominados respectivamente de *vetores* e *covetores*.

Espaço Afim

Seja $\mathbb{P}$ um conjunto não-vazio cujos elementos serão chamados de *pontos* e um espaço vetorial $\mathbb{V}$, com $dim(\mathbb{V}) = n$. É possível definir uma *função sobrejetora* f que segue a regra,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P} \times \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ (A, B) &\longmapsto \mathbf{v} = f(A, B) \end{aligned}$$

ou seja, a cada par ordenado (A, B) de pontos em $\mathbb{P}$ está associado um vetor $\mathbf{v}$ em $\mathbb{V}$, ou ainda, que um certo vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ em $\mathbb{V}$ pode ser determinado por um par (A, B) em $\mathbb{P}$.

O conjunto $\mathbb{P}$ é dito *Espaço Afim*, associado ao espaço vetorial $\mathbb{V}$, se os seguintes axiomas forem válidos,

(a) Dado A em $\mathbb{P}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{V}$, existe um único $B \in \mathbb{P}$, tal que $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$,

(b) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$, Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = \overline{AC}$,

(c) Dado um ponto 0 em $\mathbb{P}$, dito arbitrário, a $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ corresponde um único ponto $V \in \mathbb{P}$, tal que $\overrightarrow{0V} = \mathbf{v}$.

Obedecidas as condições acima colocadas, diz-se que $\mathbb{P}$ é um espaço afim de dimensão $dim(\mathbb{P}) = dim(\mathbb{V}) = n$. Além disso, pode-se afimar que o mesmo será real ou complexo, a depender da definição do espaço $\mathbb{V}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$, dos reais ou complexos, respectivamente.

Soma Direta e Projetores de espaços vetoriais

Sejam dois subespaços $\mathbb{U}_1$ e $\mathbb{U}_2$ do espaço vetorial $\mathbb{V}$, onde os elementos $\mathbf{u}_j \in \mathbb{U}_j$ $(j = 1, 2)$.

Definição 9. *O conjunto de todas as somas dos elementos* $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ *define a soma dos espaços vetoriais,* $\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2$*, onde a mesma é também subespaço de* $\mathbb{V}$*.*

Definição 10. *Se* $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{0\}$ *então a soma* $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2$ *é dita soma direta entre* $\mathbb{U}_1$ *e* $\mathbb{U}_2$*, escrita como:*

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \bigoplus \mathbb{U}_2.$$

Seja um operador linear $\mathcal{P}$ em $\mathbb{V}$. Este é dito *operador de projeção* ou simplesmente *projetor*, se e somente se, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

Definição 11. *Seja uma soma direta dada por* $\mathbb{V} = \mathbb{U}_1 \bigoplus \mathbb{U}_2 \bigoplus ... \bigoplus \mathbb{U}_m = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{U}_j$ *e os elementos* $\mathbf{u}_j \in \mathbb{U}_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$*, tal que* $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ... + \mathbf{u}_m$*, onde* $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$*. Além disso, seja um ente* $\mathcal{P}_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$*, tal que* $\mathcal{P}_j(\mathbf{v}) = \delta_{ij}\mathbf{v}_i$*. Logo,*

$$\mathcal{P}_j(\mathbf{v}) = \mathcal{P}_j(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + ... + \mathbf{v}_m) = \mathbf{v}_j$$

o que resulta em $\mathcal{P}_j^2(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_j = \mathcal{P}_j(\mathbf{v})$*, ou seja,* $\mathcal{P}_j$ *é um projetor sobre o subespaço* $\mathbb{U}_j \subset \mathbb{V}$*.*

Definição 12. *Seja o espaço* $\mathbb{V} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{U}_j$*; então, para cada subespaço* $\mathbb{U}_j \subset \mathbb{V}$*, existe um projetor* $\mathcal{P}_j$ *sobre* $\mathbb{U}_j$*. Assim, há um conjunto de* m *projetores* $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ..., \mathcal{P}_m\}$ *em* $\mathbb{V}$*, de modo que:*

(a) $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \delta_{ij}\mathcal{P}_j$ *,* $(j = 1, 2, ..., m)$*;*

(b) $\sum_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j = \mathbf{1}$ *, onde* $\mathbf{1}$ *é o operador identidade, tal que,* $\mathbf{1}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$*;*

(c) $\mathcal{P}_j(\mathbb{V}) = \mathbb{U}_j$.

Aplicações Bilineares

Sejam os espaços vetoriais $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ e um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação produto cartesiano,

$$\phi : \mathbb{U} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

é tal que, para $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}$ e $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, a função $\phi = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ possui dois argumentos. A aplicação ϕ é dita *bilinear* quando for linear em ambos argumentos, ou *sesquilinear* quando é linear em um argumento e antilinear no outro, ou seja, depende de como estão definidos $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Com isso, para a aplicação ϕ, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbb{U}$ e $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{V}$, tem-se que,

(a) $\phi(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \phi(\mathbf{u}', \mathbf{v})$,

(b) $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}') = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$,

(c) $\phi(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, onde $k \in \mathbb{R}$, ϕ bilinear
$\phi(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k^*\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, onde $k \in \mathbb{C}$, ϕ sesquilinear,

(d) $\phi(\mathbf{u}, k\mathbf{v}) = k\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, onde $k \in \mathbb{K}$.

Nos casos particulares em que $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, a função "ϕ" é denominada *Forma*,

(i) *Bilinear*, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ é o corpo dos números reais,

(ii) *Sesquilinear*, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos.

Considerando o argumento "$\mathbf{u}$" de $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ fixo, então:

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}), \tag{2.1}$$

tal que $\phi_{\mathbf{u}}$ é um elemendo do dual $\mathbb{V}^*$, função de $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$. Logo,

(a) $\phi_{\mathbf{u}+\mathbf{u}'} = \phi_{\mathbf{u}} + \phi_{\mathbf{u}'}$,

(b) $\phi_{k\mathbf{u}} = k\phi_{\mathbf{u}}\ \ [= k^*\phi_{\mathbf{u}}]$.

Assim, a correspondência $\mathbf{u} \in \mathbb{V} \longrightarrow \phi_{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^*$ é uma aplicação bilinear [sesquilinear] de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}^*$. Essa correspondência é dita aplicação associada à forma bilinear [sesquilinear] g, notada por, $\phi_{\mathbf{u}} = g\mathbf{u}$. Logo,

$$\phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = g\mathbf{u}(\mathbf{v}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{2.2}$$

estabelecendo um isomorfismo entre as formas bilineares [sesquilineares] sobre $\mathbb{V}$ e as aplicações lineares [antilineares] de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}^*$. Seja uma forma bilinear [sesquilinear] g sobre o espaço vetorial $\mathbb{V}$, $dim(\mathbb{V}) = n$ e com uma base $\{\mathbf{e}_j\},\ j = 1, 2, ..., n$. Então,

(a) $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(u^i\mathbf{e}_i, v^j\mathbf{e}_j) = u^iv^jg_{ij}\ \ [= u^{i*}v^jg_{ij}], \qquad g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$

(b) $g\mathbf{u} = (g\mathbf{u})_k\mathbf{e}^k$.

Proposição 1. *A transposta de uma forma bilinear g, ou seja g^t, é escrita como:*

$$g^t(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad [\{g(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}^*] \tag{2.3}$$

Proposição 2. *Uma forma bilinear [sesquilinear] $g : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ [\mathbb{C}]$ pode ser classificada, segundo comportamento dos seus argumentos em relação à sua transposta g^t, como:*

(a) $g^t(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad [\{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\}^*]$ *(Simétrico)*

(b) $g^t(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad [-\{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\}^*]$ *(Antissimétrico ou Alternado)*

Conexões Bilineares

Uma conexão é um tipo de aplicação linear onde, dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ e seu respectivo dual $\mathbb{V}^*$, tem-se,

$$\vartheta : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^*. \tag{2.4}$$

Sua relação direta com uma certa forma bilinear g pode ser dada por:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &= \vartheta(\mathbf{v})(\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Esta forma obedece aos axiomas discutidos na seção 2.1.3 e foi definida implicitamente na expressão (2.1); ou seja, $\phi_{\mathbf{u}}$ é uma conexão bilinear [sesquilinear]. Na definição acima (2.5), assim como em muitas definições e proposições ao longo do trabalho, foi adotado que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ para facilitar o entendimento algébrico; todavia, as ideias são facilmente generalizadas para o caso complexo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposição 3. *Se o kernel* $ker(\vartheta) = 0$ *a conexão é dita "não degenerada". Logo, o espaço* $\mathbb{V}$ *e a forma bilinear* ϕ*, associados a esta conexão* ϑ*, são ditos também não degenerados.*

Proposição 4. *A forma bilinear* g *é não degenerada se, para todo* $\mathbf{v} \neq 0$*, existir um* $\mathbf{u} \neq 0$ *tal que* $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \neq 0$*. Assim, como* $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{V}^*)$*, uma conexão não degenerada impõe uma relação de isomorfismo entre* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{V}^*$*.*

Proposição 5. *Um espaço vetorial que possui uma forma bilinear* $g : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tem o chamado produto escalar. Logo,* $g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ *é o produto escalar entre os vetores* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{u}$*. Assim, se* $g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ *então os vetores são ortogonais em relação à forma bilinear* g*.*

Proposição 6. *Espaço Quadrático*
Um espaço vetorial $\mathbb{V}$ *que possui uma forma bilinear simétrica* g*, cuja conexão simétrica associada é dada por:*

$$\vartheta(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = \vartheta(\mathbf{u})(\mathbf{v}) \tag{2.6}$$

é denominado de Espaço Quadrático de forma quadrática $Q(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})(\mathbf{v})$*, simbolicamente denotado por* $(\mathbb{V}, g)$*.*

Proposição 7. *Espaço Simplético*
Um espaço vetorial $\mathbb{V}$ *que possui uma forma bilinear antissimétrica* g*, necessariamente não degenerada, cuja conexão antissimétrica associada é dada por*

$$\vartheta(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = -\vartheta(\mathbf{u})(\mathbf{v}) \tag{2.7}$$

é denominado de Espaço Simplético, onde os vetores são isotrópicos.

2.1.4 Álgebra

Seja um espaço vetorial $\mathbb{V}$ e um corpo $\mathbb{K}$. Uma álgebra consiste na coleção dos objetos destes conjuntos, que obedece uma série de axiomas relacionados às três regras de operações:

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \\ \circ &: \mathbb{K} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \\ \diamond &: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \end{aligned}$$

ou seja, possui a seguinte estrutura,

(a) um conjunto de elementos $\{k_j\} \in \mathbb{K}$, denominados *escalares*,

(b) um conjunto de elementos $\{\mathbf{v_j}\} \in \mathbb{V}$, denominados *vetores*,

com operações entre estes elementos denominadas:

(i) adição vetorial, $(\mathbb{V} \times \mathbb{V}, +)$,

(ii) multiplicação escalar, $(\mathbb{K} \times \mathbb{V}, \circ)$,

(iii) multiplicação interna, $(\mathbb{V} \times \mathbb{V}, \diamond)$.

Seguem assim os axiomas:

1. em relação à adição vetorial $(\mathbb{V} \times \mathbb{V}, +)$, são válidos todos os postulados discutidos na seção 2.1.3;

2. em relação à multiplicação escalar $(\mathbb{K} \times \mathbb{V}, \circ)$, são válidos todos os postulados discutidos na seção 2.1.3.

Os axiomas da multiplicação interna $(\mathbb{V} \times \mathbb{V}, \diamond)$, para $\forall\ \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}, \mathbf{v_k} \in \mathbb{V}$, são definidos como:

3. $\forall \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j} \in \mathbb{V} \Longrightarrow \mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_j} \in \mathbb{V}$ (fechamento);

4. $(\mathbf{v_i} + \mathbf{v_j}) \diamond \mathbf{v_k} = \mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_k} + \mathbf{v_j} \diamond \mathbf{v_k}$ (distributiva);
   $\mathbf{v_i} \diamond (\mathbf{v_j} + \mathbf{v_k}) = \mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_j} + \mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_k}$

5. $\exists\ \mathbf{e_0} \in \mathbb{V} \mid \mathbf{e_0} \diamond \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} \diamond \mathbf{e_0}$. (elemento neutro).

Podem ocorrer variações do tipo de álgebra, a depender de quais postulados abaixo são válidos para a mesma:

6. $(\mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_j}) \diamond \mathbf{v_k} = \mathbf{v_i} \diamond (\mathbf{v_j} \diamond \mathbf{v_k})$ (associatividade);

7. $\mathbf{v} \diamond \mathbf{1} = \mathbf{1} \diamond \mathbf{v} = \mathbf{v}$ (identidade);

8. $\mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} \diamond \mathbf{v_i}$ (comutatividade);
   $\mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_j} = -\mathbf{v_j} \diamond \mathbf{v_i}$ (anti-comutatividade);

9. $\mathbf{v_i} \diamond (\mathbf{v_j} \diamond \mathbf{v_k}) = (\mathbf{v_i} \diamond \mathbf{v_j}) \diamond \mathbf{v_k} + \mathbf{v_j} \diamond (\mathbf{v_k} \diamond \mathbf{v_i})$ (propriedade derivada).

2.1.5 Vetores e Covetores

Seja uma forma linear dada como,

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \phi(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

considerando que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o corpo dos reais. Naturalmente é possível generalizar os resultados para o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o corpo dos complexos, necessitando maiores cuidados para o corpo dos quatérnions $\mathbb{H}$, devido à anticomutatividade dos seus elementos.

Proposição 8. *Supondo uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_\mu\}$ de $\mathbb{V}$ com $\mu = 1, 2, ..., m$, ou seja $dim(\mathbb{V}) = m$, e no caso de um vetor $\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$, é possível escrever que:*

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \phi(x^\mu \mathbf{e}_\mu) \\ &= x^\mu \phi(\mathbf{e}_\mu) \\ &= x^\mu \phi_\mu \end{aligned}$$

tal que $\phi_\mu = \phi(\mathbf{e}_\mu)$ caracteriza o covetor $\phi \in \mathbb{V}^*$, quando aplicado a uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_\mu\}$.

Proposição 9. *Por outro lado, supondo uma base $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}^\nu\}$ de $\mathbb{V}^*$ com $\nu = 1, 2, ..., n$, ou seja, $dim(\mathbb{V}^*) = n$, e sabendo que o covetor $\phi \in \mathbb{V}^*$, então*

$$\phi = \phi_\nu \mathbf{e}^\nu.$$

Assim, as coordenadas de um covetor ϕ na base dual $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}^\nu\}$ de $\mathbb{V}^*$ são dadas pelos valores de $\phi_\nu = \phi(e_\nu)$.

Definição 13. *É possível estabelecer uma definição que relacione as bases do espaço $\mathbb{V}$ e seu dual $\mathbb{V}^*$, como:*

$$\mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, \ se \ \mu = \nu \\ 0, \ se \ \mu \neq \nu \end{cases},$$

ou seja, que as bases guardem entre si uma relação de ortonormalidade.

Proposição 10. *A partir das proposições 8, 9 e da definição 13, pode-se concluir que*

$$dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{V}^*) = n,$$

justamente devido à relação de isomorfismo que existe entre um espaço vetorial e seu dual.

Proposição 11. *Sejam duas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ do espaço $\mathbb{V}$, de tal maneira que se possa realizar mudanças de base $\mathcal{B} \longleftrightarrow \mathcal{B}'$, descritas como*

$$\mathbf{e}'_\mu = B^\nu_\mu \mathbf{e}_\nu \Longleftrightarrow \mathbf{e}_\mu = (B^{-1})^\nu_\mu \mathbf{e}'_\nu.$$

Então, um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, escrito na base $\mathcal{B}$ com coordenadas $\{v^\mu\}$ e na base $\mathcal{B}'$ com coordenadas $\{v'^\mu\}$, onde $\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu = v'^\mu \mathbf{e}'_\mu$, possui uma relação entre suas coordenadas, segundo as transformações,

$$v^\mu = B^\mu_\nu v'^\nu \Longleftrightarrow v'^\mu = (B^{-1})^\mu_\nu v^\nu.$$

Analogamente, sejam duas bases $\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{B}'^*$ do espaço $\mathbb{V}^*$, de tal maneira que se possa realizar mudanças de base de $\mathcal{B}^* \longleftrightarrow \mathcal{B}'^*$, descritas como

$$\mathbf{e}^{\mu} = B^{\mu}_{\nu}\mathbf{e}'^{\nu} \Longleftrightarrow \mathbf{e}'^{\mu} = (B^{-1})^{\mu}_{\nu}\mathbf{e}^{\nu}.$$

Então um covetor $\phi \in \mathbb{V}^*$, escrito na base $\mathcal{B}^*$ com coordenadas $\{\phi_\mu\}$ e na base $\mathcal{B}'^*$ com coordenadas $\{\phi'_\mu\}$, onde $\phi_\mu = \phi_\mu \mathbf{e}^\mu = \phi'_\mu \mathbf{e}'^\mu$, possui uma relação entre suas coordenadas, segundo as transformações

$$\phi'_\mu = B^{\nu}_{\mu}\phi_\nu \Longleftrightarrow \phi_\mu = (B^{-1})^{\nu}_{\mu}\phi'_\nu,$$

sendo válidas as relações de ortonormalidade $\mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}'^\mu(\mathbf{e}'_\nu) = \delta^\mu_\nu$.

2.2 Fundamentos Algébricos

Para que seja construída uma Álgebra é preponderante o entendimento de como os elementos de um espaço vetorial qualquer e um dado corpo se relacionam, regidos por uma estrutura básica, que envolve duas operações e uma lei de composição externa. Com isso, os axiomas e suas propriedades precisam ser rígidos, com um papel insubstituível na estrutura e fundamentação algébrica.

Após a axiomatização e verificação de consistência teórica, um outro procedimento indispensável seria correlacionar possíveis diferentes álgebras. Isto pode ser feito através do isomorfismo e homomorfismo, analisando possíveis relações de identidade e relações de equivalência. A importância dessas abstrações reside na possibilidade de relacionar estruturas matemáticas com teorias físicas, o que pode suscitar novos conceitos até então não verificáveis, simplesmente devido à falta de um formalismo matemático diferente ou a não utilização do mesmo.

Nesta seção, entre diversas referências consultadas para realizar um compêndio de conceitos algébricos, destacam-se Junior e Junior (2012), Jancewicz (1988) e Vianna (2012).

2.2.1 Álgebra Tensorial

2.2.1.1 Tensores

Tensores covariantes sobre $\mathbb{V}$

Seja um espaço vetorial $\mathbb{V}$, com $\mathbf{x_j} \in \mathbb{V}$ e $dim(\mathbb{V}) = n$, sobre $\mathbb{K}$. Uma *forma p-linear* sobre $\mathbb{V}$ é uma função $\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p)$ linear em cada argumento, tal que, para $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p \in \mathbb{V}$ e $k \in \mathbb{K}$, então,

$$\begin{gathered}\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times ... \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p) \longmapsto \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p).\end{gathered}$$

com as seguintes propriedades:

(a) $\phi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_j + \mathbf{x}'_j, ..., \mathbf{x}_p) = \phi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_j, ..., \mathbf{x}_p) + \phi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}'_j, ..., \mathbf{x}_p)$

(b) $\phi(\mathbf{x}_1, ..., k\mathbf{x}_j, ..., \mathbf{x}_p) = k\phi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_j, ..., \mathbf{x}_p)$

As p-formas lineares sobre $\mathbb{V}$ são denominadas de *tensores covariantes* de grau p sobre $\mathbb{V}$. O espaço vetorial formado pelo conjunto das p-formas lineares é denotado $\mathbb{V}^{*\otimes p}$, chamado de *potência tensorial p-ésima* de $\mathbb{V}^*$, com propriedades,

(c) $(\phi + \phi')(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) = \phi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) + \phi'(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p)$

(d) $(k\phi)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p) = k\phi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p)$

que são análogas às descritas na seção 2.1.3 quando $p = 1$, onde $\mathbb{V}^{*\otimes p} = \mathbb{V}^*$ é o espaço dual. A dimensão do espaço dos tensores covariantes de grau p sobre $\mathbb{V}$ é $dim(\mathbb{V}^{*\otimes p}) = n^p$.

Tensores contravariantes sobre $\mathbb{V}$

Por ser análogo ao seu recíproco covariante, seguem definições semelhantes ao mesmo. Seja o espaço dual $\mathbb{V}^*$ de $\mathbb{V}$, $dim(\mathbb{V}) = n$. Então, as formas p-lineares $\zeta(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)$ sobre $\mathbb{V}^*$ são chamadas de *tensores contravariantes* de grau p sobre $\mathbb{V}$. O conjunto destes tensores é um espaço vetorial $\mathbb{V}^{\otimes p}$, chamado de *potência tensorial p-ésima* de $\mathbb{V}$, com $dim(\mathbb{V}^{\otimes p}) = n^p$, com propriedades semelhantes às descritas no item anterior.

2.2.1.2 Produto Tensorial

Produto tensorial $p = 1$

Sejam dois covetores $\alpha, \beta \in \mathbb{V}^*$ e dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{V}$, tais que possam ser determinados os escalares $\alpha(\mathbf{v})$ e $\beta(\mathbf{u})$. Assim, é possível definir um produto entre estes entes, a partir da regra

$$(\alpha \otimes \beta) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})$$

ou seja, é uma forma bilinear de um produto cartesiano, onde "$\alpha \otimes \beta$" é denominado *produto tensorial* de α e β. É simples verificar que, a partir das definições acima, o produto tensorial é *não comutativo*,

$$\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha.$$

De maneira análoga, é possível definir o produto tensorial entre dois vetores,

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})(\alpha, \beta) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}).$$

Analogamente têm-se, para os produtos tensoriais mistos,

$$(\alpha \otimes \mathbf{u}) : \mathbb{V} \times \mathbb{V}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\alpha \otimes \mathbf{u})(\mathbf{v}, \beta) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})$$

$$(\mathbf{v} \otimes \beta) : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{v} \otimes \beta)(\alpha, \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})$$

onde as definições foram adotadas de forma que as respostas coincidissem, bastando então mudar os entes vetoriais $(\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{v})$ acima, para que sejam diferentes.

Produto tensorial: caso geral

Sejam os tensores covariantes $\alpha \in \mathbb{V}^{*\otimes p}$ e $\beta \in \mathbb{V}^{*\otimes q}$. O produto tensorial entre α e β é um tensor covariante de grau $p+q$, definido como:

$$[\alpha \otimes \beta](\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}, \mathbf{x}_{p+2}, ..., \mathbf{x}_{p+q}) = \alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p)\beta(\mathbf{x}_{p+1}, \mathbf{x}_{p+2}, ..., \mathbf{x}_{p+q})$$

onde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{V}$, $i = 1, 2, ..., p+q$, e o tensor $[\alpha \otimes \beta] \in \mathbb{V}^{*\otimes(p+q)}$. Similarmente, sejam os tensores contravariantes $\zeta \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ e $\vartheta \in \mathbb{V}^{\otimes q}$, então o produto tensorial entre ζ e ϑ é um tensor contravariante de grau $p+q$,

$$[\zeta \otimes \vartheta](\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p, \phi_{p+1}, \phi_{p+2}, ..., \phi_{p+q}) = \zeta(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)\vartheta(\phi_{p+1}, \phi_{p+2}, ..., \phi_{p+q})$$

onde $\phi_i \in \mathbb{V}^*$ com $i = 1, 2, ..., p+q$, e o tensor $[\zeta \otimes \vartheta] \in \mathbb{V}^{\otimes(p+q)}$.

Bases tensoriais tipo (p, q)

Sejam a base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}$ em $\mathbb{V}$ e $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}^i\}$ sua base dual em $\mathbb{V}^*$, onde $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{V}^*) = n$. Sabendo-se que

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha_i v^i \text{ , onde } \alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$$
$$\beta(\mathbf{u}) = \beta_i u^i \text{ , onde } \beta_i = \beta(\mathbf{e}_i)$$

e, ainda, pela definição,

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = v^i u^j.$$

Logo, o produto tensorial $p = 1$ pode ser reescrito como:

$$(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}) = \alpha_i v^i \beta_j u^j$$
$$\alpha \otimes \beta = \alpha_i \beta_j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$$

onde o conjunto das formas bilineares $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ é uma base.

Definição 14. *O espaço definido pelo produto tensorial de covetores é também um espaço vetorial, escrito como* $\mathbb{T}^2(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$. *Analogamente, o espaço vetorial do produto tensorial de vetores pode ser escrito como* $\mathbb{T}_2(\mathbb{V}) = \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$. *No caso dos produtos mistos têm-se os espaços* $\mathbb{T}^1{}_1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}$ *e também* $\mathbb{T}_1{}^1(\mathbb{V}) = \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$.

Definição 15. *Se* $dim(\mathbb{V}) = n$, *então:*

$$dim(\mathbb{T}^2(\mathbb{V})) = dim(\mathbb{T}_2(\mathbb{V})) = dim(\mathbb{T}^1{}_1(\mathbb{V})) = dim(\mathbb{T}_1{}^1(\mathbb{V})) = n^2$$

Definição 16. *Seja uma base* $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *para o espaço* $T^2(\mathbb{V})$*. Uma forma bilinear* B *de* $T^2(\mathbb{V})$ *pode ser escrita como*

$$B = b_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j,$$

onde $b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ *são coordenadas escalares de* B *em* $T^2(\mathbb{V})$*.*

Definição 17. *Uma base* $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ $(i, j = 1, 2..., n)$*, de* $T_2(\mathbb{V})$*, define uma forma bilinear* $C \in T_2(\mathbb{V})$*, tal que:*

$$C = c^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

onde $c^{ij} = C(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)$ *são coordenadas escalares de* C *em* $T_2(\mathbb{V})$*,*

Definição 18. *Uma base mista* $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j\}$ $(i, j = 1, 2..., n)$*, de* $T^1{}_1(\mathbb{V})$*, define uma forma bilinear mista* $D \in T^1{}_1(\mathbb{V})$*, tal que:*

$$D = d_i{}^j\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j,$$

onde $d_i{}^j = D(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j)$ *são coordenadas escalares de* D *em* $T^1{}_1(\mathbb{V})$*.*

Definição 19. *Uma base mista* $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\}$ $(i, j = 1, 2..., n)$*, de* $T_1{}^1(\mathbb{V})$*, define uma forma bilinear mista* $F \in T_1{}^1(\mathbb{V})$*, tal que,*

$$F = f^i{}_j\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j,$$

onde $f^i{}_j = F(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j)$ *são coordenadas escalares de* F *em* $T_1{}^1(\mathbb{V})$*.*

A partir do exposto na seção 2.2.1.2 e nas definições 14 à 19, é possível definir o espaço vetorial dos tensores tipo (p, q). Têm-se as nomenclaturas de espaço, $T^p(\mathbb{V}) = (\mathbb{V}^*)^{\otimes p}$, $T_q(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^{\otimes p}$ ou, ainda, $T^p{}_q(\mathbb{V}) = (\mathbb{V}^*)^{\otimes p} \otimes \mathbb{V}^{\otimes q}$ e $T_p{}^q(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^{\otimes p} \otimes (\mathbb{V}^*)^{\otimes q}$.

Proposição 12. *Seja um espaço vetorial* $T^p{}_q(\mathbb{V}) = (\mathbb{V}^*)^{\otimes p} \otimes \mathbb{V}^{\otimes q}$*. Uma base para este espaço é dada por:*

$$\mathcal{B}(T^p{}_q(\mathbb{V})) = \{\mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \mathbf{e}^{\mu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \mathbf{e}_{\nu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{\nu_q}\}$$

onde $\mu_j(j = 1, 2, ..., p) = 1, 2, ..., n$ *e* $\nu_k(k = 1, 2, ..., q) = 1, 2, ..., n$*. Dessa forma, um tensor* $T \in T^p{}_q(\mathbb{V})$ *é naturalmente escrito pela combinação dos elementos da base* $\mathcal{B}(T^p{}_q(\mathbb{V}))$*, onde* $dim(T^p{}_q(\mathbb{V})) = n^p n^q = n^{p+q}$*, como*

$$T = T^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p}\mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \mathbf{e}^{\mu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \mathbf{e}_{\nu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{\nu_q} \qquad (2.8)$$

onde as componentes tensoriais,

$$T^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p} = T_{\mu_1\mu_2...\mu_p}{}^{\nu_1\nu_2...\nu_q} = T(\mathbf{e}_{\mu_1}, \mathbf{e}_{\mu_2}, ..., \mathbf{e}_{\mu_p}, \mathbf{e}^{\nu_1}, \mathbf{e}^{\nu_2}, ..., \mathbf{e}^{\nu_q}), \tag{2.9}$$

são as coordenadas de T *na base* $\mathcal{B}(T^p{}_q(\mathbb{V}))$*, e as formas multilineares* $T \in T^p{}_q(\mathbb{V})$ *são denominadas tensores do tipo* (p, q)*. Assim, tensores do tipo* $(p, 0)$ *são tensores covariantes e do tipo* $(0, p)$ *contravariantes. Se a ordem tensorial é do tipo* $(1, 0)$ *então trata-se de covetores e do tipo* $(0, 1)$ *de vetores.*

Proposição 13. *Seja um tensor* T *do tipo* (p, q)*, ou seja,* $T \in T^p{}_q(\mathbb{V})$*. Supondo que a base* $\mathcal{B}'^p{}_q(\mathbb{V})$ *é uma transformação da base* $\mathcal{B}^p{}_q(\mathbb{V})$*, ambas do espaço* $T^p{}_q(\mathbb{V})$*, então*

$$\begin{aligned} T &= \quad T^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p}\ \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \mathbf{e}^{\mu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \mathbf{e}_{\nu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}_{\nu_q} \\ &= (T')^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p} \mathbf{e}'^{\mu_1} \otimes \mathbf{e}'^{\mu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}'^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}'_{\nu_1} \otimes \mathbf{e}'_{\nu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}'_{\nu_q}. \end{aligned}$$

Considerando as transformações realizadas na proposição 11, das base $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$*, encontra-se que*

$$T^{\rho_1\rho_2...\rho_q}_{\lambda_1\lambda_2...\lambda_p} = (T')^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p} B^{\mu_1}_{\lambda_1} B^{\mu_2}_{\lambda_2} ... B^{\mu_p}_{\lambda_p} B^{\rho_1}_{\nu_1} B^{\rho_2}_{\nu_2} ... B^{\rho_q}_{\nu_q}, \tag{2.10}$$

que é a expressão da mudança de base das componentes de um tensor tipo (p, q)*,*

2.2.1.3 Definição: Álgebra Tensorial

Seja um espaço tensorial $T^p_q(\mathbb{V})$ do tipo (p, q), onde convenciona-se utilizar a nomenclatura $T^p_q(\mathbb{V}) = T^p{}_q(\mathbb{V})$; caso contrário, $T_q{}^p(\mathbb{V})$ será indicado. Segue então (como na seção 2.1.4):

(i) Adição tensorial
Dados dois tensores quaisquer $A, B \in T^p_q(\mathbb{V})$, têm-se a componente

$$(A + B)^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p} = A^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p} + B^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p}.$$

(ii) Produto tensorial
Sejam os tensores $A \in T^p_q(\mathbb{V})$ do tipo (p, q) e $B \in T^r_s(\mathbb{V})$ do tipo (r, s). O produto tensorial $A \otimes B$ é um tensor $A \otimes B \in T^{p+r}_{q+s}(\mathbb{V})$, tal que sua componente é

$$(A \otimes B)^{\nu_1\nu_2...\nu_q\rho_1\rho_2...\rho_s}_{\mu_1\mu_2...\mu_p\lambda_1\lambda_2...\lambda_r} = A^{\nu_1\nu_2...\nu_q}_{\mu_1\mu_2...\mu_p} B^{\rho_1\rho_2...\rho_s}_{\lambda_1\lambda_2...\lambda_r}.$$

A partir das regras acima, têm-se as propriedades:

1. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ (distributiva);
   $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$

2. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ (associatividade).
   Lembrando que, como discutido anteriormente, $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Uma álgebra tensorial de $\mathbb{V}$, dita $\mathcal{A}(\mathbb{V})$, é constituída pelo espaço formado pela soma direta de todos os espaços vetoriais $T_q^p(\mathbb{V})$, ou seja, $\bigoplus_{p,q} T_q^p(\mathbb{V})$, munida das operações:

(a) Adição tensorial, $(T_q^p(\mathbb{V}) \times T_q^p(\mathbb{V}), +)$;

(b) Produto tensorial, $(T_q^p(\mathbb{V}) \times T_s^r(\mathbb{V}), \otimes)$.

Assim, é necessário que se tenha o par $(T_q^p(\mathbb{V}); +, \otimes)$, onde a adição vetorial está implícita.

A notação da álgebra tensorial covariante, onde se tem tensores do tipo $(p, 0)$, é:

$$T^*(\mathbb{V}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(\mathbb{V}),$$

enquanto que, para a álgebra tensorial contravariante, de tensores tipo $(0, q)$, escreve-se:

$$T(\mathbb{V}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T_q(\mathbb{V}).$$

Lembrando que, pelas simbologias adotadas anteriormente, $T^0(\mathbb{V}) = T_0(\mathbb{V}) = \mathbb{K}$, enquanto que $T^1(\mathbb{V}) = V^*$ e $T_1(\mathbb{V}) = V$.

Definição 20. *Sejam os tensores $A_p \in T_p(\mathbb{V})$ e $B_q \in T_q(\mathbb{V})$ com $T_k \subset T(\mathbb{V})$, então têm-se os seguintes operadores:*

$$\widehat{A}_p = (-1)^p A_p \qquad \textit{(Involução graduada);}$$

$$(A_p \otimes B_q)^{\sim} = \widetilde{B}_q \otimes \widetilde{A}_p \qquad \textit{(Reversão);}$$

$$\bar{A}_p = \widetilde{\widehat{A}}_p = \widehat{\widetilde{A}}_p \qquad \textit{(Conjugação).}$$

Estas conservam a linearidade dos elementos e assim dos respectivos espaços tensoriais.

2.2.2 Álgebra Exterior

2.2.2.1 p-Tensores

Permutações

Dado um conjunto de n elementos $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ordenado em uma sequência desejada, no caso $(a_1\ a_2\ ...\ a_n)$, é possível rearranjá-la segundo uma nova ordem. Seja então uma aplicação bijetora σ, denominada *permutação*, dada por:

$$\sigma : \{a_1, a_2, ..., a_n\} \longrightarrow \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), ..., \sigma(a_n)\}.$$

Definição 21. *A representação de uma permutação é comumente dada pela matriz:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & ... & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$$

onde $\sigma(a_j) = a_k$ é a posição de a_k no qual a_j deve ser alocada, $\forall a_j, a_k \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Definição 22. *O conjunto das permutações de n elementos é denominado grupo simétrico $\mathbb{P}_n$ e o número de elementos pertencentes a esse grupo é igual a $n!$.*

Definição 23. *Se $\sigma(a_j) > \sigma(a_k)$, onde $j < k$, então ocorre a chamada transposição. A paridade ε da permutação σ é dada pelo número par ou ímpar de transposições, ou seja, $\varepsilon(\sigma) = (+1, par; -1, ímpar)$.*

Alternadores

Seja um tensor covariante do tipo $(p, 0)$ ou tensor contravariante do tipo $(0, p)$ que, como visto na proposição 12, é dado como $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_p$, onde X_j é um covetor ou vetor. Um operador chamado *alternador*, $\mathbf{I\!I}$, é definido como:

$$\mathbf{I\!I}(X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_p} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \otimes X_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes X_{\sigma(p)}. \tag{2.11}$$

Seja um tensor covariante de ordem p, cujos argumentos são vetores. Então, neste caso, pode-se escrever:

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes ... \otimes \alpha_p)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p) = \alpha_1(\mathbf{v}_1)\alpha_2(\mathbf{v}_2), ..., \alpha_p(\mathbf{v}_p).$$

Logo, usando a definição de operador alternador, tem-se o caso particular,

$$(\mathbf{I\!I}(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes ... \otimes \alpha_p))(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p) = \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} \alpha_1(\mathbf{v}_1) & \alpha_1(\mathbf{v}_2) & ... & \alpha_1(\mathbf{v}_p) \\ \alpha_2(\mathbf{v}_1) & \alpha_2(\mathbf{v}_2) & ... & \alpha_2(\mathbf{v}_p) \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_p(\mathbf{v}_1) & \alpha_p(\mathbf{v}_2) & ... & \alpha_p(\mathbf{v}_p) \end{vmatrix}, \tag{2.12}$$

ou seja, a definição do alternador leva ao determinante dos funcionais lineares em seus argumentos, explicitando todas as permutações e suas respectivas paridades presentes na equação (2.11).

Definição 24. *O alternador é um operador projetor, ou seja,* $\mathbf{\amalg}^2 = \mathbf{\amalg}$.

A partir dos conceitos até o momento discutidos pode-se estender a ideia de tensores, usando o operador alternador. Essa extensão conduz aos chamados p-tensores (p-vetores e p-covetores), que são definidos a seguir.

p-Vetores e p-Covetores

Seja um tensor A_p do tipo $(0, p)$, que é um tensor contravariante de ordem p, ou seja, $A_p \in T_p(\mathbb{V})$. Um p-vetor $A_{[p]}$ é um tensor contravariante de ordem p alternado, definido como

$$A_{[p]} = \mathbf{\amalg}(A_{[p]}),$$

onde $[p]$ significa a permutação (alternância) no conjunto dos p-índices, segundo a definição dada na equação (2.11). A característica de operador projeção está implícita na definição dada ao p-vetor, bastando analisar que, se $\mathbf{\amalg}(A_p)$ é um p-vetor (observe que não houve indicação do índice $[p]$), então,

$$\mathbf{\amalg}(A_p) = A_{[p]},$$

$$\mathbf{\amalg}(\mathbf{\amalg}(A_p)) = \mathbf{\amalg}(A_{[p]}),$$

$$\mathbf{\amalg}(A_{[p]}) = A_{[p]}.$$

Analogamente, seja um tensor Φ^p do tipo $(p, 0)$, que é chamado tensor covariante de ordem p, ou seja, $\Phi^p \in T^p(\mathbb{V})$. Este define um p-covetor $\Phi^{[p]}$, dito tensor covariante de ordem p alternado, notado como

$$\Phi^{[p]} = \mathbf{\amalg}(\Phi^{[p]}),$$

e, de forma equivalente ao que foi discutido anteriormente, pode ser verificado que $\mathbf{\amalg}(\Phi_p)$ é um p-covetor.

O conjunto dos p-vetores e o conjunto dos p-covetores formam espaços vetoriais. Então, estabelece-se a seguinte nomenclatura para indicá-los:

$\bigwedge^p(\mathbb{V})$, espaço dos p-covetores $\Phi^{[p]}$;

$\bigwedge_p(\mathbb{V})$, espaço dos p-vetores $A_{[p]}$.

Como casos particulares tem-se o espaço dos: 1-covetores, ou covetores, $\bigwedge^1(\mathbb{V})$; 1-vetores, ou vetores, $\bigwedge_1(\mathbb{V})$; 0-covetores, ou escalares, $\bigwedge^0(\mathbb{V})$; 0-vetores, também dos escalares, $\bigwedge_0(\mathbb{V})$. Naturalmente, para os casos dos bivetores (2-vetores), trivetores (3-vetor) e assim por diante., tem-se $\bigwedge_2(\mathbb{V})$, $\bigwedge_3(\mathbb{V})$ etc. De forma geral, serão designados tais elementos por p-tensores.

Dimensão dos espaços p-tensoriais $\bigwedge^p(\mathbb{V})$ e $\bigwedge_p(\mathbb{V})$

Seja uma base $\mathcal{B}(T^p(\mathbb{V})) = \{\mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \mathbf{e}^{\mu_2} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{\mu_k} \otimes ... \otimes \mathbf{e}^{\mu_p}\}$ do espaço $T^p(\mathbb{V})$ dos tensores covariantes do tipo p, onde os índices correspondentes a $\mu_k(k = 1, 2, ..., p) = 1, 2, ..., n$ são definidos a partir de $dim(\mathbb{V}) = n$, o que significa que $dim(T^p(\mathbb{V})) = n^p$.

Analisando a base proposta verifica-se que, quando for aplicado o alternador, os tensores com quaisquer dois índices iguais irão se anular. Logo, nem todos os elementos de $\mathcal{B}(T^p(\mathbb{V}))$ serão utilizados para compor uma base do espaço $\mathcal{B}(\bigwedge^p(\mathbb{V}))$; dessa forma, $\mathcal{B}(\bigwedge^p(\mathbb{V})) \subset \mathcal{B}(T^p(\mathbb{V}))$, onde:

$$\mathcal{B}(\bigwedge^p(\mathbb{V})) = \mathcal{B}(T^p(\mathbb{V}))_{(\mu_1 \neq \mu_2 \neq ... \neq \mu_k \neq ... \neq \mu_p)}$$

Determinar a dimensão dos espaços p-tensoriais significa verificar o número de elementos da base que pertencem aos mesmos. Para isso, é necessário fazer uma contagem destes elementos para cada índice; então, indicando o índice por $i_p(p = 1, 2, 3, ...)$,

$$\begin{array}{ccc} i_1 & \longrightarrow & n \\ i_2 & \longrightarrow & n-1 \\ i_3 & \longrightarrow & n-2 \\ ... & ... & .... \\ ... & ... & .... \\ i_{p-1} & \longrightarrow & n-(p-2) = n-p+2 \\ i_p & \longrightarrow & n-(p-1) = n-p+1 \end{array} \tag{2.13}$$

que fornece uma seleção $\mathfrak{s}$ de elementos de $\mathcal{B}(T^p(\mathbb{V}))$ dada por,

$$\mathfrak{s}[\mathcal{B}(T^p(\mathbb{V}))] = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-p+2)(n-p+1) \tag{2.14}$$

todavia o alternador permuta os p elementos $p!$ vezes, então o número de elementos p alternados linearmente independentes será,

$$\frac{\mathfrak{s}[\mathcal{B}(T^p(\mathbb{V}))]}{p!} = dim(\bigwedge^p(\mathbb{V})) \tag{2.15}$$

Assim, através de cálculos simples, tem-se,

$$\begin{aligned} dim(\bigwedge^p(\mathbb{V})) &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-p+2)(n-p+1)}{p!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-p+2)(n-p+1)}{p!}\cdot\frac{(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}. \end{aligned}$$

Proposição 14. *A dimensão espacial dos p-tensores é dada por*

$$dim(\bigwedge^p(\mathbb{V})) = dim(\bigwedge_p(\mathbb{V})) = \binom{n}{p}, \qquad p = 1, 2, ..., n \tag{2.16}$$

Proposição 15. *Pela definição do binômio de Newton, conclui-se:*

$$dim(\bigwedge^p(\mathbb{V})) = \binom{n}{p} = dim(\bigwedge^{n-p}(\mathbb{V})) = \binom{n}{n-p}. \tag{2.17}$$

As proposições 14 e 15 denotam que há um“isomorfismo” entre os espaços $\bigwedge^p(\mathbb{V})$, $\bigwedge_p(\mathbb{V})$, $\bigwedge^{n-p}(\mathbb{V})$ e $\bigwedge_{n-p}(\mathbb{V})$.

2.2.2.2 Produto Exterior

Sejam $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ um p-vetor e $B_{[q]} \in \bigwedge_q(\mathbb{V})$ um q-vetor. O produtor exterior é dado por:

$$\begin{gathered} \wedge : \bigwedge_p(\mathbb{V}) \times \bigwedge_q(\mathbb{V}) \longrightarrow \bigwedge_{p+q}(\mathbb{V}) \\ A_{[p]} \bigwedge B_{[q]} = \mathbf{II}(A_{[p]} \otimes B_{[q]}), \end{gathered}$$

com as seguintes propriedades:

1. $A_{[p]} \wedge (B_{[q]} + C_{[s]}) = A_{[p]} \wedge B_{[q]} + A_{[p]} \wedge C_{[s]}$ (distributiva)
2. $(A_{[p]} \wedge B_{[q]}) \wedge C_{[s]} = A_{[p]} \wedge (B_{[q]} \wedge C_{[s]})$ (associatividade)
3. $k \wedge A_{[p]} = kA_{[p]}$, onde $k \in \bigwedge_0(\mathbb{V})$ (bilinearidade)

propriedades que são válidas também para o caso dos p-covetores, bastando apenas replicar as definições e discussões apresentadas.

Um caso particular de interesse é o produto exterior entre vetores. Nesse caso, fica explícito o caráter geométrico dos multivetores, ideia essa mais intuitiva quando verificada para os chamados bivetores $B_2 \in \bigwedge_2(\mathbb{V})$. Assim, sejam dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{V}$, cujo bivetor pode ser escrito como

$$B_2 = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \tag{2.18}$$

Seguindo a definição vinda da álgebra linear, seu módulo será,

$$|B_2| = |\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}| = |\mathbf{v}||\mathbf{u}|sen(\theta(\mathbf{v}; \mathbf{u})) \tag{2.19}$$

onde $\theta(\mathbf{v}; \mathbf{u})$ é o ângulo entre os vetores, ou seja, geometricamente os bivetores representam planos orientados. Agora, verificando o bivetor através da definição de produto externo via alternador, como dito inicialmente nesse tópico, pode-se obter a relação:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \tag{2.20}$$

e, a partir disso, conclui-se que

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \tag{2.21}$$

ou seja, os bivetores são anticomutativos, podem representar orientações de planos seguindo a regra da mão direita e, obviamente, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$. Existe uma relação geométrica, como pode ser visto em (2.19), entre o produto externo ($\wedge$) e o produto vetorial ($\times$) usual, ou seja, existe entre estes entes uma relação de isomorfismo, $\mathbf{v} \times \mathbf{u} \sim \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

Um outro caso particular a considerar trata-se do trivetor $T_3 \in \bigwedge_3(\mathbb{V})$, que é obtido através do produto externo entre um vetor $\mathbf{c} \in \mathbb{V}$ e um bivetor $B_2 \in \bigwedge_2(\mathbb{V})$. Assim,

$$T_3 = \mathbf{c} \wedge B_2, \tag{2.22}$$

onde $B_2 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, com módulo dado por $|T_3| = |\mathbf{c} \wedge B_2| = |\mathbf{c}||B_2|sen(\theta(\mathbf{c}; B_2))$, sendo $\theta(\mathbf{c}; B_2)$ o ângulo entre os entes. Naturalmente é necessário obter uma expressão que seja uma generalização do produto exterior.

Analisando o p-vetor e o q-vetor é possível escrevê-los como:

$$A_{[p]} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdot \ldots \cdot \wedge \mathbf{v}_p, \tag{2.23}$$

$$B_{[q]} = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdot \ldots \cdot \wedge \mathbf{u}_q. \tag{2.24}$$

Com isso, o produto exterior entre eles é

$$A_{[p]} \wedge B_{[q]} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdot \ldots \cdot \wedge \mathbf{v}_p \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \cdot \ldots \cdot \wedge \mathbf{u}_p, \tag{2.25}$$

cuja relação de anticomutatividade, a partir da equação (2.21), pode ser escrita como

$$A_{[p]} \wedge B_{[q]} = (-1)^{pq} B_{[q]} \wedge A_{[p]}. \tag{2.26}$$

Base do espaço $\bigwedge_p(\mathbb{V})$

Até o momento foram discutidas algumas questões para o entendimento dos entes p-tensoriais, inclusive fazendo analogias com outras abstrações matemáticas classicamente conhecidas. As dimensões dos espaços p-tensoriais foram determinadas analiticamente, sem que houvesse em seguida a definição das bases que expandem os mesmos. Isto porque, para a definição do produto exterior, é necessário o operador alternador: esse possui uma fundamental importância, pois relaciona o produto tensorial ao produto exterior. Na sequência, é discutido o conceito de bases do espaço dos p-vetores, que facilmente pode ser estendido para os p-covetores. Com isso, tem-se a estrutura para apresentação de uma álgebra própria.

Seja o espaço dos 2-vetores $\bigwedge_2(\mathbb{V})$ e uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ de $\mathbb{V}$ com $dim(\mathbb{V}) = n$. Então o conjunto de elementos dois a dois por produto exterior, devido à relação de anticomutatividade (2.21), será:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4, ..., \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n & \longrightarrow & (n-1) \text{ elementos} \\
\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, ..., \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n & \longrightarrow & (n-2) \text{ elementos} \\
\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, ..., \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_n & \longrightarrow & (n-3) \text{ elementos} \\
... & ... & .... \\
... & ... & .... \\
\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n & \longrightarrow & 1 \text{ elemento}
\end{array}
$$

ou seja, a base de $\bigwedge_2(\mathbb{V})$ é dada por

$$\mathcal{B}(\bigwedge_2(\mathbb{V})) = \{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, ..., \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, ..., \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_n, ..., \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k, ..., \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n\}$$

sendo o número de elementos da base $\mathcal{B}(\bigwedge_2(\mathbb{V}))$, como era de se esperar, dado pela soma de elementos

$$
\begin{aligned}
dim(\bigwedge\nolimits_2(\mathbb{V})) &= (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 3 + 2 + 1 = \sum_{j=1}^{n} (j-1) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, a partir das informações acima, um p-vetor $A_{[2]} \in \bigwedge_2(\mathbb{V})$ é escrito em relação à base $\mathcal{B}(\bigwedge_2(\mathbb{V})) = \{\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k\}_{j \neq k}(j, k = 1, 2, ..., n)$, como:

$$A_{[2]} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \sum_{i<j} A^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \tag{2.27}$$

onde, por conta da relação de anticomutatividade (2.21), pode-se afirmar que $A^{ij} = -A^{ji}$. É possível assim generalizar os resultados para qualquer p-vetor de $\bigwedge_p(\mathbb{V})$.

Definição 25. *Seja uma base* $\mathcal{B}(\bigwedge_p(\mathbb{V})) = \{\mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{\mu_p}\}_{\mu_1 \neq \mu_2 \neq ... \neq \mu_p} (\mu_j = 1, 2, ..., n)$ *de um espaço p-tensorial* $\bigwedge_p(\mathbb{V})$, *onde o espaço* $\mathbb{V}$ *tem uma base* $\mathcal{B}(\mathbb{V}) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ *de* $dim(\mathbb{V}) = n$. *Um p-vetor* $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ *é escrito como*

$$
\begin{aligned}
A_{[p]} &= \frac{1}{p!} \sum_{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p} A^{\mu_1 \mu_2 ... \mu_p} \mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{\mu_p} \\
A_{[p]} &= \sum_{\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_p} A^{\mu_1 \mu_2 ... \mu_p} \mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{\mu_p} \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

ou através da convenção da soma

$$A_{[p]} = A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}\mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\mu_p}, \tag{2.29}$$

onde a condição $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$ *da convenção está restritamente implícita para a expressão dos p-vetores. Claro que em outras situações, exemplificando o caso do tensor tipo (p,q) dado pela expressão (2.8), a convenção (2.29) é um caso particular, pois uma construção geral estabelece p-tensores de ordem mista.*

Proposição 16. *Pseudoescalares ou n-vetores*
Seja uma base $\mathcal{B}(\bigwedge_p(\mathbb{V})) = \{\mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\mu_p}\}_{\mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_p}(\mu_j = 1, 2, \dots, n)$ *de um espaço p-tensorial* $\bigwedge_p(\mathbb{V})$*, onde o espaço* $\mathbb{V}$ *tem uma base* $\mathcal{B}(\mathbb{V}) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *de* $dim(\mathbb{V}) = n$*.*

(a) Se $p = n$*, então tem-se:*

$$dim(\bigwedge\nolimits_n(\mathbb{V})) = \binom{n}{p} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\mathcal{B}(\bigwedge\nolimits_n(\mathbb{V})) = \{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n\}. \tag{2.30}$$

Os elementos do espaço n-vetorial $\bigwedge_n(\mathbb{V})$ *são denominados de pseudoescalar ou n-vetor, e podem ser escritos como*

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_n = k\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n \tag{2.31}$$

onde $k \in \mathbb{K}$ *é um escalar.*

(b) Se $p > n$*, então dado um* $p = n + 1$*,*

$$dim(\bigwedge\nolimits_{n+1}(\mathbb{V})) = \binom{n}{p} = \binom{n}{n+1} = \frac{1}{(-1)!n!}.$$

Logo, $\forall p > n$*,* $\nexists \mathcal{B}(\bigwedge_{n+1}(\mathbb{V}))$ *e* $\bigwedge_{n+1}(\mathbb{V}) = \emptyset$*. Em consequência, a construção de um espaço p-vetorial* $\bigwedge_p(\mathbb{V})$ *está limitada ao intervalo* $0 \leq p \leq dim(\mathbb{V}) = n$*.*

2.2.2.3 Definição: Álgebra Exterior

A álgebra exterior de $\mathbb{V}$, dita $\bigwedge(\mathbb{V})$, é definida pela soma direta dos espaços vetoriais $\bigwedge_p(\mathbb{V})$, onde $0 \leq p \leq dim(\mathbb{V}) = n$, isto é,

$$\bigwedge(\mathbb{V}) = \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge\nolimits_p(\mathbb{V})$$

munido do chamado produto exterior($\wedge$), ou seja, $(\bigwedge(\mathbb{V}) \times \bigwedge(\mathbb{V}), \wedge)$, sendo os elementos do espaço $\bigwedge(\mathbb{V})$ denominados multivetores. Assim, a álgebra exterior é constituída pelo par $(\bigwedge(\mathbb{V}), \wedge)$.

Proposição 17. *Um multivetor $A \in \bigwedge(\mathbb{V})$ consiste da soma de um escalar (0-vetor), um vetor (1-vetor), um bivetor (2-vetor), um trivetor (3-vetor) até um pseudoescalar (n-vetor), ou seja, a soma dos p-vetores da expressão (2.29):*

$$\begin{aligned} A = k + A^{\mu_1}\mathbf{e}_{\mu_1} + A^{\mu_1\mu_2}\mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} + A^{\mu_1\mu_2\mu_3}\mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge \mathbf{e}_{\mu_3} + ... \\ ... + p\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_n \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $\mu_j(j = 1, 2, ..., p) = 1, 2, .., n$, é usada a convenção da soma como definida em (2.29), e os $A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ são coeficientes escalares sobre o corpo em relação ao qual o espaço $\bigwedge(\mathbb{V})$ está definido. Um elemento $A \in \bigwedge(\mathbb{V})$, tal como definido na proposição, é chamado também de Cliffor[2].

Proposição 18. *A dimensão de $\bigwedge(\mathbb{V})$ é dada por*

$$\begin{aligned} dim(\bigwedge(\mathbb{V})) &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \\ dim(\bigwedge(\mathbb{V})) &= 2^n \end{aligned} \tag{2.33}$$

Definição 26. *Seja um multivetor $A \in \bigwedge(\mathbb{V})$, então define-se as seguintes operações:*

(i) Projetor:

$$\begin{aligned} \langle\ \rangle_p : \bigwedge(\mathbb{V}) &\longrightarrow \bigwedge\nolimits_p(\mathbb{V}) \\ \langle A \rangle_p &= A_{[p]}; \end{aligned} \tag{2.34}$$

(ii) Inversão graduada:

$$\hat{A}_{[p]} = (-1)^p A_{[p]}; \tag{2.35}$$

(iii) Reversão:

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_p)^{\sim} = \mathbf{v}_p \wedge \mathbf{v}_{p-1} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 \\ \widetilde{A} &= (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} A_{[p]}; \end{aligned} \tag{2.36}$$

(iv) Conjugação:

$$\bar{A}_{[p]} = \widetilde{\hat{A}}_{[p]} = \widehat{\widetilde{A}}_{[p]}. \tag{2.37}$$

É importante destacar as diferenças entre os entes estudados pois o tipo de letra (grega ou latina, maiúscula ou minúscula), a localização dos índices (entre ou sem colchetes) etc, possuem diferentes conotações e podem confundir à primeira vista. Esta simbologia foi adotada no contexto desse trabalho, todavia pode ser diferente na literatura. Nesse sentido, segue abaixo um resumo da simbologia até o momento usada.

[2] em nota de rodapé Jancewicz (1988) afirma ainda que na literatura estes entes podem ainda ser chamados de *Clifford number*, *c-number*, *Clifford aggregate*, *tensor type* e, como adotado nesse trabalho, *multivetor*.

$\bigwedge(\mathbb{V})$ é uma álgebra exterior de $\mathbb{V}$, então:

$\mathbf{v}, \mathbf{u}, ... \longrightarrow$ são vetores;

$A, A_1, A_2, B, B_1, ... \longrightarrow$ são cliffors ou multivetores;

$A_{[p]}, B_{[q]}, ... \longrightarrow$ são p-vetor, q-vetor,...; ou seja, parcelas de um multivetor.

$\bigwedge^*(\mathbb{V})$ é uma álgebra exterior de $\mathbb{V}^*$, então:

$\alpha, \beta, \psi, \theta ... \longrightarrow$ são covetores;

$\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \Theta, \Theta_1, ... \longrightarrow$ são multicovetores;

$\Psi^{[p]}, \Theta^{[q]}, ... \longrightarrow$ são p-covetor, q-covetor,...; parcelas de um multicovetor.

2.2.2.4 Produto Interior

Uma operação implícita à formulação da álgebra exterior é o chamado *produto interior*. Nessa etapa do trabalho o produto interior será apresentado de forma generalizada, relacionando-o com o produto externo e utilizando a ideia de *contração*[3]. A importância desta discussão está na busca de um melhor entendimento da definição da álgebra de Grassmann, que será posteriormente apresentada.

Contração à esquerda

Seja um p-vetor $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ e o covetor $\alpha \in \mathbb{V}^*$. Uma operação denominada *contração à esquerda* covetorial, é tal que:

$$\alpha\rfloor : \bigwedge_p(\mathbb{V}) \longrightarrow \bigwedge_{p-1}(\mathbb{V}) \tag{2.38}$$

de forma que se tem

$$(\alpha\rfloor A_{[p]}) = pA_{[p]}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1}), \tag{2.39}$$

onde, para $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1} \in \mathbb{V}$ a relação acima é válida. Reescrevendo a equação (2.39),

$$\begin{aligned}(\alpha\rfloor A_{[p]}) &= p(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_p)(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1}) \\ &= \frac{p}{p!} \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_p} \epsilon(\sigma)\alpha(\mathbf{v}_{\sigma_1})\alpha_1(\mathbf{v}_{\sigma_2}) \cdot ... \cdot \alpha_{p-1}(\mathbf{v}_{\sigma_p}),\end{aligned} \tag{2.40}$$

ou seja, a ordem de $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ é diminuída para $(p-1)$, resultando em um $(p-1)$-vetor $A_{[p-1]} \in \bigwedge_{p-1}(\mathbb{V})$, devido a contração $\alpha(\mathbf{v}_{\sigma_1})$ pela esquerda.

Para um melhor entendimento dessa operação, segue uma análise para alguns casos particulares:

[3] Normalmente o símbolo de produto interior é "$\bullet$" mas, no caso geral, múltiplas contrações podem se tornar ambíguas na ordem de aplicação e, além disso, o produto interior pode ser anticomutativo. Dessa forma, foram adotados os símbolos "$\rfloor$" para contrações à esquerda e "$\lfloor$" para contrações à direita, como em Junior e Junior (2012).

* Contração à esquerda de um 0-vetor $(\alpha\rfloor A_{[0]})$

$$(\alpha\rfloor k) = 0, \tag{2.41}$$
$$\forall k \in \mathbb{K}, \text{ o corpo dos escalares;}$$

* Contração à esquerda de um 1-vetor $(\alpha\rfloor A_{[1]})$

$$(\alpha\rfloor \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}); \tag{2.42}$$

* Contração à esquerda de um 2-vetor $(\alpha\rfloor A_{[2]})$

$$\begin{aligned}
(\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}))(\beta) &= 2(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})(\alpha,\beta) = 2\,\mathbf{II}\,(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})(\alpha,\beta) = \\
&= \frac{2}{2!}\sum_{\sigma\in\mathbb{P}_2}\mathbf{v}_{\sigma_1}\otimes\mathbf{u}_{\sigma_2}(\alpha,\beta) = \{\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\}(\alpha,\beta) = \\
&= \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}) - \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v}) = (\alpha\rfloor\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}) - (\alpha\rfloor\mathbf{u})\beta(\mathbf{v}) = \\
&= ((\alpha\rfloor\mathbf{v})\mathbf{u} - \mathbf{v}(\alpha\rfloor\mathbf{u}))(\beta) \\
\therefore \alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}) &= (\alpha\rfloor\mathbf{v})\mathbf{u} - \mathbf{v}(\alpha\rfloor\mathbf{u}) \qquad (2.43)\\
\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}) &= \alpha(\mathbf{v})\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{u})\mathbf{v};
\end{aligned}$$

* Contração à esquerda de um 3-vetor $(\alpha\rfloor A_{[3]})$

$$\begin{aligned}
(\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}))(\beta,\gamma) &= 3(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})(\alpha,\beta,\gamma) = 3\,\mathbf{II}\,(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{w})(\alpha,\beta,\gamma) = \\
&= \frac{3}{3!}\sum_{\sigma\in\mathbb{P}_3}\mathbf{v}_{\sigma_1}\otimes\mathbf{u}_{\sigma_2}\otimes\mathbf{w}_{\sigma_3}(\alpha,\beta,\gamma) = \\
&= \frac{1}{2!}\{\alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u})\alpha(\mathbf{w}) + \gamma(\mathbf{v})\alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{w}) + \\
&\quad - \alpha(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u})\beta(\mathbf{w})\} - \beta(\mathbf{v})\alpha(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{w}) - \gamma(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})\alpha(\mathbf{w})\} = \\
\therefore \alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}) &= (\alpha\rfloor\mathbf{v})\mathbf{u}\wedge\mathbf{w} - (\alpha\rfloor\mathbf{u})\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} + (\alpha\rfloor\mathbf{w})\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}, \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

que, a partir da expressão (2.43), pode ser rescrita como

$$\alpha\rfloor((\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\wedge\mathbf{w}) = (\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}))\wedge\mathbf{w} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}(\alpha\rfloor\mathbf{w}), \tag{2.45}$$

ou, ainda como

$$\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})) = (\alpha\rfloor\mathbf{v})\mathbf{u}\wedge\mathbf{w} - \mathbf{v}\wedge(\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})). \tag{2.46}$$

Com os resultados encontrados acima, principalmente a expressão (2.46), é possível determinar a contração à esquerda por um covetor aplicado sobre qualquer produto exterior, como destaca-se nas proposições a seguir.

Proposição 19. *Generalização da contração covetorial à esquerda em* $\bigwedge_{p+q}(\mathbb{V})$
Sejam $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$*,* $B_{[q]} \in \bigwedge_q(\mathbb{V})$ *e o covetor* $\alpha \in \mathbb{V}^*$*. Uma operação denominada contração covetorial à esquerda em* $\bigwedge_{p+q}(\mathbb{V})$*, é tal que,*

$$\begin{aligned} \alpha\rfloor(A_{[p]} \wedge B_{[q]}) &= (\alpha\rfloor A_{[p]}) \wedge B_{[q]} + (-1)^p A_{[p]} \wedge (\alpha\rfloor B_{[q]}), \\ \alpha\rfloor(A_{[p]} \wedge B_{[q]}) &= (\alpha\rfloor A_{[p]}) \wedge B_{[q]} + \widehat{A}_{[p]} \wedge (\alpha\rfloor B_{[q]}), \end{aligned} \tag{2.47}$$

onde $\widehat{A}_{[p]} = (-1)^p A_{[p]}$ *é a involução graduada de* $A_{[p]}$*, como na definição 20.*

Proposição 20. *Generalização da contração covetorial à esquerda em* $\bigwedge(\mathbb{V})$
Sejam $A, B \in \bigwedge(\mathbb{V})$ *e o covetor* $\alpha \in \mathbb{V}^*$*. A contração covetorial à esquerda em* $\bigwedge(\mathbb{V})$ *é,*

$$\alpha\rfloor(A \wedge B) = (\alpha\rfloor A) \wedge B + \widehat{A} \wedge (\alpha\rfloor B). \tag{2.48}$$

Contração à direita

Seja um p-vetor $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ e o covetor $\alpha \in \mathbb{V}^*$. Uma operação denominada *contração à direita* covetorial, é dada pela regra

$$\lfloor\alpha : \bigwedge_p(\mathbb{V}) \longrightarrow \bigwedge_{p-1}(\mathbb{V}) \tag{2.49}$$

de tal forma que

$$(A_{[p]}\lfloor\alpha) = pA_{[p]}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1}, \alpha), \tag{2.50}$$

para $\forall\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1} \in \mathbb{V}$. Reescrevendo (2.50) de forma explícita, tem-se que

$$\begin{aligned} (A_{[p]}\lfloor\alpha) &= p(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_p)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1}, \alpha) \\ &= \frac{p}{p!} \sum_{\sigma\in\mathbb{P}_p} \epsilon(\sigma)\alpha_1(\mathbf{v}_{\sigma_1})\alpha_2(\mathbf{v}_{\sigma_2}) \cdot ... \cdot \alpha_{p-1}(\mathbf{v}_{\sigma_{p-1}})\alpha(\mathbf{v}_{\sigma_p}), \end{aligned} \tag{2.51}$$

ou seja, a ordem de $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ é diminuída para $(p-1)$, resultando em um $(p-1)$-vetor $A_{[p-1]} \in \bigwedge_{p-1}(\mathbb{V})$, consequência da contração $\alpha(\mathbf{v}_{\sigma_p})$ pela direita.

De forma análoga às operações realizadas na contração covetorial à esquerda, seguem os resultados para alguns casos particulares da contração à direita e sua posterior generalização:

* Contração à direita de um 0-vetor $(A_{[0]}\lfloor\alpha)$

$$(k\lfloor\alpha) = 0, \tag{2.52}$$

$\forall k \in \mathbb{K}$, o corpo dos escalares;

* Contração à direita de um 1-vetor $(A_{[1]}\lfloor\alpha)$

$$(\mathbf{v}\lfloor\alpha) = \alpha(\mathbf{v}); \tag{2.53}$$

* Contração à direita de um 2-vetor ($A_{[2]}\lfloor\alpha$)

$$(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\lfloor\alpha = \mathbf{v}(\mathbf{u}\lfloor\alpha) - (\mathbf{v}\lfloor\alpha)\mathbf{u}, \tag{2.54}$$
$$(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\lfloor\alpha = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{v} - \alpha(\mathbf{v})\mathbf{u};$$

* Contração à direita de um 3-vetor ($A_{[3]}\lfloor\alpha$)

$$(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})\lfloor\alpha = \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}(\mathbf{w}\lfloor\alpha) - \mathbf{v}\wedge\mathbf{w}(\mathbf{u}\lfloor\alpha) + \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}(\mathbf{v}\lfloor\alpha), \tag{2.55}$$
$$(\mathbf{v}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}))\lfloor\alpha = \mathbf{v}\wedge((\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})\lfloor\alpha) + (\mathbf{v}\lfloor\alpha)(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}), \tag{2.56}$$
$$((\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\wedge\mathbf{w})\lfloor\alpha = \mathbf{v}\wedge\mathbf{u}(\mathbf{w}\lfloor\alpha) - \mathbf{w}\wedge((\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\lfloor\alpha). \tag{2.57}$$

Proposição 21. *Generalização da contração covetorial à direita em* $\bigwedge_{p+q}(\mathbb{V})$
Sejam $A_{[p]}\in\bigwedge_p(\mathbb{V})$, $B_{[q]}\in\bigwedge_q(\mathbb{V})$ *e o covetor* $\alpha\in\mathbb{V}^*$. *Uma operação denominada contração covetorial à direita em* $\bigwedge_{p+q}(\mathbb{V})$, *é tal que:*

$$(A_{[p]}\wedge B_{[q]})\lfloor\alpha = A_{[p]}\wedge(B_{[q]}\lfloor\alpha) + (A_{[p]}\lfloor\alpha)\wedge\widehat{B}_{[q]} \tag{2.58}$$

onde $\widehat{B}_{[p]} = (-1)^p B_{[p]}$ *é a involução graduada de* $B_{[p]}$.

Proposição 22. *Generalização da contração covetorial à direita do produto exterior entre p-vetores e q-vetores*
Sejam $A, B\in\bigwedge(\mathbb{V})$, *e o covetor* $\alpha\in\mathbb{V}^*$. *A contração covetorial à direita em* $\bigwedge(\mathbb{V})$ *é*

$$(A\wedge B)\lfloor\alpha = A\wedge(B\lfloor\alpha) + (A\lfloor\alpha)\wedge\widehat{B} \tag{2.59}$$

Analisando as contrações covetoriais sobre entes 2-vetoriais ou bivetores à esquerda (2.43) e à direita (2.54), verifica-se que as mesmas se relacionam de forma anticomutativa. Utilizando a notação convencional de produto interior "$\bullet$" esta relação pode ser reescrita como,

$$\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}) = -(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\lfloor\alpha, \tag{2.60}$$
$$\alpha\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}) = -(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u})\bullet\alpha.$$

Por outro lado, no caso de contrações covetoriais sobre entes 3-vetoriais ou trivetores, tem-se uma relação de comutatividade. Ou seja, as expressões (2.44) e (2.55) são iguais,

$$\alpha\rfloor(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})\lfloor\alpha, \tag{2.61}$$
$$\alpha\bullet(\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})\bullet\alpha,$$

onde obviamente para todos os casos discutidos, foram utilizadas as contrações covetoriais de vetores dadas por (2.42) e (2.53), que são também comutativas.

Os casos apresentados foram calculados para um covetor atuando na contração de p-vetores. As análises seriam análogas para as situações de contrações entre 'vetores com p-vetores', 'vetores com p-covetores' ou 'covetores com p-covetores', resultando em expressões semelhantes àquelas apresentadas anteriormente. A Tabela 1 mostra como os produtos interior e exterior se comportam em termos de comutação. Logo, à medida em que se aumenta a ordem p-vetorial dos entes contraídos, as propriedades de comutação e anticomutação se alternam de forma oposta (ver Tabela 1).

Tabela 1 – Tabela comparativa dos produtos por um vetor com elementos p-vetorias.

Produtos	Interior	Exterior
escalar	$k \bullet \mathbf{v} = -\mathbf{v} \bullet k = 0$	$k \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge k$
vetor	$\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$	$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$
bivetor	$\mathbf{v} \bullet A_{[2]} = -A_{[2]} \bullet \mathbf{v}$	$\mathbf{v} \wedge A_{[2]} = A_{[2]} \wedge \mathbf{v}$
trivetor	$\mathbf{v} \bullet A_{[3]} = A_{[3]} \bullet \mathbf{v}$	$\mathbf{v} \wedge A_{[3]} = -A_{[3]} \wedge \mathbf{v}$

Definição 27. *Operadores de contrações p-tensoriais*
Seja um p-covetor dado por $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$ *onde* $\alpha_j \in \mathbb{V}^*$ *e* $\alpha^{[p]} \in \bigwedge^*(\mathbb{V})$. *As multicontrações covetoriais ou as contrações p-covetoriais à esquerda ou à direita serão respectivamente,*

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)\rfloor = \alpha_1\rfloor\alpha_2\rfloor \cdots \alpha_p\rfloor, \tag{2.62}$$

$$\lfloor(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \lfloor\alpha_1\lfloor\alpha_2 \cdots \lfloor\alpha_p, \tag{2.63}$$

destacando que a utilização do símbolo "•" para produto interior poderia nesses casos tornar ambígua a sequência de aplicação das contrações.

Dessa forma, a contração 2-covetorial à esquerda de um 2-vetor será,

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)\rfloor(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) &= \alpha\rfloor\beta\rfloor(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \\ &= \alpha\rfloor(\beta(\mathbf{v})\mathbf{u} - \mathbf{v}\beta(\mathbf{u})) \\ &= \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v}) - \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u})\end{aligned} \tag{2.64}$$

devido à propriedade de anticomutativade (2.21),

$$(\beta \wedge \alpha)\rfloor(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = -(\alpha \wedge \beta)\rfloor(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}), \tag{2.65}$$

ou seja, as múltiplas contrações não alteram a paridade dos entes p-tensoriais, como pode ser observado na Tabela 1.

Seja uma aplicação linear dada por

$$f_j : \mathbb{V}_j \longrightarrow \mathbb{W}_j$$
$$(k_1\mathbf{v}_{1j} + k_2\mathbf{v}_{2j}) \longmapsto f_j(k_1\mathbf{v}_{1j} + k_2\mathbf{v}_{2j})$$

onde $\mathbf{v}_j \in \mathbb{V}_j$ e $k_i \in \mathbb{K}$ é um escalar. Se f_j for no mínimo um homomorfismo entre os espaços $\mathbb{V}_j$ e $\mathbb{W}_j$, então,

$$f_j(k_1\mathbf{v}_{1j} + k_2\mathbf{v}_{2j}) = k_1 f_j(\mathbf{v}_{1j}) + k_2 f_j(\mathbf{v}_{2j}). \tag{2.66}$$

Dessa maneira, é possível estabelecer uma relação de unicidade do produto tensorial dado por

$$\begin{aligned} f_i \otimes f_j : \mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j &\longrightarrow \mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_j \\ (f_i \otimes f_j)(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j) &= f_i(\mathbf{v}_i) \otimes f_j(\mathbf{v}_j), \end{aligned} \tag{2.67}$$

e assim, para os covetores como função homomórfica tem-se que

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) &= \alpha(\mathbf{v}) \otimes \beta(\mathbf{u}) \\ &= \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{2.68}$$

O que se pretende agora é estabelecer a definição para uma aplicação do tipo

$$f_i \wedge f_j : \mathbb{V}_i \wedge \mathbb{V}_j \longrightarrow \mathbb{W}_i \wedge \mathbb{W}_j. \tag{2.69}$$

Ao se utilizar a relação explícita do produto exterior (2.20) e o resultado (2.68) acima, encontra-se que

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) &= \frac{1}{4}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}) - \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v})), \end{aligned} \tag{2.70}$$

logo, a partir da equação (2.64),

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\widetilde{(\alpha \wedge \beta)} \rfloor (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \tag{2.71}$$

Definição 28. *Generalização do produto interior com entes de p-ésima ordem Sejam os elementos p-tensoriais $A_{[p]} \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ e $\Psi^{[p]} \in \bigwedge^p(\mathbb{V})$, então*

$$\Psi^{[p]}(A_{[p]}) = \frac{1}{p!}\widetilde{\Psi}^{[p]} \rfloor A_{[p]}, \tag{2.72}$$

ou ainda de forma mais simples,

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p) = \frac{1}{p!}\begin{vmatrix} \alpha_1(\mathbf{v}_1) & \alpha_1(\mathbf{v}_2) & \dots & \alpha_1(\mathbf{v}_p) \\ \alpha_2(\mathbf{v}_1) & \alpha_2(\mathbf{v}_2) & \dots & \alpha_2(\mathbf{v}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_p(\mathbf{v}_1) & \alpha_p(\mathbf{v}_2) & \dots & \alpha_p(\mathbf{v}_p) \end{vmatrix}, \tag{2.73}$$

ou seja, esta relação guarda semelhança com a definição matricial do alternador dada na equação (2.12), quando a expressão (2.72) tratar de p-tensoriais simples.

Definição 29. *Generalização do produto interior com entes de ordens distintas Sejam os elementos q-vetoriais $A_{[q]} \in \bigwedge_q(\mathbb{V})$ e q-covetoriais $\Psi^{[p]} \in \bigwedge^p(\mathbb{V})$, então*

$$\Psi^{[p]} \rfloor A_{[q]} = (-1)^{p(q-1)} A_{[q]} \lfloor \Psi^{[p]}, p \leq q \tag{2.74}$$

$$A_{[q]} \rfloor \Psi^{[p]} = (-1)^{q(p-1)} \Psi^{[p]} \lfloor A_{[q]}, q \leq p, \tag{2.75}$$

e sendo $p = q$ então $p(p-1)$ é par. Consequentemente,

$$\Psi^{[p]} \rfloor A_{[p]} = \Psi^{[p]} \lfloor A_{[p]} = A_{[p]} \lfloor \Psi^{[p]} = A_{[p]} \rfloor \Psi^{[p]}, \tag{2.76}$$

além disso, é possível demonstrar que

$$\widetilde{\Psi^{[p]} \rfloor A_{[q]}} = \tilde{A}_{[q]} \lfloor \tilde{\Psi}^{[p]}. \tag{2.77}$$

Os resultados obtidos na seção (2.2.2.2) e nesta seção (2.2.2.4) fornecem as composições básicas operacionais sobre a álgebra exterior. Muito mais do que isso, implicitamente possuem os subsídios iniciais para o entendimento das álgebras que serão discutidas a seguir, que têm suas definições estruturadas nos fundamentos matemáticos que caracterizam as álgebras tensorial e exterior.

2.2.3 Álgebra de Grassmann

Como visto anteriormente, o conjunto dos tensores com o produto tensorial constitui a álgebra tensorial enquanto que o conjunto dos multitensores (soma dos p-tensores) com o produto exterior, a álgebra exterior. Muitos textos afirmam que o conjunto dos cliffors (multivetores), com o produto exterior, define a álgebra de Grassmann. Todavia esta última possui uma definição sobre os funcionais que a distingue particularmente em relação à álgebra exterior e não pode ser tratada como seu sinônimo. Nas discussões realizadas até o momento, não foram apresentadas condições sobre os funcionais da álgebra exterior, o que será feito a seguir.

Seja uma forma bilinear g simétrica, ou seja,

$$\begin{aligned} g_s : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ g_s(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &= g_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned} \tag{2.78}$$

de modo que sua correspondente conexão bilinear simétrica é tal que

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}^* \\ \vartheta(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}_\vartheta \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde, a partir da relação (2.5), $\vartheta(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_\vartheta(\mathbf{u}) = g_s(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Uma álgebra exterior $(\bigwedge(\mathbb{V}), \wedge)$ em que $\bigwedge(\mathbb{V})$, como espaço vetorial definido a partir de $\mathbb{V}$, tem uma forma bilinear simétrica g_s, possui uma conexão bilinear generalizada, tal que

$$\vartheta : \bigwedge_p(\mathbb{V}) \longrightarrow \bigwedge^p(\mathbb{V}) \tag{2.80}$$
$$(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p)_\vartheta = \mathbf{v}_{1\vartheta} \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_{p\vartheta}.$$

Dessa forma, motivado pela conexão bilinear (2.79) após sua extensão (2.80), é possível propor uma extensão da ideia (2.78) generalizando-a para uma forma bilinear G.

Proposição 23. *Generalização da forma bilinear, por extensão, em* $\bigwedge(\mathbb{V})$
Seja o espaço p-vetorial $\bigwedge_p(\mathbb{V})$*, onde sobre* $\mathbb{V}$ *existe uma forma bilinear simétrica* g_s *com sua respectiva conexão bilinear simétrica* ϑ*. Uma forma bilinear simétrica* G*, estendida de* g_s*, é definida como*

$$G : \bigwedge_p(\mathbb{V}) \times \bigwedge_p(\mathbb{V}) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.81}$$
$$G(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) = G(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p)$$

e assim, para o caso dos p-vetores simples, têm-se que

$$G(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) = p!(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p)_\vartheta(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) \tag{2.82}$$

Agora, pela definição 28, destacando a equação (2.73) e observando assim a expressão acima (2.82), conclui-se neste caso que

$$G(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) = (\mathbf{v}_p \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_1)_\vartheta \rfloor (\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) \tag{2.83}$$

que naturalmente, pode ser escrita como

$$G(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p) = \begin{vmatrix} g_s(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) & g_s(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2) & \dots & g_s(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_p) \\ g_s(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) & g_s(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2) & \dots & g_s(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_s(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1) & g_s(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_2) & \dots & g_s(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) \end{vmatrix}. \tag{2.84}$$

Sejam p-vetores $A_{[p]} = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p \in \bigwedge_p(\mathbb{V})$ e q-vetores $B_{[q]} = \mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_p \in \bigwedge_q(\mathbb{V})$. Como (2.84) é determinante da matriz de dimensão $p \times q$ dos elementos $g_s(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_j)$, de índices $(i = 1, 2, ..., p; j = 1, 2, ..., q)$, quando $p \neq q$ implica incluir, pelo menos, uma linha nula $(p < q)$ ou uma coluna nula $(p > q)$. Mais ainda, este resultado é consequência direta das propriedades da bilinearidade contidas nas proposições da seção 2.1.3, associada à definição $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(u^i\mathbf{e}_i, v^j\mathbf{e}_j)$. Assim, é imediato que G sobre $\bigwedge(\mathbb{V})$, tal que

$$p \neq q \Longrightarrow G(A_{[p]}, B_{[q]}) = 0. \tag{2.85}$$

Este resultado permite generalizar a extensão de g_s, na forma bilinear G, definida sobre o espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{V})$.

Definição 30. *Seja uma álgebra exterior* $(\bigwedge(\mathbb{V}), \wedge)$ *com* $dim(\mathbb{V}) = n$*, onde dados dois cliffors* $A, B \in \bigwedge(\mathbb{V})$*, definidos explicitamente na expressão (2.32), tem-se a forma bilinear generalizada estendida de* g_s*, ou também chamada de extensão* G *de* g_s*, dada por*

$$G(A, B) = \begin{cases} \sum_{p=1}^{n} G(A_{[p]}, B_{[q]}), \ se\ p = q \\ 0, \ se\ p \neq q \end{cases} \tag{2.86}$$

Proposição 24. *Álgebra de Grassmann*
Uma álgebra exterior dada por $(\bigwedge(\mathbb{V}), \wedge)$ *com uma extensão* G *de* g_s*, para todo espaço vetorial* $\bigwedge(\mathbb{V})$*, é denominada Álgebra de Grassmann do espaço vetorial* $\mathbb{V}$*; simbolicamente* $\mathcal{G}(\mathbb{V})$*.*

2.2.4 Álgebra de Clifford (Álgebra Geométrica de Clifford)

2.2.4.1 Definição

Seja um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$ e que possui uma forma bilinear simétrica g, ou $(\mathbb{V}, g)$ como definido na proposição 6, e seja uma álgebra associativa $\mathcal{A}$ com unidade $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$. Uma aplicação linear pode ser definida tal que:

$$\gamma : \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{A}.$$

O par $(\mathcal{A}, \gamma)$ é chamado de *Álgebra de Clifford* do espaço quadrático $(\mathbb{V}, g)$, se $\{\gamma(\mathbf{v})\}$ e $\{k\mathbf{1}_{\mathcal{A}} | k \in \mathbb{R}\}$ geram a álgebra $\mathcal{A}$, tal que

$$\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{A}}. \tag{2.87}$$

Analogamente, para o caso do espaço dual $\mathbb{V}^*$ de $\mathbb{V}$, tem-se um espaço quadrático $(\mathbb{V}^*, g^{-1})$, onde $g^{-1} : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja aplicação linear $\gamma : \mathbb{V}^* \longrightarrow \mathcal{A}$, é gerador de uma álgebra, a álgebra de Clifford de $(\mathbb{V}^*, g^{-1})$, tal que

$$\gamma(\alpha)\gamma(\beta) + \gamma(\beta)\gamma(\alpha) = 2g^{-1}(\alpha, \beta)\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \tag{2.88}$$

para quaisquer covetores $\alpha, \beta \in \mathbb{V}^*$. Utilizando a definição de forma quadrática (proposição 6), tem-se para os espaços quadráticos $(\mathbb{V}, g)$ e $(\mathbb{V}^*, g^{-1})$, respectivamente,

$$(\gamma(\mathbf{v}))^2 = Q(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \tag{2.89}$$

$$(\gamma(\alpha))^2 = Q^{-1}(\alpha) = g^{-1}(\alpha, \alpha) \tag{2.90}$$

ou seja, a aplicação linear γ é análoga ao conceito de *raiz quadrada* da forma quadrática de um espaço. A aplicação γ que define uma relação entre um espaço vetorial e uma álgebra associativa como apresentada acima, pode ser chamada de *aplicação de Clifford.*

Definição 31. *Seja uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$. Então, na álgebra de Clifford $(\mathcal{A}, \gamma)$ de $(\mathbb{V}, g)$, há as relações*

$$\gamma(\mathbf{e}_i)\gamma(\mathbf{e}_j) + \gamma(\mathbf{e}_j)\gamma(\mathbf{e}_i) = 0, \qquad i \neq j \tag{2.91}$$

$$\gamma(\mathbf{e}_i)^2 = Q(\mathbf{e}_i)\mathbf{1}_{\mathcal{A}}, \qquad i = j \tag{2.92}$$

Definição 32. *Seja uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$. A álgebra de Clifford pode ser gerada por potências de $\{\gamma(\mathbf{v})\}$ e $\{k\mathbf{1}_{\mathcal{A}}|k \in \mathbb{R}\}$, ou seja, pelo produto*

$$\mathcal{A} = span\{\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2} \cdots \gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}\}, \qquad \mu_i(i = 1, 2, ..., n) = 0, 1 \tag{2.93}$$

onde $\gamma(\mathbf{e}_1)^0\gamma(\mathbf{e}_2)^0 \cdots \gamma(\mathbf{e}_n)^0 = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$.

Definição 33. *Dimensão das Álgebras de Clifford*
A dimensão de uma álgebra de Clifford, com $\mathcal{A} = span\{\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2} \cdots \gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}\}$ e $dim(\mathbb{V})$=n, é dada por

$$dim(\mathcal{A}) \leq 2^n \tag{2.94}$$

justamente devido à possibilidade de arranjos de potências com $\mu_i(i = 1, 2, ..., n) = 0, 1$. Quando $dim(\mathcal{A}) = 2^n$ então diz-se que se trata de uma álgebra de Clifford Universal.

Definição 34. *Álgebra de Clifford Universal*
Sejam duas álgebras de Clifford $(\mathcal{A}, \gamma)$ e $(\mathcal{B}, \sigma)$, ambas do espaço vetorial quadrático $(\mathbb{V}, g)$. Se existir um homomorfismo

$$\eta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \tag{2.95}$$

com $\eta(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \mathbf{1}_{\eta}$, e devido à definição da aplicação de Clifford para γ e σ, então,

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{A} \xrightarrow{\eta} \mathcal{B} \tag{2.96}$$

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\quad\quad\sigma\quad\quad} \mathcal{B}, \tag{2.97}$$

ou seja, existe uma composição das aplicações $\sigma = \eta \circ \gamma$. Então, a álgebra $(\mathcal{A}, \gamma)$ é dita álgebra de Clifford Universal $\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)$ do espaço quadrático $(\mathbb{V}, g)$.

Proposição 25. *Existência da Álgebra de Clifford Universal*
Para todo espaço quadrático $(\mathbb{V}, g)$, existe uma álgebra de Clifford universal $\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)$ tal que, se $dim(\mathbb{V}) = n$, então

$$dim(\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)) = 2^n. \tag{2.98}$$

A partir de uma relação de equivalência, é possível determinar a álgebra de Clifford como quociente $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_C$ da álgebra tensorial. Este resultado está no apêndice C e é dado por

$$\mathbf{v} \odot \mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{2.99}$$

É demonstrável, utilizando a definição tensorial de um 3-vetor, que o produto entre um vetor $\mathbf{v}$ e $A_{[2]} \in \bigwedge(\mathbb{V})$ na álgebra quociente $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_C$ é dado como

$$\mathbf{v} \odot A_{[2]} = \mathbf{v} \wedge A_{[2]} + \mathbf{v}_\vartheta \rfloor A_{[2]}, \tag{2.100}$$

onde foi utilizada a definição (2.79), ou seja, $\vartheta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\vartheta$ que, em muitos textos, é escrita como $\mathbf{v}_\vartheta = g(\mathbf{v},\ )$. Generalizando,

$$\mathbf{v} \odot A_{[p]} = \mathbf{v} \wedge A_{[p]} + \mathbf{v}_\vartheta \rfloor A_{[p]} \tag{2.101}$$

$$A_{[p]} \odot \mathbf{v} = A_{[p]} \wedge \mathbf{v} + A_{[p]} \lfloor \mathbf{v}_\vartheta \tag{2.102}$$

Obviamente uma questão a ser analisada é qual tipo de álgebra o quociente tensorial $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_C$ define, para os geradores definidos pela expressão (C.2). É importante lembrar que, ao suprimir a forma bilinear simétrica g desse gerador (não realizar a transformação (C.5)), o que se tem é uma álgebra quociente $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_E$, que é a álgebra exterior $\bigwedge(\mathbb{V})$. Sendo assim, utilizando a equação (C.9), a propriedade de anticomutatividade do produto exterior e assumindo a notação $\mathbf{v} \odot \mathbf{u} = \mathbf{vu}$, então,

$$\mathbf{vu} + \mathbf{uv} = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \tag{2.103}$$

que é justamente análoga à relação (2.87). Assim, pode-se concluir que a álgebra quociente $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_C$ é uma *álgebra de Clifford*, ou seja, as equações (C.9) e (2.102) definem o chamado *produto de Clifford* (JANCEWICZ, 1988). Nesse momento, se faz necessário propor as condições que garantam a universalidade dessa álgebra, o que é feito a seguir.

Proposição 26. *Álgebra de Clifford Universal* $\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g) = T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_C$
Sejam um espaço quadrático $(\mathbb{V}, g)$*, a álgebra de Clifford* $\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g) = T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_C$ *e uma álgebra de Clifford* $(\mathcal{A}, \sigma)$ *para* $(\mathbb{V}, g)$*. Se* γ *é a aplicação de Clifford, tal que* $\gamma : \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)$*, então existe um homomorfismo,*

$$\eta : \mathcal{C}l(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{A} \tag{2.104}$$

de tal maneira que

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}l(\mathbb{V}, g) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A} \tag{2.105}$$

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\qquad\quad \sigma \qquad\quad} \mathcal{A} \tag{2.106}$$

onde tem-se a composição $\sigma = \eta \circ \gamma$*.*

Proposição 27. *Seja uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ do espaço vetorial $\mathbb{V}$ ortogonal de dim$(\mathbb{V}) = n$. Para uma álgebra de Clifford $\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)$, a equação (2.101), devido à ortogonalidade em $\mathbb{V}$, pode ser reescrita de acordo os índices,*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{\mu_i}\mathbf{e}_{\mu_j} = \mathbf{e}_{\mu_i} \wedge \mathbf{e}_{\mu_j}, && \mu_i \neq \mu_j \\
&\mathbf{e}_{\mu_i}\mathbf{e}_{\mu_j}\mathbf{e}_{\mu_k} = \mathbf{e}_{\mu_i} \wedge \mathbf{e}_{\mu_j} \wedge \mathbf{e}_{\mu_k}, && \mu_i \neq \mu_j \neq \mu_k \\
&\ldots \\
&\mathbf{e}_{\mu_1}\mathbf{e}_{\mu_2} \cdots \mathbf{e}_{\mu_p} = \mathbf{e}_{\mu_1} \wedge \mathbf{e}_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{\mu_p}, && \mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_p
\end{aligned} \tag{2.107}$$

cuja dimensão da álgebra é dim$(\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)) = 2^n$, como discutida na proposição 25.

Proposição 28. *Existe uma relação de isomorfismo entre a álgebra de Clifford $\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)$ e a álgebra exterior $\bigwedge(\mathbb{V})$ ou com a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}(\mathbb{V})$, de modo que para o espaço dos p-vetores dado por $\bigwedge_p(\mathbb{V})$, tem-se que*

$$\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g) = \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge\nolimits_p(\mathbb{V}) \tag{2.108}$$

2.2.5 Álgebra de Schönberg (Álgebra Geométrica de Schönberg)

Os aspectos interessantes que são perceptíveis ao longo dos trabalhos de M. Schönberg são as ideias básicas presentes nas formulações teóricas da Física, cujo entendimento profundo pode transpor antigos caminhos. No contexto desse trabalho, ressalta-se como uma das consequências teóricas, a presença das constantes absolutas da natureza: a saber, a constante de Planck para que se possa realizar a passagem da mecânica clássica para a quântica, e na mecânica quântica relativística, a presença da constância da velocidade da luz. Schönberg afirma que, por terem dimensões relacionadas à distância, intui-se que há uma relação entre as teorias físicas envolvidas e ideias relativas a aspectos geométricos do espaço-tempo. Além disso, tem que se discutir as características das variáveis discretas (como spins) e variáveis contínuas (como posição e momento), que passam a coexistir sob um mesmo universo. Nos trabalhos desenvolvidos por Schönberg, estas discussões são apresentadas quando analisadas a cinemática quântica e a geometria, baseando-se nas formulações de Grassmann e Clifford.

Trabalhos de Bohm e Hiley (1981, 1983) vêm demonstrando a importância da utilização das formulações algébricas sobre o espaço de fase, onde é possível estabelecer teorias clássica e quântica numa mesma estrutura matemática. Essa análise tem como objetivo ressaltar as diferenças e similaridades até então não verificadas ou revisitadas. Para isso, Bohm e colaboradores utilizam as formulações de Schönberg, onde estão presentes conceitos sobre geometria e cálculo vetorial afim, através de álgebras associativas.

Ao longo dessa seção serão apresentados os aspectos fundamentais da *Álgebra de Schönberg* que será utilizada nos desenvolvimentos dos capítulos seguintes. Tais conceitos podem ser encontrados nos artigos de Schönberg (1956, 1957a e 1957b), e que foram discutidos na dissertação de Fernandes (1991). As notações adotadas nas formulações a seguir foram inicialmente propostas por Schönberg e pelo seu caráter histórico-didático, serão aqui mantidas.

2.2.5.1 As Álgebras de Grassmann Estendidas G_n e L_n

Definição

Sejam os espaços vetoriais afins n-dimensionais $\mathbb{V}$ e seu dual $\mathbb{V}^*$, respectivamente constituídos pelas bases $\mathcal{B}(\mathbb{V}) = \{\mathbf{I}_i\}$ e $\mathcal{B}(\mathbb{V}^*) = \{\mathbf{I}^i\}(i = 1, 2, ..., n)$. Então os vetores contravariantes $\mathbf{v}$ e covariantes $\mathbf{u}$ podem ser escritos em relação a estas bases como:

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{I}_i \qquad\qquad \mathbf{u} = u_i\mathbf{I}^i \tag{2.109}$$

onde v^i e u_i são respectivamente as componentes de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ nestas bases, cuja relação invariante é dada por $<\mathbf{v}, \mathbf{u}>= v^i u_i$.

Sejam as álgebras de Grassmann estendidas G_n e L_n, de elementos gerados a partir do espaço vetorial $\mathbb{V}$ e seu dual $\mathbb{V}^*$. Então convenciona-se que:

$$\left.\begin{array}{r}\{(\mathbf{v}), (\mathbf{v}'), ...\} \text{ de } \mathbb{V} \\ \{(\mathbf{u}), (\mathbf{u}'), ...\} \text{ de } \mathbb{V}^*\end{array}\right\} \text{são os geradores da álgebra } \mathrm{G}_n$$

com elementos dos espaços vetoriais escritos entre parênteses ( ),

$$\left.\begin{array}{r}\{\{\mathbf{v}\}, \{\mathbf{v}'\}, ...\} \text{ de } \mathbb{V} \\ \{\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}'\}, ...\} \text{ de } \mathbb{V}^*\end{array}\right\} \text{são os geradores da álgebra } \mathrm{L}_n$$

cujos elementos dos espaços vetoriais são escritos entre chaves { }.

As regras de multiplicação associadas a estes geradores podem ser escritas, para o caso da álgebra G_n,

$$(\mathbf{v})(\mathbf{v}') + (\mathbf{v}')(\mathbf{v}) = 0, \tag{2.110}$$

$$(\mathbf{u})(\mathbf{u}') + (\mathbf{u}')(\mathbf{u}) = 0, \tag{2.111}$$

$$(\mathbf{v})(\mathbf{u}) + (\mathbf{u})(\mathbf{v}) =< \mathbf{v}, \mathbf{u} > \mathbf{1}_{G_n}, \tag{2.112}$$

onde $\mathbf{1}_{G_n}$ é a unidade em G_n. Analogamente, para a álgebra L_n,

$$\{\mathbf{v}\}\{\mathbf{v}'\} - \{\mathbf{v}'\}\{\mathbf{v}\} = 0, \tag{2.113}$$

$$\{\mathbf{u}\}\{\mathbf{u}'\} - \{\mathbf{u}'\}\{\mathbf{u}\} = 0, \tag{2.114}$$

$$\{\mathbf{v}\}\{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{u}\}\{\mathbf{v}\} =< \mathbf{v}, \mathbf{u} > \mathbf{1}_{L_n}, \tag{2.115}$$

onde $\mathbf{1}_{L_n}$ é a unidade em L_n. Devido à linearidade presente para cada elemento gerador, quando escritos explicitamente em termos das componentes v^i e u_i, segue que para a álgebra G_n, tem-se

$$[(\mathbf{I}_i),(\mathbf{I}_j)]_+ = 0, \tag{2.116}$$

$$[(\mathbf{I}^i),(\mathbf{I}^j)]_+ = 0, \tag{2.117}$$

$$[(\mathbf{I}_i),(\mathbf{I}^j)]_+ = \delta_i^j \mathbf{1}_{G_n}, \quad (i,j = 1,2,...,n), \tag{2.118}$$

onde $[m,n]_+ = mn + nm$ é anticomutação entre m,n. E para a álgebra L_n obtém-se

$$[\{\mathbf{I}_i\},\{\mathbf{I}_j\}]_- = 0, \tag{2.119}$$

$$[\{\mathbf{I}^i\},\{\mathbf{I}^j\}]_- = 0, \tag{2.120}$$

$$[\{\mathbf{I}_i\},\{\mathbf{I}^j\}]_- = \delta_i^j \mathbf{1}_{L_n}, \quad (i,j = 1,2,...,n), \tag{2.121}$$

onde $[m,n]_- = mn - nm$ é uma relação de comutação entre m,n.

No caso da mecânica quântica, para um sistema dinâmico de n-graus de liberdade, a cinemática quântica pode ser dada pelos operadores de coordenadas $\mathbf{q}_j$ e $\mathbf{d}_k$ associados ao momentum $\mathbf{p}_k$ que podem ser escritos com os geradores da álgebra L_n,

$$\hat{\mathbf{q}}_j = \{\mathbf{I}_j\}, \tag{2.122}$$

$$\hat{\mathbf{d}}_k = i\hbar^{-1}\hat{\mathbf{p}}_k, \tag{2.123}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_k = -i\hbar\{\mathbf{I}_k\}, \tag{2.124}$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck. Desta forma, a álgebra L_n, quando utilizada para descrever a cinemática quântica de um sistema de n-graus de liberdade sobre o corpo dos complexos, equivale à álgebra de Heisenberg.

Seja agora um oscilador harmônico unidimensional de massa m e frequência angular ω, sistema este que pode ser resolvido pela equação de Schrödinger, onde tem-se respectivamente um hamiltoniano e um potencial, dados por

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}_j^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\mathbf{q}}_j^2, \qquad V(q_j) = \frac{1}{2}m\omega^2 q_j^2,$$

Escrevendo os operadores de criação $\hat{a}$ e aniquilação $\hat{a}^\dagger$ (conjugado hermitiano de $\hat{a}$), considerando as expressões (2.122) e (2.124), encontra-se que:

$$\hat{a}_j = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}}(m\omega\hat{\mathbf{q}}_j + i\hat{\mathbf{p}}_j),, \tag{2.125}$$

$$\hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}}(m\omega\hat{\mathbf{q}}^k - i\hat{\mathbf{p}}^k). \tag{2.126}$$

Então,

$$\begin{aligned}\hat{a}_j\hat{a}_k^\dagger &= \frac{1}{(2m\hbar\omega)}(m\omega\hat{\mathbf{q}}_j + i\hat{\mathbf{p}}_j)(m\omega\hat{\mathbf{q}}^k - i\hat{\mathbf{p}}^k) \\ &= \frac{1}{(2m\hbar\omega)}\left(\hat{\mathbf{p}}_j\hat{\mathbf{p}}^k + m^2\omega^2\hat{\mathbf{q}}_j\hat{\mathbf{q}}^k + im\omega(\hat{\mathbf{p}}_j\hat{\mathbf{q}}^k - \hat{\mathbf{q}}_j\hat{\mathbf{p}}^k)\right),\end{aligned} \tag{2.127}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\hat{a}^{\dagger}_k\hat{a}_j &= \frac{1}{(2m\hbar\omega)}(m\omega\hat{\mathbf{q}}^k - i\hat{\mathbf{p}}^k)(m\omega\hat{\mathbf{q}}_j + i\hat{\mathbf{p}}_j) \\ &= \frac{1}{(2m\hbar\omega)}\left(\hat{\mathbf{p}}^k\hat{\mathbf{p}}_j + m^2\omega^2\hat{\mathbf{q}}^k\hat{\mathbf{q}}_j + im\omega(\hat{\mathbf{q}}^k\hat{\mathbf{p}}_j - \hat{\mathbf{p}}^k\hat{\mathbf{q}}_j)\right). \end{aligned} \tag{2.128}$$

Subtraindo as expressões (2.127) e (2.128), então

$$[\hat{a}_j, \hat{a}^{\dagger}_k]_- = \frac{1}{(2m\hbar\omega)}\left([\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{p}}^k]_- + m^2\omega^2[\hat{\mathbf{q}}_j, \hat{\mathbf{q}}^k]_- + im\omega[\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}^k]_- + im\omega[\hat{\mathbf{p}}^k, \hat{\mathbf{q}}_j]_-\right). \tag{2.129}$$

Lembrando as relações de comutação conhecidas na mecânica quântica [4] e considerando (2.121), é possível escrever

$$[\hat{\mathbf{q}}_j, \hat{\mathbf{q}}^k]_- \equiv 0, \tag{2.130}$$

$$[\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{p}}^k]_- \equiv 0, \tag{2.131}$$

$$[\hat{\mathbf{p}}_j, \hat{\mathbf{q}}^k]_- = -i\hbar\delta^k_j\mathbf{1}_{L_n}, \tag{2.132}$$

e obtém-se da expressão (2.129), que

$$[\hat{a}_j, \hat{a}^{\dagger}_k]_- = \delta^k_j\mathbf{1}_{L_n}. \tag{2.133}$$

Por outro lado, considerando (2.122)-(2.124), os operadores de criação (2.125) e aniquilação (2.126) podem ser escritos, considerando a álgebra L_n, como,

$$\hat{a}_j = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}}(m\omega\{\mathbf{I}_j\} + \hbar\{\mathbf{I}_j\}), \tag{2.134}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_k = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}}(m\omega\{\mathbf{I}^k\} - \hbar\{\mathbf{I}^k\}), \tag{2.135}$$

denotando que, para as relações de comutação (2.119)-(2.121) serem válidas, os operadores a_j e $a^{\dagger}_k$, precisam ser escritos em termos de geradores de L_n, construídos a partir de uma base e do seu respectivo dual. Por esta razão, estão presentes índices contravariantes e covariantes nas relações (2.134) e (2.135). Este resultado demonstra que objetos que obedecem a relações de anticomutação/comutação na mecânica quântica usual e são conjugados hermitianos entre si podem ser escritos segundo os geradores de Schönberg. Para isso, é preciso considerá-los, um numa base e o outro no respectivo dual; com isso, ficam preservardas as regras (2.116)-(2.118) ou (2.119)-(2.121).

Bases de G_n e L_n

Sejam os espaços G_n e L_n construídos a partir dos espaços vetoriais afins n-dimensionais $\mathbb{V}$ e seu dual $\mathbb{V}^*$, respectivamente constituídos pelas bases $\mathcal{B}(\mathbb{V}) = \{\mathbf{I}_i\}$ e $\mathcal{B}(\mathbb{V}^*) = \{\mathbf{I}^i\}(i = 1, 2, ..., n)$, segundo as regras de comutação dadas pelas relações de (2.116) a (2.121).

[4] A equivalência nas expressões (2.130) e (2.131) está estabelecida devido a condição imposta pelas relações canônicas de comutação dos operadores momento e coordenada canonicamente conjugados.

Proposição 29. *Base G_n*
Uma base do espaço G_n é dada pelos elementos,

$$\mathcal{B}(G_n) = \left\{(\mathbf{I}_1)^{r_1} \cdots (\mathbf{I}_n)^{r_n}(\mathbf{I}^1)^{s_1} \cdots (\mathbf{I}^n)^{s_n}\right\}, \quad r, s = 0, 1 \tag{2.136}$$

onde o número de elementos da base é dado por,

$$dim(G_n) = 2^{2n} \tag{2.137}$$

ou seja, a ordem do espaço é de 2^{2n}, pois estes elementos anticomutam entre si segundo as relações de (2.116) a (2.118).

Proposição 30. *Base L_n*
Uma base do espaço L_n é dada pelos elementos,

$$\mathcal{B}(L_n) = \left\{\{\mathbf{I}_1\}^{r_1} \cdots \{\mathbf{I}_n\}^{r_n}\{\mathbf{I}^1\}^{s_1} \cdots \{\mathbf{I}^n\}^{s_n}\right\}, \quad r, s = 0, 1, ..., \infty \tag{2.138}$$

onde o número de elementos da base é dado por,

$$dim(L_n) = \infty \tag{2.139}$$

ou seja, a ordem do espaço é infinita, pois estes elementos comutam entre si segundo as relações de (2.119) a (2.121).

As álgebras G_n e L_n são tais que possuem objetos geométricos afins, seus elementos são p-tensores que guardam entre si relações com propriedades distintas como visto acima. Devido às características das álgebras, tais objetos podem ser usados para descrições de entes que tenham natureza contínua e/ou discreta; ou seja, é possível estabelecer um isomorfismo entre estas álgebras e abstrações ou problemas de natureza física. No caso de sistemas físicos, G_n pode ser denominada de *álgebra de spins* onde os objetos são antissimétricos, e L_n chamada de *álgebra das variáveis dinâmicas contínuas*, que possui objetos simetricos.

Schönberg (1957a) afirma que a álgebra de Grassmann não é suficientemente adequada para tratar os tensores com as propriedades necessárias, e então teve que introduzir novas simbologias (parênteses e chaves) para adequar a estrutura matemática às suas pesquisas. Afirma ainda que G_n é uma extensão da álgebra de Grassmann anticomutativa enquanto que L_n é uma extensão da álgebra de Grassmann comutativa, além de ambas serem também extensões do cálculo vetorial ordinário. Schönberg (1956) demonstra inclusive em seu trabalho que G_n é uma álgebra de Clifford enquanto que L_n é uma álgebra simplética.

Para o caso mais geral onde se queira descrever situações para quaisquer tipos de objetos geométricos afins tensoriais, basta realizar o produto direto $G_n \cdot L_n$, onde continuam válidas as regras de comutação e anticomutação, sendo identificados facilmente os entes que sejam simétricos ou antissimétricos pelos símbolos de ( ) e { }.

Proposição 31. *Base de $G_n \otimes L_n$*
Uma base do espaço $G_n \cdot L_n$, que é formado pela composição do produto direto entre G_n e L_n, é dada pelos elementos

$$\mathcal{B}(G_n \otimes L_n) = \left\{ (\mathbf{I}_1)^{\mu_1} \cdots (\mathbf{I}_n)^{\mu_n} (\mathbf{I}^1)^{\nu_1} \cdots (\mathbf{I}^n)^{\nu_n} \{\mathbf{I}_1\}^{\rho_1} \cdots \{\mathbf{I}_n\}^{\rho_n} \{\mathbf{I}^1\}^{\sigma_1} \cdots \{\mathbf{I}^n\}^{\sigma_n} \right\}, \tag{2.140}$$

onde os índices são tais que, $\mu, \nu = 0, 1$ quando houver geradores do tipo parênteses ( ), e $\rho, \sigma = 0, 1, ..., \infty$ para geradores do tipo chaves { }. O número de elementos da base é dado por

$$dim(G_n \otimes L_n) = 2^{2n} \cdot \infty = \infty, \tag{2.141}$$

ou seja, a ordem do espaço é infinita e tem as regras dadas pelas relações de (2.116) a (2.121).

Proposição 32. *Espaço Vetorial $\mathbb{S}_{2n}$*
Um espaço vetorial dito $\mathbb{S}_{2n}$ ao qual pertencem os vetores contravariantes $\mathbf{v}$ e covariantes $\mathbf{u}$, como definidos em (2.109), é tal que se $\mathbf{v} \in T_1(\mathbb{V})$ e $\mathbf{u} \in T^1(\mathbb{V})$, então define-se a soma direta

$$\mathbb{S}_{2n} = T_1(\mathbb{V}) \oplus T^1(\mathbb{V}) = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^*, \tag{2.142}$$

onde os vetores $\mathbf{w} \in \mathbb{S}_{2n}$ são tais que

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u} = (w^1, ..., w^n, w^{n+1}, ..., w^{2n}), \tag{2.143}$$

sendo que $w^1, ..., w^n$ são componentes contravariantes (ou do tipo v^i) e $w^{n+1}, ..., w^{2n}$ são componentes covariantes (ou do tipo u_i) de $\mathbf{w}$. Assim, tem-se que

$$dim(\mathbb{S}_{2n}) = dim(T^1(\mathbb{V})) + dim(T_1(\mathbb{V})) = dim(\mathbb{V}) + dim(\mathbb{V}^*) = 2n. \tag{2.144}$$

Se o espaço $\mathbb{V}$ é dito ser espaço de configuração de um sistema dinâmico de n graus de liberdade então, correspondente a $\mathbb{S}_{2n}$, tem-se o espaço de fase.

Sejam dados dois vetores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{S}_{2n}$, onde os mesmos podem ser escritos como $\mathbf{w}_j = \mathbf{v}_j + \mathbf{u}_j$. Analisando as possíveis relações, tem-se respectivamente as regras de anticomutação e comutação, ou seja,

$$\begin{aligned} [(\mathbf{w}_1), (\mathbf{w}_2)]_+ &= [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1), (\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2)]_+ \\ &= [(\mathbf{v}_1), (\mathbf{v}_2)]_+ + [(\mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2)]_+ + [(\mathbf{u}_1), (\mathbf{v}_2)]_+ + [(\mathbf{u}_1), (\mathbf{u}_2)]_+ \\ &= [(\mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2)]_+ + [(\mathbf{u}_1), (\mathbf{v}_2)]_+ \\ &= [(\mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2)]_+ + [(\mathbf{v}_2), (\mathbf{u}_1)]_+ \quad , \end{aligned} \tag{2.145}$$

enquanto de,

$$\begin{aligned}[\{\mathbf{w}_1\},\{\mathbf{w}_2\}]_- &= [\{\mathbf{v}_1+\mathbf{u}_1\},\{\mathbf{v}_2+\mathbf{u}_2\}]_- \\ &= [\{\mathbf{v}_1\},\{\mathbf{v}_2\}]_- + [\{\mathbf{v}_1\},\{\mathbf{u}_2\}]_- + [\{\mathbf{u}_1\},\{\mathbf{v}_2\}]_- + [\{\mathbf{u}_1\},\{\mathbf{u}_2\}]_- \\ &= [\{\mathbf{v}_1\},\{\mathbf{u}_2\}]_- + [\{\mathbf{u}_1\},\{\mathbf{v}_2\}]_- \\ &= [\{\mathbf{v}_1\},\{\mathbf{u}_2\}]_- - [\{\mathbf{v}_2\},\{\mathbf{u}_1\}]_- \quad , \end{aligned} \tag{2.146}$$

onde foram utilizadas as expressões de (2.116) a (2.121). Logo é possível estabelecer a seguinte proposição:

Proposição 33. *Produto interno em* $\mathbb{S}_{2n}$
Dados dois vetores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{S}_{2n}$*, tais que* $\mathbf{w}_j = \mathbf{v}_j + \mathbf{u}_j$*. Considerando* $\mathbf{v}_j \in \mathbb{V}$*,* $\mathbf{u}_j \in \mathbb{V}^*$ *e sendo válidas as relações de (2.116) a (2.121) dos geradores das álgebras* G_n *e* L_n*, então as regras de comutação para* $\mathbf{w}_1$ *e* $\mathbf{w}_2$*, a depender do tipo de álgebra, são*

$$[(\mathbf{w}_1),(\mathbf{w}_2)]_+ = (\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)_+\mathbf{1}_{G_n}, \tag{2.147}$$
$$[\{\mathbf{w}_1\},\{\mathbf{w}_2\}]_- = (\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)_-\mathbf{1}_{L_n}, \tag{2.148}$$

onde as expressões do produto interno $(\ \ ,\ \ )_\pm$*, são definidas por*

$$(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)_+ = <\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2> + <\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1>, \tag{2.149}$$
$$(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)_- = <\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2> - <\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1> . \tag{2.150}$$

A relação (2.149) define uma métrica pseudo-euclidiana, enquanto que (2.150) uma métrica simplética. Segundo Schönberg (1957a), a métrica que surge nessa geometria é parte da geometria afim podendo-se definir subálgebras sobre G_n. Ao se introduzir o tensor métrico do tipo "g_{jk}" tem-se duas álgebras de Clifford, $\mathcal{C}(\mathbb{V},g)$ e $\mathcal{C}(\mathbb{V},-g)$, respectivamente com as aplicações de Clifford $\gamma_j^{(+)}$ e $\gamma_j^{(-)}$.

Definição 35. *Sejam duas subálgebras de Clifford* $\mathcal{C}(\mathbb{V},g)$ *e* $\mathcal{C}(\mathbb{V},-g)$ *de* G_n*. A aplicação de Clifford* $\gamma_j^{(+)}$ *é o gerador da álgebra* $\mathcal{C}(\mathbb{V},g)$ *associada à métrica positiva "*g_{jk}*" enquanto que* $\gamma_j^{(-)}$ *é o gerador da álgebra* $\mathcal{C}(\mathbb{V},-g)$ *de métrica negativa "*$-g_{jk}$*". Dados os conjuntos de geradores (2.136), de um espaço pseudo-euclidiano* $\mathbb{S}_{2n}$ *com métrica* g_{jk}*, então pode-se definir os geradores das álgebras* $\mathcal{C}(\mathbb{V},g)$ *e* $\mathcal{C}(\mathbb{V},-g)$ *na forma*

$$\gamma_j^{(\pm)} = (\mathbf{I}_j) \pm g_{jk}(\mathbf{I}^k) \tag{2.151}$$

onde

$$\gamma_j^{(\pm)}\gamma_k^{(\pm)} + \gamma_k^{(\pm)}\gamma_j^{(\pm)} = \pm 2g_{jk}\mathbf{1}_{G_n} \tag{2.152}$$
$$[\gamma_j^{(+)},\gamma_k^{(-)}]_+ = 0 \tag{2.153}$$

que, devido à $dim(\mathbb{V}) = n$ *os índices são dados por* $j,k = 1,2,...,n$*.*

A partir da definição 35, uma notação conveniente pode ser $\mathcal{C}(\mathbb{V}, g) = \mathcal{C}_n^g$ e $\mathcal{C}(\mathbb{V}, -g) = \mathcal{C}_n^{-g}$. Então, para uma álgebra de Clifford universal tem-se que $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)$. Quando se observa a álgebra de Dirac (1928) e a álgebra de Clifford $\mathcal{C}_4$, verifica-se que há um isomorfismo entre as mesmas no espaço-tempo. Por conseguinte, uma álgebra $\mathcal{C}_4 \cdot L_4$ pode descrever quantidades da mecânica quântica relativística do elétron e é uma subálgebra da álgebra afim $G_4 \cdot L_4$ do espaço-tempo. A álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau (SCHÖNBERG, 1957b; FERNANDES, 1991; FERNANDES; VIANNA, 1999) é também uma subálgebra de $G_4 \cdot L_4$, que descreve as partículas de spin 0 e 1, segundo a teoria quântica relativística.

2.2.5.2 Álgebra G_n

Seja um elemento $\Gamma \in G_n$[5], este pode ser escrito da seguinte maneira,

$$\Gamma = \sum_{p,q=0}^{n} (p!q!)^{-1} C^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} (\mathbf{I}^{j_1}) \cdots (\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{I}_{k_q}) \cdots (\mathbf{I}_{k_1}) \tag{2.154}$$

onde j, k são índices independentes tais que,

$$(1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_q \leq n),$$
$$(1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n),$$

ou seja, j, k estabelecem uma hierarquia de valores crescentes.

Os coeficientes $C^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$ são antissimétricos em relação a permutações sobre os índices j, k e transformam-se como as componentes de p-tensores de um cliffor (2.32), relacionadas às componentes dos tensores do tipo (p,q), como visto na expressão (2.9). Para ter uma ideia da forma da expressão (2.154), basta escrevê-la explicititamente inicialmente para o índice p, fornecendo

$$\begin{aligned}
\Gamma = & \sum_q (0!q!)^{-1} C^{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{I}_{k_q}) \cdots (\mathbf{I}_{k_1}) + \\
& + \sum_q (1!q!)^{-1} C^{k_1 \ldots k_q}_{j_1} (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}_{k_q}) \cdots (\mathbf{I}_{k_1}) + \\
& + \sum_q (2!q!)^{-1} C^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 j_2} (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})(\mathbf{I}_{k_q}) \cdots (\mathbf{I}_{k_1}) + \ldots \\
& \ldots + \sum_q (n!q!)^{-1} C^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_n} (\mathbf{I}^{j_1}) \cdots (\mathbf{I}^{j_n})(\mathbf{I}_{k_q}) \cdots (\mathbf{I}_{k_1})
\end{aligned} \tag{2.155}$$

e em seguida para ambos índices p, q,

$$\begin{aligned}
\Gamma = & (0!0!)^{-1} C + (0!1!)^{-1} C^{k_1} (\mathbf{I}_{k_1}) + (0!2!)^{-1} C^{k_1 k_2} (\mathbf{I}_{k_2})(\mathbf{I}_{k_1}) + \ldots + (0!n!)^{-1} C^{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{I}_{k_q}) \cdots (\mathbf{I}_{k_1}) + \\
& + (1!0!)^{-1} C_{j_1} (\mathbf{I}^{j_1}) + (2!0!)^{-1} C_{j_1 j_2} (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2}) + \ldots + (n!0!)^{-1} C_{j_1 \ldots j_p} (\mathbf{I}^{j_1}) \cdots (\mathbf{I}^{j_p}) + \\
& + (1!1!)^{-1} C^{k_1}_{j_1} (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}_{k_1}) + (1!2!)^{-1} C^{k_1 k_2}_{j_1} (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}_{k_2})(\mathbf{I}_{k_1}) + \ldots
\end{aligned} \tag{2.156}$$

[5] Schönberg (1957a) refere-se a essa álgebra como spinorial.

ou seja, a soma dos p-vetores, q-covetores e elementos mistos $(p+q)$-tensoriais,

$$\begin{array}{rcccccccc} \Gamma = escalar & + & 1\text{-}vetor & + & 2\text{-}vetor & + & ... & + & n\text{-}vetor+ \\ & + & 1\text{-}covetor & + & 2\text{-}covetor & + & ... & + & n\text{-}covetor+ \\ & + & (p+q)\text{-}tensores & & & & & & \end{array}$$

Base G_n - revisitada

Seja uma base $\mathcal{B}(G_n)$ do espaço vetorial G_n de $dim(G_n) = 2^{2n}$, análoga à (2.136), onde as quantidades $(\mathbf{N}_j)$ e $(\bar{\mathbf{N}}_j)$ podem ser definidas em termos dos elementos dessa base, como:

$$(\mathbf{N}_j) = (\mathbf{I}^j)(\mathbf{I}_j), \tag{2.157}$$

$$(\bar{\mathbf{N}}_j) = (\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}^j), \tag{2.158}$$

Seja uma outra relação construída também a partir dos geradores da base,

$$(\mathbf{P}^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_p}) = (\mathbf{I}^{k_1}) \cdots (\mathbf{I}^{k_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p}) \cdots (\mathbf{I}_{j_1}) \tag{2.159}$$

com os índices j, k independentes como na relação (2.154) e dados como $(1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_q \leq n)$ e $(1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_p \leq n)$, onde,

$$(\mathbf{P}) = (\bar{\mathbf{N}}_1) \cdots (\bar{\mathbf{N}}_n) = (\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}^1) \cdots (\mathbf{I}_n)(\mathbf{I}^n) \tag{2.160}$$

A partir da álgebra G_n e usando as relações de (2.116) a (2.118), as definições (2.159) e (2.160) têm as seguintes propriedades

(a) Nulidade:

$$(\mathbf{I}_j)(\mathbf{P}) = (\mathbf{P})(\mathbf{I}^j) = 0 \tag{2.161}$$

De fato,

(i) que $j = 1$, fornece,
$(\mathbf{I}_1)(\mathbf{P}) = (\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}^1) \cdots (\mathbf{I}_n)(\mathbf{I}^n) = -(\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}^1) \cdots (\mathbf{I}_n)(\mathbf{I}^n) = 0$

(ii) e para, $j \neq 1$,
$(\mathbf{I}_j)(\mathbf{P}) = (\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}^1) \cdots (\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}^j) \cdots (\mathbf{I}_n)(\mathbf{I}^n) = (\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}^1) \cdots (\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}^j) \cdots (\mathbf{I}_n)(\mathbf{I}^n) = 0$

(b) Fechamento:

$$(\mathbf{P}^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_p})(\mathbf{P}^{i_1 \dots i_r}_{m_1 \dots m_s}) = \delta_{p,r} \delta^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_p} (\mathbf{P}^{k_1 \dots k_q}_{m_1 \dots m_s}) \tag{2.162}$$

Com efeito, tem-se,

(i) Caso $(\mathbf{P}^{k_1}_{j_1})(\mathbf{P}^{i_1}_{m_1})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}^{k_1}_{j_1})(\mathbf{P}^{i_1}_{m_1}) &= (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_1})(\mathbf{I}^{i_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1}) = (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})\left\{\delta^{i_1}_{j_1} - (\mathbf{I}^{i_1})(\mathbf{I}_{j_1})\right\}(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1})\\ &= \delta^{i_1}_{j_1}(\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1}) = \delta^{i_1}_{j_1}(\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1})\\ &= \delta^{i_1}_{j_1}(\mathbf{P}^{k_1}_{m_1})\\ &\Longrightarrow (\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p})(\mathbf{P}^{i_1\ldots i_p}_{m_1\ldots m_s}) = \delta^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}(\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{m_1\ldots m_s})\end{aligned}$$

onde a demonstração, utilizou-se $(\mathbf{P})^2 = (\mathbf{P})$, que tem prova simples. Essa propriedade é indicativa de um operador idempotente.

(ii) Caso $(\mathbf{P}^{k_1}_{j_1 j_2})(\mathbf{P}^{i_1}_{m_1})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}^{k_1}_{j_1 j_2})(\mathbf{P}^{i_1}_{m_1}) &= (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_1})(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}^{i_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1}) = (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_1})\left\{\delta^{i_1}_{j_2} - (\mathbf{I}^{i_1})(\mathbf{I}_{j_2})\right\}(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1})\\ &= (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_1})\delta^{i_1}_{j_2}(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1}) - (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_1})(\mathbf{I}^{i_1})\cancel{(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{P})}(\mathbf{I}_{m_1}),\\ &= 0\end{aligned}$$

ou seja, o número de índices inferiores do primeiro fator não pode diferir dos superiores do segundo.

(iii) Caso $(\mathbf{P}^{k_1}_{j_1})(\mathbf{P}^{i_1 i_2}_{m_1})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}^{k_1}_{j_1})(\mathbf{P}^{i_1 i_2}_{m_1}) &= (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_1})(\mathbf{I}^{i_1})(\mathbf{I}^{i_2})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1}) = (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})\left\{\delta^{i_1}_{j_2} - (\mathbf{I}^{i_1})(\mathbf{I}_{j_1})\right\}(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1})\\ &= (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})\delta^{i_1}_{j_2}(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{m_1}) - (\mathbf{I}^{k_1})(\mathbf{P})(\mathbf{I}^{i_1})\cancel{(\mathbf{I}_{j_1})(\mathbf{P})}(\mathbf{I}_{m_1})\\ &= 0\end{aligned}$$

Resultado similar ao caso anterior e que condiciona o uso do "$\delta_{p,r}$" da expressão geral (2.162)[.]

Com todas as definições e propriedades discutidas, então é possível escrever a relação (2.154) em termos de (2.159), ou seja, em relação a uma base $\mathcal{B}(G_n) = \left\{(P^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p})\right\}$, isto é,

$$\Gamma = \sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}(\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}) \tag{2.163}$$

onde as componentes $A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}$ são antissimétricas em relação à permutação dos índices j, k de forma independente, assim como no caso dos coeficientes na expressão (2.154). Os coeficientes numéricos $A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}$ de Γ constituem uma matriz $\mathbf{A}$.

De forma similar a todos os resultados anteriores, a partir da definição do operador idempotente $(\mathbf{N}_j)$, têm-se que

$$(\bar{\mathbf{P}}) = (\mathbf{N}_1)\cdots(\mathbf{N}_n) = (\mathbf{I}^1)(\mathbf{I}_1)\cdots(\mathbf{I}^n)(\mathbf{I}_n) \tag{2.164}$$

e assim,

$$(\bar{\mathbf{P}}^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q}) = (\mathbf{I}_{k_1})\cdots(\mathbf{I}_{k_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}^{j_q})\cdots(\mathbf{I}^{j_1}) \tag{2.165}$$

com propriedades,

$$(\mathbf{I}^j)(\bar{\mathbf{P}}) = (\bar{\mathbf{P}})(\mathbf{I}_j) = 0 \tag{2.166}$$

e,

$$(\bar{\mathbf{P}}^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p})(\bar{\mathbf{P}}^{i_1\dots i_r}_{m_1\dots m_s}) = \delta_{p,r}\delta^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_p}(\bar{\mathbf{P}}^{k_1\dots k_q}_{m_1\dots m_s}). \tag{2.167}$$

Por outro lado, sendo

$$\bar{\Gamma} = \sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}C^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}(\mathbf{I}_{k_1})\cdots(\mathbf{I}_{k_p})(\mathbf{I}^{j_q})\cdots(\mathbf{I}^{j_1}) \tag{2.168}$$

encontra-se que

$$\bar{\Gamma} = \sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}A^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q}(\bar{\mathbf{P}}^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}) \tag{2.169}$$

onde deve-se notar que, apesar das relações (2.168) e (2.169) parecerem similares à expressão (2.163), em $\bar{\Gamma}$ a ordem dos geradores antissimétricos covariantes é invertida; logo, são entes diferentes. Deve-se notar também que, se as trasformações de involução em G_n são definidas sobre um corpo de elementos $k_j \in \mathbb{K}$, tem-se,

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{\Gamma}} = \Gamma,\\
&k_1\Gamma_1 + k_2\Gamma_2 \longrightarrow k_1\bar{\Gamma}_1 + k_2\bar{\Gamma}_2,\\
&\Gamma_1\Gamma_2 \longrightarrow \bar{\Gamma}_2\bar{\Gamma}_1.
\end{aligned}$$

Uma outra propriedade importante é que, a partir do adjunto (SCHÖNBERG, 1957b; SCHÖNBERG, 1957a) de um gerador antissimétrico $(\mathbf{I}_j)^\dagger = (\mathbf{I}^j)$, se encontra o adjunto associado à Γ, ou seja,

$$\Gamma^\dagger = \sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}(A^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q})^*(\mathbf{P}^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}). \tag{2.170}$$

Subálgebra $G_n(\mathbf{P})$

Uma subálgebra $G_n(\mathbf{P})$ é tal que um elemento $(\psi) \in G_n(\mathbf{P})$ é formado pelo produto de $(\mathbf{P})$ à direita de um elemento $\Gamma \in G_n$. Logo,

$$(\psi) = \Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}A^{j_1\dots j_p}_{k_1\dots k_q}(\mathbf{P}^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p})(\mathbf{P}), \tag{2.171}$$

que, utilizando a definição de $(\mathbf{P})$, a relação (2.162) e efetuando os cálculos de forma explícita, resulta em:

$$\Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{p,q}^{n} (p!q!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} \delta_{p,0} \delta^{0}_{j_1 \ldots j_p} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}_{0}),$$

e assim, a definição (2.171) será na verdade,

$$(\psi) = \Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{q}^{n} (q!)^{-1} A_{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}) \tag{2.172}$$

onde, apesar do elemento $(\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q})$ conter implícito o ente $(\mathbf{P})$, que é escrito em termos de geradores vetoriais e covetoriais antissimétricos, a forma do resultado acima induz que o elemento (ψ) refere-se a formas lineares, ou entes k_q-covetoriais. Conclui-se ainda que $G_n(\mathbf{P})$ é subálgebra de G_n.

Um resultado imediato é que $\Gamma \in G_n$ pode ser interpretado como uma transformação linear do subespaço $G_n(\mathbf{P})$ de G_n em $G_n(\mathbf{P})$, ou seja,

$$\Gamma : G_n(\mathbf{P}) \longrightarrow G_n(\mathbf{P}) \tag{2.173}$$

o que seria análogo a uma multiplicação de um elemento de G_n por outro de $G_n(\mathbf{P})$. De fato, tem-se,

$$\begin{aligned}
\Gamma(\psi) = \Gamma\left(\Gamma(\mathbf{P})\right) &= \sum_{p,q}^{n} (p!q!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}) \sum_{s}^{n} (s!)^{-1} A_{t_1 \ldots t_s} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_s}) \\
&= \sum_{p,q,s}^{n} (p!q!s!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} A_{t_1 \ldots t_s} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}) (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_s}) \\
&= \sum_{p,q,s}^{n} (p!q!s!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} A_{t_1 \ldots t_s} \delta_{p,s} \delta^{t_1 \ldots t_s}_{j_1 \ldots j_p} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}) \\
&= \sum_{p,q}^{n} (p!q!p!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} A_{t_1 \ldots t_p} \delta^{t_1 \ldots t_p}_{j_1 \ldots j_p} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}) \\
&= \sum_{p,q}^{n} (p!q!)^{-1} (p!)^{-1} A^{t_1 \ldots t_p}_{k_1 \ldots k_q} A_{t_1 \ldots t_p} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q})
\end{aligned}$$

ou seja, $\Gamma(\psi) \in G_n(\mathbf{P})$. A partir desses resultados, é correto afirmar que o subespaço $G_n(\mathbf{P})$ é soma direta de todos os espaços vetoriais dos k_q-covetores antissimétricos para qualquer ordem k_q-tensorial sobre $\mathbb{V}$. Ou seja, soma direta dos espaços lineares dos tensores antissimétricos covariantes de todas as ordens.

É possível verificar que essa transformação linear, quando realizada à direita de (ψ), como $(\psi)\Gamma$, resulta em um elemento para o espaço G_n, isto é,

$$\begin{aligned}
(\psi)\Gamma = \left(\Gamma(\mathbf{P})\right)\Gamma &= \sum_{s}^{n} (s!)^{-1} A_{t_1 \ldots t_s} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_s}) \sum_{p,q}^{n} (p!q!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}) \\
&= \sum_{s,p,q}^{n} (s!p!q!)^{-1} A_{t_1 \ldots t_s} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_s}) (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}) \\
&= \sum_{s,p}^{n} (s!p!)^{-1} A_{t_1 \ldots t_s} A^{j_1 \ldots j_p} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_s}_{j_1 \ldots j_p})
\end{aligned}$$

denotando que $(\psi)\Gamma \notin G_n(\mathbf{P})$ mas $(\psi)\Gamma \in G_n$. Uma consequência direta é que para a transformação linear (2.173) ser válida, é necessário aplicá-la à esquerda de $(\psi) \in G_n(\mathbf{P})$,

$$\Gamma : (\quad\quad)G_n(\mathbf{P}) \longrightarrow G_n(\mathbf{P})$$

Subálgebra $(\mathbf{P})G_n$

Uma subálgebra $(\mathbf{P})G_n$ é tal que um elemento $(\phi) \in (\mathbf{P})G_n$ é formado pela multiplicação de $(\mathbf{P})$ à esquerda de $\Gamma \in G_n$. Logo,

$$(\phi) = (\mathbf{P})\Gamma = (\mathbf{P})\sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}(\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}) \tag{2.174}$$

De forma semelhante aos procedimentos matemáticos realizados para a subálgebra $G_n(\mathbf{P})$, a subálgebra $(\mathbf{P})G_n$ apresenta resultados análogos. Então,

$$(\phi) = (\mathbf{P})\Gamma = \sum_{p}^{n}(p!)^{-1}A^{j_1\ldots j_p}(\mathbf{P}_{j_1\ldots j_p}) \tag{2.175}$$

Uma transformação linear $\Gamma \in G_n$ do subespaço $(\mathbf{P})G_n$ de G_n em $(\mathbf{P})G_n$, somente é válida se for aplicada à direita de (ϕ), ou seja, entre os parênteses abaixo,

$$\Gamma : (\mathbf{P})G_n(\quad\quad) \longrightarrow (\mathbf{P})G_n\ . \tag{2.176}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\phi)\Gamma = ((\mathbf{P})\Gamma)\,\Gamma &= \sum_{s}^{n}(s!)^{-1}A^{t_1\ldots t_s}(\mathbf{P}_{t_1\ldots t_s})\sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}(\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= \sum_{s,p,q}^{n}(s!p!q!)^{-1}A^{t_1\ldots t_s}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}(\mathbf{P}_{t_1\ldots t_s})(\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= \sum_{s,p,q}^{n}(s!p!q!)^{-1}A^{t_1\ldots t_s}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}\delta_{s,q}\delta^{k_1\ldots k_q}_{t_1\ldots t_s}(\mathbf{P}^{0}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= \sum_{p,q}^{n}(q!)^{-1}(p!q!)^{-1}A^{t_1\ldots t_q}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}\delta^{k_1\ldots k_q}_{t_1\ldots t_q}(\mathbf{P}^{0}_{j_1\ldots j_p}) \\
&= \sum_{p,q}^{n}(q!)^{-1}(p!q!)^{-1}A^{k_1\ldots k_q}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}(\mathbf{P}_{j_1\ldots j_p})
\end{aligned}$$

onde $(\phi)\Gamma \in (\mathbf{P})G_n$. Esse resultado também significa que o espaço $(\mathbf{P})G_n$ é a soma direta de todos os espaços vetoriais dos j_p-vetores antissimétricos para qualquer ordem j_p-tensorial sobre $\mathbb{V}$. Ou seja, soma direta dos espaços lineares dos tensores antissimétricos contravariantes de todas as ordens. Para aplicação à esquerda de (ϕ), tem-se

$$\begin{aligned}
\Gamma(\phi) = \Gamma\left((\mathbf{P})\Gamma\right) &= \sum_{p,q}^{n}(p!q!)^{-1}A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}(\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p})\sum_{s}^{n}(s!)^{-1}A^{t_1\ldots t_s}(\mathbf{P}_{t_1\ldots t_s}) \\
&= \sum_{q,s}^{n}(q!s!)^{-1}A_{k_1\ldots k_q}A^{t_1\ldots t_s}(\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{t_1\ldots t_s})
\end{aligned}$$

ou seja, $\Gamma(\phi) \notin (\mathbf{P})G_n$, todavia é um elemento do espaço G_n. É o caso análogo ao demonstrado para a subálgebra $G_n(\mathbf{P})$ onde $(\psi)\Gamma \in G_n$ mas $(\psi)\Gamma \notin G_n(\mathbf{P})$.

2.2.5.3 Projetores ($\mathbf{\Pi}_p$)

Uma característica fundamental de ($\mathbf{P}$), usada nas análises anteriores, é sua idempotência. Como visto, dependendo do tipo de operação sobre um elemento $\Gamma \in G_n$, o resultado é conduzido a subespaços p-tensoriais cujos geradores são antissimétricos e mutuamente ortogonais. Essa característica torna possível construir um operador ($\mathbf{\Pi}_p$), que tenha a função de projetar determinados objetos nos espaços p-tensoriais desejados.

Seja um *projetor* em G_n, que, a partir de (2.159) e (2.160), é definido por

$$(\mathbf{\Pi}_p) = (p!)^{-1} \sum_{j=0}^{n} (\mathbf{P}^{j_1 \ldots j_p}_{j_1 \ldots j_p}); \tag{2.177}$$

esse projetor é um operador idempotente ortogonal invariante. Explicitamente,

$$(\mathbf{\Pi}_p) = (p!)^{-1} \left\{ (\mathbf{P}^0_0) + (\mathbf{P}^{j_1}_{j_1}) + (\mathbf{P}^{j_1 j_2}_{j_1 j_2}) + \ldots + (\mathbf{P}^{j_1 \ldots j_p}_{j_1 \ldots j_p}) \right\} \tag{2.178}$$

onde $(\mathbf{P}^0_0) = (\mathbf{P})$ e $(\mathbf{P}^{0 \ldots 0 j_r 0 \ldots 0}_{0 \ldots 0 j_r 0 \ldots 0}) = (\mathbf{P}^{j_r}_{j_r})$ com soma sobre os índices j_r análoga à convenção de Einstein.

Seja um elemento $\Gamma \in G_n$ dado por (2.163) e uma parte do projetor (2.178) correspondente aos índices duplicados. Então, uma atuação típica desse projetor sobre os elementos $\Gamma \in G_n$ pode ser analisada, fornecendo

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{t_1 \ldots t_r})\Gamma &= (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{t_1 \ldots t_r}) \sum_{p,q}^{n} (p!q!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}) \\
&= \sum_{p,q}^{n} (p!q!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{t_1 \ldots t_r})(\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}) \\
&= \sum_{p,q}^{n} (p!q!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q} \delta_{r,q} \delta^{k_1 \ldots k_q}_{t_1 \ldots t_r} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{j_1 \ldots j_p}) \\
&= \sum_{p}^{n} (p!r!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_r} \delta^{k_1 \ldots k_r}_{t_1 \ldots t_r} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{j_1 \ldots j_p}) \\
&= \sum_{p}^{n} (p!r!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_r} (\mathbf{P}^{k_1 \ldots k_r}_{j_1 \ldots j_p}).
\end{aligned} \tag{2.179}$$

É possível escrever o resultado acima de modo a ficar evidente os índices t's do projetor, ou seja,

$$(\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{t_1 \ldots t_r})\Gamma = \sum_{p}^{n} (p!r!)^{-1} A^{j_1 \ldots j_p}_{t_1 \ldots t_r} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{j_1 \ldots j_p}) \tag{2.180}$$

que é idêntica à expressão (2.179) devido a condição $\delta^{k_1 \ldots k_q}_{t_1 \ldots t_r}$. Logo para a definição completa do projetor,

$$(\mathbf{\Pi}_r)\Gamma = \sum_{t,p}^{n} (p!)^{-1} (r!)^{-2} A^{j_1 \ldots j_p}_{t_1 \ldots t_r} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}_{j_1 \ldots j_p}) \tag{2.181}$$

Para o índice $p = 0$, (2.181) torna-se,

$$(\mathbf{\Pi}_r)\Gamma = \sum_t^n (r!)^{-2} A_{t_1 \ldots t_r} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}) \tag{2.182}$$

que é um ente t_r-covariante, uma projeção de seu respectivo k_q-covariante após aplicação do projetor $(\mathbf{\Pi}_r)$.

De forma similar, uma projeção $(\mathbf{\Pi}_r)$ sobre um elemento $(\psi) \in G_n(\mathbf{P})$, dado por (2.172), fornece

$$(\mathbf{\Pi}_r)(\psi) = \sum_t^n (r!)^{-2} A_{t_1 \ldots t_r} (\mathbf{P}^{t_1 \ldots t_r}) \tag{2.183}$$

o que pode ser demonstrado multiplicando-se (2.182) à direita pelo ente $(\mathbf{P})$. Esta expressão demonstra que $(\mathbf{\Pi}_r)$ projeta (ψ) no espaço das r-formas. Assim, supondo que (ψ) seja uma p-forma,

$$(\psi) = \text{escalar} + \text{1-forma} + \text{2-forma} + \ \cdots \ + \text{p-forma}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{\Pi}_0)(\psi) &= \text{escalar} \\
(\mathbf{\Pi}_1)(\psi) &= \text{escalar} + \text{1-forma} \\
(\mathbf{\Pi}_2)(\psi) &= \text{escalar} + \text{1-forma} + \text{2-forma} \\
\cdots \quad & \ldots \\
(\mathbf{\Pi}_r)(\psi) &= \text{escalar} + \text{1-forma} + \text{2-forma} + \ \cdots \ + \text{r-forma}
\end{aligned}$$

Com as discussões realizadas até o momento é possível estabelecer as seguintes proposições importantes para as álgebras estudadas.

Proposição 34. *Propriedades do projetor* $(\mathbf{\Pi}_p)$
Dado um operador projetor $(\mathbf{\Pi}_p)$ *em* G_n*, definido como,*

$$(\mathbf{\Pi}_p) = (p!)^{-1} \sum_{j=0}^n (\mathbf{P}_{j_1 \ldots j_p}^{j_1 \ldots j_p}) \tag{2.184}$$

as seguinte propriedades são verificadas:

(i) $\sum_p (\mathbf{\Pi}_p) = \mathbf{1}_{G_n}$ *(ortonormalidade);*

(ii) $(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_q) = \delta_{p,q}(\mathbf{\Pi}_p)$ *(ortogonalidade);*

(iii) $(\mathbf{\Pi}_+) = \sum_{p=par} (\mathbf{\Pi}_p)$ *(ortonormalidade par);*

(iv) $(\mathbf{\Pi}_-) = \sum_{p=ímpar} (\mathbf{\Pi}_p)$ *(ortonormalidade ímpar).*

Proposição 35. *Dado o conjunto de geradores anticomutativos da álgebra G_n, escritos como na proposição 29, então têm-se as seguintes propriedades fundamentais,*

$$(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{I}^j) \tag{2.185}$$

$$(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_j) = (\mathbf{I}_j)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) \tag{2.186}$$

onde Schönberg (1957b) estabelece que,

(i) $(\mathbf{\Pi}_{n+1}) = 0$;

(ii) $(\mathbf{\Pi}_0) = (\mathbf{P})$;

(iii) $(\mathbf{\Pi}_n) = (\bar{\mathbf{P}})$;

(iv) $(\bar{\mathbf{\Pi}}_p) = (\mathbf{\Pi}_{n-p})$.

As demonstrações das relações (2.185) e (2.186) são realizadas utilizando a álgebra G_n, as relações (2.116)-(2.118) e a propriedade de nulidade (2.161).

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}^j)(\mathbf{P}^{j_1\cdots j_p}_{j_1\cdots j_p}) &= (\mathbf{I}^j)(\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) \\
&= (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})(\mathbf{I}^j)\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots[1-(\mathbf{I}^j)(\mathbf{I}_j)](\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) \\
&= (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})(\mathbf{I}^j)\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}^j)(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) \\
&= (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})(\mathbf{I}^j)\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1})(\mathbf{I}^j) \\
&= (\mathbf{P}^{j_1\cdots j_p j_{p+1}}_{j_1\cdots j_p j_{p+1}})(\mathbf{I}^j) &(2.187)\\
&\therefore (\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{I}^j) &(2.188)
\end{aligned}$$

E de forma análoga

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}^{j_1\cdots j_p}_{j_1\cdots j_p})(\mathbf{I}_j) &= (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1})(\mathbf{I}_j) \\
&= (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})[1-(\mathbf{I}^j)(\mathbf{I}_j)]\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) \\
&= (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}^j)\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) \\
&= (\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}^{j_2})(\mathbf{I}^j)\cdots(\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_p})\cdots(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) \\
&= (\mathbf{I}_j)(\mathbf{P}^{j_1\cdots j_{p+1}}_{j_1\cdots j_{p+1}}) &(2.189)\\
&\therefore (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_j) = (\mathbf{I}_j)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) &(2.190)
\end{aligned}$$

Para que as demonstrações acima (2.188) e (2.190) sejam válidas, pela definição (2.160), é necessário que o operador $(\mathbf{P})$ esteja escrito com todos os geradores da base (inclusive em j), ou seja,

$$(\mathbf{P}) = (\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}^1)\cdots(\mathbf{I}_j)(\mathbf{I}^j)\cdots(\mathbf{I}_n)(\mathbf{I}^n) \tag{2.191}$$

onde significa que $j \neq j_1, ..., j_p$ e $p < n$. Caso contrário, seguem as análises:

(a) Para um projetor (2.191) com $j = j_m \in \{j_1, ..., j_n\}$ e $p = n$, tem-se,

$$(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_n) = 0 \tag{2.192}$$

$$(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_j) = (\mathbf{\Pi}_n)(\mathbf{I}_j) = 0 \tag{2.193}$$

ou seja, a ação do projetor $(\mathbf{\Pi}_n)$ tem mesmo efeito que o do ente $(\bar{\mathbf{P}})$ dado por (2.164), como foi considerado na proposição 35. Possivelmente se encontra nesse resultado a motivação para Schönberg (1957b) ter definido as propriedades 35(i)(iii);

(b) O projetor (2.191) não está definido com um $(\bar{\mathbf{N}}_j)$ onde $j \neq j_1, ..., j_p$ e $p = n$,

$$(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_n) = (\mathbf{\Pi}_n)(\mathbf{I}^j) \tag{2.194}$$

$$(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_j) = (\mathbf{\Pi}_n)(\mathbf{I}_j) = (\mathbf{I}_j)(\mathbf{\Pi}_n); \tag{2.195}$$

esse caso sugere que o espaço G_n com projetores de ordem n como em (2.191) é subespaço vetorial de G_{n+r}, com projetor $(\mathbf{P})$ de ordem $dim(\mathbb{V}) = n + r$, onde no mínimo para $r = 1$, o espaço vetorial $\mathbb{V}$ que define os tensores tem $dim(\mathbb{V}) = n + 1$. Ou seja, uma base de G_{n+r} de dimensão $dim(G_{n+r}) = 2^{2(n+r)}$ é do tipo,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(G_{n+r}) = \{&(\mathbf{I}_1)^{k_1} \cdots (\mathbf{I}_n)^{k_n}(\mathbf{I}_{n+1})^{k_{n+1}} \cdots (\mathbf{I}_{n+r})^{k_{n+r}} \cdot \\ &\cdot (\mathbf{I}^1)^{s_1} \cdots (\mathbf{I}^n)^{s_n}(\mathbf{I}^{n+1})^{s_{n+1}} \cdots (\mathbf{I}^{n+r})^{s_{n+r}}\}, \quad k, s = 0, 1\end{aligned} \tag{2.196}$$

e assim existem $2r$ geradores que não tem relação alguma de anticomutação na álgebra G_n por não pertencerem à mesma, e nesta, são ditos entes excedentes e comutam com seus $2n$ geradores.

Propriedades notáveis de $(\mathbf{\Pi}_p)$

(pn.1) $(\mathbf{N}^j_k)(\mathbf{\Pi}_p) = \delta^j_k(\mathbf{\Pi}_p) - (\mathbf{\Pi}_p)(\bar{\mathbf{N}}^j_k)(\mathbf{\Pi}_p)$;

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}^j_k)(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{I}^j)(\mathbf{I}_k)(\mathbf{\Pi}_p) &= \delta^j_k(\mathbf{\Pi}_p) - (\mathbf{I}_k)(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= \delta^j_k(\mathbf{\Pi}_p) - (\mathbf{I}_k)(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= \delta^j_k(\mathbf{\Pi}_p) - (\mathbf{I}_k)(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= \delta^j_k(\mathbf{\Pi}_p) - (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_k)(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= \delta^j_k(\mathbf{\Pi}_p) - (\mathbf{\Pi}_p)(\bar{\mathbf{N}}^j_k)(\mathbf{\Pi}_p);\end{aligned}$$

(pn.2) $(\mathbf{N}^{j_s}_{k_s}) \cdots (\mathbf{N}^{j_1}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{N}^{j_s}_{k_s})(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{N}^{j_{s-1}}_{k_{s-1}})(\mathbf{\Pi}_p) \cdots (\mathbf{N}^{j_1}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p)$;

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}^{j_s}_{k_s}) \cdots (\mathbf{N}^{j_1}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p) &= (\mathbf{I}^{j_s})(\mathbf{I}_{k_s}) \cdots (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= (\mathbf{I}^{j_s})(\mathbf{I}_{k_s}) \cdots (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p)^2 \\ &= (\mathbf{I}^{j_s})(\mathbf{I}_{k_s}) \cdots (\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{\Pi}_{p-1})(\mathbf{I}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= (\mathbf{I}^{j_s})(\mathbf{I}_{k_s}) \cdots (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p) = ... \\ &= (\mathbf{I}^{j_s})(\mathbf{I}_{k_s})(\mathbf{\Pi}_p) \cdots (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}^{j_1})(\mathbf{I}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= (\mathbf{N}^{j_s}_{k_s})(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{N}^{j_{s-1}}_{k_{s-1}})(\mathbf{\Pi}_p) \cdots (\mathbf{N}^{j_1}_{k_1})(\mathbf{\Pi}_p);\end{aligned}$$

(pn.3) $(\mathbf{I}^k)(\mathbf{P}^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}) = (\mathbf{P}^{k,j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p})$, resultado alternativo de (2.187);

(pn.4) $(\mathbf{I}^k)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{P}^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_p}) = (\mathbf{P}^{k,j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_p})$;

(pn.5) $(\mathbf{P}^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p})(\mathbf{I}_k) = (\mathbf{P}_{k,j_1\ldots j_p}^{j_1\ldots j_p})$, resultado alternativo de (2.189);

(pn.6) $(\mathbf{P}^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_p})(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_k) = (\mathbf{P}_{k,k_1\ldots k_p}^{j_1\ldots j_p})$;

(pn.7) $(\mathbf{I}^k) = \sum_p (p!)^{-1}(\mathbf{P}^{k,j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p})$;

(pn.8) $(\mathbf{I}_k) = \sum_p (p!)^{-1}(\mathbf{P}_{k,j_1\ldots j_p}^{j_1\ldots j_p})$.

2.2.5.4 Subálgebra $\mathbb{E}_{n,p}$

Uma subálgebra $\mathbb{E}_{n,p}$ é tal que, para um conjunto dos projetores $\{(\mathbf{\Pi}_p)\}$ de G_n e um elemento $\Gamma \in G_n$, é dada por $\mathbb{E}_{n,p} = (\mathbf{\Pi}_p)G_n(\mathbf{\Pi}_p)$. Logo, a partir da operação de um projetor $(\mathbf{\Pi}_p)$ à direita da expressão (2.181), encontra-se

$$\begin{aligned}
(\mathbf{\Pi}_r)\Gamma(\mathbf{\Pi}_r) &= \sum_{t,p}^{n} (p!)^{-1}(r!)^{-2} A^{j_1\ldots j_p}_{t_1\ldots t_r}(\mathbf{P}^{t_1\ldots t_r}_{j_1\ldots j_p})(r!)^{-1}\sum_{t}^{n}(\mathbf{P}^{t_1\ldots t_r}_{t_1\ldots t_r}) \\
&= \sum_{t,p}^{n} (p!)^{-1}(r!)^{-3} A^{j_1\ldots j_p}_{t_1\ldots t_r}(\mathbf{P}^{t_1\ldots t_r}_{j_1\ldots j_p})(\mathbf{P}^{t_1\ldots t_r}_{t_1\ldots t_r}) \\
&= \sum_{t,p}^{n} (p!)^{-1}(r!)^{-3} A^{j_1\ldots j_p}_{t_1\ldots t_r}\delta_{p,r}\delta^{t_1\ldots t_r}_{j_1\ldots j_p}(\mathbf{P}^{t_1\ldots t_r}_{t_1\ldots t_r}) \\
&= \sum_{t}^{n} (r!)^{-4} A^{t_1\ldots t_r}_{t_1\ldots t_r}(\mathbf{P}^{t_1\ldots t_r}_{t_1\ldots t_r})
\end{aligned} \tag{2.197}$$

ou seja, o resultado acima demonstra que um elemento $(\mathbf{\Pi}_r)\Gamma(\mathbf{\Pi}_r) \in \mathbb{E}_{n,p}$ é equivalente a um projetor, como aquele definido em (3.62). É verificável que o ente (2.197) é uma transformação linear de $G_n(\mathbf{P})$ em $G_n(\mathbf{P})$, mas na subálgebra $(\mathbf{P})G_n$ realiza uma transformação linear de translação, com fator de escala $(r!)^{-4}A^{t_1\ldots t_r}_{t_1\ldots t_r}$, sem alterar a ordem p-contravariante de um $(\phi) \in (\mathbf{P})G_n$.

Schönberg (1957b) inclusive afirma que a subálgebra $\mathbb{E}_{n,p}$ é uma "álgebra matricial total do espaço linear dos tensores covariantes antissimétricos de ordem p". Mais enfaticamente pode-se afirmar que se trata da álgebra matricial total correspondente aos entes p-covariantes antissimétricos associados aos geradores de G_n.

É imediata a demonstração de que dado um $\Omega \in \mathbb{E}_{n,p}$ e um projetor $(\mathbf{\Pi}_p)$, então,

$$(\mathbf{\Pi}_p)\Omega = \Omega(\mathbf{\Pi}_p) \tag{2.198}$$

onde diz-se que $(\mathbf{\Pi}_p)$ é então o elemento *unidade* de $\mathbb{E}_{n,p}$.

2.2.5.5 Álgebra L_n e sua extensão $\underline{L}_n$

Seja um elemento $\Lambda \in L_n$ que a partir do que foi visto na definição da álgebra comutativa (2.119)-(2.121) e na proposição 30, é escrito como

$$\Lambda = \sum_{p,q}(p!q!)^{-1}(r_1!\cdots r_n!)(s_1!\cdots s_n!)C^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\{\mathbf{I}^{j_1}\}\cdots\{\mathbf{I}^{j_p}\}\{\mathbf{I}_{k_1}\}\cdots\{\mathbf{I}_{k_p}\} \tag{2.199}$$

sendo que os r_i e s_i são iguais ao número de vezes que o inteiro i aparece nos respectivos índices $j's$ e $k's$. Os coeficientes $C's$ são simétricos quando permutados os seus $j's$ e $k's$, que são índices que variam de forma independente.

Com um número finito de termos em (2.199) diferente de zero, garante-se a propriedade de fechamento para a álgebra L_n e assim sua existência. Ou seja, a álgebra L_n pode ser usada para descrever objetos geométricos finitos, que estão relacionados a um conjunto finito de geradores tensoriais simétricos, onde cada gerador corresponde a um tipo de variável. No entanto, é conveniente não adotar essa condição de finitude, o que significa determinar um conjunto de elementos $\underline{\Lambda}$ de uma álgebra não mais linear e associativa, denominada quasi-álgebra $\underline{L}_n$ (SCHÖNBERG, 1957a).

Uma quasi-álgebra de Heisenberg $\underline{L}_n$ é formada por um conjunto de elementos que podem ser escritos como

$$\underline{\Lambda} = \sum_{p,q}^{\infty}(p!q!)^{-1}(r_1!\cdots r_n!)(s_1!\cdots s_n!)A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q}\{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\} \tag{2.200}$$

onde os coeficientes $A's$ são simétricos em relação à permutações dos índices $j's$ e $k's$ separadamente, sendo que os valores desses índices variam no intervalo$(j,k) = 1,2,...,n$.

É importante notar que é possível estabelecer "analogia" entre os resultados encontrados para a álgebra G_n e a quasi-álgebra $\underline{L}_n$. Desta forma, a definição do ente ($\mathbf{P}$) possui o análogo simétrico dado pelo idempotente ortogonal,

$$\{\mathbf{P}\} = \{\bar{\mathbf{N}}_1\}\cdots\{\bar{\mathbf{N}}_j\} = \{\mathbf{I}_1\}\{\mathbf{I}^1\}\cdots\{\mathbf{I}_n\}\{\mathbf{I}^n\}; \tag{2.201}$$

logo, para as demais relações segue que

$$\{\mathbf{I}_j\}\{\mathbf{P}\} = \{\mathbf{P}\}\{\mathbf{I}^j\} = 0, \tag{2.202}$$

relação indicada por Schönberg (1957b) como válida. Então à direita de (2.200), o ente associado aos geradores é definido como,

$$\{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\} = \{\mathbf{I}^{j_1}\}\cdots\{\mathbf{I}^{j_p}\}\{\mathbf{P}\}\{\mathbf{I}_{k_1}\}\cdots\{\mathbf{I}_{k_p}\}(r_1!\cdots r_n!)(s_1!\cdots s_n!)^{1/2} \tag{2.203}$$

e assim,

$$\{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\}\{\mathbf{P}^{k'_1\ldots k'_q}_{j'_1\ldots j'_p}\} = \delta_{p,q}\delta^{s'_1\ldots s'_n}_{r_1\ldots r_n}\{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j'_1\ldots j'_p}\} \tag{2.204}$$

onde as permutações dos índices $j's$ e $k's$ são simétricas e independentes, e o $\delta^{s'_1\ldots s'_n}_{r_1\ldots r_n}$ filtra os índices que realizam contagens sobre os valores $j's$ e $k's$.

Os projetores $\{\mathbf{\Pi}_p\} \in \underline{\mathrm{L}}_n$ idempotentes ortogonais são dados por

$$\{\mathbf{\Pi}_p\} = (p!)^{-1}(r_1! \cdots r_n!) \sum_{j=0}^{n} \{\mathbf{P}^{j_1\ldots j_p}_{j_1\ldots j_p}\} \tag{2.205}$$

e a unidade da quasi-álgebra $\underline{\mathrm{L}}_n$ é

$$\mathbf{1}_{\underline{\mathrm{L}}_n} = \sum_{p=0}^{\infty} \{\mathbf{\Pi}_p\} \tag{2.206}$$

onde tem-se que $\underline{\mathrm{L}}_n$ possui uma álgebra equivalente à de L_n, tal que,

$$[\{\mathbf{I}_i\}, \{\mathbf{I}_j\}]_- = 0 \tag{2.207}$$

$$[\{\mathbf{I}^i\}, \{\mathbf{I}^j\}]_- = 0 \tag{2.208}$$

$$[\{\mathbf{I}_i\}, \{\mathbf{I}^j\}]_- = \delta^j_i \mathbf{1}_{\underline{\mathrm{L}}_n} \quad (i, j = 1, 2, ..., n). \tag{2.209}$$

Tal equivalência denota que as regras de comutação são as mesmas e demonstra que a quasi-álgebra $\underline{\mathrm{L}}_n$ é extensão de L_n.

Conjunto $\underline{\mathrm{L}}_n\{\mathbf{P}\}$

Um conjunto $\underline{\mathrm{L}}_n\{\mathbf{P}\}$ associado a uma quasi-álgebra $\underline{\mathrm{L}}_n$ é tal que um elemento $\{\psi\} \in \underline{\mathrm{L}}_n\{\mathbf{P}\}$ é definido como

$$\{\psi\} = \underline{\Lambda}\{\mathbf{P}\} = \sum_{(p,q)=0}^{\infty} (p!q!)^{-1}(r_1! \cdots r_n!)(s_1! \cdots s_n!) A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q} \{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}_{j_1\cdots j_p}\}\{\mathbf{P}\} \tag{2.210}$$

ou seja, pode ser reescrito utilizando a relação (2.204),

$$\begin{aligned} \{\psi\} = \underline{\Lambda}\{\mathbf{P}\} &= \sum_{(p,q)=0}^{\infty} (p!q!)^{-1}(r_1! \cdots r_n!)(s_1! \cdots s_n!) A^{j_1\ldots j_p}_{k_1\ldots k_q} \delta_{p,0} \delta^{0\ldots 0}_{r_1\ldots r_n} \{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}\} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (q!)^{-1}(s_1! \cdots s_n!) A_{k_1\ldots k_q} \{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}\} \end{aligned} \tag{2.211}$$

que é um resultado semelhante ao que foi obtido para a subálgebra $G_n(\mathbf{P})$. Nesse caso, $\underline{\mathrm{L}}_n\{\mathbf{P}\}$ não pode ser considerada uma subálgebra pelos motivos mencionados anteriormente que tornam $\underline{\mathrm{L}}_n$ uma quasi-álgebra.

Um resultado importante obtém-se ao aplicar sobre um elemento do conjunto

$\underline{\mathrm{L}}_n\{\mathbf{P}\}$ um elemento de $\underline{\mathrm{L}}_n$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\underline{\Lambda}\{\psi\} &= \sum_{(a,b)=0}^{\infty} (a!b!)^{-1}(x_1!\cdots x_n!)(y_1!\cdots y_n!)A^{l_1\ldots l_a}_{t_1\ldots t_b}\{\mathbf{P}^{t_1\ldots t_b}_{l_1\ldots l_a}\}\{\psi\} \\
&= \sum_{(a,b,q)=0}^{\infty} (a!b!q!)^{-1}(x_1!\cdots x_n!)(y_1!\cdots y_n!)(s_1!\cdots s_n!)A^{l_1\ldots l_a}_{t_1\ldots t_b}A_{k_1\ldots k_q}\{\mathbf{P}^{t_1\ldots t_b}_{l_1\ldots l_a}\}\{\mathbf{P}^{k_1\ldots k_q}\} \\
&= \sum_{(a,b,q)=0}^{\infty} (a!b!q!)^{-1}(x_1!\cdots x_n!)(y_1!\cdots y_n!)(s_1!\cdots s_n!)A^{l_1\ldots l_a}_{t_1\ldots t_b}A_{k_1\ldots k_q}\delta_{a,q}\delta^{s_1\ldots s_n}_{x_1\ldots x_n}\{\mathbf{P}^{t_1\ldots t_b}\} \\
&= \sum_{(a,b)=0}^{\infty} (a!)^{-2}(b!)^{-1}(x_1!\cdots x_n!)^2(y_1!\cdots y_n!)A^{l_1\ldots l_a}_{t_1\ldots t_b}A_{k_1\ldots k_a}\{\mathbf{P}^{t_1\ldots t_b}\} \qquad (2.212)
\end{aligned}$$

demonstrando que $\underline{\Lambda}\{\psi\} \in \underline{\mathrm{L}}_n\{\mathbf{P}\}$. Então $\underline{\Lambda}$, com os elementos matriciais $A^{l_1\ldots l_a}_{t_1\ldots t_b}$, é um operador linear atuando sobre $\{\psi\}$ do espaço vetorial $\underline{\mathrm{L}}_n\{\mathbf{P}\}$, onde estes operadores estão escritos com relação à base $\{\mathbf{P}^{t_1\ldots t_b}\}$.

Segundo Schönberg (1957b), $\underline{\mathrm{L}}_n$ quando definida sobre o corpo dos complexos é análoga ao formalismo da segunda quantização para os bósons, onde os geradores do tipo $\{\mathbf{I}_j\}$ correspondem aos operadores aniquilação enquanto que os geradores do tipo $\{\mathbf{I}^j\}$ aos operadores de criação. O projetor dado por $\{\mathbf{P}\}$ é o vetor de estado que descreve, para o campo de bósons, o estado de vácuo, e os elementos $\{\mathbf{N}_j\} = \{\mathbf{I}^j\}\{\mathbf{I}_j\}$ são análogos ao operador número para esse mesmo campo. Quando $n \to \infty$, a algebra geométrica dada por $\underline{\mathrm{L}}_\infty$ possui uma relação com o espaço de Hilbert, onde os $\{\psi\}$ correspondem a funções de onda do campo de bósons quantizado.

3 Teoria Quântica de Campos e a Álgebra de Schönberg

Neste capítulo são apresentadas as principais equações de campo contextualizando-as para a álgebra de Schönberg. Em termos cronológicos, primeiramente Schönberg (1957a, 1957b) demonstra que a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) possui uma álgebra geométrica afim $D_{n,p}$ escrita em termos dos seus geradores e projetores de G_n. Posteriormente, no intuito de estudar a equação de Dirac no espaço de fase generalizado, Bohm e Hiley (1983) demonstram que a álgebra de Clifford possui relação com os operadores fermiônicos de Schönberg. Nesse sentido, desconsiderando a cronologia do tema, é apresentado primeiramente o caso da álgebra de Dirac[1] e logo depois de DKP, priorizando assim o aspecto didático, pois torna mais clara a forma como as álgebras de Clifford e de DKP se relacionam.

A seguir é apresentada uma proposta original de construção da álgebra associada ao campo de Fierz-Pauli-Gupta (FPG), correspondente às partículas de spin 3/2, considerando a estrutura matemática dos geradores anticomutativos da álgebra de Schönberg. Nessa construção são estabelecidos como elementos fundamentais a álgebra de Clifford (Dirac) e a complexação da álgebra de DKP (para partículas de spin 0 e 1). Com isso, a álgebra FPG passa a ser uma extensão complexa da álgebra de Schönberg, o que denota maior generalidade quando comparada sua estrutura com as de suas predecessoras, justamente por ser uma composição das mesmas.

3.1 Equação de Klein-Gordon-Fock

Em 1926, diferentes trabalhos foram realizados com intuito de encontrar uma versão relativística da equação de Schrödinger. Neste período, o austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961), o sueco Oskar Benjamin Klein (1894-1977), o alemão Walter Gordon (1893-1940) e o russo Vladimir Alexandrovich Fock (1893-1940) desenvolveram trabalhos independentes com o objetivo de determinar uma relação que envolvesse os aspectos quântico e relativístico das partículas. Destacam-se os artigos de Klein (1926), Gordon (1926), Fock (1926).

A equação de Schrödinger para o caso de uma parícula descrita pela mecânica quântica não-relativística é,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x},t) \tag{3.1}$$

[1] Subtende-se álgebra de Clifford.

onde tem-se que

$$\hat{E} = \left[\frac{1}{2m_0}\hat{\mathbf{p}}^2 + V(\mathbf{x})\right] \tag{3.2}$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \tag{3.3}$$

Um método de se encontrar uma equação para o caso relativístico é considerar uma partícula livre relativística, com massa de repouso m_0 e spin nulo. A energia e o momentum são dados por

$$E^2 = m_0^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2 \tag{3.4}$$

onde c é a velocidade da luz. Se as partículas podem ser descritas em termos de funções de onda escalar $\psi(\mathbf{x}, t)$, uma transformação a partir da mecânica quântica não-relativística, tal que,

$$E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{p} \to \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \tag{3.5}$$

permite determinar a denominada equação de Klein-Fock-Gordon (mais conhecida como Klein-Gordon),

$$(\Box - k^2)\psi(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{3.6}$$

onde tem-se a constante $k = mc/\hbar$, o operador $\Box = \nabla^2 - \partial^2/\partial(ct)^2$ e o ente $\psi(\mathbf{x}, t)$ que é uma função de onda que descreve uma partícula. Naturalmente foram adotados os quadrivetores de posição,

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ct) \quad ; \quad x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, -ct) \tag{3.7}$$

com isso tem-se o tensor métrico $g_{\mu\nu} = diag(1, 1, 1, -1)$ e o operador diferencial,

$$\partial_\mu = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(ct)}\right) \tag{3.8}$$

$$\partial^\mu = (\partial^1, \partial^2, \partial^3, \partial^4) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\nabla, -\frac{\partial}{\partial(ct)}\right) \tag{3.9}$$

onde (3.6), em termos de entes quadrivetoriais, é reescrita como,

$$(\partial_\mu\partial^\mu - k^2)\psi = 0, \tag{3.10}$$

em que ψ é função do quadrivetor posição, e o índice $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Assim, (3.10) é uma equação associada a uma lei *maximam* da física, a conservação de energia. Com isso, qualquer equação de campo deve satisfazer a equação de Klein-Gordon-Fock (KGF).

A relação (3.6) é uma equação de 2ª ordem para partículas de spin nulo. É possível, no entanto, encontrar equações de 1ª ordem, o que facilita a obtenção de soluções; além disso, envolvendo diferentes álgebras matriciais e tipos de campo. É o caso da equação de Dirac (1928) para spin 1/2, dentre outros trabalhos posteriores a KGF.

3.2 Equação de Dirac

A equação de Dirac (1928) para o elétron livre é dada por

$$\begin{aligned}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0 c)\psi = 0 \\ (\gamma^\mu\partial_\mu + k)\psi = 0\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde o índice $\mu = 1, 2, 3, 4$, k é uma constante associada à massa e ψ é uma função de onda com componentes spinoriais,

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Com as clássicas matrizes,

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}^j \\ \boldsymbol{\sigma}^j & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix}\hat{\mathbf{1}} & 0 \\ 0 & -\hat{\mathbf{1}}\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

obtém-se as matrizes de Dirac $\gamma^\mu = (\gamma^j, \gamma^4)$ dadas por:

$$\gamma^j = -i\hat{\beta}\hat{\alpha}^j = \begin{pmatrix}0 & -i\boldsymbol{\sigma}^j \\ i\boldsymbol{\sigma}^j & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^4 = \hat{\beta} \tag{3.14}$$

sendo que $\boldsymbol{\sigma}^j (j = 1, 2, 3)$ são as matrizes de Pauli e $\hat{\mathbf{1}} = \hat{\mathbf{1}}_{2x2}$ é a identidade. As matrizes de Dirac γ^μ obedecem às seguintes relações,

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu} \tag{3.15}$$

É importante, para utilizações futuras, definir nessa oportunidade a matriz,

$$\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \tag{3.16}$$

onde demonstra-se que,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix}0 & \hat{\mathbf{1}} \\ \hat{\mathbf{1}} & 0\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

e consequentemente implica na anticomutatividade,

$$[\gamma^\mu, \gamma^5]_+ = 0 \tag{3.18}$$

que pode ser verificada rapidamente através das matrizes (3.14) e (3.17).

Como discutido na definição 35, utilizando a álgebra de Schönberg G_n com as regras (2.116)-(2.118), as matrizes de Dirac passam a ser escritas em termos dos geradores de Schönberg[2],

$$\gamma_\mu^\pm = (\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu) \tag{3.19}$$

onde os entes $\gamma_\mu^\pm$, denominados geradores da álgebra de Dirac, obedecem às relações

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu^\pm, \gamma_\nu^\pm]_+ &= \pm 2 g_{\mu\nu} \mathbf{1}_{G_n} \\ [\gamma_\mu^+, \gamma_\nu^-]_+ &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

e definem assim as subálgebras de Clifford de G_n, com métricas $\pm g_{\mu\nu}$ pseudo-euclidianas.

No contexto analítico do espaço de fase relativístico, a álgebra de Dirac, escrita em termos dos geradores de Schönberg, aparece inicialmente de forma implícita nos trabalhos de Bohm e Hiley (1983), explícita nos desenvolvimentos de Holland (1986) e posteriormente são rediscutidas por Fernandes (1991).

3.3 Equação de Duffin-Kemmer-Petiau

A determinação da equação Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) advém de diversos trabalhos independentes (PETIAU, 1936; DUFFIN, 1938; KEMMER, 1939) que, motivados pelos estudos realizados por Dirac (1928), demonstram a existência de uma equação de primeira ordem a partir da equação de Klein-Gordon-Fock (de 2ª ordem).

O primeiro a iniciar grande esforço nessa direção foi Louis de Broglie, cujo trabalho posteriormente teve continuidade com Petiau que, por conhecer a estrutura algébrica da equação de Dirac, determina uma álgebra de matrizes 16x16, hoje denominada de matrizes DKP. Ao mesmo tempo e sem conhecer os estudos anteriores, Kemmer (que somente obteve conhecimento das análises realizadas por outros pesquisadores após término da 2ª Guerra Mundial) demonstra que a equação de Proca (de 2ª ordem e para partículas de spin 1) pode ser escrita como um conjunto de equações de primeira ordem acopladas, motivando-o a fazer o mesmo com a equação KGF. Todavia, apesar de ter estabelecido algumas conjecturas sobre matrizes e respectivas equações usando a representatividade de partículas de spin 0 e 1, não obteve sucesso na determinação da sua estrutura algébrica matricial.

Posteriormente, em um seminário em Purdue dado por Kemmer, Duffin (que era um matemático) após conhecer os avanços realizados nas demonstrações anteriores, desenvolve uma estrutura matemática para a equação que fora intuída inicialmente por Proca e Kemmer, estabelecendo com isso as bases para uma teoria de campo para partículas de spins 0 e 1.

[2] A limitação relativa a valores de μ, ν é devido ao espaço de Minkowski sendo, como se sabe, a álgebra de abrangência mais geral.

3.3.1 Definições

Seja a equação de Klein-Gordon-Fock,

$$(\partial_\mu \partial^\mu - k^2)\psi = 0$$

onde ψ é a função de onda spinorial dependente do quadrivetor posição e $\mu = 1, 2, 3, 4$. Reescrevendo-a convenientemente como

$$\frac{1}{k} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi - k\psi = 0 \tag{3.21}$$

é possível definir um conjunto de equações de primeira ordem,

$$\frac{1}{k} \partial_\nu \psi \equiv -\psi_\nu \tag{3.22}$$

ou seja, a partir dessa definição surge um novo ente ψ_ν. Dessa forma a equação de KGF se torna

$$\partial^\nu \psi_\nu + k\psi = 0 \tag{3.23}$$

e com essa "parametrização" surge o conjunto de relações dadas por:

$$\partial^\mu \psi_\mu = -k\psi \ ; \qquad \psi_\mu = -\frac{1}{k} \partial_\mu \psi \ ; \tag{3.24}$$

$$\partial_\mu \psi^\mu = -k\psi \ ; \qquad \psi^\mu = -\frac{1}{k} \partial^\mu \psi \ ; \tag{3.25}$$

o que significa que a equação de 2ª ordem foi reduzida a um sistema de duas equações de primeira ordem. Vale ressaltar que as variáveis novas ψ_μ não possuem significado físico e, assim como a função de onda ψ, obedecem à equação de KGF.

O sistema associado às equações de 1ª ordem (3.24) é explicitamente,

$$\begin{aligned}
\partial_1 \psi + 0 + 0 + 0 + k\psi_1 &= 0, \\
0 + \partial_2 \psi + 0 + 0 + k\psi_2 &= 0, \\
0 + 0 + \partial_3 \psi + 0 + k\psi_3 &= 0, \\
0 + 0 + 0 + \partial_4 \psi + k\psi_4 &= 0, \\
\partial^1 \psi_1 + \partial^2 \psi_2 + \partial^3 \psi_3 + \partial^4 \psi_4 + k\psi &= 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

que, como pode ser notado, conduz a coeficientes matriciais 5x5. Com efeito, introduzindo a função de onda spinorial DKP com os elementos de matriz,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/k \ \ \partial_1 \psi \\ -1/k \ \ \partial_2 \psi \\ -1/k \ \ \partial_3 \psi \\ -1/k \ \ \partial_4 \psi \\ \psi \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

é possível escrever este sistema de equações 5x5 sob a forma de uma equação matricial, denominada equação de Duffin-Kemmer-Petiau, definida como:

$$(\beta^{\mu}\partial_{\mu} + k)\phi = 0 \tag{3.28}$$

onde as matrizes β_{μ} de DKP, são dadas por,

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

sendo facilmente demonstrável que são matrizes hermitianas.

As matrizes de DKP satisfazem uma relação fundamental dada por (DUFFIN, 1938),

$$\beta_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\lambda} + \beta_{\lambda}\beta_{\nu}\beta_{\mu} = g_{\mu\nu}\beta_{\lambda} + g_{\lambda\nu}\beta_{\mu} \tag{3.30}$$

onde o tensor métrico é dado por $g_{\mu\nu} = diag(1, 1, 1, -1)$ e $(\mu, \nu, \lambda) = 1, 2, 3, 4$. Uma consequência dessa expressão é o resultado a seguir (KEMMER, 1939),

$$\begin{aligned} &\beta_{\mu}^3 = \beta_{\mu} && \\ &\beta_{\mu}^2\beta_{\nu}^2 = \beta_{\nu}^2\beta_{\mu}^2 && \\ &\beta_{\mu}\beta_{\nu}^2 + \beta_{\nu}^2\beta_{\mu} = \beta_{\mu} && (\mu \neq \nu) \\ &\beta_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\mu} = 0 && (\mu \neq \nu) \\ &\beta_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\lambda} + \beta_{\lambda}\beta_{\nu}\beta_{\mu} = 0 && (\mu \neq \nu \neq \lambda) \end{aligned} \tag{3.31}$$

É importante definir as seguintes matrizes,

$$\eta_{\mu} = 2\beta_{\mu}^2 - 1 \tag{3.32}$$

$$\eta_5 = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 \tag{3.33}$$

sendo válidas as relações (KEMMER, 1939)[3],

$$\eta_\mu^2 = 1 \tag{3.34}$$

$$\eta_\mu \eta_\nu = \eta_\nu \eta_\mu \tag{3.35}$$

$$\beta_\mu \eta_\nu = -\eta_\nu \beta_\mu \qquad (\mu \neq \nu) \tag{3.36}$$

$$\beta_\mu = \eta_\mu \beta_\mu = \beta_\mu \eta_\mu \qquad (sem\ somatório) \tag{3.37}$$

A equação matricial dada por (3.30) define a denominada álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau, onde os entes β_μ são ditos geradores da álgebra de DKP. É importante salientar que a álgebra das matrizes β_μ possui três representações irredutíveis, com (0,5,10)-dimensões (TAKAHASHI, 1969). Por esse motivo, essas matrizes têm dimensão 16x16 (com propriedades hermitianas) e a função de onda ψ possui 16 componentes. Com isso há $1^2 + 5^2 + 10^2 = 16 \cdot 16 = 126$ matrizes independentes.

Consequentemente, a função ψ consiste de três campos irredutíveis: o primeiro é o caso trivial quando $\psi \equiv 0$, e os demais, para os campos de spins 0 e 1, correspondentes às representações de 5 e 10 dimensões respectivamente. Desta forma, a demonstração anterior foi realizada para campos de DKP com spin 0 e, assim, a equação de DKP com o conjunto de matrizes dado por (3.29) é um caso particular.

Para o caso de partículas de spin 1, um conjunto possível de matrizes de DKP é dado a seguir,

$$\beta_1 = \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & -1 \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & 0 & -1 & 0 & \vdots & & & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-1 & 0 & 0 & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0
\end{array}\right); \beta_2 = \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & 0 \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & -1 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & -1 & 0 & 0 & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 0 & 0 & -1 & \vdots & & & & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & & & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0
\end{array}\right);$$

$$\beta_3 = \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & 0 \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & -1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & -1 & 0 & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & -1 & 0 & 0 & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0
\end{array}\right); \beta_4 = \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & \vdots & & & & \vdots & -i & 0 & 0 & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 & -i & 0 & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & 0 & -i & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
i & 0 & 0 & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\
0 & i & 0 & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\
0 & 0 & i & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & 0
\end{array}\right).$$

[3] Neste artigo, em nota de rodapé, N. Kemmer expressa sua grande gratidão a W. Pauli, por ter sugerido que estudasse em detalhe a álgebra das matrizes β_μ e pela introdução da estrutura matemática que fora por ele utilizada neste trabalho.

3.3.2 Álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau

Os geradores da álgebra de DKP (3.30) podem ser escritos de forma conveniente em termos de índices p como,

$$\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)}\beta_\lambda^{(p)} + \beta_\lambda^{(p)}\beta_\nu^{(p)}\beta_\mu^{(p)} = g_{\mu\nu}\beta_\lambda^{(p)} + g_{\lambda\nu}\beta_\mu^{(p)} \tag{3.38}$$

Estes elementos $\beta_\mu^{(p)}$ podem ser definidos, de forma análoga ao que foi feito na álgebra de Dirac (3.19), seguindo a álgebra de Schönberg (1957b), em termos dos operadores de projeção $(\mathbf{\Pi}_p)$,

$$\beta_\mu^{(p)} = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) + g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p) \tag{3.39}$$

que, de acordo com a proposição 35, podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned}\beta_\mu^{(p)} &= (\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) + g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p)\\ &= (\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_p) + g_{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{I}^\nu),\end{aligned}$$

sendo que, é direta a demonstração que

$$\left[(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})\ ,\ \beta_\mu^{(p)}\right]_- = 0 \qquad \forall p,\ \ \mu = 1,2,3,4 \tag{3.40}$$

ou seja, o elemento $(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})$ da álgebra de DKP comuta com o seus geradores $\beta_\mu^{(p)}$; logo, é assim, a unidade dessa álgebra.

Definição 36. *Álgebra $\mathcal{D}_{n,p}$ (SCHÖNBERG, 1957b)*
Existe uma álgebra geométrica afim, denominada $\mathcal{D}_{n,p}$, cujos geradores são dados por,

$$\{(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_j)\ \ ,\ \ (\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p)\ \ ,\ \ (\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})\} \tag{3.41}$$

sendo a álgebra de DKP uma subálgebra de $\mathcal{D}_{n,p}$.

Definição 37. *A álgebra $\mathcal{D}_{n,p}$ se torna uma álgebra de DKP quando para a relação,*

$$g^{\mu\nu}\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)} = (n-p)(\mathbf{\Pi}_p) + (p+1)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) \tag{3.42}$$

é válida a condição, $p \neq \frac{n-1}{2}$; ou seja, quando os valores de n forem números pares, todas $\mathcal{D}_{n,p}$'s serão álgebras DKP irredutíveis. Reciprocamente, todas as álgebras DKP irredutíveis podem ser obtidas quando n for par (SCHÖNBERG, 1957b).

Definição 38. *Dados os geradores da álgebra $\mathcal{D}_{n,p}$, como estabelecido na equação (3.41) da definição 36, define-se que (SCHÖNBERG, 1957b),*

(i) $p = -1 \Rightarrow (\mathbf{\Pi}_{-1}) = 0$

(ii) $p = n \Rightarrow (\mathbf{\Pi}_{n+1}) = 0$

Uma classificação importante estabelecida por Schönberg (1957a,1957b) é quanto aos tipos de entes pertencentes à álgebra $\mathcal{D}_{n,p}$, quando $n = 4$. Então, nesse caso $p = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e tem-se

$\mathcal{D}_{4,0}$ dos entes escalares;

$\mathcal{D}_{4,1}$ dos entes vetoriais;

$\mathcal{D}_{4,2}$ dos entes pseudovetoriais;

$\mathcal{D}_{4,3}$ dos entes pseudoescalares;

$\mathcal{D}_{4,4}$, uma álgebra trivial;

$\mathcal{D}_{4,-1}$, uma álgebra trivial DKP, de entes multiescalares de $(\mathbf{P})$.

A partir dos resultados até então apresentados, é necessário estabelecer uma importante proposição para os geradores DKP associados às métricas do espaço G_n, como realizado para o caso da álgebra de Clifford (ver definição 35).

Proposição 36. *Sejam as subálgebras métricas da álgebra de spin G_n, com tensores métricos positivos e negativos $\pm g_{\mu\nu}$. A relação fundamental da álgebra de DKP, para as respectivas subálgebras é dada por,*

$$\beta_\mu^{(p)\pm}\beta_\nu^{(p)\pm}\beta_\lambda^{(p)\pm} + \beta_\lambda^{(p)\pm}\beta_\nu^{(p)\pm}\beta_\mu^{(p)\pm} = \pm(g_{\mu\nu}\beta_\lambda^{(p)} + g_{\lambda\nu}\beta_\mu^{(p)}) \tag{3.43}$$

onde os seus geradores são definidos como,

$$\beta_\mu^{(p)\pm} = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p) \tag{3.44}$$

sendo que,

$$\Big[(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})\ ,\ \beta_\mu^{(p)\pm}\Big]_- = 0 \quad , \quad \forall p = -1, 0, 1, 2, ..., n;\ \ \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{3.45}$$

implica "$(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})$" um idempotente nas respectivas álgebras de DKP.

3.4 Equação de Fiez-Pauli-Gupta

3.4.1 Definições

Analogamente ao caso de DKP na relação (3.28), a equação de Fiez-Pauli-Gupta (FPG) é definida através de uma equação de 1ª ordem (TAKAHASHI, 1969),

$$(\alpha^\mu\partial_\mu + k)\phi = 0 \tag{3.46}$$

onde $\phi(x)$ é uma função de onda de FPG contendo 16 componentes e as matrizes α_μ, que possuem dimensão 16x16, são denominadas matrizes de FPG e satisfazem a relação fundamental (TAKAHASHI, 1969)

$$\sum_{(P)}(\alpha_\mu\alpha_\nu - g_{\mu\nu})\alpha_\lambda\alpha_\rho = 0 \tag{3.47}$$

onde o sub-índice (P) significa o somatório de todas as permutações possíveis sobre os índices matriciais μ, ν, λ e ϑ. De acordo com os trabalhos de Fierz e Pauli (1939), o campo corresponde a partículas de spin 3/2.

Dentre o conjunto dos α_μ que possam obedecer à relação (3.47), o caso clássico de matrizes FPG (GUPTA, 1952; GUPTA, 1954) é dada como:

$$\alpha_1 = \left(\begin{array}{cccccc|cc|cccccc|cc}
&&&&&&&& \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{3\sqrt{2}} & \cdot \\
&&&&&&&& \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \frac{i}{6} \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{6} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{3\sqrt{2}} \\ \hline
&&&&&&&& \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \frac{i}{2} \\
&&&&&&&& \cdot & \frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \cdot \\ \hline
\cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{3\sqrt{2}} & \cdot &&&&&&&& \\
-\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \frac{i}{6} &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & -i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & -i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{6} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{3\sqrt{2}} &&&&&&&& \\ \hline
\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{2} &&&&&&&& \\
\cdot & \frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & \cdot &&&&&&&&
\end{array}\right); \alpha_2 = \left(\begin{array}{cccccc|cc|cccccc|cc}
&&&&&&&& \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \cdot \\
&&&&&&&& \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{6} \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{6} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \hline
&&&&&&&& \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2} \\
&&&&&&&& \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \cdot \\ \hline
\cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \cdot &&&&&&&& \\
-\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{6} &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{6} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3\sqrt{2}} &&&&&&&& \\ \hline
\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} &&&&&&&& \\
\cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \cdot &&&&&&&&
\end{array}\right);$$

$$\alpha_3 = \left(\begin{array}{cccccc|cc|cccccc|cc}
&&&&&&&& i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{6} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{3\sqrt{2}} \\
&&&&&&&& \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{3\sqrt{2}} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \frac{i}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{6} \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -i & \cdot & \cdot \\ \hline
&&&&&&&& \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \frac{i}{2} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{2} \\ \hline
-i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \frac{i}{2} & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{6} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{3\sqrt{2}} &&&&&&&& \\
\cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{i}{3\sqrt{2}} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{6} &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -i & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\ \hline
\cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{i}{2} & \cdot & \cdot & \frac{i}{2} &&&&&&&&
\end{array}\right); \alpha_4 = \left(\begin{array}{cccccc|cc|cccccc|cc}
&&&&&&&& -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{6} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\
&&&&&&&& \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \frac{1}{6} \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \hline
&&&&&&&& \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \\
&&&&&&&& \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} \\ \hline
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \frac{1}{6} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3\sqrt{2}} &&&&&&&& \\
\cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{6} &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot &&&&&&&& \\ \hline
\cdot & \frac{1}{2} & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot &&&&&&&& \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} &&&&&&&&
\end{array}\right).$$

onde os pontos ou blocos em branco representam valores nulos.

Um aspecto importante sobre as matrizes de FPG é sua relação com aquelas que definem as equações de Dirac e de DKP, demonstrando que suas estruturas algébricas estão intimamente correlacionadas. De fato, baseando-se na teoria de Broglie (1943) para partículas de spin arbitrário, os entes α_μ podem ser escritos em termos das matrizes de

Dirac (MARKOV; MARKOVA; BONDARENKO, 2017) como,

$$\alpha_\mu = \gamma_\mu \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \gamma_\mu \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \gamma_\mu \tag{3.48}$$

ou seja, é um produto tensorial entre as permutações das matrizes γ_μ e a identidade $\mathbf{I}_{2\times 2}$. Todavia, a relação fundamental que relaciona as matrizes de Dirac e de DKP é (TAKAHASHI, 1969),

$$\alpha_\mu = \gamma_\mu + i\beta_\mu, \tag{3.49}$$

cuja importância no contexto desse trabalho é clara, sendo a motivação para o desenvolvimento ora realizado, dentro de um projeto que busca determinar a teoria de campos no espaço de fase generalizado.

A partir das definições e resultados encontrados até o momento, torna-se necessário apresentar as principais propriedades das matrizes de FPG (TAKAHASHI, 1969), a saber,

$$\alpha_\mu^4 - \alpha_\mu^2 = 0, \qquad (\textit{sem somatório}) \tag{3.50}$$

$$\alpha_4(\alpha_4^2 - 1) = 0, \tag{3.51}$$

$$[\gamma_\mu, \beta_\nu]_+ = 0. \tag{3.52}$$

3.4.2 Álgebra de Fierz-Pauli-Gupta

Um procedimento ainda não realizado é verificar como a álgebra de Schönberg pode ser estendida para o campo associado a partículas de spin 3/2. Com esse objetivo, propomos neste trabalho uma metodologia semelhante àquela encontrada nos artigos de Schönberg (1956, 1957a, 1957b) e aplicada por Bohm e Hiley (1983), Holland (1986), Fernandes e Vianna (1999), aos campos de Dirac e DKP. Assim, contextualizaremos a álgebra de FPG em uma estrutura matemática em que esteja implícita a álgebra G_n.

Sejam os geradores da álgebra de FPG (3.47) escritos considerando o índice p, a partir da equação matricial dada pela definição (3.47),

$$\sum_{(permut.)} (\alpha_\mu^{(p)}\alpha_\nu^{(p)} - g_{\mu\nu})\alpha_\lambda^{(p)}\alpha_\rho^{(p)} = 0 \tag{3.53}$$

Assim, a relação fundamental (3.49) também pode ser expressa, considerando os índices p como,

$$\alpha_\mu^{(p)} = \gamma_\mu + i\beta_\mu^{(p)} \tag{3.54}$$

que, por correlacionar os geradores das álgebras de Dirac (γ_μ) e de DKP ($\beta_\mu^{(p)}$), traduz uma forte motivação para estabelecer a estrutura matemática algébrica desejada para o caso de FPG.

Relembrando que as álgebras de Dirac (3.19) e de DKP (3.44), em termos dos geradores de Schönberg, são escritas de uma forma geral, como:

$$\gamma_\mu^\pm = (\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu), \tag{3.55}$$

$$\beta_\mu^{(p)\pm} = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p), \tag{3.56}$$

as relações (3.53) e (3.54) podem ser generalizadas considerando a indexação p e as possíveis métricas do espaço G_n,

$$\sum_{(permut.)} (\alpha_\tau^{(p)\pm}\alpha_\theta^{(p)\pm} - g_{\tau\theta})\alpha_\lambda^{(p)\pm}\alpha_\rho^{(p)\pm} = 0 \tag{3.57}$$

$$\alpha_\mu^{(p)\pm} = \gamma_\mu^\pm + i\beta_\mu^{(p)\pm} \tag{3.58}$$

Substituindo as relações (3.55) e (3.56) explicitamente em (3.58), resulta em,

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu^{(p)\pm} &= [(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)] + i[(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p)] \\
&= (\mathbf{I}_\mu) + i(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}[(\mathbf{I}^\nu) + i(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p)] \\
\therefore \alpha_\mu^{(p)\pm} &= [\mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_p)](\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)[\mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_p)]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

onde tem-se que $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{G_n}$. Definindo um *operador projeção estrela*[4] tal que,

$$(\mathbf{\Pi}_p^\star) = \mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_p) \tag{3.60}$$

que é análogo ao projetor $(\mathbf{\Pi}_p)$ mas complexado, a expressão (3.59) pode ser escrita como

$$\alpha_\mu^{(p)\pm} = (\mathbf{\Pi}_p^\star)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p^\star), \tag{3.61}$$

denotando uma semelhança em relação à definição (3.55). Dessa maneira, $(\mathbf{\Pi}_p^\star)$ está para a álgebra de FPG, assim como $(\mathbf{\Pi}_p)$ para a álgebra DKP.

Como realizado nas proposições 34, 35 e definição 38, é importante determinar as principais propriedades do operador projeção complexado, considerando as definições e demonstrações anteriormente discutidas para o operador $(\mathbf{\Pi}_p)$.

Proposição 37. *Dado um operador projetor $(\mathbf{\Pi}_p^\star)$ extensão complexa de $(\mathbf{\Pi}_p)$ em G_n, definido como,*

$$(\mathbf{\Pi}_p^\star) = \mathbf{1} + i(p!)^{-1}\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{P}_{j_1\cdots j_p}^{j_1\cdots j_p}) \tag{3.62}$$

as seguinte propriedades são verificadas:

(i) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(\mathbf{\Pi}_p^\star) = n\mathbf{1} + i\mathbf{1} \equiv (n;\mathbf{1})$ *(ortonormalidade complexa em G_n)*

[4] Sinônimos no texto: operador projeção complexado; projetor estrela; projetor complexado.

(ii) $(\mathbf{\Pi}_p^\star)(\mathbf{\Pi}_q^\star) = [\mathbf{1} - \delta_{p,q}(\mathbf{\Pi}_p)] + i[(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_q)]$ *(ortogonalidade complexa em G_n)*

$$(\mathbf{\Pi}_p^\star)(\mathbf{\Pi}_q^\star) = \begin{cases} \mathbf{1} - (\mathbf{\Pi}_p) + i2(\mathbf{\Pi}_p), & se\ p = q; \\ \mathbf{1} + i[(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_q)], & se\ p \neq q. \end{cases}$$

Ou seja, (i) quando aplicado sobre os elementos $\Gamma \in G_n$, considerando (2.181), resulta em um elemento real multiplicado pelo índice p e seu complexo;

Proposição 38. *Dado o conjunto de geradores anticomutativos da álgebra G_n, escritos como na proposição 29 e as definições da proposição 35, tem-se as seguintes propriedades fundamentais,*

$$(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p^\star) = (\mathbf{\Pi}_{p+1}^\star)(\mathbf{I}^j) \tag{3.63}$$
$$(\mathbf{\Pi}_p^\star)(\mathbf{I}_j) = (\mathbf{I}_j)(\mathbf{\Pi}_{p+1}^\star) \tag{3.64}$$

onde,

(i) $(\mathbf{\Pi}_{-1}^\star) = (\mathbf{\Pi}_{n+1}^\star) = \mathbf{1}$*;*

(ii) $(\mathbf{\Pi}_0^\star) = \mathbf{1} + i(\mathbf{P})$*;*

(iii) $(\mathbf{\Pi}_n^\star) = \mathbf{1} + i(\bar{\mathbf{P}})$*;*

(iv) $(\bar{\mathbf{\Pi}}_p^\star) = \mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_{n-p})$*.*

Com efeito, para a equação (3.63) tem-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p^\star) &= (\mathbf{I}^j)[\mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_p)] = (\mathbf{I}^j) + i(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p) \\ &= (\mathbf{I}^j) + i(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{I}^j) = [\mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_{p+1})](\mathbf{I}^j) \\ &\therefore (\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_p^\star) = (\mathbf{\Pi}_{p+1}^\star)(\mathbf{I}^j), \end{aligned}$$

e para a equação (3.64)

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Pi}_p^\star)(\mathbf{I}_j) &= [\mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_p)](\mathbf{I}_j) = (\mathbf{I}_j) + i(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_j) \\ &= (\mathbf{I}^j) + i(\mathbf{I}^j)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) = (\mathbf{I}^j)[\mathbf{1} + i(\mathbf{\Pi}_{p+1})] \\ &\therefore (\mathbf{\Pi}_p^\star)(\mathbf{I}_j) = (\mathbf{I}_j)(\mathbf{\Pi}_{p+1}^\star). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Um aspecto importante a ser ressaltado é quanto a relação dada por *(ii)*,

$$(\mathbf{\Pi}_0^\star) = \mathbf{1} + i(\mathbf{P}) = (\mathbf{P}^\star) \tag{3.66}$$

o que significa que se pode escrever,

$$(\mathbf{P}^\star) = \mathbf{1} + i(\bar{\mathbf{N}}_1) \cdots (\bar{\mathbf{N}}_n) = \mathbf{1} + i(\mathbf{I}_1)(\mathbf{I}^1) \cdots (\mathbf{I}_n)(\mathbf{I}^n) \tag{3.67}$$

sendo válidas as igualdades,

$$(\mathbf{I}_j)(\mathbf{P}^\star) = (\mathbf{I}_j) \tag{3.68}$$

$$(\mathbf{P}^\star)(\mathbf{I}^j) = (\mathbf{I}^j) \tag{3.69}$$

Concluindo a seção, é importante apontar que a estrutura matemática contida no operador projeção $(\mathbf{\Pi}_p)$ mais a definição de $(\mathbf{\Pi}_p^\star)$, com as proposições 37 e 38, são suficientes para explorar as implicações da extensão complexa das álgebras de Dirac e DKP, em conexão com a álgebra de FPG, via os geradores de Schönberg, assim como as características que essa maior abrangência matemática tem sobres os entes $\Gamma \in G_n$.

4 Teoria Quântica no Espaço de Fase

A formulação da Mecânica Quântica no Espaço de Fase surgiu com o trabalho de Wigner (1932) com intuito de corrigir a termodinâmica de equilíbrio[1]; para isso utilizou a ideia de função distribuição no espaço de fase[2] considerando aspectos do formalismo quântico[3]. Ou seja, demonstrou a viabilidade de tratar sistemas quânticos considerando uma linguagem desenvolvida na mecânica hamiltoniana clássica (álgebra matricial no espaço de fase), cuja dinâmica é fornecida por densidades de probabilidades no espaço de fase, possibilitando: análises instuitivas por analogias entre ambos os formalismos, verificações de transição quântica-clássica, e além disso, maior generalização teórica.

No entanto, o processo de estender conceitos quânticos às ideias clássicas, esbarra na dificuldade do princípio de incerteza de Heisenberg. Considerando as funções de onda $\psi(q)$ e os operadores do espaço de Hilbert, o comutador $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]_{-} = -i\hbar$ pode ser calculado como,

$$\int \psi^{\dagger}(q)\mathbf{q}\mathbf{p}\psi(q)dq - \int \psi^{\dagger}(p)\mathbf{p}\mathbf{q}\psi(q)dq = i\hbar \tag{4.1}$$

o que não ocorre quando se observa o espaço de fase clássico onde, para as variáveis q, p e uma função distribuição $\rho(q, p)$, fornece

$$\int\int qp\rho(q, p)dqdp - \int\int pq\rho(q, p)dqdp = 0 \tag{4.2}$$

Logo, para uma álgebra não-comutativa, uma integral típica no espaço de fase (4.2) é não-nula com incertezas da ordem de $\hbar$. Caso $\hbar \to 0$, se observa o limite clássico.

Por esta razão, a mecânica quântica pode ser considerada como uma deformação da álgebra do espaço de fase clássico (GROENEWOLD, 1946; MOYAL, 1949). Primeiramente, essa deformação pode ser relizada considerando o equivalente de Wigner de um operador quântico no espaço de fase, estabelecendo um análogo clássico deste operador. Então, a partir do produto deformado entre os equivalentes de Wigner, têm-se uma correlação com o respectivo produto no espaço de Hilbert. Com isso, as variáveis dinâmicas se tornam funções escalares no espaço de fase, o que inclusive facilita nos processos álgébricos, pois a exigência de ordenamento dos operadores na mecânica quântica usual desaparece.

Com essas mudanças, é necessário ponderar os aspectos cinemáticos da teoria segundo a estrutura matemática no espaço de fase. Nesse contexto, o estado do sistema é descrito pela matriz densidade (ou uma certa generalização desta) que, na formulação usual, era obtida a partir do vetor de estado. Assim, o vetor de estado é uma abstração

[1] Introduziu correções quânticas na fórmula de Boltzmann;
[2] Atualmente denominada *Função de Wigner*;
[3] Ex.: importante para resolver a superfluidez do Hélio (AMORIM, 2011).

construída posteriormente à matriz densidade (BOHM; HILEY, 1981), fazendo com que as funções de distribuição tenham um papel fundamental na descrição de sistemas quânticos. Com isso, a evolução temporal do estado do sistema deve ser obtida a partir da matriz densidade, obedecendo a uma equação de Liouville-von Neumann. Como afirmam Bohm e Hiley (1981), a matriz densidade apresenta as seguintes vantagens: (i) é definida independentemente dos fatores de fase (o que não ocorre com os vetores de estado); (ii) em relação a estados de mistura, pode representar propriedades termodinâmicas (pois o espaço de fase possui características estatísticas - vide motivação de Wigner para correção quântica da termodinâmica); (iii) facilita os processos de medidas de estados de mistura.

Por fim, Wigner (1932) demonstrou a possibilidade de novas perspectivas para um formalismo quântico no espaço de fase, motivando uma série de estudos para diferentes tipos de distribuição: de Glauber-Sudarshan (GLAUBER, 1963; SUDARSHAN, 1963; GLAUBER, 1965), de Husimi (HUSIMI, 1940) e de Kirkwood (KIRKWOOD, 1933), dentre outros. Contribuiu inclusive (limitando-se à Física) com áreas novas e outras até então existentes: Física Estatística (MOYAL, 1949), Óptica Quântica (GLAUBER, 1963; GLAUBER, 1965), Teoria das Colisões (LEE; SCULLY, 1983; P.; ZACHARIASEN, 1983), e mais recentemente, Física Não-Linear (BERRY, 1977; TAKAHASHI, 1989), dentre outras. Por esta razão, os estudos aqui desenvolvidos têm como fundamento o espaço de fase no formalismo de Wigner (1932), com as metodologias e contribuições encontradas nos artigos de Moyal (1949), Bohm e Hiley (1981), Holland (1986), Fernandes e Vianna (1999), para a determinação das equações de campo no espaço de fase generalizado.

4.1 Função Distribuição no Espaço de Fase

Seja dado um sistema $\mathcal{S}$ onde existe um conjunto básico de variáveis dinâmicas $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}\}$. Essas variáveis são tais que $\hat{\mathbf{r}}$ é o conjunto das observáveis ou operadores que comutam entre si, fornecendo uma representação completa das variáveis, enquanto $\{\hat{\mathbf{s}}\}$ representa o conjunto complementar. A relação entre essas variáveis obdecem,

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}]_{-} \neq 0$$

onde r e s correspondem aos autovalores dos respectivos operadores $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{s}}$. Apesar dessas grandezas serem não-comutativas, o que implica na impossibilidade de serem medidas simultâneamente, isso não impede que se proponha a existência de uma probabilidade bem definida (sem valores negativos ou divergentes), de forma que essas observáveis possuam determinado valor específico ou conjunto de valores. Além do mais, é possível definir um operador $\hat{\mathbf{G}}$ correspondente a funções $G(r, s)$ de observáveis não-comutativos, onde o valor esperado para este operador, em um determinado estado ψ, é dado pelo produto escalar $(\psi, \hat{\mathbf{G}}\psi)$.

Para determinar a função de distribuição do espaço de fase $F(r,s)$ é necessário obter a transformada inversa de Fourier da função característica de $\hat{\mathbf{M}}(\tau,\theta)$ associada a um determinado estado $\psi(q)$ de um dado sistema. Ou seja, analisar o operador (MOYAL, 1949),

$$\hat{\mathbf{M}}(\tau,\theta) = e^{i(\tau\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\mathbf{s}})} = \sum_n \frac{i^n}{n!}(\tau\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\mathbf{s}})^n \tag{4.3}$$

cuja função característica no estado $\psi(q)$ é dada pelo produto escalar,

$$M(\tau,\theta) = \int \psi^*(q)\hat{\mathbf{M}}(\tau,\theta)\psi(q)dq = (\psi, e^{i(\tau\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\mathbf{s}})}\psi) =< \psi|e^{i(\tau\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\mathbf{s}})}|\psi > \tag{4.4}$$

e dessa maneira, para obter a função de distribuição no espaço de fase basta calcular,

$$F(r,s) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int(\psi, e^{i(\tau\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\mathbf{s}})}\psi)e^{-i(\tau r+\theta s)}d\tau d\theta \tag{4.5}$$

que, se estendido para o caso de autovalores contínuos, têm-se o limite,

$$F(r_j,s_k) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}(\psi, e^{i(\tau\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\mathbf{s}})}\psi)e^{-i(\tau r_j+\theta s_k)}d\tau d\theta \tag{4.6}$$

onde (r_j,s_k) são autovalares discretos.

É importante destacar que a utilização de operadores e funções de operadores precisa respeitar a ordem em que atuam sobre um determinado ente. Assim, considerando os operadores $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ não-comutativos, é evidente que

$$e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}} = \sum_{m,n}\frac{\mathbf{X}^m\mathbf{Y}^n}{m!n!} \neq \sum_{m,n}\frac{\mathbf{Y}^n\mathbf{X}^m}{m!n!} = e^{\mathbf{Y}}e^{\mathbf{X}} \tag{4.7}$$

e, caso contrário, se estes operadores comutarem, então $e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{Y}}e^{\mathbf{X}} = e^{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}$.

De acordo com a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), dados os operadores $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ não-comutativos, se verifica a igualdade

$$e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{X}+\mathbf{Y}+\frac{1}{2}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]+\frac{1}{12}([\mathbf{X},[\mathbf{X},\mathbf{Y}]]+[\mathbf{Y},[\mathbf{Y},\mathbf{X}]])-\frac{1}{24}+[\mathbf{Y},[\mathbf{X},[\mathbf{X},\mathbf{Y}]]]+\ldots} \tag{4.8}$$

onde adotou-se [,] como uma operação de comutação. Considerando uma aproximação de 1ª ordem, então:

$$e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}e^{\frac{1}{2}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}. \tag{4.9}$$

Por outro lado, em uma série de trabalhos realizados por Kermack e McCrea (1931a, 1931b, 1932), onde descrevem soluções de equações diferenciais e integrais obtidas por E. T. Whittaker (1931), são apresentados um conjunto de teoremas que conectam o formalismo diferencial e integral com álgebras não-comutativas. No contexto aqui discutido, ressalta-se os resultados dos teoremas VII e VIII (KERMACK; MCCREA, 1931b). Podem ser entendidas como caso particular da expressão (4.8) e coincidem com a relação (4.9), ou seja,

$$e^{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} = e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}}e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]} \qquad (\textit{teorema VII}) \tag{4.10}$$

$$e^{\mathbf{Y}+\mathbf{X}} = e^{\mathbf{Y}}e^{\mathbf{X}}e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{Y},\mathbf{X}]} \qquad (\textit{teorema VIII}) \tag{4.11}$$

onde, igualando-se o segundo termo de ambas equações, resulta em,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}} &= e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{Y},\mathbf{X}]}e^{\mathbf{Y}}e^{\mathbf{X}} \\ e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}}e^{-\mathbf{X}} &= e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{Y},\mathbf{X}]}e^{\mathbf{Y}} \\ \therefore e^{\mathbf{Y}+[\mathbf{Y},\mathbf{X}]} &= e^{\mathbf{X}}e^{\mathbf{Y}}e^{-\mathbf{X}}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

que é o caso particular da expressão generalizada de uma função de operadores,

$$f(\mathbf{Y}+[\mathbf{X},\mathbf{Y}]) = e^{\mathbf{X}}f(\mathbf{Y})e^{-\mathbf{X}}. \tag{4.13}$$

Um outro resultado importante que Kermack e McCrea (1932) demonstram a partir de uma transformação de variáveis de Whittaker, cujos parâmetros são tipicamente as coordenadas e os momenta canonicamente conjugados, refere-se à aplicação de operadores exponenciais com argumento diferencial sobre uma dada função. Ou seja,

$$\psi(x+h) = e^{h\frac{d}{dx}}\psi(x). \tag{4.14}$$

Para exemplificar, sejam uma função $\psi = \psi(q)$ e, por coveniência, a relação de comutação dada por $[p,q] = -1$[4], onde $p \equiv -\dfrac{d}{dq}$ e $(p,q) \equiv (X,Y)$ variáveis. Então,

$$\begin{aligned} e^{p+q}\psi(x) &= e^{-\frac{d}{dq}+q}\psi(q) \neq e^{-\frac{d}{dq}}[e^{q}\psi(q)] \\ &= e^{-\frac{1}{2}[p,q]}e^{p}e^{q}\psi(q) = e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{d}{dq}}[e^{q}\psi(q)] \\ &= e^{\frac{1}{2}}e^{q-1}\psi(q-1) \\ \therefore e^{-\frac{d}{dq}+q}\psi(q) &= e^{q-\frac{1}{2}}\psi(q-1) \end{aligned} \tag{4.15}$$

De forma complementar, devido ao resultado (4.13), segue

$$\begin{aligned} \psi(q-1) &= e^{p}\psi(q)e^{-p} \\ \psi(p-1) &= e^{-q}\psi(p)e^{q} \end{aligned}$$

Com as fórmulas e propriedades demonstradas previamente, é possível seguir com o procedimento para obter a função distribuição no espaço de fase $F(r,s)$ (4.5). Sejam "$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{p}$" e "$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{q}$", respectivamente as coordenadas e os momenta canonicamente conjugados. Dessa maneira, têm-se o comutador (ver (2.122) e (2.124)),

$$[\mathbf{p},\mathbf{q}]_- = -i\hbar \qquad \Rightarrow \qquad [i\mathbf{p},i\mathbf{q}]_- = i\hbar \tag{4.16}$$

[4] Essa expressão foi uma das primeiras relações de comutador utilizada por Dirac (1926).

que, segundo as relações de BCH e Whittaker-Kermack-McCrea,

$$e^{i\mathbf{p}+i\mathbf{q}} = e^{i\mathbf{p}}e^{i\mathbf{q}}e^{-\frac{1}{2}[i\mathbf{p},i\mathbf{q}]} \tag{4.17}$$

onde o operador dado por (4.3) pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{M}}(\tau,\theta) &= e^{i(\tau\mathbf{p}+\theta\mathbf{q})} = e^{i\tau\mathbf{p}}e^{i\theta\mathbf{q}}e^{-\frac{1}{2}[i\tau\mathbf{p},i\theta\mathbf{q}]}\\
&= e^{-\frac{1}{2}i\hbar\tau\theta}e^{i\tau\mathbf{p}}e^{i\theta\mathbf{q}}\\
\therefore\ \hat{\mathbf{M}}(\tau,\theta) &= e^{\frac{1}{2}i\hbar\tau\theta}e^{i\theta\mathbf{q}}e^{i\tau\mathbf{p}}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

que é a expressão obtida por Moyal (1949). Utilizando o caso particular (4.12) de (4.13), considerando (4.16), é possível encontrar:

$$e^{i\theta\mathbf{q}} = e^{-i\hbar\tau\theta}e^{i\tau\mathbf{p}}e^{i\theta\mathbf{q}}e^{-i\tau\mathbf{p}}. \tag{4.19}$$

Por conveniência, seja o comutador dado por $[\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}, i\theta\mathbf{q}]_- = \frac{1}{2}i\hbar\tau\theta$. Logo, é possível escrever (4.12) como:

$$e^{i\theta\mathbf{q}} = e^{-\frac{1}{2}i\hbar\tau\theta}e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}e^{i\theta\mathbf{q}}e^{-\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}} \tag{4.20}$$

que, quando substituído sobre o operador função característica (4.18), fornece[5]

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{M}}(\tau,\theta) &= e^{\frac{1}{2}i\hbar\tau\theta}\left(e^{-\frac{1}{2}i\hbar\tau\theta}e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}e^{i\theta\mathbf{q}}e^{-\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}\right)e^{i\tau\mathbf{p}}\\
\hat{\mathbf{M}}(\tau,\theta) &= e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}e^{i\theta\mathbf{q}}e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A partir das relações (4.14) e (4.21), e o par $\mathbf{p} \equiv -i\hbar\frac{d}{dq}$ e $\mathbf{q} \equiv q$ como de praxe, é possível determinar a função característica em um determinado estado $\psi(q)$, dada pela integral (4.4) como

$$\begin{aligned}
M(\tau,\theta) &=< \psi|e^{i(\tau\hat{\mathbf{r}}+\theta\hat{\mathbf{s}})}|\psi >=< \psi|e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}e^{i\theta\mathbf{q}}e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}|\psi >\\
&= \int e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}\psi^*(q)e^{i\theta\mathbf{q}}e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}\psi(q)dq\\
&= \int [e^{-\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}\psi(q)]^*e^{i\theta\mathbf{q}}[e^{\frac{1}{2}i\tau\mathbf{p}}\psi(q)]dq\\
&= \int [e^{-\frac{1}{2}i\tau(-i\hbar\frac{d}{dq})}\psi(q)]^*e^{i\theta\mathbf{q}}[e^{\frac{1}{2}i\tau(-i\hbar\frac{d}{dq})}\psi(q)]dq\\
&= \int [e^{-\frac{1}{2}\hbar\tau\frac{d}{dq}}\psi(q)]^*e^{i\theta\mathbf{q}}[e^{\frac{1}{2}\hbar\tau\frac{d}{dq}}\psi(q)]dq\\
\therefore\ M(\tau,\theta) &= \int \psi^*(q-\tfrac{1}{2}\hbar\tau)e^{i\theta q}\psi(q+\tfrac{1}{2}\hbar\tau)dq
\end{aligned} \tag{4.22}$$

que pode ser reescrito por conveniência como

$$M(\tau,\theta) = \int \psi^*(q'-\tfrac{1}{2}\hbar\tau)e^{i\theta q'}\psi(q'+\tfrac{1}{2}\hbar\tau)dq' \tag{4.23}$$

[5] Este resultado difere daquele obtido por Moyal (1949), onde a primeira exponencial é negativa. Nas diversas análises para determinar (4.21), foi fundamental o artigo de Kermack e McCrea (1932) onde é demonstrada a expressão (4.14).

e, relembrando a propriedade fundamental de filtragem,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}dk = \delta(x-x') \tag{4.24}$$

Com isso, a função distribuição no espaço de fase (4.5) pode ser determinada através do cálculo[6],

$$\begin{aligned}
F(p,q) &= \frac{1}{4\pi^2}\int\int(\psi, e^{i(\tau\mathbf{p}'+\theta\mathbf{q}')}\psi)e^{-i(\tau p+\theta q)}d\tau d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(q'-\tfrac{1}{2}\hbar\tau)e^{i\theta q'}\psi(q'+\tfrac{1}{2}\hbar\tau)e^{-i(\tau p+\theta q)}dq'd\tau d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(q'-\tfrac{1}{2}\hbar\tau)e^{-i\tau p}\psi(q'+\tfrac{1}{2}\hbar\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i\theta(q'-q)}d\theta\right)dq'd\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(q'-\tfrac{1}{2}\hbar\tau)e^{-i\tau p}\psi(q'+\tfrac{1}{2}\hbar\tau)\delta(q'-q)dq'd\tau \\
\therefore F(p,q) &= \frac{1}{2\pi}\int\psi^*(q-\tfrac{1}{2}\hbar\tau)e^{-i\tau p}\psi(q+\tfrac{1}{2}\hbar\tau)\;d\tau
\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde p, q são autovalores dos operadores $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Os resultados (4.18), (4.21), (4.22) e finalmente (4.25), foram apenas indicados por Moyal (1949). Apesar de (4.25) ter sido obtida primeiramente por Wigner (1932), não está escrita explicitamente no seu trabalho; todavia, está subentendida nas primeiras expressões integrais, para o caso geral de um sistema contendo n partículas, o que motiva escrever uma expressão análoga generalizando (4.25) como:

$$\begin{aligned}
F(p_1,...,p_n,q_1,...,q_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\cdots\int\psi^*(q_1-\tfrac{1}{2}\hbar\tau_1,...,q_n-\tfrac{1}{2}\hbar\tau_n)e^{-i(\tau_1p_1+...+\tau_np_n)} \\
\psi(q_1+\tfrac{1}{2}\hbar\tau_1,...,q_n+\tfrac{1}{2}\hbar\tau_n)\;d\tau_1\cdots d\tau_n
\end{aligned} \tag{4.26}$$

que é a função de distribuição no espaço de fase para um sistema contendo n partículas. No caso anterior (4.25) o que se tem é um espaço de fase bidimensional, enquanto que em (4.26) o espaço de fase é hiperdimensional (hipersuperfícies, hipervolumes etc). As distribuições (4.25) e (4.26) são denominadas *Funções de Wigner*.

4.2 Equação de Liouville-von Neumann

O estado macroscópico de sistemas quânticos é descrito pela matriz densidade,

$$\rho = \sum_i \omega_i \left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right|, \tag{4.27}$$

onde $\{|\psi_i(t)\rangle\}$ são os microestados do ensemble estatístico e $\omega_i = \frac{N_i}{N}$ é o peso estatístico para o estado quântico $|\psi_i(t)\rangle$. A matriz densidade é hermitiana ($\rho = \rho^\dagger$) e possui traço

[6] Limites de integração não explícitos devem ser considerados entre $-\infty$ a $+\infty$.

unitário ($Tr\rho = 1$). Além disso, o valor esperado para um operador $\mathbf{A}$, na formulação da mecânica estatística quântica, é dado por:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = Tr(\rho \mathbf{A}) \tag{4.28}$$

Uma das principais equações da mecânica quântica é aquela que trata da evolução temporal da matriz densidade, que pode ser deduzida a partir da equação de Schrödinger. É utilizada principalmente no problema de muitos corpos onde os procedimentos estatísticos auxiliam na determinação dos processos dinâmicos do sistema. Logo,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_i(t)\right\rangle = H(t)\left|\psi_i(t)\right\rangle, \tag{4.29}$$

sendo que $H = T + V$ (T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema). Considerando um estado puro, ou seja $\rho = \left|\psi_i(t)\right\rangle \left\langle\psi_i(t)\right|$,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) &= \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_i(t)\right\rangle\right)\left\langle\psi_i(t)\right| + \left|\psi_i(t)\right\rangle\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\psi_i(t)\right|\right) \\ &= H(t)\left|\psi_i(t)\right\rangle\left\langle\psi_i(t)\right| - \left|\psi_i(t)\right\rangle\left\langle\psi_i(t)\right| H(t) \\ \therefore\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) &= [H(t), \rho(t)] \end{aligned} \tag{4.30}$$

que é conhecida como a *Equação de Liouville-von Neumann*. É importante notar que, (4.30) está escrita na representação de Schrödinger e fornece a informação de como o estado evolui com o tempo.

Reescrevendo os entes na representação das coordenadas $\{|x\rangle\}$,

$$\begin{aligned} \rho(x', x) &= \langle x'|\,\rho\,|x\rangle = \rho^*(x, x') \\ \langle x'|\,H(t) &= H(x', t)\,\langle x'| \\ H(t)\,|x\rangle &= |x\rangle H(x, t) \end{aligned}$$

onde a última igualdade na matriz densidade advém da propriedade de hermeticidade e, para os operadores hamiltonianos, a dependência nas coordenadas ressaltam em qual ente (*bra* ou *ket*) o operador está sendo escrito/aplicado. Assim, (4.30) na representação das coordenadas será[7],

$$\begin{aligned} \langle x'|\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)\,|x\rangle &= \langle x'|\,H(t)\,|\psi_i(t)\rangle\,\langle\psi_i(t)|\,x\rangle - \langle x'\,|\psi_i(t)\rangle\,\langle\psi_i(t)|\,H(t)\,|x\rangle \\ &= H(x', t)\,\langle x'|\,\psi_i(t)\rangle\,\langle\psi_i(t)|\,x\rangle - \langle x'\,|\psi_i(t)\rangle\,\langle\psi_i(t)|\,x\rangle H(x, t) \\ &= H(x', t)\rho(x', x, t) - \rho(x', x, t)H(x, t) \\ \therefore\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(x', x, t) &= [H, \rho(x', x, t)] \end{aligned} \tag{4.31}$$

observando que o operador hamiltoniano deve ser escrito em termos de sua respectiva aplicação, à esquerda/direita dos vetores de posição, excluindo qualquer ambiguidade sobre sua atuação na matriz densidade.

[7] Adota-se as simbologias: comutador $[\ ,\ ]_- = [\ ,\ ]$ e anticomutador $[\ ,\ ]_+ = \{\ ,\ \}$.

4.3 Transformação de Wigner-Moyal

Ficou demonstrado que a função de Wigner dada por (4.25) é uma distribuição no espaço de fase, determinada pela transformada inversa de Fourier de uma função característica dada por (4.4). Sejam então as seguintes mudanças de variáveis ($\hbar = 1$)

$$q - \frac{1}{2}\tau = x' \quad , \quad q + \frac{1}{2}\tau = x \quad . \tag{4.32}$$

Assim, a função (4.25) pode ser reescrita como

$$F(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int \psi^*(x')\psi(x)e^{-i(x-x')p}d(x-x') \tag{4.33}$$

o que demonstra ser uma transformada inversa de Fourier da matriz densidade (para o estado puro),

$$\rho(x',x) = \psi_i^*(x')\psi_i(x). \tag{4.34}$$

A transformação $\psi(x) \to \rho(x)$ é uma mudança de estrutura matemática (com consequências teórico-experimental) do espaço de Hilbert para o espaço de fase, onde a equação de Liouville-von Neumann passa a ter um papel preponderante sobre a evolução temporal do sistema, em detrimento da equação de Schrödinger. Por outro lado, a transformação $\rho(x',x) \to F(p,q)$ é uma mudança de representação dentro do próprio espaço de fase.

Considerando as mudanças de variáveis (análogas a $q \equiv X$ e $\tau \equiv \eta$),

$$X = \frac{1}{2}(x+x') \quad , \quad \eta = x - x' \quad , \tag{4.35}$$

a expressão (4.33) torna-se,

$$F(X,P) = \frac{1}{2\pi}\int \rho\left(X - \frac{\eta}{2}, X + \frac{\eta}{2}\right)e^{-iP\eta}d\eta \tag{4.36}$$

que é chamada de *Transformada de Wigner-Moyal* de $\rho(x',x)$. Novamente, a transformação $\rho\left(X - \frac{\eta}{2}, X + \frac{\eta}{2}\right) \to F(X,P)$ é uma mudança de representação no espaço de fase, como fora em $\rho(x',x) \to F(p,q)$.

Seja a equação de Liouville-von Neumann (4.31) conjugada e a propriedade de hermiticidade da matriz densidade. Então [8],

$$\begin{aligned}
\left(i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x',x,t)\right)^* &= \left(H(x',t)\rho(x',x,t) - \rho(x',x,t)H(x,t)\right)^* \\
-i\frac{\partial}{\partial t}\rho^*(x',x,t) &= H(x',t)\rho^*(x',x,t) - \rho^*(x',x,t)H(x,t) \\
-i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,x',t) &= H(x',t)\rho(x,x',t) - \rho(x,x',t)H(x,t) \\
i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,x',t) &= \rho(x,x',t)H(x,t) - H(x',t)\rho(x,x',t) \\
\therefore i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,x',t) &= [H,\rho(x,x',t)]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

[8] Essa dedução foi realizada para que as relações, que serão obtidas a seguir, concordassem com aquelas escritas no artigo de Bohm e Hiley (1981).

onde deve ser respeitada a atuação do operador hamiltoniano nas variáveis de coordenadas da matriz densidade, sendo que,

$$H(x,t) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + V(x) \tag{4.38}$$

$$H(x',t) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2 x'} + V(x') \tag{4.39}$$

que substituindo na expressão (4.37),

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,x',t) = \left[-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2}{\partial^2 x'}\right) + V(x) - V(x')\right]\rho(x,x',t) \tag{4.40}$$

Utilizando as mudanças de variáveis (4.35), têm-se as derivadas de 1ª ordem,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial \eta}\\ \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned} \tag{4.41}$$

e de 2ª ordem,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\\ \therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= 2\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \eta}.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Uma segunda etapa é obter a diferença de energia potencial em (4.40), cujos termos expandidos em série de potências sobre η em torno de X, segundo as variáveis (4.35), são,

$$\begin{aligned}V\left(X+\frac{1}{2}\eta\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial X^n}V(X)\left(X+\frac{1}{2}\eta - X\right)^n\\ V\left(X+\frac{1}{2}\eta\right) &= V(X) + \frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial X}V(X) + \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial X^2}V(X) + \left(\frac{\eta}{2}\right)^3\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial X^3}V(X) +\\ &+ \left(\frac{\eta}{2}\right)^4\frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial X^4}V(X) + \left(\frac{\eta}{2}\right)^5\frac{1}{5!}\frac{\partial^5}{\partial X^5}V(X) + ...\end{aligned} \tag{4.43}$$

e de forma análoga,

$$\begin{aligned}V\left(X-\frac{1}{2}\eta\right) &= V(X) - \frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial X}V(X) + \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial X^2}V(X) - \left(\frac{\eta}{2}\right)^3\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial X^3}V(X) +\\ &+ \left(\frac{\eta}{2}\right)^4\frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial X^4}V(X) - \left(\frac{\eta}{2}\right)^5\frac{1}{5!}\frac{\partial^5}{\partial X^5}V(X) + ...\end{aligned} \tag{4.44}$$

Logo, a diferença das energias potenciais é dada por (BOHM; HILEY, 1981),

$$V\left(X+\frac{1}{2}\eta\right) - V\left(X-\frac{1}{2}\eta\right) = \eta\frac{\partial}{\partial X}V(X) + \left(\frac{\eta}{2}\right)^3\frac{2}{3!}\frac{\partial^3}{\partial X^3}V(X) + \left(\frac{\eta}{2}\right)^5\frac{2}{5!}\frac{\partial^5}{\partial X^5}V(X) + ... \tag{4.45}$$

onde numa aproximação de primeira ordem[9],

$$V\left(X+\frac{1}{2}\eta\right)-V\left(X-\frac{1}{2}\eta\right)\cong\eta\frac{\partial}{\partial X}V(X) \tag{4.46}$$

que é análoga à obtida pelo cálculo diferencial quando se considera um intervalo (não necessariamente infinitesimal) em torno de η, ou seja,

$$\frac{\partial V(X)}{\partial X}\cong\frac{V\left(X+\frac{1}{2}\eta\right)-V\left(X-\frac{1}{2}\eta\right)}{\left(X+\frac{1}{2}\eta\right)-\left(X-\frac{1}{2}\eta\right)}$$
$$\therefore V\left(X+\frac{1}{2}\eta\right)-V\left(X-\frac{1}{2}\eta\right)\cong\eta\frac{\partial}{\partial X}V(X) \tag{4.47}$$

Substituindo os resultados anteriormente obtidos na equação (4.40), têm-se,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(X,\eta,t)=\left[-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial X}V(X)\right]\rho(X,\eta,t) \tag{4.48}$$

cuja mudança de representação no espaço de fase $\rho(X,\eta)\to F(X,P)$ pode ser realizada utilizando a transformação de Wigner-Moyal (4.36), onde (a menos do fator constante),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right)e^{-iP\eta}d\eta=\frac{\partial}{\partial X}\left[\cancel{\rho e^{-iP\eta}}|_{-\infty}^{+\infty}+iP\int_{-\infty}^{+\infty}\rho e^{-iP\eta}d\eta\right]$$
$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right)e^{-iP\eta}d\eta=iP\frac{\partial}{\partial X}F(X,P) \tag{4.49}$$

em que o valor nulo do limite positivo do primeiro termo à direita está associado à não divergência da matriz densidade no infinito. Por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\eta\frac{\partial}{\partial X}V(X)\right)\rho e^{-iP\eta}d\eta=i\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial}{\partial P}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho e^{-iP\eta}d\eta$$
$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\eta\frac{\partial}{\partial X}V(X)\right)\rho e^{-iP\eta}d\eta=i\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial}{\partial P}F(X,P) \tag{4.50}$$

Então, a partir de (4.49) e (4.50) em (4.48) é determinada a equação da função distribuição $F(X,P)$ (BOHM; HILEY, 1981),

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{P}{m}\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial F}{\partial P}=0 \tag{4.51}$$

que é a equação de Liouville-von Neumann para a transformada de Wigner-Moyal $F(X,P)$ de $\rho(X,\eta)$, com forma análoga à equação de Liouville clássica.

Escrevendo a equação (4.40) em termos da expansão completa da série de potências (4.45) (BOHM; HILEY, 1981), encontra-se

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{P}{m}\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial F}{\partial P}+\frac{1}{2^2\cdot 3!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial X^3}\right)\frac{\partial^3 F}{\partial P^3}-\frac{1}{2^4\cdot 5!}\left(\frac{\partial^5 V}{\partial X^5}\right)\frac{\partial^5 F}{\partial P^5}+...=0 \tag{4.52}$$

[9] Observe que essa aproximação passa a ser exata nos casos da partícula livre e do oscilador harmônico.

Como afirmam Bohm e Hiley (1981), devido à expressão (4.52) conter derivadas de ordem superiores em F, um movimento não pode ser simplesmente interpretado a partir da substituição de pontos no espaço de fase (transformações canônicas), como no caso (4.51). A equação possui características típicas de processos de difusão, onde uma função local tende a se difundir numa dada região no espaço de fase. Todavia, equações de difusão possuem derivadas de ordem par associadas a processos irreversíveis. Na equação (4.52), as derivadas de ordem ímpar podem descrever sistemas de processos reversíveis, denominados *quasidifusão*.

Para entender a ideia da quasidifusão, seja o potencial escrito em termos da análise de Fourier como

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int V_\alpha e^{i\alpha X} d\alpha \\
V\left(X + \frac{\eta}{2}\right) - V\left(X - \frac{\eta}{2}\right) &= \int V_\alpha e^{i\alpha X}\left(e^{i\alpha\eta/2} - e^{i\alpha\eta/2}\right) d\alpha
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

onde, aplicando a transformação de Wigner-Moyal,

$$
\int V\left(X \pm \frac{\eta}{2}\right)\rho\left(X + \frac{\eta}{2}, X - \frac{\eta}{2}\right) e^{-iP\eta} d\eta = \int\int V_\alpha e^{i\alpha X} \rho e^{-i\left(P \mp \frac{\alpha}{2}\right)\eta} d\eta d\alpha \tag{4.54}
$$

que substituindo em (4.40), têm-se que,

$$
\frac{\partial F(X,P,t)}{\partial t} + \frac{P}{m}\frac{\partial F(X,P,t)}{\partial X} - i\int V_\alpha e^{i\alpha X}\left[F\left(X, P + \frac{\alpha}{2}, t\right) - F\left(X, P - \frac{\alpha}{2}, t\right)\right] d\alpha = 0 \tag{4.55}
$$

que demonstra uma relação, por um fator multiplicativo $V_\alpha e^{i\alpha X}$, entre $F(X,P,t)$ e $F(X, P \pm \alpha/2, t)$, cuja integral é calculada sobre funções discretizadas no espaço de fase. Com isso, a ideia clássica de continuidade do movimento no espaço de fase perde sentido, quando considerado o formalismo quântico no mesmo.

Em (4.54), considerando $P' = P - \alpha/2$ e $P'' = P + \alpha/2$, é possível escrever que

$$
\begin{aligned}
\int V\left(X + \frac{\eta}{2}\right)\rho e^{-iP\eta} d\eta &= \int\int V_{2(P-P')} e^{i2(P-P')X} \rho e^{-iP'\eta} d\eta(-2dP') \\
\int V\left(X - \frac{\eta}{2}\right)\rho e^{-iP\eta} d\eta &= \int\int V_{2(P''-P)} e^{i2(P''-P)X} \rho e^{-iP''\eta} d\eta(2dP'')
\end{aligned}
$$

mas, como (P', P'') são variáveis "mudas" e as integrais são calculadas separadamente, é possível expressar,

$$
L(P,P') = i\left(V_{2(P-P')} e^{i2(P-P')X} - V_{2(P'-P)} e^{i2(P'-P)X}\right) \tag{4.56}
$$

o que implica escrever a equação (4.55) na forma geral

$$
\frac{\partial F(X,P,t)}{\partial t} + \frac{P}{m}\frac{\partial F(X,P,t)}{\partial X} + \int L(P,P')F(X,P',t)dP' = 0 \tag{4.57}
$$

e, concisamente, tem-se a *equação de Liouville generalizada*

$$\frac{\partial}{\partial t}F + L_q F = 0 \tag{4.58}$$

onde L_q é chamado de *operador de Liouville generalizado*, dado por:

$$L_q = \frac{P}{m}\frac{\partial F(X,P,t)}{\partial X} + \int L(P,P')F(X,P',t)dP' \tag{4.59}$$

ficando evidente que, ao se comparar as equações (4.51), (4.52) e (4.57), as características de transformações locais estão associadas exclusivamente ao grupo de transformações canônicas (ponto-a-ponto), que podem ser identificadas inclusive pelas derivadas de primeira ordem enquanto que, para as transformações não-locais estão associadas matrizes $L(P,P')$ - estas operam sobre o espaço dos vetores $F(X,P)$. Assim, a mecânica quântica no espaço de fase possui um formalismo algébrico matricial irredutível.

4.4 Probabilidade Não-negativa no Espaço de Fase Generalizado

É importante destacar que a função de Wigner é real (consequência da matriz densidade ser hermitiana) mas não é definida positiva, característica esta que consitui um dos pontos do *dilema da positividade* de Wigner (CARTWRIGHT, 1976; O'CONNELL; WIGNER, 1981; BOHM; HILEY, 1981; AMORIM, 2011).

Suponha que, para os estados $|\psi\rangle$ e $|\zeta\rangle$, correspondam respectivamente as funções de Wigner $F_\psi(q,p)$ e $F_\zeta(q,p)$. Assim,

$$|\langle\psi|\zeta\rangle|^2 = \int F_\psi(q,p)F_\zeta(q,p)dqdp \geq 0. \tag{4.60}$$

Por conseguinte, o primeiro membro deve ser positivo ou nulo, dependendo da ortogonalidade entre os vetores de estado. No caso nulo, a integral é zero, todavia não é necessário que seu integrando também o seja. Logo, as funções de Wigner podem assumir valores positivos e negativos, de forma que haja uma correspondência da ortogonalidade entre o espaço de configuração e o espaço de fase. Ou seja, sendo a matriz densidade $\rho(x',x)$ definida positiva, não significa que sua transformada de Wigner-Moyal assume apenas valores positivos, pois a transformada inversa de Fourier de uma função positiva pode geralmente ter qualquer valor. Por esta razão, a função de Wigner é denominada de *distribuição de quase probabilidade.*

É evidente que Wigner (1932) expande o conceito algébrico matricial das distribuições no espaço de fase, onde a densidade de probabilidade passa a ter características mais gerais e a ideia da hermiticidade se torna um caso particular. Desta maneira, a mudança de representação dentro deste espaço, através da transformada de Wigner-Moyal, estabelece um formalismo matemático mais amplo na descrição probabilística de sistemas quânticos, tornando a matriz densidade hermitiana $\rho(x',x)$ um caso particular de uma matriz mais geral não-hermitiana. Com essa questão a resolver, Bohm e Hiley (1981) estabelecem algumas definições para obter uma análise probabilística usual, sem perder de vista as possíveis interpretações físicas da álgebra matricial expandida.

Seja o estado de mistura descrito pela matriz densidade,

$$\rho(x', x) = \sum_j p_j \psi_j^*(x')\psi_i(x) \quad , \quad \sum_i p_i = 1 \tag{4.61}$$

e a definição da chamada *matriz característica* (geralmente não-hermitiana),

$$\xi(x', x) = \sum_j (p_j)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi_j} \psi_j^*(x')\psi_j(x) \tag{4.62}$$

onde $e^{i\phi_j}$ é um fator de fase arbitrário, ditado pelo argumento ϕ_j. Em termos de notação de adjunção (conjugação e transposição),

$$\xi(x', x)^T = \xi(x, x') \quad , \quad \xi^\dagger = (\xi^*)^T \quad . \tag{4.63}$$

Seja a definição matricial,

$$\mathfrak{w}(x', x) = \int \xi^\dagger(x', x'')\xi(x'', x)dx'' \tag{4.64}$$

então,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w}(x', x) &= \int \xi^*(x'', x')\xi(x'', x)dx'' \\
&= \int \sum_{i,j} (p_i)^{\frac{1}{2}} (p_j)^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_j - \phi_i)} \left[\psi_i^*(x'')\psi_i(x')\right]^* \psi_j^*(x'')\psi_j(x)dx''.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Por sua vez, $(AB)^* = A^*B^*$ e $(AB)^T = B^T A^T$, logo $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ e $(A^\dagger)^\dagger = A$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w}^\dagger(x', x) &= \left[\left(\int \tilde{\xi}(x', x'')\xi(x'', x)dx''\right)\right]^\dagger \\
&= \int \tilde{\xi}(x'', x)\xi(x', x'')dx'' = \mathfrak{g}(x', x)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

que pode ser escrita considerando operações sobre a expressão (4.65),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w}^\dagger(x', x) &= \int \sum_{i,j} (p_i)^{\frac{1}{2}} (p_j)^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_i - \phi_j)} \left[\psi_j^*(x'')\psi_j(x)\right]^\dagger \left[\psi_i^*(x')\psi_i(x'')\right] dx'' \\
&= \sum_{i,j} (p_i)^{\frac{1}{2}} (p_j)^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_i - \phi_j)} \psi_i^*(x')\psi_j(x) \int \psi_j^*(x'')\psi_i(x'')dx'' \\
&= \sum_{i,j} (p_i)^{\frac{1}{2}} (p_j)^{\frac{1}{2}} e^{i(\phi_i - \phi_j)} \psi_i^*(x')\psi_j(x)\delta_{ij} \\
\therefore \mathfrak{w}^\dagger(x', x) &= \sum_j (p_j)\psi_j^*(x')\psi_j(x) = \mathfrak{g}(x', x).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Procedendo de forma análoga na expressão (4.65), determina-se que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w}(x', x) &= \sum_i (p_j)\psi_i^*(x')\psi_i(x) = \mathfrak{g}(x', x) \\
\therefore \mathfrak{w}(x', x) &= \mathfrak{w}^\dagger(x', x) = \rho(x', x)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

permitindo concluir que, apesar da matriz característica $\xi(x', x)$ ser não-hermitiana (caso geral), é possível construir a partir dela uma outra que seja hermitiana $\mathfrak{w}(x', x)$. Assim, a matriz densidade $\rho(x', x)$ pode ser determinada a partir da matriz característica, que se assemalha à "raiz quadrada" de $\rho(x', x)$. Vale ressaltar que a definição (4.62) foi limitada a um caso especial de conjuntos de estados onde, para torná-la ainda mais geral, é conveniente escrever como:

$$\xi(x', x) = \sum_{i,j} c_{ij} \psi_i^*(x')\psi_j(x), \tag{4.69}$$

sendo c_{ij} coeficientes arbitrários e complexos.

Bohm e Hiley (1981) propõem que, para determinar o valor esperado de um operador $\mathbf{A}$, basta calcular o traço

$$\langle \mathbf{A} \rangle = Tr\left[\xi^\dagger \left(\frac{\mathbf{A}\xi + \xi\mathbf{A}}{2}\right)\right] \tag{4.70}$$

que, na representação das coordenadas, torna-se:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \int\int \xi^*(x', x)\left[\frac{\mathbf{A}(x, \partial/\partial x) + \mathbf{A}^*(x', \partial/\partial x')}{2}\right]\xi(x', x)dxdx' \tag{4.71}$$

o que permite determinar,

$$\langle \mathbf{A} \rangle = Tr\left[\frac{(\xi^\dagger\xi + \xi\xi^\dagger)}{2}\mathbf{A}\right] \tag{4.72}$$

que, a partir da matriz característica (4.64), é possível definir:

$$\mathfrak{W} = \frac{(\xi^\dagger\xi + \xi\xi^\dagger)}{2} \tag{4.73}$$

denominada de *matriz estatística*. Então, (4.70) pode ser obtida por:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = Tr(\mathfrak{W}\mathbf{A}) \equiv Tr(\rho\mathbf{A}) \tag{4.74}$$

em que o último membro é consequência do resultado (4.68), onde há uma equivalência formal entre as distribuições.

É interessante observar que, apesar das matrizes características ξ e $\xi^\dagger$ serem uma extensão não-hermitiana da matriz densidade ρ, ambas satisfazem à equação (4.31) e, consequentemente, ocorre o mesmo com a composição entre as mesmas dada por $\mathfrak{w}(x', x)$ e $\mathfrak{W}(x', x)$. Desta forma, a transformada de Wigner-Moyal da matriz $\mathfrak{W}(x', x)$ satisfaz à equação de Liouville generalizada.

O fato da matriz estatística ter apenas autovalores não-negativos está associado à definição do integrando em (4.64), onde a matriz característica pode sempre ser escrita como:

$$\xi = HU \quad ou \quad \xi = U'H' \tag{4.75}$$

onde H, H' são hermitianos e U, U' são unitários. Com isso,

$$\xi^\dagger = U^{-1}H \implies \xi\xi^\dagger = H^2$$
$$\xi^\dagger = H'U'^{-1} \implies \xi^\dagger\xi = (H')^2$$

demonstrando que haverá sempre autovalores não-negativos (de cada expressão acima ou da combinação delas), o que é análogo à matriz densidade na mecânica quântica usual. Ou seja, a matriz densidade está para o formalismo quântico ordinário assim como a matriz estatística está para o formalismo quântico no espaço de fase generalizado.

A equivalência formal entre $\mathfrak{W}$ e ρ em (4.74) induz a necessidade de se determinar o fator de normalização N, fornecido por

$$N = \int\int \mathfrak{W}(x', x)dxdx' = \int\int \xi^*(x', x)\xi(x', x)dxdx' \tag{4.76}$$

e, aplicando a transformação de Wigner-Moyal,

$$N = \int\int F^*(X, P)F(X, P)dXdP, \tag{4.77}$$

sugerindo que F^*F representa de fato uma densidade de probabilidade não-negativa no espaço de fase. Com essa relação, é necessário analisar o caso do valor esperado de um típico operador hermitiano $\mathbf{O}(x, \partial/\partial x)$, para verificar a consistência da interpretação nesse formalismo. Bohm e Hiley (1981) afirmam que, tomando-se $\mathbf{O} = x$ e $\mathbf{O} = p$ a equação (4.73) fornece tipicamente

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \int\int F^*(X, P)\mathbf{O}(X, P)F(X, P)dXdP \tag{4.78}$$

mas, para ordens superiores em X e P, este resultado não é verificado ou se torna honerosa sua demonstração. Um caso simples de se analisar é o da energia potencial, escrita como uma soma discreta $V(x) = \sum_k V_k e^{ikx}$. Seu valor esperado pode ser calculado considerando uma mudança de variáveis,

$$e^{ikx}\xi(x', x) = e^{ikX}e^{ik\frac{\eta}{2}}\xi\left(X + \frac{\eta}{2}, X - \frac{\eta}{2}\right) \tag{4.79}$$

na expressão (4.71) que, através da transformada de Wigner-Moyal, fornece

$$\langle V \rangle = \int\int \sum_k V_k e^{ikX}F^*(X, P)\frac{1}{2}\left[F(X, P\frac{k}{2}) + F(X, P + \frac{k}{2})\right]dXdP \tag{4.80}$$

demonstrando que, no caso geral, quando quantidades físicas são estudadas na representação do espaço de fase, seu valor esperado tem propriedades não-locais. Por outro lado, quando F varia lentamente, não há diferenças significativas entre os valores de $F(X, P \pm k/2)$ e $F(X, P)$, ou seja, o cálculo de (4.71) se reduz a,

$$\langle V \rangle = \int\int V(X)F^*(X, P)F(X, P)dXdP \tag{4.81}$$

o que pode ser deduzido diretamente de (4.80). Este resultado é análogo à relação (4.78) e, além disso, F^*F pode ser considerada como uma função de probabilidade no espaço de fase.

Geralmente a transformada de Wigner-Moyal não fornece uma relação simples entre as médias quântica e clássica, devido à natureza de não-localidade no espaço de fase. Todavia, Bohm e Hiley (1981) demonstram uma correspondência simples com o limite clássico nessa representação, quando se garante a existência de probabilidades não-negativas no mesmo. Isto é realizado através da definição do valor esperado (4.70), baseada na introdução do conceito de matriz característica $\xi(x', x)$.

4.5 Álgebras da MQ: Espaço de Fase X Espaço de Configuração

A álgebra da mecânica quântica no espaço de fase, considerando a transformação de Wigner-Moyal, possui uma relação com os respectivos entes algébricos que atuam sobre os elementos do espaço de configuração na teoria usual. Para analisar essa questão, é preciso verificar como as equações que fornecem a evolução temporal do sistema, em ambos espaços, estão correlacionadas.

Assim, para a equação (4.51) de Liouville clássica,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{P}{m}\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial F}{\partial P} = 0$$

e a transformada inversa de Wigner-Moyal,

$$\rho(X, \eta) = \int F(X, P) e^{iP\eta} dP$$

naturalmente obtêm-se a relação (4.40), dada por

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, x', t) + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2}{\partial^2 x'}\right)\rho(x, x', t) - V(x, x')\rho(x, x', t) = 0 \tag{4.82}$$

onde adotou-se que $V(x, x') = V(x) - V(x')$. Consequentemente, espera-se que esta obedeça à equação de Liouville-von Neumann (4.31), ou seja,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, x', t) = [H, \rho(x, x', t)]$$

o que nem sempre ocorrerá, pois é preciso que haja uma fatoração sobre ρ, em $V(x, x')$, para o comutador. Para exemplificar, uma fatoração pode ser feita no caso do oscilador harmônico, onde $V(x) = kx^2/2$.

Assim, para obter as leis da teoria quântica, a álgebra matricial no espaço de fase precisa ser tal que a matriz densidade associada possa ser fatorada, de forma a recuperar a equação de Liouville-von Neumann. Ou seja, a teoria quântica no espaço de fase se reduzirá à teoria quântica no espaço de configuração, a depender do tipo de potencial aos quais os sistemas físicos estejam submetidos.

Bohm e Hiley (1981) discutem ainda que a equação (4.57) expressa a mecânica quântica no espaço de fase "clássico", mas é possível escrever a mecânica clássica dentro de uma representação "quântica" em termos de $\rho(x', x)$. O procedimento para tal é análogo ao que foi realizado da passagem do espaço de fase para o de configuração, discutido acima. Nesse caso, o argumento da possibilidade da fatoração da equação (4.82) define a diferença entre as teorias quântica e clássica, respectivamente pela fatorabilidade ou não-fatorabilidade.

Uma outra observação que estes autores fazem, juntamente com Fernandes (1991), é quanto à dimensão das matrizes nas diferentes representações. Na Teoria Quântica do Espaço de Fase, a matriz densidade ρ na equação (4.40) é tratada como um "*ket*" em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ dimensionalmente maior. Dessa maneira, se o espaço de configuração possui dimensão n (onde os *ket*'s são os vetores de estado $\psi \in \mathcal{H}$) implica em $\rho(n, n')$ ter dimensão n^2. Ou seja, este é um vetor pertencente a um espaço de dimensão n^2. Então, as matrizes que atuam sobre ρ terão dimensão $n^2 \times n^2$ (enquanto que aquelas que atuam em ψ possuem dimensão $n \times n$).

Para ilustrar as discussões deste item, seja um oscilador harmônico de massa $m = 1$ e freqüência $\omega = k^{1/2}$, cujo hamiltoniano é dado como

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{4.83}$$

onde, considerando a definição de $\xi(x', x)$ que generaliza a ideia da matriz densidade $\rho(x', x)$, na equação de Liouville-von Neumann (4.40) com as variáveis modificadas, tem-se,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\xi(x, x', t) = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2}{\partial^2 x'}\right) + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 - x'^2)\right]\xi(x, x', t). \tag{4.84}$$

Definindo,

$$p = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad p' = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x'} \tag{4.85}$$

então,

$$\begin{aligned} &[x, p] = i; \qquad [x', p'] = -i; \\ &[x, x'] = [x', p] = [x, p'] = [p, p'] = 0. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Estabelecendo as mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} X &= (x + x')/2 \quad , \quad \eta = x - x' \\ P &= (p + p')/2 \quad , \quad \pi = p - p' \end{aligned} \tag{4.87}$$

onde, utilizando (4.86), obtém-se,

$$\begin{aligned} &[\eta, P] = i; \qquad\qquad [X, \pi] = -i; \\ &[X, P] = [\eta, \pi] = [X, \eta] = [P, \pi] = 0 \end{aligned} \tag{4.88}$$

e, como as relações em X e P comutam, podem ser simultaneamente diagonalizadas para definir o espaço de fase, que é consequência da mudança de representação $(x, x') \to (X, \eta)$. Substituindo em (4.84) a expressão (4.42) e os quadrados das variáveis $x^2 - x'^2 = 2X\eta$, obtêm-se:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\xi(X, \eta, t) = \left[-\left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \omega^2 X\eta\right]\xi(X, \eta). \tag{4.89}$$

Com a transformação de Wigner-Moyal sobre a equação acima, o primeiro termo do segundo membro foi calculado em (4.49) e o segundo termo fornece,

$$\int X\eta\xi(X, \eta)e^{-iP\eta}d\eta = iX\frac{\partial}{\partial P}\int \xi(X, \eta)(e^{-iP\eta})d\eta = iX\frac{\partial F}{\partial P}. \tag{4.90}$$

Então (4.89) resulta em,

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \omega\left(\omega X\frac{\partial}{\partial P} - \frac{P}{\omega}\frac{\partial}{\partial X}\right)F = 0 \tag{4.91}$$

ou seja, a mudança de representação no espaço de fase de $(x, x') \to (X, P)$, cujas equações de Liouville-von Neumann são respectivamente (4.84) e (4.91), estabelece uma relação entre os vetores $\xi(x, x') \to F(X, P)$, obtida através da transformação de Wigner-Moyal.

É importante observar que: (i) o espaço de fase na representação (X, P), não foi construído a partir de princípios da Física Clássica, mas sim aplicando as regras usuais da Mecânica Quântica para a matriz característica, considerada um vetor em um espaço de Hilbert dimensionalmente mais amplo, cuja hermeticidade da matriz densidade é caso particular (BOHM; HILEY, 1981); (ii) em termos de nomenclatura, a Teoria Quântica no Espaço de Fase (Generalizado) é sinônimo de Espaço de Fase Generalizado (FERNANDES, 1991); (iv) a Teoria Quântica no Espaço de Fase Generalizado possui característica não-local, por uma questão de princípios da Mecânica Quântica, associados principalmente à Incerteza de Heisenberg. Isto não ocorre na Mecânica Clássica pois, na representação do espaço de fase, a trajetória cinemática é dada pelo grupo de transformações canônicas, advindas da característica local (determinística) da natureza dos sistemas clássicos.

É necessário ressaltar que a dificuldade de estabelecer uma trajetória determinística para alguns sistemas clássicos está associada a um problema de ordem prática, e não devido a princípios teóricos (como no caso quântico); por exemplo, sistemas com número elevado de partículas (caso da Mecânica Estatística Clássica, onde determinar o estado inicial de cada partícula é inviável experimentalmente). Nestes casos, o espaço de fase é uma ferramenta fundamental para tratá-los estatisticamente.

5 Equações no Espaço de Fase Generalizado

A formulação para o desenvolvimento das equações de campo no espaço de fase generalizado tem como base os trabalhos de: Wigner (1932); Moyal (1949); Schönberg (1956, 1957a e 1957b); Bohm e Hiley (1981, 1983); Holland (1986); e, mais recentemente, os estudos de Fernandes e Vianna (1999) que generalizam os principais resultados discutidos na dissertação de Fernandes (1991).

Nesse capítulo são apresentados inicialmente os principais resultados que fundamentam a abordagem no espaço de fase generalizado, nos casos: (1) da equação de Dirac, analisada por Bohm e Hiley (1983) e Holland (1986) que utilizam os operadores fermiônicos da álgebra de Schönberg (1957a,1957b) com projetores de G_n unitários, e os procedimentos para obter uma "álgebra quântica" no espaço de fase generalizado, através da transformada de Wigner-Moyal (BOHM; HILEY, 1981); (2) da equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP), analisada nos trabalhos de Fernandes (1991) e Fernandes e Vianna (1999), onde essa equação é escrita segundo a álgebra de Schönberg (1957a,1957b), em termos dos geradores e projetores de G_n, com posterior transformação de Wigner-Moyal (BOHM; HILEY, 1981). Com estes procedimentos, é possível determinar o Liouvilliano no espaço de fase generalizado, que corresponde ao gerador da evolução temporal do sistema, em uma formulação de teoria de campo no espaço de fase generalizado.

Nesse contexto, um resumo da metodologia a ser empregada, compreende: (1) Definir uma álgebra associada à equação de campo, utilizando os geradores de Schönberg; (2) Reescrever as respectivas equações com ausência do termo de massa, sem/com interação da partícula com um campo eletromagnético externo, utilizando a estrutura da álgebra de Schönberg; (3) Aplicar a transformação de Wigner-Moyal (WM) para expressá-la no espaço de fase generalizado, obtendo o Liouvilliano generalizado, sem/com interação eletromagnética externa.

Nosso trabalho tem como objetivo desenvolver a teoria algébrica para o campo de Fierz-Pauli-Gupta (FPG) determinando em particular, o operador Liouvilliano no espaço de fase generalizado para esse campo. Com esse intuito, será utilizada a álgebra de FPG que propusemos no item 3.4.2, construída a partir da complexação dos geradores de Schönberg da álgebra G_n; consideramos os casos do campo sem e com interação eletromagnética externa. O procedimento adotado, para determinar a equação de Liouville asscociada, corresponde ao método anteriormente descrito.

5.1 Equação de Dirac

Digressões e contextualizações

Como a álgebra de Dirac é escrita em termos dos geradores de Schönberg em G_n, é importante expandir o campo de Dirac neste mesmo espaço. Como discutido na seção 2.2.5.2, um elemento $\Gamma \in G_n$ é tal que,

$$\Gamma = \sum_{p,q=0}^{n} (p!q!)^{-1} C^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_p} (\mathbf{I}^{j_1}) \cdots (\mathbf{I}^{j_p})(\mathbf{I}_{k_q}) \cdots (\mathbf{I}_{k_1}) \tag{5.1}$$

com soma nos índices repetidos, onde j, k são índices independentes correspondentes a $(1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_q \leq n)$ e $(1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n)$ hierarquizados com valores crescentes e $C^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_p}$ são coeficientes antissimétricos pelas permutações desses índices.

Considerando que o spinor de Dirac (BOHM; HILEY, 1983; FERNANDES, 1991) $\psi \in (\mathbf{P})G_n$, onde $(\mathbf{P})G_n$ é uma subálgebra de G_n equivalente à soma direta dos espaços lineares dos tensores contravariantes antissimétricos de ordem qualquer e também o ideal à direita de G_n têm-se, de (2.175),

$$\psi = (\mathbf{P})\Gamma = \sum_{p=0}^{n} (p!)^{-1} A^{j_1 \dots j_p} (\mathbf{P}_{j_1 \dots j_p}) \tag{5.2}$$

Para um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com $dim(\mathbb{V}) = 4$, pela equação 2.137, a $dim(G_4) = 2^8$. Todavia, a subálgebra $(\mathbf{P})G_n$ corresponde à álgebra de Clifford onde, devido à proposição 27, $dim(\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)) = 2^4 = 16$.

Expandindo (5.2), utilizando a equação (2.159) e considerando $n = 4$, segue que:

$$\psi = \sum_{p=0}^{4} (p!)^{-1} C^{j_1 \dots j_p} (\mathbf{I}_{j_p}) \cdots (\mathbf{I}_{j_1}) \tag{5.3}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \psi = C_0 + C^{j_1}(\mathbf{I}_{j_1}) + \frac{1}{2!} C^{j_1 j_2} (\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) + \frac{1}{3!} C^{j_1 j_2 j_3} (\mathbf{I}_{j_3})(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}) + \\ + \frac{1}{4!} C^{j_1 j_2 j_3 j_4} (\mathbf{I}_{j_4})(\mathbf{I}_{j_3})(\mathbf{I}_{j_2})(\mathbf{I}_{j_1}), \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde $(1 \leq j_1 < \dots < j_4 \leq 4)$ e a soma é sobre os índices repetidos, o que verifica a $dim(\mathcal{C}l(\mathbb{V}, g)) = 16$. Os termos da expressão (5.4) correspondem respectivamente a escalares, vetores, bivetores, trivetores e um pseudoescalar, sendo análogos aos p-vetores em (2.156).

Na perspectiva de Bohm e Hiley (1983), a equação de Dirac (3.11) para uma partícula livre sem massa, pode ser escrita como:

$$\gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x'^\mu} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \gamma^\mu = 0 \tag{5.5}$$

que, devido ao espaço de Minkowski $\mu = 1, 2, 3, 4$. Adotando o ordenamento das operações acima, segundo a notação seta "$\rightarrow$" à direita ou esquerda, segue de (5.5) que:

$$\overset{\rightarrow}{\gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \psi = 0 \qquad ; \qquad \overset{\leftarrow}{\gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \psi = 0 \quad . \tag{5.6}$$

Como discutido na seção 3.2, a expressão (3.19) estabelece uma relação entre os geradores de Dirac e Schönberg,

$$\gamma_{\mu}^{\pm} = (\mathbf{I}_{\mu}) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^{\nu}). \tag{5.7}$$

Assim, renomeando segundo a notação (BOHM; HILEY, 1983; HOLLAND, 1986),

$$\begin{array}{ccc} c^{+\mu} & \longrightarrow & (\mathbf{I}_{\mu}) \\ c^{\mu} & \longrightarrow & g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^{\nu}) \end{array} \tag{5.8}$$

a expressão anterior será,

$$\gamma_{\mu}^{\pm} = c^{+\mu} \pm c^{\mu} \longrightarrow \gamma^{\pm\mu} \tag{5.9}$$

o que torna possível reescrever (5.4) como,

$$\begin{aligned} \psi = C_0 + C_{\theta} c^{+\theta} + \frac{1}{2!} C_{\lambda\theta} c^{+\lambda} c^{+\theta} + \frac{1}{3!} C_{\nu\lambda\theta} c^{+\nu} c^{+\lambda} c^{+\theta} + \\ + \frac{1}{4!} C_{\mu\nu\lambda\theta} c^{+\mu} c^{+\nu} c^{+\lambda} c^{+\theta} \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde $\mu, \nu, \lambda, \theta = 1, 2, 3, 4$. Assim, o spinor de Dirac está escrito segundo os geradores da álgebra de Schönberg pertencentes à subálgebra $(\mathbf{P})G_4$. Essa é a expressão indicada por Bohm e Hiley (1983).

Por outro lado é possível, a partir de (5.8), escrever que:

$$\begin{aligned} c^{+\mu} &= \tfrac{1}{2} \left(\gamma^{+\mu} + \gamma^{-\mu} \right) \\ c^{\mu} &= \tfrac{1}{2} \left(\gamma^{+\mu} - \gamma^{-\mu} \right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

que, se substituídos em (5.10), determinam o spinor de Dirac em termos dos geradores $\gamma^{+\mu}$ e $\gamma^{-\mu}$, mostrando assim que uma álgebra de Clifford, como espaço vetorial, compreende dois subespaços com métricas de sinais contrários (BOHM; HILEY, 1983; FERNANDES, 1991).

Com as matrizes de Dirac notadas por "seta" em (5.6), inclusive a γ^5 em (3.16), é possível obter as seguintes relações (BOHM; HILEY, 1983) de demonstrações imediatas,

$$\left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^{\mu}, \overset{\rightarrow}{\gamma}^{\nu} \right]_{+} = \left[\overset{\leftarrow}{\gamma}^{\mu}, \overset{\leftarrow}{\gamma}^{\nu} \right]_{+} = 2g^{\mu\nu} \tag{5.12}$$

$$\left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^{\mu}, \overset{\leftarrow}{\gamma}^{\nu} \right]_{-} = \left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^{5}, \overset{\leftarrow}{\gamma}^{5} \right]_{-} = 0 \tag{5.13}$$

$$\left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^{\mu}, \overset{\rightarrow}{\gamma}^{5} \right]_{+} = \left[\overset{\leftarrow}{\gamma}^{\mu}, \overset{\leftarrow}{\gamma}^{5} \right]_{+} = 0 \tag{5.14}$$

onde a notação "seta" para γ^5 é,

$$\overset{\rightarrow}{\gamma}^5 = i\overset{\rightarrow}{\gamma}^1\overset{\rightarrow}{\gamma}^2\overset{\rightarrow}{\gamma}^3\overset{\rightarrow}{\gamma}^4 \quad , \quad \overset{\leftarrow}{\gamma}^5 = i\overset{\leftarrow}{\gamma}^4\overset{\leftarrow}{\gamma}^3\overset{\leftarrow}{\gamma}^2\overset{\leftarrow}{\gamma}^1 \quad . \tag{5.15}$$

É oportuno estabelecer uma relação entre os geradores de Schönberg $\gamma^{+\mu}, \gamma^{-\mu}$ e as matrizes de Dirac, introduzidas por Bohm e Hiley (1983), representadas na notação "seta", de maneira que sejam válidas as regras (3.20). Como afirmam Bohm e Hiley (1983), o ente $\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5$ anticomuta com quaisquer elementos $\overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu$ e $\overset{\rightarrow}{\gamma}^\mu$, ou seja,

$$\left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5, \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\right]_+ = \left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5, \overset{\rightarrow}{\gamma}^\mu\right]_+ = 0 \quad . \tag{5.16}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5, \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\right]_+ \xi &= \overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu \xi + \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\xi = \overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5(\xi\gamma^\mu) + \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\overset{\rightarrow}{\gamma}^5(\xi\gamma^5) \\
&= \overset{\rightarrow}{\gamma}^5(\xi\gamma^\mu\gamma^5) + \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu(\gamma^5\xi\gamma^5) = \gamma^5\xi\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\xi\gamma^5\gamma^\mu \\
&= \gamma^5\left(\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\xi + \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\xi\right) = \overset{\rightarrow}{\gamma}^5\left[\overset{\leftarrow}{\gamma}^5, \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\right]_+ \xi = 0 \\
&\therefore \left[\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5, \overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu\right]_+ \xi = 0
\end{aligned}$$

que é uma das anticomutações (5.16), sendo a outra comprovada analogamente. Com a garantia da anticomutação (5.14), é possível definir:

$$\gamma^{+\mu} = \overset{\rightarrow}{\gamma}^\mu \tag{5.17}$$

$$\gamma^{-\mu} = \overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^\mu \tag{5.18}$$

ficando preservadas as relações de anticomutação (3.20).

É importante também determinar qual é o operador "seta" na álgebra de Dirac que corresponde à identidade e que, na representação usual, é obtida da expressão (3.17) através da multiplicação $\gamma^5\gamma^5 = \mathbf{1}$. Obtém-se, assim, que:

$$(\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5)(\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5) = \mathbf{1} \tag{5.19}$$

pois

$$\begin{gathered}
(\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5)(\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5)\xi = \overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\xi = \overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5\gamma^5\xi\gamma^5 = \gamma^5\gamma^5\xi\gamma^5\gamma^5 = \xi \\
\therefore (\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5)(\overset{\rightarrow}{\gamma}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}^5) = \mathbf{1},
\end{gathered}$$

ou seja, para recuperar o resultado usual da matriz de Dirac γ^5 na notação "seta", é necessário duplicar a composição direita-esquerda, que isoladamente não fornece o ente identidade.

Por fim, é consequência dos resultados anteriores as seguintes anticomutações,

$$\begin{aligned}
&[c^{+\mu}, c^\nu]_+ = g^{\mu\nu} \\
&[c^{+\mu}, c^{+\nu}]_+ = [c^\mu, c^\nu]_+ = 0
\end{aligned} \tag{5.20}$$

que são dedutíveis das regras (3.20) quando substituídas as expressões (5.11) e utilizadas as relações (2.116)-(2.118). Esses operadores são denominados por Bohm e Hiley (1983) de operadores de criação e aniquilação de Schönberg.

Liouvilliano generalizado

Sejam as equações de Dirac com ausência de massa dadas pelas relações (5.6). Considerando a segunda equação multiplicada por $\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5$ e utilizando (5.17) e (5.18), tem-se:

$$\gamma^{+\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\psi = 0 \qquad ; \qquad \gamma^{-\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi = 0 \tag{5.21}$$

A partir das expressões (5.11) segue que:

$$\begin{aligned} \gamma^{+\mu} &= \tfrac{1}{2}\left(c^{+\mu} + c^{\mu}\right) \\ \gamma^{-\mu} &= \tfrac{1}{2}\left(c^{+\mu} - c^{\mu}\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

ou seja, (5.21) pode ser escrita como,

$$(c^{+\mu} + c^{\mu})\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\psi = 0 \tag{5.23}$$

$$(c^{+\mu} - c^{\mu})\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi = 0 \tag{5.24}$$

Considerando as mudanças de variáveis

$$X^{\mu} = \frac{1}{2}(x^{\mu} + x'^{\mu}) \qquad , \qquad \eta^{\mu} = x^{\mu} - x'^{\mu} \tag{5.25}$$

as equações (5.23) e (5.24) resultam em:

$$(c^{+\mu} + c^{\mu})\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}}\right]\psi = 0 \tag{5.26}$$

$$(c^{+\mu} - c^{\mu})\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} + \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}}\right]\psi = 0 \tag{5.27}$$

e realizando as operações de adição e subtração entre (5.26) e (5.27) tem-se respectivamente (BOHM; HILEY, 1983; FERNANDES, 1991),

$$\left(\frac{1}{2}c^{+\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - c^{\mu}\frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}}\right)\psi(X^{\mu},\eta^{\mu}) = 0, \tag{5.28}$$

$$\left(\frac{1}{2}c^{\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - c^{+\mu}\frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}}\right)\psi(X^{\mu},\eta^{\mu}) = 0. \tag{5.29}$$

Aplicando então a transformada de Wigner-Moyal (MOYAL, 1949) dada por (4.36),

$$\mathcal{F}(X^{\mu}, P^{\mu}) = \frac{1}{2\pi}\int \psi(X^{\mu},\eta^{\mu})e^{-iP_{\mu}\eta^{\mu}}d^4\eta \tag{5.30}$$

surgem as integrais,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial\psi}{\partial X^{\mu}} e^{-iP_{\mu}\eta^{\mu}} d^4\eta = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial X^{\mu}} \tag{5.31}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial\psi}{\partial \eta^{\mu}} e^{-iP_{\mu}\eta^{\mu}} d^4\eta = iP_{\mu}\mathcal{F} \tag{5.32}$$

e as equações (5.28) e (5.29) se tornam respectivamente (BOHM; HILEY, 1983; FERNANDES, 1991),

$$\left(\frac{1}{2}c^{+\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - ic^{\mu}P_{\mu}\right)\mathcal{F}(X^{\mu}, P^{\mu}) = 0 \tag{5.33}$$
$$\left(\frac{1}{2}c^{\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - ic^{+\mu}P_{\mu}\right)\mathcal{F}(X^{\mu}, P^{\mu}) = 0 \tag{5.34}$$

onde tem-se os operadores “Liouvillianos” dados por:

$$L^{[+\mu]} = \frac{1}{2}c^{+\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - ic^{\mu}P_{\mu} \quad , \quad L^{[\mu]} = \frac{1}{2}c^{\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - ic^{+\mu}P_{\mu} \tag{5.35}$$

Operando quadraticamente sobre $\mathcal{F}(X^{\mu}, P^{\mu})$, obtém-se:

$$\begin{aligned} L^{[+\mu]}L^{[+\nu]}\mathcal{F} &= \left(\frac{1}{2}c^{+\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - ic^{\mu}P_{\mu}\right)\left(\frac{1}{2}c^{+\nu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - ic^{\mu}P_{\nu}\right)\mathcal{F} \\ &= \frac{1}{4}c^{+\mu}c^{+\nu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}}\frac{\partial}{\partial X^{\nu}}\mathcal{F} - \frac{i}{2}c^{+\mu}c^{\nu}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}}(P_{\nu}\mathcal{F}) - \frac{i}{2}c^{\mu}c^{+\nu}P_{\mu}\frac{\partial}{\partial X^{\nu}}\mathcal{F} + i^2c^{\mu}c^{\nu}P_{\mu}P_{\nu}\mathcal{F} = 0 \end{aligned} \tag{5.36}$$

onde $\forall(\mu,\nu)$, $[c^{+\mu}, P_{\nu}] = [c^{\mu}, P_{\nu}] = [P_{\mu}, P_{\nu}] = 0$. Uma operação $L^{+\nu}L^{+\mu}$ fornece o mesmo resultado de (5.36), trocando-se apenas os índices tensoriais $\mu \rightleftharpoons \nu$. Assim, realizando a operação de soma, obtém-se,

$$(L^{[+\mu]}L^{[+\nu]} + L^{[+\nu]}L^{[+\mu]}])\mathcal{F} = 0 \tag{5.37}$$

e sabendo-se que,

$$\frac{\partial}{\partial X^{\mu}}\frac{\partial}{\partial X^{\nu}}\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}}\frac{\partial}{\partial X^{\nu}}\mathcal{F}$$
$$\frac{\partial}{\partial X^{\mu}}(P_{\nu}\mathcal{F}) = P_{\nu}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial X^{\mu}}$$

a adição (5.37) resulta em,

$$\frac{1}{4}[c^{+\mu}, c^{+\nu}]_{+}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial X^{\mu}X^{\nu}} - \frac{i}{2}[c^{+\mu}, c^{\nu}]_{+}P_{\nu}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial X^{\mu}} - \frac{i}{2}[c^{\mu}, c^{+\nu}]_{+}P_{\mu}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial X^{\nu}} - [c^{\mu}, c^{\nu}]_{+}P_{\mu}P_{\nu}\mathcal{F} = 0 \tag{5.38}$$

onde, utilizando as regras de comutação dadas por (5.20), tem-se (BOHM; HILEY, 1983; FERNANDES, 1991):

$$[c^{+\mu}, c^{\nu}]_{+}P_{\nu}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial X^{\mu}} = 0 \tag{5.39}$$

que é a equação de Liouville-von Neumann para partícula livre de Dirac com spin 1/2 e sem massa, descrita no espaço de fase generalizado, ou seja,

$$L_{Dirac} = [c^{+\mu}, c^{\nu}]_{+} P_{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \tag{5.40}$$

é o *Liouvilliano generalizado* correspondente à equação de Dirac para uma partícula livre sem massa.

5.2 Equação de Duffin-Kemmer-Petiau

Digressões e contextualizações

Na seção 3.3.2, são discutidos os resultados que fundamentam a proposição 36, onde as matrizes de DKP são apresentadas como geradores das subálgebras de G_n, com métricas $\pm g_{\mu\nu}$. Tem-se então, respectivamente, a relação fundamental e os geradores de DKP, dados por:

$$\beta_{\mu}^{(p)\pm}\beta_{\nu}^{(p)\pm}\beta_{\lambda}^{(p)\pm} + \beta_{\lambda}^{(p)\pm}\beta_{\nu}^{(p)\pm}\beta_{\mu}^{(p)\pm} = \pm(g_{\mu\nu}\beta_{\lambda}^{(p)\pm} + g_{\lambda\nu}\beta_{\mu}^{(p)\pm}) \tag{5.41}$$

$$\beta_{\mu}^{(p)\pm} = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_{\mu}) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^{\nu})(\mathbf{\Pi}_p) \tag{5.42}$$

cujos valores $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ são devidos ao espaço de Minkowski e $p = 0, 1, 2, 3, ..., n$, estão relacionados aos índices p-tensoriais, análogos à expressão do spinor de Dirac (5.4), sendo que $p = -1$ é uma álgebra trivial de DKP. Os diferentes valores do índice p estão associados aos subespaços lineares contidos em G_n, construídos a partir de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ de $dim(\mathbb{V}) = n$, como visto ao longo da seção 2.2.

Como pode ser observado, a álgebra de Dirac possui uma estreita relação com a álgebra de DKP se, ao invés do projetor $(\mathbf{\Pi}_p)$, for considerado o operador identidade $\mathbf{1}_{G_n}$ na relação (5.42), que fornece justamente os geradores em (5.7). Este resultado pode ser obtido analiticamente, sobre todas as ordens possíveis de p, onde $0 \leq p \leq n$, através do somatório em (5.42). Ou seja,

$$\sum_{p=0}^{n} \beta_{\mu}^{(p)\pm} = \sum_{p=0}^{n} (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_{\mu}) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^{\nu}) \sum_{p=0}^{n} (\mathbf{\Pi}_p) = \mathbf{1}_{G_n}(\mathbf{I}_{\mu}) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^{\nu})\mathbf{1}_{G_n}$$

$$\therefore \gamma_{\mu}^{\pm} = \sum_{p=0}^{n} \beta_{\mu}^{(p)\pm} \tag{5.43}$$

onde foi utilizada a definição do operador identidade dada na proposição 34(i); este resultado é indicado por Schönberg (1957b). Desta maneira, para construir os geradores de Dirac a partir da álgebra de DKP, é necessário considerar o universo de todos os geradores de DKP, p indexados, associados aos subespaços de G_n. Uma outra relação[1] que pode ser

[1] Esse foi o gerador utilizado por Fernandes (1991), como ente fundamental na obtenção do Liouvilliano generalizado de DKP.

estabelecida advém da análise de (5.42) quando $p = 0$,

$$\beta_\mu^\pm = (\mathbf{\Pi}_0)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_0) \tag{5.44}$$

cuja notação adotada é $\beta_\mu^{(0)\pm} \equiv \beta_\mu^\pm$. Multiplicando o projetor $(\mathbf{\Pi}_0)$ separadamente à direita e esquerda de (5.7), tem-se:

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Pi}_0)\gamma_\mu^\pm &= (\mathbf{\Pi}_0)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_0)(\mathbf{I}^\nu)\\ &= (\mathbf{\Pi}_0)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_{-1}) = (\mathbf{\Pi}_0)(\mathbf{I}_\mu) \qquad (5.45)\\ \gamma_\mu^\pm(\mathbf{\Pi}_0) &= (\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_0) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_0)\\ &= (\mathbf{\Pi}_{-1})(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_0) = \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_0), \qquad (5.46)\end{aligned}$$

que, a partir de (5.44),

$$\begin{aligned}\beta_\mu^\pm &= (\mathbf{\Pi}_0)\gamma_\mu^\pm + \gamma_\mu^\pm(\mathbf{\Pi}_0)\\ \therefore \beta_\mu^\pm &= \left[(\mathbf{\Pi}_0), \gamma_\mu^\pm\right]_+ \qquad (5.47)\end{aligned}$$

onde foram utilizadas a proposição 35 e a definição 38(i). Generalizando para quaisquer p, tem-se:

$$(\mathbf{\Pi}_p)\gamma_\mu^\pm = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_{p-1}) \tag{5.48}$$

$$\gamma_\mu^\pm(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{\Pi}_{p-1})(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p) \tag{5.49}$$

$$\therefore \beta_\mu^{(p)\pm} + \beta_\mu^{(p-1)\pm} = \left[(\mathbf{\Pi}_p), \gamma_\mu^\pm\right]_+ \tag{5.50}$$

Estes resultados demonstram que a métrica do subespaço utilizado em uma determinada subálgebra de G_n, deve ser mantida quando são usados simultaneamente os geradores da álgebra de Dirac e de DKP.

Analogamente ao caso da equação de Dirac, o campo de DKP é definido pela expressão (5.2), que deve ser entendido também como um ente de Bohm e Hiley (1983), podendo corresponder a uma matriz característica $\xi = \xi_{ij}(x'^\mu, x^\mu)$. A equação de DKP dada por (3.28), para uma partícula livre de massa desprezível, pode ser escrita como:

$$\beta^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\beta^\mu = 0 \tag{5.51}$$

onde, por consequência do espaço de Minkowski, $\mu = 1, 2, 3, 4$. Segundo a notação "seta" de Bohm e Hiley (1983), e considerando os índices p, tem-se (FERNANDES, 1991),

$$\overrightarrow{\beta}^{\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi = 0 \qquad ; \qquad \overleftarrow{\beta}^{\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi = 0 \tag{5.52}$$

Considerando as definições dos geradores de DKP (5.42) expressas em termos da notação adotada em (5.8), tem-se[2]:

$$\begin{array}{ccccc} b_{(p)}^{+\mu} & \longrightarrow & (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) & \longrightarrow & (\mathbf{\Pi}_p)c^{+\mu} \\ b_{(p)}^{\mu} & \longrightarrow & g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p) & \longrightarrow & c^\mu(\mathbf{\Pi}_p) \end{array} \tag{5.53}$$

[2] Estes foram os entes utilizados por Fernandes e Vianna (1999), onde generalizam os resultados obtidos de $p = 0$ (FERNANDES, 1991) para $\forall p, 0 \leq p \leq n$, no espaço de fase generalizado.

onde é natural escrevê-los em termos dos geradores de Dirac ponderados pelo projetor ($\mathbf{\Pi}_p$), devido os mesmos pertencerem à mesma álgebra de Schönberg no espaço G_n. Logo, os geradores (5.42) passam a ser denotados por

$$\beta_\mu^{(p)\pm} = b_{(p)}^{+\mu} \pm b_{(p)}^{\mu} \longrightarrow \beta_{(p)}^{\pm\mu} \tag{5.54}$$

tornando possível estabelecer a igualdade

$$\begin{aligned} b_{(p)}^{+\mu} &= \tfrac{1}{2}(\beta_\mu^{(p)+} + \beta_\mu^{(p)-}) \\ b_{(p)}^{\mu} &= \tfrac{1}{2}(\beta_\mu^{(p)+} - \beta_\mu^{(p)-}) \end{aligned} \tag{5.55}$$

Para os geradores de DKP escritos com notação "seta" (5.52), além das auxiliares dadas por (3.32) e (3.33), têm-se as relações:

$$\left[\overrightarrow{\beta}_\mu^{(p)}, \overleftarrow{\beta}_\nu^{(p)}\right]_- = \left[\overrightarrow{\eta}_5, \overleftarrow{\eta}_5\right]_- = 0 \tag{5.56}$$

$$\left[\overleftrightarrows{\beta}_\mu^{(p)}, \overleftrightarrows{\eta}_\nu\right]_+ = \left[\overleftrightarrows{\beta}_\mu^{(p)}, \overleftrightarrows{\eta}_\mu\right]_- = 0 \quad , \quad \mu \neq \nu \tag{5.57}$$

$$\left[\overrightarrow{\beta}_\mu^{(p)}, \overrightarrow{\eta}_5\right]_+ = \left[\overleftarrow{\beta}_\mu^{(p)}, \overleftarrow{\eta}_5\right]_+ = 0 \tag{5.58}$$

de onde, a partir das expressões dadas por (3.32) e (3.33), chega-se a:

$$\overleftrightarrows{\eta}_\mu = 2(\overleftrightarrows{\beta}_\mu^{(p)})^2 - \mathbf{1}, \tag{5.59}$$

$$\overleftrightarrows{\eta}_5 = \overleftrightarrows{\eta}_1 \overleftrightarrows{\eta}_2 \overleftrightarrows{\eta}_3 \overleftrightarrows{\eta}_4. \tag{5.60}$$

Assim como ocorre com $\overrightarrow{\gamma}^5 \overleftarrow{\gamma}^5$, em relação a $\overrightarrow{\gamma}^\mu$ e $\overleftarrow{\gamma}^\mu$ no caso de Dirac, o ente $\overrightarrow{\eta}_5 \overleftarrow{\eta}_5$ anticomuta com quaisquer elementos $\overleftarrow{\beta}_\mu^{(p)}$ e $\overrightarrow{\beta}_\mu^{(p)}$, ou seja,

$$\left[\overrightarrow{\eta}_5 \overleftarrow{\eta}_5, \overleftarrow{\beta}_\mu^{(p)}\right]_+ = \left[\overrightarrow{\eta}_5 \overleftarrow{\eta}_5, \overrightarrow{\beta}_\mu^{(p)}\right]_+ = 0 \tag{5.61}$$

resultado que tem prova semelhante à realizada para (5.16), considerando nesse caso a expressão (5.58). Este conjunto de regras permite relacionar os entes,

$$\beta_\mu^{(p)+} = \overrightarrow{\beta}_\mu^{(p)} \tag{5.62}$$

$$\beta_\mu^{(p)-} = \overrightarrow{\eta}_5 \overleftarrow{\eta}_5 \overleftarrow{\beta}_\mu^{(p)} \tag{5.63}$$

ficando preservadas as relações (5.41), dadas pelos geradores de Schönberg na álgebra de DKP.

É pertinente determinar o ente identidade no contexto da notação "seta", considerando os geradores de DKP. Na notação usual, a identidade pode ser calculada a partir da relação (3.33), onde $\eta_5\eta_5 = \mathbf{1}$, que é uma consequência das regras de Kemmer (1939) dadas por (3.34) e (3.35). Contudo, a identidade expressa segundo a notação "seta", é dada por

$$(\overrightarrow{\eta}_5\overleftarrow{\eta}_5)(\overrightarrow{\eta}_5\overleftarrow{\eta}_5) = \mathbf{1} \tag{5.64}$$

cuja demonstração é idêntica ao caso de Dirac (5.19). Assim, a igualdade (5.64) recupera o operador identidade no contexto das matrizes de DKP escritas como operadores "seta", o que não é possível com o ente $\overrightarrow{\eta}_5\overleftarrow{\eta}_5$ isoladamente.

Sejam as notações (5.53) e as propriedades do projetor $(\mathbf{\Pi}_p)$, dadas pelas proposições 34(ii) e 35; então, segue que:

$$\begin{aligned}
b^{+\mu}_{(p)}b^{\nu}_{(p)} &= (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu)g_{\nu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p) = g_{\nu\theta}(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)\\
&= g_{\nu\theta}(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p) = g_{\nu\theta}(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p) = c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_p); && (5.65)\\
b^{\nu}_{(p)}b^{+\mu}_{(p)} &= g_{\nu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) = g_{\nu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu)\\
&= g_{\nu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) = c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1}); && (5.66)\\
b^{+\mu}_{(p)}b^{+\nu}_{(p)} &= (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\nu) = (\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\nu) = 0; && (5.67)\\
b^{\mu}_{(p)}b^{\nu}_{(p)} &= g_{\mu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)g_{\nu\epsilon}(\mathbf{I}^\epsilon)(\mathbf{\Pi}_p) = g_{\mu\theta}g_{\nu\epsilon}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{I}^\epsilon) = 0; && (5.68)
\end{aligned}$$

onde a notação (5.53) facilita as demonstrações pois torna desnecessário utilizar subíndices mudos na métrica $g_{\mu\nu}$, como pode ser visto em (5.65) e (5.66).

Com as expressões (5.65) e (5.66) bem estabelecidas, é possível determinar as regras de anticomutação como discutido em (5.20), ou seja,

$$\begin{aligned}
b^{+\mu}_{(p)}b^{\nu}_{(p)} + b^{\nu}_{(p)}b^{+\mu}_{(p)} &= c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_p) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\\
&= \left[g^{\mu\nu} - c^{\nu}c^{+\mu}\right](\mathbf{\Pi}_p) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\\
&= g^{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_p) - c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_p) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})
\end{aligned}$$

permitindo listar as relações de anticomutação para qualquer gerador da álgebra de DKP, escritas em termos das notações (5.8) e (5.53); assim, tem-se,

$$\begin{aligned}
\left[b^{+\mu}_{(p)}, b^{\nu}_{(p)}\right]_+ &= g^{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_p) - c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_p) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\\
\left[b^{+\mu}_{(p)}, b^{+\nu}_{(p)}\right]_+ &= \left[b^{\mu}_{(p)}, b^{\nu}_{(p)}\right]_+ = 0
\end{aligned} \tag{5.69}$$

independentemente da ordem p dos elementos da álgebra de DKP.

Para o entendimento de como atuam as relações de anticomutação (5.69) sobre os elementos de DKP (5.2), é necessário considerar a proposição 35 e a definição 38, além dos efeitos dos projetores sobre elementos do espaço G_n, vistos na seção 2.2.5.3. Tem-se os resultados:

$$\begin{aligned}
&p=0, \quad [b^{+\mu}, b^{\nu}]_{+} = g^{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_0) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_1)\\
&\qquad\quad c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_0) = c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{-1})c^{+\mu} = 0;\\
&p=1, \quad \left[b^{+\mu}_{(1)}, b^{\nu}_{(1)}\right]_{+} = g^{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_1) - c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_1) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_2)\\
&\qquad\quad c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_1) = c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_0)c^{+\mu} = (\mathbf{\Pi}_1)c^{\nu}c^{+\mu} \neq 0;\\
&\qquad\quad c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_2) = (\mathbf{\Pi}_2)c^{\nu}c^{+\mu} \neq 0;\\
&\ldots\\
&p=n-1, \quad \left[b^{+\mu}_{(n-1)}, b^{\nu}_{(n-1)}\right]_{+} = g^{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_{n-1}) - c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{n-1}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_n)\\
&\qquad\qquad c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{n-1}) \neq 0 \quad , \quad c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_2) \neq 0;\\
&p=n, \quad \left[b^{+\mu}_{(n)}, b^{\nu}_{(n)}\right]_{+} = 0\\
&\qquad\quad g^{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_n) - c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_n) = c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_n) = c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{n+1})c^{\nu} = 0;\\
&\qquad\quad c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{n+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Dessa maneira, com um ente de DKP escrito para $n = 4$, como

$$\Phi = \phi_S + \phi_V + \phi_B + \phi_T + \phi_P \tag{5.71}$$

onde os índices correspondem[3], respectivamente a *escalar*, *vetor*, *bivetor*, *trivetor* e *pseudoescalar*, pode-se analisar a ação dos resultados (5.70) atuando sobre esse ente maximal (5.71), lembrando que $0 \leq p \leq n$.

Liouvilliano generalizado

As equações de DKP para uma partícula livre e sem termo de massa, dadas por (5.52), se escritas considerando as relações (5.62) e (5.63), sendo $\omega = \overrightarrow{\eta}_5 \overleftarrow{\eta}_5$, resultam em (FERNANDES; VIANNA, 1999):

$$\beta^{(p)+}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\phi = 0 \qquad ; \qquad \beta^{(p)-}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi = 0 \tag{5.72}$$

onde, considerando (5.55),

$$\begin{aligned}
\beta^{(p)+}_{\mu} &= \tfrac{1}{2}\left(b^{+\mu}_{(p)} + b^{\mu}_{(p)}\right)\\
\beta^{(p)-}_{\mu} &= \tfrac{1}{2}\left(b^{+\mu}_{(p)} - b^{\mu}_{(p)}\right)
\end{aligned} \tag{5.73}$$

e substituindo em (5.72), tem-se:

$$(b^{+\mu}_{(p)} + b^{\mu}_{(p)}) \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\phi = 0 \tag{5.74}$$

$$(b^{+\mu}_{(p)} - b^{\mu}_{(p)}) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi = 0 \tag{5.75}$$

[3] Serão utilizados de forma genérica, sem considerar os coeficientes tensoriais nas demonstrações. Por exemplo, toda vez que surgir o ente "trivetor", o mesmo será indicado por ϕ_T;

Usando a mudança de variáveis (4.35), essas equações tornam-se

$$(b^{+\mu}_{(p)} + b^{\mu}_{(p)}) \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}} \right] \phi = 0 \tag{5.76}$$

$$(b^{+\mu}_{(p)} - b^{\mu}_{(p)}) \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} + \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}} \right] \phi = 0, \tag{5.77}$$

em que a adição e subtração entre (5.76) e (5.77) fornecem, respectivamente,

$$\left(\frac{1}{2} b^{+\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - b^{\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}} \right) \phi(X^{\mu}, \eta^{\mu}) = 0, \tag{5.78}$$

$$\left(\frac{1}{2} b^{\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - b^{+\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu}} \right) \phi(X^{\mu}, \eta^{\mu}) = 0. \tag{5.79}$$

Então, aplicando a transformação de Wigner-Moyal (5.30) e posteriormente utilizando os resultados das integrais (5.31) e (5.32), obtém-se (FERNANDES; VIANNA, 1999):

$$\left(\frac{1}{2} b^{+\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - i b^{\mu}_{(p)}) P_{\mu} \right) \mathcal{F}(X^{\mu}, P^{\mu}) = 0 \tag{5.80}$$

$$\left(\frac{1}{2} b^{\mu}_{(p)}) \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - i b^{+\mu}_{(p)} P_{\mu} \right) \mathcal{F}(X^{\mu}, P^{\mu}) = 0 \tag{5.81}$$

que consequentemente fornecem os operadores "Liouvilliano",

$$L^{[+\mu]} = \frac{1}{2} b^{+\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - i b^{\mu}_{(p)} P_{\mu} \qquad , \qquad L^{[\mu]} = \frac{1}{2} b^{\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - i b^{+\mu}_{(p)} P_{\mu} \tag{5.82}$$

Finalmente, operando $(L^{[+\mu]}L^{[+\nu]} + L^{[+\nu]}L^{[+\mu]})\mathcal{F} = 0$ e utilizando as relações de anticomutação (5.69), tem-se que (FERNANDES; VIANNA, 1999):

$$[b^{+\mu}_{(p)}, b^{\mu}_{(p)}]_{+} P_{\nu} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^{\mu}} = 0 \tag{5.83}$$

que é uma equação do tipo Liouville-von Neumann para a equação de Duffin-Kemmer-Petiau, descrevendo partículas de spin 0 ou 1 livres, de massa desprezível, expressa no espaço de fase generalizado. Logo, a partir da equação (5.83), tem-se (FERNANDES; VIANNA, 1999):

$$L_{DKP} = [b^{+\mu}_{(p)}, b^{\mu}_{(p)}]_{+} P_{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \tag{5.84}$$

que é chamado de *Liouvillino generalizado* de DKP com partícula livre e de massa desprezível. A métrica que foi utilizada por Fernandes e Vianna (1999) é $diag(1, -1, -1, -1)$, e estes resultados coincidem com os obtidos pelos mesmos.

5.3 Equação de Fiez-Pauli-Gupta

Digressões e contextualizações

Na seção 3.4.2 foram propostas as bases para a estrutura matemática da álgebra de Fierz-Pauli-Gupta, que corresponde a partículas de spin 3/2. As relações demonstram que seus geradores são uma composição aditiva dos geradores de Dirac e de DKP, na álgebra de Schönberg em G_n, como mostram as relações fundamentais (3.57) e (3.58), repetidas abaixo,

$$\sum_{(permut.)} (\alpha_\tau^{(p)\pm}\alpha_\theta^{(p)\pm} - g_{\tau\theta})\alpha_\lambda^{(p)\pm}\alpha_\rho^{(p)\pm} = 0 \tag{5.85}$$

$$\alpha_\mu^{(p)\pm} = \gamma_\mu^\pm + i\beta_\mu^{(p)\pm} \tag{5.86}$$

onde os índices gregos $\tau, \theta, \lambda, \rho, \mu = 1, 2, 3, 4$ são devidos ao espaço de Minkowski ($\mathbb{M}$), e $0 \leq p \leq n$ são índices p-tensoriais associados ao spinor de FPG, análogo a (5.4). Cabe repetir que os valores de p correspondem à indexação dos subespaços lineares contidos em G_n, cuja base advém do espaço vetorial $\mathbb{V}$ com $dim(\mathbb{V}) = n$,

Devido os geradores da álgebra de FPG serem uma composição dos geradores de Dirac e DKP, é importante verificar uma relação como calculada em (5.43). Assim, a soma de todos os possíveis geradores de FPG fornece:

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} \alpha_\mu^{(p)\pm} &= \sum_{p=0}^{n} \gamma_\mu^\pm + i\sum_{p=0}^{n} \beta_\mu^{(p)\pm} = \gamma_\mu^\pm \sum_{p=0}^{n} \mathbf{1} + i\gamma_\mu^\pm \\ &= n\gamma_\mu^\pm + i\gamma_\mu^\pm \\ \therefore \sum_{p=0}^{n} \alpha_\mu^{(p)\pm} &= (n\mathbf{1} + i\mathbf{1})\,\gamma_\mu^\pm \end{aligned} \tag{5.87}$$

onde está subentendido que a identidade $\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}_{G_n}$. Como pode ser observado, os geradores de FPG são definidos por uma parte real ponderada pela indexação p e uma parte imaginária no plano complexo em relação aos geradores da álgebra de Dirac (Clifford). Este resultado complexado está implicitamente relacionado ao operador "projetor estrela"(ou complexo) (3.60), que surge naturalmente da estrutura matemática que propusemos na seção 3.4.2.

Desta forma, seja a definição dada em (3.61),

$$\alpha_\mu^{(p)\pm} = (\mathbf{\Pi}_p^\star)(\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p^\star) \tag{5.88}$$

onde, fazendo a mesma operação discutida em (5.87) e lembrando que o somatório do projetor estrela é dado pela proposição 37(i), resulta que:

$$\sum_{p=0}^{n} \alpha_\mu^{(p)\pm} = \sum_{p=0}^{n} (\mathbf{\Pi}_p^\star)\gamma_\mu^\pm = (n\mathbf{1} + i\mathbf{1})\,\gamma_\mu^\pm \tag{5.89}$$

ou seja, coincide com o resultado fornecido por (5.87). Assim, o fator complexo multiplicativo em (5.87) surge naturalmente como parte da álgebra de FPG, onde os geradores da álgebra de Schönberg passam a ser descritos sobre o espaço complexo. Desta forma, a álgebra de FPG é uma extensão complexa das álgebra de Dirac e de Duffin-Kemmer-Petiau.

Ainda sob a ótica das relações entre as álgebras, faltam as análises sobre os valores particulares em n, p ou das possíveis correlações individualizadas. Neste sentido, existem os casos especiais dos valores $p = -1$, $p = n$ e $p = n + 1$ que, substituídos na relação (5.88), fornecem:

$$\alpha_\mu^{(-1)\pm} = (\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu) = \gamma_\mu^\pm \tag{5.90}$$
$$\alpha_\mu^{(n)\pm} = (\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu) = \gamma_\mu^\pm \tag{5.91}$$
$$\alpha_\mu^{(n+1)\pm} = (\mathbf{I}_\mu) \pm g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu) = \gamma_\mu^\pm \tag{5.92}$$

onde foram utilizadas as propriedades dos operadores projetor e projetor estrela, da definição 38 e proposição 38. Assim, $\alpha_\mu^{(-1)\pm}$, $\alpha_\mu^{(n)\pm}$ e $\alpha_\mu^{(n+1)\pm}$ também são geradores da álgebra de Dirac (Clifford), obedecendo às regras (3.20). Uma análise, no entanto, mostra que se torna desprezível considerar geradores da álgebra de FPG com $p \geq n$ e, como nas álgebras de Dirac e de DKP, eles estão limitados ao intervalo $0 \leq p \leq n$.

Devido à semelhança (na forma e não no conteúdo) entre as equações de campos discutidas, as assertivas anteriores, com as devidas mudanças, são válidas também para o caso de FPG. As relações algébricas implícitas são, no entanto, extremamente diferentes. Sejam então o spinor de FPG definido por (5.2) e a equação de FPG (3.46) de partícula livre e massa desprezível escrita como:

$$\alpha^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\alpha^\mu = 0 \tag{5.93}$$

onde, devido ao espaço de Minkowski, $\mu = 1, 2, 3, 4$. Para a notação "seta" de Bohm e Hiley (1983) e usando índices p, tem-se

$$\overrightarrow{\alpha}^{\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi = 0 \qquad ; \qquad \overleftarrow{\alpha}^{\mu}_{(p)} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi = 0 \tag{5.94}$$

que, pela definição (3.54), são escritos como:

$$\overrightarrow{\alpha}_\mu^{(p)} = \overrightarrow{\gamma}_\mu + i\overrightarrow{\beta}_\mu^{(p)} \tag{5.95}$$
$$\overleftarrow{\alpha}_\mu^{(p)} = \overleftarrow{\gamma}_\mu + i\overleftarrow{\beta}_\mu^{(p)}. \tag{5.96}$$

Sejam agora os geradores de FPG (5.88), expressos em termos das métricas do espaço G_n, escritos com notação semelhante àquelas em (5.8) e (5.53), ou seja,

$$\begin{array}{ccccc} a^{+\mu}_{(p)} & \longrightarrow & (\mathbf{\Pi}^\star_p)(\mathbf{I}_\mu) & \longrightarrow & (\mathbf{\Pi}^\star_p)c^{+\mu} \\ a^{\mu}_{(p)} & \longrightarrow & g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}^\star_p) & \longrightarrow & c^\mu(\mathbf{\Pi}^\star_p) \end{array} \tag{5.97}$$

onde o projetor estrela obedece as propriedades descritas nas proposições 37 e 38. Desta maneira, os geradores (5.88) podem ser expressos também como

$$\alpha_\mu^{(p)\pm} = a_{(p)}^{+\mu} \pm a_{(p)}^{\mu} \longrightarrow \alpha_{(p)}^{\pm\mu}, \tag{5.98}$$

tornando possível estabelecer a igualdade:

$$\begin{array}{l} a_{(p)}^{+\mu} = \frac{1}{2}(\alpha_\mu^{(p)+} + \alpha_\mu^{(p)-}) \\ a_{(p)}^{\mu} = \frac{1}{2}(\alpha_\mu^{(p)+} - \alpha_\mu^{(p)-}) \end{array} \tag{5.99}$$

que tem forma equivalente àquelas apresentadas nos casos de Dirac e de Duffin-Kemmer-Petiau, nas seções anteriores.

É importante entender quais regras (anticomutação e/ou comutação) são possíveis de serem extraídas dos entes de FPG, na notação seta. Assim, é necessário analisar as relações entre os operadores seta de Dirac e de DKP e, consequentemente, de FPG. Sejam, assim, as relações dadas por (3.52), (5.56)-(5.61) e (5.12)-(5.16); demonstra-se de forma simples, que:

$$\left[\overrightarrow{\gamma}^{\mu}, \overleftarrow{\beta}_{\nu}^{(p)}\right]_- = \left[\overleftarrow{\gamma}^{\mu}, \overrightarrow{\beta}_{\nu}^{(p)}\right]_- = 0 \tag{5.100}$$

$$\left[\overrightarrow{\gamma}^{\mu}, \overrightarrow{\beta}_{\nu}^{(p)}\right]_+ = \left[\overleftarrow{\gamma}^{\mu}, \overleftarrow{\beta}_{\nu}^{(p)}\right]_+ = 0 \tag{5.101}$$

$$\left[\overrightarrow{\gamma}^{\mu}, \overleftarrow{\eta}_{\nu}\right]_- = \left[\overleftarrow{\gamma}^{\mu}, \overrightarrow{\eta}_{\nu}\right]_- = \left[\overrightarrow{\gamma}^{\mu}, \overleftarrow{\eta}_{5}\right]_- = \left[\overleftarrow{\gamma}^{\mu}, \overrightarrow{\eta}_{5}\right]_- = 0 \tag{5.102}$$

$$\left[\overrightarrow{\gamma}^{\mu}, \overrightarrow{\eta}_{\nu}\right]_- = \left[\overleftarrow{\gamma}^{\mu}, \overleftarrow{\eta}_{\nu}\right]_- = \left[\overrightarrow{\gamma}^{\mu}, \overrightarrow{\eta}_{5}\right]_- = \left[\overleftarrow{\gamma}^{\mu}, \overleftarrow{\eta}_{5}\right]_- = 0 \tag{5.103}$$

onde, nestes casos, os índices μ, ν são posicionados acima-abaixo apenas por conveniência de notação, para concordar respectivamente com suas posições em γ, β, nas equações (5.6) e (5.52).

Segundo, adotando a notação $\omega = \overrightarrow{\eta}_5 \overleftarrow{\eta}_5 = \overleftarrow{\eta}_5 \overrightarrow{\eta}_5$, é possível verificar que

$$\left[\overrightarrow{\gamma}^{5} \overleftarrow{\gamma}^{5}, \omega\right]_- = 0. \tag{5.104}$$

Desta maneira, uma outra regra fundamental pode ser deduzida como consequência das propriedades discutidas anteriormente; essa regra explicita a relação entre um operador seta de FPG e os entes que definem o operador identidade de Dirac e de DKP. Assim, considerando as expressões (5.95) e (5.96), tem-se:

$$\left[\overrightarrow{\gamma}^{5} \overleftarrow{\gamma}^{5} \omega, \overrightarrow{\alpha}_{\mu}^{(p)}\right]_+ = \left[\overrightarrow{\gamma}^{5} \overleftarrow{\gamma}^{5} \omega, \overleftarrow{\alpha}_{\mu}^{(p)}\right]_+ = 0 \tag{5.105}$$

onde em todas as demonstrações acima foram utilizadas as comutações e anticomutações (5.100)-(5.103). Observe que a relação de anticomutação (5.105) tem correspondência com aquelas determinadas em (5.16) e (5.61), o que permite finalmente ter as relações,

$$\alpha_\mu^{(p)+} = \overset{\rightarrow}{\alpha}{}_\mu^{(p)} \tag{5.106}$$

$$\alpha_\mu^{(p)-} = \overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5\omega\overset{\leftarrow}{\alpha}{}_\mu^{(p)} \tag{5.107}$$

A determinação da identidade na notação seta dos entes de FPG pode ser realizada considerando as identidades de Dirac e de DKP, respectivamente encontradas em (5.19) e (5.64). Com efeito, tem-se,

$$(\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5\omega)^2 = (\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5)^2\omega^2 = \mathbf{1} \tag{5.108}$$

onde é imediato que $\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5\omega \neq \mathbf{1}$ e na notação usual $\gamma^5\gamma^5\eta_5\eta_5 = \mathbf{1}$. Ou seja, a expressão (5.108) fornece o operador identidade, quando os entes de FPG são escritos em termos de operadores seta.

É preciso uma análise sobre os entes (5.106) e (5.107), segundo as expressões (5.95) e (5.96). Escritos explicitamente, segue que,

$$\alpha_{(p)}^{+\mu} = \overset{\rightarrow}{\gamma}{}^\mu + i\overset{\rightarrow}{\beta}{}^\mu_{(p)} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{(p)}^{+\mu} = \gamma^{+\mu} + i\beta_{(p)}^{+\mu} \tag{5.109}$$

$$\alpha_{(p)}^{-\mu} = \overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5\omega\overset{\leftarrow}{\alpha}{}_\mu^{(p)} = \omega\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^\mu + i\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5\omega\overset{\leftarrow}{\beta}{}^\mu_{(p)} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{(p)}^{-\mu} = \gamma^{-\mu} + i\beta_{(p)}^{-\mu}. \tag{5.110}$$

Vale ressaltar que, devido às relações (5.100)-(5.103), ω é um invariante da álgebra de Dirac e $\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^5\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^5$ um invariante da álgebra de DKP, como demonstrado anteriormente. Por esta razão, é possível escrever a última igualdade em (5.110). Então, substituindo em (5.99) as expressões (5.109) e (5.110), tem-se que

$$a_{(p)}^{+\mu} = \frac{1}{2}\left\{\left(\gamma^{+\mu} + i\beta_{(p)}^{+\mu}\right) + \left(\gamma^{-\mu} + i\beta_{(p)}^{-\mu}\right)\right\} \quad \Rightarrow \quad a_{(p)}^{+\mu} = c^{+\mu} + ib_{(p)}^{+\mu} \tag{5.111}$$

$$a_{(p)}^{\mu} = \frac{1}{2}\left\{\left(\gamma^{+\mu} + i\beta_{(p)}^{+\mu}\right) - \left(\gamma^{-\mu} + i\beta_{(p)}^{-\mu}\right)\right\} \quad \Rightarrow \quad a_{(p)}^{\mu} = c^{\mu} + ib_{(p)}^{\mu} \tag{5.112}$$

onde foram utilizadas as igualdades (5.11) e (5.55). Com isso, quando são consideradas as relações (5.20) e (5.69), bem como as propriedades do projetor $(\mathbf{\Pi}_p), \forall p, 0 \leq p \leq n$, obtém-se de forma direta as seguintes anticomutações,

$$\begin{aligned}
\left[a_{(p)}^{+\mu}, a_{(p)}^{\nu}\right]_+ &= \left[c^{+\mu}, c^{\nu}\right]_+ - \left[b_{(p)}^{+\mu}, b_{(p)}^{\nu}\right]_+ + i\left[c^{+\mu}, b_{(p)}^{\nu}\right]_+ + i\left[b_{(p)}^{+\mu}, c^{\nu}\right]_+ \\
&= g^{\mu\nu} - \left[b_{(p)}^{+\mu}, b_{(p)}^{\nu}\right]_+ + i\left\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_p) + c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_p)c^{+\mu}\right\} + i\left\{(\mathbf{\Pi}_p)c^{+\mu}c^{\nu} + c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_p)c^{+\mu}\right\} \\
&= g^{\mu\nu} - \left[b_{(p)}^{+\mu}, b_{(p)}^{\nu}\right]_+ + i\left\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_p) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\right\} + i\left\{c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})c^{\nu} + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\right\} \\
\therefore \left[a_{(p)}^{+\mu}, a_{(p)}^{\nu}\right]_+ &= g^{\mu\nu} - \left[b_{(p)}^{+\mu}, b_{(p)}^{\nu}\right]_+ + i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_p) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\}
\end{aligned} \tag{5.113}$$

em que foram utilizadas as relações (5.20). Da mesma forma, são obtidos os casos triviais,

$$\left[a_{(p)}^{+\mu}, a_{(p)}^{+\nu}\right]_+ = 0 \tag{5.114}$$

$$\left[a_{(p)}^{\mu}, a_{(p)}^{\nu}\right]_+ = 0 \tag{5.115}$$

Para testar a consistência da álgebra proposta, sejam as notações dadas em (5.97), destacando as propriedades do projetor $(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})$ discutidas nas proposições 37 e 38. Logo, para $\forall p, 0 \leq p \leq n$, são válidas as relações:

$$\begin{aligned}
\left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_{+} &= a^{+\mu}_{(p)}a^{\nu}_{(p)} + a^{\nu}_{(p)}a^{+\mu}_{(p)} = (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p}) + c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\mu} \\
&= c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p}) + c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\mu} = c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1}) \\
&= c^{+\mu}c^{\nu}\{\mathbf{1} - (\mathbf{\Pi}_{p}) + i2(\mathbf{\Pi}_{p})\} + c^{\nu}c^{+\mu}[\mathbf{1} - (\mathbf{\Pi}_{p+1}) + i2(\mathbf{\Pi}_{p+1})] \\
&= [c^{+\mu}, c^{\nu}]_{+} - c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p}) - c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1}) + i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\} \\
&= [c^{+\mu}, c^{\nu}]_{+} - c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p})(\mathbf{\Pi}_{p}) - c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{\Pi}_{p+1}) + i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\} \\
&= [c^{+\mu}, c^{\nu}]_{+} - (\mathbf{\Pi}_{p})c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p}) - c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p})(\mathbf{\Pi}_{p})c^{+\mu} + i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\} \\
&\therefore \left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_{+} = g^{\mu\nu} - \left[b^{+\mu}_{(p)}, b^{\nu}_{(p)}\right]_{+} + i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\}
\end{aligned} \tag{5.116}$$

$$\begin{aligned}
\left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{+\nu}_{(p)}\right]_{+} &= a^{+\mu}_{(p)}a^{+\nu}_{(p)} + a^{+\nu}_{(p)}a^{+\mu}_{(p)} = (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\nu} + (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\mu} \\
&= c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\nu} + c^{+\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{+\mu} \\
&= (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})c^{+\mu}c^{+\nu} + (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})c^{+\nu}c^{+\mu} \\
&= (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})\left[c^{+\mu}, c^{+\nu}\right]_{+} \\
&\therefore \left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{+\nu}_{(p)}\right]_{+} = 0
\end{aligned} \tag{5.117}$$

$$\begin{aligned}
\left[a^{\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_{+} &= a^{\mu}_{(p)}a^{\nu}_{(p)} + a^{\nu}_{(p)}a^{\mu}_{(p)} = c^{\mu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p}) + c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{\mu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p}) \\
&= (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})c^{\mu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})c^{\nu} + (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})c^{\nu}(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})c^{\mu} \\
&= (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{\mu}c^{\nu} + (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})c^{\nu}c^{\mu} \\
&= (\mathbf{\Pi}^{\star}_{p+1})(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})\left[c^{\mu}, c^{\nu}\right]_{+} \\
&\therefore \left[a^{\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_{+} = 0
\end{aligned} \tag{5.118}$$

Observamos que os resultados para as relações de anticomutação (5.113), (5.116) e demais casos nulos são coincidentes. No entanto, para obter (5.116)-(5.118) foi utilizada a própria estrutura matemática proposta para a álgebra de Fierz-Pauli-Gupta enquanto que, no caso de (5.113), não foi preciso explicitar o projetor complexo $(\mathbf{\Pi}^{\star}_{p})$, estando implícito na composição das álgebras de Dirac e DKP.

Um caso particular corresponde a $p = 0$ em (5.116), quando se trata de entes escalares da álgebra $G_0 \subset G_n$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
\left[a^{+\mu}_{(0)}, a^{\nu}_{(0)}\right]_{+} &= g^{\mu\nu} - \left[b^{+\mu}_{(0)}, b^{\nu}_{(0)}\right]_{+} + i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{0}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{1})\} \\
&= i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{0}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{1})\} = i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{0}) + c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{0})c^{+\mu}\} \\
&= i2\{(\mathbf{\Pi}_{0})c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{0}) + c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{0})(\mathbf{\Pi}_{0})c^{+\mu}\} = i2\left[b^{+\mu}, b^{\nu}\right]_{+} \\
&\therefore \left[a^{+\mu}, a^{\nu}\right]_{+} = i2g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{5.119}$$

ou seja, mesmo no caso mais simples, os entes de FPG deverão estar no espaço G_n definido sobre o corpo complexo.

Liouvilliano generalizado

Para obter o Liouvilliano generalizado associado ao campo de Fierz-Pauli-Gupta seguiremos a metodologia empregada no caso do campo de Dirac e do campo de Duffin-Kemmer-Petiau. Sejam assim as equações de FPG (5.94) para partícula livre e com massa desprezível. Pelas relações (5.106), (5.107) e $\overrightarrow{\gamma}^5\overleftarrow{\gamma}^5\omega$, as equações (5.94) se tornam:

$$\alpha_\mu^{(p)+}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi = 0 \qquad ; \qquad \alpha_\mu^{(p)-}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi = 0 \tag{5.120}$$

que, com (5.99), ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^{(p)+} &= \tfrac{1}{2}\left(a_{(p)}^{+\mu} + a_{(p)}^{\mu}\right) \\ \alpha_\mu^{(p)-} &= \tfrac{1}{2}\left(a_{(p)}^{+\mu} - a_{(p)}^{\mu}\right) \end{aligned} \tag{5.121}$$

podem ser escritas como:

$$(a_{(p)}^{+\mu} + a_{(p)}^{\mu})\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi = 0 \tag{5.122}$$

$$(a_{(p)}^{+\mu} - a_{(p)}^{\mu})\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi = 0. \tag{5.123}$$

A mudança de variáveis (4.35) aplicada ao spinor de FPG resulta em $\phi(x^\mu, x'^\mu) = \phi(X^\mu, \eta^\mu)$ e, assim,

$$(a_{(p)}^{+\mu} + a_{(p)}^{\mu})\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^\mu} - \frac{\partial}{\partial \eta^\mu}\right]\phi = 0 \tag{5.124}$$

$$(a_{(p)}^{+\mu} - a_{(p)}^{\mu})\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{\partial}{\partial \eta^\mu}\right]\phi = 0 \tag{5.125}$$

Somando e subtraindo (5.124) e (5.125), tem-se, respectivamente,

$$\left(\frac{1}{2}a_{(p)}^{+\mu}\frac{\partial}{\partial X^\mu} - a_{(p)}^{\mu}\frac{\partial}{\partial \eta^\mu}\right)\phi(X^\mu, \eta^\mu) = 0 \tag{5.126}$$

$$\left(\frac{1}{2}a_{(p)}^{\mu}\frac{\partial}{\partial X^\mu} - a_{(p)}^{+\mu}\frac{\partial}{\partial \eta^\mu}\right)\phi(X^\mu, \eta^\mu) = 0 \tag{5.127}$$

cuja transformação de Wigner-Moyal (5.30), considerando os resultados de (5.31) e (5.32), fornece

$$\left(\frac{1}{2}a_{(p)}^{+\mu}\frac{\partial}{\partial X^\mu} - ia_{(p)}^{\mu})P_\mu\right)\mathcal{F}(X^\mu, P^\mu) = 0, \tag{5.128}$$

$$\left(\frac{1}{2}a_{(p)}^{\mu})\frac{\partial}{\partial X^\mu} - ia_{(p)}^{+\mu}P_\mu\right)\mathcal{F}(X^\mu, P^\mu) = 0, \tag{5.129}$$

de onde se obtém os operadores “Liouvillianos”:

$$L^{[+\mu]} = \frac{1}{2}a_{(p)}^{+\mu}\frac{\partial}{\partial X^\mu} - ia_{(p)}^{\mu}P_\mu \qquad , \qquad L^{[\mu]} = \frac{1}{2}a_{(p)}^{\mu}\frac{\partial}{\partial X^\mu} - ia_{(p)}^{+\mu}P_\mu \tag{5.130}$$

Com as relações de anticomutação (5.116)-(5.118) e $(L^{[+\mu]}L^{[+\nu]} + L^{[+\nu]}L^{[+\mu]})\mathcal{F} = 0$, obtém-se,

$$[a^{+\mu}_{(p)}, a^{\mu}_{(p)}]_{+} P_{\nu} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^{\mu}} = 0 \tag{5.131}$$

que corresponde à equação de Liouville-von Neumann quando a equação de Fierz-Pauli-Gupta é descrita no espaço de fase generalizado determinando-se então, para partículas livres de spin 3/2 e massa desprezível, que:

$$L_{FPG} = [a^{+\mu}_{(p)}, a^{\mu}_{(p)}]_{+} P_{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \tag{5.132}$$

é o operador denominado *Liouvillino generalizado* de FPG. Utilizando o resultado (5.113), então (5.132) pode ser escrita na forma geral

$$L_{FPG} = g^{\mu\nu} P_{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} - \left[b^{+\mu}_{(p)}, b^{\nu}_{(p)}\right]_{+} P_{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} + i2\{c^{+\mu}c^{\nu}(\mathbf{\Pi}_{p}) + c^{\nu}c^{+\mu}(\mathbf{\Pi}_{p+1})\} P_{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \tag{5.133}$$

demonstrando que, além das álgebras de Dirac e de DKP estarem contidas na álgebra de FPG, o último termo indica uma complexação da álgebra spinorial de Schönberg, que também se apresenta no Liouvilliano generalizado. Este resultado também pode ser determinado ao escrever de forma explícita, em (5.93), os entes de Dirac e DKP. Assim, na representação dos operadores seta (5.95) e (5.96), tem-se:

$$(\overrightarrow{\gamma}^{\mu} + i\overrightarrow{\beta}^{\mu}_{(p)}) \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \phi = 0 \qquad ; \qquad (\overleftarrow{\gamma}^{\mu} + i\overleftarrow{\beta}^{\mu}_{(p)}) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \phi = 0 \tag{5.134}$$

e, nesse caso, para obter a equação no espaço de fase generalizado, deve-se seguir analogamente a metodologia e discussões anteriormente realizadas. Na realidade, a segunda equação deve ser multiplicada por $\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega$, onde ω é invariante na álgebra de Dirac e $\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}$ na de DKP.

5.4 Teoria Quântica de Campos com Interação Eletromagnética

Esta seção tem como objetivo determinar o Liouvilliano generalizado para partícula de spin 3/2 de massa m, submetida a um campo eletromagnético externo qualquer. Como as equações de campos discutidas neste trabalho são semelhantes, primeiramente será determinada a equação de Liouville-von Neumann para a equação do campo de Fierz-Pauli-Gupta. Em seguida, serão abordados os casos de Dirac e de Duffin-Kemmer-Petiau, cujos procedimentos e resultados são análogos ao de FPG.

Equação de Fierz-Pauli-Gupta

Seja um operador diferencial $D^{\pm}_{\mu}$,

$$D^{\pm}_{\mu}(x^{\nu}) = \partial_{\mu} \pm \frac{ie}{c} A_{\mu}(x^{\nu}) \tag{5.135}$$

onde o ente $A_{\mu}(x^{\nu})$ é o potencial quadridimensional eletromagnético e x^{ν} as variáveis independentes sobre o espaço de Minkowski. De forma simples, a relação de comutação entre diferentes operadores quadridimensionais pode ser obtida como:

$$\left[D^{\pm}_{\mu}, D^{\pm}_{\nu}\right] = \pm \frac{ie}{c} \left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\right) \tag{5.136}$$

que, considerando o tensor eletromagnético quadridimensional $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$, nos fornece

$$\left[D^{\pm}_{\mu}, D^{\pm}_{\nu}\right] = \pm \frac{ie}{c} F_{\mu\nu} \tag{5.137}$$

A equação de FPG para uma partícula de massa m submetida a um campo eletromagnético externo é dada, então, como:

$$\overrightarrow{\alpha}^{\mu}_{(p)}(D'^{-}_{\mu} + m)\phi = 0 \qquad ; \qquad \overleftarrow{\alpha}^{\mu}_{(p)}(D^{+}_{\mu} + m)\phi = 0. \tag{5.138}$$

Assim, considerando as igualdades (5.106) e (5.107) e definindo a notação $\bar{a} = \overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega$, a expressão (5.138) resulta em

$$(a^{+\mu}_{(p)} + a^{\mu}_{(p)}) \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{ie}{c} A_{\mu}(x'^{\nu}) \right) \phi + m\phi = 0 \tag{5.139}$$

$$(a^{+\mu}_{(p)} - a^{\mu}_{(p)}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{ie}{c} A_{\mu}(x^{\nu}) \right) \phi + \bar{a} m\phi = 0. \tag{5.140}$$

A mudança de variáveis $(x'^{\nu}, x^{\mu}) \rightarrow (X^{\mu}, \eta^{\mu})$ conduz à expansão sobre o potencial, isto é,

$$A_{\mu}\left(X^{\nu} \pm \frac{\eta^{\nu}}{2}\right) \approx A_{\mu}(X^{\nu}) \pm \frac{\eta^{a}}{2} \frac{\partial}{\partial X^{a}} A_{\mu}(X^{\nu}). \tag{5.141}$$

Então, utilizando essas transformações em (5.139) e (5.140), tem-se:

$$(a^{+\mu}_{(p)} + a^{\mu}_{(p)}) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^\mu} - \frac{\partial}{\partial \eta^\mu} - \frac{ie}{c} \left(A_\mu - \frac{\eta^a}{2} \frac{\partial}{\partial X^a} A_\mu \right) \right] \phi + m\phi = 0, \tag{5.142}$$

$$(a^{+\mu}_{(p)} - a^{\mu}_{(p)}) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{\partial}{\partial \eta^\mu} + \frac{ie}{c} \left(A_\mu + \frac{\eta^a}{2} \frac{\partial}{\partial X^a} A_\mu \right) \right] \phi + \bar{a} m\phi = 0, \tag{5.143}$$

e, somando e subtraindo (5.142) e (5.143), segue que:

$$\left[a^{+\mu}_{(p)} \left(\frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{ie}{c} \eta^a \frac{\partial}{\partial X^a} A_\mu \right) - 2a^{\mu}_{(p)} \left(\frac{\partial}{\partial \eta^\mu} + \frac{ie}{c} A_\mu \right) \right] \phi + (1+\bar{a}) m\phi = 0, \tag{5.144}$$

$$\left[a^{\mu}_{(p)} \left(\frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{ie}{c} \eta^a \frac{\partial}{\partial X^a} A_\mu \right) - 2a^{+\mu}_{(p)} \left(\frac{\partial}{\partial \eta^\mu} + \frac{ie}{c} A_\mu \right) \right] \phi + (1-\bar{a}) m\phi = 0. \tag{5.145}$$

Para aplicar a transformação de Wigner-Moyal (5.30) a (5.144) e (5.145) de forma análoga ao realizado em (5.28), (5.29),(5.78), (5.79), (5.126) e (5.127), é necessário calcular diferentes tipos de integrais, sendo que algumas foram obtidas em (5.31) e (5.32). No entanto, no tratamento das equações considerando um campo eletromagnético externo, surgem novos tipos de integrais que precisam ser determinadas. Assim, resulta em

$$\left[a^{+\mu}_{(p)} \left(\frac{\partial}{\partial X^\mu} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial P_a} \right) - 2a^{\mu}_{(p)} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) + (1+\bar{a}) m \right] \mathcal{F} = 0 \tag{5.146}$$

$$\left[a^{\mu}_{(p)} \left(\frac{\partial}{\partial X^\mu} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial P_a} \right) - 2a^{+\mu}_{(p)} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) + (1-\bar{a}) m \right] \mathcal{F} = 0, \tag{5.147}$$

que são as equações de Fierz-Pauli-Gupta no espaço de fase generalizado, considerando um campo eletromagnético externo e os geradores $a^{+\mu}_{(p)}$ e $a^{\mu}_{(p)}$ da álgebra de FPG, descritos pela álgebra de Schönberg no espaço G_n.

O próximo passo é obter o operador de Liouville associado a uma das equações (5.146) ou (5.147). Mas, diferentemente dos casos da partícula de massa desprezível, nestas equações existem os fatores "$(1 \pm \bar{a})m$". Então, utilizando o resultado (5.108), segue que:

$$(1 \pm \bar{a})^2 = 1 \pm 2\bar{a} + \bar{a}^2 = 1 \pm 2\bar{a} + 1 = 2(1 \pm \bar{a}) \Rightarrow 1 \pm \bar{a} = 2. \tag{5.148}$$

Dessa forma, aproveitando a propriedade (5.148), as equações (5.146) e (5.147) podem ser reescritas como

$$\left(-\frac{a^{+\mu}_{(p)}}{2} \frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{e}{2c} a^{+\mu}_{(p)} \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial P_a} + i a^{\mu}_{(p)} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right) \mathcal{F} = m\mathcal{F}, \tag{5.149}$$

$$\left(-\frac{a^{\mu}_{(p)}}{2} \frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{e}{2c} a^{\mu}_{(p)} \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial P_a} + i a^{+\mu}_{(p)} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right) \mathcal{F} = m\mathcal{F}, \tag{5.150}$$

correspondendo a equações de autovalor em $\mathcal{F}$. Assim, os operadores "Liouvillianos" de FPG são:

$$L^{[+\mu]} = -\frac{a^{+\mu}_{(p)}}{2} \frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{e}{2c} a^{+\mu}_{(p)} \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial P_a} + i a^{\mu}_{(p)} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right); \tag{5.151}$$

$$L^{[\mu]} = -\frac{a^{\mu}_{(p)}}{2} \frac{\partial}{\partial X^\mu} + \frac{e}{2c} a^{\mu}_{(p)} \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial P_a} + i a^{+\mu}_{(p)} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right). \tag{5.152}$$

Por outro lado, a quadruplicação do "Liouvilliano" da equação de autovalor (5.146), dada como

$$(L^{[+\mu]}L^{[+\nu]} + L^{[+\nu]}L^{[+\mu]})\mathcal{F} = 2m^2\mathcal{F} \tag{5.153}$$

é, naturalmente, também uma equação de autovalor em $\mathcal{F}$, de onde pode ser extraído o Liouvilliano generalizado. Para obtê-lo, inicialmente será calculado o primeiro termo em (5.153) e posteriormente adicionados os demais. Assim,

$$\begin{aligned}
L^{[+\mu]}L^{[+\nu]}\mathcal{F} = &-\frac{a^{+\mu}_{(p)}}{2}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left[\left(-\frac{a^{+\nu}_{(p)}}{2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu}\right)\right] - \frac{a^{+\mu}_{(p)}}{2}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left[\left(\frac{e}{2c}a^{+\nu}_{(p)}\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right)\right] + \\
&-\frac{a^{+\mu}_{(p)}}{2}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left[ia^{\nu}_{(p)}\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F}\right] + \frac{e}{2c}a^{+\mu}_{(p)}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a}\left[\left(-\frac{a^{+\nu}_{(p)}}{2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu}\right)\right] + \\
&+\frac{e}{2c}a^{+\mu}_{(p)}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a}\left[\left(\frac{e}{2c}a^{+\nu}_{(p)}\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right)\right] + \frac{e}{2c}a^{+\mu}_{(p)}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a}\left[ia^{\nu}_{(p)}\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F}\right] + \\
&+ia^{\mu}_{(p)}\left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left[\left(-\frac{a^{+\nu}_{(p)}}{2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu}\right)\right] + ia^{\mu}_{(p)}\left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left[\left(\frac{e}{2c}a^{+\nu}_{(p)}\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right)\right] + \\
&+ia^{\mu}_{(p)}\left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left[ia^{\nu}_{(p)}\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F}\right] = m^2\mathcal{F},
\end{aligned} \tag{5.154}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
L^{[+\mu]}L^{[+\nu]}\mathcal{F} = &\frac{1}{4}a^{+\mu}_{(p)}a^{+\nu}_{(p)}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial X^\nu}\mathcal{F}\right) - \frac{e}{4c}a^{+\mu}_{(p)}a^{+\nu}_{(p)}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right) + \\
&-\frac{i}{2}a^{+\mu}_{(p)}a^{\nu}_{(p)}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left[\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F}\right] - \frac{e}{4c}a^{+\mu}_{(p)}a^{+\nu}_{(p)}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu}\right) + \\
&+\frac{e^2}{4c^2}a^{+\mu}_{(p)}a^{+\nu}_{(p)}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right) + \frac{ie}{2c}a^{+\mu}_{(p)}a^{\nu}_{(p)}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a}\left[\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F}\right] + \\
&-\frac{i}{2}a^{\mu}_{(p)}a^{+\nu}_{(p)}\left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu} + \frac{ie}{2c}a^{\mu}_{(p)}a^{+\nu}_{(p)}\left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right) + \\
&-a^{\mu}_{(p)}a^{\nu}_{(p)}\left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F} = m^2\mathcal{F}.
\end{aligned} \tag{5.155}$$

Alguns termos diferenciais em (5.155) precisam ser analisados, como segue abaixo,

$$\begin{aligned}
&(1)\ \frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial X^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\mu}\right) \\
&(2)\ \frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\cancel{\left(\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\right)\right)} + \frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right) = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right) \\
&(3)\ \frac{\partial}{\partial X^\mu}\left[\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F}\right] = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\mathcal{F} + \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\mu} \\
&(4)\ \frac{\partial}{\partial P_a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu} = \frac{\partial}{\partial X^\nu}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a} \\
&(5)\ \frac{\partial}{\partial P_a}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\right) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}\cancel{\frac{\partial}{\partial P_a}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\right)} + \frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial P_a^2} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial P_a^2} \\
&(6)\ \frac{\partial}{\partial P_a}\left[\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\mathcal{F}\right] = \frac{\partial P_\nu}{\partial P_a}\mathcal{F} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial P_a}\mathcal{F}\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a} = \delta_{\nu a}\mathcal{F} + \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}
\end{aligned} \tag{5.156}$$

Para obter a quadruplicação $L^{[+\nu]}L^{[+\mu]}$, é suficiente trocar os índices de $\mu \rightleftharpoons \nu$ na expressão (5.155), cujas derivadas seguem as condições análogas às calculadas em (5.156). E assim, ao realizar a operação (5.153), para cujo desenvolvimento são utilizadas as relações de anticomutação dadas por (5.116)-(5.118), obtém-se:

$$\begin{aligned}&\left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\mu} - \frac{e}{c}\left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a} + \\ &+ \left[a^{+\nu}_{(p)}, a^{\mu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\nu} - \frac{e}{c}\left[a^{+\nu}_{(p)}, a^{\mu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\frac{\partial A_\nu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a} + \\ &- \frac{e}{c}\left(a^{+\mu}_{(p)}a^{\nu}_{(p)} + a^{+\nu}_{(p)}a^{\mu}_{(p)}\right)\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\right)\mathcal{F} = i4m^2\mathcal{F}\end{aligned} \tag{5.157}$$

e a equação de Liouville-von Neumann associada permite determinar que

$$\begin{aligned}L_{FPG_{(EM)}} = &\left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial}{\partial X^\mu} - \left[a^{+\mu}_{(p)}, a^{\nu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a} + \\ &- \frac{e}{2c}\left(a^{+\mu}_{(p)}a^{\nu}_{(p)} + a^{+\nu}_{(p)}a^{\mu}_{(p)}\right)\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\right) - i2m^2\end{aligned} \tag{5.158}$$

é o Liouvilliano generalizado no espaço de fase (relativístico, como nos casos anteriores) correspondente à equação de Fierz-Pauli-Gupta de partícula de massa m, submetida a um campo eletromagnético externo qualquer.

Equação de Duffin-Kemmer-Petiau e de Dirac

Ao considerar a equação de DKP para uma partícula de massa m submetida a um campo eletromagnético externo, as relações que são obtidas são semelhantes ao caso de FPG. Porém, há uma simplificação, já que $b^{+\mu}_{(p)}b^{+\nu}_{(p)} = b^{\mu}_{(p)}b^{\nu}_{(p)} = 0$, devido a ortogonalidade dos projetores ($\mathbf{\Pi}_p$). Com isso, se torna necessário apenas uma análise sobre as condições (5.156), onde os projetores estrela não possuem significado intrínseco à álgebra. Fazendo então uma mudança para os geradores da álgebra de DKP, o Liouvilliano de FPG, com interação eletromagnética, se torna:

$$\begin{aligned}L_{DKP_{(EM)}} = &\left[b^{+\mu}_{(p)}, b^{\nu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial}{\partial X^\mu} - \left[b^{+\mu}_{(p)}, b^{\nu}_{(p)}\right]_+ \left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a} + \\ &- \frac{e}{2c}\left(b^{+\mu}_{(p)}b^{\nu}_{(p)} + b^{+\nu}_{(p)}b^{\mu}_{(p)}\right)\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\right) - i2m^2\end{aligned} \tag{5.159}$$

Diferentemente do caso de DKP e de FPG, os projetores ($\mathbf{\Pi}_p$) e ($\mathbf{\Pi}^\star_p$) não participam da definição dos geradores da álgebra de Dirac. Isto é, as operações envolvendo $c^{+\mu}c^{+\nu}$ e $c^\mu c^\nu$ são necessárias, assim como as condições sobre as derivadas (5.156) as quais, conjuntamente com as relações de anticomutação destes geradores, fazem os respectivos termos serem nulos. Ou seja, não é possível simplificar os termos de (5.153) utilizando apenas a ortogonalidade do projetor, como no caso de DKP. Dessa maneira, obtém-se nesse caso,

$$L_{Dirac_{(EM)}} = g^{\mu\nu}\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial}{\partial X^\mu} - g^{\mu\nu}\left(P_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a} + \\ -\frac{e}{2c}\left(c^{+\mu}c^\nu + c^{+\nu}c^\mu\right)\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\right) - i2m^2 \tag{5.160}$$

ou seja, (5.159) e (5.160) são respectivamente os Liouvillianos generalizados das equações de Duffin-Kemmer-Petiau e de Dirac, descritas no espaço de fase generalizado (relativístico).

Comparando as equações (5.158), (5.159) e (5.160) podemos notar que há uma semelhança formal entre essas devendo-se, no entanto, observar que os geradores presentes em cada uma delas têm características próprias relacionadas ao campo correspondente.

5.5 Interpretações

As interpretações aqui desenvolvidas, tem como base as discussões realizadas inicialmente por Bohm e Hiley (1983), sendo revisitadas por Holland (1986), Fernandes e Vianna (1999).

Nas expressões (5.158), (5.159) e (5.160), o primeiro termo está associado à descrição da trajetória no espaço de fase generalizado, contendo um fator que modifica a equação de Liouville de partícula livre, como visto respectivamente em (5.40), (5.84) e (5.132), por conta do sistema estar sendo submetido a um campo eletromagnético externo.

O segundo termo representa o efeito da força eletromagnética, ou força de Lorentz, capaz de influenciar o comportamento da trajetória no espaço de fase, devido a derivada $\dfrac{\partial}{\partial P_a}$ atuando na função transformada de Wigner-Moyal.

No terceiro termo, como nos casos de Bohm e Hiley (1983), Holland (1986), Fernandes e Vianna (1999), estão presentes entes do tipo $d^{+\mu}_{(p)}d^{\nu}_{(p)}$, $d := (a, b, c_{(0)})$. A interpretação dada por Bohm e Hiley (1983) é que são responsáveis por efeitos "spinoriais", associando-os ao gerador infinitesimal da transformação do grupo de Lorentz, dado por,

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu}(\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^{\mu}\overset{\rightarrow}{\gamma}{}^{\nu} + \overset{\leftarrow}{\gamma}{}^{\nu}\overset{\leftarrow}{\gamma}{}^{\mu}) = \epsilon_{\mu\nu}c^{+\mu}c^{\nu}, \tag{5.161}$$

em se tratando dos geradores de Dirac. Nos demais casos, uma transformação infinitesimal análoga tem expressão diferente. Isto por que, apesar das álgebras serem obtidas a partir dos geradores de Schönberg, estas são extremamente distintas como foi visto nos capítulos anteriores (por exemplo, observe as relações de anticomutação em cada caso).

É importante observar que as partículas bosônicas (spin inteiro) e fermiônicas (spin sem-inteiros) foram analisadas sobre uma mesma estrutura matemática, a álgebra de Schönberg complexada. No entanto, o formalismo matemático desenvolvido por Schönberg deixa invariável este aspecto das partículas, isto por que, os geradores das álgebras de

Dirac, DKP e FPG, obedecem respectivamente a álgebra matricial intrínseca às relações (3.15), (3.30) e (3.47). Sendo assim, podem ser construídos dentro da teoria quântica de campos, diferentes tipos de geradores a partir da álgebra de Schönberg, permanecendo íntegra a natureza fenomenológica e as relações fundamentais que definem essa teoria.

É interessante destacar também quais são os tipos de partículas associadas às equações até então discutidas. Exemplos de bósons e férmions são respectivamente os *mésons* e os *bárions*, que são partículas que interagem através da força forte. Desta maneira, a equação de Fierz-Pauli-Gupta pode ser utilizada para descrever sistemas com bárions de spin 3/2, enquanto a equação de Duffin-Kemmer-Petiau para o caso dos mésons contendo spin 0 e 1. Como ilustração, algumas dessas partículas estão listadas nas tabelas abaixo, onde podem ser observadas algumas de suas principais propriedades como carga, estranheza e meia vida.

partícula	anti-partícula	lê-se	carga (part.) (e)	spin (h/2π)	Estranh.	energia de repouso (MeV)	meia vida (s)	produtos típicos de decaimento
π^+	π^-	pi + ou -	+1	0	0	140	$2{,}4\times10^{-8}$	$\mu^+ + \upsilon_\mu$
π^0	π^0	pi zero	0	0	0	135	$8{,}4\times10^{-17}$	$\gamma + \gamma$
K^+	K^-	kapa-	+1	0	+1	494	$1{,}2\times10^{-8}$	$\mu^+ + \upsilon_\mu$
K^0	$\bar{K}^0$	kapa0	0	0	+1	498	$0{,}9\times10^{-10}$	$\pi^+ + \pi^-$
η	η	éta	0	0	0	549	$8{,}0\times10^{-19}$	$\gamma + \gamma$
ρ^+	ρ^-	ro	+1	1	0	769	$4{,}5\times10^{-24}$	$\pi^+ + \pi^0$
η'	η'	éta linha	0	0	0	958	$2{,}2\times10^{-21}$	$\eta + \pi^+ + \pi^-$
D^+	D^-	dê	+1	0	0	1869	$1{,}1\times10^{-12}$	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
ψ	ψ	psi	0	1	0	3097	$1{,}0\times10^{-20}$	$e^+ + e^-$
B^+	B^-	beta+	+1	0	0	5278	$1{,}2\times10^{-12}$	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Υ	Υ	úpsilon	0	1	0	9460	$1{,}3\times10^{-20}$	$e^+ + e^-$

Figura 1 – Tabela de Mésons. [Fonte: http://wiki.stoa.usp.br/]

partícula	anti-partícula	lê-se	carga (part.) (e)	spin (h/2π)	Estranh.	energia de repouso (MeV)	meia vida (s)	produtos típicos de decaimento
p	$\bar{p}$	próton	+1	1/2	0	938	∞	
n	$\bar{n}$	nêutron	0	1/2	0	940	889	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
Λ^0	$\Lambda^{0\ \mathrm{barra}}$	lambda	0	1/2	-1	1116	$2{,}6\times10^{-10}$	$p + \pi^-$
Σ^+	$\Sigma^{+\ \mathrm{barra}}$	sigma+	+1	1/2	-1	1189	$0{,}8\times10^{-10}$	$p + \pi^0$
Σ^0	$\Sigma^{0\ \mathrm{barra}}$	sigma0	0	1/2	-1	1192	$5{,}8\times10^{-20}$	$\Lambda^0 + \gamma$
Σ^-	$\Sigma^{-\ \mathrm{barra}}$	sigma-	-1	1/2	-1	1197	$1{,}5\times10^{-10}$	$n + \pi^-$
Ξ^0	$\Xi^{0\ \mathrm{barra}}$	xsi0	0	1/2	-2	1315	$2{,}9\times10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^0$
Ξ^-	$\Xi^{-\ \mathrm{barra}}$	xsi-	-1	1/2	-2	1321	$1{,}6\times10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^-$
Δ^*	$\Delta^{*\ \mathrm{barra}}$	delta	+2,+1,0,-1	3/2	0	1232	6×10^{-24}	$p + \pi$
Σ^*	$\Sigma^{*\ \mathrm{barra}}$	sigma	+1,0,-1	3/2	-1	1385	2×10^{-23}	$\Lambda^0 + \pi$
Ξ^*	$\Xi^{*\ \mathrm{barra}}$	xsi	-1,0	3/2	-2	1530	6×10^{-23}	$\Xi + \pi$
Ω^-	$\Omega^{-\ \mathrm{barra}}$	ômega	-1	3/2	-3	1672	$8{,}2\times10^{-11}$	$\Lambda^0 + K^-$

Figura 2 – Tabela de Bárions. [Fonte: http://wiki.stoa.usp.br/]

Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho, obtivemos a equação de Fierz-Pauli-Gupta (FPG) no espaço de fase generalizado, a partir da formulação de Bohm e Hiley para uma teoria quântica no espaço de fase, ou seja, encontramos a equação de Liouville-von Neumann associada ao campo de FPG, obtendo o operador Liouvilliano no espaço de fase relativístico e ampliado (há matrizes não-hermitianas). Rediscutimos também as equações de Dirac e de Duffin-Kemmer-Petiau, respectivamente estudadas por: (1) D. Bohm, B. J. Hiley e P. R. Holland; (2) M. C. B. Fernandes e J. D. M. Vianna.

Para determinar a equação tipo Liouville foi necessário desenvolver uma nova estrutura matemática, considerando os geradores da álgebra de Schönberg. Como consequência, obtivemos o que denominamos de "Álgebra de Fierz-Pauli-Gupta", expandindo a "Álgebra G_n" de Schönberg para o espaço complexo. Apesar da álgebra spinorial[4] G_4 (descrita no espaço de Minkowski) ser caso particular de G_n, ampliamos as análises para quaisquer ordens "p, n". Nesta álgebra estendida, surge o ente "Projetor Estrela", que possui semelhanças com o operador projeção usual de Schönberg, com propriedades análogas; no entanto, o projetor estrela possui características distintas pois amplia a projeção do ente aplicado para o espaço complexo.

Nos casos da álgebra de Dirac e de DKP, encontramos novos resultados que as correlacionam e explicitamos novas regras de comutação para quaisquer ordem "p, n" dos geradores de DKP. Como Schönberg indica, é possível construir a álgebra de Dirac a partir da álgebra de DKP, considerando o universo de todos os projetores sobre esta última. Assim, pode-se afirmar que a álgebra de Clifford é mais ampla que a de DKP. Por outro lado, determinamos uma relação geral entre as álgebras de DKP ($\forall p$) e de Dirac, onde é necessário a soma de geradores de DKP de ordens p e $p-1$ na mesma métrica, estabelecendo uma regra de anticomutação entre os geradores de Dirac e o projetor de Schönberg.

Para obter a álgebra de Dirac, a partir da álgebra de FPG, existem duas possibilidades: considerar o universo de todos os geradores de FPG, mais um fator complexo multiplicativo $(n; \mathbf{1})$ no gerador de Dirac, onde $dim(\mathbb{V}) = n$; ou o método mais fácil, que é utilizar o limite máximo de $p = dim(\mathbb{V})$ e, assim, as álgebras passam a coincidir. Uma outra demonstração importante é que a relação de anticomutação dos geradores de FPG mais simples, ou seja $p = 0$, fornece a relação de anticomutação de Dirac complexada.

Este trabalho, em conjunto com seus predecessores, demonstrou a possibilidade de se utilizar o método de Bohm e Hiley e a álgebra de Schönberg, para encontrar uma

[4] Denominação de Schönberg (1957b).

equação de Louville-von Neumann associada a uma equação de campo de spin superior, o que permite inferir a sua viabilidade para qualquer outra da Teoria Quântica de Campos. A possibilidade de utilizar ideias fundamentais para determinar estruturas matemáticas inéditas dentro deste formalismo, além das interpretações dos fenômenos físicos que podem ser realizadas, fomenta grandes motivações.

As perspectivas deste trabalho são muitas mas citaremos algumas das principais: (1) Determinar os geradores da álgebra de Schönberg para o campo de Rarita-Schwinger para partículas de spin 3/2, comparando-a com as propostas neste trabalho. Obter, em seguida, os operadores Liouvillianos generalizados (livre e com interação eletromagnética) e compará-los àqueles aqui encontrados; (2) Desenvolver uma estrutura matemática baseada na álgebra de Schönberg complexada, que tenha aspecto geral na descrição de partículas; (3) Resolver as equações de Liouville-von Neumann, impondo sobre as partículas determinados potenciais. Por exemplo, no caso da equação de Duffin-Kemmer-Petiau, utilizar o potencial de Yukawa de partículas de spin 0, que tem característica de potencial do tipo campo central. Verificar a possibilidade de comparações com resultados experimentais e/ou computacionais.

Referências

AMORIM, R. Física quântica no espaço de fase. *Sitientibus Série Ciências Físicas*, v. 07, p. 1–12, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 99.

BARATA, J. C. A. *Curso de Física-Matemática*. Departamento de Física Matemática, Universidade de São Paulo, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

BERRY, M. V. Semi-classical mechanics in phase space: A study of Wigner's function. *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, A 287, p. 237–271, 1977. Citado na página 89.

BOHM, D.; HILEY, B. J. On quantum algebric approach to a generalized phase space. *Foundations of Physics*, v. 11, n. 3/4, p. 179, 1981. Citado 16 vezes nas páginas 12, 13, 53, 89, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105 e 106.

BOHM, D.; HILEY, B. J. *Old and New Questions in Physics, Cosmology, Phylosophy and Theoritical Biology*. Plenum, New York: A. van der Merwe, 1983. Citado 15 vezes nas páginas 12, 13, 53, 74, 77, 84, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 113, 119 e 129.

BROGLIE, L. de. *Théorie Générale des Particules à spin (méthode de fusion)*. Paris: Gauthiers-Villars, 1943. Citado na página 83.

CARTWRIGHT, N. D. A non-negative Wigner-type distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 83, n. 1, p. 210–212, 1976. Citado na página 99.

CLIFFORD, W. K. Applications of Grassmann's Extensive Algebra. *American Journal of Mathematics*, v. 1, p. 350–358, 1878. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

DIRAC, P. A. M. On quantum algebra. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 23, p. 412–418, 1926. Citado na página 91.

DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Serie A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. Citado 5 vezes nas páginas 11, 60, 75, 76 e 77.

DUFFIN, R. J. On the characteristic matrices of covariant systems. *Physical Review*, v. 54, p. 1114–1114, 1938. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 79.

FERNANDES, L. A. F.; LAVOR, C.; NETO, M. M. O. *Álgebra Geométrica e Aplicações*. 1ª. ed. São Carlos, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2017. Citado na página 15.

FERNANDES, M. C. B. *Álgebras de Duffin-Kemmer-Petiau e Espaço de Fase Generalizado*. Dissertação (Dissertação de Mestrado. Orientador: Vianna, J. D. M.) — Departamento de Física, Universidade de Brasília, 1991. Citado 15 vezes nas páginas 12, 14, 54, 60, 77, 104, 105, 106, 107, 108, 110, 111, 112, 113 e 143.

FERNANDES, M. C. B.; VIANNA, J. D. M. On the generalized phase space approach to Duffin-Kemmer-Petiau particles. *Foundations of Physics*, v. 9, n. 2, p. 201–219, 1999. Citado 11 vezes nas páginas 12, 13, 14, 60, 84, 89, 106, 113, 116, 117 e 129.

FIERZ, M.; PAULI, W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 173, n. 953, p. 211–232, 1939. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 83.

FOCK, V. A. Zur Schrödingerschen Wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, v. 38, p. 242–250, 1926. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 74.

GEORGE, C.; PRIGOGINE, I. Coherence and randomness in quantum theory. *Physica 99A*, p. 369–382, 1979. Citado na página 12.

GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, v. 131, p. 2766–2788, 1963. Citado na página 89.

GLAUBER, R. J. *Quantum Optics and Electronics*. edited by C. DeWitt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji. New York: Gordon and Breach, 1965. Citado na página 89.

GORDON, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, v. 40, p. 117–133, 1926. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 74.

GRASSMANN, H. G. *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig: [s.n.], 1844. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 13.

GROENEWOLD, H. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, v. 12 (Issue 7), p. 405–460, 1946. Citado na página 88.

GUPTA, K. K. On the Fierz-Pauli equation for particles of spin 3/2. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Section A*, v. 35, p. 255, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 83.

GUPTA, S. N. Fierz-Pauli theory of particles of spin 3/2. *Physical Review*, v. 95, n. 5, p. 1334, 1954. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 83.

HAMILTON, W. R. On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, v. 2, p. 424–434, 1843. Citado na página 11.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2ª. ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1971. Citado na página 15.

HOLLAND, P. R. Relativistic algebric spinors and quantum motions in phase space. *Foundations of Physics*, v. 16, n. 8, p. 701, 1986. Citado 8 vezes nas páginas 12, 13, 77, 84, 89, 106, 108 e 129.

HUSIMI, K. Some formal properties of the density matrix. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, v. 22, p. 264–314, 1940. Citado na página 89.

JANCEWICZ. *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*. New Jersey, Bernard: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1988. Citado 3 vezes nas páginas 28, 41 e 52.

JUNIOR, F. V.; JUNIOR, R. R. *Álgebras de Clifford e Espinores*. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 11, 28, 42, 137, 139 e 141.

KEMMER, N. The particle aspecto of meson theory. *Proc. R. Soc. A*, v. 173, p. 91, 1939. Citado 4 vezes nas páginas 77, 79, 80 e 115.

KERMACK, W. O.; MCCREA, W. H. On Professor Whittaker's solution of differential equations by definite integrals: Part I. *Proccedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 2(4), p. 205–219, 1931. Citado na página 90.

KERMACK, W. O.; MCCREA, W. H. On Professor Whittaker's solution of differential equations by definite integrals: Part II: Applications of the methods of non-commutative algebra. *Proccedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 2(4), p. 220–239, 1931. Citado na página 90.

KERMACK, W. O.; MCCREA, W. H. XXII — An operational method for the solution of linear partial differential equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, v. 51, p. 176–189, 1932. Citado 3 vezes nas páginas 90, 91 e 92.

KIRKWOOD, J. G. Quantum statistics of almost classical assemblies. *Physical Review*, v. 44, p. 31–37, 1933. Citado na página 89.

KLEIN, O. B. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, v. 37, p. 895–906, 1926. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 74.

KOOPMAN, B. Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 17, n. 5, p. 315–318, 1931. Citado na página 12.

LEE, H. W.; SCULLY, M. O. The Wigner phase-space description of collision processes. *Foundations of Physics*, v. 13, p. 61–72, 1983. Citado na página 89.

MARKOV, Y.; MARKOVA, M.; BONDARENKO, A. Fourth order wave equation in Bhabha-Madhavarao spin-$\frac{3}{2}$ theory. *International Modern Physics*, A32, p. 1750144, 2017. Citado na página 84.

MISRA, B. Nonequilibrium entropy, Lyapounov variables, and ergodic properties of classiacal systems. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 75, n. 4, p. 1627–1631, 1978. Citado na página 12.

MISRA, B.; PRIGOGINE, I.; COURBAGE, M. From deterministic dynamics to probabilistic descriptions. *Physica 98A*, p. 1–26, 1979. Citado na página 12.

MISRA, B.; PRIGOGINE, I.; COURBAGE, M. Lyapounov variable: Entropy and measurement in quantum mechanics. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 76, n. 10, p. 4768–4772, 1979. Citado na página 12.

MOYAL, J. *Mathematical Proceedings of Cambrigde Philosophical Society*, v. 45(1), p. 99–124, 1949. Citado 8 vezes nas páginas 13, 88, 89, 90, 92, 93, 106 e 110.

O'CONNELL, R. F.; WIGNER, E. P. Some properties of a non-negative quantum-mechanical distribution function. *Physics Letters A*, v. 85, n. 3, p. 121–126, 1981. Citado na página 99.

P., C.; ZACHARIASEN, F. Quantum collision theory with phase-space distributions. *Reviews of Modern Physics*, v. 55, p. 245, 1983. Citado na página 89.

PETIAU, G. Contribuition à la théorie des équations d'ondes corpusculaires. *Académie Royale de Belgique. Collection: Mémories de la Classe de Sciences*, v. 16 (Format 8; Fascicule 2), n. 1496, p. 118, 1936. Citado na página 77.

PRIGOGINE, I. et al. Unified formulation of dynamics and thermodynamics. *Chemica Scripta*, v. 4, p. 5–32, 1973. Citado na página 12.

PRIGOGINE, I. et al. Microscopic theory of irreversible process. *Proceedings National Academy Sciences USA*, v. 74, n. 10, p. 4152–4156, 1977. Citado na página 12.

RAMOS, M. D. C. P. *Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat*. Tese (Doutorado) — Universidade do Porto, 2013. Citado na página 11.

SCHÖNBERG, M. On the Grassmann and Clifford algebras I. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 28, p. 11, 1956. Citado 5 vezes nas páginas 12, 54, 57, 84 e 106.

SCHÖNBERG, M. Quantum kinematics and geometry. *Nuovo Cimento. (Supp.6). Serie X*, p. 356, 1957. Citado 12 vezes nas páginas 12, 14, 54, 57, 59, 60, 63, 71, 74, 82, 84 e 106.

SCHÖNBERG, M. Quantum mechanics and geometry. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, n. 29, p. 473, 1957. Citado 18 vezes nas páginas 12, 14, 54, 60, 63, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 81, 82, 84, 106, 112, 131 e 145.

SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical. *Physical Review Letters*, v. 10, p. 277–279, 1963. Citado na página 89.

TAKAHASHI, K. Distribution functions in classical and quantum mechanics. *Progress of Theoretical Physics Supplements*, v. 98, p. 109–156, 1989. Citado na página 89.

TAKAHASHI, Y. *An Introduction to Fied Quantization*. 1. ed. [S.l.]: Pergamon Press, 1969. Citado 5 vezes nas páginas 13, 80, 82, 83 e 84.

VIANNA, J. D. M. *Notas da disciplina FISC47-Tópicos de Física matemática*. Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador - Brasil, 2012. Citado na página 28.

WHITTAKER, E. T. On the solution of differential equations by definite integrals. *Proccedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 2(4), p. 189–204, 1931. Citado na página 90.

WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, v. 40, p. 749–759, 1932. Citado 8 vezes nas páginas 11, 12, 13, 88, 89, 93, 99 e 106.

APÊNDICE A – Ideais Bilaterais

Neste apêndice, seguimos em linhas gerais, o livro de Junior e Junior (2012).

Relações e Classes de Equivalência

Seja um conjunto X contendo os elementos $\{..., x, y, z, ...\}$. Uma relação de equivalência R (ou "$\sim$") entre os elementos desse conjunto é tal que possui as seguintes propriedades:

$$\forall x \in X, xRx \qquad \text{(Reflexiva)} \tag{A.1}$$

$$\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow yRx \qquad \text{(Simétrica)} \tag{A.2}$$

$$\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \qquad \text{(Transitiva)} \tag{A.3}$$

Uma classe de equivalência $[x]$ é definida como o conjunto de todos os elementos equivalentes a x em X. Simbolicamente,

$$[x] = \{y \in X \mid yRx\}. \tag{A.4}$$

O conjunto das classes de equivalência, que são disjuntas entre si, é escrito como:

$$\mathcal{X} = X/R = X/\sim = \{[x] \mid x \in X\} \tag{A.5}$$

Ideais

Seja dada uma álgebra $\mathcal{A}$. Então, são válidas as classificações:

(i) Ideal à esquerda: um conjunto $\mathcal{I}_L \subset \mathcal{A}$ é ideal à esquerda de $\mathcal{A}$ quando,

$$\forall a \in \mathcal{A} \wedge \forall x \in \mathcal{I}_L \Rightarrow ax \in \mathcal{I}_L \tag{A.6}$$

(ii) Ideal à direita: um conjunto $\mathcal{I}_R \subset \mathcal{A}$ é ideal à direita de $\mathcal{A}$ quando,

$$\forall a \in \mathcal{A} \wedge \forall x \in \mathcal{I}_R \Rightarrow xa \in \mathcal{I}_R \tag{A.7}$$

(iii) Ideal bilateral (ou apenas Ideal): um conjunto $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ é ideal de $\mathcal{A}$ quando,

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \wedge \forall x \in \mathcal{I} \Rightarrow axb \in \mathcal{I} \tag{A.8}$$

Álgebra Quociente

Seja dada uma álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não se supõe, a priori, que sejam subálgebras ou que os espaços vetoriais relacionados sejam uma soma direta. Seja então a definição da relação de equivalência sobre a álgebra $\mathcal{A}$,

$$a \sim b \iff a = b + x, \quad x \in \mathcal{C} \tag{A.9}$$

Pela definição de espaço vetorial associado às álgebras, o conjunto das classes de equivalência $\mathcal{A}/\sim$, possui uma estrutura matemática onde é possível escrever: uma soma de vetores, tal que:

(a) Soma vetorial,

$$[a + b] = [a] + [b] \tag{A.10}$$

(b) Multiplicação por um escalar $\theta \in \mathbb{K}$,

$$\theta[a] = [\theta a] \tag{A.11}$$

Com as operações de soma e multiplicação por um escalar, se for definível um produto das classes de equivalência, então o conjunto $\mathcal{A}/\sim$ destas classes será uma álgebra. Dessa forma, se $[a], [b] \in \mathcal{A}$, é natural definir:

$$[a][b] = [ab] \tag{A.12}$$

o que, a partir de (A.9) e da propriedade reflexiva das relações de equivalência,

$$[a] = [a + x] \quad , \quad [b] = [b + y] \qquad \forall x, y \in \mathcal{C} \tag{A.13}$$

onde, substituindo em (),

$$[a][b] = [a + x][b + y] = [(a + x)(b + y)] = [ab + ay + xb + xy]$$
$$[ab] = [ab + ay + xb + xy] \tag{A.14}$$

Fica evidente que o resultado (A.14) demonstra que,

$$\forall a, b \in \mathcal{C}, \ \forall x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow ay + xb + xy \in \mathcal{C} \tag{A.15}$$

ou seja, é necessário e suficiente que $\mathcal{C}$ seja um ideal (bilateral) para que se tenha uma álgebra do conjunto das classes de equivalência $\mathcal{A}/\sim$. Assim, tem-se uma *Álgebra Quociente* de $\mathcal{A}$ pelo ideal $\mathcal{C}$, simbolicamente expressa como $\mathcal{A}/\mathcal{C}$.

APÊNDICE B – Álgebra Exterior como quociente da Álgebra Tensorial

Neste apêndice, seguimos em linhas gerais, o livro de Junior e Junior (2012).

Seja $T(\mathbb{V})$ a álgebra dos tensores contravariantes e seu ideal $\mathcal{I}_E$, gerado pelos elementos na forma $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Ou seja, esse ideal é construído a partir de todas as somas,

$$\sum_i A_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes B_i \tag{B.1}$$

sendo $\mathbf{v}_i \in \mathbb{V}$ e $A_i, B_i \in T(\mathbb{V})$. E mais ainda, que o ideal é gerado por elementos na forma $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, com $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \in \mathbb{V}$. É importante destacar que, para o operador linear denominado alternador (II), tem-se que:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in ker(\mathrm{II}) \Longrightarrow \mathrm{II}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = 0 \tag{B.2}$$

Há uma relação de isomorfismo entre a álgebra exterior e a álgebra quociente $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_E$. Para realizar essa demonstração, será estabelecida uma relação de equivalência entre as mesmas. Utilizando a discussão do apêndice A, onde $\mathcal{C} = \mathcal{I}_E$, segue que:

$$A \sim B \Longrightarrow A = B + c, \qquad c \in \mathcal{I}_E, \tag{B.3}$$

A classe de equivalência de A é $[A]$, e o produto das classes é dado por:

$$[A] \wedge [B] = [A \otimes B]. \tag{B.4}$$

Naturalmente que $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}$ e $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$; logo, o produto tensorial entre os mesmos pode ser expresso como:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \tag{B.5}$$

onde o último termo do lado direito pertence ao ideal $\mathcal{I}_E$. Como pode ser verificado,

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = ((\mathbf{v} + \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} + \mathbf{u}) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \tag{B.6}$$

Portanto, a partir da relação de equivalência é possível dizer que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &\sim \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &\sim \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{B.7}$$

e mais ainda, que $[\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}] = [\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}]$ e $[\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}] = [\mathbf{v}] \wedge [\mathbf{u}]$. Generalizando o resultado,

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p \sim \amalg(\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_p) = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_p \tag{B.8}$$

Logo, fica demonstrado que existe um isomorfismo tal que a álgebra exterior é quociente da álgebra tensorial, ou seja,

$$\bigwedge(\mathbb{V}) = T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_E. \tag{B.9}$$

APÊNDICE C – Álgebra de Clifford como Quociente da Álgebra Tensorial

Neste apêndice, seguimos em linhas gerais, o livro de Junior e Junior (2012).

Sejam um espaço quadrático $(\mathbb{V}, g)$ e uma álgebra tensorial contravariante $T(\mathbb{V})$. Um ideal $\mathcal{I}_C$ de $T(\mathbb{V})$ tem geradores $\mathcal{B}(\mathcal{I}_C) = \{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - Q(\mathbf{v})\mathbf{1}_T\}$, de sorte que os elementos pertencentes a esse ideal tem forma

$$C = \sum_i A_i \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - Q(\mathbf{v})\mathbf{1}_T) \otimes B_i \tag{C.1}$$

para os elementos $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ e $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, A_i, B_i, C \in T(\mathbb{V})$ e a forma quadrática $Q(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ sendo que, para o operador linear alternador (Ⅱ), tem-se que:

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - Q(\mathbf{v})\mathbf{1}_T \in ker(\text{Ⅱ}) \Longrightarrow \text{Ⅱ}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - Q(\mathbf{v})\mathbf{1}_T) = 0.$$

De forma similar, é possível construir um gerador para o ideal $\mathcal{I}_C$ de $T(\mathbb{V})$, a partir da definição acima, tal que:

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{1}_T) + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - g(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{1}_T) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{1}_T, \tag{C.2}$$

que também é um kernel do alternador Ⅱ, como demonstrado a seguir,

$$\begin{aligned} \text{Ⅱ}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{1}_T) &= \text{Ⅱ}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) + \text{Ⅱ}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) - \text{Ⅱ}(2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{1}_T) \\ &= \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Uma álgebra quociente $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_c$ pode ser determinada através da relação de equivalência,

$$A \sim B \Longrightarrow A = B + c, \quad c \in \mathcal{I}_C, \tag{C.3}$$

onde o produto das respectivas classes de equivalência $\odot$ é dado por:

$$[A] \odot [B] = [A \otimes B]. \tag{C.4}$$

Para analisar a relação de equivalência e este produto, o procedimento adotado será análogo à determinação da álgebra exterior como quociente da álgebra tensorial

$\bigwedge(\mathbb{V}) = T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_E$, demonstrado no apêndice B. Estendendo o gerador $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ utilizado no caso da álgebra exterior, considerando agora a forma bilinear, é possível realizar uma transformação,

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - g(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{1}_T, \tag{C.5}$$

e, desta forma obtém-se, a menos da forma bilinear em (B.5), a equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = &\frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}))+ \\ &+\frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - g(\mathbf{u}, \mathbf{v})), \end{aligned} \tag{C.6}$$

ou seja,

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})), \tag{C.7}$$

sendo que o segundo termo à direita é o gerador do ideal $\mathcal{I}_C$, definido na expressão (C.2).

A partir da relação de equivalência é possível concluir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &\sim \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &\sim \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \end{aligned} \tag{C.8}$$

definindo um produto na álgebra quociente $T(\mathbb{V})/\mathcal{I}_C$ e dessa forma,

$$\mathbf{v} \odot \mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + g(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{C.9}$$

APÊNDICE D – Principais Demonstrações

Relação entre as álgebras $\mathcal{D}_{n,p}$ e de DKP

Demonstração de (37)[1]

Utilizando as proposições 34 e 35, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)} &= \Big[(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) + g_{\mu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)\Big]\Big[(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\nu) + g_{\nu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)\Big] \\
&= (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\nu) + g_{\nu\theta}(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p) + g_{\mu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\nu) \\
&+ g_{\mu\theta}g_{\nu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p) \\
&= g_{\nu\theta}(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p) + g_{\mu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\nu) \\
&= g_{\nu\theta}(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p) + g_{\mu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{I}_\nu)(\mathbf{\Pi}_{p+1})
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Multiplicando (D.1) por um tensor conveniente,

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)} &= g^{\mu\nu}g_{\nu\theta}(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p) + g^{\mu\nu}g_{\mu\theta}(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{I}_\nu)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) \\
&= \delta_\theta^\mu(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{\Pi}_p) + \delta_\theta^\nu(\mathbf{I}^\theta)(\mathbf{I}_\nu)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) \\
&= (\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\mu)(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{I}^\mu)(\mathbf{I}_\nu)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) && \textit{(convenção de Einstein)} \\
&= \sum_\mu(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{I}^\mu)(\mathbf{\Pi}_p) + \sum_\mu(\mathbf{I}^\mu)(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) \\
&= \sum_\mu\left\{\mathbf{1} - (\mathbf{I}^\mu)(\mathbf{I}_\mu)\right\}(\mathbf{\Pi}_p) + \sum_\mu(\mathbf{I}^\mu)(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_{p+1}) \\
&= (\bar{\mathbf{N}})(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{N})(\mathbf{\Pi}_{p+1}) && \textit{(ver (2.157))} \\
&= (\mathbf{\Pi}_p)(\bar{\mathbf{N}}) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{N})
\end{aligned} \tag{D.2}$$

onde é direta a demonstração que $[(\bar{\mathbf{N}}), (\mathbf{\Pi}_p)]_- = [(\mathbf{N}), (\mathbf{\Pi}_{p+1})]_- = 0$. Como,

$$(\mathbf{N}) + (\bar{\mathbf{N}}) = \mathbf{1}_{G_n} \tag{D.3}$$

o resultado (D.2) é reescrito preliminarmente como:

$$g^{\mu\nu}\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)} = (\mathbf{\Pi}_p)\left\{\mathbf{1}_{G_n} - (\mathbf{N})\right\} + (\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{N}) \tag{D.4}$$

que, sobre um ente $\psi \in G_n(\mathbf{P})$, fornece

$$g^{\mu\nu}\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)}(\psi) = (\mathbf{\Pi}_p)\left\{\mathbf{1}_{G_n} - (\mathbf{N})\right\}(\psi) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{N})(\psi) \tag{D.5}$$

[1] Esta demonstração está parcialmente presente na dissertação de Fernandes (1991). Foram complementados a esta, os resultados (D.8) e (D.9)

É conveniente, neste momento, demonstrar algumas propriedades.

$$
\begin{aligned}
Prop.1: \quad \sum_{p=0}^{3} p(\mathbf{\Pi}_p) &= (\mathbf{\Pi}_1) + (\mathbf{\Pi}_2) + (\mathbf{\Pi}_2) + (\mathbf{\Pi}_3) + (\mathbf{\Pi}_3) + (\mathbf{\Pi}_3) \\
&= \cancel{(\mathbf{\Pi}_0)} + \cancel{(\mathbf{\Pi}_1)} + \cancel{(\mathbf{\Pi}_2)} + (\mathbf{\Pi}_2) + \cancel{(\mathbf{\Pi}_3)} + (\mathbf{\Pi}_3) + (\mathbf{\Pi}_3) - (\mathbf{\Pi}_0) \\
&= \sum_{p=0}^{3} (\mathbf{\Pi}_p) - (\mathbf{\Pi}_0) + (\mathbf{\Pi}_2) + 2(\mathbf{\Pi}_3) \\
&= \sum_{p=0}^{3} (\mathbf{\Pi}_p) + (0-1)(\mathbf{\Pi}_0) + (1-1)(\mathbf{\Pi}_1) + (2-1)(\mathbf{\Pi}_2) + (3-1)(\mathbf{\Pi}_3) \\
&= \sum_{p=0}^{3} (\mathbf{\Pi}_p) + \sum_{p=0}^{3} (p-1)(\mathbf{\Pi}_p) \\
&= \mathbf{1}_{G_3} + \sum_{p=0}^{3} (p-1)(\mathbf{\Pi}_p) \\
\therefore \sum_{p=0}^{3} p(\mathbf{\Pi}_p) &+ \sum_{p=0}^{3} (1-p)(\mathbf{\Pi}_p) = \mathbf{1}_{G_3},
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

que, extendendo para o caso geral, seria:

$$
\sum_p p(\mathbf{\Pi}_p) + \sum_p (1-p)(\mathbf{\Pi}_p) = \mathbf{1}_{G_n}. \tag{D.7}
$$

Utilizando a expressão (D.3) convenientemente, é possível afirmar que:

$$
(\mathbf{N}) = \sum_p p(\mathbf{\Pi}_p) \quad , \quad (\bar{\mathbf{N}}) = \sum_p (1-p)(\mathbf{\Pi}_p). \tag{D.8}
$$

*Prop.*2 : Um outro resultado importante é calcular o projetor e (D.8) aplicado em (ψ),

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{N})(\psi) &= (\mathbf{\Pi}_p) \sum_q q(\mathbf{\Pi}_q)(\psi) && \textit{(ver (D.8))} \\
&= \sum_q q(\mathbf{\Pi}_q)(\mathbf{\Pi}_p)(\psi) && \textit{(ver proposição 34)} \\
&= \sum_q q\delta_{q,p}(\mathbf{\Pi}_q)(\psi) = p(\mathbf{\Pi}_p)(\psi) \\
\therefore (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{N})(\psi) &= p(\mathbf{\Pi}_p)(\psi).
\end{aligned}
\tag{D.9}
$$

Com isso é possível determinar, a partir de (D.5)

$$
g^{\mu\nu}\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)}(\psi) = (1-p)(\mathbf{\Pi}_p)(\psi) + (p+1)(\mathbf{\Pi}_{p+1})(\mathbf{N})(\psi) \tag{D.10}
$$

demonstrando que os coeficientes na expressão (D.10), precisam ser diferentes para que os elementos $(\mathbf{\Pi}_p)$ e $(\mathbf{\Pi}_{p+1})$ sejam da álgebra DKP, o que é evidente em

$$
1 - p \neq p + 1 \tag{D.11}
$$

introduzindo a constante n (onde n=1 é caso particular) em (D.7),

$$\sum_p p(\mathbf{\Pi}_p) + \sum_p (n-p)(\mathbf{\Pi}_p) = n\mathbf{1}_{G_n} \tag{D.12}$$

encontra-se a relação (3.42) escrita por Schönberg (1957b),

$$g^{\mu\nu}\beta_\mu^{(p)}\beta_\nu^{(p)} = (n-p)(\mathbf{\Pi}_p) + (p+1)(\mathbf{\Pi}_{p+1})$$

o que não muda as propriedades da álgebra G_n e conduz a análises mais gerais,

$$n - p \neq p + 1 \Longrightarrow p \neq \frac{n-1}{2} \tag{D.13}$$

demonstrando que os projetores $(\mathbf{\Pi}_p)$ e $(\mathbf{\Pi}_{p+1})$ pertencem à álgebra DKP. Falta determinar os geradores de $\mathcal{D}_{n,p} \equiv$ DKP que, a partir de (3.39),

$$\beta_\mu^{(p)}(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu)(\mathbf{\Pi}_p) + g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p) = g_{\mu\nu}(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p) \tag{D.14}$$
$$(\mathbf{\Pi}_p)\beta_\mu^{(p)} = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) + g_{\mu\nu}(\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}^\nu)(\mathbf{\Pi}_p) = (\mathbf{\Pi}_p)(\mathbf{I}_\mu) \tag{D.15}$$

o que completa a demonstração.

Analisando a definição 37 verifica-se o caso particular

$$p = \frac{n-1}{2} \tag{D.16}$$

onde os valores de n devem ser ímpares pois p é inteiro. Isso fornece apenas o elemento unidade "$(\mathbf{\Pi}_p) + (\mathbf{\Pi}_{p+1})$" da álgebra $\mathcal{D}_{n,p}$ tornando impossível recuperar a álgebra DKP.

Demonstração de 38*(ii)*

Lembrando que para $dim(\mathbb{V}) = n$, tem-se $\forall k,\ j_k = 0, 1, 2, ..., n$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}^{j_1\cdots j_{n+1}}_{j_1\cdots j_{n+1}}) &= (\mathbf{I}^{j_1})\cdots(\mathbf{I}^{j_{n+1}})(\mathbf{P})(\mathbf{I}_{j_{n+1}})\cdots(\mathbf{I}^{j_1}) \\
&= (-1)^n(\mathbf{I}^{j_{n+1}})(\mathbf{P}^{j_1\cdots j_n}_{j_1\cdots j_n})(-1)^n(\mathbf{I}_{j_{n+1}}) \\
&= (\mathbf{I}^{j_{n+1}})(\mathbf{P}^{j_1\cdots j_n}_{j_1\cdots j_n})(\mathbf{I}_{j_{n+1}}) = 0 \\
&\therefore (\mathbf{\Pi}_{n+1}) = 0
\end{aligned}$$

Relações Notáveis para a equação de Fierz-Pauli-Gupta

Demonstração de (5.102)

$$\overleftarrow{\gamma}^\mu\overrightarrow{\eta}_\nu = \overleftarrow{\gamma}^\mu\{2(\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)})^2 - \mathbf{1}\} = 2\overleftarrow{\gamma}^\mu\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)} - \overleftarrow{\gamma}^\mu = 2\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overleftarrow{\gamma}^\mu - \overleftarrow{\gamma}^\mu = \overrightarrow{\eta}_\nu\overleftarrow{\gamma}^\mu$$

Demonstração de (5.103)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\gamma}^\mu\overrightarrow{\eta}_\nu &= \overrightarrow{\gamma}^\mu\{2(\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)})^2 - \mathbf{1}\} = 2\overrightarrow{\gamma}^\mu\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)} - \overrightarrow{\gamma}^\mu = -2\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overrightarrow{\gamma}^\mu\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)} - \overrightarrow{\gamma}^\mu \\
&= 2\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overrightarrow{\gamma}^\mu - \overrightarrow{\gamma}^\mu = \{2\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)}\overrightarrow{\beta}_\nu^{(p)} - \mathbf{1}\}\overrightarrow{\gamma}^\mu = \overrightarrow{\eta}_\nu\overrightarrow{\gamma}^\mu
\end{aligned}$$

Demonstração de (D.17)

Uma questão implícita na discussão da equação de FPG, é determinar como os entes $\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega$ e $\overrightarrow{\eta}_5\overleftarrow{\eta}_5$ se relacionam com $\overset{\rightleftarrows}{\beta}{}^{(p)}_{\mu}$ e $\overset{\rightleftarrows}{\gamma}{}^{\mu}$. Considerando as regras (5.100)-(5.103), tem-se

$$\left[\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}, \overset{\rightleftarrows}{\beta}{}^{(p)}_{\mu}\right]_{-} = 0 \tag{D.17}$$

então, segue que:

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu} &= i\overleftarrow{\gamma}^{4}\overleftarrow{\gamma}^{3}\overleftarrow{\gamma}^{2}\overleftarrow{\gamma}^{1}\overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu} = (-1)^4\overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}i\overleftarrow{\gamma}^{4}\overleftarrow{\gamma}^{3}\overleftarrow{\gamma}^{2}\overleftarrow{\gamma}^{1} = \overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}\overleftarrow{\gamma}^{5}\\
\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu} &= i\overrightarrow{\gamma}^{1}\overrightarrow{\gamma}^{2}\overrightarrow{\gamma}^{3}\overrightarrow{\gamma}^{4}\overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu} = \overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}i\overrightarrow{\gamma}^{1}\overrightarrow{\gamma}^{2}\overrightarrow{\gamma}^{3}\overrightarrow{\gamma}^{4} = \overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}\overrightarrow{\gamma}^{5}\\
\therefore\ \overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu} &= \overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}\overleftarrow{\gamma}^{5} = \overleftarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}
\end{aligned}$$

Demonstração de (5.104)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega &= \overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\overrightarrow{\eta}_5\overleftarrow{\eta}_5 = i\overrightarrow{\gamma}^{1}\overrightarrow{\gamma}^{2}\overrightarrow{\gamma}^{3}\overrightarrow{\gamma}^{4}i\overleftarrow{\gamma}^{4}\overleftarrow{\gamma}^{3}\overleftarrow{\gamma}^{2}\overleftarrow{\gamma}^{1}\overrightarrow{\eta}_5\overleftarrow{\eta}_5\\
&= \overrightarrow{\eta}_5\overleftarrow{\eta}_5 i\overrightarrow{\gamma}^{1}\overrightarrow{\gamma}^{2}\overrightarrow{\gamma}^{3}\overrightarrow{\gamma}^{4}i\overleftarrow{\gamma}^{4}\overleftarrow{\gamma}^{3}\overleftarrow{\gamma}^{2}\overleftarrow{\gamma}^{1} = \omega\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}
\end{aligned}$$

Demonstração de (5.105)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega\overrightarrow{\alpha}^{(p)}_{\mu} &= \overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega\overrightarrow{\gamma}^{\mu} + i\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega\overrightarrow{\beta}^{(p)}_{\mu} = \overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\overrightarrow{\gamma}^{\mu}\omega - i\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\overrightarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}\omega\\
&= -\overrightarrow{\gamma}^{\mu}\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega - i\overrightarrow{\beta}^{(p)}_{\mu}\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega = -\overrightarrow{\alpha}^{(p)}_{\mu}\overrightarrow{\gamma}^{5}\overleftarrow{\gamma}^{5}\omega
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Transformadas de Wigner-Moyal

Nos procedimentos algébricos para determinar as equações de campo no espaço de fase generalizado, surgem algumas integrais importantes, cujas soluções são apresentadas a seguir.

Para uma integral dada como

$$\frac{1}{2\pi}\int \eta^a \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\phi\, e^{-iP_a\eta^a}d^4\eta = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\int \eta^a\phi\, e^{-iP_a\eta^a}d^4\eta \tag{D.19}$$

é possível resolvê-la considerando que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial}{\partial P_a}\left(\phi\, e^{-iP_a\eta^a}\right)d^4\eta &= \int\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial P_a}\right)e^{-iP_a\eta^a} + \phi\frac{\partial}{\partial P_a}(e^{-iP_a\eta^a})\right]d^4\eta\\
&= \int\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial P_a}\right)e^{-iP_a\eta^a} - i\eta^a\phi\, e^{-iP_a\eta^a}\right]d^4\eta\\
&= -i\int \eta^a\phi\, e^{-iP_a\eta^a}d^4\eta
\end{aligned} \tag{D.20}$$

onde, para $\phi = \phi(x'^{\mu}, x^{\mu}) = \phi(X^{\mu}, \eta^{\mu}) \Rightarrow \partial_{P_a}\phi = 0$. Como P_a e η^a são variáveis independentes, então,

$$i\frac{\partial}{\partial P_a}\int \phi\, e^{-iP_a\eta^a} d^4\eta = \int \eta^a \phi\, e^{-iP_a\eta^a} d^4\eta = i\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a} \quad . \tag{D.21}$$

Assim, substituindo em (D.22) no segundo membro, tem-se:

$$\frac{1}{2\pi}\int \eta^a \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\phi\, e^{-iP_a\eta^a} d^4\eta = i\frac{1}{2\pi}\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial}{\partial P_a}\int \phi\, e^{-iP_a\eta^a} d^4\eta = i\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a} \tag{D.22}$$

Logo, a partir dos resultados (5.31), (5.32), (D.21) e (D.22), ficam estabelecidas as seguintes transformadas de Wigner-Moyal,

$$\begin{aligned}
\phi &\longrightarrow \mathcal{F} \\
\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} &\longrightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\mu} \\
\frac{\partial \phi}{\partial \eta^\mu} &\longrightarrow iP_\mu \mathcal{F} \\
\eta^a \phi &\longrightarrow i\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a} \\
\eta^a \frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\phi &\longrightarrow i\frac{\partial A_\mu}{\partial X^a}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_a}
\end{aligned} \tag{D.23}$$